

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ
MUHAKEME HATALARININ İSPATLAMA BAĞLAMINDA
İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Enes DEMİR

TRABZON
Haziran, 2017

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ
MUHAKEME HATALARININ İSPATLAMA BAĞLAMINDA
İNCELENMESİ

Enes DEMİR

Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'nce Doktora Unvanı
Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

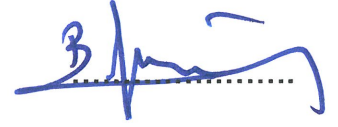
Tezin Danışmanı
Prof. Dr. Bülent GÜVEN

TRABZON
Haziran, 2017

KTÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı'nda DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir. 22 / 06 / 2017

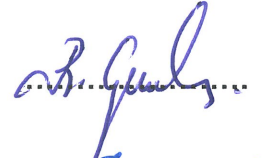
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Bülent GÜVEN



Üye : Prof. Dr. Adnan BAKİ



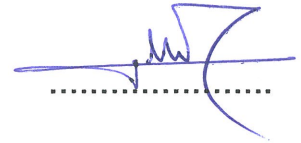
Üye : Prof. Dr. Ramazan GÜRBÜZ



Üye : Doç. Dr. Derya ÇELİK



Üye : Doç. Dr. Fatih KARAKUŞ



Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Nevzat YİĞİT
Enstitü Müdür V.

BİLDİRİM

Tezimin içerdđi yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadđımı ve bu tezi KTÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsünden başka bir bilim kuruluşuna akademik gaye ve unvan almak amacıyla vermediğimi; tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldđını, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ediyorum.

Enes DEMİR

22 / 06 / 2017

ÖN SÖZ

Çocukluğumdan beri duyduğum Hz. Ali'nin "Bana bir harf öğretenin 40 yıl kölesi olurum" sözünün hikmetini tam anlamıyordum. Ancak eğitim öğretim hayatımın basamaklarını birer birer çıkarken bu sözün anlamı toprak içindeki elmas gibi parlamaya başladı. İlköğretim, ortaöğretim, lisans, doktora eğitimim boyunca çok kıymetli öğretmenlerimden o kadar değerli emekler gördüm ki kelimelerle ifade etmekten acizim. Hepsine sonsuz şükranlarımı sunarım... Eğitim hayatımın deryasında rotasız bir gemi gibi sallanıp dururken öğretmenlerim o uçsuz bucaksız okyanusta birer deniz feneri, birer liman olup doğru bir istikamette kalmamı sağladılar. İşte bu yolculuğun en nihayetinde GÜVEN'li bir limana ulaşmak nasip oldu çok şükür. Doktora eğitimime başlarken beni öğrencisi olarak kabul edip tez danışmanlığımı üstlenerek beni onurlandıran, engin bilgi ve deneyiminden her an yararlandığım, uyarıları ve yol göstericiliği ile ufkumu açan ve bu tezin yazılmasında en büyük paya sahip olan değerli hocam Prof. Dr. Bülent GÜVEN'e teşekkürü borç bilip en samimi duygularıyla şükranlarımı sunarım.

Matematik eğitimine sayısız katkılarıyla her kesimden saygı duyulan ve örnek alınan, öğrencisi olmaktan büyük gurur duyduğum, gerek seminerlerde, gerekse derslerinde doktora eğitimim süresince ilminden yararlandığım, biz öğrencilerine farklı bir bakış açısı kazandıran saygıdeğer hocam Prof. Dr. Adnan BAKI'ye teşekkürü bir borç bilir, saygı ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmamın şekillenmesinde yapıcı görüş ve önerileriyle katkı sağlayan ve bu uzun süreçte desteğini hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Derya ÇELİK'e saygılarımı sunar teşekkür ederim. Gerek ders döneminde gerek tez aşamasında her an danıştığım, bunaldığım anlarda, çözemediğim problemlerde koşabildiğim en yakın adres, bilge kişiliğiyle, farklı yaklaşımları ile ve isabetli çözümleri ile ufkumu açan, tezimin verilerini doğrulamada yardımcı olan ve daha sayamayacağım kadar desteğini her zaman gördüğüm saygıdeğer meslektaşım Dr. Tuğba ÖZTÜRK'e saygı ve şükranlarımı sunarım.

Hem pilot çalışmada, hem asıl çalışmada bana yardımcı olan, kıymetli zamanlarını ayırarak derslerinde uygulama yapmamı sağlayan ve uygulama esnasında eşlik edip güvenilir ve geçerli veriler toplamamda katkısı olan değerli hocalarımdan hepsine ayrı ayrı teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu süreçte hep yanımda olan maddi ve manevi desteğini hiç esirgemeyen sevgili arkadaşım Bayram KARABAL'a teşekkür ederim.

Moreover, I would like to express my special appreciation and thanks to Prof. Dr. Annie SELDEN and Prof. Dr. John SELDEN from New Mexico State University, for

supporting me durring these long process and let me conduct a part of my research with them at their university for one semester.

Dualarıyla, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan, bana güvenen, uzaklarda da olsa her an sevgilerinin, şefkatlerinin sıcaklığını, tazeliğini hissettiğim sevgili annem Zinnet Demir'e ikinci annem Saadet YUR'e, babam Mehmet DEMİR'e ve kardeşlerimin hepsine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak bana bu muvaffakiyeti nasip eden rabbime hadsiz şükürler olsun. Tezimi şehadet mertebesiyle ailemizi şereflendiren ağabeyim Şehit Taha DEMİR'e ithaf ederim...

Haziran, 2017

Enes DEMİR



İÇİNDEKİLER

ÖN SÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER.....	vi
ÖZET	xi
ABSTRACT	xiii
TABLolar LİSTESİ.....	xv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xvii
GRAFİKLER LİSTESİ	xx
KISALTMALAR LİSTESİ.....	xxii
1. GİRİŞ.....	1
1. 1. Araştırmanın Amacı.....	5
1. 2. Araştırmanın Gerekçesi ve Önemi.....	7
1. 3. Araştırmanın Sınırlılıkları	13
1. 4. Araştırmanın Varsayımları	14
1. 5. Tanımlar	14
2. LİTERATÜR TARAMASI.....	16
2. 1. Araştırmanın Kuramsal Çerçevesi	16
2. 1. 1. Araştırmada Yer Alan Kavramlar	16
2. 1. 1. 1. İspat ve İspat Süreci.....	16
2. 1. 1. 2. Muhakeme	17
2. 1. 1. 3. İspat Sürecinde Muhakeme Hataları ve Yaşanan Zorluklar	19
2. 1. 2. Konu ile İlgili Yapılan Çalışmalar	25
2. 1. 2. 1. Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile İlgili Yapılan Çalışmalar	25
2. 2. Literatür Taramasının Sonucu	30
3. YÖNTEM	33
3. 1. Araştırmanın Modeli	33
3. 2. Araştırmanın Tasarımı ve Yürütülmesi	33
3. 3. Pilot Çalışma	37
3. 4. Katılımcılar	38

3. 5. Veri Toplama Araçları	39
3. 5. 1. Gözlem	41
3. 5. 1. 2. Gözlem Formunun Oluşturulması	42
3. 5. 2. Muhakeme Hatalarını Belirlemeye Yönelik Hazırlanan Açık Uçlu Sınavlar	44
3. 5. 3. Klinik Mülakatlar	48
3. 6. Veri Analizi	49
3. 6. 1. Muhakeme Hataları Belirleme Testleri ile Elde Edilen Verilerin Analizi	49
3. 6. 2. Ders Gözlemleri ile Elde Edilen Verilerin Analizi	52
3. 6. 3. Klinik Mülakatlar ile Elde Edilen Verilerin Analizi	53
3. 6. 4. Alan Notları İle Elde Edilen Verilerin Analizi	54
4. BULGULAR	55
4. 1. Ders Gözlemlerinin Öncesinde Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular	55
4. 1. 1. Ders Gözlemlerinin Öncesinde Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları ile ilgili Bulgular	58
4. 1. 2. Ders Gözlemlerinin Öncesinde Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Eksiklikleri ile ilgili Bulgular	72
4. 1. 3. Ders Gözlemlerinin Öncesinde Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular	83
4. 2. Matematik Öğretmenliği Programında Güz Döneminde Yürütülen Bazı Derslerde Yer Verilen Sınıf İçi Uygulamalarının Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları Açısından Değerlendirilmesi	93
4. 2. 1. Güz Dönemi Ders Gözlemlerinin Matematik Dili ve Sistematikleştirme Açısından Değerlendirilmesi	95
4. 2. 2. Güz Dönemi Ders Gözlemlerinin Öğrenci Muhakemesine Odaklanma Açısından Değerlendirilmesi	104
4. 2. 3. Güz Dönemi Ders Gözlemlerinin İspat Yöntemleri Açısından Değerlendirilmesi	124
4. 3. Güz Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular	129

4. 3. 1. Güz Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 1. Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular	132
4. 3. 2. Güz Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 2. Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular	148
4. 3. 3. Güz Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 3.Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular	162
4. 3. 4. Güz Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 4.Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular	174
4. 3. 5. Güz Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 5. Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular	184
4. 4. Matematik Öğretmenliği Programında Bahar Döneminde Yürütülen Derslerin İspat Sürecinde Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları Açısından Değerlendirilmesi	195
4. 4. 1. Bahar Dönemi Ders Gözlemlerinin Matematik Dili ve Sistemikleştirme Açısından Değerlendirilmesi	199
4. 4. 2. Bahar Dönemi Ders Gözlemlerinin Öğrenci Muhakemesine Odaklanma Açısından Değerlendirilmesi	202
4. 3. 1. Bahar Dönemi Ders Gözlemlerinin İspat Yöntemleri Açısından Değerlendirilmesi.....	207
4. 5. Bahar Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular	209
4. 5. 1. Bahar Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 1.Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular	214
4. 5. 2. Bahar Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 2.Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular	218
4. 5. 3. Bahar Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 3.Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular	222

4. 5. 4. Bahar Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 4.Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular	226
4. 5. 5. Bahar Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 5.Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular	230
5. TARTIŞMA	235
5. 1. Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Sürecinde Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşluklarına İlişkin Bulguların Tartışılması.....	235
5. 1. 1. Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Sürecinde Sahip Oldukları Muhakeme Hatalarına İlişkin Bulguların Tartışılması ...	236
5. 1. 2. Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Sürecinde Sahip Oldukları Muhakeme Eksikliklerine İlişkin Bulguların Tartışılması	244
5. 1. 3. Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Sürecinde Sahip Oldukları Muhakeme Boşluklarına İlişkin Bulguların Tartışılması	250
5. 1. 4. Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Muhakeme Hataları ile Soru Yapıları Arasındaki İlişkiye Yönelik Tartışma	251
5. 2. İspata Yönelik Derslerde Yer Verilen Sınıf İçi Uygulamalarının Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları Bağlamında Tartışılması.....	253
5. 2. 1. İspata Yönelik Güz ve Bahar Dönemi Derslerinde Yer Verilen Sınıf İçi Uygulamalarının Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları Bağlamında Tartışılması.....	253
5. 2. 1. 1. Derslerde Yer Verilen Sınıf İçi Uygulamalarının Öğrenci Muhakemesine Odaklama Açısından Tartışılması	254
5. 2. 1. 2. Derslerde Yer Verilen Sınıf İçi Uygulamalarının Matematik Dili ve Sistemikleştirme Açısından Tartışılması.....	256
5. 2. 1. 3. Derslerde Yer Verilen Sınıf İçi Uygulamalarının İspat Yöntemleri Açısından Tartışılması	259
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	261
6. 1. Sonuçlar.....	261

6. 1. 1. Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Sürecinde Sonuç ile Başlama, Özel Bir Durumdan Elde Edilen Sonucun İspat Olarak Kabul Edilmesi, Yanlış Varsayımlarla Başlama Gibi Muhakeme Hatalarına Sıklıkla Düştüğü Belirlenmiştir.	261
6. 1. 2. Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Sürecinde Yöntemsel Eksiklik, İlgili Matematiksel İfadesinin Tanım Aralığını Dikkate Almama, Matematik Dilini Kullanmada Yetersizlik, Tek Yönlü İnceleme Gibi Muhakeme Eksikliklerine Sıklıkla Düştüğü Belirlenmiştir.....	263
6. 1. 3. Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Sürecinde Yazılan İspat Adımları ile Elde Edilen Sonucun Uyuşmaması ve Kullanılan Önergelerin Gereçeklerinin Sunulmaması Gibi Muhakeme Boşluklarına Sıklıkla Düştüğü Belirlenmiştir.	264
6. 1. 4. Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Sürecinde Sahip Oldukları Sonuç ile Başlama, Teoremin Karşıt Tersinin Kendisinin Mantıksal Dengi Olduğunun Farkına Varılamaması Gibi Muhakeme Hataları Direnç Gösterirken Önemli Bir Kısımının ise Azaldığı Görülmüştür.....	264
6. 1. 5. İspat Sürecinde Tanım Aralığını Dikkate Almama, Tek Yönlü İnceleme, İspat Yapmada Sistematiğin Olmaması Gibi Muhakeme Eksiklikleri Direnç Göstermiş Önemli Bir Kısmı İse Azalmıştır.	265
6. 1. 6. İspatların Yoğun Olarak İşlendiği Derslerin Her Birinde Matematik Dili ve Sistematiğe, Öğrenci Muhakemesine Odaklama, İspat Yöntemleri Boyutları Ön Plana Çıkarken Bu Boyutların Yoğunlukları Açısından Bir Farklılaşma Görülmüştür.	266
6. 2. Öneriler	269
6. 2. 1. Araştırma Sonuçlarına Dayalı Öneriler	269
6. 2. 2. İleride Yapılabilecek Araştırmalara Yönelik Öneriler.....	272
7. KAYNAKLAR	273
8. EKLER	281
9. ÖZ GEÇMİŞ VE İLETİŞİM BİLGİLERİ.....	290

ÖZET

Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Muhakeme Hatalarının İspatlama Bağlamında İncelenmesi

Matematiksel ispat; matematikteki tanım, aksiyom, teorem, sembol, simge gibi soyut kavramların anlam kazanması; matematiğin temel bileşenlerinin birbirleriyle olan ilişkilerinin açıklığa kavuşmasını sağlayan en önemli yapıdır. Bu bakımından ispat matematiksel bir sonucun doğruluğunu gösterme ya da basit bir matematiksel işlemde ziyade ilişkilendirme, soyutlama, sezgi, genelleme ve muhakeme gibi yoğun zihinsel faaliyetleri içeren bir süreçtir. Muhakeme; ispat sürecinde keşfetme, stratejiler geliştirme, varsayımda bulunma gibi becerilerinin kullanılmasını sağlayan bir araçtır. Bu nedenle matematiğin merkezinde yer alan ispat ve muhakeme birçok araştırmacı tarafından bir bütün olarak ele alınmaktadır. Matematiksel muhakeme bireylerin ulaştıkları sonuçlarda tutarlı ve mantıksal karar vermelerini sağlar ve en fazla ispat sürecinde kullanılır. Doğru bir ispat anlayışının gelişimi ancak bireylerin çeşitli mantıksal düşünme yollarını kazanmasına bağlı olarak gerçekleşir. Öğrenciler ispat sürecinde muhakemeler yürüterek bazı stratejiler geliştirirler. Ancak bazen bu stratejiler sonucunda sistematik bir yanılgıya düşerek geçersiz ispatlar oluştururlar. Bu yanılgılar muhakeme hatası olarak nitelendirilmektedir. Özellikle lisans düzeyinde matematik öğretmeni adayları matematiğin soyut ve aksiyomatik yapısıyla karşılaştıklarından matematiksel kavramlar, kavramlar arası ilişkileri, tanım ve teoremleri anlama, bunları yorumlayarak ispat oluşturmada ve doğru muhakemeler yürütmede çeşitli zorluklar yaşamaktadır. İspat sürecinde öğrencilerin doğru bir muhakeme geliştirmeleri, matematiksel ilişkileri anlama bakımından önemlidir. Bunun için bu süreçte öğrencilerin sahip olduğu hatalı muhakemelerinin belirlenmesi ve üniversite eğitimi boyunca bu hatalarının gelişimsel olarak nasıl değiştiğinin incelenmesine yönelik çalışmaların yapılması önemlidir. Bunun yanı sıra lisans düzeyinde ispatların yoğun olarak işlendiği ve doğru muhakemelerin geliştirmesinde kilit bir rol oynayan derslerde ispat sürecinde muhakemeye odaklanan noktalarının neler olduğunun belirlenmesi, bu süreçte ileriye sürülen muhakeme hatalarının analiz edilmesi önemlidir.

Bu çalışma ile ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarını belirleme, üniversite eğitimleri boyunca bu hatalarının gelişimsel olarak nasıl değiştiğini inceleme ve bu süreçte aldıkları bazı derslerin; matematiksel muhakemelerini geliştirme, uygun stratejiler belirleme ve muhakeme hatalarının üzerindeki rolünün ne ölçüde olduğunu

derinlemesine analiz etme amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda farklı sınıf seviyelerinde (1, 2, 3, 4 ve 5. sınıf) yer alan matematik öğretmeni adaylarının lisan eğitimleri boyunca muhakemelerinin nasıl bir değişim gösterdiğini belirleyebilmek için enlemsel bir gelişimsel araştırma tasarlanmıştır. Araştırmanın verileri; muhakeme hataları belirleme testleri, klinik ve yarı yapılandırılmış mülakatlar, ders gözlemleri, alan notları ve ispat sürecinde alınan ses-video kayıtları aracılığıyla elde edilmiştir. Çalışmada gözlemler sonucunda elde edilen veriler, geliştirilen gözlem formu ile analiz edilmiştir. Muhakeme hataları belirleme testleri ve klinik mülakatlardan elde edilen verileri analiz etmek için geliştirilen muhakeme hataları belirleme ölçeği kullanılmıştır.

Araştırmanın sonucunda farklı sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde benzer muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarına sahip oldukları belirlenmiştir. Bununla birlikte muhakeme hataları, eksiklikleri ya da boşlukların yoğunluk bakımından sınıf seviyelerine göre dikkate değer bir oranda değişim göstermiştir. İspat sürecinde özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi, yanlış varsayımlarla başlama gibi muhakeme hataları; matematik dilini kullanmada yetersizlik, ispata başlayamama veya başlanan bir ispatı devam ettirememe gibi muhakeme eksiklikleri; yazılan ispat adımları ile elde edilen sonucun uyuşmaması, kullanılan önermelerin gerekçelerinin sunulmaması gibi muhakeme boşluklarının üst sınıflara doğru önemli ölçüde azaldığı görülmüştür. Buna karşın sonuç ile başlama, ilgili matematiksel ifadesinin tanım aralığını dikkate almama, teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması gibi hata, eksik veya boşluklarının direnç gösterdiği görülmüştür. Ayrıca ispatların yoğun olarak işlendiği farklı derslerde muhakeme veya muhakeme hataları ile ilgili odaklanılan bileşen ve göstergeler matematik dili ve sistematikleştirme, öğrenci muhakemesine odaklama ve ispat yöntemleri boyutlarında farklılaşmıştır. Araştırmadan elde edilen sonuçlar doğrultusunda lisans düzeyinde ispatların yoğun olarak işlendiği derslerde öğretmen adaylarının doğru muhakemeler geliştirmeleri için öğretim elemanlarının nelere dikkat etmeleri gerektiği yönünde önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: İspat, Muhakeme, Muhakeme Hataları, Matematik Öğretmeni Adayı.

ABSTRACT

Investigation of Pre-Service Secondary Mathematics Teachers' Reasoning Errors Reasoning Deficiencies and Reasoning Gaps within the Context of Proof

Mathematical proof is the most important, component that enables the abstract terms in mathematics like definition, axiom, theorem, symbol, sign to have a meaning and the relationships of mathematics' main components between each other to reveal. In this regard, proof, rather than showing the validity of a mathematical result or being a basic mathematical operation, is a process that includes intensive cognitive operations like association, abstraction, anticipation, generalisation and reasoning. Reasoning, is a tool that enables abilities like discovering, developing strategies and making hypotheses to be used during proof process. Therefore proof and reasoning which are in the center of mathematics are handled as a whole by lots of researchers. Mathematical reasoning enables the individuals to make consistent and reasonable decisions on the results they obtained and it is employed in the proof process most. The development of a proper proof understanding occurs only when individuals gain various mental thinking ways. The students develop some strategies through making reasonings in the proof process. But sometimes they generate invalid proofs after falling into a systematic error as a result of these strategies. These errors are called as reasoning errors. Especially the pre-service mathematics teachers at the undergraduate level, because they meet with the abstract and axiomatic side of the mathematics, have difficulties in comprehending the mathematical concepts, the relationships between the concepts, definitions and theorems, in generating proofs through interpreting those and in making right reasonings. That the students develop right reasoning in proof process is significant in terms of understanding mathematical relations. Therefore in this process determining the students's wrong reasonings and conducting studies aimed at investigating how these errors developmentally altered during their university education is important. Moreover detecting the points focusing on reasoning during proof process in the courses where proofs are taught intensively at the undergraduate level and that have critical roles in developing right reasonings and analyzing the reasoning errors made during this process are also important.

This study aims to determine the pre-service high school mathematics teachers' reasoning errors, reasoning deficiencies and reasoning gaps in proof process, to investigate how these errors alter developmentally during their university education and to

analyze deeply to what extent do the some courses attended by the students during this process effect developing mathematical reasoning, determining appropriate strategies and reasoning errors. In line with this purpose, a *developmental research* was designed to determine how reasonings of the pre-service mathematics teachers at different grade levels (1., 2., 3., 4. and 5. grade) changed during their university education. The data was collected through tests for determining reasoning errors, clinical and semi-structured interviews, course observations, fieldnotes and audio-video recordings obtained during proof process. The data obtained through observations was analyzed with the aid of a observation form. For analyzing the data from the tests for determining reasoning errors and from clinical interviews, the reasoning errors determination scale was employed.

In consequence of the study it was found that the pre-service teachers at different grades have similar reasoning errors, reasoning defficiencies and reasoning gaps in proof process. Besides, reasoning errors, deficiencies or gaps showed significant alteration in terms of frequency according to the grade levels. Reasoning errors like considering a result obtained from a special case as a proof and starting with wrong assumptions, reasoning defficiencies like inability in using mathematical language, failure in starting proof or in continuing a already started one, reasoning gaps like conflict between the written proof steps and the obtained result, not stating the justifications for the utilized suggestions were seen to decrease towards higher grades significantly. On the other hand reasoning errors, deficiencies or gaps like starting with the result, ignoring the definition range of the related mathematical statement, not recognizing that the *Contrapositive* of a theorem is its *equivalent* were observed to resist. Moreover, at the courses where proofs are taught intensively, components and indicators focused on reasoning and reasoning errors differentiated at the dimensions of mathematical language and systematization, focusing on student reasoning and proofing techniques. In accordance with the results obtained from the study, some recommedations on what the lecturers should pay attention to for enabling the pre-service teachers to develop right reasonings in the courses where proofs are taught intensively at the undergraduate level are given.

Keywords: Proof, Reasoning, Reasoning Errors, Pre-Service Mathematics Teachers.

TABLolar LİSTESİ

<u>Tablo No</u>	<u>Tablo Adı</u>	<u>Sayfa No</u>
1.	Pilot Uygulamada Gözlemi Yapılan Dersler ve Gözlem Saatleri	37
2.	Araştırmanın Katılımcılarını Oluşturan Sınıflar ve Öğrenci Sayıları.....	39
3.	Veri Toplama Araçları ve Veri Kaynakları ile İlgili Genel Bilgiler	40
4.	Asıl Uygulamada Gözlemi Yapılan Dersler ve Gözlem Saatleri	41
5.	Öğretmen Adaylarının İspat Süreçlerini İzlemeye Yönelik Oluşturulan Gözlem Formu	43
6.	Muhakeme Hatalarını Belirlemeye Yönelik Hazırlanan Açık Uçlu Sınavların Oluşturma ve Uygulama Süreci.....	44
7.	MHBT1’de Öngörülen Muhakeme Hataları, Muhakeme Boşlukları ve Muhakeme Eksiklikleri	45
8.	MHBT2’de Öngörülen Muhakeme Hataları, Muhakeme Boşlukları ve Muhakeme Eksiklikleri	46
9.	MHBT3’de Öngörülen Muhakeme Hataları, Muhakeme Boşlukları ve Muhakeme Eksiklikleri	47
10.	Muhakeme Hatalarını Belirleme Ölçeği ve Örnek Analizler	50
11.	Muhakeme Hataları Belirleme Testi 1’de Yer Alan İspatlar İçin Yapılan MH, ME ve MB’ nin Yer Aldığı Kategorilere Yönelik Frekans ve Yüzde Dağılımları	56
12.	Muhakeme Hataları Belirleme Testi 1’de Yer Alan İspatlar İçin Yapılan Muhakeme Hatalarının Frekans ve Yüzde Dağılımları	59
13.	Muhakeme Hataları Belirleme Testi 1’de Yer Alan İspatlar İçin Yapılan Muhakeme Eksikliklerinin Frekans ve Yüzde Dağılımları	73
14.	Muhakeme Hataları Belirleme Testi 1’de Yer Alan İspatlar İçin Yapılan Muhakeme Boşluklarının Frekans ve Yüzde Dağılımları	84
15.	Güz Döneminde Yürütülen Derslerinin Gözlem Formunda Yer Alan Matematik Dili ve Sistematikleştirme, Öğrenci Muhakemesine Odaklanma ve İspat Yöntemlerinin Yer Aldığı Kategorilere Yönelik Frekans ve Yüzde Dağılımları.....	94
16.	Muhakeme Hataları Belirleme Testi 2’de Yer Alan İspatlar İçin Yapılan Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve	

	Muhakeme Boşluklarının Yer Aldığı Kategorilere Yönelik Frekans ve Yüzde Dağılımları	130
17.	Ders Gözlemleri Sonrası Muhakeme Süreci Boyutu Kategorilerine Göre Değerlendirilmesi ile İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımı	132
18.	Ders Gözlemleri Sonrası Muhakeme Süreci Boyutu Kategorilerine Göre Değerlendirilmesi ile İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımı	149
19.	Ders Gözlemleri Sonrası Muhakeme Süreci Boyutu Kategorilerine Göre Değerlendirilmesi ile İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımı	162
20.	Ders Gözlemleri Sonrası Muhakeme Süreci Boyutu Kategorilerine Göre Değerlendirilmesi ile İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımı	174
21.	Ders Gözlemleri Sonrası Muhakeme Süreci Boyutu Kategorilerine Göre Değerlendirilmesi ile İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımı	184
22.	Bahar Döneminde Yürütülen Derslerinin Gözlem Formunda Yer Alan Matematik Dili ve sistematikleştirme, Öğrenci Muhakemesine Odaklanma ve İspat Yöntemlerinin Yer Aldığı Kategorilere Yönelik Frekans ve Yüzde Dağılımları.....	197
23.	Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşluklarının Hangi Kategoride Yer Aldığı ve Bu Kategoriler İle İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımları	211

ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil No</u>	<u>Şekil Adı</u>	<u>Sayfa No</u>
1.	Muhakeme hataları belirleme ölçeği.....	23
2.	Araştırma boyunca izlenen adımlar	36
3.	MH1 göstergesine yönelik ispat örneği.....	60
4.	MH1 göstergesine yönelik ispat örneği.....	61
5.	MH7 göstergesine yönelik ispat örneği.....	62
6.	MH7 göstergesine yönelik ispat örneği.....	63
7.	MH7 göstergesine yönelik ispat örneği.....	64
8.	MH2 göstergesine yönelik ispat örneği.....	64
9.	MH2 göstergesine yönelik ispat örneği.....	65
10.	MH2 göstergesine yönelik ispat örneği.....	66
11.	MH6 göstergesine yönelik ispat örneği.....	67
12.	MH6 göstergesine yönelik ispat örneği.....	67
13.	MH6 göstergesine yönelik ispat örneği.....	68
14.	MH3 göstergesine yönelik ispat örneği.....	69
15.	MH3 göstergesine yönelik ispat örneği.....	70
16.	MH4 göstergesine yönelik ispat örneği.....	71
17.	MH5 göstergesine yönelik ispat örneği.....	71
18.	MH5 göstergesine yönelik ispat örneği.....	72
19.	ME2 göstergesine yönelik ispat örneği.....	74
20.	ME2 göstergesine yönelik ispat örneği.....	75
21.	ME3 göstergesine yönelik ispat örneği.....	76
22.	ME3 göstergesine yönelik ispat örneği.....	77
23.	ME8 göstergesine yönelik ispat örneği.....	78
24.	ME6 göstergesine yönelik ispat örneği.....	79

25.	ME6 göstergesine yönelik ispat örneği.....	80
26.	ME4 göstergesine yönelik ispat örneği.....	80
27.	ME4 göstergesine yönelik ispat örneği.....	81
28.	ME1 göstergesine yönelik ispat örneği.....	81
29.	ME7 göstergesine yönelik ispat örneği.....	82
30.	ME7 göstergesine yönelik ispat örneği.....	83
31.	MB2 göstergesine yönelik ispat örneği.....	85
32.	MB2 göstergesine yönelik ispat örneği.....	86
33.	MB2 göstergesine yönelik ispat örneği.....	87
34.	MB2 göstergesine yönelik ispat örneği.....	87
35.	MB2 göstergesine yönelik ispat örneği.....	88
36.	MB2 göstergesine yönelik ispat örneği.....	88
37.	MB1 göstergesine yönelik ispat örneği.....	89
38.	MB1 göstergesine yönelik ispat örneği.....	90
39.	MH1 göstergesine yönelik ispat örneği.....	137
40.	MH2 göstergesine yönelik ispat örneği.....	138
41.	MH6 göstergesine yönelik ispat örneği.....	139
42.	MH7 göstergesine yönelik ispat örneği.....	140
43.	ME1 göstergesine yönelik ispat örneği.....	142
44.	ME2 göstergesine yönelik ispat örneği.....	143
45.	ME3 göstergesine yönelik ispat örneği.....	144
46.	ME6 göstergesine yönelik ispat örneği.....	144
47.	ME8 göstergesine yönelik ispat örneği.....	145
48.	MB1 göstergesine yönelik ispat örneği.....	147
49.	MB2 göstergesine yönelik ispat örneği.....	148
50.	MH1 göstergesine yönelik ispat örneği.....	154
51.	MH2 göstergesine yönelik ispat örneği.....	155
52.	MH6 göstergesine yönelik ispat örneği.....	156

53.	MH7 göstergesine yönelik ispat örneği.....	157
54.	ME3 göstergesine yönelik ispat örneği.....	159
55.	ME6 göstergesine yönelik ispat örneği.....	160
56.	MB1 göstergesine yönelik ispat örneği.....	161
57.	MB2 göstergesine yönelik ispat örneği.....	162
58.	MH1 göstergesine yönelik ispat örneği.....	168
59.	MH2 göstergesine yönelik ispat örneği.....	169
60.	ME6 göstergesine yönelik ispat örneği.....	171
61.	ME8 göstergesine yönelik ispat örneği.....	172
62.	MH1 göstergesine yönelik ispat örneği.....	180
63.	MH3 göstergesine yönelik ispat örneği.....	181
64.	ME4 göstergesine yönelik ispat örneği.....	183
65.	MH5 göstergesine yönelik ispat örneği.....	190
66.	MH4 göstergesine yönelik ispat örneği.....	191
67.	ME6 göstergesine yönelik ispat örneği.....	193

GRAFİKLER LİSTESİ

<u>Grafik No</u>	<u>Grafik Adı</u>	<u>Sayfa No</u>
1.	Gözlem öncesinde öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikler ve muhakeme boşluklarının karşılaştırılması	91
2.	Güz dönemi ders gözlemlerinin matematik dili ve sistematikleştirme bağlamında karşılaştırılması	104
3.	Güz dönemi ders gözlemlerinin öğrenci muhakemesine odaklama bağlamında karşılaştırılması	124
4.	Güz dönemi ders gözlemlerinin ispat yöntemleri bağlamında karşılaştırılması	128
5.	Ders gözlemleri öncesinde ve sonrasında 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması	136
6.	Ders gözlemleri öncesinde ve sonrasında 2. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması	153
7.	Ders gözlemleri öncesinde ve sonrasında 3. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması	167
8.	Ders gözlemleri öncesinde ve sonrasında 4. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması	178
9.	Ders gözlemleri öncesinde ve sonrasında 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması	189
10.	Gözlem öncesinde öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikler ve muhakeme boşluklarının karşılaştırılması	195
11.	Bahar dönemi ders gözlemlerinin matematik dili ve sistematikleştirme bağlamında karşılaştırılması	202
12.	Bahar dönemi ders gözlemlerinin öğrenci muhakemesine odaklama bağlamında karşılaştırılması	206

13.	Bahar dönemi ders gözlemlerinin ispat yöntemleri bağlamında karşılaştırılması.....	209
14.	Bahar dönemi ders gözlemleri sonrası öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikler ve muhakeme boşluklarının karşılaştırılması	213
15.	Güz dönemi ders gözlemleri öncesi, güz dönemi ders gözlemleri sonrası ve bahar dönemi ders gözlemleri sonrasında 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması	215
16.	Güz dönemi ders gözlemleri öncesi, güz dönemi ders gözlemleri sonrası ve bahar dönemi ders gözlemleri sonrasında 2. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması	218
17.	Güz dönemi ders gözlemleri öncesi, güz dönemi ders gözlemleri sonrası ve bahar dönemi ders gözlemleri sonrasında 3. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması	222
18.	Güz dönemi ders gözlemleri öncesi, güz dönemi ders gözlemleri sonrası ve bahar dönemi ders gözlemleri sonrasında 4. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması	226
19.	Güz dönemi ders gözlemleri öncesi, güz dönemi ders gözlemleri sonrası ve bahar dönemi ders gözlemleri sonrasında 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması	231

KISALTMALAR LİSTESİ

- NCTM** : National Council of Teachers of Mathematics
MEB : Milli Eğitim Bakanlığı
MH : Muhakeme Hatası
ME : Muhakeme Eksiği
MB : Muhakeme Boşluğu
MHBT : Muhakeme Hataları Belirleme Testleri



1. GİRİŞ

İspat kavramı, her ne kadar Antik Yunan döneminden itibaren matematik alanında sistemli olarak yer almaya başlasa da; aslında ispat insanlık tarihi ile birlikte başlamaktadır. Çünkü insan doğası gereği bir şeyin, bir ifadenin doğruluğunu görme veya kafasındaki şüpheleri giderme ihtiyacı hissetmektedir. Bu ihtiyaç da neden, niçin sorularına ikna edici cevaplar aranmasına yol açmaktadır. Başka bir deyişle insanoğlu doğru bildiği ya da inandığı düşünce ve bilgileri başkalarına anlatma eğilimindedir. Bu eğilimleri gösterirken düşüncelerine gerekçeler oluşturma, başkalarını ikna etme ve bu düşüncelerinin doğruluğunu onlara kabul ettirme ya da onaylatma ihtiyacını duyar. İnsanlar bu ihtiyaçlarını giderebilmek için bazen toplum içinde tanık gösterme, kaynaklara başvurma gibi argümanlardan yararlanırken bilimde ise bu durum daha sistematik olarak gerçekleşmektedir. Örneğin fen bilimlerinde ikna etme yöntemi olarak deney ve gözleme başvurulurken tarih, sosyoloji gibi beşeri bilimlerde yazılı belgeler, görsel dokümanlar, tanık gösterme gibi araçlara başvurulur. Matematikte ise, aksiyomatik yapısından dolayı, insanları ikna etme eğilimi benzer örneklerden hareketle genellemelere ulaşarak kendi içinde tutarlı sistemler oluşturmaktır. Başka bir ifade ile tanım, aksiyom ve teoremler kullanarak matematiksel bir önermenin geçerliliğine ispat yoluyla ulaşmaktır. Dolayısıyla ispat bu özelliğiyle matematiğin temelini oluşturan en önemli yapılardan biridir. Araştırmacılar da ispat kavramını matematiğin kalbi olarak nitelendirerek (Hanna, 2000; Herbst ve Brach, 2006; Rav, 1999) bu durumu desteklemektedir. İspatın matematiksel bir ilişkinin veya bir hükmün doğru ya da yanlış olduğunu gösteren bir dayanak olması (Tall, 2006), bu niteliği ona kazandırmaktadır.

Matematiksel ispat, matematikteki tanım, aksiyom, teorem, sembol, simge gibi soyut kavramların anlam kazanması; matematiğin temel unsurlarının birbirleriyle olan ilişkilerinin açıklığa kavuşmasını sağlayan en önemli yapıdır. Dolayısıyla ispat, önermelerin birbiriyle olan ilişkilerinden mantıksal bir çıkarım elde etmeyi ya da çeşitli genellemelere ulaşmayı sağlamaktadır (Yıldırım, 2000). Bu bakımdan ispat matematiksel bir sonucun doğruluğunu göstermekten öte bu sonucun niçin doğru olduğunun mantıksal bir gösterimidir. Matematiksel kavramların birbirleri ile olan ilişkilerini fark etme, matematiksel düşünmenin gerçekleşmesi ve matematiksel kavramların anlam kazanması ispat kavramı ile doğrudan ilişkidir (Flores, 2002). Bu bakımdan ispat basit bir matematiksel işlemde ziyade zihinsel faaliyetleri içeren bir süreçtir (Selden ve Selden, 2003) ve ispat süreci, matematiksel düşüncenin gelişmesine ve değişmesine katkıda bulunan önemli bir yapıdır (Baki, 2008). Bu anlamda ispatlama süreci ilişkilendirme, soyutlama, genelleme gibi yoğun

muhakeme süreçlerini içermektedir. İspat sürecinde, muhakemenin güçlü bir araç olduğunu vurgulayan (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) matematiğin merkezinde yer alan ispatın farkına varılması, buna yönelik matematiksel varsayım ve çıkarımlarda bulunma ve bu çıkarımları değerlendirmede çeşitli muhakemeler geliştirilmesi gerektiğinden muhakeme ve ispat bir bütün olarak ele alınmalıdır (NCTM, 2000). Belirtilerek İspat sürecinde muhakemenin önemini vurgulamaktadır.

Muhakeme; literatürde birçok araştırmacı tarafından çeşitli anlamlar yüklenerek tanımlanmıştır. Genel olarak; yargılardan ya da önermelerden sonuç çıkarma, eldeki bilgilere dayanarak bir karar verme, akla mantığa yakın olup olmadığını inceleme, genellemeler yapma veya tahminlerde bulunma gibi geniş bir yelpazede ele alınmıştır. Başka bir deyişle bütün faktörler dikkate alınarak mantıklı bir sonuca ulaşma sürecidir. (The Mathematical Thinking Classroom Assessment Techniques [Math-CATs], 2007; Altıparmak ve Öziş, 2005; Fitzgerald, 1996). Muhakeme, bireyin mantıksal bir yargılama neticesinde ulaştığı sonuçlarda tutarlı olma duyarlılığının ölçüsüdür. Muhakeme bireylerin stratejileri seçme ve bu stratejilere göre çeşitli varsayımda bulunma, stratejilerinin etkililiğini analiz etme, gerektiğinde bunları değiştirmeyi içerir (Ridley, Schutz, Glanz ve Weinstein, 1992). Çoban(2010) muhakemeyi etrafıca düşünüp akıl ve mantığa uygun bir sonuca ulaşma süreci yani bireylerin bir durumu inceleyip durum hakkında akıl yürütme, mantıklı varsayımlarda bulunma ve düşüncelerini nedenleriyle açıklayarak bazı sonuçlara ulaşip ve bu sonuçları değerlendirme olarak ifade etmektedir. Birçok çalışmada benzer şekilde muhakemenin anlamı veya önemi vurgulanmıştır (Selden ve Selden, 2003, 2007, 2011; Stylianides ve Stylianides, 2009; Umay ve Kaff, 2005; Weber, 2001).

Üst düzey bir düşünme becerisi olan muhakeme, karmaşık bir süreçtir ve matematikte de önemli bir yere sahiptir. Matematiğin özünü muhakeme olarak belirtilen NCTM (2000) de "Matematik muhakeme etmedir" denilmiştir. Matematik, işlemsel becerilerin kullanılmasından ziyade üst düzey düşünmenin gerçekleştiği ve muhakemenin en çok kullanıldığı alanlardan biridir. Matematik doğası gereği sadece sayılar, işlemler, tanımlar, teoremler, cebir, geometri gibi konu ve kavramları öğretmekle kalmaz aynı zamanda bu konuları daha anlamlı hale getiren aralarındaki ilişkiyi keşfetmeyi, tahminlerde bulunmayı, gerekçeli düşünmeyi, bir sonuca ulaşmayı kısaca muhakemede bulunmayı da öğretir (Umay, 2007). Matematiği anlamlı kılan ve matematiği açıklayan matematiksel muhakemedir (Ev-Çimen, 2008). Matematiksel muhakeme ise herhangi bir konuda yapılan muhakemelerden çok farklı olmamakla birlikte daha üst düzeydeki argümanlara ihtiyaç duyulmaktadır (Selden ve Selden, 2003). Matematiğin kendisine özgü terim ve sembollerini yerinde ve doğru kullanma başka bir ifade ile matematik dilinin etkili kullanmada matematiksel muhakemenin önemi büyüktür. Bu durum, muhakemenin geniş

bir yelpazede ele alınıp incelenmesi, doğru bir muhakemenin nasıl geliştirilebileceğinin araştırılması, hatalı muhakemelerinin neler olduğu ve bu hatalı muhakemelerinin nelere yol açtığıнын belirlenmesinin araştırılmasının önemini ortaya koymaktadır.

İspat sürecinde bireyler çeşitli muhakemelerde bulunmaktadırlar. Matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken birey kendisine mantıklı gelen ve adım adım ilerlemesini sağlayan bu muhakemelerde bazen basit bir hatadan ziyade sistematik bir yanılığa düşmektedirler. Bu yanılığlar muhakeme hatası olarak nitelendirilebilir. Bireyler bu tür hatalarda ısrarcı olabilmektedirler. Çünkü bunların hata olduğunun farkına varamamaktadırlar. Bu durum anaokulundan lisansüstüne kadar neredeyse bütün öğretim kademelerinde öğrenim gören her bir öğrenci için gerçekleşebileceğinden söz edilebilir (Weber, 2009). Yapılan çalışmalarda da çeşitli öğretim düzeylerinde bu tür hataların mevcut olduğu görülmektedir (Selden ve Selden, 2003, 2007, 2011; Stylianides ve Stylianides, 2009; Umay ve Kaff, 2005; Weber, 2001, 2009). Yapılan birçok çalışmalarda muhakeme hataları olarak nitelendirilen durumlar genel olarak muhakeme hatası, muhakeme eksikliği ve muhakeme boşluğu şeklinde sınıflandırılmıştır. Çeşitli kavram yanlışlarından veya başka sebeplerden dolayı geçerli olmayan ispatların oluşturulması muhakeme hatası olarak; ispat sürecinde yöntem, tanım aralığı, matematik dili gibi eksikliklerle ispatların tamamlanması veya ispatlarının yarıda bırakılmasından kaynaklanan durumlar muhakeme eksikliği olarak ve ispat sürecinde matematiksel bir ilişkinin ispatı oluşturulurken ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmadan ispatın tamamlanması gibi durumlar da muhakeme boşluğu olarak değerlendirilebilir. Umay ve Kaff (2005) ilköğretim ikinci kademe öğrencileri ile yaptıkları çalışmada kusurlu akıl yürütme ve zayıf akıl yürütme şeklinde muhakeme hataları ya da muhakeme eksikliklerinin çok sayıda ortaya çıkmıştır. Özer ve Arıkan (2002) lise öğrencilerinin farklı muhakeme hatalarına sahip olmalarına bağlı olarak öğrencilerin çoğunun ispat yapabilme düzeylerinin düşük olduğu sonucuna varmıştır. Weber (2009) matematik alanında doktora yapan öğrencilerinin de ispat sürecinde birçok muhakeme hatası yapabildiğini yürüttüğü çalışma ile ortaya çıkarmıştır. Selden ve Selden (2003) lisans öğrencileri ile yürüttükleri çalışmada öğrencilerin akademik başarısına bakılmaksızın sonuç ile başlama, hatalar bolluğu, tanım aralığının dikkate alınmaması, önermelerin gerekçelendirilmemesi gibi çeşitli muhakeme hataları, eksiklikleri ve boşluklarına sahip olduklarını belirtmişlerdir. Jones (2000) lisans öğrencilerinin ispat sürecinde ispata başlayamama, muhakeme adımlarını takip edememe, bunları formal hale dönüştürememe gibi muhakeme hataları ve eksikliklerinin olduğunu ifade etmiştir. Andrew (2009) ispat sürecinde özel bir durumu düşünerek ispat yapma, ispat yaparken mantıksal adımların takip edilmemesi, matematik

dilinin doğru kullanılmaması gibi muhakeme hata ve eksikliklerinin varlığından söz etmiştir. Benzer şekilde başka çalışmalar (Atwood, 2001; Baker ve Campbell, 2004; Edwards ve Ward, 2004; Epp, 2003; Ferrari, 2004; Knapp, 2006; Sarı, 2011; Selden ve Selden, 2003, 2007; Weber, 2006) da ispat sürecinde öğrencilerinin birçok muhakeme hatası, muhakeme eksikliği veya muhakeme boşluğuna sahip olduklarına işaret ederek konunun önemine vurgu yapmaktadır.

Muhakeme hataları temelde epistemolojik, psikolojik, pedagojik olmak üzere üç farklı nedenden kaynaklanabileceği düşünülebilir. Epistemolojik nedenler, ispatlanacak kavramın doğasından kaynaklanmaktadır. Psikolojik nedenler; kişinin biyolojik, bilişsel ve duyuşsal gibi boyutları içeren kişisel gelişimden kaynaklanan nedenlerdir. Sonuncusu ve en önemlisi pedagojik nedenlerdir. Pedagojik nedenler; öğretim modelleri, yöntemler ve tekniklerden kaynaklanmaktadır. Öğrencilerin ispat oluşturma, ispat yapma becerisi kazanma ve ispat sürecinde doğru bir muhakeme kullanmalarında yapılan öğretimin etkisi büyüktür (Sarı, 2013). Öğretim modelleri, yöntem ve teknikleri kullanarak öğretimin gerçekleşmesine katkıda bulunan öğretmenlerin, bu süreçteki rolü oldukça önemlidir (Öztürk ve Güven, 2012). Bu bakımdan öğretmenlerin; öğrencilerinin olası muhakeme hatalarının farkında olması, onların muhakeme süreçlerini inceleyebilmesi ve bu muhakeme hatalarının giderilebilmesi için öğretimsel kararlar alabilmesi büyük önem taşımaktadır (Güven ve Demir, 2015). Dolayısıyla öğretmenlerin sahip olması gereken niteliklerden biri öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini anlama ve bu doğrultuda onlara dönütler verme, onların olası muhakeme hatalarını bilmeyi gerektirmektedir (Petreu ve Goulding, 2011).

Yapılan çalışmalara bakıldığında; genel olarak belli bir dönem veya belli bir konu ele alınarak muhakeme hatalarının bir boyutu incelenmiş veya ispat sürecinde yaşanan zorluklar olarak betimlenmiştir. Her bir çalışma literatüre önemli katkı sağlamakla birlikte sadece ispat sürecinde muhakeme hatalarının çeşit ve yoğunlukları hakkında bilgi vermekle sınırlı olduğu kanaatini oluşturmaktadır. İspat sürecinde öğrencilerin sahip olduğu muhakeme hatalarını, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarını belirlemekten ziyade bu hatalarının doğası ve alınan eğitimle ilişkisinin belirlenmesi; hata, eksiklik veya boşlukların derinlemesine analiz edilerek matematiksel muhakemenin gelişmesine nasıl bir katkı sağladığını belirlemek gerekmektedir (Hartman, 2001; Kramarski ve Zoldan, 2008). Bu çalışmada, bütün bu boyutlar dikkate alınarak, ispat sürecinin kaçınılmaz bir parçası olan muhakeme hatalarını, muhakeme eksikliklerini ve muhakeme boşluklarını analiz etme; bunları geniş bir yelpazede ele alma; ispat sürecinde ileriye sürülen muhakemelerin sistematik hatalara nasıl dönüştüğünü analiz etme; öğrencilerin ispat yaklaşımlarını belirleme ve bunların muhakeme hataları ile ilişkisini

belirlenmesi; öğretim elemanlarının kullandığı öğretim yöntem ve yaklaşımlarının muhakeme hatalarının üzerindeki etkisinin incelenmesi ön planda tutulmuştur. Bununla birlikte matematik öğretmeni adaylarının üniversite eğitimleri boyunca aldıkları ispata yönelik derslerinin, matematiksel muhakemelerinin geliştirmelerinde, uygun stratejileri belirlemelerinde ve muhakeme hatalarının üzerindeki rolünün ne ölçüde olduğunun incelenmesinin de dikkate değer olduğuna karar verilmiştir. Ayrıca matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları yaklaşımları, yaptıkları muhakeme hatalarını, bu süreçte öğretim üyelerinin yaklaşımları, ispatın veya ilgili konunun doğasından kaynaklanan muhakeme hatalarını daha yakından ve derinlemesine incelemek için ispatların yoğun olduğu analiz, soyut matematik, cebir ve sayılar teorisi gibi derslerde gözlemlerin yapılmasının da önemli olduğu düşünülmektedir. Bu bağlamda çalışmanın problemleri aşağıdaki şekilde belirlenmiştir:

1. Farklı sınıf seviyesindeki ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispatlama sürecinde yaygın olarak hangi muhakeme hataları, muhakeme boşlukları veya muhakeme eksikliklerine sahiptir?
2. Muhakeme hataları, muhakeme boşlukları veya muhakeme eksiklikleri lisans eğitimleri boyunca gelişimsel olarak nasıl değişmektedir?
3. Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının lisansta aldıkları derslerinin; sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının üzerindeki rolü nedir?

1. 1. Araştırmanın Amacı

Matematik öğretiminin en önemli hedefleri arasında neden, niçin sorularına karşılık olarak mantıklı cevaplar elde etmek; başka bir deyişle muhakemenin gelişimini sağlamak yer almaktadır (Altıparmak ve Öziş, 2005). Bu bağlamda son yıllarda ülkemizde ortaöğretim matematik öğretim programları tekrar ele alınarak bu amaçlar ve kazanımlar altında revize edilmiştir. Bu kapsamda öğrencilerin problem çözme, matematiksel düşünme, matematiksel ispat oluşturma, matematiksel akıl yürütme (muhakeme) becerilerinin geliştirilmesi ve bunun yanı sıra soyutlama yapabilmeleri önemle belirtilmiştir (MEB, 2013). Dünya genelinde ise benzer şekilde gelişmiş ülkelerin çoğunun ortaöğretim matematik öğretim programlarında muhakeme, ispat ve ispat süreçlerine yer verilerek bunların önemi üzerinde durulmaktadır. Yapılan çalışmalarda (Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002; NCTM, 2000; Yackel ve Hanna, 2003; Selden ve Selden, 2003) da ispatın matematik eğitiminin en önemli bileşenlerinden olduğu vurgulanmaktadır. Öğretmen adaylarının ispat sürecinde doğru bir muhakemenin nasıl yapılacağını bilmemeleri veya bu beceriyi kazanamamış olmaları durumunda öğrencilerine bu konuda

sağlıklı bilgiler vermeleri beklenemez. Bu anlamda geleceğin öğretmenleri olacak öğretmen adaylarının muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerinin ve muhakeme boşluklarının neler olduğunun belirlenmesi, bunların giderilmesine yönelik çalışmaların yapılması önemlidir.

İspatlama sürecinde öğretmen adaylarının sahip olduğu muhakeme hatalarını, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarını tespit edilmesi geçerli ispatların oluşturulması, ispatların veya ispat fonksiyonlarının anlaşılması açısından katkısı önemlidir. Bunun yanı sıra bu hatalarının doğası ve alınan eğitimle ilişkisinin belirlenmesi; hata, eksiklik veya boşlukların derinlemesine analiz edilerek matematiksel muhakemenin gelişmesine nasıl bir katkı sağladığını da belirlemek gerekmektedir (Hartman, 2001; Kramarski ve Zoldan, 2008). Bu çalışmada, bütün bu boyutlar dikkate alınarak, ispat sürecinin kaçınılmaz bir parçası olan muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarını analiz etme; bunları geniş bir yelpazede ele alma; ispat sürecinde ileriye sürülen muhakemelerin sistematik hatalara nasıl dönüştüğünü analiz etme; öğretmen adaylarının ispat yaklaşımlarını belirleme ve bunların muhakeme hataları ile ilişkisini inceleme; öğretim elemanlarının kullandığı öğretim yöntem ve stratejilerinin muhakeme hatalarının üzerindeki etkisinin ne ölçüde olduğunu belirlemeyi amaçlamıştır.

Bu çalışma ayrıca, ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının üniversitedeki eğitimleri boyunca ispatlama sürecinde yaptıkları muhakeme hataları, boşluklar, eksikler bağlamında gelişmelerinin nasıl değiştiği, ispatlama sürecinde en çok hangi muhakeme hatalarını yaptıklarını, bu muhakeme hatalarının üst sınıflara doğru nasıl değiştiğini incelenmeyi amaçlamıştır. Bunun yanı sıra ortaöğretim matematik öğretmenliği programının yürütülen ve ispatların yoğun olarak işlendiği; Analiz, Cebir, Matematiğin Temelleri, Soyut Cebir, Sayılar Teorisi, Soyut Matematik ve Lineer Cebir gibi derslerde gözlemler yapılarak, hem öğretim elemanları hem de öğretmen adaylarıyla çeşitli mülakatlar gerçekleştirilerek ispat sürecinde muhakeme veya muhakeme hataları bakımından hangi noktalara odaklandığı, derslerdeki içerik ve yaklaşım, öğretim elemanlarının görüşleri ve öğrencilerin soru ve görüşleri bağlamında ele alınarak ispat sürecinde muhakeme veya muhakeme hatalarına odaklanan noktalar resim edilmeye çalışılacaktır. Bu çalışmada bütün bu durumlar dikkate alınarak matematik öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının neler olduğunu detaylı bir şekilde analiz etme, öğretmen adaylarının üniversiteye ne tür muhakeme hatalarıyla geldiklerini belirleme, üniversite eğitimleri boyunca bu hatalarının nasıl değiştiğini gelişimsel olarak incelenecektir.

1. 2. Araştırmanın Gerekçesi ve Önemi

İnsanoğlu diğer canlılardan farklı olarak düşünebilen, hem kendi eylemlerini hem de çevresini sorgulayabilen bir varlıktır. Bu özelliğiyle doğumundan itibaren keşfetme, araştırma, sorular sorma, nesnelere arasındaki ilişkileri fark etme gibi eğilimleri göstererek çevresini öğrenmeye çalışır. Başka bir deyişle çeşitli muhakemelerle yaşadığı dünyayı anlama eğilimindedir. Geliştirdiği muhakemelerle bazen bu eğilim bireyi doğru sonuca ulaştırırken bazen de yanlış hükümler vermeye veya hatalı kararlar almasına yol açmaktadır. Örneğin okul öncesi dönemde bir çocuğun masanın üstünde duran oyuncuğuna eli yetişemediğinden kenarından sarkan örtünün ucunu çekerek oyuncuğunu düşürmesi; çocuğun nesnelere arasındaki ilişkiden hareketle doğru bir muhakeme geliştirdiğini göstermektedir. Aynı dönemde başka bir çocuğun eşit büyüklükteki iki çikolatadan kendisine tek parça, kardeşine birkaç parçaya bölünmüş halde verildiğinde kendisinininkinin daha az olduğuna karar vererek itiraz etmesi; dönem itibarıyla nesne korunumunu özelliğini kazanamadığını ve bunun sonucunda yanlış bir muhakeme ile hareket ettiğini göstermektedir. Eğitimde sıklıkla yer verilen bu örneklerde olduğu gibi birey yaşamın ilk evresinde başlayarak doğru veya hatalı muhakemeler geliştirmektedir. Geliştirilen bu muhakemeler bireyin yaşamın önemli derecede etkilediği gibi eğitim öğretim hayatını da derinden etkileyebilmektedir. Goswami (2004) yaptığı çalışmada çocukların yaşamlarının ilk yıllarından itibaren çeşitli açılardan tümevarım veya tümdengelim dayalı muhakemeler yürüterek doğru ya da yanlış sonuçlar, çıkarımlar elde ettiğini belirtmiştir. NCTM (2000) de çocukların okul öncesinde ve takip edilen yıllarda çok farklı muhakemeler yürüttüklerini ve kendi varsayımlarına göre doğru ya da yanlış çeşitli çıkarımlar yapabildiklerini ifade etmiştir. Dolayısıyla bu yaşta geliştirdikleri stratejiler ilerideki eğitim hayatlarında belirleyici olacağı düşünülebilir. Muhakeme, yaşamın her alanında olduğu gibi matematik öğretme ve öğrenmenin de merkezinde yer alan temel kavramlardan biridir (Russell, 1999). Matematiksel düşünme, ilişkilendirme, soyut düşünme, sezgi ve iletişim gibi matematiğin temelini oluşturan kavramlar ancak doğru bir muhakemede bulunmayı öğreterek kazandırılabilir. Bu nedenle öğrencilerin sahip oldukları muhakeme hatalarının neler olduğunun belirlenmesi ve bu tür hatalarının giderilmesine yönelik araştırmaların yapılması önemlidir.

Muhakeme, bireylerin içgüdüsel olarak sahip oldukları ve buldukları çevrede zamanla gelişen veya körleşen bir yetenektir. (Altıparmak ve Öziş, 2005) Bu yeteneğin gelişmesinde uygun stratejileri belirlenmek önemlidir. Doğru stratejilerle küçük yaştan itibaren muhakemeler geliştirebilen bireylerin yetiştirilmesi sağlanır. Bu tür bireyler dış dünyalarında gördüklerini, algıladıklarını kendi iç dünyalarında belli bir ilişki ve mantık çerçevesinde yeniden oluşturma becerisine sahip bireylerdir. Yapılan çalışmalarda da

doğru stratejiler sonucunda çocukların da yetişkinler gibi farklı muhakemeler geliştirebileceğini göstermektedir (Ergül, 2014; Eysenck, 2003; Gelman ve Coley, 1990; Pilten, 2008). Ancak uygun stratejilerin belirlenmemesi sonucunda nesnelere arasındaki ilişkiyi doğru kuramayan, sebep-sonuç zincirini takip etmeden, bireylerin yetiştirilmesine yol açacaktır. Moore (1994) okul yaşamları boyunca öğrencilerin deneyimleri sonucunda kazandıkları davranışların tutarlılığının bir göstergesi olan muhakemenin soyut düşünme ve ispat için en önemli basamak olduğunu vurgulamaktadır. Bu anlamda zihinsel bir alışkanlık olan muhakeme birçok alanda olduğu gibi matematikte özellikle de ispat yapmada tutarlı davranmayı sağlar. Bunun için ispat sürecinde öğrencilerin doğru bir muhakeme geliştirmelerini engelleyen muhakeme hatalarının neler olduğunun belirlenmesi, analiz edilmesi ve bunların azalmasını sağlayacak strateji veya önlemlerinin neler olduğuna yönelik çalışmaların yapılması önemlidir.

Hızla değişen teknoloji ile beraber toplumsal değişim ve gelişim her gün giderek daha da ivme kazanmaktadır (MEB, 2013). Buna paralel olarak bilgi ve iletişim teknolojileri insan hayatının her evresini kaplamış durumdadır. Kuşaklar arası zamansal fark giderek daralmıştır. Doksanlarda doğan bir çocukla iki binli yıllarda doğan bir çocuğun gördüğü dünya, yaşam tarzı, toplumsal değişim birbirinden oldukça farklıdır. Dolayısıyla bu farklılık çocuğun bütün alanlarını etkilediği gibi eğitim-öğretim hayatını da etkilemektedir. Bu değişim yeni kuşağa birçok avantaj sağlarken bir taraftan da daha önceki kuşakların karşılaşmadıkları yeni problemleri de beraberinde getirmektedir. Bundan dolayı artık doksanlar ya da daha önceki dönemlerin yöntemleri, araçları ve öğretim teknikleriyle eğitim- öğretim yapılamaz. Bu durum dünya genelinde olduğu gibi bizim ülkemizde de eğitim-öğretim programlarının değişmesine sebep olmuştur. Dolayısıyla matematik öğretiminde de yeni bir bakış açısı getirmiştir. “Yeni bilgiler, fırsatlar ve araçlar matematiğe bakış açımızı, matematikten beklentilerimizi, matematiği kullanma biçimimizi ve hepsinden önemlisi matematik öğrenme ve öğretme süreçlerimizi yeniden şekillendirmektedir.” (MEB,2013). Bu yeni bakış açısı muhakeme becerisi, matematiksel düşünme becerisi, ispat yapma becerisi, problem çözme becerisi gelişmiş bireylerin yetiştirilmesini öncelikli bir hedef haline getirmiştir. Bu hedeflerin gerçekleşmesi ancak bu becerilere sahip öğretmenlerin varlığı ile gerçekleşir. Öğretmenlerin ispata ilişkin muhakeme, düşünce ve deneyimlerinin öğrencilerin doğru bir ispat anlayışı kazanmasında etkisi büyüktür (Almeida,2000). Bu durum da öğretmenlerin öncelikle kendilerini matematiksel ispat yapma yönüyle donanımlı hale getirecek şekilde yetiştirme gerekliliğini göstermektedir (Birinci, 2010). Bu nedenle öğrencileri yetiştirecek öğretmen ve öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakemelerinin incelenmesi önemlidir.

Muhakeme ve ispat matematik eğitiminin en önemli bileşenleri olmakla birlikte bu kavramlar birbirinden bağımsız düşünülemez (Cai ve Cirillo, 2014). Yapılan çalışmalar da muhakeme ve ispat kavramları birlikte ya da birbirlerinin tamamlayıcısı olarak ele alınmaktadır (Gardner,1993; NCTM, 2000; Stylianides ve Stylianides, 2009; Waring, 2000). Gardner (1993) bu kavramların birbirleriyle olan ilişkisini bir binayı oluşturan harç ve tuğla örneği ile açıklamıştır. Nasıl bir binanın yapımı için gerekli olan kum, demir, çimento gibi malzemeler rastgele bırakılırsa bir moloz yığınının farklı olmaz. Ancak yetenekli bir ustanın elinde bu malzemeler belli bir düzende ve aralarında kurulan doğru bir ilişki sonucunda görkemli bir yapıya dönüşür. Dolayısıyla ispatın temel bileşenleri olan problem çözme, ilişkilendirme, soyutlama, genelleme, iletişim birer tuğla iken muhakeme bunları bir arada tutan harç görevini üstlendiğinden ispat ve muhakeme bir bütün olarak düşünülebilir. Baki ve Bell (1997) çalışmalarında problem çözme ve ispatı ilişkilendiren temel bileşenin muhakeme olduğunu belirterek ispat sürecinde muhakemenin önemine vurgu yapmıştır. Bu anlamda ispat sürecinin elverişli bir şekilde gerçekleşmesi ve ispat doğasının kaçınılmaz bir parçası olan doğru bir muhakemenin kazanılmasında öğretmenlerin rolü son derece önemlidir. Çünkü öğretmenlerin ispata yönelik sahip olduğu anlayışlar, ileri sürdükleri stratejiler, kullandıkları yöntemlerin bu sürecin şekillenmesinde etkisi büyüktür. Bunun için öğretmenlerin doğru bir muhakemenin neler gerektirdiğini öğrenerek öğrencilerinin muhakemelerini geliştirmeleri için onlara yardımcı olmaları gerekmektedir (Pilten, 2008). Öğretmenler, ilköğretim yıllarından itibaren her kademedeki öğrencilerin matematiksel ispatları anlayabilme ve ispatlama bakımından kendilerini geliştirebilmelerini sağlamalı ve hipotezlerden mantıksal sonuçlar çıkarma, yani doğru muhakemeler kazanmalarına veya strateji geliştirmelerine destek olmalıdırlar (NTCM, 2000). Bunun için öğrencilerin kendi muhakeme süreçlerinin farkında olmaları veya başkalarının muhakemelerini değerlendirebilecekleri sınıf içi tartışmaları oluşturularak onların kendi çözümlerini ortaya koyma veya ispatlarını oluşturmalarına fırsat verilmesi önemlidir. Bu süreçte öğretmenler; öğrencilerin bu tür tartışmalarda ortaya koyacakları her şeyin belli bir dayanağa bağlanması gerektiğini anlamaları için “neden doğru olduğunu düşünüyorsun?”, “Bizi ikna edecek bir dayanağın var mı?” şeklindeki sorularla onlardan fikirlerini açıklama, ileri sürdükleri doğrularını ispatlama, yanlış muhakemelerinin farkına varma gibi becerileri kazanmalarını sağlamalıdırlar (Pilten,2008). Bu anlamda doğru muhakemeler geliştirebilen, kendi muhakeme hatalarının farkında olan ve öğrencilerine doğru muhakeme becerisini kazandırabilen donanımlı öğretmenlerinin yetiştirilmesi önemlidir. Bunun için geleceğin öğretmeni olacak öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hatalarının belirlenmesi, analiz edilmesine yönelik çalışmaların yapılması önemlidir.

İspat sürecinde, öğrencilerin hem doğru stratejilerle muhakeme becerilerini geliştirmeleri hem de muhakeme hatalarının farkında olmaları önemlidir. Bu süreçte öğretmenler, öğrencilerinin muhakeme gelişimlerini olumsuz etkileyen engelleri ortadan kaldırmaları veya öğrencilerin hatalı muhakemeler geliştirmelerini engelleme ve bunları yok etme de önemli rol oynarlar. Bu bakımdan öğretmenlerin öğrencilerin sahip olduğu ispat yapma becerilerini ortaya çıkarabilmesi için öncelikle kendilerinin bu anlamda donanımlı olması gerekmektedir (Baki, 1999). Aksi takdirde öğrencilerin ispat yapma anlamında geliştirmeleri daha da zorlaşabilir (İskenderoğlu ve Baki, 2011). Bir öğretmenin ispat sürecinde doğru bir muhakemede bulunma ile ilgili yeterli düzeyde bir bilgiye sahip olmaması durumunda öğrencilerine doğru muhakemede bulunma anlayışı kazandırması beklenemez. Bununla birlikte öğretmenlerin ispata yönelik anlayışlarının, ispat sürecinde kullandıkları yöntemlerin, ileri sürdükleri stratejilerin ya da ispat sürecini nasıl değerlendirdiklerinin bilinmesi önemlidir (Healy ve Hoyles, 2000). NCTM (2000) de öğretmenlerin sahip oldukları alan bilgisi ve anlayışları, öğrenciler hakkındaki bilgileri ve öğretim stratejilerinin matematik öğretiminin etkili olmasına katkıda bulduklarından bahsederek öğretmenin süreç içindeki önemini ortaya koymaktadır. Bu bakımdan öğretmenlerin öğrencilerine hangi anlayışları kazandırdıkları ve ne yönde gelişimler elde etmelerine katkıda buldukları göz ardı edilemez. Bu anlamda öğretmenlerin ispat sürecinde uygun bir muhakemede bulunma ile ilgili çeşitli tereddütleri varsa öğrencilerini ispat yapmaya teşvik etmeleri düşünülemez. Çünkü bir matematik öğretmenin ispatla ilgili anlayışı ve altyapısının sınırlı olması durumunda öğrencilerinin ispat sürecinde birçok muhakeme hatası yapmalarına ya da sahip oldukları muhakeme hatalarını devam ettirmelerine sebep olabilir (Stylianides ve Stylianides, 2009). Dolayısıyla öğretmenler öğrencilerinin yaptıkları ispatları ele alırken onların ileri sürdükleri muhakemeleri, bu süreçte izledikleri ispat adımlarını, bu adımlarına yönelik sundukları gerekçeleri bilmeleri, ispat adımları arasında ilişkileri fark etmeleri ve bunları doğru bir şekilde değerlendirmeleri önemlidir. Bu nedenle matematik öğretmeni adaylarının üniversite eğitimleri boyunca sahip oldukları muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerinin veya muhakeme boşluklarının neler olduğunun incelenmesi, analiz edilmesi ve bunlarının giderilmesine yönelik çözüm yollarının nelere olabileceğinin ortaya konulması önemlidir.

İspat matematiğin hemen hemen bütün alanlarında öğrenme ve öğretme bakımından önemli rollere sahip bir süreçtir (Selden ve Selden, 2009). Ancak öğrencilerin çoğu bu süreçte başarılı olamamaktadır (Weber, 2001). Bu bakımdan öğretim kademesinin her seviyesindeki öğrenciler ispat sürecinde çeşitli zorluklar yaşamaktadır. İspat yapmanın yanı sıra ispatların geçerli olup olmadığını bile fark edememektedirler (Weber, 2001). Çünkü ispat süreci; matematiksel düşünme, problem çözme, akıl yürütme

ve ilişkilendirme gibi becerileri içeren kapsamlı bir süreçtir. Bunların yanı sıra bireye mantıksal düşünme yollarını kazandıran sezgi ve muhakeme gibi bileşenler de bu sürecin bir parçasıdır (Almeida, 2005). Dolayısıyla ispat sürecinin en önemli bileşenlerinden biri de muhakemedir (Almeida, 2000). İspat anlayışının gelişimi ancak bireylerin çeşitli mantıksal düşünme yollarını kazanmasına bağlı olarak gerçekleşir. Özellikle lisans düzeyinde ispatların yoğun olarak işlendiği derslerinin, derinlemesine bir ispat anlayışının kazanmasında kilit bir rol oynar (Selden ve Selden, 2009) bu derslerde ispat sürecinde muhakemeye odaklanan noktalarının neler olduğunun belirlenmesi, bu süreçte ileriye sürülen muhakeme hatalarının sistematik yanlışlara nasıl yol açtığına analiz edilmesi önemlidir. Bu nedenle matematik öğretmen adaylarının üniversite eğitimleri boyunca ispata yönelik derslerin, matematiksel muhakemelerinin geliştirmelerinde, uygun stratejileri belirlemelerinde ve muhakeme hatalarının üzerindeki rolünün ne ölçüde olduğunun incelenmesi önem arz etmektedir.

Muhakeme ve ispat bütün öğretim kademelerinde matematiğin öğrenme ve öğretilmesinde çok önemli bir yere sahiptir. Ayrıca ispat ve muhakemenin her düzeydeki matematik derslerinin önemli bir bileşeni olduğunu birçok araştırma (ör: Almeida, 2005; Selden ve Selden, 2009; Weber, 2001) veya raporlarda (ör: NCTM, MAT-CATs, MEB) yapılan vurgulanmalara rağmen, öğrenciler genellikle lisans düzeyinde formal ispatlarla karşılaşmaktadır. Lisans düzeyinde öğrenciler, matematiğin soyut ve aksiyomatik yapısıyla karşılaştıklarından matematiksel kavramlar, kavramlar arası ilişkileri, tanım ve teoremleri anlama, bunları yorumlayarak ispat oluşturmada ve doğru muhakemeler yürütmede zorluklar yaşamaktadır (Uzun, 2011). İspat kavramı, çoğu ülkede, genellikle lisans matematik derslerinin içinde verilmektedir. Bu şekli ile ispat, sadece yüksek beceriye sahip ya da matematiksel alt yapısı çok iyi olan bireylerin yapabildiği izlenimini vermektedir. Son yıllarda bu bakış açısı giderek değişmektedir. Birçok ülkede yapılan çalışmalarda (Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002; NCTM, 2000; Yackel ve Hanna, 2003; Selden ve Selden, 2003) ispat yapma ve muhakemede bulunma matematik eğitiminin en önemli bileşenlerinden oldukları vurgulanmıştır. Bu çalışmaların neticesinde birçok üniversitenin matematik öğretmenliği programında ispat ve muhakemeye yönelik derslere yer verilerek ispatın bir süreç olarak işlenmesi ve bu süreçte lisans öğrencilerin yaşadıkları zorlukları, muhakeme hataları, ispata bakış açılarını geniş bir yelpazede ele alınması hedeflenmiştir (Selden ve Selden, 2014). Ülkemizde ise eğitim fakültelerinde ortaöğretim matematik öğretmenliği programında hem eğitim hem de alan dersleri birlikte okutulmaktadır. Bununla beraber ispat kavramı daha çok temel alan dersleri içerisinde ve yoğun olarak verilmektedir. Derslerde ispatların yoğun olarak işlenmesi; dersleri alan öğretmen adaylarının ispatları daha çok ezberlemeye yönelme veya ispata yönelik

derinlemesine bir anlayışa sahip olmadan yetişmelerine sebep olabilmektedir. Nasıl öğrenilirse öyle öğretilir gerçeğinden hareketle eğitim fakültelerinde okutulan lisans derslerinin öğretmen adaylarına geniş bir anlayış kazandırmak ve düşüncelerini yansıtacak şekilde ders içeriklerinin daha ayrıntılı olması gerekmektedir (Baki, 1996, 2008). Bu alandaki eksikliği gidermeye yönelik yapılan matematik eğitimi araştırmaları, matematik öğretmeni adaylarının ispat ve ispat sürecinde yaşadıkları zorlukları belirlemek ve bu zorlukların nasıl giderilebileceğine doğru yönelmektedir (Uzun, 2013). Matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik düzeylerinin nasıl geliştirilebileceğinin araştırılması gerekmektedir (Selden ve Selden, 2006). Böylece öğretmen adaylarının ispat sürecinde doğru bir matematiksel muhakeme ile düşüncelerini açıklama, sorgulama, derin düşünme, muhakeme stratejilerini çeşitlendirme ve geliştirme gibi beceriler kazanmalarına katkı sağlanabilir (Hartman, 2001; Kramarski, 2004; Kramarski ve Zoldan, 2008; Renkl, 1999).

Literatür incelendiğinde ispat, muhakeme ve ispat süreci ile ilgili çok fazla çalışma yapılmıştır (Almeida,2000; İskenderoğlu, 2010; Hanna, 1995; Knuth, 2002; Mingus ve Grassl, 1999; Morali, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006; Moore,1994; Morselli, 2008; Schoenfeld, 1994; Segal, 2000; Selden ve Selden, 1987, 1995, 2001, 2003, 2009; Sowder ve Harel,1998; Uğurel, 2010; Weber ve Alcock, 2004; Weber, 2001). Hem ulusal hem uluslararası bu çalışmaların sayısı her gün artan bir grafikte devam etmektedir. Bu durum konunun önemine işaret etmektedir. Bununla birlikte ispat sürecinde yaşanan zorluklar, muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarını geniş bir yelpazede ele alan daha az çalışma yapıldığı görülmektedir (Baker ve Campbell, 2004; Jones, 2000; Moore, 1994; Pedemonte, 2007; Selden ve Selden, 2003; Selden ve Selden, 2007; VanSpronsen, 2008; Weber, 2004). Bu yönde yapılan çalışmalarda da öğretmen adaylarının, ilerleyen sınıflarda ispat ve muhakeme kavramlarına yönelik bakış açılarının nasıl değiştiği ve ispat süreçlerini incelemeye yönelik az sayıda araştırma bulunduğu ifade edilmektedir (Harel ve Sowder, 2007; Ko ve Knuth, 2009; Sarı, 2011). Harel, Selden ve Selden (2006) lisans düzeyindeki öğrencilerinin matematiksel tanım, teorem ve kavramları nasıl kullandıkları, bir iddiayı ispatlamaya çalışırken bu tanımları nasıl açtıklarını, ispatlama girişimlerinde ileri sürdükleri muhakemelerinde bunlardan nasıl faydalandıkları, ne tür kavram yanılgısı veya muhakeme hatalarına sahip olduklarının üzerine çok sayıda araştırma yapılması gerektiğini vurgulamaktadır. Bu eksiklik literatürde bir boşluk oluşturmaktadır. Hem bu boşluğu doldurmaya katkı sağlamak hem de yeni öğretim programının belirlediği amaç ve kazanımlara uygun öğrencilerin yetiştirilmesi için ihtiyaç duyulan nitelikli öğretmenlerin yetiştirilmesine katkı sağlayacak çalışmaların yapılması önemlidir. Öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin ispat hakkındaki düşüncelerini, ispata bakış açılarını, ispat süreçlerini ve bu süreçte sahip oldukları muhakemelerini ortaya

çıkarmaya yönelik çalışmalarının yapılması önem arz etmektedir (Almeida, 2003; Housman ve Porter, 2003; Raman, 2003; Solomon, 2006; Stylianides ve diğ., 2007).

Ulusal literatürde matematik öğretmeni adaylarının muhakeme hatalarını sistematik olarak inceleyen çalışma sayısı oldukça azdır. Bu nedenle ispatların yoğun olarak yapıldığı lisans derslerinin gözlemlenmesi, bu derslerin öğretmen adaylarının muhakeme süreçlerine nasıl bir etkisi olduğunun resmedilmesi önemlidir. Öğretmen adaylarının bu süreçte sahip oldukları yaklaşımları, yaptıkları muhakeme hatalarının belirlenmesi, bu süreçte öğretim üyelerinin yaklaşımları, ispatın veya ilgili konunun doğasından kaynaklanan durumları daha yakından ve derinlemesine incelenmesi muhakeme hata, eksik veya boşluklarının belirlenmesinde ve analiz edilmesinde katkısı olacağı düşünülmektedir. Bu nedenle ispatların yoğun olarak işlendiği analiz, soyut matematik, cebir ve sayılar teorisi gibi derslerde gözlemlerin yapılması, bu süreçte hem öğretim elemanları ile hem öğretmen adaylarıyla çeşitli mülakatların gerçekleştirilmesi muhakeme hatalarının doğru analiz edilmesi açısından önem arz etmektedir. Ayrıca matematik öğretmeni adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarının çeşit ve yoğunluklarının sistematik olarak incelenmesi ve belirlenmesi önem arz etmektedir. Matematik öğretmeni adaylarının, ispatlama sürecinde ne tür mantıksal çıkarım yaptıklarını; matematik dilini kullanma düzeyleri, ispatlama sürecinde kullanılan yöntemleri, doğru yerde ve doğru biçimde uygulama düzeylerinin de incelenmesi araştırmaya değerdir. Bütün bu gerekçeler dikkate alınarak böyle bir çalışmanın yapılmasının gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Ayrıca muhakeme hatalarını minimize eden ispat yapma ve doğru muhakeme yürütme becerisine sahip bireylerinin yetiştirilmesine olanak sağlayan öğrenme ortamların tasarlamasında bu çalışmanın ışık tutma açısından yararlı olacağı düşünülmektedir. Bu bakımdan bu çalışmanın, önceki araştırmalardan farklı olarak öğretmen adaylarının ispat sürecinde yaptıkları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarını belirleme, bu tür hataları derinlemesine analiz etme, öğretmen adaylarının ispat süreçlerini gözlemlenme, hem öğretim elemanlarıyla hem öğretmen adaylarıyla çeşitli mülakatlar gerçekleştirme, güz döneminin başında uygulanan açık uçlu sınavlarla öğretmen adaylarının üniversiteye ne tür muhakeme hatalarıyla geldiklerini belirleme, üniversite eğitimleri boyunca bu hatalarının nasıl değiştiğini gelişimsel olarak incelemeyi amaçlaması araştırmancının farklılığını göstermektedir.

1. 3. Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu çalışmanın sınırlılıkları şu şekilde ifade edilmiştir.

1. Lisans düzeyinde öğretmen adaylarının muhakeme gelişimlerini etkileyen çok fazla ders verilmektedir. Bu çalışmada gözlemi yapılan dersler ispatların yoğun

olarak işlendiği Analiz I, Cebir I, Matematiğin Temelleri, Soyut Cebir 1 ve Sayılar Teorisi dersleri ile bahar döneminde yürütülen; Soyut Matematik, Analiz 2, Cebir 2 ve Lineer Cebir gibi derslerle sınırlandırılmıştır.

2. Ortaöğretim matematik öğretmenliği programında 3. sınıf seviyesinde öğrenim gören öğretmen adaylarının olmamasından dolayı fen fakültesi matematik bölümü 3.sınıf öğrencileri çalışma grubuna dahil edilmiştir.

1. 4. Araştırmanın Varsayımları

1. Öğretmen adaylarının araştırma çerçevesinde uygulanan testlerde ve gerçekleştirilen mülakatlarda gerçek düşüncelerini yansıttıkları varsayılmıştır.

1. 5. Tanımlar

İspat: Önergelerin birbiriyle olan ilişkilerinden mantıksal bir çıkarım elde etmeyi ya da çeşitli genellemelere ulaşmayı sağlayan ve matematiksel bir sonucun doğruluğunu göstermekten ziyade niçin doğru olduğunun mantıksal bir gösterimidir (Almeida, 2003; Flores, 2002; Selden ve Selden, 2003; Yıldırım, 2000).

Muhakeme: Çeşitli yargılardan ya da önermelerden sonuç çıkarma, eldeki bilgilere dayanarak bir karar verme, akla mantığa yakın olup olmadığını inceleme, genellemeler yapma veya tahminlerde bulunma gibi geniş bir yelpazede ele alınabilen bir kavramdır. Başka bir deyişle bütün etmenler dikkate alınarak mantıklı bir sonuca ulaşma sürecidir (Altıparmak ve Öziş, 2005; Fitzgerald, 1996; Math-CATs, 2007).

Muhakeme Hatası: ispat sürecinde öğrencilerin matematiksel bir ilişkinin ispatını yaparken kendilerine mantıklı gelen ve adım adım ilerlemesini sağlayan muhakemeler sonucunda sistematik bir yanılığa düşerek geçerli olmayan ispatları oluşturulmalarıdır (Harel ve Sowder, 2007; Knapp, 2005; Selden ve Selden, 1995; Weber, 2001).

Muhakeme Eksikliği: ispat sürecinde yöntem, tanım aralığı, matematik dili gibi eksikliklerle ispatların tamamlanması veya ispatlarının yarıda bırakılmasından kaynaklanan durumlardır. Bu durumlar muhakeme hatasından ziyade doğru bir muhakeme ile başlanması ancak bazı matematiksel bilgi eksikliklerine bağlı olarak ispatın istenilen şekilde tamamlanmamasıdır. Muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen durumlar genellikle öğrencilerin akıl yürütme süreçlerini tamamlamadan sona erdirmeleri ya da kavramsal eksikliklerinden dolayı ezber kalıp çözümlere yönelmelerinden kaynaklanmaktadır (Atwood, 2001; Baker ve Campbell, 2004; Edwards ve Ward, 2004; Epp, 2003; Ferrari, 2004; Knapp, 2006; Sarı, 2011; Selden ve Selden, 2003, 2007; Weber, 2006).

Muhakeme Boşluğu: İspat sürecinde matematiksel bir ilişkinin ispatı oluşturulurken ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmadan ispatın tamamlanması gibi durumlardır (Selden ve Selden, 2003).



2. LİTERATÜR TARAMASI

2. 1. Araştırmanın Kuramsal Çerçevesi

Literatür taramasının bu bölümünde, araştırmada yer alan kavramlara ilişkin literatür ile araştırma konusu ile ilgili yapılmış çalışmalara ve bu çalışmaların sonuçlarına yönelik bilgiler sunulmuştur.

2. 1. 1. Araştırmada Yer Alan Kavramlar

Bu bölümde, araştırmada yer alan kavramlar literatürde kabul gören tanımları ile birlikte açıklanmıştır.

2. 1. 1. 1. İspat ve İspat Süreci

Matematikselsel ispat, içinde barındırdığı birçok fonksiyon ile beraber matematikte yer alan soyut kavramların anlam kazanması; tanım, aksiyom, teorem gibi matematiğin temel öğelerinin birbirleriyle olan ilişkilerinin açıklığa kavuşmasını sağlayan en önemli yapıdır. Bu anlamda matematikselsel bir ispat, öncül önermelerden belli bir sonuca ulaşma ya da önermelerin birbiriyle olan ilişkilerinden mantıksal bir çıkarım elde etmeyi ya da çeşitli genellemelere ulaşmayı sağlamaktadır (Özer, 1998; Yıldırım, 2000). Bu bakımından ispat, matematikselsel bir sonucun doğruluğunu göstermekten ziyade çeşitli aksiyomlara dayanan ve ilgili matematikselsel ifadenin niçin doğru olduğunun mantıksal bir gösterimidir (Hersh, 1993). Matematikselsel bir ispat, ileri sürülen önermelerin doğruluğu açısından başkalarını ikna etmekle birlikte karmaşık bir yapıya da sahiptir (Tall,1989). Benzer şekilde başka araştırmacılar da (Healy ve Hoyles, 1998; Öztürk, 2016; Weber, 2005) ispatın uygun çıkarımları belirleme, bu çıkarımlar arasında ilişkiler kurma, problem çözme, soyutlama, çeşitli muhakemelerde bulunma ve iletişim gibi boyutları içeren karmaşık bir matematikselsel aktivite olduğuna vurgu yapmışlardır. Bu bakımdan matematikselsel ispatın sadece bir önermeyi doğrulama dışında farklı birçok role sahip olması, ispatın zihinsel bir süreç olduğunu başka bir deyişle matematikselsel düşünme, akıl yürütme ve ilişkilendirme becerileni kapsayan bir oluşum süreci olduğunu göstermektedir (Güven, Öztürk ve Demir, 2014; Selden ve Selden, 2003).

İspat; matematikselsel bir ifadenin sonucunu doğrulamak, başkalarına bildirmek ve onları ikna etmek ile beraber çeşitli muhakemelerle elde edilen sonuçları tümdengelsel bir sistem içinde ifade etmektir (Almeida, 2003). İspat; keşfetme, varsayımda bulunma, akıl yürütme, genelleme ve doğru stratejilerle mantıksal gerekçeleri organize etme gibi

zihinsel süreçleri içinde barındıran bir yapıdır (Ball, Hoyle, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002). Bununla birlikte matematiksel bir ispat, sadece bir kavramı veya mantıksal süreci anlamaktan ziyade matematiksel tanım teorem ve kavramlarının nasıl kullanıldığını belirleme, matematiksel bir ilişkinin ispatlama sürecinin nasıl işlediğini ve matematiksel bilgilerinin oluşturulmasını, geliştirilmesini sağlamayı içeren kapsamlı bir süreçtir (İnam,2014; Stylianides, 2007). Bu bakımdan ispat matematiksel bir ilişkinin doğruluğunu göstermekle birlikte soyutlama, sezgi, matematiksel düşünme, muhakeme gibi zihinsel süreçleri içeren bir yapı olduğundan bahsedilebilir. Greenberg (1993) matematiksel bir ispatın varsayımda bulunma; aksiyom, önerme ve tanımlardan yararlanma; mantıksal çıkarımlarda bulunma; kendi içinde tutarlı sistemler oluşturma, genelleyebilir sonuçlar elde etme gibi bir dizi zihinsel etkinliklerden oluştuğuna dikkat çekerek bu durumu desteklemektedir. Hanna ve Jahnke (1996) matematiksel ispatın doğrulama, açıklama ve sistemleştirme anlamlarına sahip olmasının yanı sıra düşüncelerin mantıksal yapısını açıklamak ve muhakeme ile tümdengelimsel çıkarımlar yapmalarını sağlamak olduğunu belirtmiştir. Matematiksel bir ispat tam anlamıyla tümevarım ve tümdengelim dayalı muhakeme çeşitlerini içeren bir yapıdır (Jahnke, 2010). Dolayısıyla ispatın bir oluşum süreci olarak nitelendirilmesini sağlayan en önemli unsurlardan biri muhakemedir. Muhakeme; ispat sürecinde keşfetme, stratejiler geliştirme, varsayımda bulunma gibi becerilerinin kullanılmasını sağlayan bir araçtır (Almeida, 1996; Reid, 2002). İspat sürecinde öğrencilerin doğru bir muhakeme geliştirmeleri matematiksel ilişkileri anlama bakımında önemlidir (Szombathelyi ve Szarvas, 1998). Bunun için bu süreçte öğrencilerin sahip olduğu hatalı muhakemelerinin belirlenmesi, eksik stratejilerinin geliştirilmesine katkı sağlayacak ve doğru bir muhakemede bulunmayı kazandıracak çalışmaların yapılması önemlidir (İskenderoğlu, 2011; Schoenfeld, 1994).

2. 1. 1. 2. Muhakeme

Muhakeme; literatürde birçok otorite tarafından çeşitli anlamların yüklenmesiyle genel olarak ortak tanımlamada; yargılardan ya da önermelerden sonuç çıkarma, eldeki bilgilere dayanarak bir karar verme, akla mantığa yakın olup olmadığını inceleme, genellemeler yapma veya tahminlerde bulunma gibi geniş bir yelpazede ele alınmıştır. Başka bir deyişle bütün etmenler dikkate alınarak mantıklı bir sonuca ulaşma sürecidir. (Altıparmak ve Öziş, 2005; Fitzgerald, 1996; Math-CATs, 2007). İngilizcedeki "Reasoning" kavramı her ne kadar Türkçe yayınlanan çalışmaların bazılarında genellemeler yapma ve tahminlerde bulunma anlamına gelen "akıl yürütme" olarak veya akla mantığa yakın olup olmadığına bakma anlamında kullanılan "usa vurma" gibi kavramlarla ifade edilmişse de anlam olarak "muhakeme" bu anlamların her birini içerdiğinden "Reasoning" kavramının

anlamını daha kapsamlı bir şekilde karşıladığı düşünülebilir (Umay, 2003). Bu çalışmada ise “muhakeme” kavramı; “Reasoning” kavramının bir karşılığı olarak kullanılmıştır.

Dilimize Arapçadan geçen muhakeme kavramı, “mahkeme” kavramı ile aynı anlamdadır. Başka bir ifadeyle eldeki delillerden, gerçeklerden hareketle; doğru, mantıklı, kendi içinde çelişmeyen, usul ve kurallara uygun gerekçeli bir karar vermedir (Umay, 2003). Belli bir amaç doğrultusunda planlı, programlı adımlarla ve mantıksal bir çerçeve dahilinde düşünüp tutarlı kararlar vermek için yapılan bir üst düzey düşünme eylemi olarak da tanımlanabilir (Erdem, 2011). Matematiğin daha somut, anlamlı bir hal almasından ve matematiği açıklamada matematiksel muhakemenin etkisi yadsınamaz (Ev-Çimen, 2008). Matematiksel muhakeme ise herhangi bir konuda yapılan muhakemelerden, çok farklı olmamakla birlikte daha üst düzeydeki argümanlara ihtiyaç duyulan bir düşünme biçimidir (Selden ve Selden, 2003).

Üst düzey bir düşünme becerisi olarak nitelendirilen muhakeme, strateji geliştirme, soyut düşünme, ilişkilendirme, varsayımda bulunma gibi önemli bileşenleri içeren karmaşık bir süreçtir ve matematikte de önemli bir yere sahiptir. NCTM (2000)'de “Matematik muhakeme etmedir” şeklinde bir ifadeyle bulunarak muhakemenin matematiğin özü olduğuna vurgu yapmıştır. Matematiğin sembol ve terimlerinin etkili ve doğru kullanılmasından, varsayımların ve önermelerin ispatlanmasından matematiksel muhakeme önem arz etmektedir (Fitzgerald, 1996). Matematiksel bir ilişkinin ispatlanmasında farklı muhakemelerde bulunma bilgilerin farklı açılarla inşa edilmesini sağlar (Altıparmak ve Öziş, 2005). Matematikte ve özellikle de ispatta sadece işlemsel becerileri değil, üst düzey becerileri yani muhakeme çok sık kullanılmaktadır (Ev-Çimen, 2008). Muhakeme; matematiğin kendine özgü sembollerinin anlamlandırmasında, tanım ve teoremlerin birbiri ile olan ilişkilerinin açığa çıkarılmasında ve mevcut bilgiler kullanılarak önerme ya da teoremlerin ispatlanmasında önemli katkı sağlamaktadır. NCTM (2000) de ispat sürecinde doğru bir muhakeme ile hipotezlerden mantıksal sonuçlar çıkarma yoluyla matematiksel önerme ve teoremler anlam kazanır denilerek bu durum vurgulanmıştır. Ev-Çimen (2008) matematiksel muhakemeyi, modellemede veya ispatlamada kullanılacak temel yaklaşımları belirleme, işlemler, kavramlar ve durumlar arasındaki farklılık ve benzerlikleri ifade etme ve bunların arasındaki bağları mantıksal bir çerçevede ele alma olarak tanımlamıştır.

İspat sürecinde bireyler bazen özel bir durumdan hareketle genel sonuçlara veya yargılara ulaşma eğilimini göstererek tümevarımsal muhakeme kullanırlar. Bazen de bir ya da birden fazla öncülden hareketle belli bir mantık çerçevesinde, kendi içinde tutarlı bir sonuç elde etme ya da ispat oluşturmaya yönelirler. Başka bir deyişle genelden özele tümdengimsel muhakeme eğilimini gösterirler. Birey bu süreçte matematiksel bir ilişkinin

ispatını yaparken kendisine mantıklı gelen ve adım adım ilerlemesini sağlayan bu muhakemelerde bazen basit bir hatanın sonucunda sistematik bir yanılgıya düşebilir. Bu hatalı stratejiler, yanılgılar muhakeme hatası olarak nitelendirilebilir. Bireyler bu tür hataları ısrarla devam ettirebilmektedirler. Çünkü bunların hata olduğunun farkına varamamaktadırlar. Bu tür muhakeme hataları okul öncesi dönemden lisansüstü döneme kadar olmak üzere neredeyse bütün öğretim kademelerinde öğrenim gören her bir birey için gerçekleşebileceğinden söz edilebilir (Weber, 2009). Yapılan birçok çalışmada (Andrew, 2009; Almeida, 2000; Dreyfus, 1999; Harel ve Sowder, 1998; Jones, 2000; Moore, 1994; Recio ve Godino, 2001; Selden ve Selden 1995, 2003,2007; Stylianides, Stylianides, 2009; Weber, 2001; Weber, 2004) öğrencilerin ispat sürecinde birçok muhakeme hatasına sahip olduğu belirtilmektedir. Bu bakımdan ispat sürecinde ileri sürülen hatalı muhakemelerin belirlenmesi, öğrencilerin neden bu tür muhakeme hataları yaptıkları ve bu yönde düşüncelerini açıklama, ispat sürecinde yaptıkları muhakeme hatalarının analiz edilip düşünme süreçlerinin açığa çıkarılmasına yönelik çalışmaların yapılması önemlidir.

2. 1. 1. 3. İspat Sürecinde Muhakeme Hataları ve Yaşanan Zorluklar

Muhakeme hataları temelde epistemolojik, psikolojik, pedagojik olmak üzere üç farklı nedenden kaynaklanabileceği düşünülebilir. Epistemolojik nedenler, ispatlanacak kavramın doğasından kaynaklanmaktadır. Psikolojik nedenler; kişinin biyolojik, bilişsel ve duyuşsal gibi boyutları içeren kişisel gelişiminden kaynaklanan nedenlerdir. Sonuncusu ve en önemlisi pedagojik nedenlerdir. Pedagojik nedenler; öğretim modelleri, yöntemler ve tekniklerden kaynaklanmaktadır. İspat sürecinde öğrencilerin sahip oldukları muhakeme hatalarının temelinde kişisel nedenler kadar önceki akademik hayatlarının etkisi de söz konusudur (Weber ve Alcock, 2009). Öğrenciler ispat sürecinde birçok muhakeme ileri sürmektedir. Bunlardan bazıları doğru bir sonuç elde etmelerini sağlarken bazıları ise mantıksal olarak zayıf veya eksiktir. Bu yüzden öğrencilerin geliştirdikleri bazı muhakemeler onların hatalı kararlar vermesine sebep olabilmektedir (Selden ve Selden, 2003). Yapılan birçok çalışmada (Andrew, 2009; Almeida, 2000; Dreyfus, 1999; Harel ve Sowder, 1998; Jones, 2000; Moore, 1994) da öğrencilerin ispat sürecinde oldukça farklı muhakeme hatalarına sahip olduğu belirtilmektedir. Weber (2006) öğrencilerin ispat sürecinde geliştirdikleri hatalı stratejiler sonucunda geçerli olmayan ispatlar oluşturma, teoremler veya matematiksel kavramları yanlış kullanma gibi muhakeme hatalarına sahip olduklarını ifade ederek bu durumun öğrencilerin ispat oluşturmada zorluklar yaşamalarına ve ispat kavramını tam anlamıyla özümseyememelerine sebep olabileceğini belirtmiştir. Alcock ve Simpson (2005) öğrencilerin ispat sürecinde matematik dilini uygun

bir şekilde kullanamama, belirtilen matematiksel ilişkinin ispatına nereden ve nasıl başlayacağına karar verememe ve tanımları yetersiz kullanma gibi muhakeme hataları veya eksikliklerine sahip olduklarını belirtmiştir. Coe ve Ruthven (1994) öğrencilerin ispat sürecinde genel olarak ispat stratejilerinin öncelikle ve baskın olarak sayısal değerler kullanmaya yönelik olduğunu, çok az öğrencinin genel sonuçlar elde edebilecekleri doğru muhakemeler geliştirdiğini veya tündengelimsel muhakemeye uygun stratejilere sahip olduklarını ifade etmiştir. VanSpronsen (2008) öğrencilerin ispat sürecinde çeşitli zorluklar yaşamasının temel sebebi olarak; kavramsal ve işlemsel hatalar, matematik dilini uygun kullanamama, tanımları doğru yorumlayamama gibi öğrencilerin farkında olmadan geçerli olmayan ispatları oluşturmalarına yol açan hatalı muhakemeler geliştirmeleri olabileceğini belirtmiştir.

İspat sürecinde ileri sürülen hatalı muhakemeler sonucunda ispatlara başlayamama veya devam edememe, belli bir mantıksal zinciri takip edememe, yanlış hükümler verme, geçerli olmayan ispatlar oluşturma gibi durumlar ortaya çıkmaktadır. Di Martino ve Maracci (2009) öğrencilerin ispat sürecinde zorluklar yaşamalarında birçok faktörün etkili olabileceğini, bunlardan en önemlisinin ise ispatları anlama, yorumlama, varsayımda bulunma ve farklı stratejileri ileriye sürmesini sağlayan çeşitli üst bilişsel bilginin yani doğru bir muhakemenin eksikliği olduğuna vurgu yapmaktadır. Yapılan birçok çalışma da öğrencilerin çeşitli muhakeme hatalarına, muhakeme boşluklarına veya muhakeme eksikliklerine sahip olduğunu ileri sürmektedir. İspat sürecinde matematiksel tanım ve teoremleri yetersiz kullanma, ispata nasıl başlayacağına karar verememe gibi muhakeme hataları veya muhakeme eksikliklerinin ortaya çıkması (Atwood, 2001; Baker ve Campbell, Edwards ve Ward, 2004; Knapp, 2006; Selden ve Selden, 2007), ispat sürecinde belirtilen matematiksel bir ilişkinin ispatı için uygun ispat yöntemlerinin yeterince bilinmemesi ve bu yöntemlerin doğru uygulanmaması (Antonini ve Mariotti, 2007; Goetting, 1995; Thompson, 1996; Stylianides ve diğ., 2007; Wu Yu ve diğ., 2003) gibi bir çok çalışma yapılmıştır. Yapılan çalışmalarda farklı boyutlar ele alarak literatüre birçok katkı sağlamakla birlikte konunun önemine işaret etmektedir. Bu nedenle muhakeme hatalarını geniş bir yelpazede ele alan, bu hataları gelişimsel olarak inceleyen, ispat sürecinde ortaya çıkan muhakeme hatalarını derinlemesine analiz etmeyi amaçlayan çalışmaların yapılması önemlidir.

İspat sürecinde ortaya çıkan hatalı muhakemeler; temelde muhakeme hatası, muhakeme eksikliği ve muhakeme boşluğu şeklinde üç ana kategoriye ayrılabilir (Selden ve Selden, 2003). Bu çalışmada muhakeme hatalarını daha geniş bir yelpazede incelemek amacıyla literatürdeki ortak tanımlamalara bağlı olarak ispat sürecinde yapılan muhakeme hataları; hatalar, eksiklikler ve boşluklar şeklinde bir ayırım yapılarak farklı kategoriler halinde incelenmiştir. Bu kategoriler muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri

ve muhakeme boşlukları şeklindedir. Bu kategorilerinin nasıl oluşturulduğu, neden böyle bir ayırmaya karar verildiğinin, hangi noktalarda benzerlik veya farklıklarının olduğunun daha net anlaşılması için her bir kategori tanımlanarak açıklanmaya çalışılacaktır.

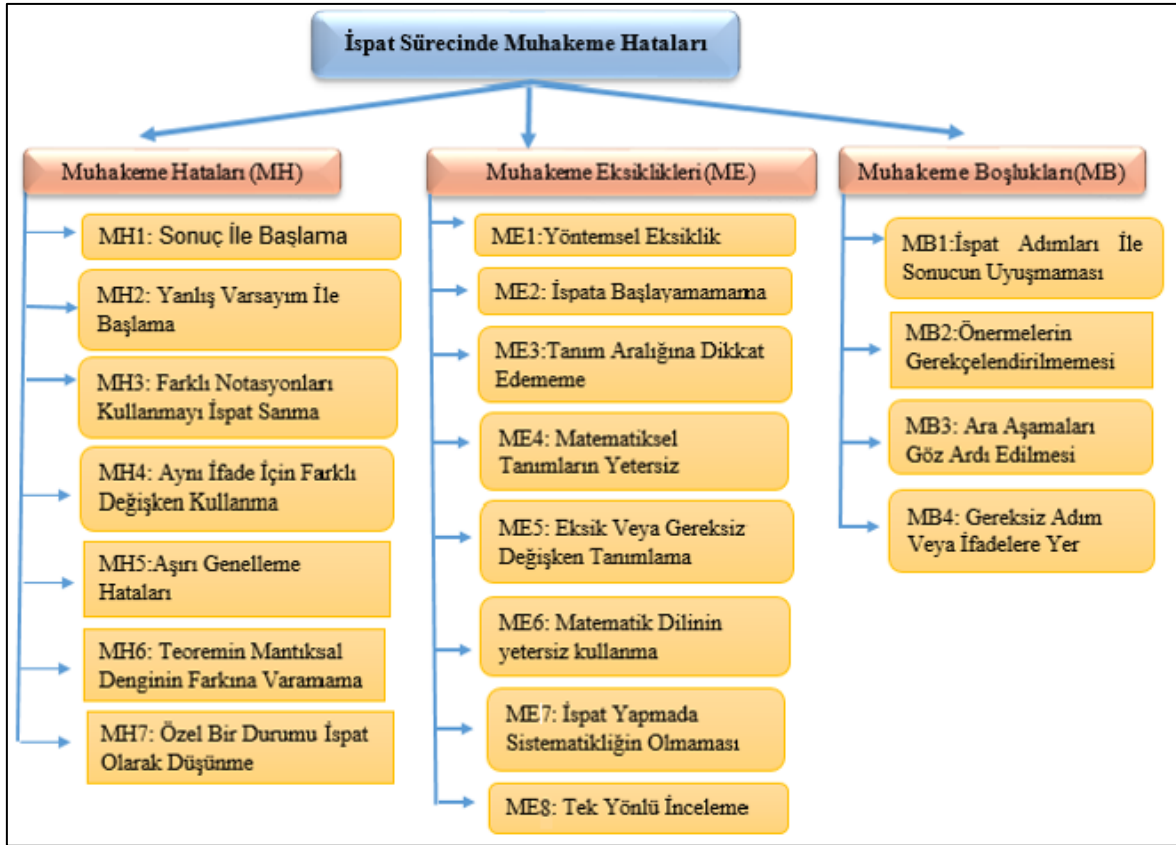
Muhakeme hataları; ispat sürecinde öğrencilerin matematiksel bir ilişkinin ispatını yaparken kendilerine mantıklı gelen ve adım adım ilerlemesini sağlayan muhakemeler sonucunda sistematik bir yanılığa düşerek geçerli olmayan ispatları oluşturulmalarıdır. İspat sürecinde sonuç ile başlama başka bir ifadeyle var olan bir gerçek üzerinden başlayarak ulaşılmaması gereken matematiksel ifade ile ispata yönelik bir başlangıç yapma, özel bir durumdan veya birkaç sayısal değerden elde edilen sonucu ispat olarak kabul etme, teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunu fark edememe, yanlış varsayımlarla başlama başka bir ifade ile ispatı istenen matematiksel bir ifadenin hipotez ve hüküm kavramlarını karıştırma, farklı notasyonları kullanmayı ispat olarak düşünme ve aşırı genelleme muhakeme hatası olarak nitelendirilebilir. Öğrenciler ispat yaparken konunun doğasından, çeşitli kavram yanlışlarından veya başka sebeplerden dolayı hatalı muhakemelerde bulunarak geçerli olmayan ispatlar oluşturabilmektedir (Selden ve Selden, 2003). Ancak öğrenciler bu durumun farkına varamamaktadır çünkü ileri sürdükleri çıkarımların muhakeme hatası olduğunun farkında değildirler. Selden ve Selden (2003) bu tür muhakeme hatalarından kaynaklanan ispatların biçimsel olarak kabul edilebilir gibi görüldüğü ve sentaktik olarak doğru cümleleri içerdiği ancak temelde yanlış varsayım ve hatalı muhakemelere dayalı olarak oluşturulmuş geçersiz ispatlar olduğunu belirtmiştir. Stylianides ve Stylianides (2009) bazı öğrencilerin ispat sürecinde farkında olmadan birçok hatalı muhakeme yürüttüklerini, bir ispatı yapmayacaklarını hissettiklerinde doğru olmayan bazı stratejileri ileri sürdüklerini bunun sonucunda cevap olarak bir şeyler yazmaya çalışabildiklerini belirtmiştir. Yapılan birçok çalışma da öğrencilerin bu tür ispatlar oluşturabildiğini ve bunların doğru olduğunu kabul edebildiklerini göstermektedir (Harel ve Sowder, 2007; Knapp, 2005; Selden ve Selden, 1995; Weber, 2001;)

Muhakeme Eksikliği; ispat sürecinde yöntem, tanım aralığı, matematik dili gibi eksikliklerle ispatların tamamlanması veya ispatlarının yarıda bırakılmasından kaynaklanan durumlardır. Bu durumlar muhakeme hatasından ziyade doğru bir muhakeme ile başlanması ancak bazı matematiksel bilgi eksikliklerine bağlı olarak ispatın istenilen şekilde tamamlanmamasıdır. Muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen durumlar genellikle öğrencilerin akıl yürütme süreçlerini tamamlamadan sona erdirmeleri ya da kavramsal eksikliklerinden dolayı ezber kalıp çözümlere yönelmelerinden kaynaklanmaktadır (Umay, 2007). Matematikte muhakeme eksiklikleri; konunun iyi kavranmamasıyla ortaya çıkan, matematiksel bir temeli olmayan, anlık uydurulmuş veya

eksik düşünölmüş muhakemelerdir (Russell, 1999). Birçok çalışma da öğrencilerin muhakeme eksikliğinden dolayı ispatları yapamadıkları veya yarım bıraktıklarını belirtmektedir. İspata nasıl ve nereden başlayacağına karar verememe (Atwood, 2001; Baker ve Campbell, 2004; Moore, 1994; Selden ve Selden, 2007a) Matematiksel tanım, teorem ve kavramların yetersiz kullanılma muhakeme eksikliklerine yönelik çalışmalar (Atwood, 2001; Baker ve Campbell, 2004; Edwards ve Ward, 2004; Epp, 2003; Ferrari, 2004; Knapp, 2006; Sarı, 2011; Selden ve Selden, 2003, 2007; Weber,2006). İspat yöntemlerin yetersiz kullanma veya ilgili matematiksel ifadenin ispatı için uygun ispat yöntemini belirlememe muhakeme eksikliğine yönelik çalışmalar (Antonini ve Mariotti, 2007; Goetting, 1995; Ko ve Knuth, 2009; Stylianides ve diğ., 2004, 2007, 2008; Thompson, 1996; Weber ve Alcock, 2009; Wu Yu, 2003).

Muhakeme Boşluğu; ispat sürecinde matematiksel bir ilişkinin ispatı oluşturulurken ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmadan ispatın tamamlanması gibi durumlardır (Selden ve Selden, 2003). Öğrenciler hatta usta matematikçiler bile ispat yaparken çeşitli muhakeme boşluklarını yapabilmektedirler. Kaçınmaları gereken bu durumlarda bazen çok hızlı bir şekilde sonuç çıkarmak için dikkatsiz girişimlerden bulunarak ispatlamaları gereken ara sonuçlarının doğrulukları göstermeden veya zincirin belli aşamalarını atlatarak son aşamaya geçerler (Descartes 1927'den akt., Fallis, 2010). Matematiksel bir ilişkinin ispatı, sonucun doğruluğunu göstermekten ziyade yazılan ispat adımlarının arasındaki ilişkileri gerekçelendirerek başlangıç ile sonuç arasında matematiksel bir dayanağa bağlı olarak bir uyumun olmasını gerektirmektedir. Aksi takdirde ispatın anlaşılması zorlaşabilir veya sonucun doğruluğunun tartişılmasına sebep olabilir.

Yapılan çalışmalar doğrultusunda muhakeme hatalarının tanımları da göz önünde bulundurarak bu çalışmada muhakeme hatalarını, muhakeme eksikliklerini veya muhakeme boşluklarını daha geniş bir yelpazede ele almak için Muhakeme Hatalarını Belirleme Ölçeği (MHBÖ) geliştirilmiştir. Aşağıda sunulan ölçeğin oluşturma aşamaları, boyutları ve her boyut altında yer alan göstergeler ayrıntılı olarak açıklanmıştır. MHBÖ'nün boyutları ve her bir boyut altında yer alan göstergeleri özetleyen Şekil 1 aşağıda yer almaktadır.



Şekil 1. Muhakeme hataları belirleme ölçeği

Yapılan çalışmalar incelendiğinde farklı araştırmacılar tarafından çeşitli muhakeme hataları belirlenmesine rağmen muhakeme hatalarının yoğunlukları ve türleri bakımından sınırlı olduğu görülmüştür. Bu çalışmada ise ispat sürecindeki muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar; muhakeme hatası, muhakeme eksikliği, muhakeme boşluğu şeklinde üç kategoriye ayrılarak incelenmiştir. Bu amaç doğrultusunda ölçeğin her boyutu ve her bir boyutun altındaki kategoriler aşağıda sunulmuştur. Bu kategoriler belirlenirken muhakeme hatalarına yönelik çalışmalardan (Andrew, 2009; Jones, 2000; Sarı-Uzun, 2013; Selden ve Selden, 2003; Weber, 2001) yararlanılmıştır ve bazı muhakeme hataları bu çalışmalardaki isimlerine bağlı kalınarak sunulmuştur. Buna göre muhakeme hataları boyutu altında 7, muhakeme eksiklikleri boyutu altında 8 ve muhakeme boşlukları boyutu altında ise 4 kategori belirlenmiştir. Her bir boyuttaki kategoriler aşağıda tanımları ile sunulmuştur.

Muhakeme hataları;

MH1: Sonuç ile başlama: Var olan bir gerçek üzerinden başlayarak ulaşması gereken matematiksel ifadeyi başlangıçta kabul ederek ispata başlanmasıdır. Bu durum geçerli bir matematiksel ifadenin sadece tersine bir işlem yapmaktan ibarettir. İspat sürecinde en sıklıkla ortaya çıkan muhakeme hatalarındandır.

MH2: Yanlış varsayımlarla başlama: İspatı istenen matematiksel bir ifadede hipotez ve hüküm kavramlarının karıştırılmasıdır. Bir başka deyişle hükmün doğru kabul edilerek hipotezin ispat edilmesidir.

MH3: Farklı notasyonlar kullanmayı ispat olarak düşünme: Matematiksel bir ifadenin farklı denkliklerinin ispat olarak düşünülmesidir. Bir bakıma matematiksel ifadenin farklı gösterimlerinin ispat kabul edilmesidir.

MH4: Aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılması: İspatta değişkenler tanımlanırken bir ifadenin birden fazla değişken ile tanımlanmasıdır.

MH5: Aşırı genelleme hataları: Bir kurala, tanıma aşırı bağlı kalınması veya reel, tam vb. sayılarda geçerli bir kuralın tüm sayı kümeleri için geçerli olduğunun kabul edilmesidir.

MH6: Teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması: Bir teoremin doğrudan ispatının yapılması zor olduğu durumlarda teoremin dengi olan karşıt tersinin kullanılmasıdır. Bu yöntem genellikle çelişki yöntemi ile karıştırılmaktadır.

MH7: Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi: Sadece özel bir durumun veya birkaç sayısal değer için ele alınarak ispatın yapılmasıdır.

Muhakeme Eksiklikleri;

ME 1: Yöntemsel eksiklik: İspata uygun olmayan bir ispat yönteminin seçilmesi ve bundan dolayı ispat adımlarında ilerlemenin kaydedilmemesi veya ispatın yanlış yapılmasıdır.

ME 2: İspata nasıl başlayacağına karar verememe: Gerekli bir matematiksel alt yapının var olmasına rağmen ispata başlanılamaması veya başlanan ispatın devam ettirilememesidir.

ME 3: Tanım aralığını dikkate almama: Matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken bu ifade için uygun olmayan değerlerin kullanılması veya tanım aralığının dışına çıkmaktır.

ME 4: Matematiksel tanımların yetersiz kullanılması: İspat yaparken matematiksel terim veya tanımların farklı anlamda veya eksik olarak kullanılmasıdır.

ME 5: Değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı: İspat adımlarında tanımlanan değişkenlerin gereğinden fazla olması veya bazı değişkenlerin eksik olarak tanımlanmasıdır.

ME 6: Matematik dilini kullanmada yetersizlik: İspat adımlarında matematiksel sembol, tanım veya teorem gibi ifadelerinin kullanımında matematik diline dikkat edilmemesidir.

ME 7: İspat yapmada sistematikliğin olmaması: İspat adımlarında uygun bir sıranın takip edilmemesi veya belli bir düzen içinde yazılmamasıdır.

ME 8: Tek yönlü inceleme: İki yönlü koşullu bir önermenin ispatı yapılırken her iki tarafın incelenmesi gerekirken sadece bir taraftan incelenerek ispatın yapılmasıdır.

Muhakeme Boşlukları;

MB 1: Yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması: Matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken elde sonucun önceki adımlara dayandırılmasına rağmen bu adımlar arasında bir ilişkinin olmaması durumudur.

MB 2: Kullanılan önermelerin gerekçelerinin sunulmaması: İspat adımlarında kullanılan önermelerin veya ortaya atılan iddiaların bir gerekçeye dayandırılmamasıdır.

MB 3: Ara aşamaların göz ardı edilmesi: İspatta yazılması gereken bazı adımların göz ardı edilmesi veya herhangi bir açıklama yapılmadan sonucun yazılmasıdır.

MB4:İspatta gereksiz adımlara veya ifadelere yer vermedir.

2. 1. 2. Konu ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Yapılan bu araştırmada matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme boşlukları ve muhakeme eksikliklerini belirleme ile birlikte öğretmen adaylarının sahip olduğu muhakeme hatalarını derinlemesine incelemek, bu hataların yoğunluklarını, devamlılıklarını, değişimlerini belirlemek ve bu tür durumlara neden olabilecek kaynakları açıklamak amaçlanmıştır. Bu bölümde ise araştırmanın kuramsal çerçevesini oluşturan ve öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarını, muhakeme eksikliklerini ya da muhakeme boşluklarına yönelik çalışmalar ile muhakeme hatalarının giderilmesine yönelik öneriler sunan diğer çalışmalar kısaca anlatılmıştır.

2. 1. 2. 1. Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Günümüzde değişen yeni yaşam koşulları hayatımızın her evresini etkilediği gibi eğitim öğretim hayatımızı da derinden etkilemektedir. Değişen yaşam şartları ile beraber yeni ihtiyaçlar veya yeni problemler ortaya çıkmaktadır. Bu değişim ve yeni yaşam koşulları üst düzey düşünme kabiliyetine sahip, mantıksal bir çerçevede karar verebilen, yeni fikirler ileri sürebilen ve problem çözme becerisine sahip bireylerin yetiştirilmesini gerektirmektedir (Çoban, 2010). Başka bir ifade ile doğru muhakemeler yürütebilen, yapabildiklerinin veya yapamadıklarının farkında olabilen, öğrenme süreçlerini bilinçli olarak şekillendirebilen ve problem çözme kabiliyetlerini geliştirme eğiliminde olan bireyler anlamına gelmektedir. Bu bakımından değişen yaşam şartlarının gerektirdiği becerilerin bireylere kazandırılmasında doğru bir muhakeme geliştirilmesi son derece önemlidir.

Çeşitli muhakemelerde bulunabilen bireyler daha etkili kararlar vererek yaşamlarını kolaylaştırmaktadır (Erdem, 2011).

Muhakeme, yaşamın her alanında olduğu gibi matematik öğretme ve öğrenmenin de merkezinde yer alan temel kavramlardan biridir (Russell, 1999). Matematiksel düşünme, ilişkilendirme, soyut düşünme, sezgi ve iletişim gibi matematiğin temelini oluşturan kavramlar ancak doğru bir muhakemede bulunmayı öğretmekle kazandırılabilir. Ross (1998) öğrencilerin doğru bir muhakemede bulunma yeteneğini geliştiremedikleri zaman matematiği sadece anlaşılması zor, belirli kuralların olduğu, bir yığın soyut tanım ve teoremlerden oluştuğunu düşünerek bunlar arasında herhangi bir ilişki kurmadan ezber kalıplarla matematiksel ilişkiyi ispatlamaya çalıştıklarını ifade etmektedir. Bu bakımdan muhakemenin matematiksel kavram ve ilişkilerin anlam kazandırılmasından önemli bir role sahip olduğu düşünülebilir.

Matematik eğitiminin önemli amaçlarından biri, bireylere gerekli matematiksel düşünme becerisi ile beraber doğru bir muhakeme yürütme becerisini kazandırmaktır. Matematiksel düşünme ve muhakeme yeteneği gelişmiş bir birey; matematiksel problem veya etkinliklerle uğraşırken daha fazla çaba sarf edebilir, çeşitli stratejiler geliştirebilir, tahmin veya varsayımlarda bulunabilir ve elde ettiği sonuçları ispatlayabilir ya da genelleyebilir (Baki, 2008). Matematiksel muhakeme bireylerin ulaştıkları sonuçlarda tutarlı ve mantıksal karar vermelerini sağlar ve en fazla ispat sürecinde kullanılır. İspat ve muhakeme birbirini tamamlayan ve matematiğin temel yapılarıdır. Birey ispat sürecinde muhakemeler yürüterek çeşitli stratejiler geliştirir. Ancak bazen bu stratejiler sonucunda sistematik bir yanılığa düşerek geçersiz ispatlar oluşturur. Altıparmak (2005) öğrenciler ispat sürecinde istenilen sonuca ulaşmaları için doğru bir muhakeme yürütme ve uygun stratejiler belirlemeye bağlı olduğunu aksi takdirde ezber yolu ile yapılan, neden sonuç ilişkisi kurulmadan ve birbirini takip etmeyen sonuçlar elde edileceğini belirtmektedir. Yapılan çalışmaların çoğunda da (Almeida, 2000; Andrew, 2009; Dreyfus, 1999; Harel ve Sowder, 1998; Jones, 2000; Moore, 1994; Recio ve Godino, 2001; Selden ve Selden, 2003; Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007; Weber, 2001; Weber, 2004) öğrencilerin ispat sürecinde birçok muhakeme hatası, muhakeme eksikliği veya muhakeme boşluğuna sahip olduğu belirtilmektedir. Andrew (2009) ispat sürecinde yapılan muhakeme hatalarını değerlendirmek amacıyla geliştirmiş olduğu ölçekte bu hataları iki kategoriye ayırarak bu kategoriler altında incelemeler yapmıştır. Kategorilerden biri ispat yapısı (proof structure), diğeri ise kavramsal anlama (conceptual understanding)dir. Her bir kategori kendi içinde farklı göstergeler ile isimlendirilmiştir. İspat yapısı kategorisi altında belirlenen muhakeme hataları (S2, S3, S4 ve S9), muhakeme eksikliği (S1, S8 ve S10) veya muhakeme boşluğu (S5, S6 ve S7) aşağıda sunulmuştur.

S1: İspat yaparken değişken kullanımda tanım aralığının dikkate alınmaması.

S2: Belirlenen yaklaşımın ispatta işe yaramaması.

S3: Özel bir durum düşünülerek ispatın yapılması veya matematiksel bir önermenin doğruluğunun tek bir örnekle gösterilmesi.

S4: İspata başlarken yanlış bir varsayımda bulunulması.

S3: İspat yaparken mantıksal adımlar takip edilmemesi.

S6: Yapılan ispatın aşırı detaya sahip olması veya izlenen adımların ispata herhangi katkı sağlamaması.

S7: İspatın gereğinden fazla uzun olmasından dolayı adımların takip edilmesinin zorlaşması.

S8: Yapılan ispatın okunaksız olması veya zor anlaşılması yani sistematığe dikkat edilmemesi

S9: Bir önermenin doğrudan gösterilmesinin zor olduğu durumlarda karşıt tersinin gösterilmesi veya çelişki yöntemini kullanımının bilinmemesi.

S10: İspat yaparken kullanılan sembollerin doğru olmaması veya gereksiz değişkenlerin kullanılması sonucundan bir karışıklığın olması

Kavramsal anlama kategorisi altında belirlenen muhakeme hataları (U4), muhakeme eksikliği (U2, U3 ve U7) veya muhakeme boşluğu (U1, U5, U6 ve U8) aşağıda sunulmuştur.

U1: Gereçeklendirilmemiş, doğrulanmamış veya açıklanmamış bir önermenin yazılması.

U2: Belirsiz veya gereğinden fazla karmaşık önermenin ve ifadenin yazılması.

U3: İspatın anlaşılmasını kolaylaştıran ispat yöntemlerinin kullanılmasında başarısız olunması.

U4: İspatta bazı doğrulamaları sağlayan genel kural veya tanımlara aşırı bağlı kalınması.

U5: İspatın ara aşmalarında gerekçelendirme yapılırken yetersiz kalınması veya bu adımların herhangi bir gerekçeye dayandırılmaması

U6: Önceki adımlarda yapılan bir hatanın diğer önemli adımları etkilemesi veya ilk adım ile sonucun uyuşmaması

U7: Yanlış ifadelerin yazılması ve işlem hatalarının yapılması.

U8: İspatta bazı önemli durumların gösterilmemesi veya bazı ara aşamaların atlanması

Selden ve Selden (2003) uzun yıllar hem matematik öğretmenliği programlarında hem de pür matematik programlarında lisans düzeyinde yürüttükleri soyut cebir, soyut matematik ve sayılar teorisi gibi temel matematik derslerinde elde ettikleri örneklere ve

öğrencilerle gerçekleştirdikleri mülakatlara dayanarak öğrencilerin birçok muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşluklarına sahip olduklarını belirtmişlerdir. Ayrıca ispat sürecinde karşılaşılan zorlukların veya oluşturulan geçersiz ispatların altında yatan nedenin muhakeme hatalarından kaynaklanabileceğini belirtmişlerdir. Bu tür muhakeme hatalarının bazılarının kavram yanılgılarından kaynaklanabileceğini diğerlerinin ise ispatın doğası, teknik veya başka sebeplerden dolayı oluşabileceğini ifade etmişlerdir. Çalışmada çok farklı öğrencilerden ispat sürecinde benzer muhakeme hatalarını tespit edilerek elde edilen muhakeme hataları; kavram yanılgıları ve kavramsal olmayan nedenler kategorileri altında sınıflandırmışlardır. Bu çalışmada elde edilen muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşlukları aşağıda temel başlıklar halinde sunulmuştur.

1. Sonuç ile başlama: Öğrenci ispat sürecinde bariz bir gerçeğin farkına vararak veya ön görerek (karesi alınan sıfırdan farklı her sayının pozitif olması gibi) ve ispatı istenilen sonucu doğru kabul ederek ispata başlıyor. Böylece ispat düşüncesi başlanmadan tamamlanıyor. Bu durum, sadece doğru kabul edilen matematiksel bir ilişkinin geriye dönük geçerli adımları takip etmekten ibarettir.
2. Hatalar Bolluğu: öğrenci ispatı oluştururken birçok yanlış varsayım, kabul veya tanım hatasıyla başlar. Örneğin 3 ün katı tek bir ifadeyi $n=3k+1$ şeklinde düşünerek ispata başlar ve geçersiz bir ispat oluşturur.
3. Belirgin farklılıkların geçerliliği: Öğrenci sayısal olarak verilen matematiksel ifadelerin birbirlerine denk olduğunu bilir.(Örneğin $2/3= 4/6 =6/9...$ gibi) ancak soyut ifadeler için bu denkliği fark etmeyerek matematiksel bir ifadenin farklı notasyonlarını ispat olarak düşünür veya aynı ifade için birden çok değişken kullanır.
4. Reel sayılardaki ilişkilerin evrensel olduğunu kabul eder: Öğrenci ispat sürecinde bazı kuralları aşırı genelleştirerek bütün sayı kümeleri için geçerli olabileceğini düşünür. Örneğin $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ ise $a.b = 0$ olabileceğini ön görmez. Yani matris veya başka matematiksel kümeleri düşünmez.
5. Açıklar /boşluklar: Öğrencinin oluşturduğu ispatta önceki adımlarından elde ettiği sonucun çıkmaması. Başka bir ifade ile yazılan ispat adımları ile elde edilen sonucun uyuşmaması.
6. Teoremin Karşıt Ters: Öğrenciler ispat sürecinde matematiksel bir ilişkinin ispatının doğrudan gösterilmesi zor olduğu durumlarda bu ifadenin dengi olan ifadeyi kullanarak ispat yapabilirler. Bu eğilimi gösteren öğrencilerin çoğunun bir teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal eşit olduğunu fark etmiyor ya da bu ispat yöntemini çelişki yöntemiyle karıştırıyor.

Diğer çalışmalarında (Selden ve Selden 1995, 2007a, 2009 2014) benzer şekilde üniversite öğrencilerinin, ispat sürecinde geçerli bir ispat için doğru bir muhakeme yürütmede zorlandıkları, genel sonuçlara ulaştırmalarını sağlayacak mantıksal stratejiler geliştirmediklerini buna karşılık olarak herhangi matematiksel bir dayanağı olmayan geçersiz ispatlar veya mantıksal olarak anlaşılmas ispatlar oluşturabildiklerini belirtmişlerdir. Ayrıca bu çalışmalarda öğrencilerin ispat sürecinde matematik dilini doğru kullanamama, ispata başlayamama, tanım aralığına dikkat edememe, ispat yöntemlerini uygun kullanamama ve ispatı istenen matematiksel ilişkinin hipotez ile hükümlerini karıştırma gibi birçok muhakeme hatası, muhakeme eksikliği veya muhakeme boşluğuna sahip olabileceklerini ifade etmişlerdir.

Sarı (2011) matematik öğretmen adaylarının ispat sürecinde yaşadıkları zorlukları ve ilgili matematiksel ifadelerin ispatını yapmak için geliştirdikleri muhakeme ve ispat yapma biçimlerini belirlemek amacıyla yaptığı doktora tezi çalışmasında, öğretmen adaylarının ispat sürecinde birçok muhakeme hatasına sahip olduklarını belirtmiştir. Bununla birlikte çalışmada öğretmen adaylarının ispat sürecinde çeşitli zorluklar yaşadığını ve bu zorluklar veya muhakeme hatalarının çalışma için geliştirilen "Öğretme Deneyi" yöntemiyle belli bir oranda azaltılabileceği görülmüştür. İlgili çalışmada, ispat sürecinde öğretmen adaylarının sahip olduğu muhakeme hataları veya ispat sürecinde yaşanan zorluklar belli başlıklar altında kategorize edilmiştir.

1. Matematiksel dil ve notasyonun doğru kullanılmaması veya yetersiz kullanılması,
2. İspat çerçevesini oluşturamama
3. Uygun ispat yöntemini seçememe veya belli bir ispat yöntemine odaklanma
4. İspata başlayamama veya düşündüklerini matematiksel olarak ifade edememe
5. Matematiksel kavram ve tanımlara yönelik bilgi eksikliği
6. Mantıksal hata ve yetersizlikler yani muhakeme hataları veya muhakeme eksiklikleri
7. Açıklayıcı ispatlar oluşturamama veya önermeleri gerekçelendirememe
8. Hipoteze ekleme yapma veya sonucu var sayma

Umay ve Kaf (2005) ilköğretim ikinci kademe öğrencilerinin sahip oldukları muhakeme hatalarını veya muhakeme eksikliklerini belirlemek amacıyla bir çalışma yapmışlardır. Çalışmada elde edilen sonuçlar incelendiğinde birçok öğrencinin hatalı muhakeme yürüttüğü görülmüştür. Bu muhakeme hataları, öğrencilerin genellikle akıl yürütme sürecini henüz tamamlamadan sona erdirme ya da kavramsal eksikliklerinden dolayı alıştıkları kalıp çözümlere yönelme olarak değerlendirilmiştir. Öğrencilerin sahip

oldukları muhakeme eksiklikleri veya zayıf akıl yürütme olarak nitelendirilen durumların da çok yüksek oranlarda olduğu belirlenmiştir.

Moore(1994) yaptığı çalışmada, lisans düzeyinde eğitim gören öğrencilerinin matematiksel ispatları oluştururken ispat sürecinde yaşadıkları bilişsel zorlukları ve bu zorlukların muhtemel kaynaklarını incelemiştir. İspat sürecinde yaşanan zorlukların altında doğru bir matematiksel muhakemenin yürütülmemesi olabileceğini belirtmiştir. İlgili çalışmada belirlenen muhakeme hataları ve zorluklar; kavramları anlamama veya tanımları yetersiz kullanma, matematiksel dil ve notasyonu doğru kullanamama, ispata başlayamama, sezgisel anlama açısında yetersiz olma, genel sonuçlara ulaştıracak muhakemeler geliştirememeye olarak ön plana çıkmaktadır.

Knapp(2005) yaptığı çalışmada ispat sürecinde öğrencilerin sahip oldukları muhakeme hatalarını genel olarak iki kategoriye ayırmıştır. Birincisi, ispat sürecinde muhakeme, dil, mantık, kültür, iletişime bağlı olarak doğru stratejiler geliştirememeye; ikincisi ise ispat sürecinde matematiksel tanımlar, teoremler, soyutlama, genelleme gibi alana özgü kavram ve terimlere bağlı olarak ispatları oluşturma açısından yetersiz olmalarıdır.

Weber(2001) ispat sürecindeki muhakeme hataları, muhakeme boşlukları ve muhakeme eksikleri “kavram anlama, matematiksel dil ve notasyon, ispata başlama” altında incelemiştir. Diğer bir çalışmalarında, Weber (2006, 2009) öğrencilerin ispat sürecinde doğru bir ispat kavramına veya tanım, teorem gibi matematiksel kavramlarla ilgili bilgilere sahip olsalar da ilgili önermeleri ispatlayamayabileceğini belirtmiştir. Bu durumun sebebi olarak, ispat sürecinde öğrencilerin uygun stratejilere karar vermeyerek muhakeme hatları yapmalarından kaynaklandığını ifade etmiştir.

Jones(2000) yaptığı çalışmada ispat sürecinde öğrencilerin anlama ve ispatı oluşturmada sıkıntı yaşama, muhakeme adımlarını takip edememe, resmileştirememeye, benzer ispatlarda aykırı sonuç bulma gibi muhakeme hataları ve zorlukları tespit etmiştir. Ayrıca ispat sürecinde uygun kavram ve işlemleri bilen öğrencilerin de hata yaptıkları ve bu durumun da yanlış muhakeme yürütmeden kaynaklandığını belirtmiştir.

2. 2. Literatür Taramasının Sonucu

Literatürde ispat, muhakeme, ispat sürecinde muhakeme ilgili birçok çalışma mevcut iken muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşlukları ile ilgili daha az çalışma mevcuttur. Bu çalışmalar yardımıyla ilk olarak muhakemenin kapsamı, ispat ve muhakeme arasındaki ilişki ve ispat sürecinde muhakemenin rolü belirlenmeye çalışılmıştır. Bu anlamda literatür, muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerinin veya muhakeme boşluklarının çeşitlerinin ve yoğunluklarının belirlenmesi, bu hatalarının nedenleri ve kapsamının belirlenmesine katkı sağlamıştır. Muhakeme hataları, muhakeme

eksiklikleri veya muhakeme boşlukları ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde genellikle belli bir konu veya dönem ele alınarak araştırılmıştır (Almeida,2003; Selden ve Selden, 2003; 2007; 2011; Stylianides ve Stylianides, 2009; Umay ve Kaff, 2005; Weber, 2001, 2009). Bununla birlikte muhakeme hataları için genel bir çerçeve oluşturma (Andrew,2009; Stylianides ve Stylianides, 2012; Selden ve Selden,2003), ispat sürecinde yaşanan zorluklar ve muhakeme hatalarını ele alma (Birinci, 2010; Fraiser, 2010; İmamoğlu, 2010; Hanna ve Jahnke 1996; Haverhals, 2011; Moore,1994; Sarı, 2011; Selden ve Selden 1995; VanSpronsen, 2008) çalışmalar da mevcuttur. Bu çalışmalarda muhakeme hatalarının belli bir boyutu incelenmiş veya ispat sürecinde yaşanan zorluklar olarak betimlenmiştir. Ancak bu durum sadece ispat sürecinde muhakeme hatalarının çeşit ve yoğunlukları hakkında bilgi vermekle sınırlı olduğu düşünülmektedir. İspat sürecinde öğrencilerin sahip olduğu muhakeme hatalarını, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarını belirlemekten ziyade bu hatalarının doğası ve alınan eğitimle ilişkisinin belirlenmesi; hata, eksiklik veya boşlukların derinlemesine analiz edilerek matematiksel muhakemenin gelişmesine nasıl bir katkı sağladığını belirlemek gerekmektedir (Hartman, 2001; Kramarski ve Zoldan, 2008). Bu çalışmada, bütün bu boyutlar dikkate alınarak, ispat sürecinin kaçınılmaz bir parçası olan muhakeme hatalarını, muhakeme eksikliklerini ve muhakeme boşluklarını analiz etme; bunları geniş bir yelpazede ele alma; ispat sürecinde ileriye sürülen muhakemelerin sistematik hatalara nasıl dönüştüğünü analiz etme; öğrencilerin ispat yaklaşımlarını belirleme ve bunların muhakeme hataları ile ilişkisini inceleme; öğretim elemanlarının kullandığı öğretim metot ve yaklaşımlarının muhakeme hatalarının üzerindeki etkisinin belirlenmesi ön planda tutulmuştur.

Yapılan araştırmalar, ispat sürecinde öğrencilerin sahip oldukları muhakeme hatalarını belirleyerek analiz etmenin; öğrencilerin doğru bir ispat anlayışının kazanma ve matematiksel muhakemelerinin gelişmesine katkıda bulunduğunu göstermektedir (Almeida, 2000; Dreyfus, 1999; Harel ve Sowder, 1998; Jones, 2000; Moore, 1994; Recio ve Godino, 2001; Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007; Weber, 2004). Öğrencilerin ispat sürecinde çeşitli matematiksel tahmin ve varsayımlarda bulunmaları ve bunları ispatlayabilmeleri büyük ölçüde doğru bir matematiksel muhakeme geliştirmelerine bağlıdır (Yavuz-Mumcu, 2011). Matematiksel düşünme, karar verme, problem çözüme, ileri sürülen stratejilerle genellemelere ulaşma gibi ispat sürecinde bireyin düşünsel yapasının gelişmesinde doğru bir muhakemenin kazanılması önemlidir. Bundan dolayı matematik öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerinin ve muhakeme boşluklarının belirlenmesi; matematik öğretmeni adaylarının üniversiteye ne tür muhakeme hatalarıyla geldiklerinin belirlenmesi; üniversite eğitimleri boyunca bu hatalarının gelişimsel olarak nasıl değiştiği; hangi hatalarının direnç

gösterdiği, hangilerinin azaldığı veya yeni hataların olup olmadığının incelenmesi önemlidir. Çünkü doğru bir muhakeme, ispat sürecinde bilgilerin tam ve doğru bir şekilde inşa edilerek kendi içinde tutarlı sonuçlar elde etme veya ispatlar oluşturulmasını sağlar. Bununla birlikte matematik öğretmen adaylarının üniversite eğitimleri boyunca ispata yönelik derslerin, matematiksel muhakemelerinin geliştirmelerinde, uygun stratejileri belirlemelerinde ve muhakeme hatalarının üzerindeki rolünün ne ölçüde olduğunun incelenmesi önem arz etmektedir. Literatürdeki birçok araştırmada bu tür çalışmaların yapılması gerekliliği vurgulanmaktadır. NCTM (2000) ispat sürecinde öğrencilerin sahip oldukları muhakeme hatalarının analiz edilip bunların matematiksel muhakemelerini arttıracak şekilde öğretim yaklaşımlarına yer verilmesini önerilmektedir. Böylece öğretmen adaylarının ispat sürecinde doğru bir matematiksel muhakeme ile düşüncelerini açıklama, sorgulama, derin düşünme, muhakeme stratejilerini çeşitlendirme ve geliştirme gibi beceriler kazanmalarına katkı sağlanabilir (Hartman, 2001; Kramarski, 2004; Kramarski ve Zoldan, 2008; Renkl, 1999). Bu çalışmada bütün bu durumlar dikkate alınarak matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının neler olduğunu detaylı bir şekilde incelemek, bu hataların üst sınıflara doğru gelişimsel olarak nasıl değiştiğini belirlemek ve analiz etmek için çaba gösterilmiştir. Bunun için bir muhakeme belirleme ölçeği geliştirilerek dönem başında, dönem ortasında ve dönem sonunda üç aşamada açık uçlu sınavlar şeklinde uygulanmıştır. Her sınav sonunda seçilen öğrencilerle muhakeme hatalarını daha derin analiz etmek ve ne tür muhakeme hatası olduğuna karar vermek için klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Bununla birlikte matematik öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları yaklaşımları, yaptıkları muhakeme hatalarını, bu süreçte öğretim üyelerinin yaklaşımları, ispatın veya ilgili konunun doğasından kaynaklanan durumlarının daha yakından ve derinlemesine incelemek için ispatların yoğun olduğu analiz, soyut matematik, cebir ve sayılar teorisi gibi derslerde gözlemler gerçekleştirilmiştir. Bu derslerde ispat sürecinde muhakeme veya muhakeme hatalarına yönelik durumlar geliştirilen gözlem formunun kategorilerine göre sınıflandırılarak veri olarak kayıt edilmiştir. Bu bakımdan bu çalışmanın, önceki araştırmalardan farklı olarak öğretmen adaylarının ispat sürecinde yaptıkları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının geniş bir yelpazede ele alma, bu tür hataları derinlemesine analiz etme, öğretmen adaylarının ispat süreçlerini gözleme, hem öğretim elemanlarıyla hem öğretmen adaylarıyla çeşitli mülakatlar gerçekleştirme, güz döneminin başında uygulanan testlerle öğretmen adaylarının üniversiteye ne tür muhakeme hatalarıyla geldiklerini belirleme, üniversite eğitimleri boyunca bu hatalarının nasıl değiştiğini gelişimsel olarak incelemeyi amaçlaması araştırmanın farklılığını göstermektedir.

3. YÖNTEM

Çalışmanın amacı doğrultusunda izlenen yol; araştırmanın modeli, tasarımı, örnekleme, veri toplama araçları ve verilerin analizi başlıkları altında incelenecektir.

3. 1. Araştırmanın Modeli

Matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme boşlukları ve muhakeme eksikliklerini belirlemek amacıyla hazırlanan bu çalışma nitel ve nicel yaklaşımların kullanıldığı enlemsel gelişimsel bir araştırmadır. Çalışmada açık uçlu sınavlar, klinik mülakat ve gözlemlerle öğretmen adaylarının sahip olduğu muhakeme hatalarını derinlemesine incelemek, bu hataların yoğunluklarını, devamlıklarını, değişimlerini belirlemek amaçlanarak var olan durumu olduğu gibi resmedilmeye çalışılmıştır.

3. 2. Araştırmanın Tasarımı ve Yürütülmesi

Matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme boşlukları ve muhakeme eksikliklerini gelişimsel olarak incelemek amacıyla hazırlanan bu çalışmada izlenen süreç "araştırmanın tasarlanması, araştırmanın uygulanması ve değerlendirilmesi" şeklinde üç aşamadan oluşmaktadır. Her bir aşama aşağıdaki gibi özetlenmiş ve devamında akış diyagramı ile görselleştirilmiştir.

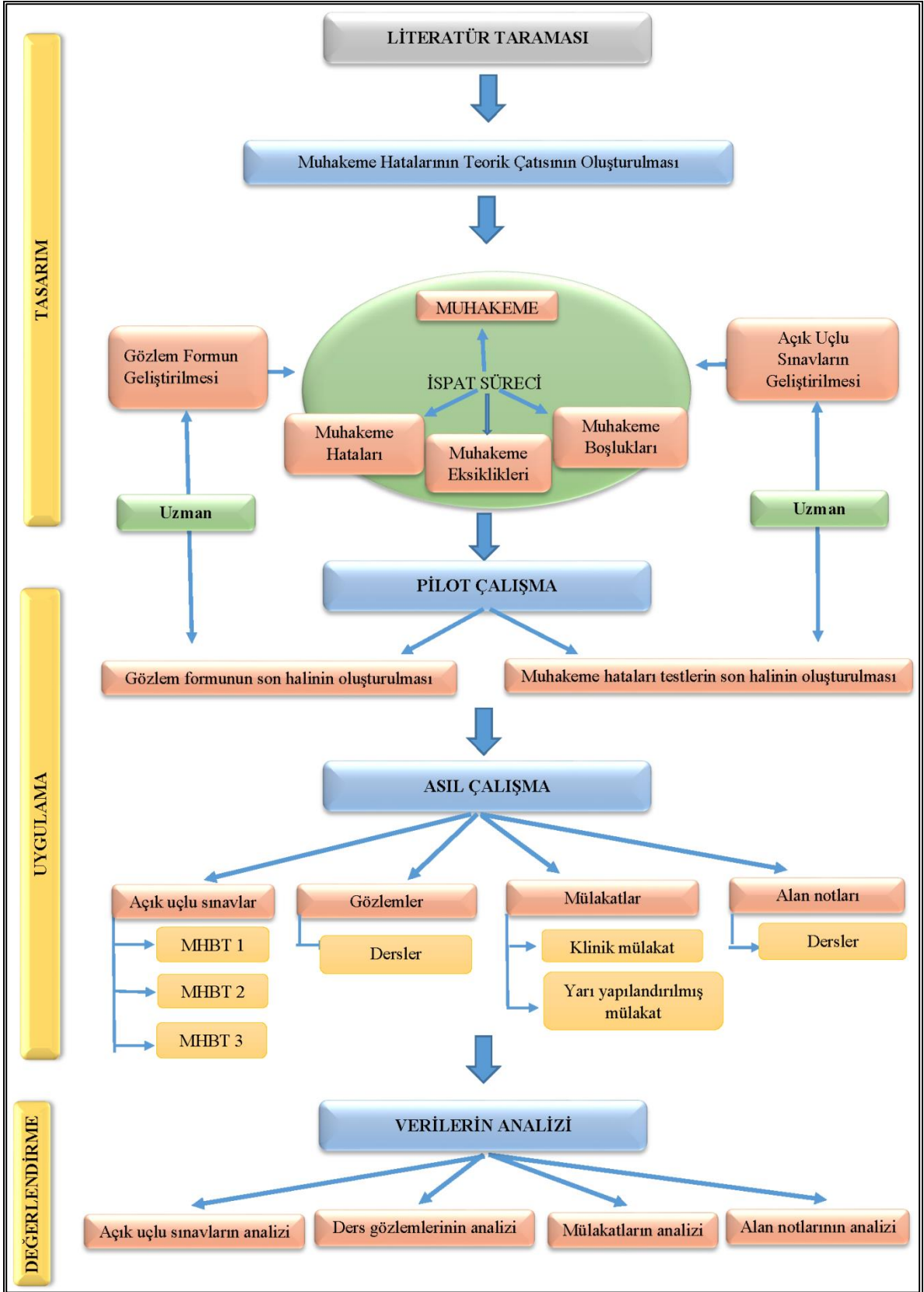
Çalışmanın ilk aşaması olan araştırmanın tasarlanması; araştırmanın probleminin belirlenmesi ve çalışmada izlenecek yol ve kullanılacak olan diğer içeriklerin düzenlenmesi sürecini içermektedir. Araştırmanın problemini belirleyebilmek için öncelikli olarak ispat sürecinde yer alan muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları, bunların matematik eğitimindeki yeri, ispat öğretiminde muhakeme hatalarının belirlenmesine ve bunların gidermesine yönelik izlenen yaklaşımlar ile ilgili literatür taraması yapılmıştır. Yapılan literatür taraması sonucunda matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hatalarının çeşitleri ve yoğunlukları belirlenmiştir. Bununla birlikte yapılan çalışmalarda genel olarak muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerinin veya muhakeme boşluklarının sadece belli bir boyutu incelenmiş veya bu muhakeme hataları, eksiklikleri ve boşlukları ispat sürecinde yaşanan zorluklar olarak betimlenmiştir. İspat sürecinde öğrencilerin sahip olduğu muhakeme hatalarını, muhakeme eksikliklerini ve muhakeme boşluklarını belirlemekten ziyade bu hataların doğası ve üniversitede alınan eğitimle ilişkisinin belirlenmesi; hata, eksiklik veya

boşlukların derinlemesine analizi yapılarak matematiksel muhakemenin gelişmesine nasıl bir katkıda bulunduğunu belirlemek gerekmektedir. Bu çalışmada, belirtilen durumlar dikkate alınarak, ispat sürecinin kaçınılmaz bir parçası olan muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarını belirleme; ispat sürecinde ileriye sürülen muhakemelerin sistematik hatalara nasıl dönüştüğünü analiz etme; öğrencilerin ispat yaklaşımlarını belirleme ve bunların muhakeme hataları ile ilişkisini inceleme; öğretim elemanlarının kullandığı öğretim yöntem ve yaklaşımlarının muhakeme hatalarının üzerindeki etkisini belirleme ön planda tutulmuştur. Bu amaç doğrultusunda araştırma; farklı sınıf seviyelerinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşluklarını belirleme ve bu hata, eksiklik ve boşlukların lisans eğitimleri boyunca nasıl bir değişim gösterdiğini kesitsel – enlemsel bir gelişimsel araştırma olarak tasarlanmıştır. Bu model doğrultusunda muhakeme hatalarının belirlenmesine yönelik açık uçlu sınavların tasarlanması ve uygulama zamanlarının belirlenmesi, taslak ders gözlem çizelgesinin oluşturulması, klinik mülakat, alan notları gibi süreç içerisinde kullanılacak diğer araçlarla ilgi bazı planlamalar yapılmıştır.

Çalışmanın ikinci aşaması olan uygulama aşaması, pilot uygulama ve asıl uygulama olarak belirlenmiştir. Pilot uygulama; 2014-2015 eğitim-öğretim yılında güz dönemi ve bahar döneminde gerçekleştirilmiştir. Pilot uygulama ile araştırmacının deneyim kazanması, muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının belirlenmesine yönelik geliştirilen açık uçlu sınavlar, gözlem formları gibi veri toplama araçlarının işlevselliğinin belirlenmesi ve gerekiyorsa yeniden düzenlemelerin yapılması, veri toplama araçlarının geçerlik ve güvenilirliğinin yapılması, klinik mülakatların, açık uçlu sınavların uygulanması, gözlemlerin sınıf ortamında yapılması amaçlanmıştır. Pilot uygulama sonucunda araştırmacının gözlemleri, oluşturulan açık uçlu sınavların, gözlem formlarının uygulanması esnasında ortaya çıkan durumların her biri değerlendirilerek açık uçlu sınavlardaveya gözlem formunda yer alan sorular ve göstergeler yeniden düzenlenerek dikkat edilecek hususlar gözden geçirilmiştir. Bunların sonucunda ispat sürecinde geliştirilen muhakeme hatalarını belirleme testleri, gözlem formlarının asıl çalışmada uygulanan son halleri elde edilmiştir. Araştırmanın uygulama aşamasının son kısmı olan asıl uygulama ise 2015-2016 eğitim-öğretim yılının güz dönemi 6 hafta ve bahar dönemi 6 hafta olmak üzere toplamda 12 hafta boyunca gerçekleştirilmiştir. Asıl uygulamada muhakeme hatalarını belirleme testlerinin (MHBT) uygulanması, ders gözlemlerinin yapılması ve klinik mülakatların gerçekleştirilmesine yer verilmiştir. Öncelikle araştırmanın problemleri ve amacı doğrultusunda güz dönemi ders gözlemleri öncesinde MHBT1, güz dönemi ders gözlemleri sonrasında MHBT2 ve bahar dönemi ders gözlemleri MHBT3 olmak üzere üç aşamalı olarak uygulanmıştır. Her uygulamanın sonunda, seçilmiş

olan öğretmen adaylarıyla klinik mülakatlar gerçekleştirilerek muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları derinlemesine analiz edilmeye çalışılmıştır. Ortaöğretim matematik öğretmenliği programında okutulan ve ispatların yoğun olarak işlendiği derslerde sınıf içi gözlemler gerçekleştirilmiştir. Gözlem formunun eşliğinde güz döneminde Analiz-I, Cebir-I, Matematiğin Temelleri, Sayılar Teorisi, Lineer Cebir-I dersleri ve bahar döneminde Analiz-II, Cebir-II, Soyut Matematik, Lineer Cebir-II dersleri haftada iki saat olmak üzere her bir dönemde 6 hafta boyunca gözlemlenmiştir.

Çalışmanın üçüncü aşaması olan değerlendirme aşaması ise araştırma verilerinin toplanması ve analiz edilmesidir. Öncelikle her bir dersin gözlemlenmesi ile elde edilen kayıtlar bilgisayar ortamında yazıya dökülerek transkriptler oluşturulmuştur. Oluşturulan transkriptlerde yer alan her bir davranış gözlem formu yardımıyla kodlanarak analiz edilmiştir. Muhakeme hatalarını belirleme testlerinin uygulanması sonucunda elde edilen veriler de benzer şekilde muhakeme hatalarını belirleme ölçeğinin yardımıyla bulgularda sunulmak üzere analiz edilmiştir. Bunların yanı sıra klinik mülakatlar ve alan notları da analiz aşamasında araştırmacıya yol göstermiştir. Araştırma sürecinde izlenen adımları gösteren akış diyagramı Şekil 2'de sunulmuştur.



Şekil 2. Araştırma boyunca izlenen adımlar

3. 3. Pilot Çalışma

Pilot çalışmada araştırmancının problem durumlarının daha net olarak belirlenmesi, ispat sürecinde matematik öğretmeni adaylarının sahip oldukları muhtemel muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları hakkında bilgi edinilmesi, oluşturulan muhakeme hatalarını belirleme testlerinin uygulaması esnasında ortaya çıkabilecek aksaklıkların görülmesi, veri toplama araçlarının geçerlik ve güvenilirliğinin test edilmesi amaçlanmıştır. Bununla birlikte verilerin analiz edilmesinde nasıl bir yol izleneceğine karar verilmesi ve araştırmancının deneyim kazanması bakımından pilot çalışması oldukça belirleyici olmuştur. Pilot çalışma, 2014-2015 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde matematik öğretmenliği programında okuyan birinci sınıf (20), ikinci sınıf (32), üçüncü sınıf (30), dördüncü (27) ve beşinci sınıf (25) olmak üzere toplamda 134 öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışma kapsamındaki uygulamalar normal ders saatinde dersi yürüten öğretim elemanı eşliğinde gerçekleştirilmiş ve açık uçlu sınavlar ortalama 1 saat sürmüştür. Her sınıf seviyesinden iki öğretmen adayı olmak üzere muhakeme hatalarını belirleme testlerinden sonra öğretmen adaylarıyla klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Böylece hem muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlara karar verme hem de bu tür muhakeme hatalarını daha derinlemesine analiz etme fırsatı oluşturulabilmiştir. Diğer taraftan muhakeme hatalarını belirleme testlerinin uygulandığı dönemlerde ders gözlemleri de gerçekleştirilmiştir. Ders gözlemleri ispatların yoğun olarak işlendiği Soyut Matematik, Analiz1, Analiz2, Cebir1,Cebir2, Sayılar Teorisi, Lineer Cebir derslerinde güz dönemi ve bahar döneminde haftada minimum iki saat olmak üzere 6-8 hafta süreyle gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışmada yapılan ders gözlemleri aşağıdaki Tablo 1’de gösterilmiştir.

Tablo 1. Pilot Uygulamada Gözlemi Yapılan Dersler ve Gözlem Saatleri

2014-2015 Yılı Güz Dönemi	Hafta	Saat	2014-2015 Yılı Bahar Dönemi	Hafta	Saat
Analitik Geometri	6	16	Soyut Matematik	7	14
Analiz I	7	12	Analiz II	7	14
Cebir I	6	12	Cebir II	6	12
Sayılar Teorisi	6	12	Soyut Cebir II	6	12
Lineer Cebir - I	6	12	Lineer Cebir - II	6	12
Toplam		60			62

Araştırmacı, gözlemler boyunca derslerde öğrenci gibi davranarak dersleri doğal seyrinde takip etmeye çalışmıştır. İspat sürecinde öğretim elemanlarının yaklaşımları, kullandıkları yöntemler, sordukları sorular, vurguladıkları durumlar, öğrencilerin sorduğu

sorular, verdikleri cevaplar, oluşturdıkları veya sundukları ispatlar bu süreçte yapılan sınıf içi tartışmalar not edilmiştir. Pilot çalışmada yapılan gözlemler, ispat sürecinde muhakemeye veya muhakeme hatalarına odaklanan durumların gözlemlenmesi, gözlem formunda yer alacak göstergeler için bir havuz oluşturma açısından katkı sağlamıştır. Bununla beraber gözlemler, derslerde yapılan uygulamaların ya da öğretim elemanlarının yaklaşımların muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşlukları üzerindeki etkisinin ne ölçüde olduğunu inceleme fırsatı sağlamıştır.

Pilot çalışma sonrasında araştırmmanın amacı doğrultusunda asıl uygulama için şu değişiklikler öngörülmüştür:

1. Muhakeme hatalarını belirleme testleri olarak uygulanan açık uçlu sınavların soru sayısının fazla olması nedeniyle öğretmen adaylarının zorluklar yaşadığı ve bazı soruları boş bıraktıkları görülmüştür. Bunun için soru sayısı, kapsam geçerliliğini düşürmeden ve uzman görüşü de alınarak azaltmaya çalışılmıştır.
2. Muhakeme hatalarını belirleme testleri hazırlanırken; birden çok ispat yöntemiyle yapılabilecek, öğretmen adayların bazı bilgi ya da tanımlara bağlı kalmadan da muhakeme yürütebilecekleri, birden fazla strateji geliştirebilecekleri soruların olmasına dikkat edilmiştir. Buna rağmen pilot uygulamada yer alan bazı ispatlarda öğretmen adayları gerekli bilgileri hatırlayamadıkları için ispatları boş bırakmışlar veya ezber kalıp çözümlere yönelmişlerdir. Bu nedenle tanım, kural veya formül üzerinden ispatlanacak nitelikteki ispatların muhakeme hatalarının belirlenmesi açısından uygun olmadığı düşünülmüştür. Bu durumu düzeltmek için; kural ya da formüller üzerinden cevap verilebilecek nitelikteki sorular yerine çeşitli ispat yöntemlerinin kullanılmasına, farklı düşünme biçimi ve stratejiler kullanılmasına fırsat sağlayan ve temel matematiksel bilgilerle yapılabilecek sorulara daha fazla yer verilmesine karar verilmiştir.
3. Klinik mülakatlar yapılan öğretmen adaylarının sayısının artırılması, amaçlı örneklem yönteminin kullanılmasının daha sağlıklı olabileceğine karar verilmiştir.
4. Ders gözlemleri için bir gözlem formunun bileşenleri tekrar gözden geçirilerek gerekli düzenlemelerin yapılmasına karar verilmiştir.

3. 4. Katılımcılar

Ülkemizde üniversitelerde lisans programları incelendiğinde fen fakültesinin bünyesinde yer alan matematik bölümü ve eğitim fakültesi bünyesinde yer alan matematik öğretmenliği ile ilköğretim matematik öğretmenliği programlarında yürütülen birçok derste matematiksel teorem ve önermelerinin ispatları yoğun olarak işlenmektedir. Özellikle bu

bölmelerde 1, 2 ve 3. sınıflarda zorunlu olarak birçok bölüm dersinde matematiksel ispatlar derslerin omurgasını oluşturmaktadır. Bu bakımından ilgili bölümlerin temelini oluşturan en önemli bileşenlerden olan ispatın incelenmesi, öğrencilerin bu süreci nasıl yaşadıklarının yakından gözlemlenmesi, ispat sürecinde ileri sürülen hatalı muhakemelerinin çeşit ve yoğunluklarının belirlenmesi ve bu muhakeme hatalarının analiz edilmesi önemlidir. Geleceğin öğretmeni olacak öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hatalarının belirlenmesinin önem arz etmesi ile birlikte ortaöğretim matematik dersi öğretim programında soyut düşünme, ispat gibi kazanımlarının daha yoğun olarak verilmesi araştırmada ortaöğretim matematik öğretmenliği programının örnek olarak seçilmesi bakımından bir gerekçe oluşturmuştur. Araştırmanın amacı doğrultusunda ortaöğretim matematik öğretmenliği programında okuyan 1, 2, 3, 4 ve 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hatalarını, muhakeme eksikliklerini ve muhakeme boşluklarını gelişimsel olarak incelemek istenmiştir. Ancak 2013 yılında eğitim fakültelerinin ortaöğretim bölümlerine öğrenci alınmaması nedeniyle araştırmanın asıl uygulamasının yapıldığı dönemde 3. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayları bulunmamaktaydı. İspatların yoğun olarak işlendiği derslerin fen ve eğitim fakültelerinde aynı veya benzer ders olmaları ve araştırmanın yapıldığı üniversitede bu derslerin genel olarak aynı öğretim elemanları tarafından verilmesi gibi durumlar göz önüne alınmasıyla birlikte öğretim elemanlarının görüşlerine de başvurularak araştırmanın örneklemini tamamlamak amacıyla fen fakültesi matematik bölümü 3. sınıf öğrencileri çalışmaya dahil edilmiştir. Bu çalışma, Türkiye’de yer alan bir üniversitenin ortaöğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören 1, 2, 4 ve 5. sınıf ile matematik bölümünde öğrenim gören 3. sınıf öğrencileri ile yürütülmüştür. Araştırmanın katılımcılarını gösteren Tablo 2’de yer verilmiştir.

Tablo 2. Araştırmanın Katılımcılarını Oluşturan Sınıflar ve Öğrenci Sayıları

Fakülte	Program	Sınıf	Sayı
Eğitim Fakültesi	Ortaöğretim matematik öğretmenliği	1.sınıf	21
Eğitim Fakültesi	Ortaöğretim matematik öğretmenliği	2. sınıf	18
Fen Fakültesi	Matematik	3. sınıf	34
Eğitim Fakültesi	Ortaöğretim matematik öğretmenliği	4. sınıf	34
Eğitim Fakültesi	Ortaöğretim matematik öğretmenliği	5.sınıf	32

3. 5. Veri Toplama Araçları

Bu çalışmada; matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme boşlukları ve muhakeme eksikliklerini belirleme,

derinlemesine analiz etme, gelişimsel (kesitsel–enlemsel) olarak nasıl değiştiğini inceleme, öğretmen adaylarının ispat süreçlerini gözlemlene ile birlikte bu süreci muhakeme hataları bağlamında değerlendirme amaçlamıştır. Bu amaç doğrultusunda çalışmanın veri toplama araçlarını; gözlem, muhakeme hatalarını belirleme testleri (MHBT), klinik ve yarı yapılandırılmış mülakatlar, alan notları oluşturmaktadır. Ayrıca çalışmada veri kaynağı olarak ders gözlemleri sırasında ses kaydı ve video kayıtlarından da yararlanılmıştır. Veri toplama araçları ve veri kaynakları ile ilgili genel bilgiler Tablo 3'te özetlenmiştir.

Tablo 3. Veri Toplama Araçları ve Veri Kaynakları ile İlgili Genel Bilgiler

Veri Toplama Araçları	Öğretim Elemanı	Öğrenci	Açıklama
Gözlem	√	√	Öğretim elemanlarının muhakeme veya muhakeme hataları ile ilgili kullandıkları ifadeler, sınıfta yaptıkları ispatlar, bu süreçte yapılan açıklamalar, öğretmen adaylarının muhakemesine yönelik sorulan sorular, öğretmen adaylarının verdiği cevaplar, öğretmen adaylarının sorduğu sorular, oluşturdukları veya sundukları ispatlar, teoremlerin ispatları sırasında yapılan sınıf tartışmaları gibi muhakemeye veya muhakeme hatalarına yönelik durumlar veri olarak kaydedilmiştir.
Açık Uçlu Sınavlar MHBT1, MHBT2, MHBT3		√	Matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme boşlukları ve muhakeme eksikliklerini belirlemek amacıyla sekizer eş değer sorulardan oluşan muhakeme hataları belirleme testi (MHBT), güz dönemi başında (MHBT1), güz dönemi sonunda (MHBT2) ve bahar döneminde sonunda (MHBT3) olmak üzere üç aşamada uygulanan açık uçlu sınavlardır.
Klinik Mülakatlar		√	Açık uçlu sınav uygulamalarından sonra her sınıf seviyesinde ikişer öğrenci belirlenmiştir. Daha sonra testlerin analizleri yapılırken anlaşılmayan ispatlar veya karar verilemeyen muhakeme hatalarından dolayı başka öğrencilerle de klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Çalışma kapsamında 34 öğretmen adayı ile 20 dakika ile 30 dakika arasında değişen süreyle görüşmeler gerçekleştirilmiştir.
Alan Notları			İspat sürecinde öğretim elemanlarının dersin işlenişi veya öğretmen adaylarının birbirleriyle veya öğretim elemanlarıyla olan diyaloglardan muhakeme hatalarına yönelik durumların araştırmacı tarafından bir gözlemci gözüyle tuttuğu notlardır.

Tablo 3'te görüldüğü gibi çalışmanın ana veri toplama kaynaklarını genel olarak ispatların yoğun işlendiği derslerde yapılan sınıf içi gözlem ve öğretmen adaylarına uygulanan muhakeme hatalarını belirleme testine yönelik veriler oluşturmaktadır. İspat sürecinde hangi noktalarda muhakeme veya muhakeme hatalarına vurgular yapıldığı ve bu durumların muhakeme hatalarının üzerindeki etkisinin ne yönde olduğunu belirlemek amacıyla sınıf içi gözlemler yapılmıştır. Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının üniversite eğitimlerine başlamadan önce sahip oldukları muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerinin veya muhakeme boşluklarının neler olabileceğini, bu hataların ispata yönelik işlenen derslerden sonra nasıl değiştiğini, üst sınıflara doğru gelişimsel

olarak nasıl bir değişim izlendiğini belirlemek amacıyla güz dönemi başında, güz dönemi sonunda ve bahar dönemi sonunda muhakeme hatalarını belirleme testleri uygulanmıştır. Muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumları daha derinlemesine analiz etmek amacıyla klinik mülakatlar ve yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Araştırmacı, ders gözlemlerinde çalışmanın amacı doğrultusunda ispat sürecinde muhakemeye odaklanan durumları veri olarak kaydetmek için çaba göstermiştir. Ancak öğretim elemanlarının ders esnasında vurguladıkları bazı noktaların, öğrencilerin sorduğu bazı soruların veya muhakeme hatalarına yönelik olup olmadığına tam karar verilmeyen bazı durumların sadece araştırmacının gözüyle yansıtılmasının bazı sınırlılıklar oluşturabileceği düşünülmüştür. Bu yüzden gözlemlenen dersler sonrasında öğretim elemanları ile mülakat yapılmasına karar verilmiştir. Alan notlarına ise öğretim elemanlarının yaklaşımlarının muhakeme hatalarının üzerindeki etkisini araştırmacının gözünden genel bir resmini sunabilmek için başvurulmuştur.

3. 5. 1. Gözlem

Matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme boşlukları ve muhakeme eksikliklerini belirleme, farklı derslerin bu muhakeme sürecini nasıl etkilediğini belirlemek amacıyla gerçekleştirilen bu çalışmada verilerin toplanmasında sınıf içi gözlemlerden de yararlanılmıştır. Gözlemler yapılmadan önce literatürde muhakeme ve muhakeme hatalarının kaynaklarına yönelik bileşenler belirlenmiştir. Literatür çalışmasının sonunda çalışmanın pilot gözlemleri yapılarak bu bileşenler belirli kategoriler altında sınıflandırılmıştır. Bu bileşenlere ilişkin göstergeler belirlenerek bir gözlem formu oluşturulmuştur. Bu amaçlar doğrultusunda ortaöğretim matematik öğretmenliği programında okutulan ve ispatların yoğun olarak işlendiği derslerde ispat sürecinde ortaya çıkan muhakeme hatalarını, muhakeme eksikliklerini veya muhakeme boşluklarını değerlendirebilmek amacıyla 2015-2016 eğitim öğretim yılı güz ve bahar döneminde toplamda 10 farklı dersin gözlemi yapılmıştır. Dersler ve gözlem süreleri Tablo 4'te gösterilmiştir.

Tablo 4. Asıl Uygulamada Gözlemi Yapılan Dersler ve Gözlem Saatleri

2015-2016 yılı Güz Dönemi	Hafta	Saat	2015-2016 yılı Bahar Dönemi	Hafta	Saat
Matematiğin Temelleri	8	16	Soyut Matematik	7	14
Analiz I	6	12	Analiz II	7	14
Cebir I	6	12	Cebir II	6	12
Sayılar Teorisi	6	12	Soyut Cebir II	6	12
Lineer Cebir - I	6	12	Lineer Cebir - II	6	12
Toplam		62			62

Tablo 4'te görüldüğü gibi 2015- 2016 eğitim öğretim yılının güz ve bahar döneminde 5 farklı derste 6-8 hafta boyunca her bir ders için haftada 2 saat olmak üzere gözlemler yapılmıştır. Araştırmacı, gözlemlerin yapılacağı dersleri veren öğretim elemanları ile öncesinde konuşarak gerekli izinleri almıştır. Araştırmacı, gözlemler boyunca sınıfta bir öğrenci gibi davranmıştır. Derslerde yapılan ispatlar, öğretim elemanlarının muhakeme veya muhakeme hataları ile ilgili kullandıkları ifadeler, bu süreçte yapılan açıklamalar, öğrencinin muhakemesi ile ilgili sorulan sorular, öğrencilerin verdiği cevaplar, öğrencinin sorduğu sorulara yönelik notlar tutulmuştur. Bazı derslerde teoremlerin ispatları üzerine yapılan sınıf tartışmaları esnasında veri kaybını önlemek için öğretim elemanından izin alınarak ses ya da video kaydı yapılmıştır. Ayrıca gözlemler sırasında veri kaybını önlemek ve karışıklığa mahal vermemek için öğretim elemanlarının açıklamaları, öğrenci soruları ve araştırmacının notları için farklı simgeler kullanılmıştır. Böylece gözlem notları analiz edilirken hangi ifadenin hangi kaynaktan geldiğinin karışıklığı önleyebileceği düşünülmüştür. Elde edilen gözlem notlarının her biri düzenli olarak bilgisayar ortamına aktarılmıştır.

3. 5. 1. 2. Gözlem Formunun Oluşturulması

İspatların yoğun olarak işlendiği derslerdeki gözlemlerden elde edilen bulguların değerlendirilmesi ve farklı derslerin muhakeme hata, eksiklik ve boşlukları nasıl etkilediğinin belirlenebilmesi amacıyla literatür taraması yapılmış ve pilot uygulamaların verileri de göz önüne alınarak bir gözlem formu hazırlanmıştır. Hazırlanan gözlem formu alanında uzman 3 öğretim elemanına gösterilerek görüşleri alınmıştır. Öğretim elemanlarının görüşleri doğrultusunda maddeler ile ilgili düzenlemeler yapılarak ortak maddelerin belirli kategoriler altında toplanması sağlanmıştır. Gözlem formu, Matematiksel Dil ve Sistemikleştirme, Öğrenci Muhakemesine Odaklanma, İspat Yöntemleri olmak üzere üç boyuttan oluşmaktadır. Matematiksel Dil ve Sistemikleştirme için 9, Öğrenci Muhakemesine Odaklanma için 14 ve İspat Yöntemleri için 4 gösterge olmak üzere toplamda 27 gösterge oluşturulmuştur. Gözlem formunun pilot uygulaması yapılarak alanında uzman 3 öğretim elemanın görüşleri alınarak kategorilerin ve bu kategorilerin altında yer alabilecek maddeler kararlaştırılmıştır. Böylece muhakeme hatalarının altı bileşenleri bağlamında gözlem formunun kapsam geçerliliği sağlanmıştır. Pilot çalışma sürecinde gözlem formunda yer alan göstergelerin işlevliliği hakkında tecrübe kazanmakla beraber veri kaybı olacağı ihtimali göz önüne alınarak gözlem formu derslerde kullanılmamıştır. Gözlem formu Tablo 5'te yer almaktadır.

Tablo 5. Öğretmen Adaylarının İspat Süreçlerini İzlemeye Yönelik Oluşturulan Gözlem Formu

Bileşenler	Göstergeler	Kod
Matematik dili ve sistematikleştirme	Matematik dilinin doğru kullanılmasına vurgu yapma	Md-1
	Matematiğin aksiyomatik yapısına vurgu yapma.	Md-2
	İspat sürecinde sistematikliğe dikkat çekme.	Md-3
	Matematisel tanımlara, genel kurallarının geçerli olduğu kümelere dikkat edilmesi gerektiğini vurgulama.	Md-4
	Matematisel ifadenin ispatı için değişken tanımlamada tanım aralığına dikkat çekme	Md-5
	Öğrencilerinin eksik veya gereksiz değişkenleri fark etmelerini sağlama.	Md-6
	İspatta gereksiz adım veya ifadeler yer verilerek öğrenenlerin fark etmelerini sağlama	Md-7
	İspat yapılırken ara aşamalarının kasıtlı bir şekilde göz ardı edilerek öğrenenlerin fark etmelerini sağlama.	Md-8
	İspatta kullanılan önermelerin gerekçelerini belirtmek amacıyla soru sorma.	Md-9
Öğrenci muhakemesine odaklanma	Öğrencileri muhakeme süreçlerini açıklamaları konusunda teşvik etme.	Öm-1
	Başkalarının muhakemelerini değerlendirebilmeleri için teşvik etme	Öm-2
	Grupların oluşturulup öğrencilerin birbirleriyle etkileşime girerek çalışmalarını sağlama.	Öm-3
	Öğrencilerin birbirlerinin muhakeme süreçlerini değerlendirebildikleri sınıf tartışmaları yaptırma.	Öm-4
	Öğrencilerin kendi ispatlarını oluşturmalarını ve sunmalarını sağlama.	Öm-5
	Öğrencilerin yapılan ispatlarla ilgili sorularına ya da yaptıkları eleştirilere uygun cevaplar vererek onları soru sormaya teşvik etme.	Öm-6
	Oluşturulan bir ispatın geçerli olup olmadığını tartışmaya açma	Öm-7
	Bir önermenin sınırlarını belirlemek için uç örnekler kullanma	Öm-8
	Bir önermenin karşıtının doğru olup olmadığını tartışmaya açma	Öm-9
	Bir önermenin karşıtının doğru olmadığını karşıt örnekler yardımıyla açıklama (ya da öğrencilerden karşıt örnekler vermelerini isteme)	Öm-10
	Öğrencilerin oluşturdukları ispatları açıklayarak sunma, kullandıkları önermelerin gerekçelerini belirtmelerini isteme	Öm-11
	Öğrencilerin ispat adımları arasındaki ilişkilere yönelik sorular yöneltmek ispata devam etmelerini sağlama	Öm-12
	Çeşitli muhakeme hatalarını içeren farklı ispatların örnek gösterilmesi ve bunların tartışılmasını sağlama	Öm-13
	Özel durumlardan hareketle öğrencileri genel önermeler üretmeye yönlendirme.	Öm-14
İspat Yöntemleri	Verilen bir önermenin ispatını yapabilmek için en uygun ispat yönteminin belirlenmesine yönelik öğrencilerin tartışmasını sağlama	İY-1
	Bir önermenin ispatını birden fazla ispat yöntemini kullanarak yapma	İY-2
	İspat yöntemi aynı olmak koşuluyla farklı yaklaşımları değerlendirme	İY-3
	Birden fazla ispat yönteminin varlığına vurgu yapma	İY-4

3. 5. 2. Muhakeme Hatalarını Belirlemeye Yönelik Hazırlanan Açık Uçlu Sınavlar

Matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarını belirlemek amacıyla açık uçlu sorulardan oluşan bir test uygulanmıştır. Bu testin mahiyeti, hazırlanması, geliştirilmesi, pilot uygulamaları, gerekli düzenlemeler yapılarak asıl uygulamaya hazır hale getirilmesine yönelik süreç Tablo 6'da aşamalar halinde verilmiştir.

Tablo 6. Muhakeme Hatalarını Belirlemeye Yönelik Hazırlanan Açık Uçlu Sınavların Oluşturma ve Uygulama Süreci

Bileşenler	Açıklamalar
Muhakeme Hatalarının Belirlenmesine Yönelik Soruların Hazırlanması	Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme boşlukları ve muhakeme eksikliklerini belirlemek amacıyla 8 sorudan oluşan bir açık uçlu sınav kullanılmıştır. Açık uçlu sınav oluşturulurken öncelikle literatürde muhakeme hataları ile ilgili sorular incelenmiş ve analiz, cebir, soyut matematik, genel matematik derslerinde gözlemler yapılarak bir soru havuzu oluşturulmuştur. Elde edilen sorular uzman görüşlerinden yararlanarak son hale getirilmiştir. Bu sorular hazırlanırken öğrencilerin temel matematik bilgilerine dayalı ve birden fazla muhakeme hatalarını içeren nitelikte olmasına dikkat edilmiştir. Bunun yanı sıra öğretmen adaylarının kural ve formüllere bağlı kalmadan ve matematiksel bilgi konusunda zorluk çekmeden düşünebilecekleri, cebirsel işlem ya da denemeler yapabilecekleri soruların olmasına dikkat edilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının ispat sürecinde birden fazla strateji geliştirebilecekleri ya da farklı muhakemeler ileri sürebilecekleri türde sorular olması da göz önünde bulundurulmuştur. Sorular belirlenirken muhakeme hatalarının kapsamı, çeşitleri, yoğunluklarını daha net bir şekilde ortaya koymak için ilgili literatür ayrıntılı olarak incelenmiştir. Muhakeme hatalarının kapsamı, ne tür muhakeme hataları mevcut olduğuna ve hangi durumlara odaklanması gerektiğine karar verilmeye çalışılmıştır. Bu süreçte araştırmacının deneyim kazanması, muhakeme hatalarının varlığını kendi tecrübesiyle incelemek amacıyla pilot çalışma yürütülmüştür. Elde edilen veriler literatür ile karşılaştırılarak muhakeme hatalarına yönelik, bilgi ve deneyim elde edilmiştir. Böylece muhakeme hatalarını belirleme açık uçlu sınavın hem kapsamı hem teorik alt yapısı pilot çalışma ve literatür desteğiyle belirlenmeye çalışılmıştır. Daha sonra literatürde yapılan çalışmalarda karşılaşılan sorular, ilgili tezler, kitaplar incelenerek açık uçlu sınavlarda yer alacak sorular belirlenmiştir. Daha sonra her bir soruda ortaya çıkabilecek olası muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşlukları belirlenerek uygulamaya hazır hale getirilmiştir. Seçilen sorular ve sorularda öngörülen muhakeme hatalarını, eksikliklerini, boşluklarını ayrıntılı bir şekilde gösteren Tablo 6 aşağıda yer almaktadır.

Tablo 6'nın devamı

Bileşenler	Açıklamalar
Muhakeme Hatalarını Belirlemeye Yönelik Hazırlanan Testlerin Pilot Uygulaması	Geliştirilen açık uçlu sınavın geçerlik ve güvenilirlik çalışmalarının yapılabilmesi için pilot çalışması yapılmıştır. Hem veri toplama aracının geçerlik ve güvenilirlik çalışması yapılması hem de araştırmacının deneyim kazanmasında pilot uygulama önemli katkı sağlamıştır. Araştırmanın pilot uygulaması 2014-2015 eğitim öğretim yılı bahar döneminde yürütülmüştür. Pilot çalışma ortaöğretim matematik öğretmenliği iki, üç, dört ve beşinci sınıf öğrencilerine uygulanmıştır. Pilot çalışmanın sonunda bazı soru köklerinin daha net anlaşılması için gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Ayrıca pilot uygulamada yer alan 2 ispatta öğretmen adayları gerekli bilgileri hatırlayamadıkları için bu ispatları genel olarak boş bırakmışlar. Bu nedenle sınavın kapsam geçerliliğini düşürmeden ve uzman görüşü de alınarak bu sorular çıkartmıştır. Bu iki sorunun yerine kural ya da formüller üzerinden cevap verilecek nitelikteki olmayan, çeşitli ispat yöntemlerinin kullanılmasına, farklı düşünme biçimi ve stratejiler kullanılmasına fırsat sağlayan ve temel matematiksel bilgilerle yapılabilecek sorulara yer vermeye karar verilmiştir Böylece gerekli düzenlemeler yapılarak sınavın son hali verilmiştir.
Muhakeme Hatalarını Belirlemeye Yönelik Hazırlanan Testlerin Asıl Uygulaması	Yapılan pilot çalışmalarının sonucunda elde veriler analiz edilerek açık uçlu sınavın geçerlilik ve güvenilirlik çalışmaları tamamlanmıştır. Pilot çalışma sırasında sorularla ilgili anlaşılmayan noktalar ve yanlış anlaşılmalara sebebiyet verecek durumlar düzeltilerek testin son hali verilmiştir. Soruların son hali verildikten sonra 2015-2016 eğitim öğretim yılı güz ve bahar döneminde asıl uygulama yapılmıştır. Güz dönem başında MHBT1 güz döneminin sonrasında MHBT2 ve bahar dönemi sonrasında MHBT3 şeklinde uygulama yapılmıştır. Uygulamalar 1 ile 1,5 saatlik arası zaman diliminde sınıflarda öğretim elemanı ve araştırmacı eşliğinde yapılmıştır. Öğrenciler soruları bireysel olarak cevaplandırmış ve ders notları, ders kitapları, internet gibi herhangi bir kaynağın kullanılmasına izin verilmemiştir.

Muhakeme hataları belirleme testleri olarak hazırlanan açık uçlu sınavlarının (MHBT1, MHBT2 ve MHBT3) içeriği ve her bir soru için ön görülen muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları ilgili bilgiler Tablo 7'de ayrıntılı olarak verilmiştir.

Tablo 7. MHBT1'de Öngörülen Muhakeme Hataları, Muhakeme Boşlukları ve Muhakeme Eksiklikleri

Sorular	Sorularda Öngörülen Muhakeme Hataları, Boşluklar ve Eksiklikler
S1: "Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 2'nin katı ise n 2'nin katıdır." ifadesinin doğruluğunu gösteriniz	<ul style="list-style-type: none"> - Sonuç ile başlama (MH1) - Yanlış varsayımlarla başlama (MH2) - Farklı notasyonlar kullanmayı ispat olarak düşünme (MH3) - Yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması (MB1) - Teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması (MH6)
S2: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için, $a \leq b$ ise $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ dir. İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.	<ul style="list-style-type: none"> - İspata nasıl başlayacağına karar verememe (ME2) - Sonuç ile başlama (MH1) - Yöntemsel eksiklik (ME1) - Tanım aralığını dikkate almama (ME3)

Tablo 7'nin devamı

Sorular	Sorularda Öngörülen Muhakeme Hataları, Boşluklar ve Eksiklikler
S3 : $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n^3 - n$ ifadesinin 3 ile tam bölünebildiğini gösteriniz	<ul style="list-style-type: none"> - Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7) - Değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı (ME5) - Yöntemsel eksiklik (ME1) -İspata nasıl başlayacağına karar verememe (ME2)
S4: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $ a - b \leq a + b $ eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.	<ul style="list-style-type: none"> - Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7) -Tek yönlü inceleme (ME8) - Matematiksel tanımların yetersiz kullanılması (ME4)
S5: $a, b \in \mathbb{Z}^+$ için $a + b$ tek ise a veya b den sadece biri tektir. İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.	<ul style="list-style-type: none"> -Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7) - Tanım aralığını dikkate almama (ME3) - Sonuç ile başlama (MH1) - Yanlış varsayımlarla başlama (MH2) -Teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması (MH6)
S6: a, b ve c gibi üç tamsayıdan a sayısı, b sayısını ve b sayısı da c sayısını tam olarak bölebilmektedir. a sayısının c sayısını tam olarak bölebildiğini gösteriniz.	<ul style="list-style-type: none"> - Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7) - Yöntemsel eksiklik (ME1) - Matematiksel tanımların yetersiz kullanılması (ME4)
S 7: $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, $A \subset X$ ve $B \subset X$ olsun. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.	<ul style="list-style-type: none"> - Yanlış varsayımlarla başlama (MH2) - Matematik dilini kullanmada yetersizlik (ME6) - Yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması (MB1) - Tek yönlü inceleme (ME8)
S8: "Üç ardışık tam sayının toplamı ortadaki sayının 3 katıdır." Önermesinin doğruluğunu gösteriniz.	<ul style="list-style-type: none"> - Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7) -İspata nasıl başlayacağına karar verememe (ME2) -Matematik dilini kullanmada yetersizlik (ME6)

Tablo 8. MHBT2'de Öngörülen Muhakeme Hataları, Muhakeme Boşlukları ve Muhakeme Eksiklikleri

Sorular	Sorularda Öngörülen Muhakeme Hataları, Boşluklar ve Eksiklikler
S1: " Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 tek tam sayı ise, n de tek tam sayıdır." İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.	<ul style="list-style-type: none"> - Sonuç ile başlama (MH1) - Yanlış varsayımlarla başlama (MH2) - Farklı notasyonlar kullanmayı ispat olarak düşünme (MH3) - Yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması (MB1) - Teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması (MH6)
S2: a ve $b \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $a > b > 0$ ise $\frac{a+1}{a} > \frac{a}{b}$ dir. Gösteriniz.	<ul style="list-style-type: none"> - İspata nasıl başlayacağına karar verememe (ME2) - Sonuç ile başlama (MH1) - Yöntemsel eksiklik (ME1) - Tanım aralığını dikkate almama (ME3)
S3 : $\forall n \in \mathbb{N}$ için $4^n - 1$ ifadesinin 3 ile tam bölünebildiğini gösteriniz.	<ul style="list-style-type: none"> - Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7) - Değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı (ME5) - Yöntemsel eksiklik (ME1) -İspata nasıl başlayacağına karar verememe (ME2)
S4: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $ a - b \leq a - b $ eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.	<ul style="list-style-type: none"> - Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7) -Tek yönlü inceleme (ME8) - Matematiksel tanımların yetersiz kullanılması (ME4)

Tablo 8'in devamı

Sorular	Sorularda Öngörülen Muhakeme Hataları, Boşluklar ve Eksiklikler
S5: $a, b \in \mathbb{Z}^+$, a, b tek sayıdır. Ancak ve ancak a ve b nin her ikisi de tektir. Önermesinin doğruluğunu gösteriniz.	-Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7) - Tanım aralığını dikkate almama (ME3) - Sonuç ile başlama (MH1) - Yanlış varsayımlarla başlama (MH2) -Teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması (MH6)
S6: a, b ve c gibi üç doğal sayıdan ; " a sayısı hem b sayısını hem c sayısını tam bölüyorsa a sayısı $b+c$ sayısını tam böler." İfadesinin doğruluğunu gösteriniz	- Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7) - Yöntemsel eksiklik (ME1) - Matematiksel tanımların yetersiz kullanılması (ME4)
S 7: $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon, $X \subset B$; $Y \subset B$ olsun $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ olduğunu gösteriniz	- Yanlış varsayımlarla başlama (MH2) - Matematik dilini kullanmada yetersizlik (ME6) - Yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması (MB1) -Tek yönlü inceleme (ME8)
S8: "Eğer x bir rasyonel sayı ve y bir irrasyonel sayı ise $y - x$ bir irrasyonel sayıdır." Önermesinin doğruluğunu gösteriniz.	- Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7) -İspata nasıl başlayacağına karar verememe (ME2) -Matematik dilini kullanmada yetersizlik (ME6)

Tablo 9. MHBT3'de Öngörülen Muhakeme Hataları, Muhakeme Boşlukları ve Muhakeme Eksiklikleri

Sorular	Sorularda Öngörülen Muhakeme Hataları, Boşluklar ve Eksiklikler
S1: " Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 çift tam sayı ise, n de çift tam sayıdır." İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.	- Sonuç ile başlama (MH1) - Yanlış varsayımlarla başlama (MH2) - Farklı notasyonlar kullanmayı ispat olarak düşünme (MH3) - Yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması (MB1) - Teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması (MH6)
S2: m ve $n \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $m > n > 0$ ise $\frac{m}{n} \leq \frac{m+1}{n}$ dir. İfadesinin doğruluğunu Gösteriniz.	- İspata nasıl başlayacağına karar verememe (ME2) - Sonuç ile başlama (MH1) - Yöntemsel eksiklik (ME1) - Tanım aralığını dikkate almama (ME3)
S3 : $\forall n \in \mathbb{N}$ için $5^n - 1$ ifadesinin 4 ile tam bölünebildiğini gösteriniz.	- Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7) - Değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı (ME5) - Yöntemsel eksiklik (ME1) -İspata nasıl başlayacağına karar verememe (ME2)
S4: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $ a - b \leq a + b $ eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.	- Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7) -Tek yönlü inceleme (ME8) - Matematiksel tanımların yetersiz kullanılması (ME4)
S5: $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun, a, b çift sayıdır ancak ve ancak a ve b den en az biri çifttir. Önermesinin doğruluğunu gösteriniz.	-Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7) - Tanım aralığını dikkate almama (ME3) - Sonuç ile başlama (MH1) - Yanlış varsayımlarla başlama (MH2) -Teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması (MH6)
S6: a, b, c ve d gibi dört doğal sayıdan ; " a sayısı b sayısını, c sayısı d sayısını tam bölüyorsa $a.c$ sayısı $b.d$ sayısını tam böler." İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.	- Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7) - Yöntemsel eksiklik (ME1) - Matematiksel tanımların yetersiz kullanılması (ME4)

Tablo 9'un devamı

Sorular	Sorularda Öngörülen Muhakeme Hataları, Boşluklar ve Eksiklikler
S 7: $f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon, $X \subset B$; $Y \subset B$ olsun. $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ olduğunu gösteriniz.	- Yanlış varsayımlarla başlama (MH2) - Matematik dilini kullanmada yetersizlik (ME6) - Yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması (MB1) - Tek yönlü inceleme (ME8)
S8: "Eğer x bir rasyonel sayı ve y bir irrasyonel sayı ise $y.x$ bir irrasyonel sayıdır." Önermesinin doğruluğunu gösteriniz.	- Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7) - İspata nasıl başlayacağına karar verememe (ME2) - Matematik dilini kullanmada yetersizlik (ME6)

3. 5. 3. Klinik Mülakatlar

Nitel analiz yaklaşımının benimsendiği bu çalışmada öğrencilerle klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. "Matematik eğitiminde klinik mülâkatların amacı, öğrencilerin stratejilerini, bilgi yapılarını veya becerilerini karakterize etmek ve belirli bir öğretimin etkililiğini araştırmak, gelişim sürecini daha iyi anlamak veya problem çözme davranışlarını araştırmaktır."(Karataş ve Güven, 2004). Bu çalışmada açık uçlu sınavlardan sonra, amaçlı örneklem seçimi yöntemiyle her sınıf düzeyinden seçilen iki öğretmen adayı olmak üzere toplamda 10 öğretmen adayıyla klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Açık uçlu sınavların uygulanması sırasında araştırmacı, her bir öğretmen adayını yakından gözlemleyerek muhakeme hatası yaptığını düşündüğü adayları seçmeye daha fazla özen göstermiştir. Bu adaylarla sınav sonrasında ispat sürecinde yaptıkları muhakeme hataları, eksiklikleri ve boşlukları daha derinlemesine incelemek ve sınavda ortaya çıkmayan muhakeme hatalarını belirlemek veya bazı durumların muhakeme hatası olup olmadığına karar vermek amacıyla klinik mülakatlar yapılmıştır. Ayrıca açık uçlu sınavlara yönelik verileri analiz ederken anlaşılmayan durumları açığa kavuşturmak veya bazı muhakeme hatalarına tam anlamıyla karar verebilmek amacıyla başka öğretmen adayları ile de klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Mülakatlar esnasında öğrencilere; *Bu ispatta niçin böyle bir başlangıç yaptın?, Böyle bir ispat ile ilk defa mı karşılaşıyorsunuz?, Bu soruda hangi ispat yöntemini seçtiniz?, Neden böyle düşündünüz? Sizce bu yaptıklarınız ispat için yeterli midir? İspat yapmanızı gerektiren durumlarda en çok zorlandığınız şey nedir? İspat yöntemini seçerken hangi ispat yöntemini kullanacağınız konusunda zorlanıyor musunuz? Matematiksel bir ispat verildiğinde göstermeniz gereken şeyin ne olduğunu anlamakta zorluk çekiyor musunuz?* Gibi sorular sorularak düşüncelerini daha derinlemesine olarak ortaya çıkarma amaçlanmıştır.

Araştırma boyunca öğretmen adayları ile yapılan bütün mülakatlar izin alınmış ve mülakatlar sırasındaki konuşmalar ses kayıt cihazları ile kaydedilmiştir. Her bir mülakat

yaklaşık olarak 20 ile 30 dakika arası bir zaman diliminde gerçekleştirilmiştir. Ayrıca mülakatlar; öğretmen adaylarının rahat hissettikleri ortamlarda olmak üzere bireysel olarak yapıp öğretmen adaylarının birbirinden veya başka faktörlerden etkilenmeleri engellenmiştir.

3. 6. Veri Analizi

Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının belirlemeyi ve üniversite eğitimleri boyunca bu hatalarının gelişimsel olarak nasıl değiştiğini incelemeyi amaçlayan bu çalışmanın verileri nitel araştırma yöntemiyle analiz edilmiştir. Araştırma kapsamında kullanılan veri toplama araçlarının her birine yönelik analiz süreci alt başlıklar haliinde sunulmuştur.

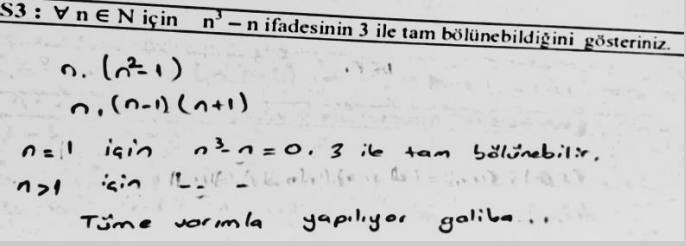
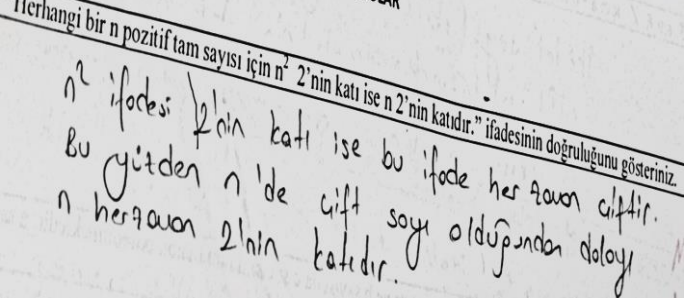
3. 6. 1. Muhakeme Hataları Belirleme Testleri ile Elde Edilen Verilerin Analizi

Araştırmanın amacı doğrultusunda ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarını kapsamlı bir şekilde belirlemek için güz dönemi ders gözlemleri öncesi, göz dönemi ders gözlemleri sonrası ve bahar dönemi ders gözlemleri sonrası muhakeme hataları belirleme testleri uygulanmıştır. Muhakeme hataları belirleme testlerinin uygulanması sonucunda elde edilen verilerin değerlendirilmesi için literatür taraması ve uzman görüşünden yararlanarak bir ölçek geliştirilmiştir. Muhakeme hataları belirleme testlerinden ve klinik mülakatlardan elde edilen verileri analiz etmek için geliştirilen bu ölçek kullanılmıştır. Tasarlanan muhakeme hataları belirleme ölçeği ve bazı örnek analizler Tablo 10'da yer almaktadır.

Tablo 10. Muhakeme Hatalarını Belirleme Ölçeği ve Örnek Analizler

Muhakeme Hataları		Örnek	Örnek Analiz
MH1	Sonuç ile başlama		<p>Öğretmen adayının matematiksel bir ilişkin ispatı için yapmış olduğu işlemler incelendiğinde matematik dilini yetersiz kullanma, aşırı genelleme, kullanılan önermelerin gerekçelerinin sunulmaması gibi hata, eksik veya boşluklar olmakla birlikte bu örnekte baskın olarak sonuç ile başlama muhakeme hatası ön plana çıkmaktadır. Çünkü öğretmen adayı ispatlanması gereken matematiksel ifade olan $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ üzerinden çeşitli işlemler yaparak doğruluğu ilk başta kabul edilen matematiksel ifadeye yani $a \leq b$ ifadesine ulaşmıştır. Öğretmen adayı, doğruluğu kabul edilen bir matematiksel ifadeye tekrar ulaşarak sadece ifadenin geri dönüşümlü adımlarını göstermiştir ve bu yaptıklarını ispat olarak değerlendirmiştir.</p>
MH7	Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi		<p>Öğretmen adayının yapmış olduğu işlemler incelendiğinde verilen bir matematiksel ifadenin doğruluğunun sadece özel bir durumla ya da birkaç sayısal değer deneyerek ispatını yapmaya çalıştığı görülmektedir. Öğretmen adayı kendisine sunulan herhangi bir n pozitif tam sayı için n^2 2'nin katı ise n 2'nin katıdır matematiksel ifadesinin ispatını yapmak için $n=2$ alarak doğruluğunu göstermeye çalışmıştır. Bundan sonra da daha büyük bir değer $n=20$ alarak yaptığı işlemleri sorulan ifadenin ispatı için yeterli olabileceğini düşünmüştür. Öğretmen adayının sadece birkaç sayısal değerden hareketle bu ifadenin bütün pozitif tamsayılar için geçerli olabileceğini düşünmesi özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi muhakeme hatasına düştüğünü göstermektedir. Bununla beraber öğretmen adayının ispatını incelediğimizde yanlış bir varsayımla soruya yaklaştığı fark edilmektedir. Bu durum ise yaptığı ispatta yanlış varsayımlarla başlama muhakeme hatasına da düştüğünü göstermektedir.</p>

Tablo 10'un devamı

Muhakeme Hataları	Örnek	Örnek Analiz
<p>ME2 İspata nasıl başlayacağına karar verememe veya ispata devam edememe</p>		<p>Öğretmen adayının yapmış olduğu işlemler incelendiğinde matematiksel ifadenin ispatını yapmak için verilenleri uygun bir şekilde tanımladığı görülmektedir. Matematiksel ifadenin ispatı için uygun bir ispat yöntemini belirlediği ve ilk adımı $n=1$ için $n^3-n=0$, 3 ile tam bölünür şeklinde tanımlayarak ispata doğru bir başlangıç yapmasına rağmen ispatın devamını getirmemiştir. Öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatlarda başlangıçta ispatın için zihninde çeşitli yöntemlerin olduğunu ancak bunları matematik diline dökemediğini daha sonra tümevarım ile yapılabileceğini ama bu yönteminin de nasıl uygulayacağını hatırlayamadığı için ispata devam etmediğini dile getirmiştir. Bunun yanı sıra öğretmen adayı bu tür sorularda bazen ezbere dayalı bir yol izlediğini bu yüzden de sadece hatırlamak için uğraştığını, çoğu zamanda hatırlayamadığını belirtmiştir. Öğretmen adayı matematiksel ifadenin ispatı için belli bir alt yapıya sahip olmasına rağmen ispatı yarım bırakmıştır. Bu durum ispat sürecinde ispata nasıl başlayacağına karar verememe veya ispata devam etmeme muhakeme eksikliği yaptığına işaret etmektedir.</p>
<p>MB2 Kullanılan önermelerin gerekçelerinin sunulmaması</p>		<p>Öğretmen adayının yapmış olduğu ispat incelendiğinde adayının ispat sürecinde kullandığı önermelerinin herhangi bir gerekçesini göstermeden bazı ezber kabullere dayanarak ispat adımlarını yazdığı görülmektedir. Soruda "herhangi bir n pozitif tamsayısı için n^2 2'nin katı ise n 2'nin katıdır" şeklindeki matematiksel ifadenin ispatı için öğretmen adayı "n^2 2'nin katı ise bu ifade her zaman çifttir" diyerek matematiksel olarak aynı anlama gelen bir ifade kullanmıştır. Daha sonra herhangi bir gerekçe göstermeden "bir sayı çift ise o sayı her zaman 2'nin katıdır" şeklinde aynı ifadeyi çift kabul ederek sonuca gitmiştir. Bununla birlikte bu ispatta tanım aralığına dikkat etmeme, aşırı genelleştirme gibi muhakeme hata veya eksiklikler de mevcuttur.</p>

Yukarıda verilen muhakeme hataları belirleme ölçeği; muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarına yönelik göstergeleri bir arada bulunduran bir değerlendirme aracıdır. Dolayısıyla bu ölçek, yapılan ispatların bir boyuttan ziyade genel anlamda bir değerlendirme yapılmasını sağlamaktadır. Pilot çalışma sonucunda muhakeme hataları belirleme testlerinden elde edilen verilerin incelenmesi ile ispat sürecinde muhakeme hatalarını değerlendirmeye yönelik farklı göstergelerin ortaya çıktığı görülmüştür. Buna dayalı olarak bir ispatta birden fazla muhakeme hatası, muhakeme eksikliği veya muhakeme boşluğu olabileceği fark edilmiştir. Bunun üzerine farklı boyutlara göre incelemelerin yapılmasına imkân sağlayacak şekilde muhakeme hataları belirleme ölçeğinin kapsamının geliştirilmesine karar verilmiştir.

Muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları birbirinden bağımsız olmamakla birlikte bu boyutların farklı kategoriler olarak ele alınması sonucunda ayrıntılı bir inceleme sağlanarak daha net değerlendirmelerin yapılmasının önünü açılabileceği düşünülmüştür. Buna göre her bir ispatta ortaya çıkan muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşlukları ayrı ayrı incelenerek gerekli istatistiksel veriler elde edilmiştir. Buna göre her bir boyut ile ilgili kategoriler ve bu kategorilere yönelik frekans ve yüzdeler hesaplanarak bunlar ile ilgili tablo ve grafikler sunulmuştur. Ayrıca her bir göstergeye göre öğretmen adaylarının ispatları ile ilgili örnekler verilmiştir. Öğretmen adaylarının örnek ispatlarında birden fazla muhakeme hatası, muhakeme boşluğu veya muhakeme eksikliği olmakla birlikte ilgili göstergenin baskın olduğu örnek, belirtilen göstergenin altında sunulmuştur.

Testlere ilişkin kodlama güvenilirliği için matematik eğitimi alanında uzman iki araştırmacıyla öğretmen adaylarının ispatlarını değerlendirme bakımından bir uyum olup olmadığını belirlemeye yönelik incelemeler gerçekleştirilmiştir. Bu incelemeleri gerçekleştirmek üzere her bir sınıf seviyesinin kâğıtları arasında %20 oranında rastgele bir seçim yapılmıştır. İncelemelerin öncesinde muhakeme hataları belirleme ölçeği, göstergelere yönelik örneklerle birlikte açıklamalar yapılarak diğer araştırmacılara tanıtılmış ve ölçekle ilgili gerekli bilgiler verilmiştir. Yapılan incelemeler sonucunda araştırmacılar arasında %90'ın üstünde bir oranda uyum olduğu belirlenmiştir. Kodlamalar bakımından uyumsuzluğun olduğu durumlar üzerine araştırmacılar ile görüşmeler yapılmış ve bu görüşmelere dayalı olarak gerekli düzenlemeler yapılmıştır.

3. 6. 2. Ders Gözlemleri ile Elde Edilen Verilerin Analizi

Araştırmanın ikinci amacı, matematik öğretmeni adaylarının üniversite eğitimleri boyunca aldıkları bazı derslerin; matematiksel muhakemelerini geliştirmeleri, uygun stratejiler belirlemeleri ve muhakeme hatalarının üzerindeki rolünün ne ölçüde olduğunu

detaylı incelemek, derinlemesine analiz etmektir. Bu amaç doğrultusunda sınıf içi gözlemler ve alan notlarından yararlanılmıştır. Bunun için gözlemi yapılan derslerde elde edilen veriler öncelikle bilgisayar ortamına kaydedilmiştir. Daha sonra gözlem formunda yer alan boyutlar ve bu boyutlar altındaki göstergeler doğrultusunda araştırmacı tarafından analizler yapılmıştır. Analizler iki aşamalı olarak gerçekleştirilmiştir. İlk aşama, hem araştırmacının gözlem formuna ilişkin kategorileri benimsemesi hem de veriler içerisinde göstergeleri kolay bir şekilde ayırt edebilmesi açısından ön bir analiz niteliğindedir. Gözlemler ve ilk analizler tamamlandıktan sonra araştırmacı ders gözlemlerine ilişkin verileri yeniden kodlamıştır. Böylece gözlemlere ilişkin her iki kodlama karşılaştırılarak bir uyum olup olmadığı gözden geçirilmiştir. İki kodlama arasında %88 oranda bir uyum olduğu görülmüştür. Ayrıca araştırmacı her iki analizi karşılaştırarak analizlerde gerekli düzenlemeleri yapmıştır. Bütün kodlamalar tamamlandıktan sonra bu alanda uzman başka bir araştırmacıyla kodlamalar arasında bir uyum olup olmadığını belirlemeye yönelik incelemeler gerçekleştirilmiştir. Analizlerin daha güvenilir yapılabilmesi için gözlem formu, bu formun göstergelerine yönelik örnekler ile birlikte diğer araştırmacıya açıklanmıştır. Yapılan incelemeler sonucunda araştırmacılar arasında %86 oranında bir uyum olduğu belirlenmiştir. Kodlamalar bakımından uyumsuzluğun olduğu durumlar üzerine araştırmacılar ile görüşmeler yapılmış ve bu görüşmelere dayalı olarak gerekli düzenlemeler yapılmıştır.

Gözlem formu boyutları ve bu boyutlar altındaki göstergelere ilişkin elde edilen frekans ve yüzdelerle yönelik değerler tablo ve grafiklerle sunulmuştur. Böylece her bir derste muhakeme veya muhakeme hatalarına hangi açıdan vurgulama yapıldığı dersler açısından yorumlanmıştır. Bu yorumlar, gözlemi yapılan derslerdeki örnekler yardımıyla sunulmuştur.

3. 6. 3. Klinik Mülakatlar ile Elde Edilen Verilerin Analizi

Muhakeme hataları belirleme testlerinin uygulamalarından sonra öğretmen adayları ile klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Klinik mülakatlar esnasında öğretmen adaylarının izni dâhilinde ses kaydı alınmıştır. Öğretmen adayları ile yapılan her bir mülakat ile ilgili ses kayıtlarının transkriptleri yapılmıştır. Ham veriler elde edildikten sonra ispat sürecinde muhakeme hatalarına, muhakeme eksikliklerine veya muhakeme boşluklarına yönelik örnek ispatları desteklemek adına klinik mülakatlardan bazı kesitlere bulgular bölümünde yer verilmiştir.

3. 6. 4. Alan Notları İle Elde Edilen Verilerin Analizi

İspat sürecinde öğretim elemanlarının dersin işlenişi veya öğretmen adaylarının birbirleriyle veya öğretim elemanlarıyla olan diyaloglar, muhakeme hatalarına yönelik durumlar bakımından araştırmacı tarafından bir gözlemci gözüyle not edilmiştir. Klinik mülakatlar ile birlikte öğretmen adaylarının ispatlarını daha sağlıklı değerlendirmek ve genel durumu yansıtmak amaçlı olarak bulgular kısmında kullanılmıştır.



4. BULGULAR

Bu bölümde, araştırma sürecinde elde edilen veriler, araştırmanın alt problemine yönelik başlıklar altında sunulmuştur.

4. 1. Ders Gözlemlerinin Öncesinde Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular

Ders gözlemlerinin öncesinde öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarını, muhakeme eksikliklerini ve muhakeme boşluklarını belirleyebilmek için Muhakeme Hataları Belirleme Testi 1 (MHBT1) yapılmıştır. Bu test ile birlikte ispat sürecinde öğretmen adaylarının yaptıkları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarına yönelik veriler; muhakeme hatalarını belirleme ölçeğinin boyutlarında yer alan kategorilere göre değerlendirilerek hatalar, eksiklikler ve boşluklar ile ilgili yoğunluklar belirlenmiştir. Bu kısımda öncelikle MHBT1’de elde edilen veriler, betimsel olarak sunulduktan sonra yapılan klinik mülakatlar ve öğretmen adaylarının örnek çözümleri ile desteklenerek verilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının ispat sürecinde yaptıkları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları ile ilgili sınıf seviyeleri arasında karşılaştırmalar yapılarak mevcut durum tablo ve grafiklerle sunulmuştur.

Bütün sınıf seviyelerindeki öğretmen adaylarının Muhakeme Hataları Belirleme Testi 11’de yer alan ispatlar için yapılan muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının hangi kategoride yer aldığı ve bu kategoriler ile ilgili frekans ve yüzde dağılımları Tablo 11’ de sunulmuştur.

Tablo 11. Muhakeme Hataları Belirleme Testi 1'de Yer Alan İspatlar İçin Yapılan MH, ME ve MB' nin Yer Aldığı Kategorilere Yönelik Frekans ve Yüzde Dağılımları

	1.SINIF			2.SINIF			3.SINIF			4.SINIF			5.SINIF		
	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%
Muhakeme Hataları	MH-1	8	11,3	MH-1	20	31,7	MH-1	22	24,7	MH-1	19	27	MH-1	14	25
	MH-2	9	12,6	MH-2	13	20,6	MH-2	14	15,7	MH-2	12	17	MH-2	6	10,7
	MH-3	4	5,6	MH-3	4	6,3	MH-3	3	3,3	MH-3	9	12	MH-3	6	10,7
	MH-4	5	7,1	MH-4	2	3,15	MH-4	9	10,1	MH-4	5	7	MH-4	3	5,3
	MH-5	3	4,1	MH-5	3	4,7	MH-5	7	7,8	MH-5	5	7	MH-5	5	8,9
	MH-6	4	5,6	MH-6	10	15,8	MH-6	15	16,8	MH-6	13	18	MH-6	17	30
	MH-7	38	53,5	MH-7	11	17,4	MH-7	19	21,3	MH-7	8	11	MH-7	5	8,9
Muhakeme Eksiklikleri	ME-1	17	8,9	ME-1	15	9,22	ME-1	19	4,22	ME-1	11	7,58	ME-1	13	8,22
	ME-2	46	24,2	ME-2	32	11,4	ME-2	89	40	ME-2	27	18,6	ME-2	27	17,1
	ME-3	38	20	ME-3	49	17,5	ME-3	40	18	ME-3	47	32,4	ME-3	48	30,3
	ME-4	14	7,36	ME-4	9	6,37	ME-4	16	7,51	ME-4	8	5,51	ME-4	4	2,53
	ME-5	3	1,57	ME-5	1	0,35	ME-5	8	3,75	ME-5	5	3,44	ME-5	0	0
	ME-6	32	16,8	ME-6	25	15	ME-6	40	18	ME-6	21	14,4	ME-6	19	12
	ME-7	15	7,89	ME-7	6	2,15	ME-7	11	5,16	ME-7	16	11	ME-7	20	12,6
	ME-8	25	13,1	ME-8	25	17,3	ME-8	32	15	ME-8	10	6,89	ME-8	18	11,3
Muhakeme Boşlukları	MB-1	18	37,5	MB-1	14	45,1	MB-1	16	28,5	MB-1	9	28,1	MB-1	7	17,5
	MB-2	15	31,2	MB-2	16	51,6	MB-2	26	46,4	MB-2	11	34,3	MB-2	17	42,5
	MB-3	5	8,92	MB-3	1	3,22	MB-3	13	23,21	MB-3	8	25	MB-3	6	15,5
	MB-4	10	17,8	MB-4	0	0	MB-4	1	1,78	MB-4	4	12,5	MB-4	11	27,5

Tablo incelendiğinde sınıf seviyelerinin genelinde her bir kategoride benzer muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşluklarının ön plana çıktığı görülmektedir. Muhakeme hataları boyutunda öğretmen adaylarının muhakeme hatalarının daha çok sonuç ile başlama (MH1), özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7), teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması (MH6) ve yanlış varsayımlarla başlama (MH2) kategorilerinde yoğunlaşmıştır. Farklı notasyonları kullanmayı ispat olarak düşünme (MH3) ve aşırı genelleme hataları (MH5) kategorilerinde ise nispeten daha az sayıda muhakeme hatası olduğu görülmektedir. Dolayısıyla öğretmen adayları ispat yaparken daha çok var olan bir gerçek üzerinden başlayarak ulaşması gereken matematiksel ifade ile ispata başlangıç yapmışlardır. Öğretmen adaylarından bir kısmının ise ispatı istenen matematiksel bir ifadenin hipotez ve hüküm kavramlarını karıştırma veya sadece özel bir durumun veya birkaç sayısal değeri ele alarak ispat yapma gibi muhakeme hatalarına sahip oldukları görülmektedir.

Muhakeme eksiklikleri boyutunda öğretmen adaylarının daha çok ispata nasıl başlayacağına karar verememe (ME2), tanım aralığını dikkate almama (ME3) ve matematik dilini kullanmada yetersizlik (ME6) kategorilerinde yoğunlaştıkları görülmektedir. Değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı (ME5) ve ispat yapmada sistematikliğin olmaması (ME7) kategorilerinde ise öğretmen adayları daha az oranda muhakeme eksikliğine yönelik davranışlar sergiledikleri fark edilmektedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispat sürecinde yöntem, tanım aralığı, matematiksel dil gibi eksikliklerle birlikte ispatlarını tamamladıklarıyla da ispatlarını yarıda bıraktıkları anlaşılmaktadır.

Muhakeme boşlukları; ispat sürecinde izlenen adımlarda kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunulmadan ya da adımlar arasında bir ilişki kurmadan ispatın tamamlanmasına dayalı durumlardır. Muhakeme boşlukları bakımından öğretmen adaylarının daha çok kullanılan önermelerin gerekçelerinin sunulmaması (MB2) ve yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması (MB1) gibi kategorilere yönelik davranışlar sergiledikleri görülmektedir. Dolayısıyla öğretmen adayları, ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmadan ispatlarını tamamlamışlardır. Sınıf seviyelerinin genelinde benzer muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları üzerinde yoğunlaştıkları belirlenmiştir. Bununla beraber sınıf seviyeleri arasında farklı oranda muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşlukları olduğu görülmektedir.

4. 1. 1. Ders Gözlemlerinin Öncesinde Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları ile ilgili Bulgular

İspat sürecinde öğretmen adaylarının matematiksel bir ilişkinin ispatını yaparken kendilerine mantıklı gelen ve adım adım ilerlemesini sağlayan muhakemeler sonucunda sistematik bir yanılığa düşerek geçerli olmayan ispatları oluşturulmaları olarak nitelendirilen durumlar muhakeme hatası olarak değerlendirilmiştir. Ders gözlemlerinin öncesinde öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarını belirlemek için MHBT1 uygulanmıştır. MHBT1’de öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları ile ilgili frekans ve yüzde dağılımları Tablo 12’ de sunulmuştur.



Tablo 12. Muhakeme Hataları Belirleme Testi 1’de Yer Alan İspatlar İçin Yapılan Muhakeme Hatalarının Frekans ve Yüzde Dağılımları

	1.SINIF			2.SINIF			3.SINIF			4.SINIF			5.SINIF		
	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%
Muhakeme Hataları	MH-1	8	11,3	MH-1	20	31,7	MH-1	22	24,7	MH-1	19	27	MH-1	14	25
	MH-2	9	12,6	MH-2	13	20,6	MH-2	14	15,7	MH-2	12	17	MH-2	6	10,7
	MH-3	4	5,6	MH-3	4	6,3	MH-3	3	3,3	MH-3	9	12	MH-3	6	10,7
	MH-4	5	7,1	MH-4	2	3,15	MH-4	9	10,1	MH-4	5	7	MH-4	3	5,3
	MH-5	3	4,1	MH-5	3	4,7	MH-5	7	7,8	MH-5	5	7	MH-5	5	8,9
	MH-6	4	5,6	MH-6	10	15,8	MH-6	15	16,8	MH-6	13	18	MH-6	17	30
	MH-7	38	53,5	MH-7	11	17,4	MH-7	19	21,3	MH-7	8	11	MH-7	5	8,9

Tablo genel olarak incelendiğinde her bir sınıf seviyesinde muhakeme hataları boyutunda yer alan göstergelerden sonuç ile başlama(MH1), sınıf seviyelerinin genelinde en yüksek frekans($f_{2.sınıf}=20$, $f_{3.sınıf}=22$, $f_{4.sınıf}=19$, $f_{5.sınıf}=14$, $f_{1.sınıf}=8$) ve yüzdeye (sırasıyla %31,7, %27, %27, %25 ve %11,3) sahiptir. Bu kategorinin göstergelerine ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde 2.sınıf öğretmen adaylarının ispatları yaparken %31,7 bir oranla en çok sonuç ile başlama muhakeme hatasına sahip oldukları görülmektedir. 1.sınıf öğretmen adayları ise %11,3 ile en az sonuç ile başlama muhakeme hatasına sahiptirler. Diğer sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ise bu kategori bakımından birbirlerine oldukça yakın yüzdelere sahip olduğu görülmektedir. Dolayısıyla üst sınıflara doğru gidildikçe sonuç ile başlama muhakeme hatasının değişmeye karşı direnç gösterdiği görülmektedir. İspat sürecinde var olan bir gerçek üzerinden başlanarak ulaşılmaması gereken matematiksel ifadenin başlangıçta kabul edilip ispata başlangıç yapma gibi durumlar sonuç ile başlama muhakeme hatası olarak değerlendirilmiştir. Bu durum geçerli bir matematiksel ifadenin sadece tersine bir işleminin yapılmasından ibarettir.

MHBT1'in verileri incelendiğinde ispat sürecinde MH1 en sıklıkla ortaya çıkan muhakeme hatalarından biridir. Öğretmen adaylarının MHBT1'ine ilişkin ispatları incelendiğinde sonuç ile başlama muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumların farklı sınıf seviyelerinde sıklıkla ortaya çıktığı görülmektedir. Öğretmen adaylarının sonuç ile başlama muhakeme hatası yaptıkları ispatlara yönelik örneklerden biri Şekil 3'te sunulmuştur.

S2: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için, $a \leq b$ ise $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ dir. İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.

$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$$

$$2a \leq a+b \leq 2b \Rightarrow 2a \leq a+b \quad \wedge \quad a+b \leq 2b$$

$$= a \leq b \quad \checkmark \quad a \leq b \quad \checkmark$$

\Rightarrow ilk yargıyı sağladığı için ifade doğrudur.

Şekil 3. MH1 göstergesine yönelik ispat örneği

D7 kodlu öğretmen adayının MHBT1'in 3. sorusuna ilişkin yapmış olduğu işlemler incelendiğinde ispatlanması gereken matematiksel ifade olan $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ üzerinden çeşitli işlemler yaparak doğruluğu ilk başta kabul edilen matematiksel ifadeye yani $a \leq b$ ifadesine ulaşmıştır. Öğretmen adayı, doğruluğu kabul edilen bir matematiksel ifadeye

tekrar ulaşarak sadece ifadenin geri dönüşümlü adımlarını göstermiştir ve bu yaptıklarını ispat olarak değerlendirmiştir. Öğretmen adayı kendisinden ispatı yapılması istenen ifadeye yani $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ ifadesine ulaşmak yerine bu ifade için bir ön şart olarak başlangıçta doğru kabul edilen $a \leq b$ ifadesine ulaşarak ispatı tamamladığını düşünmüştür. Bütün bu durumlar incelenerek ve ilgili öğretmen adayı ile yapılan mülakatlar sonucunda öğretmen adayının ispat sürecinde yapmış olduğu muhakeme hatası, sonuç ile başlama muhakeme hatası olarak belirlenmiştir.

Üçüncü sınıf seviyesinde bulunan U17 kodlu öğretmen adayı de sonuç ile başlama muhakeme hatası olarak değerlendirilebilecek bir ispat yapmıştır. Bu ispat Şekil 4'te sunulmuştur.

S4: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $|a - b| \leq |a| + |b|$ eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.

$$\left(|a - b| \right)^2 \leq \left(|a| + |b| \right)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \leq a^2 + 2ab + b^2$$

$$-2ab \leq 2ab$$

$$-2 \leq 2$$

Şekil 4. MH1 göstergesine yönelik ispat örneği

U17 kodlu Öğretmen adayının MHBT1'in 4. sorusuna ilişkin yapmış olduğu işlemler incelendiğinde ispatlanması gereken matematiksel ifadeyi doğru kabul ederek eşitsizliğinin her iki tarafının karesini alarak çeşitli işlemler yaparak doğruluğu matematiksel olarak aşikâr olan $-2 \leq 2$ ifadesine ulaşmıştır. Öğretmen adayı, ispat sürecinde ilgili matematiksel ifadeyi ilk başta doğru kabul ederek doğruluğu bilinen bir matematiksel ifadeye ulaşarak sadece ifadenin geri dönüşümlü adımlarını göstermiştir ve bu yaptıklarını ispat olarak değerlendirmiştir. Bunların sonucunda öğretmen adayının ispat sürecinde yapmış olduğu muhakeme hatası, sonuç ile başlama muhakeme hatası olarak değerlendirilmiştir.

Muhakeme hataları boyutunda yer alan kategorilerden özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7) ise üst sınıflara doğru belli bir oranda

azalmakla birlikte yine en fazla ortaya çıkan muhakeme hatalarından biridir. Bu kategorinin göstergelerine ait en yüksek frekans ($f_{1.\text{sınıf}}=38$, $f_{3.\text{sınıf}}=19$, $f_{2.\text{sınıf}}=11$, $f_{4.\text{sınıf}}=8$, $f_{5.\text{sınıf}}=5$) ve yüzdeye (sırasıyla %53,5, %21,3, %17,4, %11 ve %8,9) sahiptir. Bu kategorinin göstergelerine ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde 1.sınıf öğretmen adaylarının %53,5 ile en fazla MH7 muhakeme hatasına sahip oldukları görülmektedir. Dolayısıyla öğretmen adayları ispatları yaparken özel bir durumdan elde edilen sonucu ispat olarak kabul ettikleri görülmektedir. 5. sınıf öğretmen adayları ise %8,9 ile ispatları yaparken bu muhakeme hatasını en az oranda yapmışlardır. Bu muhakeme hatası üst sınıflara doğru gidildikçe yüksek bir oranda düşüş göstererek bir azalmanın olduğundan söz edilebilir. Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi sadece özel bir durumun veya birkaç sayısal değerle ele alınarak ispatının yapılmasıdır. Öğretmen adaylarının MHBT1'ine ilişkin cevapları incelendiğinde özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi olarak nitelendirilen durumların farklı sınıf seviyelerinde değişen oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir. Bu duruma örnek olarak bir öğretmen adayının ispatı Şekil 5'te sunulmuştur.

S5: $a, b \in \mathbb{Z}^+$ için $a + b$ tek ise a veya b den sadece biri tektir. İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.

$a+b \rightarrow T$

T Ç:

Ç: T

$a+b$

$1+2=3$

$2+5=7$

$2+2 \neq 4 \rightarrow a+a$

$1+1 \neq 2 \rightarrow T+T$

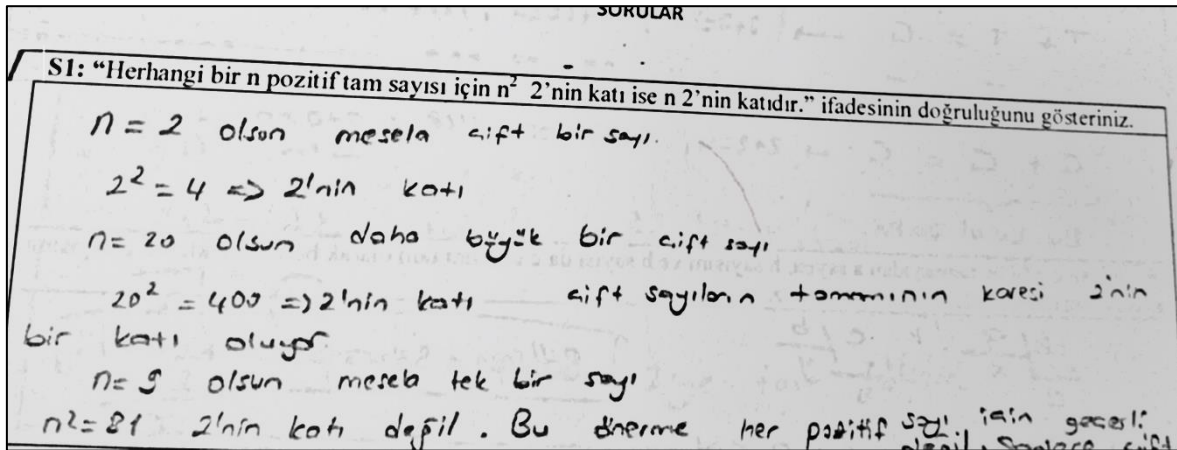
olduğundan birisi Tek. olmalı

Şekil 5. MH7 göstergesine yönelik ispat örneği

B12 kodlu öğretmen adayının MHBT1'in 5. sorusuna ilişkin yapmış olduğu işlemler incelendiğinde verilen bir matematiksel ifadenin doğruluğunun sadece özel bir durumla ya da birkaç sayısal değer deneyerek ispatının yapılabileceğini düşünmüştür. Pozitif tamsayılar kümesi üzerinde tanımlanan $a + b$ ifadesi tek ise a veya b pozitif tamsayısından sadece birinin tek olduğunun ispatlanması istenen bu soruda matematiksel ifadede $a = 1$ ve $b = 2$ gibi sayısal değerleri deneyerek ispatı tamamlandığını düşünmüştür. Matematiksel ifadesinin doğruluğunu göstermek için a ve b ye birkaç tane daha sayısal değer vererek ispat için yeterli işlemleri yaptıkları düşüncesine kapılmıştır. Bu sonucun bütün tamsayılar kümesini kapsayacağını ve ifadenin ispatı için yeterli olacağını düşünmüştür. Öğretmen adayının sadece özel bir durumdan hareketle bu matematiksel

ifadenin her tamsayı için geçerli olabileceğini düşünmesi özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi muhakeme hatasına düştüğünü göstermektedir.

İkinci sınıf seviyesinde bulunan İ8 kodlu öğretmen adayı ise özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul ederek benzer şekilde muhakeme hatası olarak değerlendirecek şekilde bir ispat yapmıştır. Öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 6'da sunulmuştur.

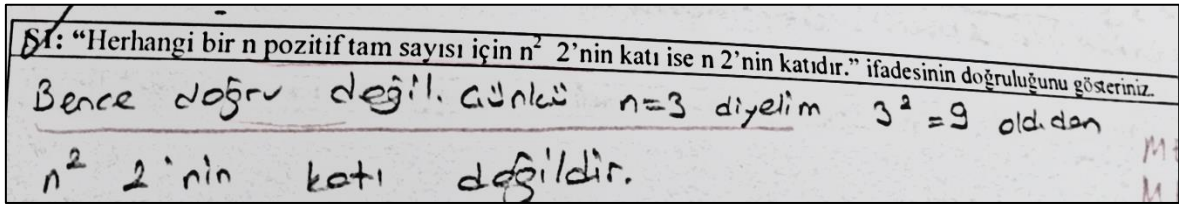


Şekil 6. MH7 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT1'in 1. sorusuna ilişkin yapmış olduğu işlemler incelendiğinde verilen bir matematiksel ifadenin doğruluğunun sadece özel bir durumla ya da birkaç sayısal değer deneyerek ispatını yapmaya çalıştığı görülmektedir. Öğretmen adayı kendisine sunulan herhangi bir n pozitif tam sayı için n^2 2'nin katı ise n 2'nin katıdır matematiksel ifadesinin ispatını yapmak için $n=2$ olarak doğruluğunu göstermeye çalışmıştır. Bundan sonra da daha büyük bir değer $n=20$ olarak yaptığı işlemleri sorulan ifadenin ispatı için yeterli olabileceğini düşünmüştür. Öğretmen adayının sadece birkaç sayısal değerden hareketle bu ifadenin bütün pozitif tamsayılar için geçerli olabileceğini düşünmesi özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi muhakeme hatasına düştüğünü göstermektedir. Bununla beraber öğretmen adayının ispatını incelediğimizde yanlış bir varsayımla soruya yaklaştığı fark edilmektedir. Bu durum ise yaptığı ispatta yanlış varsayımlarla başlama muhakeme hatasına da düştüğünü göstermektedir.

Birinci sınıf seviyesinde yer alan B8 kodlu öğretmen adayı ise başka bir muhakeme hatası olan yanlış varsayımla başlama ile beraber MHBT1'nin 1. Sorusunu sadece bir değer vererek $n=3$ olduğundan $n^2=9$ olacağını dolayısıyla ifadenin doğru olmayacağını belirtmiştir. Bu muhakeme hatası neticesinde öğretmen adayı soruda ön koşul olarak

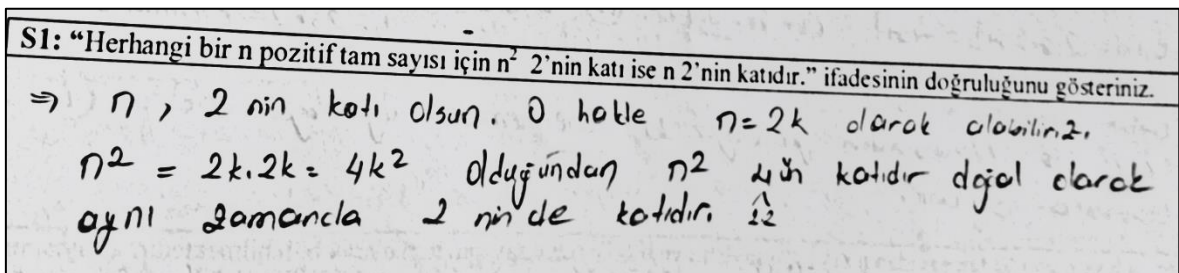
verilen n^2 2'nin katı ise şeklindeki ifadeyi de yanlış olarak nitelendirilmiştir. Öğretmen adayının cevabı Şekil 7'de sunulmuştur.



Şekil 7. MH7 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayın cevap incelediğinde birden fazla muhakeme hatasına sahip olduğu dolayısıyla bunlardan biri de özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi muhakeme hatası olarak değerlendirilmiştir.

Muhakeme hataları kategorisinde yer alan göstergelerden yanlış varsayımla başlama muhakeme hatası (MH2) ise üst sınıflara doğru gidildikçe belli bir oranda azalmakla birlikte en fazla ortaya çıkan muhakeme hatalarından biridir. Bu kategorinin göstergelerine ait en yüksek frekans ($f_{2,\text{sınıf}}=13$, $f_{3,\text{sınıf}}=14$, $f_{4,\text{sınıf}}=12$, $f_{1,\text{sınıf}}=9$, $f_{5,\text{sınıf}}=6$) ve yüzdeye (sırasıyla %20,6, %17, %15,4, %12,6 ve %10,7) sahiptir. Yanlış varsayımlarla başlama; ispatı istenen matematiksel bir ifadede hipotez ve hüküm kavramlarının karıştırılmasıdır. Bir başka deyişle hükmün doğru kabul edilerek hipotezin ispat edilmesidir. Öğretmen adaylarının MHBT1'ne ilişkin ispatları incelendiğinde yanlış varsayımla başlama muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumların farklı sınıf seviyelerinde değişen oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir. Bu durum Şekil 8'de örnek olarak sunulmuştur.

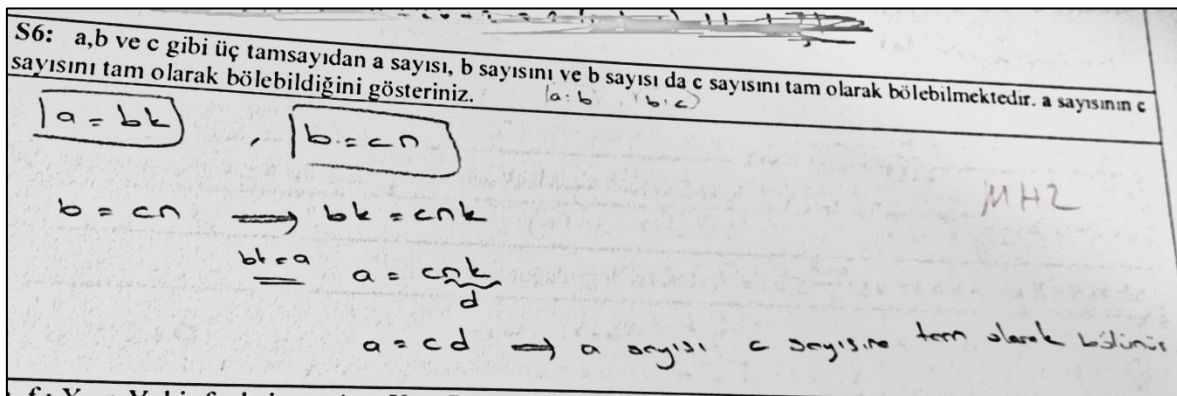


Şekil 8. MH2 göstergesine yönelik ispat örneği

U25 kodlu öğretmen adayının MHBT1'nin 1. sorusuna ilişkin yapmış olduğu ispat incelendiğinde ispatı yapılması istenen matematiksel ifadede hipotez ile hüküm kavramlarını karıştırmış olduğu görülmektedir. İspat edilmesi istenilen ifade n^2 2'nin katı ise n 2' nin katıdır şeklindeki matematiksel ifadeyi öğretmen yanlış bir varsayım ile n 2'nin

katı ise n^2 2'nin katıdır şeklinde göstermeye çalışmıştır. Öğretmen adayı böyle bir yol izleyerek ispat için kullanacağı bilginin sonucu üzerine uğraşmıştır. Öğretmen adayının ispat sürecinde yapmış oldukları dikkate alınarak bu muhakeme hatası, yanlış varsayım ile başlama muhakeme hatası olarak belirlenmiştir.

Benzer şekilde başka ikinci sınıf seviyesinde yer alan İ3 kodlu öğretmen adayının MHBT1'in diğer bir sorusunda ispat yöntemlerini karıştırarak muhakeme hatası olarak nitelendirilebilecek bir ispat yapmıştır. Öğretmen adayının ispatı Şekil 9'da örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 9. MH2 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT1'in 6. sorusuna ilişkin yapmış olduğu ispat incelendiğinde öğretmen adayının matematiksel tanımları yanlış algıladığı fark edilmektedir. Bunun sonucunda ise ispat yaparken yanlış varsayım ile hareket ettiği görülmektedir. Öğretmen adayı, "a, b ve c gibi üç tamsayıdan a sayısı, b sayısını ve b sayısı da c sayısını tam olarak bölmektedir." Şeklindeki matematiksel ifadenin ispatını yaparken $a = b \cdot k$ şeklinde olarak a sayısını b sayısının bir katı olarak düşünmüştür. Başka bir deyişle a böler b ifadesinin yerine b böler a olarak algılamıştır. Benzer şekilde b tamsayısını da c tamsayısının bir katı olarak belirterek $b = cn$ şeklinde ifade etmiştir. Bu tanımlamalardan hareketle matematiksel olarak bu soru için geçerli olmayan bir ispat yapmıştır. Bununla birlikte öğretmen adayı bu soruda yazdığı değişkenleri tanımlamadan k, n gibi değişkenlerin tamsayı olmadığı durumlarda a, b, c'nin tamsayı olmadığı durumları da gözden kaçırmıştır. Öğretmen adayının ispat sürecinde yapmış olduğu işlemler dikkate alındığında bu durum, yanlış varsayım ile başlama muhakeme hatası olarak değerlendirilmiştir.

Üçüncü sınıf seviyesinde yer alan U29 kodlu öğretmen adayı ise benzer şekilde ispat yaparken hüküm ile hipotezi karıştırarak ispatlanması gereken ifadeden hareketle

başlangıçta doğru olarak kabul edilen ifadeyi göstermeye çalışmıştır. Öğretmen adayının yapmış olduğu ispatı Şekil 10'da sunulmuştur.

S1: "Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 'nin katı ise n 2'nin katıdır." ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

$n=2$ için önerme doğrudur.

$n=k$ için önerme doğru olsun. $k|2$

$n=k+2$ için için doğruluğunu gösterelim

$(k+2)^2 | 2 \Rightarrow k+2 | 2$ oldu

$k^2 + 4k + 4 | 2 \Rightarrow k|2, 4k|2, 4|2 \Rightarrow k|2 \Rightarrow k+2 | 2$ dir.

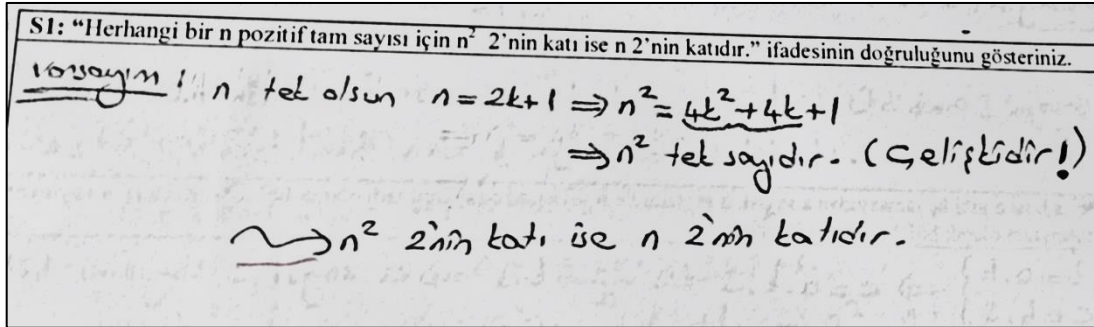
\Rightarrow Önerme doğrudur.

Şekil 10. MH2 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT1'in 1. sorusuna ilişkin yapmış olduğu ispat incelendiğinde ispatı yapılması istenen matematiksel ifadede hipotez ile hüküm kavramlarını karıştırmış olduğu düşünülmektedir. Öğretmen adayı ifadenin sonucu olan n^2 'nin katıdır şeklindeki matematiksel ifadeyi hipotez olarak kabul edip tümevarım ispat yöntemini uygulamıştır. Bunun neticesinde soruda ön koşul olarak kabul edilen n^2 'nin katıdır ifadesine tekrar ulaşmıştır. Öğretmen adayının ispat sürecinde yapmış olduğu bu işlemler dikkate alındığında bu durum, yanlış varsayım ile başlama muhakeme hatası olarak değerlendirilmiştir.

Muhakeme hataları boyutunda yer alan göstergelerden MH6, sınıf seviyelerinde farklı oranlarda ortaya çıkmakla birlikte en fazla ortaya çıkan muhakeme hatalarından biridir. Bu kategorinin göstergelerine ait en yüksek frekans ($f_{5.sınıf}=17, f_{3.sınıf}=15, f_{4.sınıf}=13, f_{2.sınıf}=10, f_{1.sınıf}=4$) ve yüzdeler (sırasıyla %18, %17, %16,8, %12,8 ve %5,6) sahiptir. Bu kategorinin göstergelerine ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde üst sınıf seviyelerinde yer alan öğretmen adaylarının daha çok (3.sınıf %16,8, 4.sınıf %17 ve 5.sınıf %17,9) bu muhakeme hatasına düştükleri görülmektedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispatları yaparken teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunu fark edemedikleri anlaşılmaktadır. 1.sınıf ve 2.sınıf öğretmen adaylarında ise bu muhakeme hatasının nispeten daha düşük oranda ortaya çıkması, öğretmen adaylarının özel bir durumu ispat kabul edip sayısal değerler vererek ispat yapmaya yönelmelerinden kaynaklandığı düşünülebilir. Teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması: Bir teoremin doğrudan ispatının yapılması zor olduğu durumlarda teoremin dengi olan karşıt tersinin kullanılmasıdır. Bu yöntem genellikle çelişki yöntemi ile

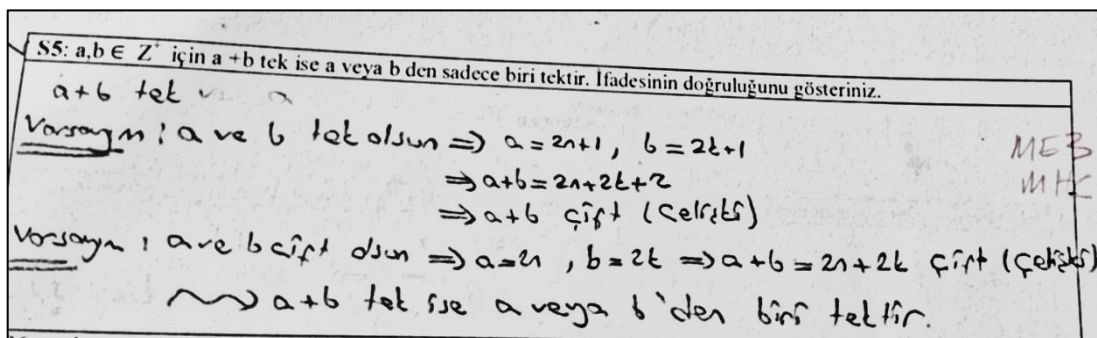
karıştırılmaktadır. Öğretmen adaylarının MHBT1'ne ilişkin cevapları incelendiğinde teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması olarak nitelendirilen durumların farklı sınıf seviyelerinde değişen oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir. Bu durum Şekil 11'de örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 11. MH6 göstergesine yönelik ispat örneği

S19 kodlu öğretmen adayının MHBT1'in 1. sorusuna ilişkin yapmış olduğu ispat incelendiğinde matematiksel bir ifadenin ispatında kullanılan ispat yöntemlerini tam anlamıyla bilmedikleri ve bunları karıştırdığı görülmektedir. Matematiksel bir ifadenin ispatının doğrudan ispatlanması zor olduğu durumlarda bu ifadenin dengi olan karşıt tersinin kullanılması düşünülebilir. Öğretmen adayı böyle bir yöntem uygulamaya çalışırken başka bir ispat yöntemi olan çelişki yöntemini kullanmıştır ve elde edilen sonucu yanlış bir şekilde yorumlamıştır. Öğretmen adayının yapmış olduğu bu muhakeme hatasının, bir teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varamama olarak değerlendirilmiştir.

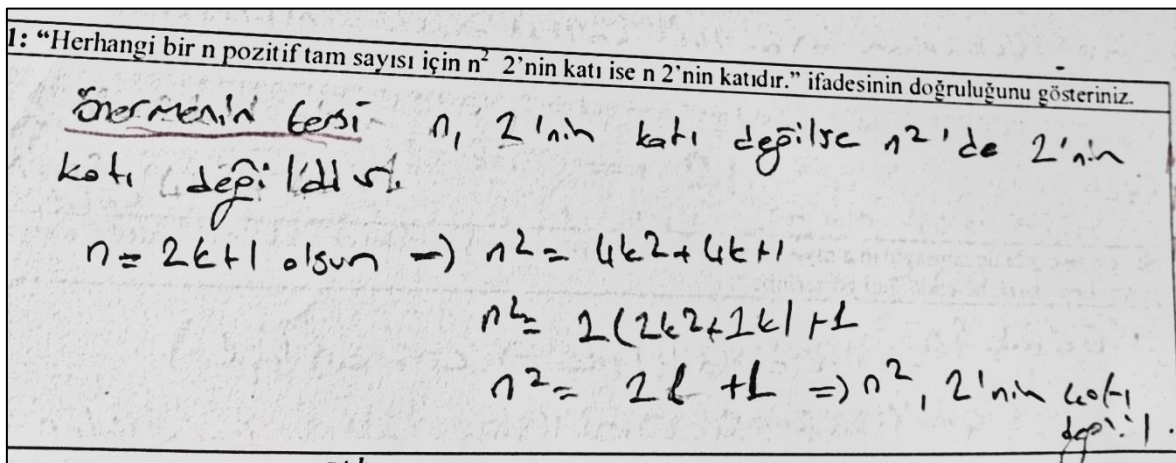
Benzer şekilde başka dördüncü sınıf seviyesinde yer alan D5 kodlu öğretmen adayının sınavın diğer bir sorusunda ispat yöntemlerini karıştırarak muhakeme hatası olarak nitelendirilecek bir ispat yapmıştır. Öğretmen adayının cevabı Şekil 12'de örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 12. MH6 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT1'in 5. sorusuna yönelik yapmış olduğu ispat incelendiğinde "a+b tek ise a ve b den sadece biri tektir" şeklindeki matematiksel bir ifadenin ispatında iki farklı yöntem olan çelişki bulma ispat yöntemi ile karşıt-ters kullanma ispat yöntemlerini beraber kullanmıştır. Dolayısıyla öğretmen adayının kullanılan ispat yöntemlerini doğru bir şekilde algılamadığı ve bunları karıştırdığı görülmektedir. Matematiksel bir ifadenin ispatının doğrudan ispatlanması zor olduğu durumlarda bu ifadenin dengi olan karşıt tersinin kullanılması düşünülebilir. Öğretmen adayı böyle bir yöntem uygulamaya çalışmış yani a ve b den sadece biri tektir ifadesinin karşıt- tersi olan a ve b nin her ikisi de çift veya her ikisi de tek durumlarını varsayım olarak belirlemiştir. Ancak bir ifadenin karşıt –tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkında olmadığı düşünülmektedir. Öğretmen adayı elde ettiği sonuçtan hareketle başka bir ispat yöntemi olan çelişki yöntemini kullanarak sonucu yanlış bir şekilde yorumlamıştır. Öğretmen adayının yapmış olduğu bu muhakeme hatası, bir teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varamaması olarak belirlenmiştir.

Beşinci sınıf seviyesinde yer alan S13 kodlu öğretmen adayı ise önermeler cebirinin temel kavramları olan ters, karşıt, karşıt-ters gibi kavramlarının anlamlarını karıştırarak ispatlarını yanlış yorumlamıştır. Bu duruma yönelik öğretmen adayın yapmış olduğu ispat Şekil 13'te örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 13. MH6 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT1'in 1. sorusuna ilişkin yapmış olduğu ispat incelendiğinde matematiksel bir ifadenin ispatında kullanılan ispat yöntemlerini doğru bir şekilde algılamadığı ve bunları karıştırdığı görülmektedir. Öğretmen adayı n^2 2 nin katı ise n d 2'nin katıdır şeklindeki önermenin mantıksal dengi olan karşıt-tersini kullanmaya çalışmıştır. Ancak başlangıçta önermenin tersi diyerek matematiksel olarak bu ifadenin

tersi olmayan n 2'nin katı değilse n^2 de 2'nin katı değildir şeklinde bir ifade yazmıştır. Bunun neticesinde $n^2 = 2l + 1$ ise n^2 , n 2' nin katı değildir şeklinde matematiksel olarak bu ifade için geçerli olmayan bir sonuç elde etmiştir.

Muhakeme hataları boyutunda yer alan göstergelerden farklı notasyonları kullanmayı ispat olarak düşünme (MH3) bütün sınıf seviyelerinde nispeten daha düşük oranlarda ortaya çıkmakla beraber öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarından biridir. Farklı notasyonlar kullanmayı ispat olarak düşünme: Matematiksel bir ifadenin farklı denklemlerinin ispat olarak düşünülmesidir. Bir bakıma matematiksel ifadenin farklı gösterimlerinin ispat kabul edilmesidir. Öğretmen adaylarının MHBT1'e ilişkin cevapları incelendiğinde farklı notasyonlar kullanmayı ispat olarak düşünme muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumların farklı sınıf seviyelerinde değişen oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir. Bu duruma yönelik örnek Şekil 14'te sunulmuştur.

S1: "Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 2'nin katı ise n 2'nin katıdır." ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

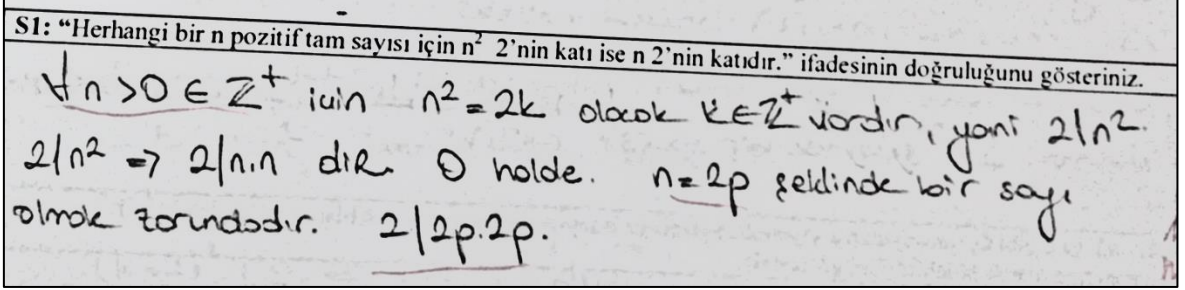
$\frac{n^2}{2}$ tam sayı $\frac{n}{2}$ de tam sayı ispettyelim.

$\frac{n^2}{2} = \frac{n \cdot n}{2} = \frac{n}{2} \cdot n \rightarrow$ sonuçta tam sayı oldu. $\frac{n}{2}$ de tam sayıdır.

Şekil 14. MH3 göstergesine yönelik ispat örneği

U19 kodlu öğretmen adayının MHBT1'in 1. sorusuna yönelik yapmış olduğu ispatında matematiksel bir ifadenin farklı denklemlerini ispat olarak kabul ettiği düşünülmektedir. Bu ispatta öğretmen adayı $\frac{n^2}{2} = \frac{n \cdot n}{2} = \frac{n}{2} \cdot n$ olacak şekilde tanımlayarak ifadenin doğru olarak kabul ettiğini belirtmiş ve böylece n^2 'nin 2'nin katı olduğunu gösterdiğini düşünmüştür. Öğretmen adayının yapmış olduğu işlemler, matematiksel olarak doğru olmasına rağmen ispatı yapılması istenilen durum için bir anlam ifade etmemektedir. Çünkü öğretmen adayı matematiksel bir ifadenin farklı denklemlerini yazmaktan başka bir şey yapmamıştır. Öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatlarda öğretmen adayının yaptığı işlemleri izah edemediği ve yaptığı hatanın farkında olmadığı anlaşılmıştır. Öğretmen adayı sadece daha önce böyle bir ispat yaptığını dolayısıyla o ispata benzer şekilde yapmaya çalıştığını ifade etmiştir. Bu durumlar göz önünde bulundurularak bu muhakeme hatası farklı notasyonları ispat olarak düşünme muhakeme hatası olarak değerlendirilmiştir.

Dördüncü sınıf seviyesinde yer alan D4 kodlu öğretmen adayı benzer şekilde farklı notasyonları yazmayı matematiksel ispat olarak düşünmüştür. Öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 15'te sunulmuştur.



Şekil 15. MH3 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT1'in 1. sorusuna yönelik yapmış olduğu ispatında matematiksel bir ifadenin farklı denklemlerini ispat olarak kabul ettiği düşünülmektedir. Öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatlar da öğretmen adayının yaklaşımının bu yönde olduğu desteklemektedir. Öğretmen adayı başlangıçta ispat için geçerli olan tanım aralığına dikkat ederek pozitif tamsayı olacak şekilde bir k değişkenine bağlı olarak $n^2=2k$ olarak doğru bir yaklaşımla başlamıştır. Ancak daha sonra $2 | n^2$ ise $2 | n.n$ ve $n=2p$ olarak almış ve $2 | 2p.2p$ olacak şekilde aynı ifadenin sadece denklemlerini yazmış ve bunu ispat olarak değerlendirmiştir. Bu durumlar göz önünde bulundurularak bu muhakeme hatası farklı notasyonları ispat olarak düşünme muhakeme hatası olarak değerlendirilmiştir.

Öğretmen adaylarının bir kısmının aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılması (MH4) gibi muhakeme hatası düşük oranlarda da olsa sahip oldukları yapılan MHBT1 neticesinde görülmektedir. Aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılması; ispatta değişkenler tanımlanırken bir ifadenin birden fazla değişken ile tanımlanmasıdır. Öğretmen adaylarının MHBT1'e ilişkin cevapları incelendiğinde aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılması muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumların farklı sınıf seviyelerinde değişen oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir. Bu duruma örnek olarak Şekil 16'da sunulmuştur.

S1: "Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 'nin katı ise n 2'nin katıdır." ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

$$n^2 = 2k \Rightarrow n^2 = 2k$$

$$n = 2a \Rightarrow (n)^2 = (2a)^2$$

$$n^2 = 4a^2$$

$$2k = 4a^2$$

$$k = 2a^2$$

$k \in \mathbb{Z}^+$ olsun

Şekil 16. MH4 göstergesine yönelik ispat örneği

Üçüncü sınıf seviyesinde yer alan U22 kodlu öğretmen adayının MHBT1' in 1. sorusuna yönelik yaptığı işlemler incelendiğinde öğretmen adayının matematiksel ifadenin ispatını yaparken izlediği adımlarda değişkeni tanımlamada aynı matematiksel ifade için k, a gibi birden fazla değişken tanımladığı görülmektedir. Öğretmen adayı aynı ifade için sadece farklı değişkenler kullanmayı ispat olarak düşünmüştür. Dolayısıyla öğretmen adayı bu matematiksel ifadenin ispatında aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılması muhakeme hatasına düşmüştür.

Muhakeme hataları boyutunda yer alan kategorilerden MH5 ise 4.sınıf ve 5.sınıf seviyelerinde kayda değer bir oranda ortaya çıkarken alt sınıflarda bu göstergeye ait oranlar çok düşük olduğu belirlenmiştir. Alt sınıf seviyelerinde bu oranının düşük çıkması, öğretmen adaylarının ispatları boş bıraktıkları ya da sayısal değerler vererek yeterli olabileceğini düşünmelerinden kaynaklanabilir. Aşırı genelleme hataları: Bir kurala, tanıma aşırı bağlı kalınması veya reel, tam vb. sayılarda geçerli bir kuralın tüm sayı kümeleri için geçerli olduğunun kabul edilmesidir. Öğretmen adaylarının MHBT1'e ilişkin cevapları incelendiğinde Aşırı genelleme hataları muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumların farklı sınıf seviyelerinde değişen oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir. Bu durum Şekil 17'de örnek olarak sunulmuştur.

S3: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n^3 - n$ ifadesinin 3 ile tam bölünebildiğini gösteriniz.

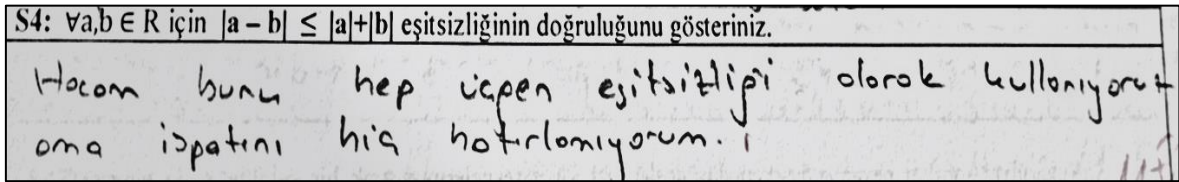
n değerlerinin toplamı 3ün katı ise 3 ile tam bölünebilir.

Şekil 17. MH5 göstergesine yönelik ispat örneği

Üçüncü sınıf seviyesinde yer alan U9 kodlu öğretmen adayının MHBT1' in 3. sorusunda yapmış olduğu işlemler incelendiğinde matematiksel ifadenin ispatı için

öğretmen adayının sadece bir kuralla bağlı olarak ifadenin doğru olacağını düşündüğü görülmektedir. Öğretmen adayı bu soruda “bir sayının 3 ile tam bölünebilmesi için o sayının rakamlarının toplamının 3’ün katı olmalıdır” kuralının bilinmesi ve herhangi bir gerekçe göstermeden ispat için yeterli olacağını düşünmüştür. Öğretmen adayı bunun farkına varmadan sadece bir kuralın geçerliliğine dayanarak veya kuralı evrensel kabul ederek ispatı tamamlamaya çalışmıştır. Bu yüzden öğretmen adayının yapmış olduğu muhakeme hatası aşırı genelleme muhakeme hatası olarak düşünülmüştür.

İkinci sınıf seviyesinde yer alan İ13 kodlu öğretmen ise MHBT1’ in 4. Sorusunda bir kurallı yani üçgen eşitsizliği kurallını hatırlayamadığı için ispatı yapamadığını belirtmiştir. Öğretmen adayının ispatı Şekil 18’de örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 18. MH5 göstergesine yönelik ispat örneği

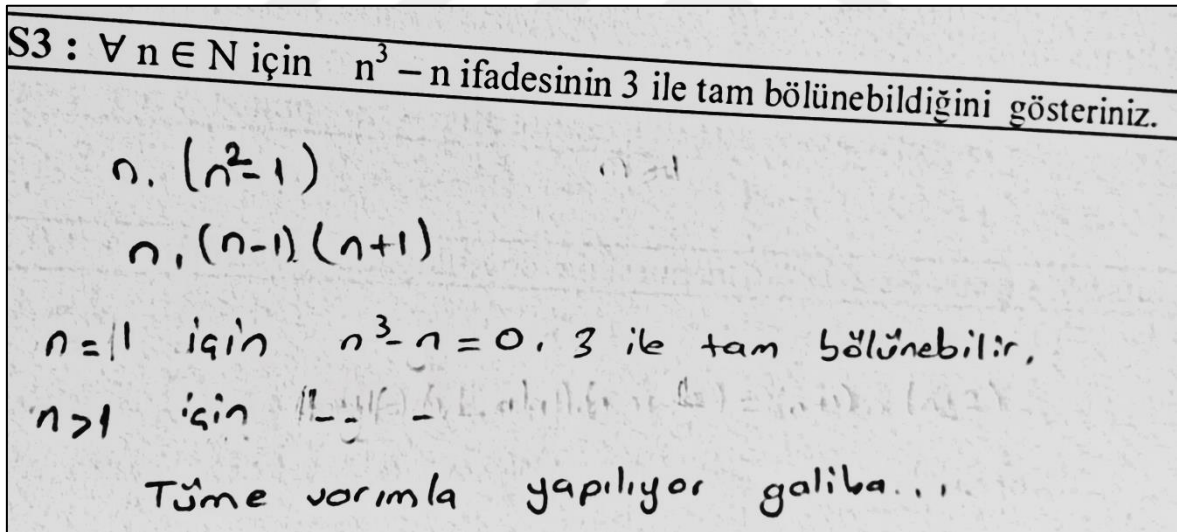
4. 1. 2. Ders Gözlemlerinin Öncesinde Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Eksiklikleri ile İlgili Bulgular

Muhakeme eksiklikleri; ispat sürecinde öğretmen adaylarının yöntem, tanım aralığı, matematiksel dil gibi eksikliklerle ispatlarını tamamlamaları veya ispatlarının yarıda bırakılmasından kaynaklanan durumlardır. Bu durumlar muhakeme hatasından ziyade doğru bir muhakeme ile başlanması ancak bazı matematiksel bilgi eksikliklerine bağlı olarak ispatın istenilen şekilde tamamlanmamasıdır. Ders gözlemlerinin öncesinde öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme eksikliklerini belirlemek için MHBT1 uygulanmıştır. MHBT1’de öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme eksiklikleri ile ilgili frekans ve yüzde dağılımları Tablo 13’ te sunulmuştur.

Tablo 13. Muhakeme Hataları Belirleme Testi 1'de Yer Alan İspatlar İçin Yapılan Muhakeme Eksikliklerinin Frekans ve Yüzde Dağılımları

	1.SINIF			2.SINIF			3.SINIF			4.SINIF			5.SINIF		
	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%
Muhakeme Eksiklikleri	ME-1	17	8,9	ME-1	15	9,22	ME-1	19	4,22	ME-1	11	7,58	ME-1	13	8,22
	ME-2	46	24,2	ME-2	32	11,4	ME-2	89	40	ME-2	27	18,6	ME-2	27	17,1
	ME-3	38	20	ME-3	49	17,5	ME-3	40	18	ME-3	47	32,4	ME-3	48	30,3
	ME-4	14	7,36	ME-4	9	6,37	ME-4	16	7,51	ME-4	8	5,51	ME-4	4	2,53
	ME-5	3	1,57	ME-5	1	0,35	ME-5	8	3,75	ME-5	5	3,44	ME-5	0	0
	ME-6	32	16,8	ME-6	25	15	ME-6	40	18	ME-6	21	14,4	ME-6	19	12
	ME-7	15	7,89	ME-7	6	2,15	ME-7	11	5,16	ME-7	16	11	ME-7	20	12,6
	ME-8	25	13,1	ME-8	25	17,3	ME-8	32	15	ME-8	10	6,89	ME-8	18	11,3

Tablo genel olarak incelendiğinde her bir sınıf seviyesinde muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan kategorilerden ME2 bütün sınıf seviyelerinde en yüksek frekans ($f_{3.sınıf} = 89$, $f_{1.sınıf} = 46$, $f_{2.sınıf} = 41$, $f_{4.sınıf} = 30$, $f_{5.sınıf} = 27$) ve yüzdeye (sırasıyla %41, %32, %30, %18,8 ve %17) sahiptir. Bu kategorinin göstergelerine ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde 3.sınıf öğretmen adaylarının ispata başlama veya ispatları devam ettirme bakımından %41 ile bu muhakeme hatasına en fazla sahip oldukları belirlenmiştir. 5.sınıf öğretmen adayları ise verilen ispatları yapmak için daha fazla girişimlerde bulunarak ispatları boş bırakma veya eksik yapma açısından diğer sınıflara göre daha az oranda muhakeme eksikliğine sahip oldukları düşünülebilir. İspata nasıl başlayacağına karar verememe (ME2): Gerekli bir matematiksel alt yapının var olmasına rağmen ispata başlanılamaması veya başlanan ispatın devam ettirilememesidir. Öğretmen adaylarının MHBT1'e ilişkin cevapları incelendiğinde ispata nasıl başlayacağına karar verememe muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen durumların farklı sınıf seviyelerinde değişen oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir. Bu duruma örnek olarak öğretmen adayın yapmış olduğu ispat Şekil 19'da sunulmuştur.

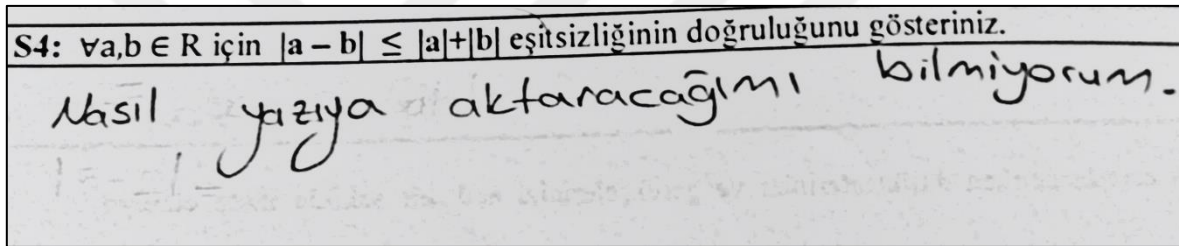


Şekil 19. ME2 göstergesine yönelik ispat örneği

İkinci sınıf seviyesinde yer alan İ11 kodlu öğretmen adayının MHBT1'in 3. sorusuna yönelik yapmış olduğu işlemler incelendiğinde matematiksel ifadenin ispatını yapmak için verilenleri uygun bir şekilde tanımladığı görülmektedir. Matematiksel ifadenin ispatı için uygun bir ispat yöntemini belirlediği ve ilk adımı $n=1$ için $n^3 - n = 0$, 3 ile tam bölünür şeklinde tanımlayarak ispata doğru bir başlangıç yapmasına rağmen ispatın devamını getirmemiştir. Öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatlarda başlangıçta ispatın için zihninde çeşitli yöntemlerin olduğunu ancak bunları matematik diline dökemediğini daha

sonra tümevarım ile yapılabileceğini ama bu yönteminin de nasıl uygulayacağını hatırlayamadığı için ispata devam etmediğini dile getirmiştir. Bunun yanı sıra öğretmen adayı bu tür sorularda bazen ezbere dayalı bir yol izlediğini bu yüzden de sadece hatırlamak için uğraştığını, çoğu zamanda hatırlayamadığını belirtmiştir. Öğretmen adayı matematiksel ifadenin ispatı için belli bir alt yapıya sahip olmasına rağmen ispatı yarım bırakmıştır. Bu durum ispat sürecinde ispata nasıl başlayacağına karar verememe veya ispata devam etmeme muhakeme eksikliği yaptığına işaret etmektedir.

Üçüncü sınıf seviyesinde yer alan U28 kodlu öğretmen adayı ispata nasıl başlayacağına karar verememiştir. Dolayısıyla ilgili matematiksel ifadesinin ispatı için gerekli donanıma sahip olmasına rağmen benzer şekilde ispata nasıl başlayacağına karar verememe muhakeme eksikliği olarak değerlendirilecek şekilde bir cevap vermiştir. Öğretmen adayının cevabı Şekil 20'de sunulmuştur.



Şekil 20. ME2 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT1'in 4. sorusuna yönelik vermiş olduğu cevap incelendikten sonra öğretmen adayı ile klinik mülakat yapılmıştır. Öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatlarda başlangıçta ispat için zihninde çeşitli yöntemlerin olduğunu hatta bazı sayısal değerle ifadenin doğruluğunu gördüğünü ancak bunları matematik diline dökemediğinden ve hangi yöntemi kullanacağına karar vermediği için ispata devam etmediğini dile getirmiştir. Öğretmen adayının matematiksel ifadenin ispatı için uygun muhakemeler ileri sürdüğü örneğin özel birkaç değer ile ispatının yapılamayacağını bildiği düşünülmektedir. Bunun yanı sıra öğretmen adayı bu tür sorularda bazen ezbere dayalı bir yol izlediğini bu tür soruların üçgen eşitsizliği ile yapılacağını düşündüğü bu yüzden de sadece hatırlamak için uğraştığını, hatırlayamadığı için yazıya aktarmadığını belirtmiştir. Öğretmen adayı matematiksel ifadenin ispatı için belli bir alt yapıya sahip olmasına rağmen ispatı yapmak için düşündüklerini yazıya aktarmamıştır. Bu durum ispat sürecinde ispata nasıl başlayacağına karar verememe veya ispata devam etmeme muhakeme eksikliği yaptığına işaret etmektedir.

Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan kategorilerden ME3 ise sınıf seviyeleri arasında farklı oranlarda olmakla beraber en yüksek frekans ($f_{3.sınıf} = 49$, $f_{2.sınıf} = 47$, $f_{4.sınıf}$

=48, $f_{1.sınıf}=38$, $f_{5.sınıf}=30$) ve yüzdeye (sırasıyla %40, %32,8, %30,3, %20 ve %17,5) sahip muhakeme eksikliklerinden biridir. Bütün sınıf seviyelerinin genelinde öğretmen adaylarının ispatları yaparken tanım aralığına dikkat etmeden girişimlerde buldukları ve sadece verilen ifadeye odaklanarak ispat yapmaya çalıştıkları görülmektedir. Bu kategorinin göstergelerine ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının diğer sınıf seviyelerine göre daha fazla(%40) tanım aralığına dikkat etmeme (ME3) muhakeme eksikliğine sahip oldukları görülmektedir. Tanım aralığını dikkate almama; matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken bu ifade için uygun olmayan değerlerin kullanılması veya tanım aralığının dışına çıkmaktır. Öğretmen adaylarının MHBT1'e ilişkin cevapları incelendiğinde tanım aralığına dikkat etmeme muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen durumların farklı sınıf seviyelerinde değişen oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir. Bu duruma örnek olarak öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 21'de sunulmuştur.

S1: "Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 2'nin katı ise n 2'nin katıdır." ifadesinin doğruluğunu göst

$$n^2 = 2k \quad (k \in \mathbb{Z}^+) \Rightarrow n = \sqrt{2k}$$

k tek ise $n = \sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{10} \dots$

k çift ise $n = 2, \sqrt{8}, \sqrt{12} \dots$

$n = 2$ 'nin katı olur

Şekil 21. ME3 göstergesine yönelik ispat örneği

Birinci sınıf seviyesinde yer alan B15 kodlu öğretmen adayının MHBT1'in 1. sorusunda matematiksel ifadenin ispatını yaparken bu ifade için belirtilen tanım aralığını dikkate almadığı görülmektedir. Öğretmen adayı başlangıçta $n^2=2k$ ve k değişkenini $k \in \mathbb{Z}^+$ olarak ifadeyi soruya uygun şekilde tanımlanmasına rağmen devamında tanım aralığının dışına çıktığı görülmektedir. İspatın aşamalarını incelediğimizde öğretmen adayının tanım aralığının dışına çıkarak herhangi bir pozitif sayısı için göstermesi gerekirken n değişkenini $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{10}$ gibi irrasyonel sayılar olarak kabul etmiştir. Bu durum sorunun tanım aralığı için uygun olmadığından matematiksel ifadenin ispatı için geçerli değildir. Bu soruda yapılan muhakeme eksikliği; tanım aralığını dikkate almama olarak belirlenmiştir. Bunun yanı sıra öğretmen adayının matematiksel ifadenin ispatı için sayısal değerler vererek ispat için yeterli olacağını düşünmesi bu soruda aynı zamanda özel bir durumun ispat olarak düşünme muhakeme hatasına da sahip olduğu düşünülmektedir.

Dördüncü sınıf seviyesinde bulunan D13 kodlu öğretmen adayının tanım aralığını dikkate almadığı dolayısıyla ilgili matematiksel ifadesinin ispatı için gerekli donanıma sahip

olmasına rağmen benzer şekilde ispatta tanım aralığını dikkate almama muhakeme eksikliği olarak değerlendirilecek şekilde bir cevap vermiştir. Öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 22'de örnek olarak sunulmuştur.

S2: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için, $a \leq b$ ise $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ dir. İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.

$b = a+k$ olacak şekilde bir k sayı alırsak.

$$a \leq \frac{a+a+k}{2} \leq a+k \text{ olur.}$$

$a \leq a + \frac{k}{2} \leq a+k$ çıkar. bu da bize eşliğin doğru olduğunu gösterir.

Şekil 22. ME3 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayı MHBT1'in 2. sorusunda matematiksel ifadenin ispatını yaparken bu ifade için belirtilen tanım aralığını dikkate almadığı görülmektedir. Öğretmen adayı b sayısının a sayısından büyük olduğunu belirtmek için $b=a+k$ şeklinde tanımlanmıştır. Tanımlanan ifadede k sayısının hangi sayı kümesinin elemanı olduğu belirtilmediğinden negatif bir sayı olarak da nitelendirilebilir. Bu durumda b sayısı a sayısından küçük olmaktadır. Dolayısıyla yazılan matematiksel ifadenin hatalı bir şekilde ispatlanmaya çalışılmasına sebep olmuştur. Bu durum sorunun tanım aralığı için uygun olmadığından matematiksel ifadenin ispatı için geçerli değildir. Bu soruda yapılan muhakeme eksikliği; tanım aralığını dikkate almama olarak belirlenmiştir.

Öğretmen adaylarının çift yönden ispatlanması gereken ispatları da tek taraflı ispatlar gibi düşündüklerini ve karşıtlarının doğru olup olmadığını kontrol etmeden ispatlarını bitirdiklerini gösteren ME8 en yüksek frekans ($f_{3.\text{sınıf}}=32$, $f_{2.\text{sınıf}}=25$, $f_{1.\text{sınıf}}=25$, $f_{5.\text{sınıf}}=18$, $f_{4.\text{sınıf}}=10$) ve yüzdeye (sırasıyla %17,3 %15, %13,1, %11,3 ve %10) sahip muhakeme eksikliklerinden biridir. Tek yönlü inceleme muhakeme eksikliği kategorisinin göstergelerine ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde bütün sınıf seviyelerindeki öğretmen adaylarının benzer şekilde hareket ederek ispatları tek yönlü inceledikleri bundan dolayı bu muhakeme eksikliğinin birbirine yakın oranlarda ortaya çıktığı düşünülebilir. Tek yönlü inceleme: İki yönlü koşullu bir önermenin ispatı yapılırken her iki tarafın incelenmesi gerekirken sadece bir taraftan incelenerek ispatın yapılmasıdır. Öğretmen adaylarının MHBT1'e ilişkin cevapları incelendiğinde ME8 muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen

durumların farklı sınıf seviyelerinde değişen oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir. Bu duruma örnek olarak öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 23'te sunulmuştur.

S 7: $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, $A \subset X$ ve $B \subset X$ olsun. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

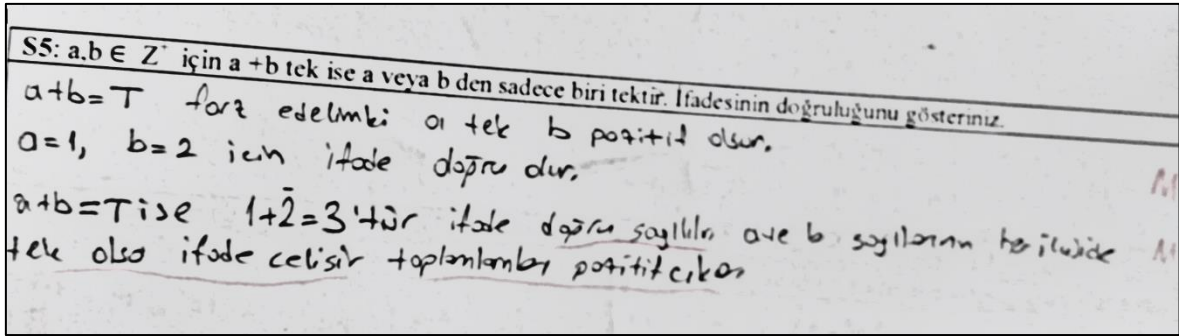
$$x \in A \cup B \Rightarrow \exists y \in Y \text{ s.t. } y \in f(A \cup B)$$

$$\begin{aligned} \cdot x \in A &\Rightarrow \exists y \in Y \text{ s.t. } y \in f(A) \\ \cdot x \in B &\Rightarrow \exists y \in Y \text{ s.t. } y \in f(B) \end{aligned} \Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$$

Şekil 23. ME8 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının (S1) açık uçlu sınavın 7. sorusuna ilişkin yapmış olduğu işlemler incelendiğinde iki yönlü koşullu önermenin her iki taraftan da ispatını yapması gerekirken sadece tek yönlü olarak ispatını yaptığı görülmektedir. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ matematiksel ifadenin ispatını $x \in A \cup B$ ise $\exists y \in Y$ o.ş $y \in f(A \cup B)$ şeklinde matematiksel ifadenin ispatı için uygun bir girişimde bulunmasına rağmen karşıtının doğru olmadığını da incelenmesi gerektiğini göz ardı etmiştir. Öğretmen adayının ispat sürecinde böyle bir adım izleyerek tek yönlü inceleme muhakeme eksikliğini yaptığı belirlenmiştir.

Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergelerden matematik dilini kullanmada yetersizlik (ME6) ise yine öğretmen adaylarının ispat sürecinde yoğun olarak yaptıkları bir muhakeme eksikliği olarak ortaya çıkmıştır. Frekans ve yüzdeleri farklı olmakla beraber bu kategoriye ait göstergeler dikkate değer oranlarda olduğu görülmektedir. Bu kategorinin göstergelerine ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde öğretmen adaylarının ($f_{3.\text{sınıf}}=40$, $f_{1.\text{sınıf}}=32$, $f_{2.\text{sınıf}}=25$, $f_{4.\text{sınıf}}=21$, $f_{5.\text{sınıf}}=16$) ve yüzdeye (sırasıyla %18 %16,8, %15, %14,4 ve %12) yüzdeye sahip oldukları belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının genel olarak matematik dilini yetersiz kullandıkları ve tanım, teorem gibi kavramlarının kullanılmasında eksikliklere sahip oldukları elde edilen verilerle görülmektedir. Matematik dilini kullanmada yetersizlik, ispat adımlarında matematiksel sembol, tanım veya teorem gibi ifadelerinin kullanımında matematik diline dikkat edilmemesidir. Öğretmen adaylarının MHBT1'e ilişkin cevapları incelendiğinde matematik dilini kullanmada yetersizlik muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen durumların farklı sınıf seviyelerinde değişen oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir. Bu duruma örnek olarak öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 24'te sunulmuştur.



Şekil 24. ME6 göstergesine yönelik ispat örneği

Birinci sınıf seviyesinde yer alan B2 kodlu öğretmen adayının MHBT1'e 5. sorusuna yönelik yapmış olduğu işlemler incelendiğinde matematik dilinin doğru bir şekilde kullanılmadığı fark edilmektedir. Öğretmen adayı matematiksel ifadenin ispatını yapmak için "*a tek b pozitif olsun*" gibi herhangi bir matematiksel dayanağı olmayan bir tanımlama yapmıştır. Yazdığı bu tanımlamalar üzerine sayısal değerler vererek ifadenin doğru olduğunu belirtmiştir. Dolayısıyla öğretmen adayı tümevarım yönteminin doğasına uygun olmayan ifadeler yazmıştır. İspatın son aşamasında "*a ve b sayılarının her ikisi de tek olsa ifade çelişir toplamları pozitif çıkar*" gibi bir cümle ile bitirmiştir. Öğretmen adayının ne kast ettiğini ve neden bu şekilde bir tanımlamaya gittiğini anlamak için ilgili öğretmen adayı ile klinik mülakat yapılmıştır. Klinik mülakatlar sonucunda öğretmen adayının çift sayı yerine "pozitif" kelimesini kullandığını, matematik dilini yeteri derecede doğru kullanmadığı yazdığı ifadelerle kendisinin de bir anlam veremediği anlaşılmıştır. Öğretmen adayının 1. Sınıf seviyesinde olmasından dolayı matematik dilini kullanmada yetersizlik gösterdiği düşünülmektedir. Bu durumlar göz önünde bulundurulduğunda öğretmen adayının yapmış olduğu muhakeme eksikliği; matematik dilinin yetersiz kullanılması şeklinde belirlenmiştir.

Dördüncü sınıf seviyesinde bulunan D13 kodlu öğretmen adayının tanım aralığını dikkate almadığı dolayısıyla ilgili matematiksel ifadesinin ispatı için gerekli donanıma sahip olmasına rağmen benzer şekilde ispatta tanım aralığını dikkate almama muhakeme eksikliği olarak değerlendirilecek şekilde bir cevap vermiştir. Öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 25'te sunulmuştur.

S2: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için, $a \leq b$ ise $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ dir. İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.

$$2 \cdot a \leq a+b \leq 2 \cdot b \quad a \leq b \text{ ise}$$

$$2a \leq 2b \text{ 'dir.}$$

Birbirleme dönüşüm uygulayıp yeme koyarak doğruluğunu ispatlamış olunuz.

Şekil 25. ME6 göstergesine yönelik ispat örneği

MHBT1'in verileri incelendiğinde farklı sınıf seviyelerinde yer alan bazı öğretmen adaylarının matematiksel tanımları yetersiz veya yanlış kullandıkları (ME4) belirlenmiştir. Bu duruma örnek olarak öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 26'da sunulmuştur.

S 7: $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, $A \subset X$ ve $B \subset X$ olsun. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

A ve B X'in alt kümesidir. Bu kümeler (A ve B kümesi) birbirlerinin alt kümesi olmadıkları göre bu kümeler ayrık kümelere ve toplamlar $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ şeklinde bulunur.

Şekil 26. ME4 göstergesine yönelik ispat örneği

Üçüncü sınıf seviyesinde yer alan U3 kodlu öğretmen adayı "A \subset X ve B \subset X " olarak verilen matematiksel ifadeyi yorumlarken A ve B kümesinin birbirlerinin alt kümesi olamayacağını dolayısıyla bunları ayrık kümeler olarak değerlendirmiştir. Öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatlarda öğretmen adayının matematiksel ifadenin tanımını doğru algılamadığı ve bundan dolayı matematiksel tanımların yetersiz kullanılması muhakeme eksikliğini yaptığı belirlenmiştir.

Birinci sınıf seviyesinde yer alan B13 kodlu öğretmen adayı ise MHBT1'in 8.sorusunda ilgili matematiksel ifadenin ispatında gereksiz değişkenler kullanarak matematiksel olarak geçerli olmayan bir ifade yazmıştır. Öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 27'de sunulmuştur.

S8: "Üç ardışık tam sayının toplamı ortadaki sayının 3 katıdır." Önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

$$2n+1 \quad 2m \quad 2t+1$$

$$2n+2m+2t+2=4m^2 \quad ???$$

$$n+m+t+1=2m^2$$

Şekil 27. ME4 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının ardışık tamsayılarının matematik diline uygun yazmada yetersiz kaldığı görülmektedir.

Öğretmen adayları ispat sürecinde ispat yöntemlerini doğru kullanmada zorlukları yaşamışlardır. Bundan dolayı muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan kategorilerden yöntemsel eksiklik (ME1) sınıf seviyelerinde farklı oranlarda olmakla beraber öğretmen adaylarının sahip olduğu bir muhakeme eksiği olarak ortaya çıkmıştır. Bu kategorinin göstergelerine ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde öğretmen adaylarının ispatları yaparken ispat yöntemleri kullanmada sıkıntı yaşadıkları dolayısıyla bu açıdan muhakeme eksiğine sahip oldukları düşünülebilir. Yöntemsel eksiklik ispatta uygun olmayan bir ispat yönteminin seçilmesi ve bundan dolayı ispat adımlarında ilerlemenin kaydedilmemesi veya ispatın yanlış yapılmasıdır. Öğretmen adaylarının MHBT1'e ilişkin cevapları incelendiğinde yöntemsel eksiklik muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen durumların farklı sınıf seviyelerinde değişen oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir. Bu duruma örnek olarak öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 28'de sunulmuştur.

S1: "Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 2'nin katı ise n 2'nin katıdır." ifadesinin doğruluğunu gösteriniz

$$n^2 = 2k \Rightarrow n = 2t$$

$n^2 = 2k$ olsun. $n = 2t$ olduğunu gösterelim.

$n = 1$ için örnekleme yapalım.

$n = m$ için örnekleme yapalım. $n^2 = 2k$ olsun.

$n = m+1$ için örnekleme yapalım.

$$(m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$$

$$= 2k + 2m + 1$$

Şekil 28. ME1 göstergesine yönelik ispat örneği

Üçüncü sınıf seviyesinde yer alan U3 kodlu öğretmen adayının MHBT1'in 1. sorusuna yönelik yapmış olduğu işlemler incelendiğinde matematiksel ifadenin ispatını yapmak için tercih ettiği ispat yönteminin bu soru için uygun olmadığı görülmektedir. İspata yönelik izlenen adımlar incelendiğinde ilk önce doğrudan ispat yöntemini kullanmak

istemmiştir. Ancak sonraki adımlarda tümevarım yöntemini uygulamaya çalışmış ve ilgili matematiksel ifadenin ispatının tamamlanmadığıdır. Öğretmen adayı bu durumun farkına varmadan bu soru için geçerli olmayan bir ispat yöntemini kullanmıştır. Öğretmen adayı uygun bir ispat yöntemini kullanmayarak yöntemsel bir eksiklik yapmış olduğu belirlenmiştir.

Öğretmen adaylarının gözlem öncesi yapılan MHBT1' de muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan kategorilerde en az sahip oldukları muhakeme eksikliği olarak değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı (ME5) olarak belirlenmiştir. İspat sürecinde öğretmen adaylarının genel olarak değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı açısından en az eksiklikleri olduğundan söz edilebilir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan kategorilerden ispat yapmada sistematikliğin olmaması (ME7) benzer şekilde en düşük oranda ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının genelinde ispat yapmada sistematığe dikkat etmelerine rağmen bazı öğretmen adaylarının ispatlarını yazma konusunda zorluk yaşadıkları görülmektedir. İspat yapmada sistematikliğin olmaması, ispat adımlarında uygun bir sıranın takip edilmemesi veya belli bir düzen içinde yazılmamasıdır. ME7 muhakeme eksikliğine yönelik örnek olarak öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 29'da sunulmuştur.

$a, b \in \mathbb{Z}^+$ $a=2k+1, b=2m \rightarrow a+b=2(k+m)+1$
 $\rightarrow a+b=2p+1$
 $\rightarrow a+b$ tek $\rightarrow a$ veya b den sadece biri tektir.

SS: $a, b \in \mathbb{Z}^+$ için $a+b$ tek ise a veya b den sadece biri tektir. İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.

$a, b \in \mathbb{Z}^+$ $a=2k+1, b=2m+1$ olsun $\rightarrow a+b=2k+1+2m+1$
 $\rightarrow a+b=2(k+m)+2$
 $\rightarrow a+b=2p+2$
 $\rightarrow a+b$ çift sayı \rightarrow çelişki ($a+b$ tek)

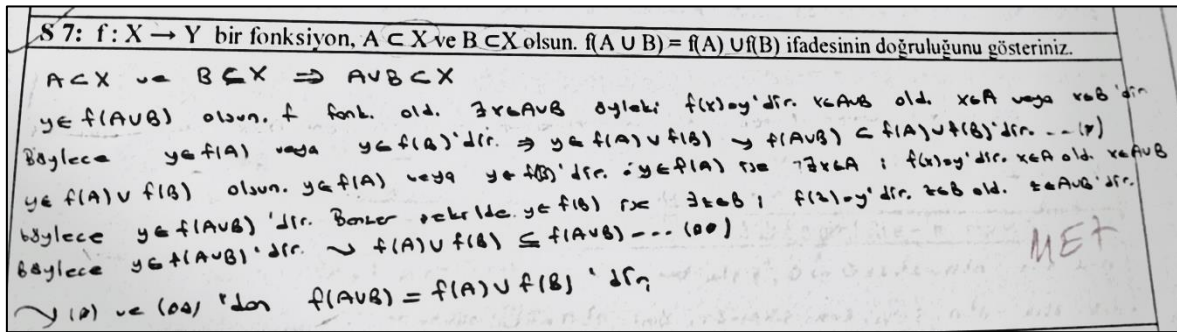
$a, b \in \mathbb{Z}^+$ $a=2k, b=2m$ olsun $\rightarrow a+b=2(k+m)$
 $\rightarrow a+b=2p$ \rightarrow ($a+b$ tek)
 $\rightarrow a+b$ çift

Şekil 29. ME7 göstergesine yönelik ispat örneği

Beşinci sınıf seviyesinde yer alan S14 kodlu öğretmen adayının MHBT1'in 5. sorusuna yönelik yapmış olduğu işlemler incelendiğinde ispat adımlarının belli bir sıraya göre düzenlenmediği ve bundan dolayı ispatın bütününde bir karmaşıklığın olduğu görülmektedir. a ve b değişkenlerin nasıl tanımlandığı, devamında hangi adımların birbirini izlediği, hüküm ile hipotezin hangisi olduğu ve belirlenen yaklaşımının ne amaçla kullanıldığı anlaşılmamaktadır. Bu durum ispat için izlenen adımların neler olduğu ve niçin

kullanıldığıının anlaşılmasına yol açmıştır. Dolayısıyla bu soruda öğretmen adayının yapmış olduğu muhakeme eksikliği; ispatta belli bir sistematikliğin olmaması şeklinde belirlenmiştir.

Dördüncü sınıf seviyesinde yer alan D1 kodlu öğretmen adayı da benzer şekilde MHBT1'in 7. Sorusunda ilgili matematiksel ifadenin ispatı yaparken sistematikliğe dikkat etmemiştir. Bundan dolayı ispat sürecinde izlenen adımlar karmaşık bir şekilde yazıldığından anlaşılmamaktadır. Öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 30'da sunulmuştur.



Şekil 30. ME7 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT1'in 7. sorusuna ilişkin yapmış olduğu işlemler incelendiğinde iki yönlü koşullu önermenin her iki taraftan da ispatını yapılması gerekirken öğretmen adayının sistematikliğe dikkat etmemesi sonucunda bu ispatın nasıl yapıldığı net anlaşılmamıştır.

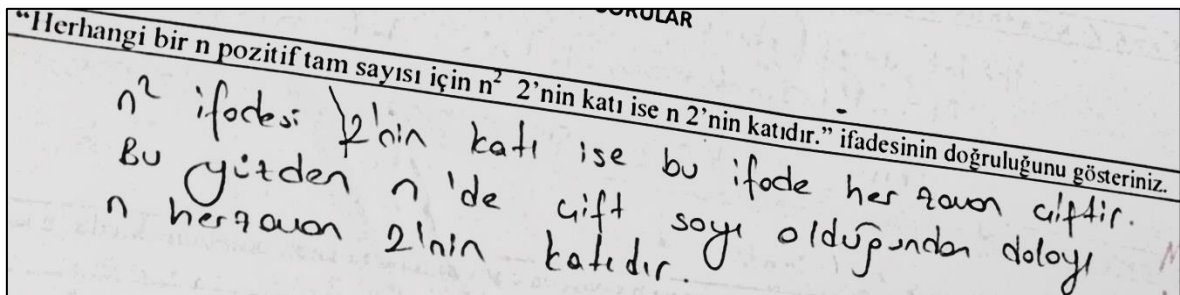
4. 1. 3. Ders Gözlemlerinin Öncesinde Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Boşlukları ile İlgili Bulgular

İspat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmayarak ispatın tamamlanması gibi durumlar muhakeme boşluğu olarak değerlendirilmiştir. Ders gözlemlerinin öncesinde öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme boşluklarını belirlemek için MHBT1 uygulanmıştır. MHBT1'de öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme boşlukları ile ilgili frekans ve yüzde dağılımları Tablo 14'te sunulmuştur.

Tablo 14. Muhakeme Hataları Belirleme Testi 1'de Yer Alan İspatlar İçin Yapılan Muhakeme Boşluklarının Frekans ve Yüzde Dağılımları

	1. SINIF			2. SINIF			3. SINIF			4. SINIF			5. SINIF		
	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%
Muhakeme Boşlukları	MB-1	18	37,5	MB-1	14	45,1	MB-1	16	28,5	MB-1	9	28,1	MB-1	7	17,5
	MB-2	15	31,2	MB-2	16	51,6	MB-2	26	46,4	MB-2	11	34,3	MB-2	17	42,5
	MB-3	5	8,92	MB-3	1	3,22	MB-3	13	23,2	MB-3	8	25	MB-3	6	15,5
	MB-4	10	17,8	MB-4	0	0	MB-4	1	1,78	MB-4	4	12,5	MB-4	11	27,5

Tablo genel olarak incelendiğinde muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergeler her bir sınıf seviyesinde benzer olduğu görülmektedir. Bu boyutta kullanılan önermelerin gerekçelerinin sunulmaması (MB2) bütün sınıf seviyelerinde en yüksek frekans ($f_{1.Sınıf}=28$, $f_{2.Sınıf}=16$, $f_{3.Sınıf}=26$, $f_{4.Sınıf}=11$, $f_{5.Sınıf}=17$) ve yüzdeye (sırasıyla %52,8, %51,2, %46,4, %34,3 %42,5) sahiptir. Bu kategorinin göstergelerine ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde öğretmen adaylarının sınıf seviyesine bakılmaksızın ispatları yaparken kullandıkları önermelerin gerekçelerini sunmadan ispat yaptıkları görülmektedir. Bu göstergelere yönelik veriler göz önüne alındığından 4.sınıf öğretmen adayları MB2 açısından diğer sınıflara nispeten daha düşük yüzdeye (%34,3) sahip oldukları görülmektedir. Diğer sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ise benzer şekilde yaklaşık olarak %50 civarında ciddi bir oranda bu muhakeme boşluğunu yaptıklarından söz edilebilir. Bu verilere bakılarak öğretmen adaylarının ispat sürecinde kullandıkları önermeleri gerekçelendirmeden ispatları belli ezber kalıplar ile yapmaya çalıştıkları ve dolayısıyla gerekçesiz ispatlar oluşturuldukları düşünülebilir. Kullanılan önermelerin gerekçelerinin sunulmaması: İspat adımlarında kullanılan önermelerin veya ortaya atılan iddiaların bir gerekçeye dayandırılmamasıdır. Öğretmen adaylarının 1. Açık uçlu sınavına ilişkin cevapları incelendiğinde kullanılan önermelerin gerekçelerinin sunulmaması muhakeme boşluğu olarak nitelendirilen durumların farklı sınıf seviyelerinde değişen oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir. Öğretmen adayın yapmış olduğu ispat Şekil 31'de örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 31. MB2 göstergesine yönelik ispat örneği

Birinci sınıf seviyesinde yer alan B11 kodlu öğretmen adayının MHBT1'in 1. sorusuna ilişkin yapmış olduğu ispat incelendiğinde öğretmen adayının ispat sürecinde kullandığı önermelerinin herhangi bir gerekçesini göstermeden bazı ezber kabullere dayanarak ispat adımlarını yazdığı görülmektedir. Soruda "herhangi bir n pozitif tamsayısı için n^2 2'nin katı ise n 2'nin katıdır" şeklindeki matematiksel ifadenin ispatı için öğretmen adayı " n^2 2'nin katı ise bu ifade her zaman çifttir" diyerek matematiksel olarak aynı anlama gelen bir ifade kullanmıştır. Daha sonra herhangi bir gerekçe göstermeden "bir sayı çift ise

o sayı her zaman 2'nin katıdır" şeklinde aynı ifadeyi çift kabul ederek sonuca gitmiştir. Bu soruda yapılan muhakeme boşluğu; kullanılan önermenin gerekçesinin sunulmaması olarak değerlendirilmiştir.

Üçüncü sınıf seviyesinde yer alan U32 kodlu öğretmen adayı da benzer şekilde MHBT1'in 6.sorusunda ilgili matematiksel ifadenin gerekçesini göstermeden sonucun doğru olduğunu belirtmiştir. Öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 32'de örnek olarak sunulmuştur.

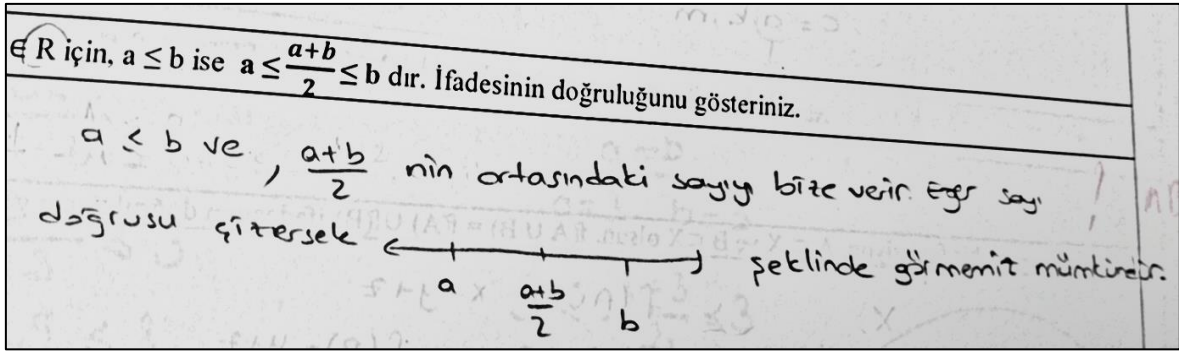
S6: a,b ve c gibi üç tamsayıdan a sayısı, b sayısını ve b sayısı da c sayısını tam olarak bölebilmektedir. a sayısının c sayısını tam olarak bölebildiğini gösteriniz.

Handwritten mathematical proof for S6. The student shows three division problems: $a \div b$, $b \div c$, and $a \div c$ with a question mark. Below, they write "Gecirne özelliği" and conclude that $\frac{a}{c}$ is an integer.

Şekil 32. MB2 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT1'in 6. sorusuna ilişkin yapmış olduğu ispat incelendiğinde adayın ispat sürecinde kullandığı önermelerin herhangi bir gerekçesini göstermeden ispat adımlarını yazdığı görülmektedir. Öğretmen adayı soruda "*a tamsayısı, b tamsayısını ve b tamsayısı da c tamsayısını tam bölerse a tamsayısı c tamsayısını tam böler*" şeklindeki ifadeyi herhangi bir gerekçeye dayandırmadan göstermeye çalışmıştır. Öğretmen adayı bu soruda önermenin gerekçesinin sunulmaması olarak nitelendirilen muhakeme boşluğuna sahip olduğu düşünülmektedir. Bununla beraber ilgili matematiksel ifadenin ispatına yönelik yanlış varsayım ile başladığı görülmektedir. Öğretmen adayı "*a sayısı b sayısını böler*" şeklindeki matematiksel ifade yerine "*b böler a*" olarak ifadenin tersini yazmıştır.

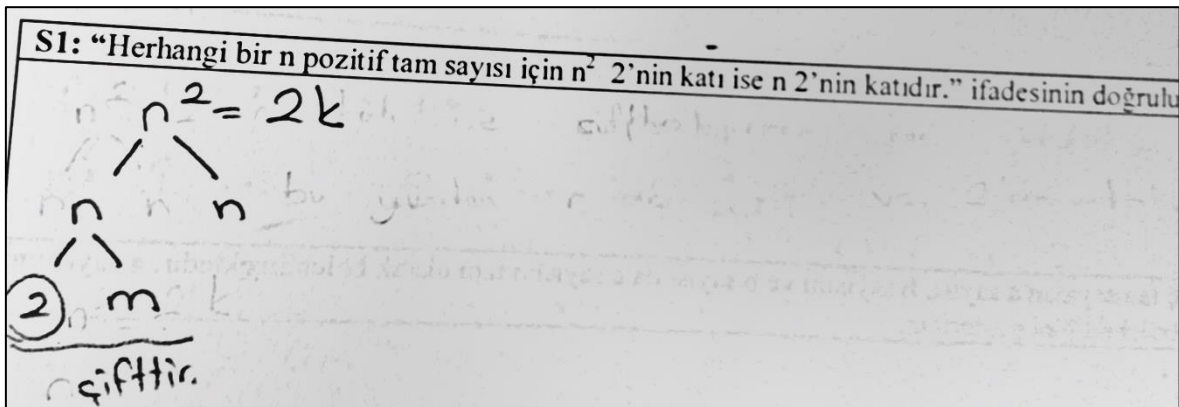
Birinci sınıf seviyesinde yer alan B10 kodlu öğretmen adayı da benzer şekilde ispat sürecinde kullandığı önermeyi herhangi bir gerekçeye dayandırmamıştır. Öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 33'te örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 33. MB2 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT1'in 2. sorusuna ilişkin yapmış olduğu ispat incelendiğinde adayın ispat sürecinde kullandığı önermelerin herhangi bir gerekçesini göstermeden bazı kabullere dayanarak ispat adımlarını yazdığı görülmektedir. öğretmen adayı soruda verilen $a \leq b$ ise $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ dir şeklindeki soruya yönelik ispat yapmaya çalışırken direk sonuç üzerinde hareketle ifadeyi sayı doğrusunda gösterimini yapmakla ifadenin ispatı için yeterli olacağını düşünmüştür. Bu soruda yapılan muhakeme boşluğu; kullanılan önermenin gerekçesinin sunulmaması olarak belirlenmiştir.

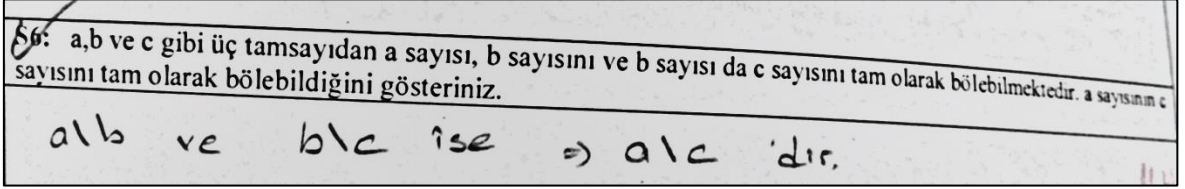
Farklı sınıf seviyelerinde bazı öğretmen adayları ise herhangi bir gerekçe veya açıklama yapmadan önermenin doğruluğu gösterdiklerini düşünmüşlerdir. Öğretmen adaylarından U5 kodlu öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 34'te örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 34. MB2 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayı $n^2=2k$ şeklinde belirsiz bir k değişkenine göre yani k' hangi sayı kümesinin elemanı olduğunu belirtmeden yazmıştır. Daha sonra n^2 'nin çeşitli notasyonlarını yazarak n'nin 2'nin katı olacağını iddia etmiştir.

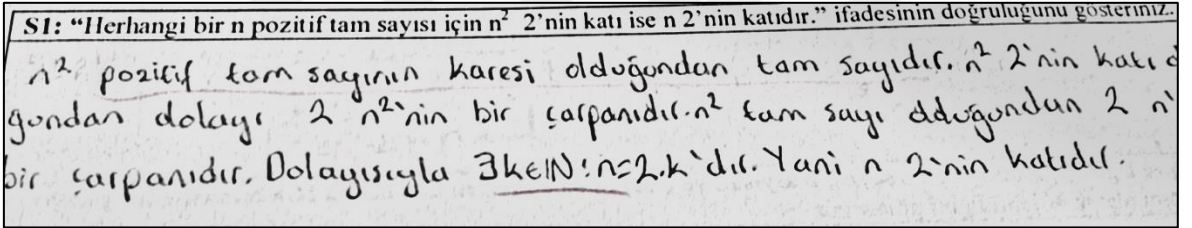
İkinci sınıf seviyesinde yer alan İ5 kodlu öğretmen adayı ise MHBT1'in 6. Sorusunda benzer şekilde MH2 muhakeme boşluğu olarak değerlendirilecek bir cevap yazmıştır. Öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 33'te örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 35. MB2 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayı soruda sözel olarak ifade edilen matematiksel ifadeyi sadece matematik diline uygun yazarak ispat için yeterli olacağını düşünmüştür.

Dördüncü sınıf seviyesinde yer alan D23 kodlu öğretmen adayı ise ilgili matematiksel ifadenin sözel açıklamasını ispat olarak düşünmüştür. Öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 36'da örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 36. MB2 göstergesine yönelik ispat örneği

Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergelerden yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması (MB1) ise sınıf seviyeleri arasında farklı oranlarda olmakla beraber en yüksek frekans ($f_{1.Sınıf}=10$, $f_{2.Sınıf}=14$, $f_{3.Sınıf}=16$, $f_{4.Sınıf}=9$, $f_{5.Sınıf}=11$) ve yüzdeye (sırasıyla %21,8, %45,2, %28,5, %18,3 %17,1) sahiptir. Bu kategorinin göstergelerine ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde 2.sınıf öğretmen adaylarının matematiksel bir ifadenin ispatı yaparken yazdıkları ispat adımları ile elde ettikleri sonuçların uyuşmaması bakımından %45,2 ile en fazla bu muhakeme boşluğuna sahip oldukları görülmektedir. 4.sınıf ve 5.sınıf öğretmen adaylarında ise MB1 daha düşük oranlarda ortaya çıkmıştır. Üst sınıf seviyelerinde yer alan öğretmen adaylarının ispat yaparken ispat adımları ile sonuç arasındaki ilişkiye daha çok dikkat ettikleri düşünülebilir. Yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması: Matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken elde sonucun önceki adımlara dayandırılmasına rağmen bu adımlar arasında bir ilişkinin olmaması durumudur. Öğretmen adaylarının MHBT1'e ilişkin

cevapları incelendiğinde yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması muhakeme boşluğu olarak nitelendirilen durumların farklı sınıf seviyelerinde değişen oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir. İkinci sınıf seviyesinde yer alan İ12 kodlu öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 37’de örnek olarak sunulmuştur.

Handwritten mathematical proof for the inequality $|a-b| \leq |a|+|b|$. The text is written in Turkish and includes the following steps:

$a, b \in \mathbb{R}$ için $|a-b| \leq |a|+|b|$ eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.

$|a|+|b| \Rightarrow \mathbb{Z}$ için $|a+b|$

$|a-b| \leq |a+b| \Rightarrow a, b \in \mathbb{Z}$ için ?

$|a-b| \leq |a+b|$ doğruluğu asıl.

\mathbb{Z} için böyle \mathbb{R} 'de bknayorum

Şekil 37. MB1 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT'in 4. sorusuna ilişkin yapmış olduğu ispat incelendiğinde yazılan ispat adımları arasında bir uyumun bulunmadığı ve ispat adımları ile elde edilen sonucun uyuşmadığı görülmektedir. Öğretmen aday birinci adımda soruda verilen " $|a|+|b|$ " şeklinde verilen ifadenin yerine " $|a+b|$ " şeklinde bir ifade yazmıştır. Daha sonra herhangi bir gerekçe göstermeden " $|a-b| \leq |a+b|$ " şeklinde ispatı istenilen ifadeden bağımsız bir sonuç elde etmiştir. Bütün reel sayılar için doğruluğu ispat edilmesi istenilen matematiksel ifade için yazılan sonuç geçerli olmamakla beraber ispat adımları arasında herhangi bir ilişkiden söz edilmemiştir. Bunun sonucunda yapılan muhakeme boşluğunun yazılan ispat adımları ile elde edilen sonucun uyuşmaması olarak değerlendirilmiştir.

Dördüncü sınıf seviyesinde yer alan D4 kodlu öğretmen adayı ise ispat için başlangıçta hipotezden hareketle sonuca ulaşmayı amaçlayan doğru bir yaklaşım ile başlamasına rağmen elde edilen sonuç ile yazılan ispat adımlarının bir birbirleriyle uyuşmadığı görülmektedir. Öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 38’de örnek olarak sunulmuştur.

S2: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için, $a \leq b$ ise $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ dir. İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.

$a \leq b$ ise $a-b \leq 0$ ve $\frac{a-b}{2} \leq 0$ dir.

$\left[a \leq \frac{a+b}{2} \leq b \right] \rightarrow$ eşitsizliğin her tarafına b yi çıkaralım

$a-b \leq \frac{a+b}{2} - b \leq 0$

$a-b \leq \frac{a-b}{2} \leq 0$

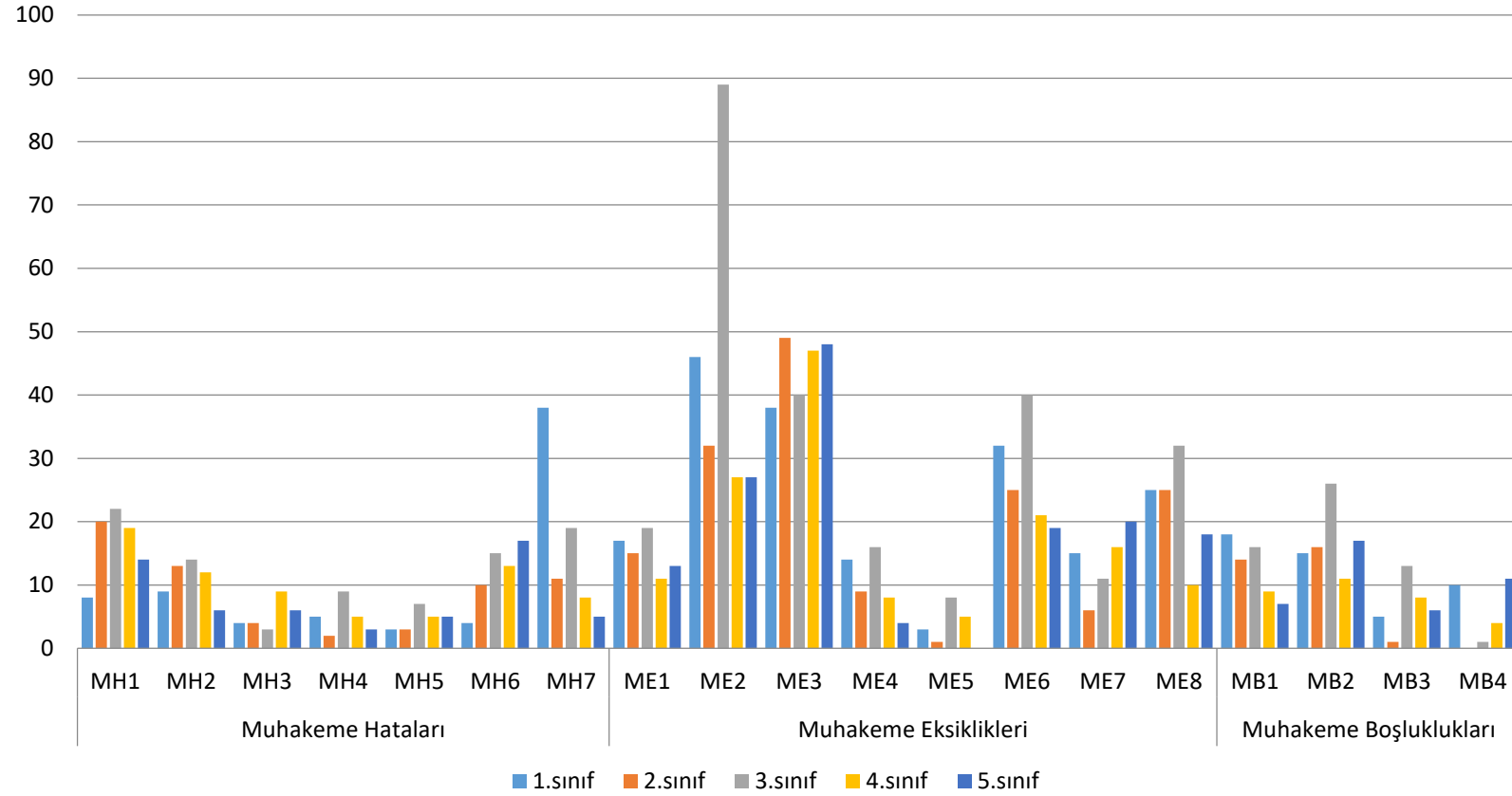
Şekil 38. MB1 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT1'in 2. sorusuna ilişkin yapmış olduğu ispat incelendiğinde yazılan ispat adımları arasında bir uyumun bulunmadığı ve ispat adımları ile elde edilen sonucun uyuşmadığı görülmektedir. Öğretmen aday birinci adımda $a \leq b$ ise $a-b \leq 0$ şeklinde başlayıp ancak ikinci adımda doğruluğu gösterilmesi istenilen sonucu yazmıştır. Daha sonra sonuç üzerinden çeşitli matematiksel işlemlerle gösterilmesi gereken $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ şeklindeki ifadeden farklı olarak $a-b \leq \frac{a-b}{2} \leq 0$ şeklinde önceki adımlardan ve istenilen ispattan bağımsız bir sonuç yazmıştır. Bunun sonucunda yapılan muhakeme boşluğunun yazılan ispat adımları ile elde edilen sonucun uyuşmaması olarak değerlendirilmiştir.

MHBT1'in verileri incelendiğinde öğretmen adayları muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergelerden ara aşamaların göz ardı edilmesi (MB3) yani ispatta yazılması gereken bazı adımların göz ardı edilmesi veya herhangi bir açıklama yapılmadan sonucun yazılması ve ispatta gereksiz adımlara veya ifadelere yer verme (MB4) muhakeme boşlukları sınıf seviyelerine göre farklılık göstermekle birlikte diğer göstergelere nispeten daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir.

Gözlem öncesi yapılan MHBT1'de bütün sınıf seviyelerindeki öğretmen adaylarının benzer muhakeme hatalarına, muhakeme eksikliklerine veya muhakeme boşluklarına sahip oldukları ve bu göstergelerinin yoğunlukları sınıf seviyelerine göre değişim gösterdiği görülmektedir. Bununla birlikte muhakeme hataları, eksiklikleri ve boşlukları boyutlarında yer alan kategoriler incelendiğinde alt sınıf seviyelerinden üst sınıf seviyelerine doğru gidildikçe frekans ve yüzdeler bakımından bir azalmanın olduğu göze çarpmaktadır. Bu değişim ve yoğunlukları daha somut göstermek amacıyla çeşitli tablo ve grafiklere yer verilmiştir. Öğretmen adaylarının gözlem öncesinde yapılan MHBT1'de sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından sınıf seviyeleri arasındaki değişimi gösteren Grafik 1 aşağıda sunulmuştur.

Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikler ve Muhakeme Boşluklarının Karşılaştırılması



Grafik 1. Gözlem öncesinde öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikler ve muhakeme boşluklarının karşılaştırılması

Grafik 1’de görüldüğü üzere öğretmen adaylarının Muhakeme Hataları kategorisinde yer alan göstergeler açısından sınıf seviyeleri arasında farklılıklar olduğundan söz edilebilir. Bu kategoride en yüksek yüzde ile ortaya çıkan MH1 ve MH7 her iki gösterge bakımından da 1. Sınıf öğretmen adayların daha yoğunlukta olduğu görülmektedir. Dolayısıyla bu sınıf seviyesindeki öğretmen adayları ispatlarını yaparken özel bir durumdan elde edilen sonucu ispat olarak kabul etmesi ya da sonuç ile başlama gibi muhakeme hataları bakımından diğer sınıflara göre daha fazla hata yapmışlardır. Bu kategorideki muhakeme hatalarının üst sınıflara doğru gidildikçe azaldığı ve 5. Sınıf seviyesindeki öğretmen adaylarında en az oranda ortaya çıktığından söz edilebilir. Ayrıca bu kategorideki veriler incelendiğinde 3. Sınıf öğretmen adaylarında MH2 ve MH3 diğer sınıf seviyelerine göre daha yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. Bu kategoride yer alan MH4 ve MH5 göstergeleri ise diğer göstergelere nispeten daha az yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum; öğretmen adaylarının aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılması ve aşırı genelleme hataları açısından daha az muhakeme hatasına sahip oldukları düşünülebilir.

Muhakeme Eksiklikleri kategorisinde yer alan göstergeler incelendiğinde bu kategori içerisinde her bir sınıf seviyesinde en fazla ortaya çıkan durumların ME2 göstergesine ait olduğu görülmektedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispat sürecinde ispatlara başlama veya başladıkları ispatları devam ettirmede zorluklar yaşadıklarından bahsedilebilir. Bu kategoride yer alan başka bir gösterge olan ME3 yine en yoğun olarak yapılan muhakeme eksikliklerinden biridir. Bu göstergeye ait veriler göz önüne alındığında öğretmen adaylarının ispat sürecinde tanım aralığına veya kurallarının geçerli olduğu kümelere çok fazla dikkat etmedikleri belirlenmiştir. Bütün sınıf seviyelerinde benzer muhakeme eksikliklerinin yoğun olarak ortaya çıkmasıyla beraber sınıf seviyeleri arasında büyük farklılıklarının olduğundan söz edilebilir. Bu kategoride ME2 ve ME3 göstergeleri bakımından 3.sınıf seviyesindeki öğretmen adaylarının en yüksek frekans ve yüzdeye sahip oldukları görülmektedir. Diğer sınıf seviyelerinde benzer şekilde ancak farklı yüzdelerde bu göstergeler yüksek oranda ortaya çıkmıştır. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan kategorilerden ME6 yine yoğun olarak yapılan muhakeme eksikliklerinden biridir. Bu durumda; öğretmen adaylarının matematik dilini doğru kullanmada yetersizlik gösterdiklerinden söz edilebilir. Bu kategoride yer alan göstergelerden ME5 bütün sınıf seviyelerinde en az yoğunlukta olduğu görülmektedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispat sürecinde değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı bakımından daha dikkatli davrandıkları belirtilebilir.

Muhakeme boşlukları kategorisinde yer alan göstergelere ait veriler incelendiğinde bu kategori içerisinde her bir sınıf seviyesinde benzer muhakeme boşluklarının en yoğun

olarak ortaya çıktığından söz edilebilir. Bu kategoriye ait göstergelerden ortaya çıkan durumların en yüksek frekans ve yüzdelerin ME2 göstergesine ait olduğu görülmektedir. Bu durumda öğretmen adaylarının genel olarak matematiksel ifadelerinin ispatlarını yaparken kullandıkları önermelerin gerekçelerinin sunulmaması bakımından muhakeme boşluklarına sahip oldukları düşünülebilir. Bu durumla birlikte bu göstergeye ait oranları sınıf seviyeler arasında farklılık göstermektedir. Bu kategoride yapılan muhakeme boşluğu bakımından 3.sınıf öğretmen adaylarının diğer sınıf seviyelerine göre daha yoğunlukta olduğu görülmektedir. Üst sınıflara doğru gidildikçe öğretmen adaylarının ispatları gerekçelendirme açısından daha dikkatli davrandıkları görülmektedir. Dolayısıyla beşinci sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MB2 nin daha az yoğunlukta olduğu düşünülebilir. Muhakeme boşlukları kategorisinde yer alan MB4 göstergesi bütün sınıf seviyelerinde daha düşük oranlarda ortaya çıkmıştır. Bununla beraber 5.sınıf öğretmen adaylarında bu göstergenin daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Dolayısıyla bu seviyedeki öğretmen adaylarının ispatta gereksiz adımlara veya ifadelerine yer verme bakımından diğer sınıflara göre daha az muhakeme boşluğuna sahip olduklarından söz edilebilir.

4. 2. Matematik Öğretmenliği Programında Güz Döneminde Yürütülen Bazı Derslerde Yer Verilen Sınıf İçi Uygulamalarının Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları Açısından Değerlendirilmesi

Bu bölümde ortaöğretim matematik öğretmenliği programının güz döneminde yürütülen Analiz I, Cebir I, Matematiğin Temelleri, Soyut Cebir 1 ve Sayılar Teorisi derslerinin içerik ve yaklaşım, öğretim elemanlarının görüşleri, öğrencilerin soru ve görüşleri bağlamında ele alınarak ispat sürecinde muhakemeye odaklanılan noktalar resmedilmiştir. 2015- 2016 eğitim öğretim yılının güz döneminde 1. hafta ile 8.hafta arasındaki her bir ders için haftada 2 saat olmak üzere toplam 62 saat boyunca gözlemler yapılmıştır. Bu ders gözlemlerine yönelik veriler; oluşturulan gözlem formunda yer alan boyutlardaki kategorilere göre değerlendirilerek öğretim üyelerinin yoğunlaştıkları noktalar belirlenmiştir. Bu kısımda öncelikle gözlemlerden elde edilen veriler, betimsel olarak sunulduktan sonra alan notları ve öğretim elemanlarının örnek ifadelerine yer verilmiştir. Ayrıca ders gözlemlerine yönelik veriler üzerinden bu dersler arasında karşılaştırmalar yapılarak her bir ders için mevcut durum tablo ve grafiklerle sunulmuştur.

Ortaöğretim matematik öğretmenliği programında güz döneminde yürütülen derslerde yapılan gözlemlerde elde edilen verilerin gözlem formunda hangi kategoride yer aldığı ve bu kategoriler ile ilgili frekans ve yüzde dağılımları Tablo 15'te sunulmuştur.

Tablo 15. Güz Döneminde Yürütülen Derslerinin Gözlem Formunda Yer Alan Matematik Dili ve Sistematikleştirme, Öğrenci Muhakemesine Odaklanma ve İspat Yöntemlerinin Yer Aldığı Kategorilere Yönelik Frekans ve Yüzde Dağılımları

	Matematiğin Temelleri			Cebir 1			Analiz 1			Sayılar Teorisi			Soyut Cebir 1		
	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%
Matematik Dili ve Sistematikleştirme	MD-1	26	35,13	MD-1	37	28,24	MD-1	12	20,34	MD-1	9	21,95	MD-1	10	21,73
	MD-2	7	9,45	MD-2	16	12,21	MD-2	5	8,47	MD-2	12	29,26	MD-2	6	13,04
	MD-3	13	17,56	MD-3	9	6,87	MD-3	8	13,55	MD-3	3	7,31	MD-3	4	8,69
	MD-4	18	24,32	MD-4	26	19,84	MD-4	12	20,34	MD-4	6	14,63	MD-4	8	17,3
	MD-5	5	6,75	MD-5	10	7,63	MD-5	6	10,12	MD-5	4	9,75	MD-5	2	4,34
	MD-6	0	0	MD-6	2	1,52	MD-6	2	3,39	MD-6	0	0	MD-6	1	2,17
	MD-7	0	0	MD-7	4	3,05	MD-7	0	0	MD-7	2	4,87	MD-7	3	6,52
	MD-8	1	1,35	MD-8	8	6,10	MD-8	3	5,08	MD-8	3	7,31	MD-8	5	10,86
	MD-9	4	5,4	MD-9	19	14,5	MD-9	11	18,64	MD-9	6	14,63	MD-9	7	15,21
Öğrenci Muhakemesine Odaklanma	ÖM-1	28	20,58	ÖM-1	4	6,45	ÖM-1	15	18,75	ÖM-1	5	11,11	ÖM-1	6	12,5
	ÖM-2	12	8,82	ÖM-2	0	0	ÖM-2	4	5	ÖM-2	1	2,22	ÖM-2	3	6,25
	ÖM-3	3	2,20	ÖM-3	1	1,61	ÖM-3	5	6,25	ÖM-3	0	0	ÖM-3	1	2,08
	ÖM-4	19	13,97	ÖM-4	0	0	ÖM-4	8	10	ÖM-4	4	8,88	ÖM-4	5	10,41
	ÖM-5	17	12,50	ÖM-5	3	4,83	ÖM-5	7	8,75	ÖM-5	6	13,33	ÖM-5	3	6,25
	ÖM-6	12	8,82	ÖM-6	1	1,61	ÖM-6	5	6,25	ÖM-6	2	4,44	ÖM-6	4	8,33
	ÖM-7	7	5,14	ÖM-7	6	9,67	ÖM-7	6	7,5	ÖM-7	6	13,33	ÖM-7	2	4,16
	ÖM-8	1	0,73	ÖM-8	8	12,90	ÖM-8	3	3,75	ÖM-8	0	0	ÖM-8	1	2,08
	ÖM-9	3	2,20	ÖM-9	5	8,06	ÖM-9	6	7,5	ÖM-9	1	2,22	ÖM-9	0	0
	ÖM-10	0	0	ÖM-10	4	6,45	ÖM-10	1	1,25	ÖM-10	0	0	ÖM-10	1	2,08
	ÖM-11	12	8,82	ÖM-11	2	3,22	ÖM-11	5	6,25	ÖM-11	3	6,66	ÖM-11	2	4,16
	ÖM-12	8	5,88	ÖM-12	15	24,19	ÖM-12	13	16,25	ÖM-12	8	17,77	ÖM-12	6	12,5
	ÖM-13	6	4,41	ÖM-13	0	0	ÖM-13	0	0	ÖM-13	2	4,44	ÖM-13	0	0
	ÖM-14	8	8,82	ÖM-14	13	20,96	ÖM-14	2	2,5	ÖM-14	7	15,55	ÖM-14	2	4,16
İspat Yöntemleri	İY-1	15	44,11	İY-1	6	50	İY-1	11	55	İY-1	8	61,53	İY-1	6	12,5
	İY-2	4	11,76	İY-2	2	16,7	İY-2	4	20	İY-2	0	0	İY-2	1	2,08
	İY-3	4	11,76	İY-3	1	8,3	İY-3	2	10	İY-3	3	23,07	İY-3	3	6,25
	İY-4	10	7,35	İY-4	3	25	İY-4	3	15	İY-4	2	15,38	İY-4	2	4,16

Genel olarak tablo incelendiğinde matematik dili ve sistematikleştirme kategorisinde yer alan göstergeler içerisinde her bir ders için en fazla ortaya çıkan durumların matematik dilinin doğru kullanılmasına vurgu yapma (MD-1) göstergesine ait olduğu görülmektedir. Bu boyutta başka bir gösterge olan matematiksel tanımlara, genel kurallarının geçerli olduğu kümelerle dikkat edilmesi gerektiğini vurgulama (MD-4) yine öğretim elemanlarının en fazla vurguladıkları durumlardan biridir. Matematik dili ve sistematikleştirme kategorisinde yer alan göstergelerden öğrencilerinin eksik veya gereksiz değişkenleri fark etmelerini sağlama (MD-5) ve ispatta gereksiz adım veya ifadelerle yer verilerek öğrencilerin fark etmelerini sağlama (MD-6) göstergelerinin bütün derslerde en az vurgulanan durumlar olduğu görülmektedir. Bu kategoride yer alan diğer göstergelerin ders bazında farklı oranlarda olduğundan söz edilebilir.

Öğrenci Muhakemesine Odaklama kategorilerinde ise derslere göre farklılık göstermekle birlikte öğrencileri muhakeme süreçlerini açıklamaları konusunda teşvik etme (ÖM-1), Öğrencilerin ispat adımları arasındaki ilişkilere yönelik sorular yönelterek ispata devam etmelerini sağlama (ÖM-12), özel durumlardan hareketle öğrencileri genel önermeler üretmeye yönlendirme (ÖM-14) ve öğrencilerin oluşturdukları ispatları açıklayarak sunma, kullandıkları önermelerin gerekçelerini belirtmelerini isteme (ÖM-11) göstergelerinin ön planda olduğu görülmektedir. Buna karşın grupların oluşturulup öğrencilerin birbirleriyle etkileşime girerek çalışmalarını sağlama (ÖM-3), bir önermenin karşıtının doğru olmadığını karşıt örnekler yardımıyla açıklama (ya da öğrencilerden karşıt örnekler vermelerini isteme) (ÖM-10), çeşitli muhakeme hatalarını içeren farklı ispatların örnek gösterilmesi ve bunların tartışılmasını sağlama (ÖM-13) daha düşük oranlarda çıkmış veya bazı derslerde hiç rastlanmamıştır.

İspat yöntemleri kategorisinde yer alan göstergeler incelendiğinde bu kategori içerisinde her bir deste en fazla vurgulanan durumların verilen bir önermenin ispatını yapabilmek için en uygun ispat yönteminin belirlenmesine yönelik öğrencilerin tartışmasını sağlama (İY-1) ve farklı ispat yöntemlerinin varlığına vurgu yapma (İY-4) göstergelerine ait olduğundan söz edilebilir. Buna karşın bir önermenin ispatını birden fazla ispat yöntemini kullanarak yapma (İY-2) ve ispat yöntemi aynı olmak koşuluyla farklı yaklaşımları değerlendirme (İY-3) göstergelerinin daha düşük oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir.

4. 2. 1. Güz Dönemi Ders Gözlemlerinin Matematik Dili ve Sistematikleştirme Açısından Değerlendirilmesi

Ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümünde okutulan ve ispatların yoğun olarak işlendiği derslerde yer verilen uygulamaların içeriği, derslerdeki uygulamalarda kullanılan yaklaşımlar, öğretim elemanlarının muhakeme veya muhakeme hatalarına yönelik

kullandığı ifadeler, sınıfta yaptığı ispatlar ve açıklamalar, öğrencinin muhakemesine yönelik sorulan sorular, öğrencilerin verdiği cevaplar, öğrencilerin sorduğu sorular, teoremlerin ispatları sırasında yapılan sınıf tartışmaları, öğrenci ispatlarının sunumları gibi muhakemeye yönelik durumlar derslere göre farklılık arz etmektedir. Bu durum; öğretim elemanlarının ispat sürecinde muhakeme bağlamında farklı noktalara yoğunlaştıklarını göstermektedir.

Her bir ders ayrı ayrı incelendiğinde matematik dili ve sistematikleştirme boyutunda yer alan kategorilerden en fazla ortaya çıkan durumların; matematik dilinin doğru kullanılmasına vurgu yapma (MD-1) göstergesine ait olduğu görülmektedir. MD-1 bütün derslerde en yüksek frekans ($f_{MT}=26$, $f_{C1}=37$, $f_{A1}=12$, $f_{ST}=21$, $f_{SC}=10$) ve yüzdeye (sırasıyla %35,13, %28,24, %20,34, %21,95 ve %21,73) sahiptir. Bu kategorinin göstergelerine ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde matematiğin temelleri dersinde matematik dilinin doğru kullanılmasına vurgu yapma %35,13'lik bir oranla diğer derslere göre nispeten daha ön planda olduğu görülmektedir. Bu bakımdan öğretim elemanlarının her birinin derslerinde matematik dilinin doğru kullanılmasına sık sık vurgu yaptığından bahsedilebilir. ÖE1'in dersinde öğretim elmanı ile öğretmen adayları arasında geçen diyalog örnek olarak sunulmuştur.

ÖE1: *Şimdi sorumuza baktığımız da rasyonel sayının tanımı ne diyor bize?*

Ö: *"bölülü yazılan sayılar"*

ÖE1: *Bölülü yazılan sayılar ne demek? İfadelerimizi matematiksel dile uygun kullanırsak daha doğru olur. Arkadaşımız muhtemelen a/b şeklinde yazılabilen sayıları kast ediyor doğru tanım bu rasyonel sayılarının tanımını hatırlasak $m, n \in \mathbb{Z}$ için $n \neq 0$ olsun m/n şeklinde yazılan sayılara rasyonel sayı diyoruz. Şimdi ispatımıza dönelim ne olursa $\sqrt{2}$ rasyonel sayılar kümesine ait olur? (Sayılar Teorisi 6.ders-04.10.2015)*

Öğretim elmanı sorduğu rasyonel sayılarının tanımına yönelik sorusuna bir öğrenci günlük dil ile ifade etmektedir. Bunun üzerine öğretim elemanı ifadenin matematik diline uygun olması gerektiğini belirterek matematik dilinin doğru kullanılmasına vurgu yapmaktadır. Aynı zamanda rasyonel sayılarının tanımının matematik diline uygun nasıl ifade edilebileceğini de tekrar etmektedir.

Başka bir öğretim elemanı dersinde benzer şekilde matematik dilinin doğru kullanılması gerektiğini vurgulamaktadır. Bu duruma yönelik ÖE3' dersinde bir kesit aşağıda yer almaktadır.

ÖE3: *Öğreneceğimiz kavramlarının anlamları önemlidir bunlar öyle rastgele isimlendirilmemiştir. Şimdi bir tanım yazalım.*

Önerme: “~” bağıntısı Z üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Her seferinde denklik kelimesini kullanmayacağım artık simgeleri de tanıyın matematiği bunlar kendine has bir sistemini oluşturuyor.

İspat: $(a,b)=1$ olduğundan bu ne demek? Manasız bir gösterim değil demi yani a ve b aralarında asal sayı demekti o zaman ifadeyi matematiksel olarak yazarsak anlamı şu : $\exists x,y$ öyle ki $ax + by =1$ dir.(Cebir 1 2.ders-27.09.2015).

Öğretim elemanı ispat sürecinde gerek tanımları verirken gerek ispat yapma aşamasında tanım ve simgelerin önemli olduğunu belirterek matematiğin kendine has bir dili olduğunu ve bu dilin çeşitli simge ve sembollerden oluştuğunu vurgulamaktadır.

Matematiksel sembol ve simgelerini önemini farklı derslerde vurgulanmaktadır. Bu duruma yönelik ÖE2’ nin dersinde bir kesit örnek olarak sunulmuştur.

ÖE2: Aferin bunu daha açık yazarsak $y \in f(U_1) \cap f(U_2)$ olsun. Bunun matematiksel anlamı şu: y hem $f(U_1)$ hem de $f(U_2)$ nin elemanıdır. Çünkü kesişim var bu sembolün anlamı bu yani alınan her eleman iki kümenin de elemanıdır. Sembol veya simgelerin anlamlarını bilmek bizim için en önemli şeydir. (Analiz1 5.ders-15.10.2015)

Öğretim elemanı öğrencinin ispatını incelerken ifadelerin doğru olduğunu ancak simge ve sembollerin anlamlarının bilinmesinin çok önemli olduğunu dolayısıyla kesişim simgesinin ne ifade ettiğini belirtmektedir.

Bu kategoride yer alan matematiksel tanımlara, genel kurallarının geçerli olduğu kümelere dikkat edilmesi gerektiğini vurgulama (MD-4) göstergesi de öğretim elemanlarının en fazla yoğunlaştıkları durumlardan biridir. Bu göstergeye ait en yüksek frekans ($f_{MT} =18$, $f_{C1}=26$, $f_{A1}=12$, $f_{ST}=6$, $f_{SC}=8$) ve yüzdeler (sırasıyla %24,32, %19,84, %20,34, %14,63 ve %17,3) sahip olduğu görülmektedir. Bu göstergeye ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde öğretim elemanlarının benzer noktalara vurgulamalar yaptıklarına işaret etmektedir. Matematiksel ifadelerinin geçerli olduğu kümelere öğretmen adaylarının dikkat etmelerini sağlayabilecek ifadelere öğretim elemanları tarafından farklı derslerde yer verilmiştir. ÖE3’ün dersinde bir kesit aşağıda yer almaktadır.

ÖE3: Arkadaşlar çalıştığımız kümeye de dikkat etmemiz gerekiyor. Ortaya attığımız kural bütün değerler için geçerli olmalıdır. Yoksa yanlış olur eğer verdiğimiz aralıkta geçerli olmayan bir durum olursa. Sorumuza dönersek;

$a \in Z$ için $\bar{a}=[a] =\{a,-a\}$ neden böyle yazdık çünkü tamsayı hem negatif hem pozitif olabilir değil mi? Z kümesinde çalışıyorum o zaman ortaya attığım önerme Z nin bütün elemanlarını kapsamalı aslında buna ne diyorduk? Z de denklik sınıfları. Gösterimi yukardaki gibi olur isim olarak da böyle deriz. (Cebir 1 7.ders-27.10.2015)

Öğretim elemanın dersinde kuralların geçerli olduğu kümeye dikkat çekerek hangi sayı kümesinde çalışılıyorsa o sayı kümesinin özelliklerine göre hareket edilmesi gerektiğini dolayısıyla eğer tamsayılarda bir önerme verilmişse bu önermenin bütün tamsayıları kapsayacak şekilde olması gerektiğini vurgulamaktadır.

Başka bir öğretim elemanı benzer şekilde dersinde matematiksel tanımlara, genel kurallarının geçerli olduğu kümelere dikkat edilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Bu duruma yönelik derste bir kesit aşağıda sunulmuştur.

ÖE2: *Burada bu durumu sağlamayan bir kümemiz vardı yani Z^* üzerinde $*(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{a + b}$ ikili işlem değildir. Hatırladınız mı? Evet kuralımızın ne zaman nerede geçerli olduğuna da dikkat ediyoruz.*

- şimdi acaba bu ikili işlem başka hangi kümeler için geçerli bakalım acaba matrisler için ikili işlemlerden bahis edebilir miyiz?

$M_{n \times n}(R) = \{ [a_{ij}]_{n \times n} \mid a_{ij} \in R, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \}$ denklemin üzerinde çalışalım.

$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$ işlemler bir ikil işlemdir. Hangi özellikleri karşılar? Tüm özelliklerin demi? Zaten öyle olmazsa yani herhangi bir özelliği sağlamasa diyemiyoruz. (Analiz 6.ders-24.10.2015).

Öğretim elemanı matematiksel bir ilişkinin, bir kuralın geçerli olduğu sayı kümesinin önemini belirttikten sonra özel bir durumu yani ikili işlemin hangi kümelerde geçerli olabileceğini bir örnek üzerinde göstermektedir. Dolayısıyla matrislerde ikili işlemde söz edilmesi için bu ifadenin matrislerin bütün özelliklerini sağlaması gerektiğine dikkat çekmektedir.

Matematiğin dili ve sistematikleştirme boyutunda yer alan kategorilerden matematiğin aksiyomatik yapısına vurgu yapma (MD-2) göstergesi derslere göre farklı oranlarda olduğu görülmektedir. Bu göstergeye ait en yüksek frekans ($f_{MT} = 7$, $f_{C1} = 16$, $f_{A1} = 5$, $f_{ST} = 12$, $f_{SC} = 6$) ve yüzdeye (sırasıyla %9,45, %12,21, %8,47, %29,26 ve %13,04) sahiptir. Sayılar Teorisi dersinde bu göstergenin %29,26 ile diğer derslere nispeten daha ön planda olduğu görülmektedir. Matematiğin aksiyomatik yapmasına vurgu yapmaya yönelik farklı derslerde öğretim elemanlarının ifadeleri mevcuttur. Bu duruma yönelik ÖE4'ün dersinde bir kesit sunulmuştur.

ÖE4: *$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ bu denklik önemli bir denkliktir çünkü ilerideki önermeler için bir basamak gibi düşünün buna dikkat edin (ifadenin ispatı doğruluk tablosu ile gösterildikten sonra) Bakın " $p \rightarrow q$ " nun doğruluk değeri ile " $p \vee q$ " nin doğruluk değerleri aynı çıktı. O zaman buradan sizin ezberlediğiniz bir denkliğin doğruluğunu gördük o zaman artık rahatlıkla şu denkliği yazabiliriz " $p \rightarrow q \equiv p \vee q$ ". Bunlar bir birine denktir ne demek? Bütün*

durumlarda doğruluk değerleri aynı çıkar zaten bunu tabloda da gördük. Eğer öğrendiklerimizi bir temelle dayandırsak onun üzerine yeni şeyleri daha rahat inşa edebiliriz. Yani artık ezberden ya da direk kabul ettiğiniz teorem ve formüllerden ziyade bir biriyle ilişkili kavramlar önermeler ve tanımlar var. Yani bir bütün olarak ele alıyoruz. (Sayılar Teorisi 4.ders-04.10.2015)

Öğretim elemanı matematiğin aksiyomatik yapısına vurgu yaparak matematiğin bir bütün olduğu dolayısıyla önermelerin, kurallarının bir birleri ile olan ilişkisini özel bir durum üzerinde " $p \rightarrow q \equiv p' \vee q$ " göstererek dikkat çekmektedir.

Başka bir öğretim elemanının dersinde yine benzer bir şekilde matematiğin aksiyomatik yapısı vurgulanmaktadır. Bu duruma yönelik ÖE2'nin dersinde bir kesit örnek olarak sunulmuştur.

Baz tanımların üzerinde çok durdum çünkü ilerideki teoremleri, tanımları anlayabilmemiz için bunları" yığılma noktası, Sub..." gibi iyi anlamamız gerekiyor. Matematikte her önerme mutlaka başak bir önermeyle ya da tanımla ilişkilidir. Öyle olduğu için zaten ispat yapabiliyoruz bu teoremlerin hepsi bir birleri ile ilişkili sonuçlardır. Sorumuza dönsek demek ki tek bir tane supremum vardır.(Analiz1 10.ders-05.11.2015)

Öğretim elemanı matematiğin aksiyomatik yapısına yığılma noktası ve supremum gibi kavramlar üzerinden vurgulamaktadır. Matematiksel ifadelerinin bir birleriyle ilişkili olduğunu dolayısıyla bu tür kavramlar ileride öğrenilecek diğer teorem veya önermeler için temel oluşturacağını vurgulamaktadır.

Başka bir öğretim elemanı ispat mantığının matematiğin aksiyomatik yapısından kaynaklandığını bir örnek ile göstermektedir.

*$x_1, x_2 \in G, a \in G$ nın tersi olsun $\Rightarrow x_1 * a = a * x_1 = e$. Tanımım böyle diyor benzer şekilde $x_2 * a = a * x_2 = e$ yazarsak*

$$x_1 = x_1 * e = x_1 * (a * x_2) = (x_2 * a) * x_1 = e * x_1 = x_1$$

Buradan da $x_1 = x_2$ elde edilir. Ne yaptık aslında sadece daha önce bildiğimiz bazı kurallara, tanımlara uygun işlemler yaparak sonucumuzu gösterdik. İspat mantığı bu aslında yoksa dünyayı yeniden keşif etmiyoruz. Sadece var olan ilişkileri kullanarak yeni önermeler üretiyoruz. (Cebir1. 8.ders-25.10.2015).

Öğretim elemanı matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken matematiğin aksiyomatik yapısına vurgu yapmaktadır. Dolayısıyla matematiksel bir ifadenin ispatı aslında önceden bilenen önerme veya tanımlardan yararlanarak bir ilişki olduğunu göstermek olduğunu belirtmektedir.

Matematiksel ifadenin ispatı için değişken tanımlamada tanım aralığına dikkat çekme (MD-5) öğretim elemanlarının derslerinde vurguladıkları noktalarından biridir. Farklı derslerde bu göstergeye ait frekans ($f_{MT}=5$, $f_{C1}=10$, $f_{A1}=6$, $f_{ST}=4$, $f_{SC}=2$) ve yüzdeleri sırasıyla (%6,75, %7,63, %10,12, %9,75 ve %4,34) sahiptir. Bu göstergeye ait frekans ve yüzdeler incelediğinde farklı derslerde öğretim üyelerinin ispat sürecinde bir ilişkinin ispatında kullanılacak değişkenlerin geçerli oldukları tanım aralıklarının önemli olduğunu vurgulayan ifadeler kullanmışlardır. Bu duruma örnek olarak ÖE2'in dersinde bir kesit sunulmuştur.

Doğal sayılarda sadece "+1" için bakmıştık şimdi kümemiz daha geniş, negatifleri de hesaba katmamız gerekiyor

$q \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^+$ doğal sayılar verildiğinde $\exists q, r \in \mathbb{N}$ olsun

$a = bq + 1$, $0 \leq r \leq b$ dir. Şimdi tamsayılarda daha geniş olarak gösterelim

İspat: $A = \{q \in \mathbb{Z} \mid a - bq \geq 0\} \subseteq \mathbb{Z}$ olsun.

$b \leq a$ ise $q=1$, $b > a$ ise $q=0$ seçilirse $A \neq \emptyset$ dir.

$B = \{a - bq \geq 0 \mid q \in A\}$ olsun

Çözüm hangi aralıkta olur? 0 ile 12 arasında değil mi bölme algoritmasına göre aralığımızı belli bunun dışındaki değerler geçerli değil ya da nasıl yazacağımızı biliyoruz kalan sınıflarında görmüştük.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_r \in \mathbb{Z}$ $m, n, r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

-tanım kümesine dikkat edin yazacağımız bu tanım göre olacak yani bu küme ile sınırlandıracağız. (Analiz 1 5.ders-24.10.2015)

Öğretim elemanı dersinde bölme algoritması ile ilgili teoremin ispatını yaparken tamsayılarda çalışıldığına dikkat çekmektedir. Dolayısıyla tanım aralığına dikkat edilmediği takdirde tanımlanan ifadenin doğru olamayacağını, verilen aralık dışında kalan değerler için geçerli olmayacağını vurgulamaktadır.

Tanım kümesine dikkat etmenin önemli olduğunu başka bir öğretim elemanı tarafında dersinde vurgulanmaktadır. Bu duruma yönelik ÖE3' ün dersinden bir kesit örnek olarak sunulmuştur.

Tanım kümemiz \mathbb{Z} olduğundan \mathbb{Z} ye göre düşünelim mesela 2 yi alalım \mathbb{Z} nin elemanı olduğundan eğer grup ise grubun bütün özelliklerini sağlamalı. 2 ' nin tersi çarpmaya göre $\frac{1}{2}$ ama bu \mathbb{Z} nin elemanı değil.() dolayısıyla grup olmaz.() o zaman matematiksel olarak yazarsak(Md-1) $2 \in \mathbb{Z}$ iken $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ olur. (Cebir 1 6.ders-17.10.2015)

Herhangi bir matematiksel ifadenin grup olup olmadığını incelerken grubun bütün özelliklerinin sağlanması gerektiğini vurgulamaktadır. Dolayısıyla tamsayılarda alınan her

elemanın grubun herhangi bir özelliğini sağlamıyorsa tamsayılar için gruptan söz edilemeyeceğini özel bir örnekle göstermektedir.

Başka bir öğretim elemanın dersinde benzer bir şekilde tanım aralığına dikkat etmenin önemli olduğunu vurgulamaktadır.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: 1/n_0 < \epsilon \text{ ise } 0 \neq 1/n_0 \in (0-\epsilon, 0+\epsilon) \cap S$$

- Acaba bu kümenin elemanı mıdır?

-bu değer her ϵ için geçerli olacağı için yani dışarda herhangi bir eleman kalmadığından yığılma noktası "0" diye biliriz.

Önce hipotez ve hükmü iyi belirleyin aralığa dikkat edin hangi şartlarda sağlar ve tabii ki çift gerektirme olduğunu unutmayın.

o zaman $m=2k$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olur. Burada kullandığınız değerlere de dikkat edin k tamsayı değilse m çift olmayabilir.

-eşitlikte yerine yazalım

$$2n^2=4k^2$$

$$n^2=2k^2$$

Aynı mantıkla $n=2t$ gibi çift bir sayı oldu. (Analiz1 8.ders-24.10.2015)

Öğretim elemanı dersinde kullandığı matematiksel ifadelerin hangi şartlarda sağlandığı, tanım aralığının önemin vurgulayarak bunu bir örnekle pekiştirmektedir.

İspatta kullanılan önermelerin gerekçelerini belirtmek amacıyla soru sorma veya önemini vurgulama (MD-9) matematik dilli ve sistematikleştirme boyutunda ön plana çıkan göstergelerden biridir. Bu göstergeye ait frekans ($f_{MT}=4$, $f_{C1}=19$, $f_{A1}=11$, $f_{ST}=6$, $f_{SC}=7$) ve yüzdeleri sırasıyla (%5,4, %14,5, %18,64, %14,63 ve %15,21) belirlenmiştir. Dolayısıyla derslerde öğretim elemanları kullanılan ifadelerin bir gerekçeye dayandırılması gerektiğine vurgu yapmaktadır. İspatta kullanılan önermelerin gerekçelerini belirtmek amacıyla soru sormaya yönelik öğretim elemanların ifadeleri mevcuttur. Bu duruma yönelik ÖE2' nin dersinde bir kesit aşağıda sunulmuştur.

İspat:

ÖE2: şimdi denklik için gerekli hangi şartlar varsa hepsini göstermemiz gerekiyor yoksa böyle büyük laflar edemeyiz.

$n=1$ için $a^1 = a > 1$ ilk adım sağladı

$n=k$ için doğru kabul edersek $a^k > 1$ olsun.

-şimdi yöntemin son adımını yani göstermemiz gereken şey yazalım. Onun yazmadan önce işimize yarayacak bir iki düzenleme yapalım yoksa direkt göstermeye

çalıştığımızda işimiz zor oluyor. Yani bir aşamaya geçerken onun alt yapısını hazırlamak lazım gerekçemiz, dayanağımız nedir?

...

$0 < a < 1 \Rightarrow 1/a > 1 \Rightarrow (1/a)^n > 1$ olur. Bunu da ilk adımda ispat etmiştik. Yani gerekçemiz de belli

$1/a^n > 1 \Rightarrow$ ters çevir. $a^n < 1$ çelişki çıktı. Ve ispatımız biter.

ÖE2: peki rasyonel sayı mıdır?

Ö: değildir hocam

ÖE2: Neden? Neye dayanarak söylüyorsun

Ö: walla hocam lisede öyle gördük ama tabii siz bunu kabul etmiyorsunuz.

ÖE2: güzel işi öğrendiniz artık ezberden bir şey kabul etmeyeceğimizi mutlaka bir gerekçemizin olması gerektiğine inanmaya başladınız. Bu iyi bir şey artık yavaş yavaş ispat mantığı da oturur.(Analiz1 8.ders-27.10.2015).

Öğretim elemanı matematiksel bir ifadenin denk olup olmadığının ispatı yaparken bütün şartların sağlanması gerektiğini vurgulamaktadır. Öğretim elemanı gerek ispat adımlarında gerek kullanılan önermelerin mutlaka bir gerekçeye dayandırılması gerektiğinin üzerinde durmuştur.. İspat sürecinde her bir adım için öğrencilere çeşitli sorular sorarak adımların gerekçelendirmelerini amaçlamaktadır. Dolayısıyla öğrencilerin önceki eğitim öğretim hayatlarında ezberden kabul ettikleri ifadelerin artık bir gerekçeye dayandırılması gerektiğini eğer böyle olursa ispat mantığının oturacağını ifade etmektedir.

Başka bir öğretim elemanı da dersinde kullanılan önermelerin gerekçelendirilmesinin önemine dikkat çekmektedir. ÖE3' ün dersinde vurguladığı durumlar örnek olarak sunulmuştur.

$H \leq G$ olduğundan $e \in H$ olup. $\forall a \in G$ için $a.a^{-1}=e \in G \Rightarrow a \in a(H)$ dir.

Önceki önermeleri kullanarak bu şekilde yazabildik buna dikkat edin. Yani elimizdekileri kullanarak buna bağlı bir sonuç yazdık.(Cebir1 11.ders-07.11.2015).

Öğretim elemanı yeni bir önermeyi yazarken bu ifadenin önceki matematiksel ifadelerinin bir sonucu olduğu yani bu önermenin gerçekçisini önceki önermeler olduğunu vurgulamaktadır.

Öğrencilerinin eksik veya gereksiz değişkenleri fark etmelerini sağlama (MD-6) öğretim elemanlarının en az vurguladıkları noktalar olduğu görülmektedir. Bu göstergeye ait frekans ($f_{MT}=0$, $f_{C1}=2$, $f_{A1}=2$, $f_{ST}=0$, $f_{SC}=1$) ve yüzdeleri sırasıyla (%0, %1,52, %3,39, %0 ve %2,17) belirlenmiştir. Gözlemlenen ders saatlerinde matematiğin temelleri ve sayılar teorisi derslerinde öğretim elemanlarının bu göstergeye ait ifadeleri veri olarak

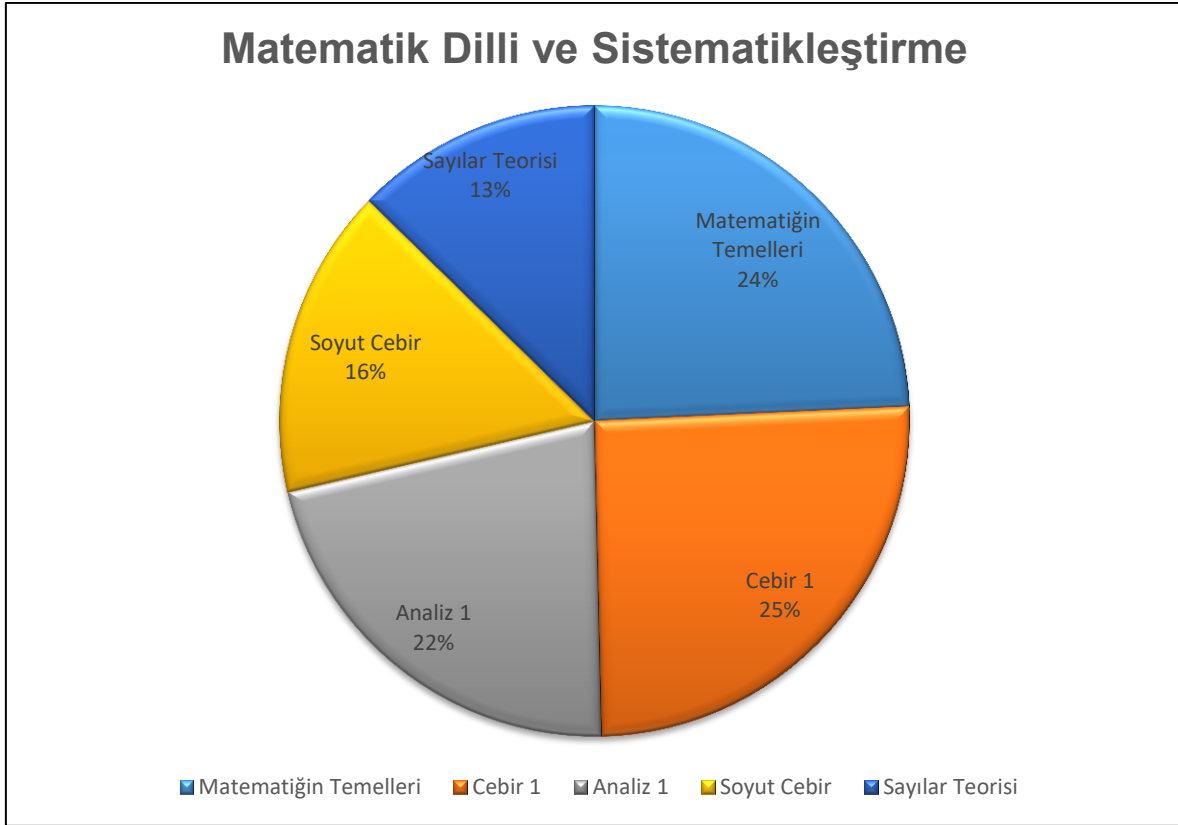
kayıt edilmemiştir. Buna karşın diğer derslerde öğretim elemanların öğrencilerinin eksik veya gereksiz değişkenleri fark etmelerini sağlamaya yönelik ifadeleri mevcuttur. bu duruma yönelik ÖE1' dersinden bir kesit örnek olarak sunulmuştur.

Buradaki amacımız en sade halinde yazmak onun için aralarında asal dedik ki bize kolaylık sağlasın. İspatlarınız ne kadar sade ise yani ne kadar az gereksiz ifade kullanırsanız o kadar düzgün olur. Tabi göstermeniz gerekenleri atlamadan. İspatımıza dönelim $\sqrt{2}=m/n \Rightarrow$ ise $2=m^2/n^2$ olur iki tarafın karesini aldım ki matematiksel olarak bir böyle bir müdahale yapabilirim devam edelim...(Matematiğin Temelleri 7.ders-17.10.2015)

Öğretim elemanı yapılan ispatların sade olmasını yani gereğinden fazla ifadeler içermemesi gerektiğini belirtmektedir. Dolayısıyla bir rasyonel ifadenin en sade hali olan pay ve paydanın aralarında asal durumunun ispat için kullanılmasının en uygun olacağını vurgulamaktadır.

İspatta gereksiz adım veya ifadelere yer verilerek öğrenenlerin fark etmelerini sağlama (MD-7) matematik dilli ve sistematikleştirme boyutunda yer alan kategoriler içerisinde en düşük frekans ve yüzdeliğe sahip göstergelerden biridir.

İspat sürecinde gözlemlenen dersler ve yukarıda örnek olarak verilen durumlar incelendiğinde öğretim elemanlarının ispat sürecinde farklı noktalara yoğunlaştıkları düşünülebilir. Güz döneminde gözlemlenen derslerin matematik dili ve sistematikleştirme boyutunda ortaya çıkan bütün kategorilerin toplamı Grafik 3' te sunulmuştur.



Grafik 2. Güz dönemi ders gözlemlerinin matematik dili ve sistematikleştirme bağlamında karşılaştırılması

Grafik 2’de genel olarak incelenen matematik dili ve sistematikleştirme boyutundaki bütün göstergelerin toplamı göz önüne alındığında bu göstergelerin Cebir1 (%25), Matematiğin Temelleri (%24) ve Analiz 1 (%22) derslerinde birbirine oldukça yakın oranlarda vurgulandığı, buna karşın diğer derslerde matematik dili ve sistematikleştirmeye yönelik durumların daha az vurgulandığı görülmektedir. Bu durum ispatların yoğun olarak işlendiği derslerde matematik dili ve sistematikleştirme boyutunda dikkate değer oranda vurgu veya uyarılara yer verildiğini göstermektedir.

4. 2. 2. Güz Dönemi Ders Gözlemlerinin Öğrenci Muhakemesine Odaklanma Açısından Değerlendirilmesi

Her bir ders ayrı ayrı incelendiğinde öğrenci muhakemesine odaklama boyutunda yer alan göstergeler dersler bazında benzer şekilde ön plana çıkarken bu göstergeler yoğunluk açısından değişim göstermektedir. Bu göstergelerden öğrencileri muhakeme süreçlerini açıklamaları konusunda teşvik etme (ÖM-1) en yüksek frekans ($f_{MT} = 28$, $f_{A1} = 15$, $f_{SC} = 6$, $f_{ST} = 5$, $f_{C1} = 4$) ve yüzdeye (sırasıyla %20,58, %18,75 %12,5, %11,11 ve %6,45) sahiptir. Bu kategorinin göstergelerine ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde

Matematiğin Temelleri dersinde diğer derslere nispeten daha fazla vurgulandığı görülmektedir. Buna karşın Cebir 1 dersinde bu göstergeye ait frekans ve yüzdelerin daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Bütün derslerde öğretim elemanlarının öğrencileri muhakeme süreçlerini açıklama konusunda teşvik etmeye yönelik ifadelerle sıklıkla yer verdiği fark edilmiştir. Bu duruma yönelik ÖE4'ün dersinden bir kesit aşağıda sunulmuştur.

$$X^2+2x+7=0(7)$$

ÖE3: *şimdi bunlara ayrı ayrı baktığımızda çözümleri nasıl buluruz var mı fikri olan? Yanlış da olsa eksik de olsa düşündüğünüzü söyleyin doğru ise zaten sıkıntı yok yanlış ise doğrusunu öğrenirsiniz. Ama burada konu mankeni gibi oturmak bize bir şey kazandırmaz. (Sayılar Teorisi 3.ders-07.10.2015).*

Öğretim elemanı bu şekilde öğrencilerin kendi muhakeme süreçlerini açıklamaları yönünde onları güdülemektedir.

ÖE1 kodlu öğretim elemanı benzer şekilde dersinde öğretmen adaylarının muhakeme süreçlerini açıklamaları için çeşitli sorularla onları teşvik etmektedir. Öğretim elemanın dersinde bu duruma örnek olarak nitelendirilen bir kesit sunulmuştur.

İspat: *Şimdi denklik için gerekli hangi şartlar varsa hepsini göstermemiz gerekiyor yoksa böyle büyük laflar edemeyiz. Önce neye bakalım daha önceki derslerden de bildiğiniz özellikler bunlar önce "yansıma" özelliğine bakalım*

ÖE1: *Nasıl gösterelim var mı fikri olan gelsin düşüncesini "yansımsın" bugün derse katılanlara lisedeki gibi sözlü notu vereceğim (Matematiğin Temelleri 6.ders10.10,2015)*

Öğretim elemanı ispat sürecinde bazı matematiksel kavramlarının tanımlarını açmak için öğretmen adaylarının düşüncelerin ifade etmelerini esprili bir dil ile onları güdülemektedir.

Başka bir öğretim elemanı dersinde öğretmen adaylarının muhakeme süreçlerini açıklamaları yönünde teşviklerini gösteren diyaloglardan bir kesit örnek olarak sunulmuştur.

ÖE2: *Şimdi konumuza gelelim bu arada bu simgenin "≡" anlamını biliyorsunuz demi?*

Ö1: *Denklik*

ÖE2: *Denklik güzel aferin. Yani doğruluk değerleri aynı olan önermeler denk veya eşittir. Peki, size soru daha denklik ile eşitlik arasındaki fark ne?*

Ö2: *Denklik eşitliği kapsar.*

ÖE2: *Çok artistik bir cümle oldu farkı ne? Mehmet Akif ispatlara yaklaşımın güzel böyle devam et ama biraz daha destekli atarsan hedefi daha iyi tutturursun(gülüyor) şimdi bir örnek verebilecek misin?*

ÖE2: *Aslında denklikte doğruluk değerleri aynı başka özellikleri demiyor... (Matematiğin Temelleri 5.ders10.10,2015).*

Öğretim elemanı anlamsal olarak birbirine yakın olan ve bundan dolayı bazen karıştırılan denklik ve eşitlik gibi matematiksel kavramlarının farkı üzerinde öğretmen adaylarının muhakeme süreçlerini açıklamaları konusunda teşvik etmektedir.

İspat sürecinde öğretmen adaylarının kendi düşüncelerini açıklamaları, anlaşılmayan durumların sorulmasının önemini başka bir öğretim elemanı dersinde vurgulamaktadır. Bu duruma yönelik örnek olarak ÖE2' nin dersinden bir kesit aşağıda sunulmuştur.

- *En son bir problem çözüyorduk hatırladınız mı bir eşitlik vardı onu göstermeye çalışıyorduk. Sonra devamını size bıraktım baktınız mı? Var mı bunu düşünen nasıl yaparız?*

...

ÖE2: *Demek pek kimse bakmamış tekrar yazalım ifadeyi*

$$f(U_1) \cap f(U_2) < f(U_1 \cap U_2)$$

ÖE2: *Şimdi sorumuza bir de şart koyalım o şarta göre düşünelim ne diyelim f birebir olsun. Matematiksel olarak yazarsak*

f: 1:1 ise

ÖE2: *Evet nasıl bir başlangıç yapabiliriz?*

- *(sınıftan cevap yok)*

ÖE2: *Bu sessizlik de güzel kendi kendime anlatayım. Arkadaşlar şimdi uyanın ne yaptığımızı beraber görelim. Sadece sonucu görüp deftere geçirmeniz yetmez eğer öğrenmek istiyorsanız beraber düşünmemiz gerekiyor. Hangi aşamayı nasıl yaptık niye öyle düşündük? Bunlara dikkat edin soru sorun anlaşılmayan yerlere tekrar bakalım...(Analiz 1 3.ders-03.10,2015)*

Öğretim elemanı ispatların anlaşılması ve ispat yapmanın öğrenilmesi için öğretmen adaylarının mutlaka kendi muhakeme süreçlerinin açıklanması gerektiğini vurgulamaktadır. Eğer ispat bir süreç olarak ele alınmazsa ve yazılan adımlarda neyi niçin kullanıldığı sorgulanmazsa veya öğretmen adayı kendi düşüncesini ifade etmezse sadece sonucun deftere geçirilmesinin yeterli olmayacağı belirtilmektedir.

Öğrenci muhakemesine odaklanma boyutunda yer alan kategorilerden öğrencilerin kendi ispatlarını oluşturmalarını ve sunmalarını sağlama (ÖM-5) ise derslere göre farklı oranlarda olmakla beraber bütün derslerde ön plana çıkmaktadır. Bu göstergeye ait en yüksek frekans ($f_{MT}=17$, $f_{A1}=7$, $f_{ST}=6$, $f_{SC}=3$, $f_{C1}=3$) ve yüzde sırasıyla (%13,33, %12,50, %8,75, %6,25 ve %4,83) olarak belirlenmiştir. Yapılan ders gözlemlerinde öğretim elemanlarının öğrencilerin kendi ispatlarını oluşturma ve sunma açısından öğrencilere imkân sağladıkları ve bu konuda teşvik ettikleri görülmektedir. Bununla beraber bu göstergeye ait veriler göz önüne alındığından derslere göre değişim söz konusudur. Öğrencilerinin kendi ispatlarını oluşturma ve sunmalarını sağlama açısından Matematiğin Temelleri ve Analiz 1 derslerinde daha fazla imkân sağlandığı düşünülmektedir. Buna karşın Cebir 1 ve Soyut Cebir derslerinde ise daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. ÖM-5 göstergesine ait derslerde kullanılan ifadeler örnek olarak sunulmuştur.

ÖE2: *şimdi sorusu olan var mı? Hızlı gitmiyoruz değil mi? o zaman şimdi size bir ödev verelim tek başınıza uğraşın bakalım kimler kendi ispatını yapabiliyor. Şimdilik bireysel olsun göreyim nasıl düşünüyorsunuz.*

Ö1: *ödev mi? Hocam biz böyle iyiydik ya*

ÖE2: *tabii burada ben yapınca iyi oluyor biraz da siz düşünün acaba bir ispata nasıl yaklaşırız matematiksel bir ifadenin ispatını doğru yapabiliyor muyuz? Sonra bazı arkadaşlarımız ispatlarını tahtada yapsın beraber inceleriz. Bu sizin için önemlidir kendiniz bir şeyler yapmadıkça asıl işi öğrenemezsiniz.*

Öğretim elemanı öğretmen adaylarının kendi ispatlarını oluşturmalarının önemini vurgulayarak onlara bir ispatı ödev vererek bu imkânı sağlamaktadır.

Başka bir öğretim elemanı dersinde öğretmen adaylarının kendi ispatlarını oluşturup sunulmalarını sağlamaktadır. Bu derste bir kesit aşağıda sunulmuştur.

Teorem: p ve q iki önerme olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$(p \vee q)' = p' \wedge q'$$

$$p \wedge q = p \vee q'$$

ÖE1: *Bunlardan birini ben yapayım diğeri size ödev olsun yapın bakacağım. Peki, nasıl yapalım?*

Ö1: *tablo ile gösterelim*

ÖE1: *güzel yöntemi öğrendin sen bu işin. Peki, bunu tahtada yapmak isteyen var mı?*

Ö3: *hocam ben yapmaya çalışayım ama emin değilim*

ÖE1: *Tamam, sen gel Mustafa böyle böyle bu iş öğrenilir. Bakalım Mustafa nasıl yapıyor inceleyelim.*

...(tablo ile tahtada yapıldı)

ÖE1: *arkadaşımızın yaptığı doğru mu?*

Ö2: *doğru gibi hocam ben de aynı yaptım*

ÖE1: *güzel aklın yolu bir denilir demi biz de ise doğru sonuç bir yoksa yollar farklı olabilir. Gerçi aynı yöntem olunca yolda aynı olur. Tek bir yolla yaptık tablo ile peki başka şekilde ispatı yapılır mı?*

Ö3: *aslında hocam lisede görmüştük*

ÖE1: *iyi o zaman bu da size ödev yapıp bir dahaki derste bize sunarsınız. Peki, ilk şikkimizin özel bir adı vardı hatırlayan var mı?*

Ö3: *de Morgan*

ÖE1: *güzel demek ki bir şeyler hala duruyor (gülüyor) tamam, Mustafa teşekkürler yaptığına itiraz gelmedi doğru yoldasın şimdi geçebilirsin yerine.(Matematiğin Temelleri 2.ders-27.09.2015)*

Öğretim elemanı, öğretmen adaylarına sunduğu bazı matematiksel teoremlerin ispatı için onların uğraşmasını istiyor. Öğretmen adayları belli bir süre uğraştıktan sonra içlerinde birinin tahtaya kalkıp kendi ispatının oluşturmasını sağlamaktadır. Bu süreçte öğretmen adaylarına çeşitli sorular yönlendirerek ispatın aşama aşama yazılmasını ve ilgili ispat yönteminin ne olduğunu fark etmelerini sağlamaktadır.

Başka bir derste de öğretim elemanı öğretmen adaylarının kendi ispatlarını oluşturmalarına fırsat vermektedir. Bu duruma yönelik ÖE1'in dersinden bir kesit aşağıda sunulmuştur.

Örnek: *m ve n gerçel sayılar olsun. Eğer $n > m > 0$ ise $\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}$ dir. Gösteriniz.*

ÖE1: *şimdi herkes uğraşsın size yeterince zaman vereceğim sonra beraber değerlendiririz yaptığınız ispatları*

ÖE1: *var mı tahtada çözmek isteyen?*

Ö1: *hocam ben bir şeyler yaptım ama tahtaya gelmezsem*

ÖE1: *gel gel tahtada yapmanı da yapmayı da dövmüyoruz. Sadece neler yaptığını nasıl yaptığını göreceğiz.*

Ö1: *tamam hocam iyi dayak yoksa ben geleyim(gülüyor)*

Öğrenci ispatı 1) $\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n} \rightarrow \frac{mn+n}{n(n+1)} > \frac{mn+m}{n(n+1)} \rightarrow mn + n > mn + m$ ise $n > m$ elde ederiz.()

ÖE1: *güzel şimdi bakalım Nisanur' un yaptığı doğru bir ispat mı ?*

Ö2: *bence on numara beş yıldız bir ispat oldu doğru hocam*

ÖE1: *yoksa sen de mi aynı şekilde yaptın*

Ö2: *evet hocam aslında kendimi övdüm Nisa yi değil (gülüyor)*

ÖE1: *iyi bakalım bizde sizi övecek miyiz? (gülüyor) peki bu ispatı değerlendirecek olan başak var mı? Doğru mu yanlış mı?*

Ö3: *hocam ben de farklı bir şekilde yaptım*

ÖE1: *güzel gel sen de yap tahtada bakın ne güzel uğraştıkça aynı soruda birçok ispat ortaya çıkabiliyor ha bunların bir kısmı yanlış olabilir ama önemli olan uğraşmanız. (Matematiğin Temelleri 6.ders-17.10.2015)*

Öğretim elemanı örnek olarak sunduğu bir matematiksel ilişkinin ispatını vermeden öğretmen adaylarının kendi ispatlarını oluşturmalarını istemektedir. İspat için yeterli süre verdikten sonra yapılan ispatların bir kısmının tahtada sunulmasını sağlamaktadır. Böylece benzer ya da farklı yapılan ispatların sınıf tarafından incelenmesine fırsat vererek hangi ispat girişimlerinin doğru hangilerinin eksik ya da hatalı olduğunu göstermektedir.

Öğrencilerin yapılan ispatlarla ilgili sorularına ya da yaptıkları eleştirilere uygun cevaplar vererek onları soru sormaya teşvik etme (ÖM-6) göstergesi öğrenci muhakemesine odaklanma boyutunda ön plana çıkan göstergelerden biridir. Bu göstergeye ait en yüksek frekans ($f_{MT}=12$, $f_{A1}=5$, $f_{SC}=4$, $f_{ST}=2$, $f_{C1}=1$) ve yüzde (sırasıyla %8,82, %8,33, %6,25, %4,44 ve %1,61) olarak belirlenmiştir. İspat sürecinde öğrencilerin sorularına ya da yaptıkları eleştirilere uygun cevaplar verilerek onları soru sormaya teşvik açısından Matematiğin Temelleri dersinde daha yoğunlukta olduğu görülmektedir. Buna karşın Cebir1 ve Sayılar Teorisi derslerinde bu göstergenin daha düşük oranlarda ön plana çıktığı belirlenmiştir. Bu göstergeye ait farklı derslerde kullanılan ifadeler örnek olarak sunulmuştur.

ÖE4: *gelelim sorumuza aslında moda göre ele aldık.*

$$\Rightarrow 4x+3y \equiv 5(8)$$

Şimdi şöyle yapalım 2 ile çarpalım neden böyle yaptığımı anladınız demi? o zaman 8x olur. x gidiyor

$$\Rightarrow 6y=2(8)$$

Ö1: *hocam baştan zaten 8x dir tekrar niye bu işlemleri yaptık sanki aynı şeyleri terar ediyoruz gibi geldi bana*

ÖE4: *çok güzel soru aferin Yunus Emre. Ama baştaki ile şimdi yaptığımız işlem acaba aynı mı birazcık düşün? Birbirinden farklı demi? Biz burada aralarında*

asal durumu için yaptık şimdi daha iyi anlaşıldı mı? Eğer adımları dikkatle takip ederseniz ne yaptığımız daha iyi anlaşılır. Yoksa benzer işlemlerde eğer mantığını anlamasanız aynıdır gibi gelir size bu da sizin hata yapmanıza sebep olur. Dikkati için Emre yi tebrik ediyoruz. Şimdi devam edelim....(Sayılar Teorisi 5.ders-12.10.2015).

Öğretim elemanı ilgili matematiksel ifadenin çözümünü yaparken bazı işlemlerin benzer olması öğretmen adayları tarafından aynı işlemlermiş gibi algılanıyor. Bundan dolayı öğretmen adaylardan biri bu duruma yönelik eleştirel bir soru sormaktadır. Öğretim elemanı soruyu çok olumlu karşılayarak öğrencisini dikkatli bir şekilde yapılan işlemleri takip etmesinden memnun olduğunu belirttikten sonra gerekli açıklamalarla karışıklığı ya da yanlış anlaşılmalara düzeltmektedir. Bu durum da öğrencilerin ispat sürecinde soru sorumaya teşvik edildiği düşünülebilir.

Öğrenci muhakemesine odaklanma boyutunda yer alan kategorilerden öğrencilerin birbirlerinin muhakeme süreçlerini değerlendirebildikleri sınıf tartışmaları yaptırma (ÖM-4) göstergesi derslere çok farklı oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir. Bu gösterge Matematiğin Temelleri dersinde % 13,97 ile ön plana çıkarken buna karşın Cebir 1 dersinde gözlemlenen ders saatlerinde öğrencilerinin birbirlerinin muhakeme süreçlerini değerlendirdikleri sınıf tartışmaları ile ilgili herhangi bir ifade veri olarak kayıt edilmemiştir. Diğer derslerde ise ÖM-4 göstergesine ait veriler daha düşük oranlarda olduğundan söz edilebilir. Öğretmen adaylarının ispat sürecinde birbirlerinin muhakeme süreçlerini değerlendirdikleri sınıf tartışmalarına yönelik ifadeleri aşağıda örnek olarak sunulmuştur.

ÖE1: merhaba arkadaşlar şimdi açık bir önerme verelim onun üstüne beraber bakalım n sayısı 10 ' un bir kat ise n sayısı 5 ' in bir katıdır ve n sayısı 2'in bir katıdır. Veya n sayısı 10' un bir katı değilse n sayısı 5'in bir katıdır. Şimdi öncelikle bu ifadeyi matematiksel olarak nasıl yazabiliriz ona bakalım bu bizim için önemlidir eğer anladığımızı doğru bir formda yazamasak hata yaparız ikinci olarak burada ne tür bir önerme var kim kime bağlı onu belirleyelim

ÖE1: var mı yapacak olan?

Ö1: ben yapabilirim hocam

ÖE1: gel bakalım Ayşegül

(öğrenci ispatını tahtada yaptı)

ÖE1: şimdi bakalım Ayşegül 'ün yaptığına hepsini tek bir ifade olarak yazdı doğru mu sizce?

Ö2: hocam bence parçalasak daha doğru olur.

ÖE1: güzel Mustafa diyor ki ayrı ayrı yazalım peki başka fikri olan var mı ya da bu arkadaşların dedikleri doğru mu yanlış mı?

...

ÖE1: tamam, şimdi bakalım sanki ayrı ayrı yazarsak daha anlaşılır olur. Yoksa Ayşegül ün yazdığı da yanlış değil ama karışık olursa kim kime bağlı nereden başlayacağımızı kestiremeyebiliriz şöyle yazalım:

P: n, 10 'un bir katı

q: n, 5'in bir katı

r: n , 2' nin bir katı

Bu şekilde ifademiz üç önerme şeklinde yazarsak belki daha kolay olur. Şimdi bu ifadeleri önermeler cebiri formunda ifade edelim bakalım yazacak olan var mı? Yok, mu hadi bunu ben yazayım bir dahakini Merve yazar

$-[p \rightarrow (q \wedge r)] \vee (p' \rightarrow q)$ bu şekilde yazarsak doğru olur mu inceleyin bakalım

Ö3: doğrudur hocam

ÖE1: Teşekkür ederim sen de onayladıysan artık kesin doğrudur.(gülüyor) var mı itirazı olan?

Ö4: yok hocam hepimiz ikna olduk(gülüyor)

ÖE1: güzel peki bu önerme doğru mu yanlış mı gösterecek bir babayiğit var mı?

Ö5: hocam tabloda yazarsak çıkar

ÖE1: güzel Elif sen gel bakalım yap o zaman tablonu ama sistematik yaz karışmasın

Ö2: hocam tablo yapmadan yapsak olmaz mı tablo biraz uzun gibi

ÖE1: mesela sen olsaydın nasıl yapardın

Ö2: doğruluk değerlerin yazarım çıkar

ÖE1: arkadaşlara soralım sizce bu doğru bir mantık mı?

Ö6: hocam "n" i bilmiyoruz ki

Ö7: ama 10' un kuvveti diyor yani p ye 1 desek ikinci ifadede ise değili var o da "0" olur.

ÖE1: ya n 10 un kuvveti değilse Cüneyt o zaman da tam tersini alırsın farklı bir sonuç çıkar senin dediğin bir durum için geçerli ama bu ifadenin doğruluğunu göstermek için sence yeterli mi bir düşün

Ö6: anladım hocam

ÖE1: *Evet arkadaşlar sanırım yeterince tartıştık bu arada Elif'i de tahtada çok beklettik kusura bakma. Anlaşıyor sanki tablo bizim için daha doğru olacak demi diğer metotları da düşünebilirsin eğer mantıklı ve doğru bir yol ise o da kabul. (Matematiğin Temelleri, 5.ders-04.10.2015).*

Öğretim elemanı öğretmen adaylarına sunduğu bir önerme üzerinde bütün sınıfın dahil olduğu bir sınıf içi tartışmanın yapılmasına zemin oluşturmaktadır. Bunun üzerine öğretmen adaylarının kendi fikirlerini ifade etmelerine fırsat vererek hem kendi muhakeme süreçlerinin farkında olmalarını sağlamak hem de başkalarının muhakemelerini değerlendirecekleri bir ortamın oluşmasının sağlamaktadır. Bu süreçte öğretim elemanı hem en uygun ispat yöntemin belirlenmesi için hem de matematik dilinin doğru kullanılması için gerekli uyarılarda bulunarak sistematik, sade ve doğru bir ispatın yapılması için öğretmen adaylarını yönlendirmektedir.

Başka bir derste öğretim elemanı aynı örnek üzerinde öğretmen adaylarının yaptığı farklı ispatları sınıf tarafından değerlendirilmesi amacıyla sınıf içi tartışmalara fırsat vermektedir. ÖE1' in dersinden bir kesit aşağıda sunulmuştur.

Örnek: *m ve n gerçel sayılar olsun. Eğer $n > m > 0$ ise $\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}$ dir. Gösteriniz.*

-şimdi herkes uğraşsın size yeterince zaman vereceğim sonra beraber değerlendiririz yaptığınız ispatları

ÖE1: *var mı tahtada çözmek isteyen?*

Ö1: *ben yapabilirim sanırım hocam?*

ÖE1: *tamam gel bakalım*

Öğrenci ispatı 1) $\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n} \rightarrow \frac{mn+n}{n(n+1)} > \frac{mn+m}{n(n+1)} \rightarrow mn+n > mn+m$ ise $n > m$ elde ederiz.

ÖE: *başka var mı yapacak?*

Ö2: *hocam ben de bir şeyler yaptım*

ÖE1: *sen de gel bakalım*

Öğrenci2 ispatı:

Ö2: *hocam $n > m > 0$ verilmiş her tarafa 1 ekleysek $n+1 > m+1 > 1$ sonra her tarafı $n+1$ e böldüm.*

$1 > \frac{m+1}{n+1} > \frac{1}{n+1} \quad \frac{m}{n} < 1$ olduğundan $\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}$ dir. “

ÖE1: *güzel bu da bir yol buna var mı itirazı olan*

Ö3: *hocam doğru gibi ben de öyle düşündüm*

ÖE1: *peki başka? Elif sen de gel tahtada ispatını yap bakalım nasıl düşündüğünü açıkla bize.*

Öğrenci 3 ispatı:

“ $\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}$ hocam buradan işler dışlar çarpımı yapalım o zaman $mn+n > mn + m$ olur mn gider $n > m$ olur.”

ÖE1: *Güzel başka? Sen de gel ne olursan ol yine gel(gülüyor)*

Öğrenci4 ispatı:

$n > m > 0$

$1 > \frac{m}{n} > 0$ ise $n+1 > m+1 > 1$ sonra $n+1$ bölelim $1 > \frac{m+1}{n+1} > 1$ ise $\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}$ dır

ÖE1: *güzel teşekkürler oturabilirsin. Şimdi bakalım arkadaşlarınız tahtada bu soru için dört tane ispat yazdılar muhtemelen çoğunuz da benzer düşündünüz ki aranızda dolaşırken gördüm bazılarınıninkini acaba bu ispatlardan hangileri doğrudur? Kimler bizi kandırıyor? Bunları oturtalım masaya*

Ö5: *ya hepsi doğru ya da hepsi yanlış gibi geliyor bana*

ÖE1: *nasıl geliyor sana (gülüyor) yani böyle bir kaniya nasıl vardın?*

Ö5: *hocam hissettim ama nedenin açıklayamıyorum.*

ÖE1: *o da güzel sezgi de işimizin bir parçası. Peki, şöyle soralım bu ispatlardan hangileri doğrudan ispat yöntemine uygun? Başlığımız bu ya*

Ö6: *1ve 3 olmaz da belki 2 olabilir*

ÖE1: *şimdi biz doğrudan ispat yöntemini tanımlarken bazı kavramlar vermiştik ve ne diyorduk hipotezden yolla çıkararak sonuca var yöntemimiz buydu. Şimdi sorumuza bakalım burada varsayım ne? Sonuç ne?*

Ö8: *ilki varsayım diğeri...(öğrenci cevabın devamını getiremiyor)*

ÖE1: *eğer bunları doğru belirlemezsek yanlış bir yolla gireriz boşu boşuna uğraşırız bir şey de elde etmeyiz. İdeamızı daha matematiksel bir dil ile yazsak daha az karıştırırız.*

V: $n > m > 0$

S: $\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}$

ÖE1: *varsayımımızı ve sonucumuzu yazdık. Şimdi arkadaşlarımızın ispatlarını beraber inceleyelim. Mesela ilk ispata bakalım ne yapmış arkadaşımız sonuç üzerine bazı işlemler yaptı önce paydaları eşitledi sonra içler dışlar falan ve $n > m$ elde etti. Bu doğru bir mantık mı?*

- Ö9: *hocam bence yanlış çünkü hipotezi hiç kullanmadı.*
- ÖE1: *çok güzel bakın bazı şeyler oturuyor. Yani verilenden hareket etmedi aslında arkadaşımız göstermesi gereken ifadeyi doğru kabul etti sonra işlemler yaptı. Doğrusu bizim hipotezden hareket edip böyle bir sonuç var mı yok mu onu elde etmemizdi. Ama arkadaşımız tam tersini yaptı hipotezden verilen bilgiyi tekrar elde etti. Peki, bu bir ispat olur mu?*
- Ö2: *hocam olmadı gibi ama nasıl yapabiliriz ki? Biz denklemleri hep böyle çözerdik.*
- ÖE1: *hipotezden hareket etsek doğrudan ispat yöntemi bana bunu demiyor mu? Bu arada arkadaşlarının yaptıklarına bakıyoruz maksadımız doğru bir ispat nasıl yapılır öğrenmek. Yoksa Elif moralini bozma çoğu kişi şuan aynı hataya düştü. Önce bu ispatları değerlendirelim sonra hep beraber doğrusunu yazmaya çalışırız. Diğerlerinde de genel olarak benzer bir mantık var yani sonucun üzerinde işlemler yapmış. Ayşegül un yaptığı biraz farklı hipotezden hareket etmiş ama orda da başlangıç ile sonuç uyuşmamış bir bağ kurulmamış gibi. Liseden beri bir alışkanlıkla direk sonuca odaklanıyoruz bu yanlış bize ne verildi bizden ne isteniyor buna dikkat etmemiz gerekiyor.*
- ÖE1: *şimdi gelelim teoremimize bizim hipotezimiz ne $n > m > 0$ bu verilen yani doğru kabul ettiğimiz şeyi bir daha bunu göstermemize gerek yok bunun üzerine çeşitli matematiksel işlemler uygulayarak verilen sonucu elde edelim. (Matematiğin Temelleri 9.ders-17.10.2015).*

Öğretim elemanı dersinde öğretmen adaylarının kendi ispatlarını oluşturup birbirleriyle karşılaştırmalarını istemiştir. İspatın yapılması için öğretmen adaylarına gerekli süre verildikten sonra dört farklı ispatın tahtada sunulmasını sağlamıştır. Yapılan ispatlar üzerinde sınıf içi tartışma yapılmaktadır. Bu süreçte öğretim elemanı öncelikle ispatların öğretmen adayları tarafından değerlendirilmesini istemektedir. Daha sonra yapılan ispatlardaki muhakeme hatalarının neler olduğunu ifade ederek öğretmen adaylarının bu durumun farkında olmalarını sağlıyor. Yapılan ispatların çoğunda sonuç ile başlama muhakeme hatasının olduğunu örnekler üzerinde gösterilerek bu durumun ciddi bir hata olduğu belirtiliyor. Bu tür hatalara düşülmemesi için verilen ifadelerin öncelikle iyi analiz edilmesi gerektiğini vurgulayarak varsayım ve sonucun ne olduğunun belirtilmesi ve ispat yöntemlerinin doğru uygulanması gerektiğini vurgulanmaktadır. Bununla beraber öğretmen adaylarının böyle bir muhakeme hatasını yapmalarının sebeplerinden birisinin önceki öğrenim hayatlarında öğrendikleri gibi sadece sonuca odaklanıp ispatları denklem gibi çözmeye çalışmalarından kaynaklandığını belirtilmektedir.

Öğrenci muhakemesine odaklanma boyutunda yer alan kategorilerden öğrencilerin ispat adımları arasındaki ilişkilere yönelik sorular yönelterek ispata devam etmelerini sağlama(ÖM-12) derslerin genelinde öğretim elemanlarının derslerinde vurguladıkları göstergelerden biri olarak belirlenmiştir. Bu göstergeye ait en yüksek frekans ($f_{C1}=15$, $f_{A1}=13$, $f_{MT}=8$, $f_{ST}=8$, $f_{SC}=6$,) ve yüzde (sırasıyla %24,19, %17,77, %16,25, %12,5 ve %5,88) olarak belirlenmiştir. Öğretim elemanları genel olarak derslerinde öğrencilerinin ispatları devam edebilmelerini sağlamak amacıyla ispat adımları arasındaki ilişkilere dikkat çekmişlerdir. ÖE'2 nin dersinden bir kesit aşağıda örnek olarak sunulmuştur.

ÖE2: *şimdi ifademizi bildiğimiz tanımları kullanarak biraz açarsak daha iyi anlaşılır.*

$\{x \mid f(x) \in U_1\} \rightarrow$ peki bu x ' ler nerede? U_1 de değil mi? Bitti o zaman

-diğer taraftan bakalım acaba $U_1 \subset f(f^{-1}(U_1))$ mıdır acaba? Yani acaba bizim önermemizin karşısı doğru mudur?

Ö1: *hocam keyfi bir değer alıp baksak*

ÖE2: *aferin güzel o zaman*

$y \in U_1$ keyfi \Rightarrow

ÖE2: *burada ne yazabiliriz? f neydi? Bu sorulara kafamızda mantıklı cevaplar vermesek ilerlememiz zor olur. Öncelikle bize verilenlerden hareketle adımlarımızı yazarız bakalım sorumuza " f " içi ne demiş?*

Ö2: *örten*

ÖE2: *güzel o zaman demek örtenliğin tanımı da işime yarayacak daha doğrusu o şarta göre yani örtenliğe göre hareket edeceğim. Bakın her adımda yaptıklarımızı sorguladıkça işimiz daha kolay oluyor hem daha doğru bir sonuç elde ederiz.*

ÖE2: *o zaman örtenliğin tanımına göre yazalım*

$(\forall y \in B \text{ için } \exists x \in A : y = f(x))$ tanımımız bu. Şimdi bunu ifademiz için düşünsek

$y \in U_1$ keyfi $\Rightarrow f$ örten olduğundan $\exists x \in A : y = f(x)$ ise $x_1 \in f^{-1}(U_1) : y = f(x) \Rightarrow y \in f(f^{-1}(x_1))$ olur. Ve ispatımız biter. Bakın sadece bildiğimiz tanımları doğru yerde kullanarak ispatımızı yaptık. (Analiz1 5.ders-24.10.2015)

Öğretim elemanı ispat sürecinde yazılan her adımı ifade ederek veya soru sorarak öğretmen adaylarının bazı matematiksel tanımları kullanarak ilerlemelerini sağlamaktadır. Yapılan ispatta örtenlik kavramının tanımını tekrar hatırlatarak ispatın kolayca oluşturulması için öğretmen adaylarına ispat adımları arasındaki ilişkilere dikkat etmeleri gerektiğine dolayısıyla bu şekilde ispat yapmanın daha kolay olacağını göstermektedir.

Başka bir öğretim elemanı dersinde benzer şekilde ispat adımları arasındaki ilişkilere yönelik öğretmen adaylarına çeşitli sorulara sorarak ilerlemelerini sağlamaktadır. Bu duruma yönelik olarak ÖE2'nin dersinden bir kesit aşağıda sunulmuştur.

Örnek: $S = \{(-1)^n/n \mid n \in \mathbb{N}\}$

ÖE2: *evet klasik ilk sorumuzu soralım. Bu küme üsten veya alttan sınırlı mıdır? Düşünün bakalım fikri olan bizi aydınlatın*

Ö1: *evet hocam*

ÖE2: *güzel örneğin 5/6, 3/4, 5,10 gibi herhangi bir değer bu kümenin bütün elemanlarından büyüktür. Demek bazı değerle kümемizin sınırlarını ön görebiliriz. Peki, en küçük üst sınır için ne diye biliriz. Bir değer sezdimiz mi?*

Ö2: *hocam bence 1/2 çünkü doğal sayı gittikçe azalacaktır.*

ÖE2: *aferin güzel yani 1/2 den daha büyük bir değer olmayacak gibi. Peki, alt sınır için bir şey diyebilir miyiz?*

Ö3: *-1 hocam*

ÖE2: *evet -1 olur başka negatif tam sayı olamayacağı için doğru. Peki, bu kümenin ilk elemanı ne?*

... (Cevap yok)

ÖE2: *her adım da soru soruyorum size bu hoşunuz gitmeyebilir. Ama anlayarak neyi niçin kullandık? Aradaki bağ ne? Bunlara dikkat etmesek öğrenemeyiz zaten aynıysa kitapta var fotokopisini çekip vereyim size siz de rahat edin ben de. Şimdi gelelim sorumuza -1 ile başlıyor sonra negatif ya da pozitif basit kesirler şeklinde devam eder. İki durum da sifıra yaklaşıyor. O zaman "0" için yığılma noktası diyebilir miyiz? ya da "0" dan farklı bir yığılma noktası da olabilir mi?*

Ö4: *hocam bence "0" yığılma noktası olur.*

ÖE2: *tamam sıfırdan farklı düşünelim örneğin 1/100 olsun bundan sonra gelen başka bir sayı var bu böyle devam eder demi?*

Ö3: *sonuçta sifıra yaklaşmayacak mı hocam?*

ÖE2: *güzel şimdi bu yığılma noktasını matematiksel olarak ifade edersek $(r-m/2, r+m/2) \cap S = \{r\}$ dir....(Analiz1 5.ders-05.10.2015).*

Öğretim elemanı dersinde bir örnek üzerinde ilgili matematiksel ifadenin yığılma noktasının ne olacağını göstermek istemektedir. Bu süreçte her aşamada öğretmen adaylarına sorular yöneltilerek hem ifadenin anlaşılmasını hem de ilerlemelerini sağlamaktadır. İstenilen durumun gösterilmesinde önemli rol oynayan supremum ve

infimum gibi matematiksel ifadelerinin de bilinmesi gerektiğini dolayısıyla bu örnekte bu ifadelerin nelere olabileceklerini belirtilmektedir.

Gruplar oluşturup öğretmen adaylarının birbirleriyle etkileşime girerek çalışmalarını sağlama (ÖM-3), bir önermenin karşıtının doğru olmadığını karşıt örnekler yardımıyla açıklama (ya da öğrencilerden karşıt örnekler vermelerini isteme) (ÖM-10) ve çeşitli muhakeme hatalarını içeren farklı ispatların örnek gösterilmesi ve bunların tartışılmasını sağlama (ÖM-13) göstergeleri öğrenci muhakemesine odaklama boyutunda bütün derslerde en az ön plana çıkan durumlardır. Sayılar Teorisi dersinde grupların oluşturulup öğrencilerin birbirleriyle etkileşime girerek çalışmalarını sağlama, Matematiğin Temelleri ve Sayılar Teorisi dersinde bir önermenin karşıtının doğru olmadığını karşıt örnekler yardımıyla açıklama Cebir 1, Analiz 1 ve Soyut Cebir derslerinde çeşitli muhakeme hatalarını içeren farklı ispatların örnek gösterilmesi ve bunların tartışılmasını sağlama göstergelerine yönelik gözlemlenen ders saatlerinde herhangi bir durum veri olarak kaydedilmemiştir. Buna karşın söz konusu göstergeler diğer derslerde çeşitli oranlarda olduğu belirlenmiştir. Bu duruma yönelik örnek olarak ÖE2'nin dersinden bir kesit aşağıda sunulmuştur.

ÖE2: Yeni bir teoreme geçelim ödevinizi sonra yaparsınız. Şimdi yazacağım teoremi yapmak için iki şer veya üçer gruplar halinde ayrılın önce grup elemanları kendi aralarında 10 dakika tartışın bir ispatlarını yapsın sonra her grup sırayla tahtaya çıkıp ispatını yapsın beraber değerlendiririz.

Teorem3: $a > 1$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. $a^m < b^n \Leftrightarrow m < n$

Ö1: hocam a doğal sayı mı?

ÖE2: öyle bir şey demiyor hem sen bize niye soruyorsun kendi grup arkadaşlarıyla tartış.

Ö1: hocam şimdi yaparız.

...sınıfta gruplar oluştu öğretim elemanı herhangi bir gruba müdahale etmeden gruplar arasında dolaşmaktadır.

Ö2: ne yapalım biliyor musun? Bence doğrudan ispat yöntemini uygulayalım

Ö3: ama ancak ve ancak var

Ö2: ilk tarafı yapalım da önce...

...

Ö4: Ayşegüller de bizim gibi yapıyormuş

ÖE2: Cüneyt kendi grubunla ilgilen

Ö4: *tamam hocam arkadaşlara yardım edecektim(gülüyor)*

...

Ö5: *hocam biz çok acayip yerellere girdik*

ÖE2: *orda kayıp olmayın da*

Ö6: *hocam bizim bitti sanırım*

ÖE2: *tamam bakacağım biraz daha bekleyelim*

Ö7: *hacı deftere baksana bununun aynısı vardı sanki*

Ö8: *kanka bu farklı*

Ö9: *olum bu çok saçma oldu çaktırmadan sağa sola bak rezil olmayalım*

...

ÖE2: *arkadaşlar sanırım yeterince tartıştınız şimdi bir grup gelsin tahtaya ispatlarını yapсын onun üzerine konuşalım....(Matematiğin Temelleri 8.ders-23.10.2015).*

Öğretim elemanı verdiği teoreminin ispatı için öğretmen adaylarının iki üç gruba ayrılıp gruplar halinde bu ispatının üzerinde çalışmalarını istemektedir. Gruplar oluşturulup öğretmen adayları teoremin ispatı için çeşitli girişimlerde bulunurken öğretim elemanı da aralarında dolaşarak öğretmen adaylarının yaklaşımlarını incelemektedir. Bu etkinlikle öğretim elemanın öğretmen adaylarının ispat sürecinde birbirlerinin muhakeme süreçlerini değerlendirmelerini amaçladığı düşünülebilir. Bu süreçte grup içi yapılan konuşmalar, ispat girişimleri araştırmacı tarafından not alınarak öğretmen adaylarının ispat sürecinde ileriye sürdükleri muhakemeleri geniş bir yelpazede değerlendirilmiştir.

Başka bir öğretim elemanı dersinde bir önermenin karşıtının doğru olmadığını karşıt örnekler yardımıyla açıklayarak öğretmen adaylarına her önermenin karşıtının doğru olmayacağını göstermektedir. Bu duruma yönelik ÖE3'ün dersinden bir kesit aşağıda örnek olarak sunulmuştur.

Ö3: *$\exists e \in Z$ öyle ki $\forall a, \varepsilon \in Z$ için $e*a=a*e=a$ dir. Şartımız bu. Acaba bizim örneğimiz bu şartı sağlıyor mu? Şimdi burada iki taraftan da bakmamız lazım yani hem sağdan hem soldan bakalım çünkü bazen bir taraftan çok aşikâr sağlayan bir özellik diğer taraftan sağlamayabilir. Var mı bu duruma bir örnek verecek olan? Yani bir taraftan sağlasın diğer taraftan sağlamayan bir örnek. Bakın bir tane ben yazayım*

Mesela $x, y \in R$ için $x*y=x^y$ olsun.

Bakalım şimdi

$$x*1=x$$

$$1 \cdot x = 1$$

Bakın iki taraftan da farklı çıktı demek ispatımızda çift gerektirme varsa mutlaka iki taraftan da bakmamız gerekir. Aksi takdirde eksik bir ispattır doğruluğu hakkında bir şey diyemeyiz. Şimdi örneğimize dönelim...(Cebir1, 5.ders-23.10.2015)

Öğretim elmanı bir örnek üzerinde grubun özelliklerini incelerken öğretmen adaylarının sık sık yaptıkları bir muhakeme hatasının, ispatların tek taraflı incelenmesi olduğunu belirtmektedir. Yani çift gerektirme olan ifadelerin ispatı yapılırken matematiksel ifadenin hem sağdan hem soldan incelenmesi gerektiğini çünkü işleme göre sağ ve soldan farklı sonuçların çıkabileceğini bir örnek üzerinde göstermektedir.

Öğrenci muhakemesine odaklanma boyutunda yer alan kategorilerden bazıları derslere göre büyük farklılık göstermektedir. Örneğin özel durumlardan hareketle öğrencileri genel önermeler üretmeye yönlendirme (F) göstergesi Cebir 1 dersinde yaklaşık olarak %20 civarındayken buna karşın Analiz 1 dersinde yaklaşık olarak %2 civarında olduğu görülmektedir. Bu göstergeye yönelik farklı öğretim elemanlarının derslerinden bazı kesitler örnek olarak aşağıda sunulmuştur.

Uyarı: $a, b \in \mathbb{N}$ sayıları verildiğinde $p^0=1$ yazılarak aynı sırada asal sayılarının çarpımı olarak ifade edilir.

ÖE3: anladınız mı?

...

ÖE3: şimdi bir iki örnekle bakalım umarım o zaman anlarsınız.

Örneğin 27 yi alalım $27 = 3^3 = 2^0 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^0$

Başka bir sayı alalım $35 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^1$

Ö1: hocam şimdi daha iyi anlaşıldı

ÖE3: bu örneklerden hareketle bütün sayıları bu düzende yazabileceğimizi ön görüyoruz. Bu ispatı için yeterli değil ama bize bir fikir veriyor. Şimdi bunun için bir önerme daha yazalım

Önerme: $a = \prod_{i=1}^r p_i$, $b = \prod_{j=1}^r p_j$

$m_i, n_i \in \mathbb{N}$ için bu taktirde $i=1, 2, \dots, r$ için $(a, b) = \prod_{i=1}^r p_i$

ÖE3: şimdi bu tür önermeler biraz karmaşık olduklarından soyut olarak denklikleri anlaşılabilir onun için yine sayısal bir örnekle anlamaya çalışalım bu örnekler önermenin doğruluğunu göstermez ama biz bu mantıkla bir genelleme elde edebiliriz. en son verdiğimiz önermeyi tekrar ele alalım

$55 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^1$

$$88 = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^1$$

$$\text{Ebob}(88,55) = \prod_{i=1}^5 p_i = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^1 = 11$$

ÖE3: *sanırım bu şekilde daha iyi anlaşıldı. (Sayılar Teorisi, 5.ders-24.10.2015).*

Öğretim elemanı dersinde verdiği önermenin daha iyi anlaşılması için sayısal değerlerle önermeyi tekrar açıklamaktadır. Bununla beraber özel değerlerin ispat için yeterli olmayacağını bunların sadece genel kurallara ulaşmak için bir fikir verdiğini uyarısında bulunmaktadır.

Başka bir öğretim elemanı dersinde benzer şekilde özel örneklerden hareketle öğretmen adaylarının genel önermeler üretmeye yönlendirmektedir. Bu duruma yönelik ÖE4'ün dersinden bir kesit aşağıda örnek olarak sunulmuştur.

ÖE4: *size biraz ipucu vereyim belki fikrinizi açar burada özel olarak bu kongrüansları sağlayan hangi sayılar olur. Bakın önce özel bir çözüm bulalım bu bize bir fikir verir sonra bütün çözümlerini buluruz. Eğer bu kongrüansların çözümü varsa daha önce ayırdığımız 5 ve 7 ile bağlantılı olmalı*

Şimdi 5 in kalan sınıfları arasında olur mu? Baktığımızda olmayacak gibi yazalım bakalım.

$$X=0 \Rightarrow 7 \not\equiv 0(5) \times$$

$$X=1 \Rightarrow 10 \equiv 0(5) \checkmark$$

$$X=2 \Rightarrow 15 \equiv 0(5) \checkmark$$

...

Bu durumda sadece iki değer bu kongrüanslar. Sağladığına göre $x \equiv 1(5)$ ve $x \equiv 2(5)$ bu kongrüanslar çözümü olur.

$$X^2 + 2x + 7 \equiv 0(7)$$

Yine aynı yöntemi kullanacağız yolu ben söyledim devamını siz getirin

...

Bütün bu kongrüans çözümlerinin hepsini tek tek yazmak yerine belli bir yerden sonra artık sistematik gittiğini fark ettik onun için bütün değerleri yazmamıza gerek yok ama nasıl gittiğini bildiğimiz için çözüm sayımızı yazabiliriz. Çünkü daha büyük sayılar için bütün bu durumları tek tek yazamayacağımız için bu yöntemi kullanabiliriz. Bize kolaylık sağlar. Yukarda siz görün diye hepsini yazdım ama gerek yok bunları yazmaya bize bir faydası olmaz. Bir ilişkiyi fark etmemiz gerekiyor. Aslında ispatların bir görevi de bu karışık ve çok kalabalık çözümleri daha sade ve daha kısa bir şekilde göstermek.

Şimdi tanımımıza göre çözümümüzü daha düzgün bir şekilde yazalım

$$X=a1(m)$$

$X=a2(m)$ için tanıma göre yazarsak

$$x \equiv \sum_{i=1}^2 m_i \cdot u_i \cdot b_i(m) \text{ elde ederiz. .(Soyut Cebir1 6.ders-17.10.2015)}$$

Öğretim elemanı kongrüansların çözümü bulmak için önce özel durumlardan hareket edilirse genel önermelerin üretilmesinin daha kolay olacağını bir örnek üzerinde göstermektedir. Bu örneklerin sadece genel bir kurallı elde etmek için fikir verdiğini belirtilmektedir. Birkaç örnekten sonra matematiksel ilişkinin sistematik bir hal aldığını dolayısıyla büyük kümeler için bütün değerlerin yazılmayacağını ilişkiyi keşif ettikten sonra sonucun yazılabileceğini ifade etmektedir.

Öğretmen adaylarının ispat sürecinde başkalarının muhakemelerini değerlendirebilmeleri için teşvik etme (ÖM-2) Matematiğin Temelleri dersinde yaklaşık olarak %10 dolaylarında iken Cebir 1 dersinde, gözlemlenen ders saatleri içerisinde bu göstergeye rastlanmamıştır. Bu göstergeye yönelik ÖE4' ün dersinden bir kesit aşağıda örnek olarak sunulmuştur.

ÖE4: *sanırım yeterince uğraştınız çözümü bulmak için peki ne buldunuz? var mı gelip tahtada yapacak olan?*

Ö1: *hocam 0,2,4,6 buldum*

ÖE1: *güzel peki en başta ne demiştik 32 tane çözüm var diğerlerini nasıl buluruz? Yunus Emre gel tahtaya istersen çözümünü yaz bakalım acaba nerede bir eksiklik var ve nasıl bulduğunu bize anlat eğer yolun doğru ise yani tanıma uygun bir yöntem kullanmışsan diğer çözümler de çıkar.*

... Tahtada çözüm yapıldı

ÖE4: *bakın arkadaşımız doğru mu düşünmüş? Emre'nin çözümünü inceleyelim bakalım nasıl düşünmüş. Var mı bir yanlışlık yok mu?*

Ö2: *hocam yanlış değil de sanki eksiklik var*

ÖE4: *güzel peki eksiklik nerede?*

Ö2: *bilmiyorum hocam ama...*

ÖE4: *aslında basit bir nokta atlatılmış buradaki modüllerin katlarını da eklese başka çözümler de çıkar. Bazen böyle olur ufak bir noktayı kaçırmız ya da bir tanımı eksik kullanırız devam gelmez. İspat bize çok ağır gelir onun için kullandığımız terimler, tanımlar, teoremler önemlidir iyi bilin. Arkadaşımıza da teşekkür ederiz ona bakarak biz de eksikimizi görürüz.*

Ö3: *peki, hocam iki katını ekleyebilir miyiz?*

ÖE4: *elbette ekleyebilirsin tanıma ters bir durum oluşuyor mu yok o zaman sıkıntı yok Sayılar Teorisi, 8.ders-23.10.2015).*

Öğretim elemanı öğretmen adayına sunduğu matematiksel ilişkinin ispatını yapmalarını istemektedir. Öğretmen adaylardan birini tahtaya kaldırarak yapmış olduğu çözümünü açıklanmasını sağlamaktadır. Yapılan çözüm üzerinde diğer öğretmen adaylarının düşüncelerini belirterek yapılan ispatı değerlendirmelerine olanak sağlanıyor.

Öğrenci muhakemesine odaklama boyutunda yer alan kategorilerden oluşturulan bir ispatın geçerli olup olmadığını tartışmaya açma (ÖM-7) Soyut Cebir dersinde yaklaşık olarak %14 civarında ortaya çıkarken buna karşın Sayılar Teorisi dersinde yaklaşık olarak %4 civarında olduğu görülmektedir. Bu göstergeye yönelik derslerde gözlemlenen durumlar örnek olarak sunulmuştur.

Önerme 5: $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $a|b$ ve $b|c \rightarrow a|c$ dir. Bunun özel bir adı vardı demi? önceki sınıflarda gördünüz mü? peki burada ancak ve ancak kullanabilir miydik? Her zaman sağlar mı? Bunu sağlamayan aksi bir örnek verelim mi? mesela $2|6$ ve $6|18$ ise $2|18$ burada sıkıntı yok ama tersini düşünebilir miyiz olmaz demi? bu tek taraflı bir koşul böyle olursa böyle olur şartımız bu.

ÖE3: *Peki, burada tersinir eleman var mı? Yani istisnalar hariç. örneğin 1 ve -1 için tersinirdir diyebiliriz. Ama bizim için bu yeterli değil eğer aksi örnek için kullansaydık yeterli olacaktı ama bütün elemanlar söz konusu olduğundan bu bize yetmiyor. Onun için bu örnekler önermemizin her zaman doğru olduğunu göstermez. Bir örnek daha yapalım belki daha iyi anlaşılır.*

Örnek 3: $G = M_{n \times n}(R)$,

i) $(G, +)$ değişmeli gruptur. Bunu matrislerin özelliklerinden yararlanarak kolayca gösterebiliriz.

ii) $GL(n, R) = \{ [a_{ij}]_{n \times n} \mid a_{ij} \in R \}$

ÖE: *şimdi matrisleri hatırlayalım. Çünkü ifadenin doğruluğunu göstermemiz için öncelikle o ifademizin özelliklerini bilmeliyiz.*

- hangi özellikleri sağlar? Yani matrisin hangi özellikleri gruplarda geçerlidir.

-birim elemanı var demi? Birleşme var peki ne yok?

-ters eleman özeliği sağlamaz demi o zaman sağlamayan bir özellik varsa gruptan söz edemeyiz.

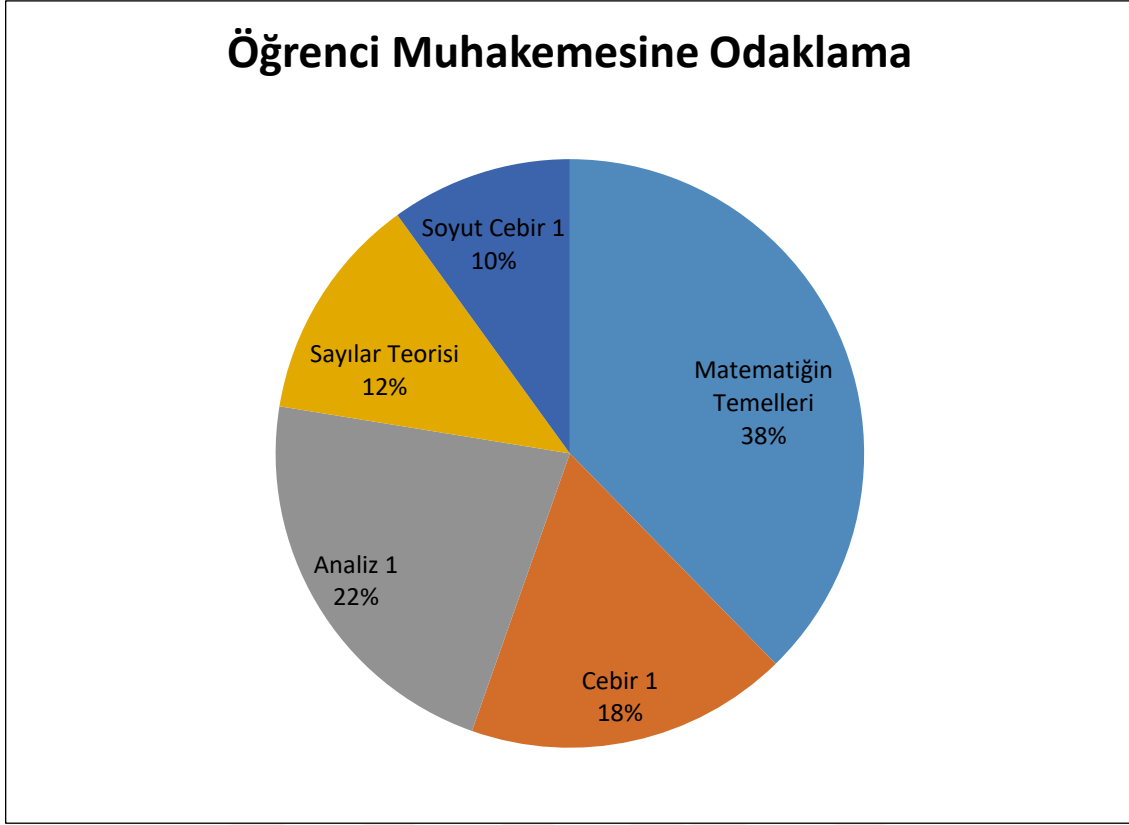
- o zaman ne yapalım. Var mı fikri olan? Herkes uyuyor uyamayanlar siz dinleyin onlara lazım olmayacak bu önerme!

$a_{ij} \in R$, $[a_{ij}] \neq 0$ şartı koyarsak gruptan söz edebiliriz. bu taktirde $(GL(n, R), \cdot)$ bir gruptur. Ama değişmeli olmaz çünkü matrislerde çarpmada eğer iki farklı matris ise değişmeli

olmaz. Yani ancak özel bir şartta olur genel olarak olmaz. Yaptığımız ispatın geçerli olup olmadığına dikkat etmeliyiz bir şeyler yazıyoruz iyi hoş da yaptıklarımız doğru mu? Sınavda yazmış 5 sayfa sorsan ona yüz alacak biz okuyoruz 20 ondan sonra biz kötü oluyoruz hoca puanımı kesti diye. Derste doğru dürüst dinleme! Doğru bir ispat nasıl yapılır öğrenme gel sınavda saçma sapan şeyler yaz hoca puan versin hikâye mi bu kim çok yazarsa yüksek puanlar alsın? Vizeleriniz hiç iç açıcı değil bu gidişle çoğunuz bu dersi geçemez! Derste sadece yazmak yetmez ezberlemekte yetmez anlamaya çalışın bir şeye doğru diyorsak neden doğru yanlış diyorsak neden yanlış bilin...(Cebir1 12.ders-03.11.2015)

Öğretim elemanı dersinde bir önermenin ispatını verirken sadece birkaç özel durumla ispatın yapılamayacağını böyle bir ispatın geçerli olmayacağını belirtmektedir. Benzer şekilde matrislerle ilgili örnekte de grup olabilmesi için grubun bütün özelliklerini sağlamalı ancak o zaman geçerli bir ispat olur uyarısında bulunduktan sonra matrislerde değişme gibi özelliklerinin her zaman geçerli olmayacağını göstermektedir. Öğretim elemanına göre oluşturulan bir ispat geçerli olmalı yani matematiksel kurallara ve tanımlarla desteklenmelidir. Dolayısıyla çoğu öğrencinin sınavlarda sayfalarca yazdığı şeylerin bir ispat olmayacağını bunun için de mutlaka derslerde oluşturulan ispatların geçerli olup olmadığının sorgulanması gerektiğini ve doğru bir ispatın nasıl oluşturulacağını uyarısında bulunmaktadır.

İspat sürecinde gözlemlenen dersler ve yukarıda örnek olarak verilen durumlar incelendiğinde öğretim elemanlarının ispat sürecinde farklı noktalara yoğunlaştıkları düşünülebilir. Güz döneminde gözlemlenen derslerinin öğrenci muhakemesine odaklama boyutunda ortaya çıkan bütün kategorilerin toplamı Grafik 3' te sunulmuştur.



Grafik 3. Güz dönemi ders gözlemlerinin öğrenci muhakemesine odaklama bağlamında karşılaştırılması

Grafik 3'te görüldüğü üzere öğrenci muhakemesine odaklama kategorisinde yer alan göstergeler açısından derslerin arasında farklılıklarının olduğundan söz edilebilir. Bu kategoride en yüksek yüzde ile ortaya çıkan Matematiğin Temelleri dersi göstergelerin toplamı bakımından daha yoğunlukta olduğu görülmektedir. Dolayısıyla bu derste öğrenci muhakemesine yönelik durumların diğer derslere nispeten daha fazla vurgulandığı düşünülebilir.

4. 2. 3. Güz Dönemi Ders Gözlemlerinin İspat Yöntemleri Açısından Değerlendirilmesi

Her bir ders için ayrı ayrı incelendiğinde ispat yöntemleri kategorisinde yer alan göstergeler içerisinde en fazla vurgulanan durumların verilen bir önermenin ispatını yapabilmek için en uygun ispat yönteminin belirlenmesine yönelik öğrencilerin tartışmasını sağlama (İY-1) olduğu görülmektedir. Bununla beraber İY-1 göstergesi derslere göre farklı oranlarda ortaya çıkmıştır. Bu göstergeye ait en yüksek frekans ($f_{MT}=15$, $f_{A1}=11$, $f_{ST}=8$, $f_{SC}=6$, $f_{C1}=6$) ve yüzde sırasıyla (%61,53, %55, %50, %44,11 ve %12,5) olarak belirlenmiştir. Öğretim elemanlarının farklı derslerde ispat sürecinde kullanılacak en uygun

ispat yönteminin belirlemeye yönelik ifadeleri mevcuttur. Bu duruma yönelik olarak ÖE2'nin dersinden bir kesit aşağıda sunulmuştur.

Teorem: S nin supremumu varsa tektir.

ÖE2: *bunu nasıl gösterelim. Yani nasıl bir metotla gösterebiliriz?*

Ö1: *hocam ispat yöntemi mi?*

ÖE2: *evet hangi yöntemle gösterelim.*

Ö2: *hocam aksini varsaysak*

ÖE2: *güzel başka fikri olan var mı?*

Ö3: *bence de hocam aksini varsayarsak çıkar gibi*

ÖE2: *aferin güzel demek artık hangi ispat yöntemini nerede kullanacağınız yavaş yavaş öğrenmeye başladınız. İspat yöntemlerini hatırlasak hangisinin bizim için kolaylık sağlayacağını görürüz. bu tür teoremlerde arkadaşlarınız da dediği gibi "aksini varsayma" yöntemi çok kullandığımız bir yöntem. o zaman ispata başlayalım.*

İspat: $A.V k \neq k'$ ve $k = \sup S$, $k' = \sup S$

k bir üst sınır ve k' supremum ise o zaman tanımımıza göre (Md-4) $k' \leq k$ olur.....1

k' bir üst sınır ve k supremum olduğundan yine tanımımıza göre $k \leq k'$ olacaktır.....2

1 ve 2 doğru ise tanımla çelişti zaten bu yöntemde amaç çelişkiyi bulup ilk ifadenin doğruluğunu kabul etmektir. Oysa yapacağımız ispatların başka önerme veya tanımlarla uyumlu olması gerekiyordu. Öyle olduğu için zaten ispat yapabiliyoruz bu teoremlerin hepsi bir birleri ile ilişkili sonuçlardır. Sorumuza dönersek demek ki tek bir tane supremum vardır. Benzer şekilde infimum için de siz ispatı yapın. Bakın zaten yolunu gösterdik aynı yolla belki farklı şekillerde gösterirsiniz bu da günün ilk ödevi olsun size.(Analiz1 12.ders-03.11.2015).

Öğretim elemanı verdiği teoremin ispatı için en uygun ispat yöntemini belirlemeleri için öğretmen adaylarına sormaktadır. Bunun üzerine öğretmen adayları bu tür teoremler için en uygun ispat yönteminin "aksini varsayma" ispat yöntemi olacağına karar veriyorlar. Öğretim elemanı da bu tür ifadeler için en uygun ispat yönteminin bu olacağını ileri sürülen fikirlerinin doğru olduğunu ve öğretmen adaylarının artık ispat yöntemlerini yavaş yavaş benimsemelerinden memnun olduğunu belirtmektedir. Bununla birlikte ispat sürecinde uygun ispat yönteminin belirlenmesinin önemini vurgulamaktadır.

Başka bir öğretim elemanı benzer şekilde ispatı istenilen bir matematiksel ifade için en uygun ispat yönteminin hangi yöntem olacağına yönelik öğretmen adaylarının fikirlerine başvurmaktadır.

Teorem: $a \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{N}$ $a > 1 \Leftrightarrow a^n > 1$

İspat:

ÖE1: bu tür ifadelerin ispatını nasıl yapıyorduk.

Ö1: hocam ancak ve ancak var

ÖE1: "Ancak ve ancak" lı bir ifade yani çift gerektirme o zaman hem sağdan hem soldan bakmamız gerekiyor demir?

Ö1: evet

ÖE1: peki ispat yöntemi olarak ne kullanalım.?

Ö2: doğrudan

ÖE1: güzel dene bakalım gösterebilecek misin? Başka?

Ö3: hocam tümevarım olmaz mı?

ÖE1: güzel sanki tümevarım daha uygun görünüyor. Ayşegül senin yol işe yaradı mı?

Ö2: yok hocam daha değil yapıyorum...

ÖE1: bakalım biz tümevarımla yapalım o zaman yöntemimiz görelim eğer burada bir sonuç çıkmazsa başka bir yol deneriz.

$n=1$ için $a^1 = a > 1$ ilk adım sağladı

$n=k$ için doğru kabul edersek $a^k > 1$ olsun.

ÖE1: şimdi yöntemin son adımını yani göstermemiz gereken şey yazalım. Onu yazmadan işimize yarayacak bir iki düzenleme yapalım yoksa direkt göstermeye çalıştığımızda işimiz zor oluyor. Yani bir aşamaya geçerken onun alt yapısını hazırlamak lazım dayanağı nedir?

ÖE1: peki biz bu eşitsizliğin her iki tarafını bir pozitif sayı ile çarparsak eşitlik bozulur mu?

Ö4: bozulmaz hocam

ÖE1: güzel yapalım o zaman $a \cdot a^k > 1 \cdot a \Rightarrow a^{k+1} > a > 1$ $n = k+1$ için doğru olur... (Sayılar Teorisi 10.ders-03.11.2015

Öğretim elemanı verdiği teoremin ispatı için en uygun yöntemin belirlenmesine yönelik öğretmen adaylarının tartışmasını sağlamaktadır. İleriye sürülen ispat yöntemlerinden hangilerinin kullanılabileceğini daha doğrusu verilen ifadenin ispatı için en uygun olanını belirtilmektedir. Diğer ispat yöntemlerinin de kullanılabileceğini farklı

düşünen öğretmen adayları varsa o yöntemi de denemelerini istiyor eğer bir sonuç elde edilecekse problem olmayacağını belirtmektedir.

İspat yöntemleri kategorisinde yer alan göstergelerden farklı ispat yöntemlerinin varlığına vurgu yapma (İy-4) derslerde ön plana çıkan göstergelerden biridir. Buna karşın bu göstergeye ait veriler incelendiğinde derslere göre farklı yoğunlukta olduğu görülmektedir. İY-4 göstergesine ait frekans ($f_{MT}=10$, $f_{A1}=3$, $f_{ST}=2$, $f_{SC}=2$, $f_{C1}=3$) ve yüzde (sırasıyla %25, %15,38, %15, %7,35 ve %4,16) olarak belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretim elemanları ispat sürecinde matematiksel bir ilişkinin ispatı için farklı ispat yöntemlerinin varlığını vurgulayan ifadeler kullanmaktadır. Bu duruma yönelik Ö1'ün dersinden bir kesit aşağıda sunulmuştur.

Teorem 3: $a > 1$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. $a^m < b^n \Leftrightarrow m < n$

ÖE1: yine çift gerektirmeli bir teorem artık bu tür teoremlerin ispatı nasıl yapılır öğrendiniz.

\Rightarrow önce okumuzu böyle yazalım yani sol taraftan ispatlayalım hangi tarafta işlem yapıyorsak oklarımızı (ise bağlacımızı) da öyle çizelim

-burada $a > 1$ ve $a^m < b^n$ ise G.G $m < n$

ÖE1: yöntem olarak ne seçelim var mı fikri olan

Ö1: aksini varsayalım

ÖE1: Mustafa sen de her şeye aksini varsayalım diyorsun bu yöntem senin için kutsal olmasın başka yöntemler de var.

Ö1: ne yapayım hocam en kolay o geliyor. Bir de hep onu kullanıyoruz gibi

ÖE1: doğru çoğu örneğimizde bu yöntemi tercih ediyoruz ve işimize de yarıyor. Ama yine de tek bir yöntem varmış gibi sadece bu yönteme odaklanmayın.

Ö2: hocam en çok bu yöntem mi kullanılır.

ÖE1: teoreme göre değişir hepsini bilin hangisi işinize gelirse onu kullanın. Gelelim sorumuza cün haklı bu soruda aksini varsayarak göstermek bizim için kolaylık sağlar. en azından bu taraf i için doğrudur.

A.V $m \geq n$ olsun. $m-n \geq 0 \Rightarrow a^{m-n} \geq 1$ ise $a^m/a^n \geq 1 \Rightarrow a^m \geq a^n$ oldu ki bu da çelişki oldu. Diğer taraftan bakalım

$\Leftarrow: m < n \Rightarrow n-m > 0 \quad n-m \in \mathbb{N}$ ise $a^{n-m} > 1 \Rightarrow a^n/a^m > 1 \dots$

-şimdi diğer tarafı da siz ispatlayın kontrol edeceğim bireysel yapın kim nasıl düşünüyor görelim.

Ö3: hocam önceki teorem gibi yapsak olmaz mı benziyor.

ÖE1: *yap bakalım önce ne düşündüğünü yaz ona göre doğru mu yanlış mı bakalım.*

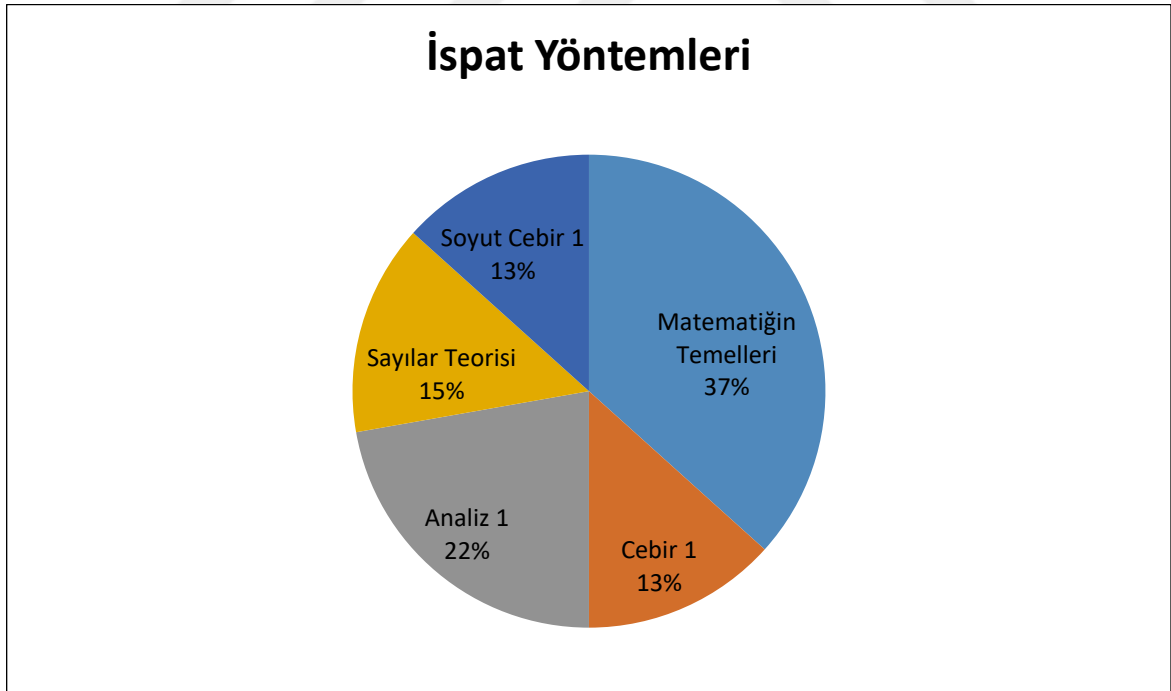
Ö4: *hocam doğrudan yapsak olmaz mı?*

ÖE1: *dene olabilir uğraş bakalım. (Matematiğin Temelleri 12.ders-03.11.2015)*

Öğretim elemanı öğretmen adaylarına sunduğu teoremin ispatı için nasıl bir yöntem izleneceğini sormaktadır. Bir öğretmen adayının her teorem için aynı ispatı yöntemini yani “aksini varsayma” yöntemini kullanmaya meyilli olduğunu fark ediyor. Bunun üzerine birden fazla ispat yönteminin olduğunu dolayısıyla tek bir yöneme saplanıp kalınmaması gerektiğini uyarılmaktadır.

Bir önermenin ispatını birden fazla ispat yöntemini kullanarak yapma (İY-2) ispat yöntemleri kategorisinde derslere göre farklı oranlarda olduğu görülmektedir. Örneğin bir önermenin ispatını farklı ispat yöntemleri kullanarak yapma Analiz 1 dersinde yaklaşık olarak % 17 civarında ortaya çıkarken buna karşın Sayılar Teorisi dersinde gözlemlenen ders saatleri içerisinde bu göstergeye ait herhangi bir durum veri olarak kayıt edilmemiştir. İY-2 göstergesine ait öğretim elemanlarının ifadeleri örnek olarak sunulmuştur.

Güz döneminde gözlemlenen derslerinin ispat yöntemleri boyutunda ortaya çıkan bütün kategorilerin toplamı Grafik 4’ te sunulmuştur.



Grafik 4. Güz dönemi ders gözlemlerinin ispat yöntemleri bağlamında karşılaştırılması

Grafik 4’te görüldüğü üzere ispat yöntemleri kategorisinde yer alan göstergeler açısından derslerin arasında farklılıklarının olduğu görülmektedir. Bu kategoride en yüksek

yüzde ile ortaya çıkan Matematiğin Temelleri dersi göstergelerin toplamı bakımından daha yoğunlukta olduğu görülmektedir. Dolayısıyla bu derste ispat yöntemlerine yönelik durumların diğer derslere nispeten daha fazla vurgulandığı düşünülebilir.

4. 3. Güz Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile İlgili Bulgular

Orta öğretim matematik öğretmenliği programında yürütülen ispata yönelik güz dönemi ders gözlemlerinin sonunda öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarına yönelik değişimi belirleyebilmek için Muhakeme Hataları Belirleme Testi 2 (MHBT2) yapılmıştır. Yapılan bu açık uçlu sınav ile birlikte ispat sürecinde öğretmen adaylarının yaptıkları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarına yönelik veriler; muhakeme hatalarını belirleme ölçeğinin boyutlarında yer alan kategorilere göre değerlendirilerek hatalar, eksiklikler ve boşluklar ile ilgili yoğunluklar belirlenmiştir. Bu kısımda öncelikle MHBT1'e eş değer olacak şekilde hazırlanan MHBT2'de elde edilen veriler, betimsel olarak sunulduktan sonra yapılan klinik mülakatlar ve öğretmen adaylarının örnek çözümleri ile desteklenerek verilmiştir. Daha sonra her bir sınıf seviyesindeki öğretmen adayları için MHBT1 ve MHBT2 verileri karşılaştırılarak öğretmen adaylarının ispat sürecinde yaptıkları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları ile ilgili değişim tablo ve grafiklerle sunulmuştur.

Bütün sınıf seviyelerinde yer alan öğretmen adaylarının Muhakeme Hataları Belirleme Testi 2'de yer alan ispatlar için yapılan muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının hangi kategoride yer aldığı ve bu kategoriler ile ilgili frekans ve yüzde dağılımları Tablo 16'da sunulmuştur.

Tablo 16. Muhakeme Hataları Belirleme Testi 2'de Yer Alan İspatlar İçin Yapılan Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşluklarının Yer Aldığı Kategorilere Yönelik Frekans ve Yüzde Dağılımları

	1. SINIF			2. SINIF			3. SINIF			4. SINIF			5. SINIF		
	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%
Muhakeme Hataları	MH-1	25	26,5	MH-1	13	26	MH-1	25	41,6	MH-1	12	22	MH-1	8	20
	MH-2	18	19,1	MH-2	10	20	MH-2	10	16,6	MH-2	9	17	MH-2	4	10
	MH-3	8	8,5	MH-3	5	10	MH-3	5	8,3	MH-3	8	15	MH-3	5	12,5
	MH-4	4	4,25	MH-4	2	4	MH-4	8	13,3	MH-4	4	8	MH-4	3	7,5
	MH-5	4	4,25	MH-5	6	12	MH-5	7	11,6	MH-5	4	8	MH-5	4	10
	MH-6	17	18,3	MH-6	14	28	MH-6	10	16,6	MH-6	10	18	MH-6	12	30
	MH-7	10	10,1	MH-7	10	20	MH-7	12	20	MH-7	7	13	MH-7	4	10
Muhakeme Eksiklikleri	ME-1	10	6,6	ME-1	13	9,1	ME-1	18	7,8	ME-1	10	7,2	ME-1	9	8,6
	ME-2	25	16,6	ME-2	25	17,4	ME-2	71	30,8	ME-2	20	14,4	ME-2	17	14,6
	ME-3	30	20	ME-3	40	27,9	ME-3	45	19,5	ME-3	40	28,8	ME-3	38	32,7
	ME-4	10	6,6	ME-4	8	5,5	ME-4	14	6,1	ME-4	6	4,3	ME-4	3	2,5
	ME-5	5	1	ME-5	2	1,3	ME-5	7	3	ME-5	5	3,5	ME-5	1	0,8
	ME-6	25	16,6	ME-6	20	13,9	ME-6	32	13,9	ME-6	17	12,2	ME-6	14	12,1
	ME-7	20	7,89	ME-7	5	3,4	ME-7	10	4,3	ME-7	13	9,3	ME-7	15	12,9
	ME-8	25	16,6	ME-8	30	20,9	ME-8	33	14,3	ME-8	28	20,1	ME-8	18	15,5
Muhakeme Boşlukları	MB-1	10	32,5	MB-1	10	32,2	MB-1	12	26	MB-1	8	33,3	MB-1	4	21
	MB-2	14	45,2	MB-2	12	38,7	MB-2	21	45,6	MB-2	9	37,5	MB-2	10	52,6
	MB-3	4	12,9	MB-3	4	12,9	MB-3	10	21,7	MB-3	4	16,6	MB-3	3	15,7
	MB-4	3	9,8	MB-4	1	3,2	MB-4	3	6,7	MB-4	3	12,5	MB-4	2	10,5

Tablo genel olarak incelendiğinde sınıf seviyelerinin genelinde öğretmen adaylarının muhakeme hatalarının daha çok sonuç ile başlama (MH1), yanlış varsayımlarla başlama (MH2), teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması (MH6) ve özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7), kategorilerinde yoğunlaşmıştır. Farklı notasyonları kullanmayı ispat olarak düşünme (MH3) ve aşırı genelleme hataları (MH5) kategorilerinde ise diğer muhakeme hatalarına oranla daha az sayıda ortaya çıktığı görülmektedir. MHBT2' den elde edilen verilerden hareketle öğretmen adaylarının ispat yaparken daha çok var olan bir gerçek üzerinden başlayarak ulaşmaları gereken matematiksel ifade ile ispata başlangıç yapmışlardır. Diğer bir deyişle sonucu doğru kabul ederek çeşitli matematiksel işlemlerle ilgili matematiksel ifadenin ispatını yapmaya çalışmışlardır. Öğretmen adaylarından bir kısmı ispatı istenen matematiksel bir ifadenin hipotez ve hüküm kavramlarını karıştırarak yanlış bir varsayım ile ispatları yapmaya çalışmışlardır. Farklı sınıf seviyelerinde yer alan öğretmen adaylarının bazıları ise ispat sürecinde sadece özel bir durumun veya birkaç sayısal değeri ele alarak ispat yapma gibi muhakeme hatalarına sahip oldukları görülmektedir. Bununla birlikte sınıf seviyelerinin genelinde dikkate değer bir oranda öğretmen adaylarının bir teoremin karşıt tersinin kendisinin dengi olduğunun farkına varmadıkları düşünülmektedir.

Muhakeme eksiklikleri; ispat sürecinde yöntem, tanım aralığı, matematiksel dil gibi eksikliklerle ispatın tamamlanması veya ispatın yarıda bırakılmasından kaynaklanan durumlardır. Bu durumlar muhakeme hatasından ziyade doğru bir muhakeme ile başlanması ancak bazı matematiksel bilgi eksikliklerine bağlı olarak ispatın istenilen şekilde tamamlanmamasıdır. Bununla birlikte Muhakeme eksiklikleri bakımından öğretmen adaylarının daha çok ispata nasıl başlayacağına karar verememe (ME2), tanım aralığını dikkate almama (ME3) ve matematik dilini kullanmada yetersizlik (ME6) kategorilerinde yoğunlaştıkları görülmektedir. Değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı (ME5) ve ispat yapmada sistematikliğin olmaması (ME7) kategorilerinde ise öğretmen adayları daha az oranda muhakeme eksikliğine yönelik davranışlar sergiledikleri fark edilmektedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispat sürecinde yöntem, tanım aralığı, matematiksel dil gibi eksikliklerle birlikte ispatlarını tamamladıklarıyla da ispatlarını yarıda bıraktıkları anlaşılmaktadır.

Muhakeme boşlukları; ispat sürecinde izlenen adımlarda kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunulmadan ya da adımlar arasında bir ilişki kurmadan ispatın tamamlanmasına dayalı durumlardır. Muhakeme boşlukları bakımından öğretmen adaylarının daha çok kullanılan önermelerin gerekçelerinin sunulmaması (MB2) ve yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması (MB1) gibi kategorilere

yönelik davranışlar sergiledikleri görülmektedir. Dolayısıyla öğretmen adayları, ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmadan ispatlarını tamamlamışlardır.

Ders gözlemleri sonrası yapılan MHBT2' nin verileri incelendiğinde sınıf seviyelerinin genelinde MHBT1'de olduğu gibi öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının benzer yoğunlukta olduğu belirlenmiştir. Bununla beraber her bir sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları bakımından MHBT1 ve MHBT2 arasında muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşlukları farklı oranda olduğu görülmektedir. Ayrıca her bir sınıf seviyesi ayrı ayrı incelendiğinde muhakeme hataları boyutunda yer alan kategorilerinin her birinde frekans ve yüzdeler bakımından bir azalmanın olduğu göze çarpmaktadır. Her bir sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip olduğu muhakeme hatlarının MHBT1 ve MHBT2 arasındaki değişim her bir sınıf için ayrı ayrı ele alınmıştır.

4. 3. 1. Güz Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 1. Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular

1. sınıf öğretmen adaylarının MHBT1 ve MHBT2'de yaptıkları ispatların muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları boyutlarında yer alan her bir kategoriye ait göstergelere göre değerlendirilmesi sonucunda elde edilen frekans ve yüzde dağılımı Tablo 17'de sunulmuştur.

Tablo 17. Ders Gözlemleri Sonrası Muhakeme Süreci Boyutu Kategorilerine Göre Değerlendirilmesi ile İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımı

	MHBT1			MHBT2		
	Madde	f	%	Madde	f	%
MUHAKEME HATALARI	MH-1	8	11,3	MH-1	25	26,5
	MH-2	9	12,6	MH-2	18	19,1
	MH-3	4	5,6	MH-3	8	8,5
	MH-4	5	7,1	MH-4	4	4,25
	MH-5	3	4,1	MH-5	4	4,25
	MH-6	4	5,6	MH-6	17	18,3
	MH-7	38	53,5	MH-7	10	10,1
MUHAKEME EKSİKLİKLERİ	ME-1	17	8,9	ME-1	10	6,6
	ME-2	46	24,2	ME-2	25	16,6
	ME-3	38	20	ME-3	30	20
	ME-4	14	7,36	ME-4	10	6,6
	ME-5	3	1,57	ME-5	5	1

Tablo 17'nin devamı

	MHBT1			MHBT2		
MUHAKEME EKSİKLİKLERİ	ME-6	32	16,8	ME-6	25	16,6
	ME-7	15	7,89	ME-7	20	7,89
	ME-8	25	13,1	ME-8	25	16,6
MUHAKEME BOŞLUKLARI	MB-1	18	34,5	MB-1	10	32,5
	MB-2	25	41,2	MB-2	14	45,2
	MB-3	5	8,92	MB-3	4	12,9
	MB-4	10	14,8	MB-4	3	9,8

Genel olarak incelendiğinde 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarını, muhakeme eksikliklerini ve muhakeme boşluklarını belirlemek amacıyla yapılan MHBT1'de öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun $f=38$ ve %53,4 en yüksek frekans ve yüzdeyle MH7 muhakeme hatasına sahip oldukları görülmektedir. Buna karşın yapılan MHBT2 'de bu muhakeme hatasına yönelik oranın önemli ölçüde $f=10$ ve %10,1 frekans ve yüzdeyle düşüş gösterdiği görülmektedir. 1. sınıf öğretmen adayları MHBT1'de ispatları yaparken özel bir durumdan hareketle veya sadece birkaç sayısal değer ile ispatları yapmaya çalışmışlardır. Ancak MHBT2'de bu düşüncenin büyük bir oranda değiştiğinden söz edilebilir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH1 göstergesi MHBT1'de $f_1=8$ ve %11,3 olarak düşük bir oranda ortaya çıkarken buna karşın MHBT2'de $f_2=25$ ve %26,5 ile en yüksek frekans ve yüzdeyle ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispat sürecinde sonuç ile başlama muhakeme hatasına sahip olma açısından MHBT1'e nispeten MHBT2'de daha yoğunlukta olduğu görülmektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH6 göstergesi hem MHBT1 hem MHBT2'de dikkate değer bir oranda ortaya çıkmıştır. Ancak MHBT1' de bu göstergesi en yüksek frekans $f_1=9$ ve %12,6 yüzdeyle ortaya çıkarken bu frekans ve yüzdenin $f_2=18$ ve %19,1 şeklinde MHBT2'de artış gösterdiği görülmektedir. Dolayısıyla 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2'de ispatları yaparken yanlış varsayım ile başlama bağlamında daha yoğunlukta olduğundan söz edilebilir. 1.sınıf öğretmen adayları muhakeme hataları boyutunda yer alan MH6 göstergesi açısından MHBT1'de en düşük frekans $f_1=4$ ve yüzdeye %5,6 sahipken buna karşın MHBT2'de bu oran en yüksek frekans $f_2=17$ ve %18,3 yüzdeyle ortaya çıkmıştır. Bu durum öğretmen adaylarının MHBT2'de ispatları yaparken bir teoremin karşıt tersinin kendisinin dengi olmasının farkına varama açısından daha fazla muhakeme hatası yaptıkları düşünülebilir. Yapılan her iki açık uçlu sınavda da muhakeme hataları boyutunda yer alan MH4 ve MH5 göstergeleri düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Dolayısıyla öğretmen adayları hem

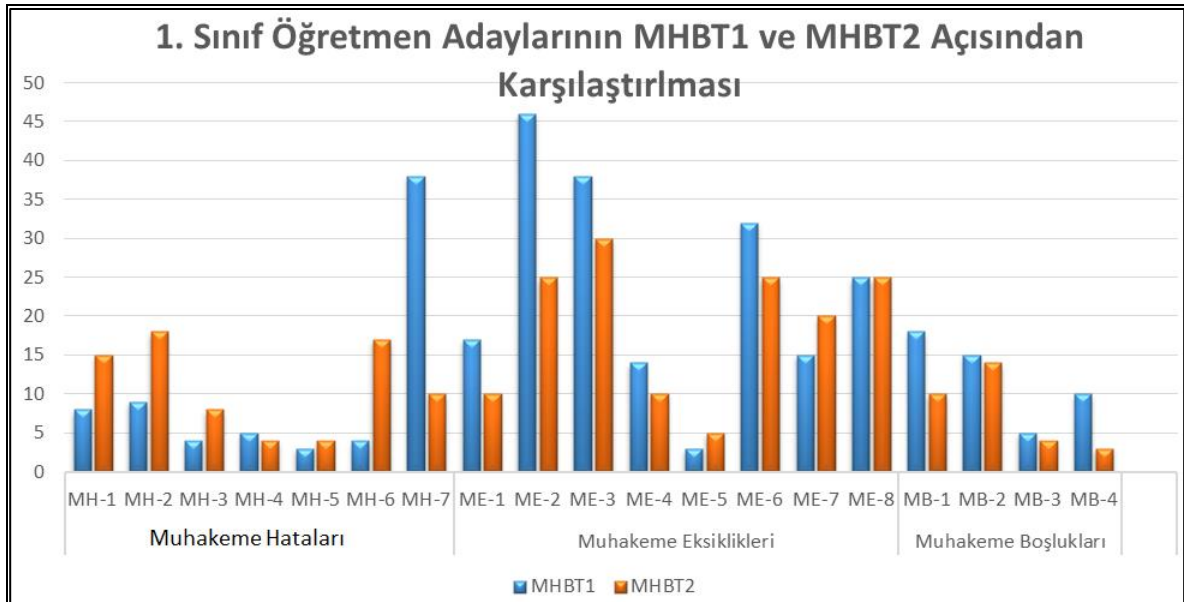
MHBT1'de hem de MHBT2'de aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılması ve aşırı genelleme muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumların daha düşük oranlarda sahip oldukları düşünülmektedir.

İspat sürecinde öğretmen adaylarının yöntem, tanım aralığı, matematiksel dil gibi eksikliklerle ispatlarını tamamlamaları veya ispatlarının yarıda bırakılmasından kaynaklanan durumlar muhakeme eksiklikleri olarak değerlendirilmiştir. Bu durumlar muhakeme hatasından ziyade doğru bir muhakeme ile başlanması ancak bazı matematiksel bilgi eksikliklerine bağlı olarak ispatın istenilen şekilde tamamlanmamasıdır. 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının hem MHBT1 hem de MHBT2' de sahip oldukları muhakeme eksiklikleri verilerini gösteren Tablo 13 incelendiğinde her iki açık uçlu sınavda da öğretmen adaylarının benzer muhakeme eksikliklerine sahip olduklarından söz edilebilir. Ancak muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergeler yoğunluk açısından MHBT1 ve MHBT2'de farklılık göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME2 göstergesi MHBT1'de en yüksek frekans $f_1=46$ ve %24,2 yüzdeye sahiptir. Buna karşın bu gösterge MHBT2'de $f_2=25$ ve %16,6 yüzdeyle nispeten daha düşük bir oranda olduğu görülmektedir. Dolayısıyla 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayları MHBT1'de ispata başlama veya başlanan bir ispatı devam ettirememesi açısından daha fazla yoğunlukta olduklarından söz edilebilir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME3 göstergesi MHBT1 ve MHBT2' en yüksek frekans $f_1=38, f_2=20$ ve yüzdeye sırasıyla %20,%20 sahiptir. Ancak MHBT2'de düşük oranda da olsa bir düşüş söz konusudur. Bu durum öğretmen adaylarının ispat sürecinde tanım aralığını dikkate almama muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen durumlar açısından her iki açık uçlu sınavda da yoğunlukta olduğu düşünülebilir. Muhakeme eksikleri boyutunda yer alan ME8 göstergesi benzer şekilde hem MHBT1'de hem de MHBT2'de yüksek frekans $f_1=25, f_2=25$ ve yüzdeye sırasıyla %13,%16,6 sahiptir. Dolayısıyla 1.sınıf öğretmen adayları ispat sürecinde iki yönlü koşullu bir önermenin ispatı yaparken her iki tarafın incelenmesi gerektirdiği durumlarda sadece bir taraftan inceleyerek ispatın yapmışlardır. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME6 göstergesi hem MHBT1 hem MHBT2'de bu kategorideki diğer göstergelere nispeten yüksek frekans $f_1=32, f_2=25$ ve yüzdeye sırasıyla %16,8,%16,6 sahiptir. Her iki açık uçlu sınavda da 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ME6 göstergesi açısından birbirine oldukça yakın oranlarda bu muhakeme eksikliğine sahip olduklarından söz edilebilir. Bu durum öğretmen adaylarının matematik dilini kullanmada yetersizlik, ispat adımlarında matematiksel sembol, tanım veya teorem gibi ifadelerinin kullanımında matematik diline dikkat etmeme olarak nitelendirilen muhakeme eksikliği bağlamında dikkate değer bir oranda sahip oldukları düşünülebilir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME1 göstergesi MHBT1'de frekans $f_1=17$ ve

%8,9 yüzdeyle ve MHBT2'de frekans $f_1=10$ ve %6 yüzdeyle farklı yoğunlukta ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla ispat sürecinde yöntemsel eksiklik açısından bir değişim söz konusudur. MHBT2'de 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayları yöntemsel eksiklik olarak nitelendirilen durumlar bakımından MHBT1'e göre daha düşük oranda bu muhakeme eksikliğine sahip oldukları düşünülebilir. MHBT1 ve MHBT2'ye yönelik hazırlanan tablodaki veriler incelendiğinde her iki açık uçlu sınavda da muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME5 ve ME7 göstergeleri diğer göstergelere nispeten daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Dolayısıyla 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı veya ispat yapmada sistematikliğin olmaması açısından daha düşük oranlarda muhakeme eksikliklerine sahip oldukları düşünülebilir.

Muhakeme boşlukları; ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmayarak ispatın tamamlanması gibi durumları içermektedir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergeler hem MHBT1 hem de MHBT2 için ayrı ayrı incelendiğinden MB2 göstergesi her iki açık uçlu sınavda da en yüksek frekans $f_1 =25$, $f_2 =14$ ve yüzdeye sırasıyla %41,2, %45,2 sahiptir. Dolayısıyla 1. Sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının yaklaşık olarak yüzde ellisi ispat sürecinde kullandıkları önermeleri gerekçelendirmeden ispatları belli ezber kalıplar ile yapmaya çalıştıkları veya ispat adımlarında kullanılan önermelerin veya ortaya atılan iddiaların bir gerekçeye dayandırmadan geçersiz ispatlar oluşturdukları düşünülebilir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB1 göstergesi MHBT1'de frekans $f_1=18$ ve %34,5 yüzdeyle ortaya çıkarken buna karşın MHBT2'de frekans $f_1=10$ ve %32,5 yüzdeyle ortaya çıkmıştır. Bu durum yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması olarak nitelendirilen muhakeme boşluğu bakımından MHBT2' de MHBT1'e göre değişim göstererek daha düşük oranda ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayları matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken elde sonucun önceki adımlara dayandırılmasına rağmen bu adımlar arasında bir ilişkinin olmaması açısından ikinci açık uçlu sınavda daha az yoğunlukta olduklarından söz edilebilir. MHBT1 ve MHBT2'nin verileri incelendiğinde 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB3 ve MB4 göstergeleri hem MHBT1 hem de MHBT2' göre farklılık göstermekle birlikte bu boyutta diğer göstergelere nispeten daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum 1.sınıf öğretmen adaylarının ispatta ara aşamaların göz ardı edilmesi yani ispatta yazılması gereken bazı adımların atlaması ve ispatta gereksiz adımlara veya ifadelere yer verme açısından daha düşük oranlarda olduklarından söz edilebilir.

Güz dönemi ders gözlemleri öncesi yapılan MHBT1 ve gözlem sonrası yapılan MHBT2'de 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının benzer muhakeme hatalarına, muhakeme eksikliklerine veya muhakeme boşluklarına sahip oldukları ve bu göstergelerinin yoğunlukları her iki açık uçlu sınava göre değişim gösterdiği görülmektedir. Bununla birlikte muhakeme hataları, eksiklikleri ve boşlukları boyutlarında yer alan kategoriler incelendiğinde MHBT1'e göre bazı göstergelerde frekans ve yüzdeler bakımından bir azalmanın olduğu göze çarpmaktadır. 1.sınıf öğretmen adaylarının gözlem öncesinde ve gözlem sonrasında yapılan MHBT1 ve MHBT2'de sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından iki açık uçlu sınav arasındaki değişimi gösteren Grafik 5 aşağıda sunulmuştur.



Grafik 5. Ders gözlemleri öncesinde ve sonrasında 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması

Grafik incelendiğinde 1.sınıf öğretmen adaylarının muhakeme hataları boyutunda yer alan MH7 göstergesinin MHBT1'de büyük bir çoğunluğa sahip olduğu görülmektedir. Bu bakımdan MH7 kategorisine yönelik yapılan muhakeme hatası açısından MHBT1 ve MHBT2 açık uçlu sınavlar arasında oldukça büyük bir fark söz konusudur. Bu durum 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2'ye göre MHBT1'de ispat yaparken daha fazla sayısal değerler kullanmak veya sadece birkaç durumdan hareketle ispatın tamamlandığı durumların çoğunlukta olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte MH7 göstergesi önemli bir oranda düşüş göstermesine rağmen MHBT2'de bu göstergeye yönelik durumlar göze çarpmaktadır. MH1 göstergesine yönelik durumlar, her iki açık

uçlu sınavda da yüksek oranlarda olduğu görülmekle birlikte bu durumlara yönelik çoğunluğun MHBT2'e ait olduğu fark edilmektedir. Bu durum, 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde sonuç ile başlama muhakemesi olarak değerlendirilen durumlar bakımından MHBT2'de daha fazla muhakeme hatasına sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme hataları boyutları kategorisinde yer alan MH6 göstergesi bu boyutta göze çarpan başka bir muhakeme hatası olduğu görülmektedir. MHBT1 ve MHBT2'de bu göstergeye yönelik oranlarda bir fark söz konusudur. Her iki açık uçlu sınav arasında karşılaştırma yapıldığında 1 sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2'de ispat yaparken bir teoremin karşıt tersinin kendisinin dengi olduğunun farkına varamama muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar bakımından daha fazla sahip olduklarını göstermektedir. MH4 ve MH5 göstergeleri hem MHBT1 hem MHBT2'de muhakeme hataları boyutunda en düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Bu durum, 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayları hem MHBT1'de hem de MHBT2'de aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılma ve aşırı genelleme muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar bakımından diğer göstergelere nispeten daha düşük oranlarda sahip oldukları düşünülmektedir.

Ortaöğretim matematik öğretmenliği programında yürütülen ispata yönelik güz dönemi ders gözlemleri sonrası yapılan MHBT2 verileri göz önüne alındığında 1.sınıf öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından genel olarak bir düşüş söz konusudur. Bununla birlikte bazı kategorilerde benzer şekilde öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları MHBT2'de ön plana çıkmaktadır. Sonuç ile başlama muhakeme hatası MHBT1'de %11,3 iken MHBT2'de %26,5 olarak ortaya çıkmıştır. 1.sınıf seviyesinde yer alan B12 kodlu öğretmen adayının MHBT2'de yapmış olduğu ispat MH1 muhakeme hatası olarak değerlendirilmiştir. Bu durum Şekil 39'da örnek olarak sunulmuştur.

<p>S2: a ve $b \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $a > b > 0$ ise $\frac{b+1}{b} > \frac{b}{a}$ olduğunu gösteriniz.</p> $\frac{b+1}{b} = \frac{b}{b} + \frac{1}{b} > \frac{b}{b} > b \cdot \frac{1}{b} > b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a}$ <p>($a > b \rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$)</p>
--

Şekil 39. MH1 göstergesine yönelik ispat örneği

1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayının MHBT1'in 2. sorusuna ilişkin yapmış olduğu işlemler incelendiğinde ispatlanması gereken matematiksel ifade olan $\frac{b+1}{b} > \frac{b}{a}$ üzerinden çeşitli işlemler yaparak doğruluğu ilk başta kabul edilen matematiksel ifadeye yani $a > b > 0$ ifadesine tekrar ulaşmıştır. 1.sınıf öğretmen adayı, doğruluğu ön koşul olarak kabul edilen $a > b > 0$ matematiksel ifadeyi kullanarak sonuç olarak verilen $\frac{b+1}{b} > \frac{b}{a}$ matematiksel ifadesini ispatlamak yerine bu ifadenin geri dönüşümlü adımlarını göstermiştir ve bu yaptıklarını ispat olarak değerlendirmiştir. Bütün bu durumlar incelenerek ve ilgili 1.sınıf öğretmen adayı ile yapılan mülakatlar sonucunda öğretmen adayının ispat sürecinde yapmış olduğu muhakeme hatası, sonuç ile başlama muhakeme hatası olarak belirlenmiştir.

Muhakeme hataları boyutunda yer alan göstergelerden yanlış varsayım ile başlama muhakeme hatası (MH2) ise MHBT2'de dikkate değer bir oranda artmakla birlikte bu boyutta en fazla ortaya çıkan muhakeme hatalarından biridir. 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2'ye yönelik ispatları incelendiğinde yanlış varsayım ile başlama muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlarının ispat sürecinde yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum Şekil 40'da örnek olarak sunulmuştur.

S6: a, b ve c gibi üç doğal sayıdan ; "a sayısı hem b sayısını hem c sayısını tam bölüyorsa a sayısı b+c sayısını tam böler." ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{a}{b+c} \longrightarrow \frac{a}{b+c} = \frac{a}{\frac{a}{k} + \frac{a}{k}} = \frac{a}{\frac{2a}{k}} = \frac{a \cdot k}{2a} = \frac{k}{2} = c$$

$\frac{a}{b} \Rightarrow a = b \cdot k$ 'dir. $\rightarrow b = \frac{a}{k}$
 $\frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot k$ 'dir. $\rightarrow c = \frac{a}{k}$

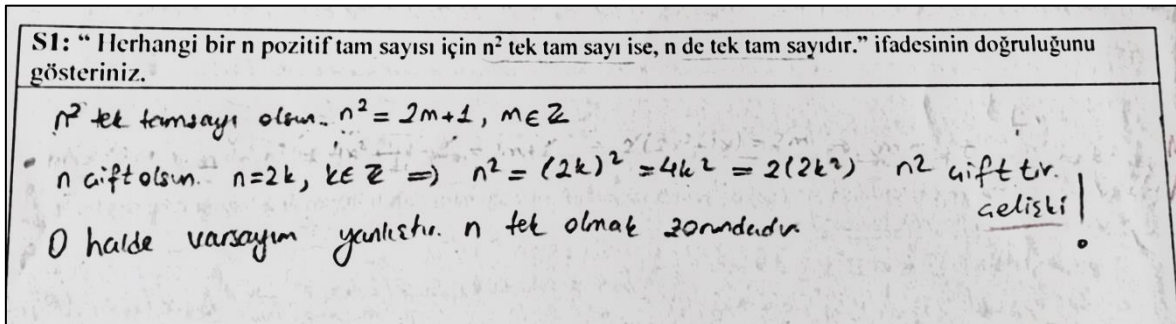
yerine yazılırsa $\frac{a}{b+c} = c$ 'dir

Şekil 40. MH2 göstergesine yönelik ispat örneği

1. sınıf seviyesinde yer alan B15 kodlu öğretmen adayının MHBT1'in 6. sorusuna ilişkin yapmış olduğu ispat incelendiğinde öğretmen adayının matematiksel tanımları yanlış algıladığı fark edilmektedir. Bunun sonucunda ise ispat yaparken yanlış varsayım ile hareket ettiği görülmektedir. 1.sınıf öğretmen adayı, "a, b ve c gibi üç doğal sayıdan a sayısı, hem b sayısını hem c sayısını tam bölüyorsa a sayısı b + c sayısını tam böler." şeklindeki matematiksel ifadenin ispatını yaparken $a=b \cdot k$ ve $a=c \cdot k$ şeklinde alarak a sayısının hem b sayısının hem de c sayısının katı olarak düşünmüştür. Başka bir deyişle a böler b ve a böler c ifadesinin yerine b böler a ve c böler a olarak algılamıştır. Öğretmen adayı soruda ilgili matematiksel ifadenin tanım aralığına dikkat etmemekle birlikte matematiksel bir tanımları doğru kullanmayarak yanlış varsayım ile başlama muhakeme

hatasını yapmıştır. Bu tanımlamalardan hareketle matematiksel olarak bu soru için geçerli olmayan bir ispat yapmıştır. 1.sınıf öğretmen adayının ispat sürecinde yapmış olduğu işlemler dikkate alındığında bu durum, yanlış varsayım ile başlama muhakeme hatası olarak değerlendirilmiştir.

Muhakeme hataları boyutunda yer alan göstergelerden MH6, her iki açık uçlu sınavda da bu boyutta yoğunlukta olmakla birlikte MHBT2’de daha fazla yoğunlukta olduğu fark edilmektedir. 1.sınıf seviyesinde öğretmen adaylarının MHBT1’ne ilişkin cevapları incelendiğinde teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması olarak nitelendirilen durumların ikinci açıklı uçlu sınavda dikkate değer oranda olduğu görülmektedir. Bu durum Şekil 41’de örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 41. MH6 göstergesine yönelik ispat örneği

1. sınıf seviyesinde yer alan B9 kodlu öğretmen adayının MHBT2’nin 1. sorusuna ilişkin yapmış olduğu ispat incelendiğinde matematiksel bir ifadenin ispatında kullanılan ispat yöntemlerini tam anlamıyla bilmediği ve ispat yöntemlerini karıştırdığı görülmektedir. İspat sürecinde matematiksel bir ifadenin ispatının doğrudan ispatlanması zor olduğu durumlarda bu ifadenin dengi olan karşıt tersinin kullanılması tercih edilen ispat yöntemlerinden biridir. Dolayısıyla 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı böyle bir yöntemi uygulamaya çalışmıştır. Ancak öğretmen adayı başka bir ispat yöntemi olan çelişki yöntemi ile karıştırarak elde edilen sonucu yanlış bir şekilde yorumlamıştır. 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayının yapmış olduğu bu muhakeme hatasının, bir teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varamama olarak değerlendirilmiştir.

Muhakeme hataları boyutunda yer alan göstergelerden özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7) göstergesi, MHBT2’ de önemli bir oranda azalmakla birlikte bu boyutta yoğunlukta olan bir muhakeme hatası olarak göze çarpmaktadır. 1.sınıf öğretmen adaylarının MHBT2’ye ilişkin cevapları incelendiğinde özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi olarak nitelendirilen

durumların MHBT1'e göre daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Bu duruma örnek olarak 1.sınıf seviyesinde yer alan B3 kodlu öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 42'de sunulmuştur.

S3: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $4^n - 1$ ifadesinin 3 ile tam bölünebildiğini gösteriniz.

$$4^n - 1 = 3k$$

$$4^n = 3k + 1$$

n=1 için $4 = 3 + 1$
n=2 için $16 = 3 \cdot 5 + 1$
n=3 için $64 = 3 \cdot 21 + 1$
 \vdots

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $4^n - 1$ 3 ile tam bölünür

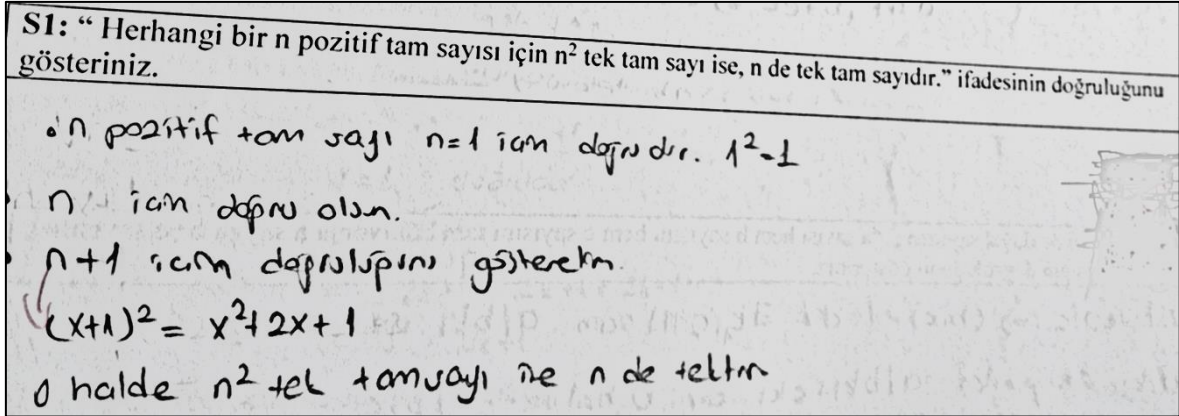
Şekil 42. MH7 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT2'in 3. sorusuna ilişkin yapmış olduğu işlemler incelendiğinde verilen bir matematiksel ifadenin doğruluğunu sadece özel bir durumla ya da birkaç sayısal değer deneyerek ispatının yapılabileceğini düşünmüştür. Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlanan " $\forall n \in \mathbb{N}$ için $4^n - 1$ ifadesinin 3 ile tam bölünebildiğini gösteriniz." ispatlanması istenen bu soruda matematiksel ifadede $n=1$, $n=2$, $n=3$ gibi sayısal değerleri deneyerek ispatı tamamlandığını düşünmüştür. Matematiksel ifadesinin doğruluğunu göstermek için n 'e birkaç tane daha sayısal değer vererek ispat için yeterli işlemleri yaptığı düşüncesine kapılmıştır. Bu sonucun bütün doğal sayılar kümesini kapsayacağını ve ifadenin ispatı için yeterli olacağını düşünmüştür. 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayının sadece özel bir durumdan hareketle bu matematiksel ifadenin her doğal sayı için geçerli olabileceğini düşünmesi özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi muhakeme hatasına düştüğünü göstermektedir.

Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergeler incelendiğinde MHBT1 ve MHBT2'de benzer göstergelerin ön plana çıktığı görülmektedir. Bununla beraber her iki sınav arasında göstergelerin oranlarında bir farklılaşma söz konusudur. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME2 göstergesi her iki açık uçlu sınavda da en yüksek oranda ortaya çıkmakla birlikte MHBT2'de bu göstergeye yönelik durumların daha düşük olduğu görülmektedir. Bu durum, 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2'de ispatları boş bırakma veya başlanan ispatları devam edememe bakımından daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. ME3 göstergesi muhakeme eksiklikleri boyutunda MHBT1 ve MHBT2'de dikkate değer oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir.

Bununla birlikte tanım aralığına dikkat edememe açısından MHBT1’de öğretmen adaylarının daha yoğunlukta olduğundan söz edilebilir. Bu durum, öğretmen adaylarının MHBT2’de ispat yaparken ilgili matematiksel ifadenin tanımlı olduğu aralığa daha fazla dikkat ettiklerini göstermektedir. Her iki açık uçlu sınavda da muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME göstergesi bezer şekilde dikkate değer bir oranda olduğu göze çarpmaktadır. Bununla beraber yöntemsel eksiklik olarak nitelendirilen durumların MHBT1’de daha yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde kullanılacak en uygun ispat yöntemini seçmede MHBT1’de daha fazla sıkıntı yaşadıklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME6 göstergesi hem MHBT1 hem MHBT2’de yüksek bir oranda ortaya çıkmakla birlikte MHBT2’de bu yoğunluğun MHBT1’e göre daha düşük olduğu görülmektedir. Bu durum, 1.sınıf öğretmen adaylarının matematik dilini kullanmada yetersizlik veya ispat adımlarında matematiksel sembol, tanım ve teorem gibi ifadelerinin kullanımında matematik diline dikkat edememe bakımından MHBT2’ de daha az yoğunlukta olduklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME8 göstergesi MHBT1 ve MHBT2’de birbirine oldukça yakın oranlarda olduğu görülmektedir. Dolayısıyla 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayları her iki açık uçlu sınavda da iki yönlü koşullu bir önermenin ispatı yaparken her iki tarafın incelenmesi gerektirdiği durumlarda sadece bir taraftan inceleyerek ispatlarını tamamladıkları fark edilmektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergeler içerisinde hem MHBT1 hem MHBT2’de bu boyutta yer alan ME5 ve ME7 göstergeleri diğer göstergelere nispeten daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Bu durum 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı veya ispat yapmada sistematikliğin olmaması açısından daha düşük oranlarda muhakeme eksikliklerine sahip olduklarını göstermektedir.

Ders gözlemleri sonrası yapılan MHBT2 verileri göz önüne alındığında muhakeme eksiklikleri boyutunda 1.sınıf öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme eksiklikleri bakımından genel olarak bir düşüştten söz edilebilir. Bununla birlikte bazı göstergelerin oranları MHBT1 ile benzer yoğunlukta olduğu MHBT2’de ön plana çıkmaktadır. 1.sınıf seviyesinde yer alan B7 kodlu öğretmen adayının MHBT2’de 1.soruda yapmış olduğu ispat incelendiğinde ME1 muhakeme eksikliği olarak değerlendirilmiştir. Bu durum Şekil 43’te örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 43. ME1 göstergesine yönelik ispat örneği

1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayının MHBT2'inin 1. sorusuna yönelik yapmış olduğu işlemler incelendiğinde ispat sürecinde matematiksel bir ifadenin ispatını yapmak için tercih ettiği ispat yönteminin bu soru için uygun olmadığı fark edilmektedir. Dolayısıyla öğretmen adayının ispatta yapmış olduğu işlemlere yönelik izlenen adımlar incelendiğinde ilk önce tümevarım ispat yöntemini kullanmak istemiştir. Ancak sonraki adımlarda tümevarım ispat yönteminin doğru uygulanmadığı görülmektedir. Öğretmen adayı tümevarım için ilk iki adımını "n=1 için doğru ve n için doğru olsun, n+1 için doğruluğunu gösterelim" şeklinde doğru bir başlangıç yapmasına rağmen devamında $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ şeklinde ilk adımlardan bağımsız bir ifade yazarak ifadenin doğruluğunu gösterdiğini düşünmüştür. 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatta öğretmen adayı bunun sebebinin ispat yöntemlerini hatırlamadığını sadece genelde tümevarım ispat yöntemini kullandığını belirtmiştir.

Araştırmacı: birinci soruda yapmış olduğun ispatın yeterli olduğunu düşünüyor musun?

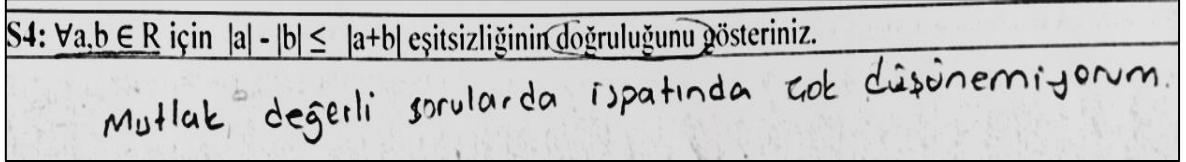
B7: Aslında emin değilim sanki biraz daha açmam gerekiyordu tümevarımı öyle uygulanıyordu diye biliyorum.

Araştırmacı: bu soruda tümevarım ispat yöntemini uygulamaya çalışmışsın sence bu soru için bu ispat yöntemi uygun mu?

B7: yani genelde bu tür sorularda tümevarım uygulanır diye biliyorum. Ama şimdi çok doğru gibi görünmüyor galiba yanlış gibi. Hocam unuttum ben onları birinci dönem gördük aklıma bi bu geldi onu da tam hatırlayamadım...

Öğretmen adayı bu durumun farkına varmadan bu soru için geçerli olmayan bir ispat yöntemini kullanmıştır. Bu ispatta 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayının uygun bir ispat yöntemini kullanmayarak yöntemsel bir eksiklik yapmış olduğu belirlenmiştir.

İspat sürecinde 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip olduğu muhakeme eksikliklerine yönelik MHBT2'nin verileri incelendiğinde bu boyutta yer alan göstergelerden ME2'nin yoğunlukta olduğu fark edilmektedir. Öğretmen adaylarının ispata nasıl başlayacağına karar verememe muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen durumların yüksek oranlarda olduğu görülmektedir. Bu duruma örnek olarak 1. sınıf seviyesinde yer B10 kodlu öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 44'te sunulmuştur.



Şekil 44. ME2 göstergesine yönelik ispat örneği

1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayının MHBT2'in 4. sorusuna yönelik vermiş olduğu cevap incelendikten sonra öğretmen adayı ile klinik mülakat yapılmıştır. Öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatta öğretmen adayı :” hocam aslında bu ifadenin doğru olduğunu düşünüyorum hatta bunu görmek için değer de verebiliriz ama değer vermek yok onun için yazmadım. Ve ben liseden beri mutlak değerli soruları hiç sevmiyorum ispatını da yapamam bilmiyorum hiç düşünemiyorum...” şeklinde belirtmiştir. Öğretmen adayının matematiksel ifadenin ispatı için uygun muhakemeler ileri sürdüğü örneğin özel birkaç değer ile ispatının yapılamayacağını bildiğine rağmen mutlak değer sorularına yönelik bir ön yargıya sahip olduğu düşünülmektedir. 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı matematiksel ifadenin ispatı için belli bir alt yapıya sahip olmasına rağmen ispatı yapmak için düşündüklerini yazıya aktarmamıştır. Bu durum ispat sürecinde ispata nasıl başlayacağına karar verememe veya ispata devam etmeme muhakeme eksikliği yaptığını göstermektedir.

İspat sürecinde tanım aralığını dikkate almama yani matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken bu ifade için uygun olmayan değerlerin kullanılması veya tanım aralığının dışına çıkmak olarak değerlendirilen ME3 muhakeme eksikliği ikinci açık uçlu sınavda yoğunlukta olduğu görülmektedir. 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2'ye ilişkin cevapları incelendiğinde tanım aralığına dikkat etmeme muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen durumların dikkate değer oranda olduğu fark edilmektedir. Bu duruma örnek olarak 1.sınıf seviyesinde yer alan B2 kodlu öğretmen adayının yapmış olduğu ispat şekil 45'te sunulmuştur.

S6: a, b ve c gibi üç doğal sayıdan ; "a sayısı hem b sayısını hem c sayısını tam bölüyorsa a sayısı b+c sayısını tam böler." ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

$$\begin{array}{l} a/b \quad a/c \quad a/b+c \\ b=ak \\ c=at \\ \hline b+c = a(k+t) \quad b+c = a \cdot n \Rightarrow a/b+c // \end{array}$$

Şekil 45. ME3 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT2'nin 6. Sorusunda yapmış olduğu ispat incelendiğinde öğretmen adayının matematiksel ifadenin ispatını yaparken bu ifade için belirtilen tanım aralığını dikkate almadığı görülmektedir. 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı başlangıçta $b=ak$ ve $c=at$ şeklinde tanımlayarak ispat için doğru bir başlangıç yapmasına rağmen "k ve t" değişkinin hangi sayı kümesine ait olduğunu belirtmemiştir. Dolayısıyla negatif sayılar, bazı rasyonel veya reel sayılar için soruda ön koşul olarak verilen " a, b, c doğal sayı" ifadesi ile çeliştiğini fark etmemiştir. Bu durum sorunun tanım aralığı için uygun olmadığından matematiksel ifadenin ispatı için geçerli değildir. Bu soruda yapılan muhakeme eksikliği; tanım aralığını dikkate almama olarak belirlenmiştir.

Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergelerden matematik dilini kullanmada yetersizlik olarak değerlendirilen ME6 göstergesi 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2'de ispat yaparken yoğun olarak sahip oldukları muhakeme eksikliklerinden biri olduğu göze çarpmaktadır. Öğretmen adaylarının MHBT2'e ilişkin cevapları incelendiğinde matematik dilini kullanmada yetersizlik muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen durumların farklı sorularda mevcut olduğu görülmektedir. Bu duruma örnek olarak 1.sınıf seviyesinde yer alan B11 kodlu öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 46'da sunulmuştur.

S8: "Eğer x bir rasyonel sayı ve y bir irrasyonel sayı ise $y-x$ bir irrasyonel sayıdır." Önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

$$\begin{array}{l} x = 0,0 \\ y = c, \bar{d} \\ y-x = c, \bar{d} - \frac{0}{10} \Rightarrow \frac{cd}{90} - \frac{0}{10} = \frac{cd-90}{90} \text{ ok.} \\ y-x \text{ irrasyondur.} \end{array}$$

Şekil 46. ME6 göstergesine yönelik ispat örneği

İspat sürecinde öğretmen adayının MHBT2'nin 8. sorusuna yönelik yapmış olduğu işlemler incelendiğinde matematik dilinin doğru bir şekilde kullanılmadığı fark edilmektedir. 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı matematiksel ifadenin ispatını yapmak için "rasyonel bir ifadeyi $x=0,a$ ve irrasyonel bir ifade için $y= c, d$ " şeklinde herhangi bir matematiksel dayanağı olmayan bir tanımlama yapmıştır. Yazdığı bu tanımlamalar üzerinde çeşitli işlemler yaparak sayısal ifadenin doğru olduğunu belirtmiştir. Dolayısıyla öğretmen adayının her devirli rasyonel sayıyı irrasyonel sayı olarak algıladığı matematiksel tanımları eksik kullanıldığı düşünülmüştür, 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayının ispat sürecinde ne kast ettiğini ve neden bu şekilde bir tanımlamaya gittiğini anlamak için ilgili öğretmen adayı ile klinik mülakat yapılmıştır. Klinik mülakatlar sonucunda öğretmen adayının matematik dilini yeteri derecede doğru kullanamadığı yazdığı ifadelere kendisinin de bir anlam veremediği anlaşılmıştır. Bu durumlar göz önünde bulundurulduğunda öğretmen adayının yapmış olduğu muhakeme eksikliği; matematik dilinin yetersiz kullanılması şeklinde belirlenmiştir.

İspat sürecinde 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının çift yönden ispatlanması gereken ispatları da tek taraflı ispatlar gibi düşünme ve karşıtlarının doğru olup olmadığını kontrol etmeden ispatları tamamlama olarak değerlendirilen ME8 göstergesi MHBT2'de yoğunlukta olduğu fark edilmektedir. 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2'ye ilişkin cevapları incelendiğinde ME8 muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen durumların yüksek oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir. Bu duruma örnek olarak 1. sınıf seviyesinde yer alan B4 kodlu öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 47'de sunulmuştur.

S5: $a, b \in \mathbb{Z}^+$, a, b tek sayıdır, ancak ve ancak a ve b nin her ikisi de tektir. önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

$$a, b = 2n+1 \leftrightarrow a \wedge b \text{ tektir. } (n, m \in \mathbb{N})$$

$$\Leftarrow a = 2n+1, b = 2m+1 \Rightarrow a \cdot b = (2n+1) \cdot (2m+1) = 4nm + 2n + 2m + 2$$

$$\Rightarrow a \cdot b = 2n+1$$

Şekil 47. ME8 göstergesine yönelik ispat örneği

1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayının MHBT2' nin 5. sorusuna ilişkin yapmış olduğu işlemler incelendiğinde iki yönlü koşullu önermenin her iki taraftan da ispatını yapması gerekirken sadece tek yönlü olarak ispatını yaptığı görülmektedir. Soruda verilen " a ve b pozitif tamsayıları için a, b tek sayıdır ancak ve ancak a ve b nin her ikisi de tektir." şeklinde matematiksel ifadenin ispatı için uygun bir girişimde bulunmasına rağmen

karşıtının doğru olup olmadığını da incelenmesi gerektiğini göz ardı etmiştir. Öğretmen adayı “ancak ve ancak” şeklinde verilen önermeyi sadece $a=2n+1$ ve $b=2m+1$ şeklinde iki tek tamsayıyı tanımlayarak tek yönde incelenmiştir. 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayının ispat sürecinde böyle bir adım izleyerek tek yönlü inceleme muhakeme eksikliğini yaptığı belirlenmiştir. Bununla birlikte öğretmen adayı, ilgili tanımlamada “n, m” sayılarının hangi sayı kümesine ait olduğunu belirtmemiştir. Bu durum, öğretmen adayının bu soruda ilgili matematiksel ifadesinin tanım aralığını da gözden kaçırdığını göstermektedir.

Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergeler incelendiğinde MHBT1 ve MHBT2’de benzer muhakeme boşluklarının birbirine yakın yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bununla birlikte MHBT2’ de düşük oranlarda olsa da bir düşünüş söz konusudur. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB2 her iki açık uçlu sınavda da bu boyutta en fazla ön plana çıkan göstergedir. Bununla beraber MHBT1 ve MHBT2 arasında bu göstergenin oranında bir farklaşma söz konusudur. Bu durum, 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde, ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmayarak ispatın tamamlanması açısından MHBT2’de daha az yoğunlukta olduklarını göstermektedir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB1 göstergesi MHBT1’de dikkate değer bir yoğunlukta iken MHBT2’de bu yoğunlukta bir düşünüş söz konusudur. Bu durum, 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması olarak nitelendirilen durumlar bakımından MHBT2’de daha düşük oranda olduklarını göstermektedir. Bununla birlikte 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının her iki açık uçlu sınavda da matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken elde edilen sonucun önceki adımlara dayandırılmama veya bu adımlar arasında bir ilişkinin olmaması muhakeme boşluğu olarak değerlendirilen durumlar açısından belli bir oranda sahip olduklarından söz edilebilir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB3 ve MB4 göstergeleri hem MHBT1 hem de MHBT2’ göre farklılık göstermekle birlikte bu boyutta diğer göstergelere nispeten daha düşük oranlarda düşük oranda ortaya çıkmıştır. Bu durum 1.sınıf öğretmen adaylarının ispatta ara aşamaların göz ardı edilmesi yani ispatta yazılması gereken bazı adımların atlaması ve ispatta gereksiz adımlara veya ifadelere yer verme açısından daha düşük oranlarda sahip olduklarından söz edilebilir.

MHBT2 verileri göz önüne alındığında muhakeme boşlukları boyutunda 1.sınıf öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme boşlukları bakımından genel olarak bir değişim söz konusudur. MHBT2’de muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergelerin oranları daha az yoğunluktadır. Bununla birlikte bazı göstergelerin oranları

MHBT1 ile benzer şekilde MHBT2’de yüksek oranda olduğu görülmektedir. 1.sınıf seviyesinde yer alan B5 kodlu öğretmen adayının MHBT2’nin 4.sorusunda yapmış olduğu ispat incelendiğinde MB1 muhakeme boşluğu olarak değerlendirilmiştir. Bu durum Şekil 48’de örnek olarak sunulmuştur.

S4: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $|a| - |b| \leq |a+b|$ eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.

$$a - b \leq a + b \xrightarrow{\text{Mutlak değer}} |a - b| \leq |a + b| \xrightarrow{+} |a| - |b| \leq |a| + |b| \leq |a + b|$$

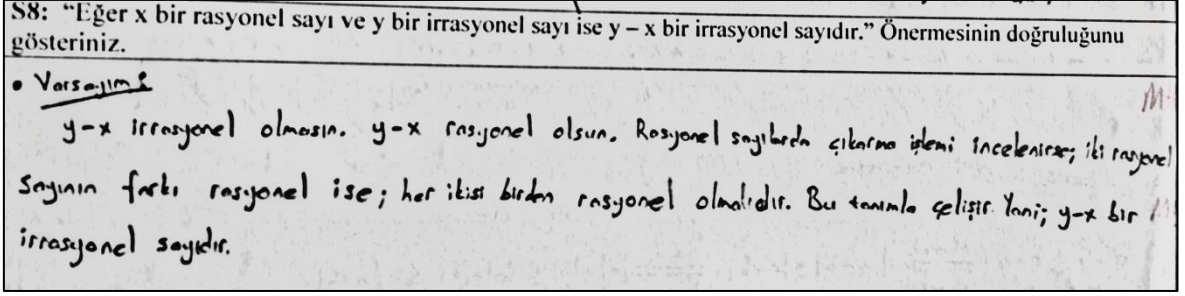
üçgen eşitsizliği

$$\xrightarrow{+} |a| - |b| \leq |a + b|$$

Şekil 48. MB1 göstergesine yönelik ispat örneği

İspat sürecinde 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayının MHBT2’nin 4. sorusuna ilişkin yapmış olduğu ispat incelendiğinde yazılan ispat adımları ile yazılan sonuç arasında bir uyumun bulunmadığı ve ispat adımları ile elde edilen sonucun uyuşmadığı görülmektedir. 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen aday birinci adımda “ $a - b \leq a + b$ ” şeklinde bir başlangıç yapmıştır. Devamındaki adımda ilk adım ile matematiksel olarak geçerli olmayan bir bağ oluşturmaya çalışmış ve “ $|a - b| \leq |a + b|$ ” şeklinde mutlak değer olarak işlemleri sürdürmüştür. Daha sonra herhangi bir gerekçe göstermeden bu adımlardan bağımsız olarak “ $|a| - |b| \leq |a| + |b| \leq |a + b|$ ” şeklinde bir ifade yazmıştır. En sonunda da üçgen eşitsizliğinden dolayı ifadenin doğru olduğunu belirtmiştir. Bu durum öğretmen adayının ispat istenilen matematiksel ifade için geçerli olmayan bir ispat oluşturması ile beraber ispat adımları arasında herhangi bir ilişkiden söz etmediğini göstermektedir. Bunun sonucunda yapılan muhakeme boşluğunun yazılan ispat adımları ile elde edilen sonucun uyuşmaması olarak değerlendirilmiştir.

İspat sürecinde oluşturulan ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmayarak ispatın tamamlanması gibi durumlar MB2 olarak değerlendirilmiştir. 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2’ye ilişkin cevapları incelendiğinde kullanılan önermelerin gerekçelerinin sunulmaması muhakeme boşluğu olarak nitelendirilen durumların çok yoğunlukta olduğu görülmektedir. 1.sınıf seviyesinde yer alan B17 kodlu öğretmen adayın MHBT2’de yapmış olduğu ispat Şekil 49’da örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 49. MB2 göstergesine yönelik ispat örneği

1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayının MHBT2'in 8. sorusuna ilişkin yapmış olduğu ispat incelendiğinde öğretmen adayının ispat sürecinde kullandığı önermelerinin herhangi bir gerekçesini göstermeden bazı matematiksel kuralların geçerliliğine dayandırarak ispat adımlarını yazdığı görülmektedir. İlgili soruda "Eğer x bir rasyonel sayı ve y irrasyonel sayı ise $y - x$ irrasyonel sayıdır" şeklindeki matematiksel ifadenin ispatı için öğretmen adayı " $y - x$ irrasyonel sayı olmasın " şeklinde soru için uygun bir başlangıç yapmıştır. Ancak ispatın devamında herhangi bir matematiksel gerekçe göstermeden "iki rasyonel sayının farkı rasyonel ise her ikisi de rasyonel sayı olmalıdır." şeklinde belirtmiştir. Dolayısıyla bu durumun da tanımla çelişeceği kanısına varmıştır. Bu soruda yapılan muhakeme boşluğu; kullanılan önermenin gerekçesinin sunulmaması olarak değerlendirilmiştir.

4. 3. 2. Güz Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 2. Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular

2. sınıf öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarını belirlemek amacıyla yapılan MHBT1 ve MHBT2 arasındaki değişim tablo ve grafiklerle sunulmuştur. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat yaparken yaptıkları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları boyutlarında yer alan her bir kategoriye ait göstergelere göre değerlendirilmesi sonucunda elde edilen frekans ve yüzde dağılımı Tablo 18'de sunulmuştur.

Tablo 18. Ders Gözlemleri Sonrası Muhakeme Süreci Boyutu Kategorilerine Göre Değerlendirilmesi ile İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımı

	MHBT1			MHBT2		
	Madde	f	%	Madde	f	%
MUHAKEME HATALARI	MH-1	20	31,7	MH-1	13	21,6
	MH-2	13	20,6	MH-2	10	16,6
	MH-3	4	6,3	MH-3	5	7,9
	MH-4	2	3,15	MH-4	2	3,1
	MH-5	3	4,7	MH-5	6	9,5
	MH-6	10	15,8	MH-6	14	23,3
	MH-7	11	17,4	MH-7	10	15,8
MUHAKEME EKSİKLİKLERİ	ME-1	15	9,52	ME-1	13	9
	ME-2	32	19,7	ME-2	25	17,4
	ME-3	49	30,2	ME-3	40	27,9
	ME-4	9	4,9	ME-4	8	5,5
	ME-5	1	1,2	ME-5	2	1,3
	ME-6	25	15,4	ME-6	20	13,9
	ME-7	6	3,7	ME-7	5	3,4
	ME-8	25	15,4	ME-8	30	20,9
MUHAKEME BOŞLUKLARI	MB-1	14	41,1	MB-1	10	35,7
	MB-2	16	47	MB-2	12	42,8
	MB-3	3	8,8	MB-3	4	14,2
	MB-4	1	2,9	MB-4	1	3,5

Tablo genel olarak incelendiğinde 2. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarını, muhakeme eksikliklerini ve muhakeme boşluklarını belirlemek amacıyla yapılan her iki açık uçlu sınavın verileri incelendiğinde muhakeme hataları boyutunda yer alan göstergeler bakımından MHBT1’de öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun $f=20$ ve $\%31,7$ en yüksek frekans ve yüzdeyle MH1 muhakeme hatasına sahip oldukları görülmektedir. Buna karşın yapılan MHBT2 ‘de bu muhakeme hatasına yönelik oranın $f=13$ ve $\%21,6$ frekans ve yüzdeyle düşüş gösterdiği görülmektedir. 2.sınıf öğretmen adayları MHBT1’de ispatları yaparken, ispatı istenilen matematiksel ifadeyi doğru kabul ederek bunun üzerinde çeşitli işlemler yaparak ispatları yapmaya çalışmışlardır. Ancak MHBT2’de bu düşüncenin belli bir oranda değiştiğinden söz edilebilir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH2 göstergesi MHBT1’de $f_1=13$ ve $\%20,6$ olarak yüksek bir oranda ortaya çıktığı göze çarpmaktadır. MH2 göstergesi, MHBT2’de benzer şekilde $f_2=10$ ve $\%16,6$ ile bu boyutta yer alan diğer göstergelere nispeten yüksek frekans ve yüzdeyle ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispat sürecinde yanlış varsayım ile başlama muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar açısından MHBT1’e göre MHBT2’de daha az yoğunlukta olduğu görülmektedir.

Bununla birlikte her iki açık uçlu sınavda da öğretmen adaylarının dikkate değer bir kısmının ispat sürecinde hüküm ile hipotez kavramlarını karıştırdığı göze çarpmaktadır. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH6 göstergesi hem MHBT1 hem MHBT2'de dikkate değer bir oranda ortaya çıkmıştır. Ancak MHBT1' de frekans $f_1=10$ ve %15,6 yüzdeyle ortaya çıkarken buna karşın MHBT2'de frekans $f_2=14$ ve %23,3 yüzdeyle artış gösterdiği görülmektedir. Bu durum, öğretmen adaylarının MHBT2'de ispatları yaparken bir teoremin karşıt tersinin kendisinin dengi olmasının farkına varama açısından daha fazla muhakeme hatası yaptıklarını göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH7 göstergesi hem MHBT1 hem MHBT2'de ön plana çıkan göstergelerden biridir. MH7 göstergesi MHBT1'de $f_1=11$ ve %17,4 yüzdeyle ortaya çıkarken MHBT2'de bu gösterge $f_2=10$ ve %15,4 benzer frekans ve yüzdeyle ortaya çıktığı görülmektedir. Yapılan her iki açık uçlu sınavda da muhakeme hataları boyutunda yer alan MH4 ve MH5 göstergeleri düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Bu durum, 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının hem MHBT1'de hem de MHBT2'de aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılma ve aşırı genelleme muhakeme hatası olarak değerlendirilen durumlar bakımından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

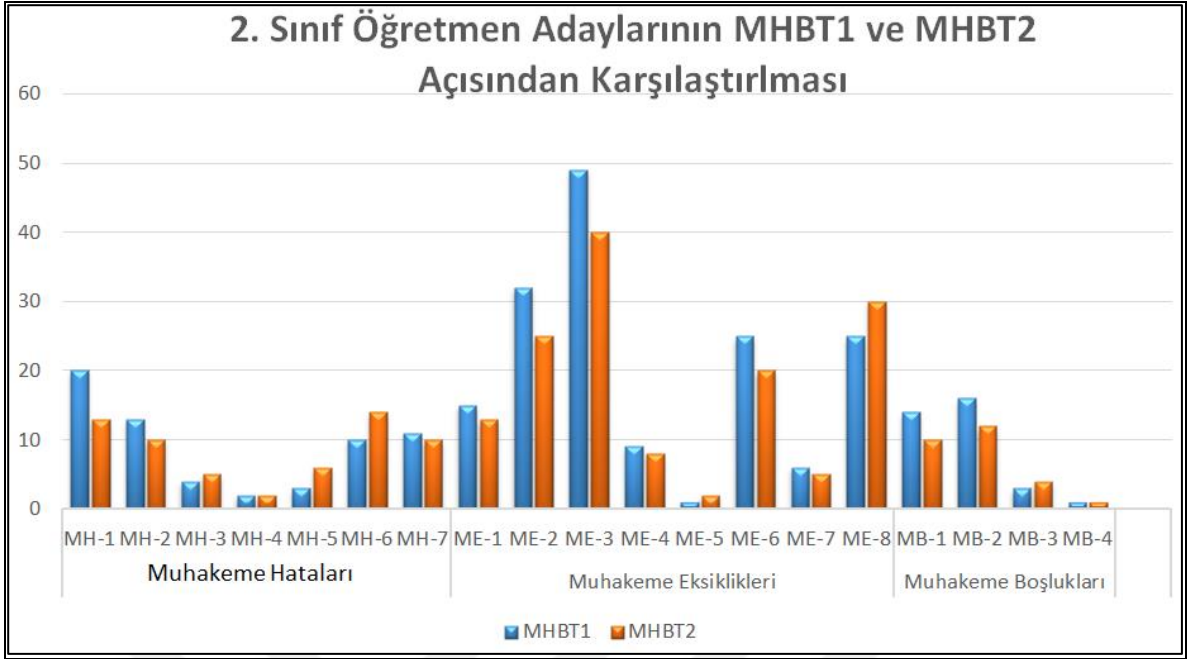
Öğretmen adaylarının ispat sürecinde yöntem, tanım aralığı, matematiksel dil gibi eksikliklerle ispatlarını tamamlamaları veya ispatlarını yarım bırakmalarından kaynaklanan durumlar muhakeme eksiklikleri olarak değerlendirilmiştir. Bu durumlar muhakeme hatasından ziyade doğru bir muhakeme ile başlanması ancak bazı matematiksel bilgi eksikliklerine bağlı olarak ispatın istenilen şekilde tamamlanmamasıdır. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1 ve MHBT2' de sahip oldukları muhakeme eksiklikleri verileri genel olarak incelendiğinde her iki açık uçlu sınavda da öğretmen adaylarının benzer muhakeme eksiklerine sahip olduklarından söz edilebilir. Bununla birlikte muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergeler yoğunluk açısından MHBT1 ve MHBT2'de değişim göstermektedir. Bu boyutta yer alan ME3 göstergesi MHBT1'de en yüksek frekans $f_1=49$ ve %30,2 yüzdeye sahiptir. Buna karşın bu gösterge MHBT2'de $f_2=40$ ve %27,9 yüzdeyle nispeten daha düşük bir oranda olduğu görülmektedir. Bu durum, 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1'de ispat sürecinde tanım aralığını dikkate almama muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen durumlar açısından daha fazla yoğunlukta olduklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME2 göstergesi hem MHBT1 hem MHBT2'de yüksek frekans $f_1=32, f_2=25$ ve yüzdeye sırasıyla %19,7, %17,4 sahiptir. Ancak MHBT2'de düşük oranda da olsa bir düşüş söz konusudur. Bu durum, öğretmen adaylarının her iki açık uçlu sınavda da ispata başlama veya ispatları devam edememe açısından yoğunlukta olduğunu göstermektedir. Muhakeme eksikleri boyutunda yer alan ME8 göstergesi benzer

şekilde hem MHBT1'de hem de MHBT2'de yüksek frekans $f_1=25, f_2=30$ ve yüzdeye sırasıyla %15,4,%20,9 sahiptir. Dolayısıyla 2.sınıf öğretmen adayları ispat sürecinde iki yönlü koşullu bir önermenin ispatı yaparken her iki tarafın incelenmesi gerektirdiği durumlarda sadece bir taraftan inceleyerek ispatları yapma açısından yoğunlukta olduklarından söz edilebilir. Muhakeme eksiklikler boyutunda yer alan ME6 göstergesi hem MHBT1 hem MHBT2'de bu kategorideki diğer göstergelere nispeten yüksek frekans $f_1=25, f_2=20$ ve yüzdeye sırayla %15,4,%13,9 sahiptir. Her iki açık uçlu sınavda da 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ME6 göstergesi açısından birbirine oldukça yakın oranlarda bu muhakeme eksikliğine sahip oldukları düşünülebilir. Bununla birlikte MHBT2'de bir düşünüş söz konusudur. Bu durum, öğretmen adaylarının matematik dilini kullanmada yetersizlik, ispat adımlarında matematiksel sembol, tanım veya teorem gibi ifadelerinin kullanımında matematik diline dikkat etmeme olarak nitelendirilen muhakeme eksikliği bakımından dikkate değer bir oranda sahip oldukları düşünülebilir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME1 göstergesi MHBT1'de frekans $f_1=15$ ve %9,2 yüzdeyle ve MHBT2'de frekans $f_1=13$ ve %9 yüzdeyle benzer yoğunlukta ortaya çıkmıştır. Bu durum ispat sürecinde 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının belli bir kısmı yöntemsel eksiklik olarak değerlendirilen muhakeme eksikliğine sahip olduklarını göstermektedir. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme eksikliklerini belirlemek amacıyla yapılan MHBT1 ve MHBT2'ye yönelik oluşturulan tablodaki veriler incelendiğinde her iki açık uçlu sınavda da muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME5 ve ME7 göstergeleri diğer göstergelere nispeten daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Bu durum, 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı veya ispat yapmada sistematikliğin olmaması olarak değerlendirilen durumlar bakımından daha düşük oranlarda muhakeme eksikliklerine sahip olduklarını göstermektedir.

İspat sürecinde, ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmayarak ispatın tamamlanması gibi durumlar muhakeme boşluğu olarak değerlendirilmektedir. 2.sınıf öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergeler hem MHBT1 hem de MHBT2 için ayrı ayrı incelendiğinden MB2 göstergesi her iki açık uçlu sınavda da en yüksek frekans $f_1 =16, f_2 =12$ ve yüzdeye sırasıyla %47, %42,2 olarak ortaya çıkmıştır. Bu durum 2. Sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının önemli bir kesimi ispat sürecinde kullandıkları önermeleri gerekçelendirmeden ispat yaptıklarını veya ispatları belli ezber kalıplar ile yapmaya çalıştıkları, ispat adımlarında kullanılan önermelerinin ve ortaya atılan iddiaların bir gerekçeye dayandırmadan geçersiz ispatlar oluşturduklarını göstermektedir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB1

göstergesi MHBT1'de frekans $f_1=14$ ve %41,1 yüzdeyle ortaya çıkarken buna karşın MHBT2'de frekans $f_1=10$ ve %35,5 yüzdeye sahiptir. Bu durum yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması muhakeme boşluğu olarak nitelendirilen durumlar bakımından MHBT2' de MHBT1'e göre bir değişim olmasına rağmen bu oranın düşük olduğu görülmektedir. Dolayısıyla 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken elde ettikleri sonucu önceki adımlara dayandırmalarına rağmen bu adımlar arasında bir ilişki kuramamaları açısından MHBT2'de daha az yoğunlukta olduklarından söz edilebilir. MHBT1 ve MHBT2'nin verileri incelendiğinde 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB3 ve MB4 göstergeleri hem MHBT1 hem de MHBT2' göre farklılık göstermelerine rağmen bu boyutta diğer göstergelere nispeten daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispatta ara aşamaların göz ardı edilme ya da ispatta yazılması gereken bazı adımların atlatılması ve ispatta gereksiz adımlara veya ifadelerle yer verme açısından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

İspata yönelik güz dönemi ders gözlemleri öncesi yapılan MHBT1 ve gözlem sonrası yapılan MHBT2'de 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının benzer muhakeme hatalarına, muhakeme eksikliklerine veya muhakeme boşluklarına sahip oldukları ve bu göstergelerinin yoğunlukları her iki açık uçlu sınava göre bir farklılık söz konusudur. Bununla birlikte muhakeme hataları, eksiklikleri ve boşlukları boyutlarında yer alan kategoriler incelendiğinde MHBT1'e göre genel olarak her bir boyutta göstergelerin frekans ve yüzdeler bakımından bir azalma gösterdiği görülmektedir. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının gözlem öncesinde ve gözlem sonrasında yapılan açık uçlu sınavlarda sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından MHBT1 ve MHBT2 arasındaki değişimi gösteren Grafik 6 aşağıda sunulmuştur.

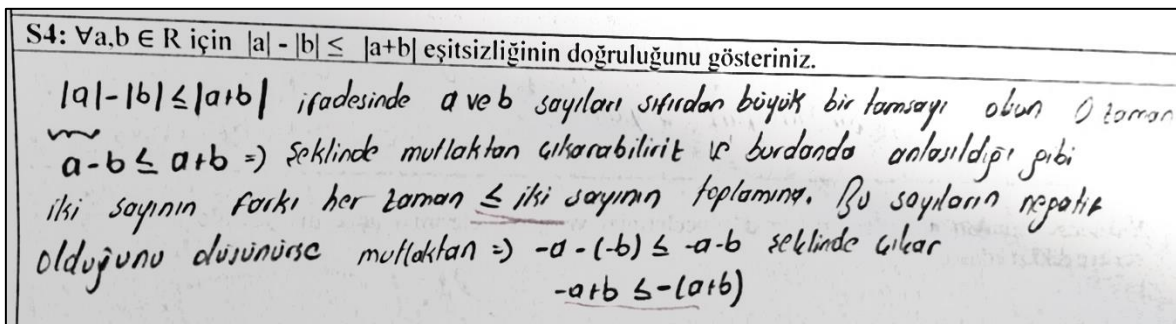


Grafik 6. Ders gözlemleri öncesinde ve sonrasında 2. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması

Grafik incelendiğinde muhakeme hataları boyutunda yer alan MH1 göstergesinin MHBT1’de daha fazla yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sonuç ile başlama muhakeme hatası olarak değerlendirilen durumlar açısından MHBT1 ve MHBT2 arasında bir fark söz konusudur. Dolayısıyla 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2’ye göre MHBT1’de ispat yaparken ilgili matematiksel ifadeyi doğru kabul edip bunun üzerinde çeşitli işlemler yaparak sonucun doğruluğunu göstermeyi ispat olarak düşünme açısından daha yoğunluktadır. MH2 göstergesine yönelik durumlar, her iki açık uçlu sınavda da yüksek oranlarda olduğu görülmekle birlikte bu durumlara yönelik çoğunluğun MHBT1’e ait olduğu fark edilmektedir. Bu durum, 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde yanlış varsayım ile başlama muhakemesi olarak değerlendirilen durumlar bakımından MHBT1’de daha fazla muhakeme hatasına sahip olduklarını göstermektedir. İspat sürecinde sadece birkaç sayısal değer verilerek ispatların yapılması olarak nitelendirilen MH7 hem MHBT1 hem MHBT2’de yüksek oranda ortaya çıkan göstergelerden biri olduğu göze çarpmaktadır. Bununla birlikte MH7 göstergesi MHBT2’de bir düşüş göstermiştir. Yani MHBT2’de 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayları ikinci açık uçlu sınavda ispat yaparken sayısal değerler vererek ispat yapmaya daha az eğilim göstermişlerdir. Muhakeme hataları boyutları kategorisinde yer alan MH6 göstergesi bu boyutta ön plana çıkan başka bir muhakeme hatası olduğu görülmektedir. MHBT1 ve MHBT2’de bu

göstergeye yönelik oranlarda bir farklaşma söz konusu olmakla birlikte her iki açık uçlu sınavda 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının belli bir yoğunlukta bu muhakeme hatasına sahip oldukları düşünülebilir. Bu durum, 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde bir teoremin karşıt tersinin kendisinin dengi olduğunun farkına varamama muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar bakımından belli bir yoğunlukta olduklarını göstermektedir. MH4 ve MH5 göstergeleri hem MHBT1 hem MHBT2'de muhakeme hataları boyutunda yer alan diğer göstergelere nispeten daha az yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının hem MHBT1'de hem de MHBT2'de aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılma veya aşırı genelleme muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar bakımından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

Ortaöğretim matematik öğretmenliği programında yürütülen ispata yönelik güz dönemi ders gözlemleri sonrası yapılan MHBT2 verileri göz önüne alındığında 2.sınıf öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları MHBT1'e göre genel olarak bir düşüş göstermektedir. Bununla birlikte bazı kategorilerde benzer şekilde öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları MHBT2'de de ön plana çıkmaktadır. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH1 göstergesi MHBT1'de %31,7 iken bu oran MHBT2'de %21,6 olarak ortaya çıkmıştır. 2. sınıf seviyesinde yer alan İ1 kodlu öğretmen adayının MHBT2'de yapmış olduğu ispat sonuç ile başlama muhakeme hatası olarak değerlendirilmiştir. Bu durum Şekil 50'de örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 50. MH1 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT2'nin 4. sorusuna ilişkin yapmış olduğu işlemler incelendiğinde öğretmen adayının ispat sürecinde ispatlanması gereken matematiksel ifadeyi doğru kabul ederek hareket ettiği görülmektedir. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı ispatlanması istenilen $|a| - |b| \leq |a + b|$ eşitsizliğinin üzerinde " a ve b sayıları sıfırdan büyük birer tamsayı olsun o zaman $a - b \leq a + b$ " şeklinde doğru olacağını ve benzer şekilde negatif tamsayılar için de doğru olabileceğini belirlemiştir. 2.

sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı, ispat sürecinde ilgili matematiksel ifadeyi ilk başta doğru kabul ederek bu matematiksel ifadenin geri dönüşümlü adımlarını göstermiştir ve bu yaptıklarını ispat olarak değerlendirmiştir. Öğretmen adayının yaptığı açıklama ve işlemler göz önüne alındığından öğretmen adayının ispat sürecinde yapmış olduğu muhakeme hatası, sonuç ile başlama muhakeme hatası olarak değerlendirilmiştir.

2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2'ye ilişkin ispatları incelendiğinde yanlış varsayımla başlama muhakeme hatası olarak nitelendirilen MH2 göstergesi ikinci açık uçlu sınavda da öğretmen adaylarının yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. 2.sınıf seviyesinde yer alan 19 kodlu öğretmen adayının ispat sürecinde yapmış olduğu yanlış varsayım ile başlama muhakeme eksikliği Şekil 51'de örnek olarak sunulmuştur.

S1: "Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 tek tam sayı ise, n de tek tam sayıdır." ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

• n bir pozitif tamsayı ise $n > 0$ ve n^2 tek tamsayı imiş ve n 'in tek tam sayı olup olmadığına bakmamız gerekiyor. İlk önce n 'in tek tamsayı olup daha sonra n^2 'nin tek tamsayı olma durumuna bakarız.

$n = 2k+1$ gibi keyfi bir sayı olsun ve bu sayı tek bir sayıdır.

$n^2 = (2k+1)^2$ olacalı

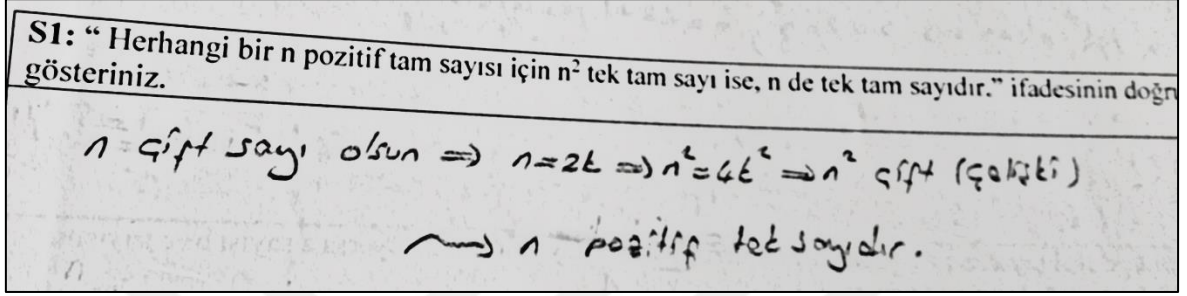
• $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$
 $= 4(k^2 + k) + 1$
 $= 2 \cdot 2(k^2 + k) + 1$
 Çift sayı + 1 = Tamamı tek sayıdır. O zaman n^2 de tek tir.

Şekil 51. MH2 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT2'nin 1. sorusuna ilişkin yapmış olduğu ispat incelendiğinde ispatı yapılması istenen matematiksel ifadede hipotez olarak verilen "Herhangi bir n pozitif tamsayısı için n^2 tek tamsayı ise" ile bu ifadenin bir sonucu olan " n de tek tamsayıdır" ifadelerini karıştırmış olduğu görülmektedir. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı ispat edilmesi istenilen ifade hipotez ile hükmü karıştırarak hükmü, hipotez olarak ele almış ve " $n=2k+1$ gibi keyfi bir sayı olsun ve bu sayı tektir." şeklinde tanımlamış daha sonra bu ifadenin karesini alarak işlemleri devam etmiştir. Çeşitli matematiksel işlemler sonucunda $n^2=2 \cdot 2(k^2+1)+1$ şeklinde soruda ön koşul olarak verilen ifadeyi tekrar elde etmiştir. İspat sürecinde 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı böyle bir yol izleyerek ispat için kullanacağı bilginin sonucu üzerine uğraşmıştır. İspat sürecinde yapılan bütün bu işlemler dikkate alınarak bu muhakeme hatası, yanlış varsayımla başlama muhakeme hatası olarak belirlenmiştir.

2. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları belirlenmeye yönelik yapılan MHBT2'nin verilerine yönelik muhakeme

hataları boyutunda yer alan MH6 göstergesinin bu boyutta yoğunlukta olduğu fark edilmektedir. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2’de yapmış oldukları ispatlar incelendiğinde teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması olarak nitelendirilen durumların dikkate değer oranda olduğu görülmektedir. 2. sınıf seviyesinde yer alan İ5 kodlu öğretmen adayının ispat sürecinde yapmış olduğu muhakeme hatası Şekil 52’de örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 52. MH6 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT2’nin 1. sorusuna yönelik yapmış olduğu ispat incelendiğinde öğretmen adayı soruda verilen "Herhangi bir n pozitif tamsayısı için n^2 tek tamsayı ise n de tek tamsayıdır" şeklindeki matematiksel bir ifadenin karşıt-terisi olan "n çift sayı ise n^2 çifttir" ifadesini kullanmaya çalışmıştır. Ancak ispatın devamında iki farklı yöntem olan çelişki bulma ispat yöntemi ile karşıt-ters kullanma ispat yöntemlerini beraber kullanmıştır. Dolayısıyla öğretmen adayının kullanılan ispat yöntemlerini doğru bir şekilde algılamadığı ve bunları uygun kullanmayarak ispat sürecinde karışıklık olduğu görülmektedir. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı başlangıçta matematiksel bir ifadenin ispatının doğrudan ispatlanması zor olduğu durumlarda bu ifadenin dengi olan karşıt tersinin kullanılması olarak bilenen bir yöneme yönelmiştir. Ancak öğretmen adayı bulduğu sonucu çelişki olarak değerlendirerek bir ifadenin karşıt-terisinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkında olmadığı algısı oluşturmuştur. Öğretmen adayının yapmış olduğu bu muhakeme hatası, bir teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması olarak belirlenmiştir.

MHBT2’de özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul etme muhakeme hatası olarak değerlendirilen MH7 göstergesi muhakeme hataları boyutunda 2. sınıf seviyesinde yer adaylarının sahip olduğu bir muhakeme hatası olarak ön plana çıktığı fark edilmektedir. 2.sınıf seviyesinde yer alan İ3 kodlu öğretmen adayının ispat sürecinde yapmış olduğu muhakeme hatası Şekil 53’de örnek olarak sunulmuştur.

S1: "Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 tek tam sayı ise, n de tek tam sayıdır." ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

$$n \geq 0 \Rightarrow n^2 \geq 0^2 = 0 \Rightarrow n^2 \geq 0$$

$$n^2 = 2k+1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow k=4 \text{ için } n^2 = 24+1$$

$$n^2 = 9$$

$$n = 3 \in \mathbb{Z} \text{ veya } n = -3 \in \mathbb{Z}$$

Şekil 53. MH7 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT2'nin 1. sorusuna ilişkin yapmış olduğu işlemler incelendiğinde öğretmen adayının verilen bir matematiksel ifadenin doğruluğunun sadece özel bir durumdan hareketle ya da sayısal değer vererek ispatını yapmaya çalıştığı görülmektedir. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı kendisine sunulan "Herhangi bir n pozitif tam sayı için n^2 tek tamsayı ise n de tek tamsayıdır." matematiksel ifadesinin ispatını yapmak için öncelikle hem tanım aralığının dışına çıkarak $n \geq 0$ olarak tanımlanma yaparak bir başlangıç yapmıştır. Bununla birlikte öğretmen adayı ispat adımlarının devamında $n=4$ alarak sayısal bir değer ile ispatı yapmıştır. Öğretmen adayı ispat sürecinde yaptığı işlemlerinin sorulan ifadenin ispatı için yeterli olabileceğini düşünmüştür. Öğretmen adayının sadece birkaç sayısal değerden hareketle bu ifadenin bütün pozitif tamsayılar için geçerli olabileceğini düşünmesi özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi muhakeme hatasına düştüğünü göstermektedir. Bununla beraber 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayının ispatını incelediğimizde yanlış bir varsayım ile soruya yaklaştığı fark edilmektedir. Bu durum ise yaptığı ispatta yanlış varsayımlarla başlama muhakeme hatasına da düştüğünü göstermektedir

2. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme eksikliklerine yönelik veriler incelendiğinde muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergeler bakımından MHBT1 ve MHBT2'de göstergelerin benzer yoğunlukta ön plana çıktığı görülmektedir. Bununla beraber her iki açık uçlu sınav arasında göstergelerin oranlarında bir farklılık söz konusudur. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME3 göstergesi her iki açık uçlu sınavda da en yüksek oranda ortaya çıkmakla birlikte MHBT2'de bu göstergeye yönelik durumların daha düşük olduğu görülmektedir. Bu durum, 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2'de ispatları yaparken ilgili matematiksel ifadenin tanımlı olduğu kümeye veya tanım aralığına daha fazla dikkat etiklerini göstermektedir. ME2 göstergesi muhakeme eksiklikleri boyutunda MHBT1 ve MHBT2'de dikkate değer oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir. Bununla birlikte ispatları boş bırakma veya başlanan ispatları devam edememe bakımından MHBT1'de 2.sınıf

öğretmen adaylarının daha yoğunlukta olduğundan söz edilebilir. Bu durum, öğretmen adaylarının MHBT2’de ispat yaparken ilgili matematiksel ifadenin ispatını yapmak için daha fazla uğraş gösterdiklerini göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME6 göstergesi hem MHBT1 hem MHBT2’de yüksek bir oranda ortaya çıkmakla birlikte MHBT2’de bu yoğunluğun MHBT1’e göre daha düşük olduğu görülmektedir. Bu durum, 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının matematik dilini kullanmada yetersizlik veya ispat adımlarında matematiksel sembol, tanım ve teorem gibi ifadelerinin kullanımında matematik diline dikkat edememe olarak nitelendirilen durumlar bakımından MHBT2’ de daha az yoğunlukta olduklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME8 göstergesi MHBT1 ve MHBT2’de bu boyutta yer alan diğer göstergelere nispeten daha yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bununla beraber her iki sınavda da bu göstergenin birbirine oldukça yakın oranlarda olduğu görülmektedir. Dolayısıyla 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayları hem MHBT1’de hem MHBT2’de de iki yönlü koşullu bir önermenin ispatı yaparken her iki tarafın incelenmesi gerektirdiği durumlarda sadece bir taraftan inceleyerek ispatlarını tamamladıkları düşünülebilir. Her iki açık uçlu sınavda da muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME1 göstergesi bezer şekilde muhakeme eksiklikleri boyutunda dikkate değer bir oranda olduğu göze çarpmaktadır. Bununla birlikte yontemsel eksiklik olarak nitelendirilen durumların MHBT1’de daha yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde kullanılacak en uygun ispat yöntemini belirlemek açısından MHBT1’de daha fazla sıkıntı yaşadıklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergeler içerisinde hem MHBT1 hem MHBT2’de bu boyutta yer alan ME5 ve ME7 göstergeleri diğer göstergelere göre daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Dolayısıyla 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı veya ispat yapmada sistematikliğin olmaması olarak nitelendirilen durumlar açısından daha düşük oranlarda muhakeme eksikliklerine sahip olduklarına söz edilebilir.

Ders gözlemleri sonrası yapılan MHBT2 verileri göz önüne alındığında muhakeme eksiklikleri boyutunda 2.sınıf öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme eksiklikleri bakımından genel olarak bir düşüştten söz edilebilir. Bununla birlikte bazı göstergelerin oranları MHBT1 ile benzer yoğunlukta olduğu MHBT2’de de göze çıkmaktadır. 2.sınıf seviyesinde yer alan İ7 kodlu öğretmen adayının MHBT2’nin 1.sorusunda yapmış olduğu ispat incelendiğinde ME3 muhakeme eksikliği olarak değerlendirilmiştir. Bu durum Şekil 54’te örnek olarak sunulmuştur.

S1: "Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 tek tam sayı ise, n de tek tam sayıdır." ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

$$n \in \mathbb{Z}^+ \quad n^2 = 2k+1 \quad \text{olsun}$$

$$\sqrt{n^2} = \sqrt{2k+1}$$

$$n = \underbrace{\sqrt{2k+1}}_{\text{tek}}$$

Şekil 54. ME3 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT2'nin 1. sorusunda matematiksel ifadenin ispatını yaparken bu ifade için belirtilen tanım aralığını dikkate almadığı görülmektedir. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı başlangıçta $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n^2=2k+1$ soruyu matematik diline uygun şekilde tanımlanmasına rağmen devamında tanım aralığının dışına çıktığı görülmektedir. Öğretmen adayının ispat sürecinde yaptığı İspatın aşamalarını incelediğimizde öğretmen adayının tanım aralığının dışına çıkarak herhangi bir pozitif sayısı için göstermesi gerekirken n değişkenini $n = \sqrt{2k+1}$, gibi tamsayı kümesinin dışına çıkmıştır. Bu durum sorunun tanım aralığı için uygun olmadığından matematiksel ifadenin ispatı için geçerli değildir. Bu soruda yapılan muhakeme eksikliği; tanım aralığını dikkate almama olarak belirlenmiştir. Bunun yanı sıra öğretmen adayının matematiksel ifadenin ispatı için sayısal değerler vererek ispat için yeterli olacağını düşünmesi bu soruda aynı zamanda özel bir durumun ispat olarak düşünme muhakeme hatasına da sahip olduğu düşünülmektedir.

Muhakeme eksikliği boyutunda matematik dilini kullanmada yetersizlik, ispat adımlarında matematiksel sembol, tanım veya teorem gibi ifadelerinin kullanımında matematik diline dikkat edilmeme olarak değerlendirilen ME6 göstergesi MHBT2'de yoğunlukta olduğu fark edilmektedir. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2'ye ilişkin ispatları incelendiğinde matematik dilini kullanmada yetersizlik muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen durumların yüksek oranlarda olduğu görülmektedir. Bu duruma örnek olarak 2.sınıf seviyesinde yer alan İ11 kodlu öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 55'te sunulmuştur.

S3: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $4^n - 1$ ifadesinin 3 ile tam bölünebildiğini gösteriniz.

$$4^n - 1 = 2^{2n} - 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } 2^{2n} - 1 = \underline{0(3)} \rightarrow 2^{2n} = 1(3)$$

$$\rightarrow 3 | 2^{2n} = 3 | 2^2 \cdot 2^n \rightarrow 3 | 2^2 \text{ ve } 3 | 2^n$$

$$\rightarrow 3 | 4 \text{ ve } 3 | 2^n .$$

Şekil 55. ME6 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT1'e 3 sorusuna yönelik yapmış olduğu işlemler incelendiğinde matematik dilinin doğru bir şekilde kullanılmadığı bazı matematiksel kurallarının yanlış kullandığı fark edilmektedir. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı matematiksel ifadenin ispatını yapmak için " $4^n - 1 = 2^{2n} - 1$ " şeklinde ilgili matematiksel ifadeyi matematik diline uygun olacak şekilde yazarak devamında bu ifadenin 3 ile tam bölünmediğini incelemeye çalışmıştır. Ancak ispatın devamındaki adımlarında " $3 | 2^{2n} = 3 | 2^2 \cdot 2^n$ " ise " $3 | 2^2$ ve $3 | 2^n$ " ise " $3 | 4$ ve $3 | 2^n$ " gibi herhangi bir matematiksel dayanağı olmayan bir tanımlama yapmıştır. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayının böyle bir tanımlamayı neye dayanarak yaptığı veya yazdığı sonuçla ne kast ettiğini anlamak için ilgili öğretmen adayı ile klinik mülakat yapılmıştır. Klinik mülakatlar sonucunda öğretmen adayının farında olmadan matematiksel bir kurallı yanlış kullandığı ve matematik dilini yeteri derecede doğru kullanamadığı yazdığı ifadelerle kendisinin de bir anlam veremediği anlaşılmıştır. Bu durumlar göz önünde bulundurulduğunda öğretmen adayının yapmış olduğu muhakeme eksikliği; matematik dilinin yetersiz kullanılması şeklinde belirlenmiştir.

Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergeler incelendiğinde MHBT1 ve MHBT2'de muhakeme boşluklarının benzer şekilde birbirine yakın yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bununla birlikte MHBT2' de bir düşünüş söz konusudur. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB2 MHBT1'de hem MHBT2'de bu boyutta en fazla ön plana çıkan göstergelerden biridir. Bununla beraber MHBT1 ve MHBT2 arasında bu göstergenin oranında bir değişim söz konusudur. Bu durum, 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde, ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmayarak ispatın tamamlanması olarak nitelendirilen durumlar açısından MHBT2'de daha az yoğunlukta sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB1 göstergesi MHBT1 ve MHBT2'de dikkate değer bir yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bununla birlikte MHBT2'de bu göstergenin yoğunluğundan bir düşünüş söz konusudur. Bu durum, 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması olarak değerlendirilen durumlar açısından

MHBT2' de daha düşük oranda sahip olduklarını göstermektedir. Ancak 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının her iki açık uçlu sınavda da matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken elde edilen sonucun önceki adımlara dayandırılmama veya bu adımlar arasında bir ilişkinin olmaması muhakeme boşluğu olarak değerlendirilen durumlar açısından belli bir oranda sahip oldukları düşünülebilir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB3 ve MB4 göstergeleri hem MHBT1 hem de MHBT2' de bu boyutta diğer göstergelere nispeten daha düşük oranda olduğu görülmektedir. Bu durum 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispatta ara aşamaların göz ardı edilmesi veya ispatta yazılması gereken bazı adımların atlaması ve ispatta gereksiz adımlara ve ifadelerle yer verme olarak değerlendirilen durumlar açısından daha düşük oranlarda sahip olduklarından söz edilebilir.

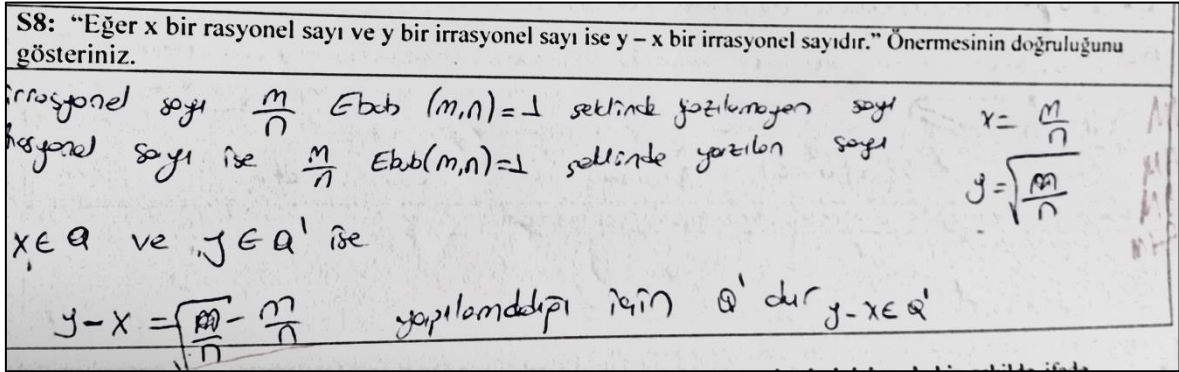
2. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme boşluklarına yönelik yapılan MHBT2 verileri göz önüne alındığında öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme boşlukları bakımından genel olarak bir değişim söz konusudur. MHBT2'de muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergelerin oranları MHBT1'e göre daha az yoğunlukta olduğu görülmektedir. Ancak bazı göstergelerin oranları MHBT1'de olduğu gibi MHBT2'de de benzer şekilde yüksek oranda olduğu görülmektedir. 2.sınıf seviyesinde yer alan İ5 kodlu öğretmen adayının MHBT2'nin 1.sorusunda yapmış olduğu ispat incelendiğinde bu durum MB1 muhakeme boşluğu olarak değerlendirilmiştir. Yapılan ispat Şekil 56'da örnek olarak sunulmuştur.

<p>S1: "Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 tek tam sayı ise, n de tek tam sayıdır." ifadesinin doğruluğu gösteriniz.</p> <p>n çift sayı olsun $\Rightarrow n=2k$ olsun $\Rightarrow n^2=2k \cdot 2k=4k^2$ \searrow çift sayıdır</p> <p>Herhangi bir pozitif tam sayı için n^2 tek sayı ise, n'de tek tam sayıdır.</p> <p> </p> <p>n çift sayı olduğunda, herhangi bir n pozitif tam sayı n^2'de çifttir.</p>

Şekil 56. MB1 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT2'nin 2. sorusuna ilişkin yapmış olduğu ispat incelendiğinde yazılan ispat adımları arasında bir uyumun bulunmadığı ve ispat adımları ile elde edilen sonucun uyuşmadığı görülmektedir. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen aday birinci adımda " n çift sayı ise $n=2k$ olsun ise $n^2=2k \cdot 2k=4k^2$ çift sayıdır." Şeklinde soruda verilen ifadenin karşıt-tersini yazarak ispat için uygun bir başlangıç yapmasına

rağmen devamında yazdığı ifadeler bakıldığında önermeyi herhangi matematiksel gerekçeye dayandırmadan ve adımlar arasında bir ilişki kurmayarak bir sonuç yazmıştır. Yapılan işlemler için yeterli olmamakla birlikte bu ifadeler arasında bir bağ kurulmadığı düşünülmektedir. Bunun sonucunda yapılan muhakeme boşluğunun yazılan ispat adımları ile elde edilen sonucun uyuşmaması olarak değerlendirilmiştir.



Şekil 57. MB2 göstergesine yönelik ispat örneği

4. 3. 3. Güz Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 3.Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular

3. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1 ve MHBT2'de yaptıkları ispatların muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları boyutlarında yer alan her bir kategoriye ait göstergelere göre değerlendirilmesi sonucunda elde edilen frekans ve yüzde dağılımı Tablo 19'da sunulmuştur.

Tablo 19. Ders Gözlemleri Sonrası Muhakeme Süreci Boyutu Kategorilerine Göre Değerlendirilmesi ile İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımı

	MHBT1			MHBT2		
	Madde	f	%	Madde	f	%
MUHAKEME HATALARI	MH-1	22	24,7	MH-1	25	32,4
	MH-2	14	15,7	MH-2	10	12,9
	MH-3	3	3,3	MH-3	5	6,4
	MH-4	9	10,1	MH-4	8	10,3
	MH-5	7	7,8	MH-5	7	9
	MH-6	15	16,8	MH-6	10	15,7
	MH-7	19	21,3	MH-7	12	15,5
MUHAKEME EKSİKLİKLERİ	ME-1	19	7,4	ME-1	18	7,4
	ME-2	89	34,9	ME-2	71	29,3
	ME-3	40	15,6	ME-3	45	18,5
	ME-4	16	6,2	ME-4	14	5,7

Tablo 19'un devamı

		MHBT1		MHBT2		
MUHAKEME EKSİKLİKLERİ	ME-5	8	3,1	ME-5	7	2,8
	ME-6	40	15,6	ME-6	32	13,2
	ME-7	11	4,3	ME-7	10	4,1
	ME-8	32	12,5	ME-8	33	13,6
MUHAKEME BOŞLUKLARI	MB-1	16	27,5	MB-1	12	26
	MB-2	26	44,8	MB-2	21	45,6
	MB-3	13	22,4	MB-3	10	28,2
	MB-4	3	5,1	MB-4	3	6,5

Tablo genel olarak incelendiğinde 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarını, muhakeme eksikliklerini ve muhakeme boşluklarını belirlemek amacıyla yapılan MHBT1 ve MHBT2'de kategorilere göre göstergelerin oranlarında bir değişim söz konusudur. Muhakeme hataları boyutunda yer alan göstergeler içinde MH1 göstergesi hem MHBT1'de $f_1=22$ ve %24,7 yüzdeyle ortaya çıkarken bu göstergeye oran benzer şekilde MHBT2'de $f_2= 25$ ve %32,5 ile en yüksek frekans ve yüzdeyle ortaya çıkmıştır. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde sonuç ile başlama muhakeme hatasına sahip olma açısından MHBT1'e nispeten MHBT2'de daha yoğunlukta olduğu göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan göstergeler göz önüne alındığından 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının dikkate değer bir oranda MHBT1'de $f= 19$ ve %21,3 yüksek frekans ve yüzdeyle MH7 muhakeme hatasına sahip olduğu görülmektedir. Buna karşın MHBT2 'de bu muhakeme hatasına yönelik oranın $f=12$ ve %15,5 frekans ve yüzdeyle düşüş gösterdiği görülmektedir. Ancak MHBT2'de bir düşüş söz konusu olmakla beraber her iki açık uçlu sınavda da 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının belli bir kısmı ispat sürecinde özel bir durumdan hareketle veya sadece birkaç sayısal değer ile ispatları yapmaya çalışmışlardır. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH6 göstergesi MHBT1 ve MHBT2'de bu boyutta ön plana çıkan göstergelerdendir. Bununla birlikte MHBT1' de yüksek frekans $f_1=15$ ve %16,8 yüzdeyle ortaya çıkarken bu frekans ve yüzdenin $f_2=10$ ve %15,4 MHBT2'de benzer yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2'de ispatları yaparken bir teoremin karşıt tersinin kendisinin dengi olmasının farkına varamama olarak değerlendirilen durumlar bakımından daha fazla yoğunlukta olduklarını göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yanlış varsayım ile başlama olarak nitelendirilen MH2 göstergesi her iki açık uçlu sınavda da dikkate değer bir oranda olduğu görülmektedir. Ancak MHBT1'de bu göstergeye yönelik frekans $f_1=14$ ve %15,4 yüzdeyle ortaya çıkarken MHBT2'de bu frekans ve yüzdenin $f_2=10$ ve %12,4 daha düşük yoğunlukta olduğu

görülmektedir. Dolayısıyla 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde yanlış varsayım ile başlama açısından MHBT2'de daha az yoğunlukta olduğundan söz edilebilir. MHBT1 ve MHBT2'de muhakeme hataları boyutunda yer alan göstergelere nispeten MH4 ve MH5 göstergeleri daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının hem MHBT1'de hem de MHBT2'de aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılma ve aşırı genelleme muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar bakımından daha düşük oranlarda sahip oldukları göstermektedir.

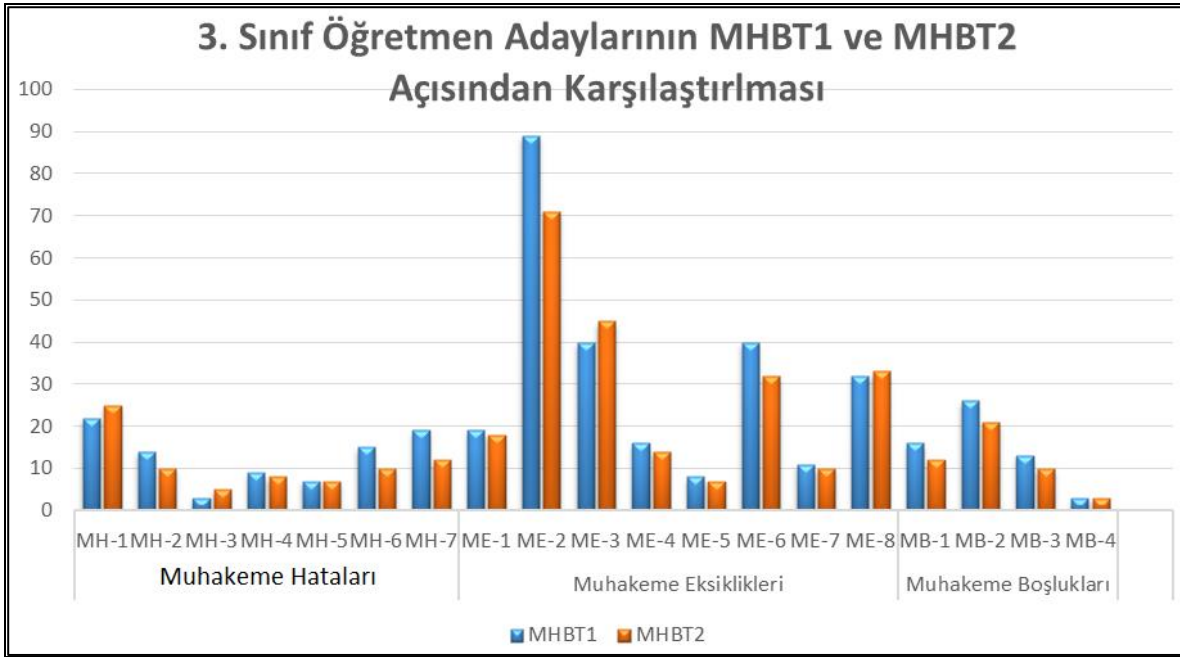
İspat sürecinde öğretmen adaylarının yöntem, tanım aralığı, matematiksel dil gibi eksikliklerle ispatlarını tamamlamaları veya ispatlarının yarıda bırakılmasından kaynaklanan durumlar muhakeme eksiklikleri olarak değerlendirilmiştir. Bu durumlar muhakeme hatasından ziyade doğru bir muhakeme ile başlanması ancak bazı matematiksel bilgi eksikliklerine bağlı olarak ispatın istenilen şekilde tamamlanmamasıdır. 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1 ve MHBT2' de sahip oldukları muhakeme eksikliklerine yönelik veriler incelendiğinde her iki açık uçlu sınavda da benzer muhakeme eksiklerinin göze çarpmaktadır. Ancak muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergeler yoğunluk bakımından MHBT1 ve MHBT2'de farklılık göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME2 göstergesi MHBT1'de en yüksek frekans $f_1=89$ ve %34,9 yüzdeye sahiptir. Buna karşın bu gösterge MHBT2'de $f_2=71$ ve %29,3 yüzdeyle nispeten daha düşük bir oranda ortaya çıktığı görülmektedir. Ancak her iki sınavda da ME2 bu boyutta diğer göstergelere göre en yüksek frekans ve yüzdeye sahiptir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının hem MHBT1'de hem MHBT2'de büyük çoğunluğunun ispat sürecinde ispata başlama veya başlanan bir ispatı devam ettireme açısından sıkıntı yaşadıklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME3 göstergesi MHBT1 ve MHBT2' en yüksek frekans $f_1=40, f_2=45$ ve yüzdeye sırasıyla %15,6, %18,5 sahiptir. Bununla birlikte MHBT2'de düşük oranda da olsa daha fazla yoğunluk söz konusudur. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde tanım aralığını dikkate almama muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen durumlar açısından her iki açık uçlu sınavda da yoğunlukta olduğunu göstermektedir. Muhakeme eksikleri boyutunda yer alan ME8 göstergesi hem MHBT1'de hem de MHBT2'de benzer şekilde yüksek frekans $f_1=32, f_2=33$ ve yüzdeye sırasıyla %12,5, %13,6 sahiptir. Dolayısıyla 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde iki yönlü koşullu bir önermenin ispatı yaparken her iki taraftan incelenmesi gerektirdiği durumlarda sadece bir taraftan inceleyerek ispat yapmaya çalışmışlardır. Matematik dilinin yetersiz kullanımı muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen ME6 göstergesi hem MHBT1 hem MHBT2'de bu boyuttaki diğer göstergelere nispeten yüksek frekans

$f_1=40$, $f_2=32$ ve yüzdeye sırayla %16,8,%15,7 sahiptir. Her iki açık uçlu sınavda da 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ME6 göstergesi bakımından benzer şekilde oldukça yakın oranlarda bu muhakeme eksikliğine sahip olduklarından söz edilebilir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının matematik dilini kullanmada yetersizlik, ispat adımlarında matematiksel sembol, tanım veya teorem gibi ifadelerinin kullanımında matematik diline dikkat edememe olarak nitelendirilen muhakeme eksikliği açısından dikkate değer bir oranda sahip oldukları göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME1 göstergesi MHBT1'de frekans $f_1=19$ ve %7,4 yüzdeyle ve MHBT2'de frekans $f_1=18$ ve %7,4 yüzdeyle aynı yoğunlukta ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla ispat sürecinde yöntemsel eksiklik olarak değerlendirilen durumlar açısından 3.sınıf seviyesinden yer alan öğretmen adaylarının dikkate değer oranda bu muhakeme eksikliğine sahip oldukları söz konusudur. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde ilgili matematiksel ifadenin ispatı için uygun ispat yöntemini seçme veya herhangi bir ispat yöntemini doğru kullanmada sıkıntı yaşadıklarını göstermektedir. Muhakeme eksikleri boyutunda MHBT1 ve MHBT2'ye yönelik veriler incelendiğinde her iki açık uçlu sınavda da bu boyutta yer alan ME5 ve ME7 göstergeleri diğer göstergelere nispeten daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı ve ispat yapmada sistematikliğin olmaması olarak değerlendirilen durumlar açısından daha düşük oranlarda muhakeme eksikliklerine sahip olduklarını göstermektedir.

İspat sürecinde; ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmayarak ispatın tamamlanması gibi durumlar muhakeme boşlukları olarak değerlendirilmiştir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergeler hem MHBT1 hem de MHBT2 için ayrı ayrı ele alındığında MB2 göstergesi her iki açık uçlu sınavda da en yüksek frekans $f_1 =26$, $f_2 =21$ ve yüzdeye sırasıyla %44,8, %45,6 sahiptir. Bu durum, 3. Sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının önemli bir kesiminin ispat sürecinde kullandıkları önermeleri gerekçelendirmeden ispatları belli ezber kalıplar ile yapmaya çalıştıkları veya ispat adımlarında kullanılan önermeleri ve ortaya atılan iddiaların bir gerekçeye dayandırmadan geçersiz ispatlar oluşturuldukları göstermektedir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB1 göstergesi MHBT1'de frekans $f_1=16$ ve %27,5 yüzdeyle ortaya çıkarken buna karşın MHBT2'de frekans $f_1=22$ ve %26 yüzdeyle ortaya çıkmıştır. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması olarak nitelendirilen muhakeme boşluğu bakımından MHBT2'de ve MHBT1'de benzer şekilde dikkate değer oranda sahip olduklarını

göstermektedir. Dolayısıyla 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken elde sonucun önceki adımlara dayandırılmasına rağmen bu adımlar arasında bir ilişkinin olmaması açısından her iki açık uçlu sınavda da daha yoğunlukta oldukları söz konusudur. MHBT1 ve MHBT2'nin verileri incelendiğinde 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB3 ve MB4 göstergeleri hem MHBT1 hem MHBT2'de bu boyutta diğer göstergelere göre daha az yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde ara aşamaların göz ardı edilmesi yani ispatta yazılması gereken bazı adımların atlaması veya ispatta gereksiz adımlara ve ifadelere yer verme bakımından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

İspata yönelik güz dönemi ders gözlemleri öncesi yapılan MHBT1 ve gözlem sonrası yapılan MHBT2'de 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayları, değişen oranlara rağmen benzer muhakeme hatalarına, muhakeme eksikliklerine veya muhakeme boşluklarına sahip oldukları söz konusudur. Ancak muhakeme hataları, eksiklikleri ve boşlukları boyutlarında yer alan göstergeler ayrı ayrı incelendiğinde MHBT1'e göre genel olarak her bir boyutta frekans ve yüzde olarak bir düşüşün olduğu görülmektedir. 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ders gözlemleri öncesinde ve ders gözlemleri sonrasında yapılan açık uçlu sınavlarda sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları açısından MHBT1 ve MHBT2 arasındaki değişimi gösteren Grafik 7 aşağıda sunulmuştur.



Grafik 7. Ders gözlemleri öncesinde ve sonrasında 3. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması

Genel olarak grafik incelendiğinde muhakeme hataları boyutunda yer alan MH1 göstergesinin MHBT1 ve MHBT2'de benzer şekilde yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sonuç ile başlama muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar bakımından hem MHBT1 hem MHBT2'de dikkate değer oranda sahip olduklarını göstermektedir. Dolayısıyla 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde, ispat yaparken ilgili matematiksel ifadeyi doğru kabul edip bunun üzerinde çeşitli işlemler yapma veya sonucun doğruluğunu göstermeyi ispat olarak düşünme eğilimini gösterdikleri düşünülmektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH2 göstergesine yönelik durumlar, her iki açık uçlu sınavda da yüksek oranlarda olmakla birlikte MHBT1'de yoğunluğun daha fazla olduğu fark edilmektedir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde, yanlış varsayımla başlama muhakemesi olarak nitelendirilen durumlar açısından MHBT1'de daha fazla muhakeme hatasına sahip olduklarını göstermektedir. Öğretmen adaylarının ispat sürecinde sadece birkaç sayısal değer vererek ispat için yeterli olacağını düşünme olarak nitelendirilen MH7 göstergesi hem MHBT1 hem MHBT2'de bu boyutta yüksek oranda ortaya çıkan göstergelerden biri olduğu göze çarpmaktadır. Ancak MH7 göstergesinin MHBT2'de daha az yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ikinci açık uçlu sınavda ispatlarını oluştururken sayısal değerler vererek veya sadece özel bir durumdan hareketle ispat için yeterli

olacağını düşünme açısından daha az yoğunlukta oldukları söz konusudur. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH6 göstergesi bu boyutta ön plana çıkan başka bir muhakeme hatasıdır. Hem MHBT1’de hem MHBT2’de bu göstergeye yönelik oranlarda bir değişim söz konusu olmakla birlikte her iki açık uçlu sınavda da 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının bir kesimi bu muhakeme hatasına sahip oldukları düşünülebilir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde bir teoremin karşıt tersinin kendisinin dengi olduğunun farkına varamama muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar açısından dikkate değer yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH4 ve MH5 göstergeleri hem MHBT1 hem MHBT2’de bu boyuttaki diğer göstergelere nispeten daha az yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının her iki açık uçlu sınavda da aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılması veya aşırı genelleme muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar açısından daha az yoğunlukta sahip olduklarını göstermektedir.

Ortaöğretim matematik öğretmenliği programında yürütülen ispata yönelik güz dönemi ders gözlemleri sonrası yapılan MHBT2 verileri göz önüne alındığında 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarının oranları MHBT1’e göre genel olarak bir düşüş göstermektedir. Ancak bazı göstergelerin yoğunlukları benzer şekilde yoğunlukta olduğu görülmektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH1 göstergesi MHBT1’de %24,7 iken bu oran MHBT2’de %32,4 yüzde olarak daha yüksek oranda ortaya çıkmıştır. 3.sınıf seviyesinde yer alan U16 kodlu öğretmen adayının MHBT2’de yapmış olduğu ispat sonuç ile başlama muhakeme hatası olarak değerlendirilmiştir. Bu durum Şekil 58’de örnek olarak sunulmuştur.

<p>S4: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a - b \leq a+b$ eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.</p> <p>$a - b \leq a+b$</p> <p>$a^2 - 2 a \cdot b + b^2 \leq a^2 + 2a \cdot b + b^2$</p> <p>$-2 a \cdot b \leq 2a \cdot b$</p> <p>$a \cdot b \geq - a \cdot b$</p>
--

Şekil 58. MH1 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT2'nin 4. sorusuna ilişkin yapmış olduğu işlemler incelendiğinde öğretmen adayının ispat sürecinde ispatlanması gereken matematiksel ifadeyi doğru kabul ederek hareket bunun üzerinde çeşitli işlemler yaptığı görülmektedir. 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı ispatlanması istenilen $|a| - |b| \leq |a + b|$ eşitsizliği doğru varsayarak ilgili eşitsizliğin her iki taraftan karesini alarak sonuç olarak $a \cdot b \geq -|a| \cdot |b|$ elde etmiştir. 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı, ispat sürecinde ilgili matematiksel ifadeyi başlangıçta doğru varsayarak bu matematiksel ifadenin geri dönüşümlü adımlarını göstererek bu yaptıklarını ispat olarak değerlendirmiştir. Öğretmen adayının yaptığı açıklama ve işlemler göz önüne alındığından ispat sürecinde yapılanlar sonuç ile başlama muhakeme hatası olarak belirlenmiştir.

İspat sürecinde 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip olduğu muhakeme hatalarından MH2 göstergesi MHBT2'de dikkate değer bir oranda bu boyutta en fazla ortaya çıkan muhakeme hatalarından biridir. 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2'ye yönelik ispatları incelendiğinde yanlış varsayım ile başlama muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlarının ispat sürecinde yoğunlukta olduğu söz konusudur. 3.sınıf seviyesinde yer alan U32 kodlu öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 59'da örnek olarak sunulmuştur.

S1: "Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 tek tam sayı ise, n de tek tam sayıdır." ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

n^2 tek tam sayı $\Rightarrow n^2 = 2n+1$ olsun.

$n=1$ için $1=1$ doğrudur.

$n=k$ için $k^2 = 2k+1$

$n=k+1$ için $k^2 + 2k+1 = 2k+1 + 2k+1$

$(k+1)^2 = 4k+1$

Temsilcinin sonucu açıktır.

Şekil 59. MH2 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT2'nin 1. sorusuna ilişkin yapmış olduğu ispat incelendiğinde, ispat sürecinde matematiksel tanımlarının yanlış algılandığı fark edilmektedir. Dolayısıyla bunun sonucunda öğretmen adayının ispat yaparken yanlış varsayım ile hareket ettiği görülmektedir. 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı, başlangıçta " n^2 tamsayı ise $n^2=2n+1$ olsun" şeklinde bir tanımlama yapmıştır. Ancak sonraki aşmalarda " $n=1$ için, $n=k...$ " gibi aşamaları yazarak sonuç üzerinde hareket ettiği fark edilmektedir. 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı soruda ilgili matematiksel

ifadenin tanım aralığına dikkat etmeme ve aynı değişkeni farklı anlamda kullanmakla birlikte matematiksel bir tanımlı doğru kullanmayarak yanlış varsayım ile başlama muhakeme hatasını yapmıştır. Öğretmen adayı bu tanımlamalardan hareketle matematiksel olarak geçerli olmayan bir ispat yapmıştır. 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayının ispat sürecinde yapmış olduğu işlemler dikkate alındığında bu durum, ispatta yanlış varsayım ile başlama muhakeme hatası olarak belirlenmiştir.

İspat sürecinde 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme eksikliklerine yönelik veriler incelendiğinde muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergeler bakımından MHBT1 ve MHBT2'de bazı göstergelerin benzer yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. Ancak her iki açık uçlu sınav arasında göstergelerin oranlarında bir değişim söz konusudur. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME3 göstergesi her iki açık uçlu sınavda da en yüksek orana sahip olmakla beraber MHBT1'de ME3 olarak değerlendirilen durumların daha yoğunlukta olduğundan söz edilebilir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1'de ispatları yaparken ilgili matematiksel ifadenin tanımlı olduğu küme ya da tanım aralığına daha az dikkat ettiklerini göstermektedir. ME2 göstergesi muhakeme eksiklikleri boyutunda hem MHBT1 hem MHBT2'de bu boyutta yer alan diğer göstergelere oranla daha yüksek olduğu görülmektedir. Bununla birlikte 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispatları boş bırakma veya başladıkları ispatları devam ettirmemeleri bakımından MHBT2'de daha yoğunlukta olduğu söz konusudur. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde ilgili matematiksel ifadenin ispatını yapmak için daha fazla çaba harcadıklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME6 göstergesi hem MHBT1 hem MHBT2'de benzer şekilde bu boyutta bir oranda ortaya çıkmakla beraber MHBT2'de bu yoğunluğun MHBT1'e göre düşüş gösterdiği görülmektedir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının matematik dilini kullanmada yetersizlik veya ispat adımlarında matematiksel sembol, tanım ve teorem gibi ifadelerinin kullanımında matematik diline dikkat edememe olarak nitelendirilen durumlar açısından MHBT1'de daha fazla yoğunlukta olduklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME8 göstergesi MHBT1 ve MHBT2'de bu boyutta yer alan diğer göstergelere nispeten daha yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bununla beraber her iki sınavda da ispatların tek yönlü incelenmesi olarak nitelendirilen durumlar benzer şekilde birbirine yakın oranlarda ortaya çıkmıştır. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde iki yönlü koşullu bir önermenin ispatı yaparken her iki tarafın incelenmesi gerektirdiği durumlarda sadece bir taraftan inceleyerek ispatlarını tamamladıklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME1 göstergesi hem MHBT1'de hem de MHBT2'de benzer şekilde bu boyutta

dikkate değer bir oranda olduğu göze çarpmaktadır. Bununla birlikte yöntemsel eksiklik olarak nitelendirilen durumların MHBT1’de daha yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde kullanılacak en uygun ispat yöntemini belirlemek bakımından MHBT1’de daha fazla zorluk yaşadıklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergeler içerisinde yer alan ME5 ve ME7 göstergeleri her iki açık uçlu sınavda da diğer göstergelere göre daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Bu durum 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı veya ispat yapmada sistematikliğin olmaması olarak nitelendirilen durumlar açısından daha düşük oranlarda muhakeme eksikliklerine sahip olduklarını göstermektedir.

Ortaöğretim matematik öğretmenliği programında yürütülen ispata yönelik ders gözlemleri sonrası yapılan MHBT2 verileri göz önüne alındığında muhakeme eksiklikleri boyutunda 3.sınıf öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme eksiklikleri bakımından genel olarak bir azalma yönünde bir değişim söz konusudur. Ancak bu boyuttaki bazı göstergelerin oranları MHBT1’de olduğu gibi MHBT2’de de benzer yoğunlukta olduğu göze çıkmaktadır. 3.sınıf seviyesinde yer alan U33 kodlu öğretmen adayının MHBT2’nin 1.sorusunda yapmış olduğu ispat incelendiğinde ME6 muhakeme eksikliği olarak değerlendirilmiştir. Öğretmen adayın yapmış olduğu muhakeme eksikliği Şekil 60’ta örnek olarak sunulmuştur.

S6: a, b ve c gibi üç doğal sayıdan ; "a sayısı hem b sayısını hem c sayısını tam bölüyorsa a sayısı b+c sayısını tam böler." ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

$\frac{a}{b}, \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{a}{b+c}$

$\frac{a}{b} = 0$

$\frac{a}{c} = 0$

$\frac{a}{b+c} = 0$

$(a,b) = 1$

$(a,c) = 1$

MH2
ME6

$a|b = d_1$

$a|c = d_2$

$a|d_1 + d_2$

$a|b+c = 0$

Şekil 60. ME6 göstergesine yönelik ispat örneği

İspat sürecinde öğretmen adayının MHBT2’ye 6. sorusuna yönelik yapmış olduğu işlemler incelendiğinde matematik dilinin doğru bir şekilde kullanılmadığı fark edilmektedir. 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı matematiksel ifadenin ispatını yapmak için başlangıçta yanlış bir varsayımla başladığı ve matematiksel bir tanımlamayı hatalı kullandığı görülmektedir. Öğretmen adayı " $a|b=0$, $a|c=0$ ve $a / b+c = 0$ " şeklinde herhangi bir matematiksel dayanağı olmayan bir tanımlama yapmıştır. 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayının bu tanımlama ile ne kast ettiğini ve neye dayanarak bu şekilde bir

tanımlamaya gittiğini anlamak için U33 kodlu öğretmen adayı ile klinik mülakat yapılmıştır. Yapılan mülakattan bir kesit aşağıda sunulmuştur.

Araştırmacı: 6. soruda yapmış olduğun ispatta “ $a/b=0 \dots$ ” şeklinde bir tanımlama yapmışsın ne demek bu?

U33: ha o mu yani a, b yi tam böler demek istedim.

Araştırmacı: hımm ben böyle bir tanımlamaya herhangi bir kitapta rastlamadım. Daha önce bu tanımlamayı herhangi bir derste kullandınız mı? Ya da hangi kitap olduğunu hatırlıyor musun?

U33: evet hocam cebir dersinde biz böyle yazıyoruz. Yani Osman hoca öyle kullanıyor?

Araştırmacı: Tekrar incele bana çok doğru bir tanım gibi gelmedi acaba yanlış hatırlıyor olabilir misin ?

U33: bakıyım ya hocam ben zaten ispatı hiç sevmiyorum keşke başkasıyla mülakat yapsaydınız. Ama bu doğru sanırım çünkü cebir 1de biz hep böyle kullanıyoruz.

Araştırmacı: tamam sonraki ispata bakalım...

Klinik mülakatlar sonucunda öğretmen adayının, matematik dillini yeteri derecede doğru kullanamadığı yazdığı ifadelerle kendisinin de bir anlamlandırmada zorluluk çektiği belirlenmiştir. Bu durumlar göz önünde bulundurulduğunda öğretmen adayının yapmış olduğu muhakeme eksikliği; matematik dilinin yetersiz kullanılması şeklinde belirlenmiştir.

S5: $a, b \in \mathbb{Z}^+$, a, b tek sayıdır, ancak ve ancak a ve b nin her ikisi de tektir. önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

$a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a, b = \text{tek} \Leftrightarrow a = \text{tek} \wedge b = \text{tek}$

$a = 2m+1$
 $b = 2n+1$ } olsun bu şekilde iki tek sayı elde etmiş oluruz bunların çarpımına bakalım
 olursak $(2m+1) \cdot (2n+1) = 4mn + 2m + 2n + 1$ sayısını elde etmiş oluruz
 $2(2mn+m+n) + 1$ şeklinde yazarsak

muhakkak çift olur çünkü içinde 2 çarpanı var

1) dolayısıyla bir çift sayının +1 fazlası tektir sayıdır buna göre a, b de tektir.

Şekil 61. ME8 göstergesine yönelik ispat örneği

Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergeler incelendiğinde MHBT1 ve MHBT2’de benzer muhakeme boşluklarının yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. Bununla birlikte MHBT2’ de bu boyuttaki göstergelerinin oranlarında bir düşüş söz konusudur. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB2 hem MHBT1’de hem

MHBT2’de bu boyutta en fazla ön plana çıkan göstergelerdendir. Bununla beraber her iki açık uçlu sınav arasında MB2 göstergesi bakımından bir düşüş olduğu görülmektedir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat yaparken, ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmayarak ispatın tamamlanması olarak değerlendirilen durumlar açısından MHBT1’de daha fazla yoğunlukta sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB1 göstergesi MHBT1 ve MHBT2’de dikkate değer bir oranda olduğu görülmektedir. Ancak MHBT2’de bu göstergenin oranından bir değişim söz konusudur. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması olarak değerlendirilen durumlar açısından MHBT2’ de daha düşük oranda sahip olduklarını göstermektedir. Ancak 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının her iki açık uçlu sınavda da matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken elde edilen sonucun önceki adımlara dayandırılmama veya bu adımlar arasında bir ilişkinin kurulmama olarak değerlendirilen durumlar açısından sahip oldukları düşünülebilir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB3 göstergesi her iki açık uçlu sınavda da dikkate değer oranda olduğu göze çarpmaktadır. Bu durum, 3. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde, ispatta ara aşamaların göz ardı edilmesi veya ispatta yazılması gereken bazı adımların atlaması olarak nitelendirilen durumlar açısından belli bir oranda sahip olduklarını göstermektedir. MB4 göstergeleri hem MHBT1 hem de MHBT2’ de bu boyutta diğer göstergelere nispeten daha düşük oranda olduğu görülmektedir. Bu durum ve ispatta gereksiz adımlara ve ifadelere yer verme olarak değerlendirilen durumlar açısından daha 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MB4 göstergesi bakımından düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

İspat sürecinde 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme boşluklarına yönelik yapılan MHBT2 verileri göz önüne alındığında her iki açık uçlu sınav arasında muhakeme boşlukları bakımından genel olarak bir değişim söz konusudur. MHBT2’de muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergelerin oranları MHBT1’e göre daha düşük yoğunlukta olduğundan söz edilebilir. Ancak bu boyutta bazı göstergelerin oranları MHBT1’de olduğu gibi MHBT2’de de benzer şekilde yoğunlukta olduğu görülmektedir.

4. 3. 4. Güz Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 4.Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular

4. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1 ve MHBT2’de yaptıkları ispatların muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları boyutlarında yer alan her bir kategoriye ait göstergelere göre değerlendirilmesi sonucunda elde edilen frekans ve yüzde dağılımı Tablo 16’da sunulmuştur.

Tablo 20. Ders Gözlemleri Sonrası Muhakeme Süreci Boyutu Kategorilerine Göre Değerlendirilmesi ile İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımı

	MHBT1			MHBT2		
	Madde	f	%	Madde	f	%
MUHAKEME HATALARI	MH-1	19	26,7	MH-1	12	22,2
	MH-2	12	16,9	MH-2	9	16,6
	MH-3	9	12,6	MH-3	8	14,8
	MH-4	5	7	MH-4	4	7,4
	MH-5	5	7	MH-5	4	7,4
	MH-6	13	18,3	MH-6	10	18,5
	MH-7	8	11,2	MH-7	7	12,9
MUHAKEME EKSİKLİKLERİ	ME-1	11	6,8	ME-1	10	7,1
	ME-2	27	16,8	ME-2	20	14,3
	ME-3	47	29,3	ME-3	40	28,7
	ME-4	8	5,7	ME-4	6	4,3
	ME-5	5	3,2	ME-5	5	3,5
	ME-6	21	13,1	ME-6	17	12,2
	ME-7	16	10	ME-7	13	9,3
	ME-8	25	15,6	ME-8	28	20,1
MUHAKEME BOŞLUKLARI	MB-1	9	28,1	MB-1	8	33,3
	MB-2	11	34,3	MB-2	9	37,5
	MB-3	8	25	MB-3	4	16,6
	MB-4	4	12,5	MB-4	3	12,5

Genel olarak incelendiğinde 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarını, muhakeme eksikliklerini ve muhakeme boşluklarını belirlemeye yönelik uygulanan MHBT1 ve MHBT2’de muhakeme hataları boyutunda her iki açık uçlu sınav arasında göstergelerin oranlarında bir farklılık söz konusudur. Bu boyutta yer alan göstergeler içinde MH1 göstergesi MHBT1’de $f_1=19$ ve %26,7 yüzdeyle ortaya çıkarken bu oran MHBT2’de benzer şekilde $f_2= 12$ ve %22,2 ile en yüksek frekans ve yüzdeyle ortaya çıkmıştır. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde sonuç ile başlama muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar açısından MHBT1’e göre MHBT2’de bu göstergenin daha düşük yoğunlukta olduğunu

göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan göstergelere yönelik veriler incelendiğinde 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayları dikkate değer bir oranda MHBT1'de $f=12$ ve %16,9 yüksek frekans ve yüzdeyle MH2 muhakeme hatasına sahip olduğu görülmektedir. MHBT2 'de bu muhakeme hatasına yönelik oranın $f=9$ ve %16,5 frekans ve yüzdeyle benzer yoğunlukta ortaya çıktığı görülmektedir. Bu durum, her iki açık uçlu sınavda da 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının belli bir kısmı ispat sürecinde yanlış varsayım ile başlama muhakeme hatasına sahip olduğunu göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH6 göstergesi MHBT1 ve MHBT2'de bu boyutta ön plana çıkan başka bir göstergedir. 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MH6 bakımından MHBT1' de frekans $f_1=13$ ve %18,3 yüzdeyle sahip iken bu frekans ve yüzdenin $f_2=10$ ve %18,4 MHBT2'de benzer oranlarda olduğu görülmektedir. Bu durum, öğretmen adaylarının ispat sürecinde bir teoremin karşıt tersinin kendisinin dengi olmasının farkına varamama olarak değerlendirilen durumlar bakımından ilgili muhakeme hatasına sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH3 göstergesi her iki açık uçlu sınavda da bu boyutta yer alan diğer göstergelere nispeten yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. Bu göstergeye yönelik frekanslar $f_1=9$, $f_2=8$ ve sırasıyla %12,6, %14,8 yüzdeye sahiptir. Dolayısıyla 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematiksel bir ifadenin farklı notasyonlarını ispat olarak düşünme açısından MHBT1 ve MHBT2'de benzer yoğunlukta olduklarından söz edilebilir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH7 göstergesi hem MHBT1'de hem de MHBT2'de 4.sınıf öğretmen adaylarının belli bir yoğunlukta sahip olduğu fark edilmektedir. Bu durum, ispat sürecinde öğretmen adaylarının bir kısmının özel bir durumdan hareketle veya sadece birkaç sayısal değer ile ispatları yapmaya çalışmışlardır. Her iki açık uçlu sınavda da muhakeme hataları boyutunda yer alan MH4 ve MH5 göstergeleri bu boyuttaki diğer göstergelere nispeten daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının hem MHBT1'de hem de MHBT2'de aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanma veya aşırı genelleme muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar bakımından daha düşük oranlarda sahip oldukları göstermektedir.

4. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde yöntem, ilgili matematiksel ifadenin tanım aralığı, matematiksel dil gibi eksikliklerle ispatlarını tamamlamaları veya ispatlarının yarıda bırakılmasından kaynaklanan durumlar muhakeme eksiklikleri olarak değerlendirilmektedir. Bu durumlar muhakeme hatasından ziyade doğru bir muhakeme ile başlanması ancak bazı matematiksel bilgi eksikliklerine bağlı olarak ispatın eksik şekilde tamamlanmamasıdır. 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme eksikliklerini belirlemeye yönelik

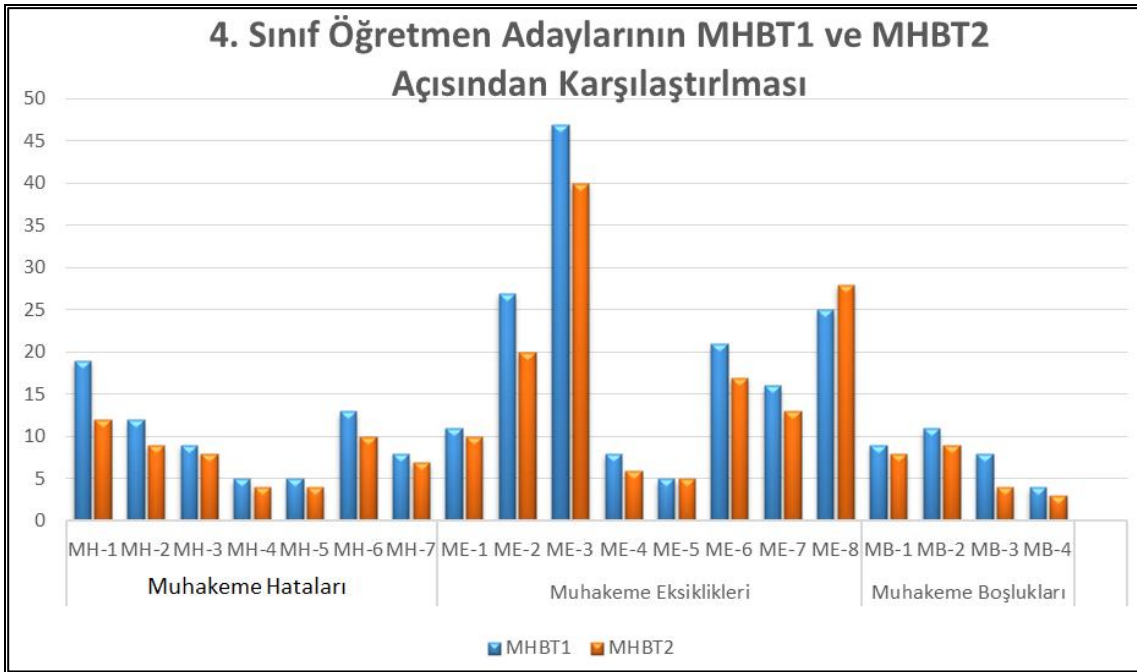
uygulanan MHBT1 ve MHBT2'nin verileri incelendiğinde her iki açık uçlu sınavda da benzer muhakeme eksiklerinin ön planda olduğu fark edilmektedir. Bununla birlikte muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergelerinin oranları arasında MHBT1 ve MHBT2'de bir değişim olduğu görülmektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME3 göstergesi MHBT1'de en yüksek frekans $f_1=47$ ve %29,3 yüzdeye sahiptir. Buna karşın bu gösterge MHBT2'de $f_2=40$ ve %28,7 yüzdeyle nispeten daha düşük bir oranda olduğu görülmektedir. Ancak her iki sınavda da ME3 bu boyutta yer alan diğer göstergelere göre en yüksek frekans ve yüzdeye sahiptir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının hem MHBT1'de hem MHBT2'de ispat sürecinde tanım aralığını dikkate almama muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen durumlar açısından her iki açık uçlu sınavda da yoğunlukta olduğunu göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME2 göstergesi MHBT1 ve MHBT2' en yüksek frekans $f_1=27, f_2=20$ ve yüzdeye sırasıyla %16,8,%14,3 sahiptir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde ispata başlamama veya başlanan bir ispatı devam ettireme açısından MHBT2 de düşük yoğunlukta olduğunu göstermektedir. Muhakeme eksikleri boyutunda yer alan ME8 göstergesi hem MHBT1'de hem de MHBT2'de benzer şekilde yüksek frekans $f_1=25, f_2=28$ ve yüzdeye sırasıyla %15,6,%20,1 sahiptir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde iki yönlü koşullu bir önermenin ispatı yaparken her iki taraftan incelenmesi gerektirdiği durumlarda sadece bir taraftan inceleyerek ispat yapmaya çalışma açısından MHBT2'de daha yoğunlukta olduğunu göstermektedir. İspat sürecinde matematik dilinin yetersiz kullanılması muhakeme eksikliği olarak değerlendirilen ME6 göstergesi hem MHBT1 hem MHBT2'de bu boyuttaki diğer göstergelere nispeten yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. ME6 göstergesi bu boyutta frekans $f_1=21, f_2=17$ ve yüzdeye sırayla %13,1,%12,2 sahiptir. Her iki açık uçlu sınavda da 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ME6 göstergesi bakımından benzer yoğunlukta bu muhakeme eksikliğine sahip olduklarından söz konusudur. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının matematik dilini kullanmada yetersizlik, ispat adımlarında matematiksel sembol, tanım veya teorem gibi ifadelerinin kullanımında matematik diline dikkat edememe olarak nitelendirilen durumlar açısından dikkate değer bir oranda sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yöntemsel eksiklik olarak değerlendirilen ME1 göstergesi MHBT1'de frekans $f_1=11$ ve %6,8 yüzdeyle ve MHBT2'de frekans $f_1=10$ ve %7,1 yüzdeyle benzer yoğunlukta olduğu görülmektedir. Dolayısıyla ispat sürecinde yöntemsel eksiklik açısından 4.sınıf seviyesinden yer alan öğretmen adaylarının dikkate değer oranda bu muhakeme eksikliğine sahip olduklarından söz edilebilir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde ilgili matematiksel ifadenin ispatı yapmak için en uygun ispat yöntemini seçmede veya

herhangi bir ispat yöntemini doğru kullanmada sıkıntı yaşadıklarını göstermektedir. 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme eksiklerine yönelik MHBT1 ve MHBT2'nin verileri incelendiğinde her iki açık uçlu sınavda da bu boyutta yer alan ME5 ve ME7 göstergeleri diğer göstergelere nispeten daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı ve ispat yapmada sistematikliğin olmaması olarak değerlendirilen durumlar bakımından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

Muhakeme boşlukları; ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmayarak ispatın tamamlanması gibi durumlar olarak değerlendirilmektedir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergeler hem MHBT1 hem de MHBT2 için ayrı ayrı ele alındığında MB2 göstergesi her iki açık uçlu sınavda da en yüksek frekans $f_1 = 11$, $f_2 = 9$ ve yüzdeye sırasıyla %34,3, %37,5 sahiptir. Bu durum, 4. Sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının dikkate değer bir yoğunlukta ispat sürecinde kullandıkları önermeleri gerekçelendirmeden ispatları belli ezber kalıplar ile yapmaya çalıştıkları veya ispat adımlarında kullanılan önermeleri ve ortaya atılan iddiaların bir gerekçeye dayandırmadan geçersiz ispatlar oluşturuldukları göstermektedir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB1 göstergesi MHBT1'de frekans $f_1 = 9$ ve %28,5 yüzdeyle ortaya çıkarken MHBT2'de frekans $f_1 = 8$ ve %33,3 sahiptir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması olarak nitelendirilen durumlar bakımından MHBT2'de ve MHBT1'de benzer oranda sahip olduklarını göstermektedir. Bu durum 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken elde sonucun önceki adımlara dayandırılmama veya bu adımlar arasında bir ilişkinin kurulmaması olarak değerlendirilen durumlar açısından her iki açık uçlu sınavda da dikkate değer oranlarda sahip oldukları söz konusudur. MHBT1 ve MHBT2'nin verileri incelendiğinde 4. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB3 ve MB4 göstergeleri hem MHBT1 hem MHBT2'de bu boyutta diğer göstergelere göre daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde ara aşamaların göz ardı edilmesi veya ispatta yazılması gereken bazı adımların atlaması ve ispatta gereksiz adımlara ve ifadelere yer verme bakımından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

İspata yönelik güz dönemi ders gözlemleri öncesi yapılan MHBT1 ve gözlem sonrası yapılan MHBT2'de 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının farklı oranlara rağmen benzer muhakeme hatalarına, muhakeme eksikliklerine veya muhakeme

boşluklarına sahip oldukları söz konusudur. Ancak muhakeme hataları, eksiklikleri ve boşlukları boyutlarında yer alan göstergeler ayrı ayrı incelendiğinde MHBT1'e göre genel olarak her bir boyutta frekans ve yüzde olarak bir düşüşün olduğu görülmektedir. 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispata yönelik ders gözlemleri öncesinde ve ders gözlemleri sonrasında yapılan her iki açık uçlu sınavda sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları açısından MHBT1 ve MHBT2 arasındaki değişimi gösteren Grafik 8 aşağıda sunulmuştur.



Grafik 8. Ders gözlemleri öncesinde ve sonrasında 4. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması

Grafik genel olarak incelendiğinde muhakeme hataları boyutunda yer alan MH1 göstergesinin MHBT1'de daha fazla yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sonuç ile başlama muhakeme hatası açısından MHBT1 ve MHBT2'de farklı oranlarda sahip oldukları söz konusudur. Dolayısıyla 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1'de olduğu gibi MHBT2'de ispat yaparken ilgili matematiksel ifadeyi doğru kabul edip bunun üzerinde çeşitli işlemler yaparak sonucun doğruluğunu göstermeyi ispat olarak düşünme açısından yoğunluktadırlar. Ancak bu gösterge ikinci açık uçlu sınavda bir düşüş göstermiştir. Muhakeme hataları boyutunda MH2 olarak değerlendirilen durumlar, her iki açık uçlu sınavda da yüksek oranlarda olmakla birlikte bu durumlara yönelik çoğunluğun MHBT1'e ait olduğu fark edilmektedir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının

ispat sürecinde yanlış varsayım ile başlama olarak nitelendirilen muhakeme hataları bakımından MHBT2'de daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH6 göstergesi bu boyutta ön plana çıkan başka bir muhakeme hatası olduğu görülmektedir. Hem MHBT1 hem MHBT2'de bu göstergeye yönelik oranlarda bir farklılaşma söz konusudur. Ancak her iki açık uçlu sınavda da 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının belli bir yoğunlukta MH6 muhakeme hatasına sahip olduklarından söz edilebilir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde bir teoremin karşıt tersinin kendisinin dengi olduğunun farkına varamama olarak nitelendirilen durumlar açısından dikkate değer yoğunlukta olduklarını göstermektedir. İspat sürecinde sadece birkaç sayısal değer verilerek ispatların yapılması olarak nitelendirilen durumlar MH7 olarak değerlendirilmiştir. Muhakeme hataları boyutunda hem MHBT1 hem MHBT2'de yüksek oranda ortaya çıkan göstergelerden biri olduğu göze çarpmaktadır. Bununla birlikte MH7 göstergesi ikinci açık uçlu sınavda bir düşüş göstermiştir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2'de ispat yaparken sayısal değerler vererek ispat yapmaya daha az eğilim göstermişlerdir. Muhakeme boyutunda MH4 ve MH5 göstergeleri hem MHBT1 hem MHBT2'de boyutta yer alan diğer göstergelere nispeten daha az yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının her iki sınavda da aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılma veya aşırı genelleme muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar bakımından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

Ortaöğretim matematik öğretmenliği programında yürütülen ispata yönelik güz dönemi ders gözlemleri sonrası yapılan MHBT2 verileri göz önüne alındığında 4.sınıf öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları MHBT1'e göre genel olarak bir düşüş göstermektedir. Bununla birlikte göstergelerin bazıları benzer şekilde öğretmen MHBT2'de de ön plana çıkmaktadır. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH1 göstergesi MHBT1'de %26,7 iken bu oran MHBT2'de %22,2 olarak ortaya çıkmıştır. 4.sınıf seviyesinde yer alan D10 kodlu öğretmen adayının MHBT2'de yapmış olduğu ispat sonuç ile başlama muhakeme hatası olarak değerlendirilmiştir. Öğretmen adayının yapmış olduğu muhakeme hatası Şekil 62'de örnek olarak sunulmuştur.

S2: a ve b $\in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $a > b > 0$ ise $\frac{b+1}{b} > \frac{b}{a}$ olduğunu gösteriniz.

$$\frac{a(b+1)}{a \cdot b} > \frac{b}{a \cdot b}$$

$$a(b+1) > b^2$$

$$a > b^2 - ob$$

$a > b(b-a) = a > b > 0$

0 dan büyük olan için yok. sağarsak

Şekil 62. MH1 göstergesine yönelik ispat örneği

İspat sürecinde öğretmen adayının MHBT2'nin 4. sorusuna ilişkin yapmış olduğu işlemler incelendiğinde ispatlanması gereken $\frac{b+1}{b} > \frac{b}{a}$ şeklindeki matematiksel ifadeyi doğru kabul ederek eşitsizliğin üzerinden $\frac{a(b+1)}{ab} > \frac{b \cdot b}{a \cdot b}$ gibi çeşitli işlemler yaparak başlangıçta ön koşul olarak verilen $a > b > 0$ ifadesine ulaşmıştır. 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı, ispat sürecinde göstermesi gereken matematiksel ifadeyi ilk başta doğru kabul ederek doğruluğu kabul edilen ilk ifadeye ulaşarak sadece ifadenin geri dönüşümlü adımlarını göstermiştir ve bu yaptıklarını ispat olarak değerlendirmiştir. Bunların sonucunda öğretmen adayının ispat sürecinde yapmış olduğu muhakeme hatası, sonuç ile başlama muhakeme hatası olarak değerlendirilmiştir.

Muhakeme hataları boyutunda yer alan göstergelerden farklı notasyonları kullanmayı ispat olarak düşünme olarak nitelendirilen MH3 hem MHBT1'de hem MHBT2'de bu boyutta yer alan diğer göstergelere nispeten daha az yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. Ancak her iki açık uçlu sınavda da öğretmen adaylarının sahip olduğu muhakeme hatalarından biridir. 4.sınıf seviyelerinde yer alan D23 kodlu öğretmen adayının ispat sürecinde MH3 göstergesine yönelik yapmış olduğu ispat Şekil 63'te sunulmuştur.

S1: “Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 tek tam sayı ise, n de tek tam sayıdır.” ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

$$n^2 = 2k+1 \Rightarrow n \cdot n = 2k+1$$

$$n \text{ çift olsa } \Rightarrow 2m \cdot 2m = 2k+1$$

$$\frac{2m^2}{2} = \frac{2k+1}{2}$$

$$m^2 = k + \frac{1}{2} \quad \left. \vphantom{m^2} \right\} n \text{ tektir.}$$

Şekil 63. MH3 göstergesine yönelik ispat örneği

İspat sürecinde öğretmen adayının MHBT2'nin 1. sorusuna yönelik yapmış olduğu işlemler incelendiğinde öğretmen adayının matematiksel bir ifadenin farklı denklemlerini ispat olarak düşündüğü fark edilmektedir. 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı ispatın ilk adımında “ $n^2=2k+1$ ” şeklinde tanımlamıştır. Devamındaki adımlarda bu ifadenin bir notasyonu olan “ n . $n= 2k+1$ ” yazarak sonraki adımlarda benzer bir metotla “ $2m \cdot 2m=2k+1$ ” ve “ $2m^2= 2k+1$ ” şeklinde aynı ifadenin farklı notasyonlarını göstermeyi ispat olarak düşünmüştür. Öğretmen adayının ispat sürecinde yapmış olduğu işlemler, matematiksel olarak doğru olmasına rağmen ispatı yapılması istenilen durum için bir anlam ifade etmemektedir. Bütün bu durumlar sadece ilgili matematiksel ifadenin farklı denklemlerini yazmaktan ibarettir. 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayının ispat sürecinde yapmış olduğu işlemler göz önünde bulundurularak bu muhakeme hatası farklı notasyonları ispat olarak düşünme muhakeme hatası olarak belirlenmiştir.

Muhakeme eksiklikleri boyutunda 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme eksikliklerine yönelik veriler incelendiğinde bu boyutta hem MHBT1'de hem MHBT2'de göstergelerin benzer yoğunlukta ön plana çıktığı fark edilmektedir. Bununla beraber her iki açık uçlu sınav arasında göstergelerin farklı oranlarında olduğu söz konusudur. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME3 göstergesi her iki açık uçlu sınavda da en yüksek oranda ortaya çıkmıştır. Ancak MHBT2'de bu göstergeye yönelik durumların daha düşük olduğu görülmektedir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1'de ispat yaparken ilgili matematiksel ifadenin tanımlı olduğu aralığa daha az dikkat ettiklerini göstermektedir. İspat sürecinde ilgili matematiksel ifadenin ispatını yapmak için herhangi bir girişimde bulunamama veya ispata başlangıç yapıp devamını getirememeye olarak nitelendirilen durumlar açısından 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının

Hem MHBT1 hem MHBT2'de dikkate değer oranlarda sahip oldukları görülmektedir. Bununla birlikte ispatları boş bırakma veya başlanan ispatları devam edememe bakımından MHBT1'de 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının daha yoğunlukta

olduğundan söz edilebilir. Bu durum, öğretmen adaylarının MHBT2’de ispat yaparken ilgili matematiksel ifadenin ispatını yapmak için daha fazla çaba sarf ettiklerini göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME6 göstergesi her iki açık uçlu sınavda da yüksek bir oranda ortaya çıkmakla birlikte MHBT2’de bu yoğunluğun MHBT1’e göre daha düşük olduğu görülmektedir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının matematik dilini kullanmada yetersizlik veya ispat adımlarında matematiksel sembol, tanım ve teorem gibi ifadelerinin kullanımında matematik diline dikkat edememe olarak değerlendirilen muhakeme eksiklikleri bakımından MHBT2’ de daha az yoğunlukta olduklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME8 göstergesi MHBT1 ve MHBT2’de bu boyutta yer alan diğer göstergelere nispeten yoğunlukta olduğu fark edilmektedir. Bununla beraber MHBT2’de bu göstergenin daha yoğun oranlarda olduğu görülmektedir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının hem MHBT1’de hem MHBT2’de de iki yönlü koşullu bir önermenin ispatı yaparken her iki tarafın incelenmesi gerektirdiği durumlarda sadece bir taraftan inceleyerek ispatlarını tamamladıkları göstermektedir. Her iki açık uçlu sınavda da muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME1 göstergesi benzer şekilde bu boyutta dikkate değer bir oranda olduğu fark edilmektedir. Ancak yöntemsel eksiklik olarak nitelendirilen durumların MHBT1’de daha fazla yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde ilgili matematiksel ifadenin ispatı için kullanılacak en uygun ispat yöntemini belirlemek açısından MHBT1’de daha fazla zorluk yaşadıklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergeleri genel olarak göz önüne alındığında hem MHBT1 hem MHBT2’de bu boyutta yer alan ME5 ve ME7 göstergeleri diğer göstergelere nispeten düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı olarak değerlendirilen durumlar bakımından daha az yoğunlukta olduğunu göstermektedir. Bununla beraber bu boyutta y ispat yapmada sistematikliğin olmaması olarak nitelendirilen durumlar açısından da benzer şekilde düşük oranlarda muhakeme eksikliklerine sahip oldukları söz konusudur.

Ders gözlemleri sonrası yapılan MHBT2 verileri göz önüne alındığında muhakeme eksiklikleri boyutunda 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme eksiklikleri bakımından genel olarak bir düşüş olduğu göze çarpmaktadır. Bununla birlikte bazı göstergelerin oranları MHBT1 ile benzer yoğunlukta olduğu MHBT2’de de fark edilmektedir. 4.sınıf seviyesinde yer alan D3 kodlu öğretmen adayının MHBT2’nin 1.sorusunda yapmış olduğu ispat incelendiğinde ME4 muhakeme eksikliği olarak değerlendirilmiştir. Öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 64’te örnek olarak sunulmuştur.

S1: "Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 tek tam sayı ise, n de tek tam sayıdır." ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned}
 n &= 2k+1 \text{ olsun.} \\
 n^2 &= (2k+1)^2 = (2k+1) \cdot (2k+1) = 4k^2 + 4k + 1 \\
 &= 4(k^2+k) + 1 \\
 &\Rightarrow n \text{ tektir.}
 \end{aligned}$$

Şekil 64. ME4 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayı MHBT2'nin 1.sorusuna yönelik yapmış olduğu ispat incelendiğinde öğretmen adayı başlangıçta " $n^2=2k+1$ " şeklinde ilgili matematiksel ifadesinin tanımlı olduğu sayı kümesini göz ardı etmesiyle birlikte ikinci adımda matematiksel olarak geçerli olmayan bir ifade yazmıştır. Öğretmen adayı ilk adımda " $n^2=2k+1$ " tanımlarken ikinci adımda aynı ifadeyi " $n^2=(2k+1)^2$ " şeklinde belirtmiştir. Sonraki adımlarda da bu ifadenin farklı denklemlerini yazarak ispatı bitirmiştir. Öğretmen adayının ilgili matematiksel ifadenin tanımını doğru algılamadığı ve matematiksel tanımları yetersiz kullanıma açısından muhakeme eksikliğine sahip olduğu belirlenmiştir.

Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergeler incelendiğinde MHBT1 ve MHBT2'de muhakeme boşluklarının benzer şekilde birbirine yakın yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bununla birlikte MHBT2' de bir düşünüş söz konusudur. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB2 MHBT1'de hem MHBT2'de bu boyutta en fazla ön plana çıkan göstergelerden biridir. Ancak MHBT1 ve MHBT2 arasında bu göstergenin oranında bir değişim olduğu göze çarpmaktadır. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde, ilgili matematiksel ifadesini yaparken ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmayarak ispatın tamamlanması olarak nitelendirilen durumlar açısından MHBT2'de daha az yoğunlukta sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB1 göstergesi hem MHBT1'de hem MHBT2'de dikkate değer bir yoğunlukta olduğu fark edilmektedir. Bununla birlikte MHBT2'de bu göstergenin yoğunluğundan bir düşünüş olduğundan söz edilebilir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde ilgili matematiksel ifadenin ispatını yaparken yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması olarak değerlendirilen durumlar açısından MHBT2' de daha düşük yoğunlukta sahip olduklarını göstermektedir. Ancak 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının her iki açık uçlu sınavda da matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken elde edilen sonucun önceki adımlara dayandırılmama veya bu adımlar arasında bir ilişkinin olmaması muhakeme boşluğu

olarak değerlendirilen durumlar açısından önemli bir oranda sahip oldukları düşünülmektedir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB3 ve MB4 göstergeleri hem MHBT1 hem de MHBT2' de bu boyutta diğer göstergelere nispeten daha düşük oranda olduğu fark edilmektedir. Bu durum 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispatta ara aşamaların göz ardı edilmesi veya ispatta yazılması gereken bazı adımların atlaması olarak nitelendirilen durumlar açısından daha düşük oranlarda sahiptirler. Benzer şekilde bu boyutta ispatta gereksiz adımlara ve ifadelere yer verme olarak değerlendirilen durumlar bakımından da daha düşük oranlarda sahip olduklarından söz edilebilir.

İspat sürecinde 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme boşluklarına yönelik yapılan MHBT2'nin verileri göz önüne alındığında öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme boşlukları bakımından genel olarak bir değişim söz konusudur. MHBT2'de muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergelerin oranları MHBT1'e göre daha az yoğunlukta olduğu fark edilmektedir. Ancak bazı göstergelerin oranları MHBT1'de olduğu gibi MHBT2'de de benzer şekilde yüksek oranda olduğu göze çarpmaktadır. 4.sınıf seviyesinde yer alan D15 kodlu öğretmen adayının MHBT2'nin 1.sorusunda yapmış olduğu ispat incelendiğinde bu durum MB1 muhakeme boşluğu olarak değerlendirilmiştir. Yapılan ispat Şekil 37'de örnek olarak sunulmuştur.

4. 3. 5. Güz Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 5. Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular

İspat sürecinde 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarını belirlemek amacıyla yapılan MHBT1 ve MHBT2 arasındaki değişim tablo ve grafiklerle sunulmuştur. 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat yaparken yaptıkları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları boyutlarında yer alan her bir kategoriye ait göstergelere göre değerlendirilmesi sonucunda elde edilen frekans ve yüzde dağılımı Tablo 21'de sunulmuştur.

Tablo 21. Ders Gözlemleri Sonrası Muhakeme Süreci Boyutu Kategorilerine Göre Değerlendirilmesi ile İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımı

	MHBT1			MHBT2		
	Madde	f	%	Madde	f	%
MUHAKEME HATALARI	MH-1	14	25	MH-1	8	20
	MH-2	6	10,7	MH-2	4	10
	MH-3	6	10,6	MH-3	5	12,5

Tablo 21'in devamı

	MHBT1			MHBT2		
MUHAKEME HATALARI	MH-4	3	5,3	MH-4	3	7,5
	MH-5	5	8,9	MH-5	4	10
	MH-6	17	30,3	MH-6	12	30
	MH-7	5	8,9	MH-7	4	10
MUHAKEME EKSİKLİKLERİ	ME-1	13	8,7	ME-1	9	7,8
	ME-2	27	18,1	ME-2	17	14,7
	ME-3	48	32,2	ME-3	38	33
	ME-4	4	2,6	ME-4	3	2,6
	ME-5	0	0	ME-5	1	0,8
	ME-6	19	12,7	ME-6	14	12,1
	ME-7	20	13,4	ME-7	15	13
	ME-8	18	12	ME-8	18	15,6
MUHAKEME BOŞLUKLARI	MB-1	7	21,2	MB-1	4	21
	MB-2	17	41,5	MB-2	10	42,6
	MB-3	6	18,1	MB-3	3	15,7
	MB-4	4	12,1	MB-4	2	10,5

Genel olarak incelendiğinde 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarını, muhakeme eksikliklerini ve muhakeme boşluklarını belirlemek amacıyla yapılan MHBT1 ve MHBT2 verileri incelendiğinde her bir boyutta benzer göstergelerin yoğunlukta olduğu görülmektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH6 göstergesi hem MHBT1'de hem MHBT2'de bu boyutta en yüksek frekans $f_1=17$, $f_2=12$ ve sırasıyla %30,3, %30 yüzdeye sahiptir. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının her iki açık uçlu sınavda da ispatları yaparken bir teoremin karşıt tersinin kendisinin dengi olmasının farkına varama açısından benzer frekans ve yüzdeyle MH6 muhakeme hatasına sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan göstergeler bakımından 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayları MHBT1'de $f_1=14$ ve %25 yüksek frekans ve yüzdeyle MH1 muhakeme hatasına sahip olduğu görülmektedir. Buna karşın MHBT2 'de bu muhakeme hatasına yönelik oranın $f_2=8$ ve %20 frekans ve yüzdeyle düşüş gösterdiği göze çarpmaktadır. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının birinci açık uçlu sınavda ispat yaparken, ispatı istenilen matematiksel ifadeyi doğru kabul ederek bu ifade üzerinde çeşitli işlemler yaparak ispatları yapmaya çalıştıkları göstermektedir. Ancak MHBT2'de bu düşüncenin belli bir oranda değiştiği fark edilmektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH2 göstergesi MHBT1'de $f_1=6$ ve %10,7 olarak dikkate değer bir oranda ortaya çıktığı görülmektedir. Yanlış varsayımla başlama muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar MHBT2'de benzer şekilde $f_2=4$ ve %10 ile bu boyutta yer alan diğer göstergelere nispeten

ön plana çıktığı fark edilmektedir. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde hüküm ile hipotezi karıştırma veya ispata yanlış varsayım ile başlama olarak nitelendirilen durumlar açısından MHBTE2'de daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bununla birlikte her iki açık uçlu sınavda da öğretmen adaylarının dikkate değer bir kısmının ispat sürecinde uygun bir yaklaşımla başlamada zorluk yaşadıkları söz konusudur. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH3 göstergesi hem MHBT1 hem MHBTE2'de ön plana çıkan göstergelerden biridir. MH3 göstergesi MHBT1'de $f_1=6$ ve %10,6 yüzdeyle ortaya çıkarken MHBTE2'de bu gösterge $f_2=5$ ve %12,5 benzer frekans ve yüzdeyle ortaya çıktığı görülmektedir. Ancak ispat sürecinde farklı notasyonları ispat olarak değerlendirilen durumlar açısından MHBTE2'de MH3 göstergesinin artış gösterdiği fark edilmektedir. Yapılan her iki açık uçlu sınavda da muhakeme hataları boyutunda yer alan MH4 MH5 ve MH7 göstergeleri bu boyutta diğer göstergelere nispeten düşük oranlarda olduğu fark edilmektedir. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının hem MHBT1'de hem de MHBTE2'de aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılma ve aşırı genelleme muhakeme hatası olarak değerlendirilen durumlar bakımından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir. 5.sınıf öğretmen adaylarının benzer şekilde ispat sürecinde sayısal değerler verilerek ilgili matematiksel ifadenin doğruluğunu göstermeyi ispat olarak düşünme olarak nitelendirilen durumlar açısından düşük yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır.

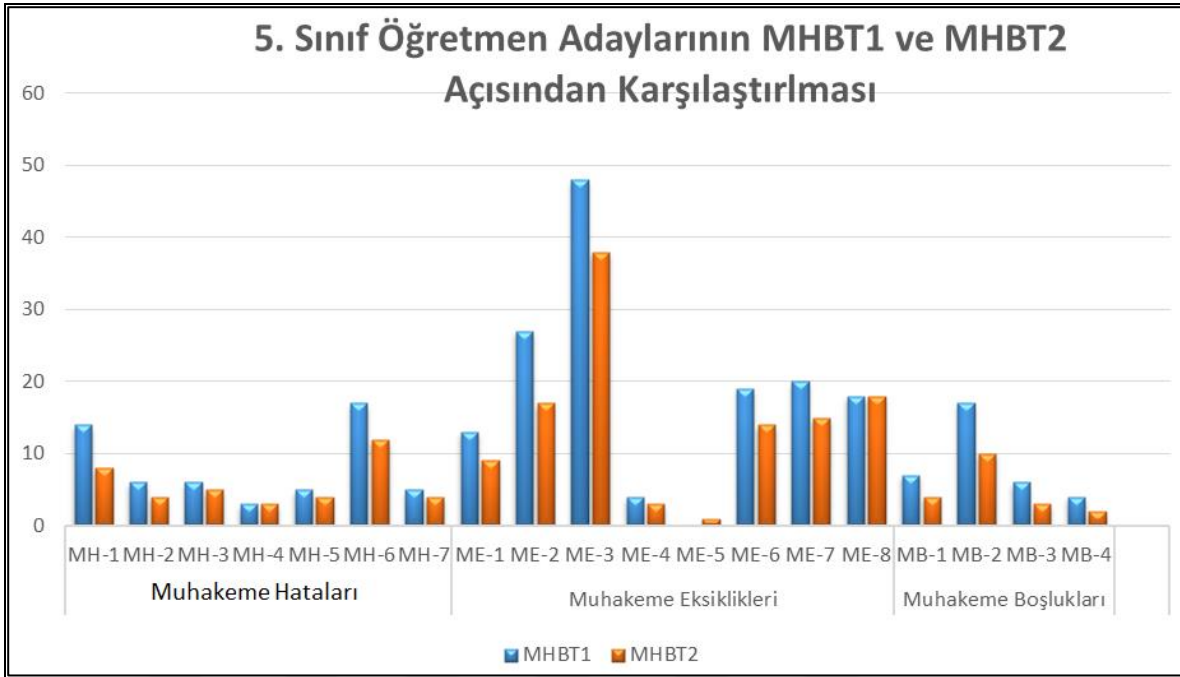
5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde yöntem, tanım aralığı, matematiksel dil gibi eksikliklerle ispatlarını tamamlamaları veya ispatlarını yarım bırakmalarından kaynaklanan durumlar muhakeme eksiklikleri olarak değerlendirilmektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergeler genel olarak incelendiğinde bu boyutta 5.sınıf öğretmen adaylarının hem MHBT1 ve MHBTE2' de sahip oldukları muhakeme eksikliklerinin her iki açık uçlu sınavda da benzerlik gösterdiği fark edilmektedir. Bununla birlikte muhakeme eksiklikleri boyutunda ortaya çıkan göstergelerin yoğunluk olarak MHBT1 ve MHBTE2 arasında bir değişim olduğu göze çarpmaktadır. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME3 göstergesi MHBT1'de en yüksek frekans $f_1=48$ ve %32,2 yüzdeye sahiptir. Buna karşın bu gösterge MHBTE2'de $f_2=38$ ve %30,3 yüzdeyle nispeten daha düşük yoğunlukta olduğu fark edilmektedir. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1'de ispat sürecinde ilgili matematiksel ifadesin tanım aralığını dikkate almama muhakeme eksikliği olarak değerlendirilen durumlar açısından daha fazla yoğunlukta olduklarını göstermektedir. Ancak her iki açık uçlu sınavda da ME3 göstergesinin benzer yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME2 göstergesi hem MHBT1 hem MHBTE2'de yüksek frekans $f_1=27, f_2=17$ ve yüzdeye sırasıyla %18,1, %14,7 sahiptir. Bununla birlikte bu

göstergenin MHBT2'de düşük oranda da olsa bir düşüş gösterdiği söz konusudur. Bu durum, 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının her iki açık uçlu sınavda da ispata başlama veya başlangıç yaptıkları ispatları devam edememe açısından yoğunlukta olduğunu göstermektedir. Muhakeme eksikleri boyutunda yer alan ME8 göstergesi bu boyutta benzer şekilde hem MHBT1'de hem de MHBT2'de yüksek frekans $f_1=20, f_2=18$ ve yüzdeye sırasıyla %13,4,%15,6 sahiptir. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde iki yönlü koşullu bir önermenin ispatı yaparken her iki tarafın incelenmesi gerektirdiği durumlarda sadece bir taraftan inceleyerek ispatları yapmaya çalıştıklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikler boyutunda yer alan ME6 göstergesi hem MHBT1 hem MHBT2'de bu boyutta diğer göstergelere göre frekans $f_1=19, f_2=14$ ve yüzdeye sırayla %12,7,%12,1 sahiptir. Her iki açık uçlu sınavda da 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ME6 göstergesi açısından birbirine oldukça yakın oranlarda bu muhakeme eksikliğine sahip oldukları fark edilmektedir. Ancak MHBT2'de bir düşüşün söz konusu olduğu göze çarpmaktadır. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının matematik dilini kullanmada yetersizlik, ispat adımlarında matematiksel sembol, tanım veya teorem gibi ifadelerinin kullanımında matematik diline dikkat etmeme olarak nitelendirilen durumlar bakımından önemli oranda sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME7 göstergesi MHBT1'de frekans $f_1=18$ ve %12 yüzdeyle ve MHBT2'de frekans $f_1=15$ ve %13 yüzdeyle benzer yoğunlukta ortaya çıkmıştır. Bu durum ispat sürecinde 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının dikkate değer oranda ispat yapmada sistematikliğin olmaması olarak değerlendirilen muhakeme eksikliğine sahip olduklarını göstermektedir. 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme eksikliklerini belirlemek amacıyla yapılan MHBT1 ve MHBT2'ye yönelik oluşturulan tablodaki veriler incelendiğinde her iki açık uçlu sınavda da muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME4 ve ME5 göstergeleri bu boyutta diğer göstergelere nispeten daha düşük oranlarda sahip oldukları görülmektedir. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı olarak nitelendirilen durumlar veya ispat sürecinde aşırı genelleme muhakeme hataları olarak değerlendirilen durumlar bakımından hem MHBT1'de MHBT2'de düşük sahip olduklarını göstermektedir.

İspat sürecinde, ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmayarak ispatın tamamlanması gibi durumlar muhakeme boşluğu olarak değerlendirilmektedir. 5.sınıf öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergeler hem MHBT1 hem de MHBT2 göz önüne alındığında MB2 göstergesi her iki açık uçlu sınavda da en yüksek frekans $f_1 =17, f_2 =10$ ve yüzdeye sırasıyla %41,5, %42,6 sahiptir. Bu durum

5. Sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun ispat sürecinde kullandıkları önermeleri gerekçelendirmeden ispatları yapmaya eğilim gösterdiklerini veya ispatları belli ezber kalıplar ile yapmaya çalıştıkları görülmektedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispat adımlarında kullanılan önermelerinin ve ortaya atılan iddiaların bir gerekçeye dayandırmadan geçersiz ispatlar oluşturuldukları söz konusudur. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB1 göstergesi MHBT1'de frekans $f_1=7$ ve %21,2 yüzdeye sahiptir. Buna karşın bu gösterge MHBT2'de frekans $f_1=4$ ve %21 yüzde ile frekans olarak bir düşüş göstermiştir. Ancak ispat sürecinde yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması muhakeme boşluğu olarak nitelendirilen durumlar bakımından hem MHBT1'de hem MHBT2'de bir farklaşmaya rağmen öğretmen adaylarının her iki açık uçlu sınavda dikkate değer bir oranda MB1 muhakeme boşluğuna sahip oldukları göze çarpmaktadır. Bu durum 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken elde ettikleri sonucu önceki adımlara dayandırmama veya ispat adımları arasında bir ilişki kuramama açısından MHBT2'de daha az yoğunlukta olduklarını göstermektedir. MHBT1 ve MHBT2'nin verileri göz önüne alındığında boşlukları boyutunda yer alan MB3 göstergesi frekans $f_1 =6$, $f_2 =3$ ve yüzdeye sırasıyla %18,1, %15,7 sahiptir. Bu durum 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat yaparken ara aşamaların göz ardı edilme ya da ispatta yazılması gereken bazı adımların atlaması olarak nitelendirilen durumlar açısından dikkate değer bir oranda sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB4 göstergesi hem MHBT1 hem MHBT2'de farklı oranlarda olmasına rağmen bu boyutta diğer göstergelere nispeten daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ve ispatta gereksiz adımlara veya ifadelerle yer verme açısından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

İspata yönelik güz dönemi ders gözlemleri öncesi yapılan MHBT1 ve gözlem sonrası yapılan MHBT2'de 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerinin veya muhakeme boşluklarının benzer olmakla birlikte bu göstergelerinin yoğunluklarında her iki açık uçlu sınava göre bir farklılık söz konusudur. Ancak muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları boyutlarında yer alan her gösterge incelendiğinde MHBT1'e göre genel olarak her bir boyutta göstergelerin frekans ve yüzdeler bakımından bir azalma gösterdiği görülmektedir. 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının gözlem öncesinde ve gözlem sonrasında yapılan açık uçlu sınavlarda sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından MHBT1 ve MHBT2 arasındaki değişimi gösteren Grafik 9 aşağıda sunulmuştur.



Grafik 9. Ders gözlemleri öncesinde ve sonrasında 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması

Grafik genel olarak incelendiğinde 5.sınıf öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları açısından MH1 göstergesi MHBT1’de önemli oranda olduğu görülmektedir. Buna karşın MHBT2’de bu göstergenin yoğunluğundan bir düşüş olmasına rağmen bu boyutta benzer şekilde ön planda olduğu göze çarpmaktadır. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde sonuç ile başlama muhakemesi olarak değerlendirilen durumlar bakımından her iki sınavda da dikkate değer yoğunlukta sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH6 göstergesi bu boyutta göze çarpan başka bir muhakeme hatası olduğu fark edilmektedir. Hem MHBT1 hem MHBT2’de bu göstergeye yönelik oranlarda benzer bir yoğunluk söz konusudur. Ancak ikinci açık uçlu sınavda MH6 göstergesine yönelik durumların birinci açık uçlu sınavda daha yoğunlukta olduğu fark edilmektedir. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1’de ispatları yaparken bir teoremin karşıt tersinin kendisinin dengi olduğunun farkına varamama muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar bakımından daha fazla sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH3 göstergesi birinci açık uçlu sınavda belli bir yoğunlukta olduğu fark edilmektedir. Buna karşın ikinci açık uçlu sınavda bu göstergeye yönelik oranının değişim göstererek azaldığı görülmektedir. Bu durum, öğretmen adaylarının MHBT1’de ispatları yaparken farklı notasyonları ispat olarak düşünme açısından daha yoğunlukta olduğunu göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda her iki açık uçlu sınavda da MH7

göstergesinin dikkate değer oranda olduğu göze çarpmaktadır. Ancak ikinci açık uçlu sınavda bu göstergenin daha düşük yoğunluktadır. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1’de ispatları yaparken sayısal değerler kullanmak veya sadece birkaç durumdan hareketle ispatların tamamlandığı düşünme açısından çoğunlukta olduğunu göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda MH4 ve MH5 göstergeleri hem MHBT1 hem MHBT2’de bu boyutta en düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının her iki açık uçlu sınavda da aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılması ve aşırı genelleme muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar bakımından diğer göstergelere nispeten daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

Ortaöğretim matematik öğretmenliği programında yürütülen ispata yönelik güz dönemi ders gözlemleri sonrası yapılan MHBT2 verileri göz önüne alındığında 5.sınıf öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerinin veya muhakeme boşluklarının genel olarak bir değişim gösterdiği fark edilmektedir. Bununla birlikte her bir boyutta bazı göstergelerin benzer şekilde MHBT2’de de ön plana çıkmaktadır. Muhakeme hataları boyutunda sonuç ile başlama muhakeme hatası MHBT1’de %25 iken MHBT2’de %20 olarak ortaya çıkmıştır. 5. sınıf seviyesinde yer alan S12 kodlu öğretmen adayının MHBT2’de yapmış olduğu ispat MH5 muhakeme hatası olarak değerlendirilmiştir. Bu durum Şekil 65’te örnek olarak sunulmuştur.

S5: $a, b \in \mathbb{Z}^+$, a, b tek sayıdır, ancak ve ancak a ve b nin her ikisi de tektir. önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

a, b tek sayıdır $\Leftrightarrow a$ ve b ikisinde de tek

" \Leftarrow " a ve b tek $\Rightarrow a \cdot b = (\text{tek}) \cdot (\text{tek})$
 $= \text{tek}$
 $\Rightarrow a \cdot b$ tektir.

" \Rightarrow " $a \cdot b$ tek ise $\Rightarrow a$ ve b tektir.
 $\Rightarrow a \cdot b$ tek $\Leftrightarrow a$ ve b tektir

Şekil 65. MH5 göstergesine yönelik ispat örneği

İspat sürecinde öğretmen adayının MHBT2’nin 5. sorusunda yapmış olduğu işlemler incelendiğinde matematiksel soruda verilen “ a ve b pozitif tamsayıları için $a \cdot b$ tek sayıdır ancak ve ancak a ve b nin her ikisi de tektir.” şeklindeki ifadenin ispatı için öğretmen adayının sadece bir kuralla bağlı olarak ifadenin doğru olacağını düşündüğü görülmektedir. Öğretmen adayı ilgili ispatın çift yönlü koşullu bir önerme olduğunu fark etmiştir. Ancak ispatın adımlarında sadece “ $a \cdot b = \text{tek} \cdot \text{tek}$ ise sonuç tek olur.” Gibi sadece

matematiksel bir kurallı ezberden yazmayı ispat için yeterli olduğunu düşünmüştür. Öğretmen adayı bunun farkına varmadan sadece bir kuralın geçerliliğine dayanarak veya kuralı evrensel kabul ederek ispatı tamamlamaya çalışmıştır. Bundan dolayı öğretmen adayının yapmış olduğu muhakeme hatası aşırı genelleme muhakeme hatası olarak belirlenmiştir.

İspat sürecinde 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2'ye ilişkin cevapları incelendiğinde aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılması muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumların muhakeme hataları boyutunda yer alan göstergelere nispeten daha düşük oranlarda ortaya çıktığı görülmektedir. 5.sınıf seviyesinde yer alan S1 kodlu öğretmen adayının yapmış olduğu ispat örnek olarak Şekil 66'da sunulmuştur.

SORULAR

S1: "Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 tek tam sayı ise, n de tek tam sayıdır." ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

$$n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 2 \cdot 2k^2 + 2 \cdot (2k+1) + 1 = 2x + 2y + 1 = 2(x+y) + 1 = 2m + 1$$

↓
Tek Sayı ✓

Şekil 66. MH4 göstergesine yönelik ispat örneği

Öğretmen adayının MHBT2'nin 1. sorusuna yönelik yaptığı ispat incelendiğinde öğretmen adayının soruda verilen "Herhangi bir n pozitif tamsayı için n^2 tek tamsayı ise n de tek tamsayıdır." şeklinde matematiksel ifadenin ispatını yaparken izlediği adımlarda değişkeni tanımlamada aynı ifade için k, x,y,m gibi birçok değişken tanımladığı görülmektedir. 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayı ispatın ilk adımında " $n=2k+1$ " olarak bir tanımlama yapmıştır. Sonraki adımlarda ilk ifadenin karesini alarak $n^2=(2k+1)^2$ diğer adımları benzer şekilde " $n^2=2x+2y+1=2m+1$ " gibi aynı ifade için sadece farklı değişkenler kullanmayı ispat olarak düşünmüştür. Dolayısıyla öğretmen adayı ispat sürecinde yanlış varsayımla birlikte ilgili matematiksel ifadenin ispatında aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanmayı ispat olarak düşünmüştür. Bu durum, öğretmen adayının MH4 muhakeme hatasına sahip olduğunu göstermiştir.

Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergeler genel olarak incelendiğinde MHBT1 ve MHBT2'de bazı göstergelerin benzer yoğunlukta olduğu fark edilmektedir. Ancak her iki açık uçlu sınav arasında göstergelerin oranlarında bir farklılaşma söz

konusudur. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME3 göstergesi hem MHBT1'de hem MHBT2'de bu boyutta frekans ve yüzde olarak en fazla yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bununla birlikte tanım aralığına dikkat edememe açısından MHBT1'de öğretmen adaylarının daha yoğunlukta olduğu fark edilmektedir. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2'de ispat sürecinde ilgili matematiksel ifadenin tanımlı olduğu aralığa daha fazla dikkat ettiklerini göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME2 göstergesi her iki açık uçlu sınavda da yüksek oranda ortaya çıkmakla birlikte MHBT1'de bu göstergeye yönelik durumların daha fazla yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1'de ispatları boş bırakma veya başlangıç yaptıkları ispatları devam ettiremem açısından daha düşük yoğunlukta olduğu fark edilmektedir. Her iki açık uçlu sınavda da muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME1 göstergesi benzer şekilde dikkate değer bir yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. Bununla beraber ispat sürecinde yöntemsel eksiklik olarak nitelendirilen durumların MHBT1'de daha yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde kullanılacak en uygun ispat yöntemini seçme veya her hangi bir ispat yöntemini doğru kullanamama olarak nitelendirilen durumlar açısından MHBT1'de daha fazla yoğunlukta olduklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME6 göstergesi hem MHBT1 hem MHBT2'de belli bir yoğunlukta olduğu fark edilmektedir. Ancak MHBT2'de bu göstergeye yönelik yoğunluğun MHBT1'e göre daha düşük olduğu görülmektedir. Bu durum, 5.sınıf öğretmen adaylarının matematik dilini kullanmada yetersizlik veya ispat adımlarında matematiksel sembol, tanım ve teorem gibi ifadelerinin kullanımında matematik diline dikkat edememe olarak değerlendirilen durumlar bakımından MHBT2' de daha az yoğunlukta olduklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME8 göstergesi hem MHBT1'de hem MHBT2'de oldukça yakın oranlarda olduğu fark edilmektedir. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının her iki açık uçlu sınavda da iki yönlü koşullu bir önermenin ispatı yaparken her iki tarafın incelenmesi gerektirdiği durumlarda sadece bir taraftan inceleyerek ispatlarını tamamladıklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergeler genel olarak incelendiğinde hem MHBT1 hem MHBT2'de ME4 ve ME5 göstergeleri bu boyutta yer alan diğer göstergelere nispeten daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı olarak nitelendirilen durumlar veya ispat sürecinde matematiksel tanımların hatalı kullanılması açısından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

İspata yönelik ders gözlemleri sonrası yapılan MHBT2 verileri göz önüne alındığında muhakeme eksiklikleri boyutunda 5. sınıf öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme eksiklikleri bakımından genel olarak bir düşüştten söz edilebilir. Bununla birlikte bu boyutta bazı göstergeler MHBT1’de olduğu MHBT2’de de benzer yoğunlukta olduğu ön plana çıkmaktadır. 5. sınıf seviyesinde yer alan S13 kodlu öğretmen adayının MHBT2’de 8.soruda yapmış olduğu ispat incelendiğinde ME6 muhakeme eksikliği olarak değerlendirilmiştir. Öğretmen adayının yapmış olduğu ispat Şekil 67’de örnek olarak sunulmuştur.

S8: "Eğer x bir rasyonel sayı ve y bir irrasyonel sayı ise $y - x$ bir irrasyonel sayıdır." Önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

$x \in \mathbb{Q}$ ve $y \in \mathbb{Q}'$ olsun.

Örneğin $x = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}$) olsun. $b \neq 0$

$y = \sqrt{k}$ ($k < 0$ olsun)

$y - x = \sqrt{k} - \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{k} \cdot b - a}{b}$ rasyonel olmaz,

Örneğin $\Rightarrow \sqrt{-3} - \frac{5}{2} = \frac{2\sqrt{-3} - 5}{2} \Rightarrow$ rasyonel değildir.

Şekil 67. ME6 göstergesine yönelik ispat örneği

İspat sürecinde öğretmen adayının MHBT2’nin 8. sorusuna yönelik yapmış olduğu ispat incelendiğinde öğretmen adayının ispat yaparken sayısal değerler vererek ispat yapmayı tercih etmesiyle birlikte matematik dilini de doğru bir şekilde kullanılmadığı fark edilmektedir. Öğretmen adayı soruda verilen "Eğer x bir rasyonel ve y bir irrasyonel sayı ise $y - x$ bir irrasyonel sayıdır." şeklindeki matematiksel ifadenin ispatını yapmak için rasyonel bir sayıyı " b sıfırdan farklı olmak üzere a, b doğal sayıları için $x = a/b$ dir." şeklinde doğru bir tanımlama yapmasına rağmen irrasyonel sayı tanımı için herhangi bir matematiksel dayanağı olmayan bir tanımlama yapmıştır. Öğretmen adayı y rasyonel sayısını " $y = \sqrt{k}$ ve ($k < 0$ olsun)" şeklinde tanımlamıştır. Devamında $\sqrt{-3}$ olarak sayısal bir değer ile ispatını tamamlamaya çalışmıştır. Öğretmen adayın matematik dilini kullanmada yetersizlik gösterdiği düşünülmektedir. Bu durumlar göz önünde bulundurulduğunda öğretmen adayının yapmış olduğu muhakeme eksikliği; matematik dilinin yetersiz kullanılması şeklinde belirlenmiştir.

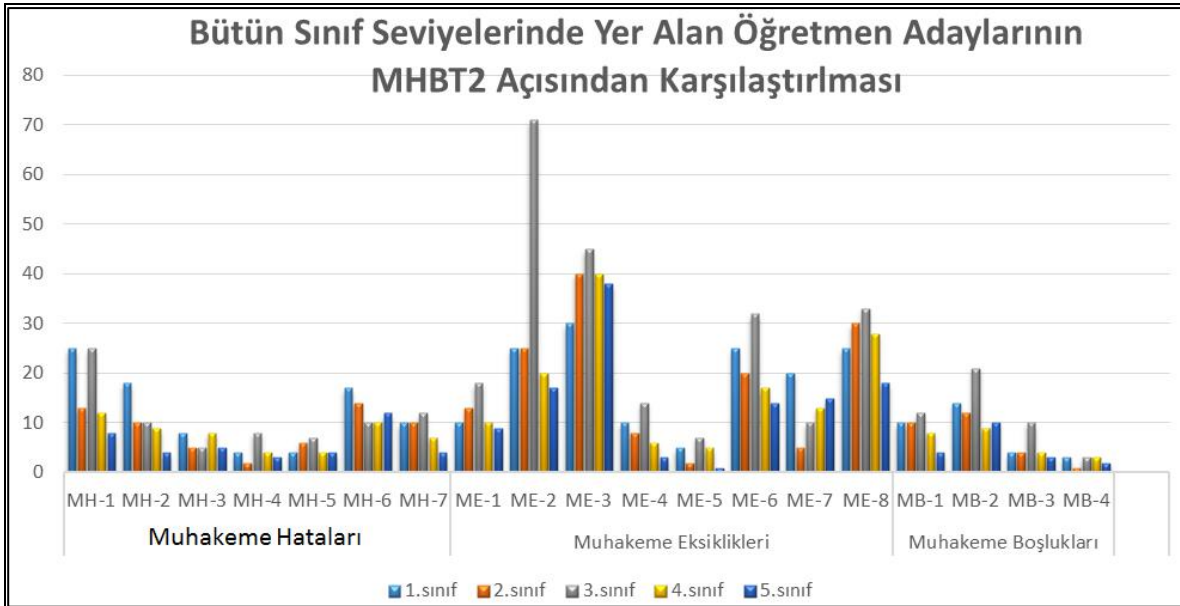
Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergeler incelendiğinde MHBT1 ve MHBT2’de benzer muhakeme boşluklarının yoğunluklarının da benzer olduğu görülmektedir. Bununla birlikte MHBT2’ de düşük oranlarda olsa da bir düşüştten söz edilebilir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB2 her iki açık uçlu sınavda da bu boyutta en fazla ön plana çıkan gösterge olduğu fark edilmektedir. Bununla beraber

MHBT1 ve MHBT2 arasında bu göstergenin oranına yönelik bir değişim söz konusudur. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde, ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan ispatlarını tamamlama olarak nitelendirilen durumlar veya ilgili adımlar arasında bir ilişki kurmayarak ispatın tamamlanması açısından MHBT1’de daha fazla yoğunlukta olduklarını göstermektedir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB1 göstergesi MHBT1’de dikkate değer bir yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. Bununla birlikte MHBT2’de bu yoğunlukta bir düşüşün olduğu fark edilmektedir. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması olarak nitelendirilen durumlar bakımından MHBT2’ de daha düşük oranda olduklarını göstermektedir. Bununla birlikte 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının her iki açık uçlu sınavda da matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken elde edilen sonucun önceki adımlara dayandırılmama olarak değerlendirilen durumlar veya oluşturulan ispat adımları arasında bir ilişkinin olmaması açısından belli bir oranda sahip olduklarından söz edilebilir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB3 ve MB4 göstergeleri hem MHBT1 hem de MHBT2’de bu boyutta yer alan diğer göstergelere yoğunluk olarak farklılık göstermekle birlikte her iki sınavda da daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Bu durum 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispatta ara aşamaların göz ardı edilmesi veya ispatta yazılması gereken bazı adımların atlaması olarak nitelendirilen durumlar ve ispatta gereksiz adımlara veya ifadelere yer verme açısından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

İspata yönelik ders gözlemleri sonrası yapılan MHBT2 verileri göz önüne alındığında muhakeme boşlukları boyutunda 5.sınıf öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme boşlukları bakımından genel olarak bir farklaşmadan söz edilebilir. Bu durum, muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergelerin oranlarının MHBT2’de daha az yoğunlukta olduğunu göstermektedir. Ancak bu boyutta bazı göstergelerin oranlarının MHBT1 ile benzer şekilde MHBT2’de yüksek oranda olduğu fark edilmektedir.

Gözlem sonrası yapılan MHBT2’ de bütün sınıf seviyelerindeki öğretmen adaylarının benzer muhakeme hatalarına, muhakeme eksikliklerine veya muhakeme boşluklarına sahip oldukları ve bu göstergelerinin yoğunlukları sınıf seviyelerine göre değişim gösterdiği görülmektedir. Bununla birlikte muhakeme hataları, eksiklikleri ve boşlukları boyutlarında yer alan kategoriler incelendiğinde alt sınıf seviyelerinden üst sınıf seviyelerine doğru gidildikçe frekans ve yüzdeler bakımından bir azalmanın olduğu göze çarpmaktadır. Bu değişim ve yoğunlukları daha somut göstermek amacıyla çeşitli tablo ve grafiklere yer verilmiştir. Öğretmen adaylarının gözlem öncesinde yapılan MHBT2’de

sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından sınıf seviyeleri arasındaki değişimi gösteren Grafik 10 aşağıda sunulmuştur.



Grafik 10. Gözlem öncesinde öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının karşılaştırılması

4. 4. Matematik Öğretmenliği Programında Bahar Döneminde Yürütülen Derslerin İspat Sürecinde Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları Açısından Değerlendirilmesi

Bu bölümde ortaöğretim matematik öğretmenliği programının bahar döneminde yürütülen Analiz 2, Cebir 2, Soyut Matematik ve Lineer Cebir derslerinin içerik ve yaklaşım, öğretim elemanlarının görüşleri ve öğrencilerin soru ve görüşleri bağlamında ele alınarak ispat sürecinde muhakemeye odaklanan noktalar resmedilmiştir. 2015- 2016 eğitim öğretim yılının bahar döneminde 1.hafta ile 8.hafta arasındaki her bir ders için haftada minimum 2 saat olmak üzere toplamda 62 saat boyunca gözlemler yapılmıştır. Bu ders gözlemlerine yönelik veriler; oluşturulan gözlem formunda yer alan boyutlardaki göstergelere göre değerlendirilerek öğretim üyelerinin yoğunlaştıkları noktalar belirlenmiştir. Bu kısımda öncelikle gözlemlerden elde edilen veriler, betimsel olarak sunulduktan sonra alan notları ve öğretim elemanlarının örnek ifadelerine yer verilmiştir. Ayrıca ders gözlemlerine yönelik veriler üzerinden bu dersler arasında karşılaştırmalar yapılarak her bir ders için mevcut durum tablo ve grafiklerle sunulmuştur.

Ortaöğretim matematik öğretmenliği programında güz döneminde yürütülen derslerde yapılan gözlemlerde elde edilen verilerin gözlem formunda hangi kategoride yer aldığı ve bu kategoriler ile ilgili frekans ve yüzde dağılımları Tablo 22’de sunulmuştur.



Tablo 22. Bahar Döneminde Yürütülen Derslerinin Gözlem Formunda Yer Alan Matematik Dili ve sistematikleştirme, Öğrenci Muhakemesine Odaklanma ve İspat Yöntemlerinin Yer Aldığı Kategorilere Yönelik Frekans ve Yüzde Dağılımları

	Soyut Matematik			Cebir 2			Analiz 2			Lineer Cebir		
	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%
Matematik Dili ve Sistematikleştirme	MD-1	21	31,3	MD-1	12	18,7	MD-1	16	30,1	MD-1	15	35,7
	MD-2	12	17,9	MD-2	15	23,4	MD-2	11	20,7	MD-2	4	9
	MD-3	6	8,9	MD-3	5	7,8	MD-3	6	11,3	MD-3	5	11,3
	MD-4	8	11,9	MD-4	9	14	MD-4	8	15	MD-4	4	9
	MD-5	2	2,9	MD-5	4	6,25	MD-5	5	9,4	MD-5	2	4,5
	MD-6	3	4,4	MD-6	2	3,1	MD-6	0	0	MD-6	0	0
	MD-7	0	0	MD-7	1	1,6	MD-7	0	0	MD-7	2	4,5
	MD-8	4	6,9	MD-8	2	3,1	MD-8	1	1,8	MD-8	1	2,25
	MD-9	11	16,4	MD-9	14	21,8	MD-9	6	11,3	MD-9	11	25
Öğrenci Muhakemesine Odaklanma	ÖM-1	8	7,2	ÖM-1	3	8,1	ÖM-1	10	10,7	ÖM-1	4	11,1
	ÖM-2	2	1,8	ÖM-2	2	5,4	ÖM-2	5	5,3	ÖM-2	1	2,7
	ÖM-3	1	0,9	ÖM-3	0	0	ÖM-3	5	5,3	ÖM-3	1	2,7
	ÖM-4	3	2,7	ÖM-4	1	2,7	ÖM-4	6	6,4	ÖM-4	1	2,7
	ÖM-5	8	7,2	ÖM-5	4	10,8	ÖM-5	11	11,8	ÖM-5	8	22,2
	ÖM-6	16	14,4	ÖM-6	2	5,4	ÖM-6	9	9,6	ÖM-6	3	8,3
	ÖM-7	8	7,2	ÖM-7	6	16,2	ÖM-7	9	9,6	ÖM-7	4	11,1
	ÖM-8	3	2,7	ÖM-8	1	2,7	ÖM-8	5	5,3	ÖM-8	0	0
	ÖM-9	2	1,8	ÖM-9	1	2,7	ÖM-9	0	0	ÖM-9	1	2,7
	ÖM-10	3	2,7	ÖM-10	1	2,7	ÖM-10	0	0	ÖM-10	1	2,7
	ÖM-11	3	2,7	ÖM-11	0	0	ÖM-11	5	5,3	ÖM-11	0	0
	ÖM-12	17	15,3	ÖM-12	11	29,7	ÖM-12	21	22,5	ÖM-12	10	27,7
	ÖM-13	2	1,8	ÖM-13	1	2,7	ÖM-13	3	3,2	ÖM-13	0	0
	ÖM-14	11	9,9	ÖM-14	4	10,8	ÖM-14	4	4,3	ÖM-14	2	5,4
İspat Yöntemleri	İY-1	12	66,6	İY-1	3	50	İY-1	4	50	İY-1	3	50
	İY-2	4	22,2	İY-2	1	16,6	İY-2	1	12,5	İY-2	2	33,3
	İY-3	0	0	İY-3	2	33,4	İY-3	3	37,5	İY-3	0	0
	İY-4	2	11,2	İY-4	0	0	İY-4	0	0	İY-4	1	16,6

Genel olarak tablo incelendiğinde matematik dili ve sistematikleştirme boyutunda yer alan MD-1 göstergesinin her bir ders için en fazla ön plana çıktığı görülmektedir. Bu durum öğretim elemanlarının matematik dilinin doğru kullanılmasına dikkate değer oranda vurguladığı göstermektedir. Matematik dili ve sistematikleştirme boyutunda yer alan MD-2 göstergesinin yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. Matematiksel tanımlara, genel kurallarının geçerli olduğu kümelere dikkat edilmesi gerektiğini vurgulama olarak değerlendirilen MD-4 göstergesi matematik dili ve sistematikleştirme boyutunda yer alan diğer göstergelere nispeten öğretim elemanlarının derslerinde daha fazla vurguladıkları fark edilmektedir. Matematik dili ve sistematikleştirme kategorisinde yer alan göstergelerden öğrencilerinin eksik veya gereksiz değişkenleri fark etmelerini sağlama (MD-7), ispatta gereksiz adım veya ifadelerle yer verilerek öğrencilerin fark etmelerini sağlama (MD-6) ve ispat yapılırken ara aşamalarının kasıtlı bir şekilde göz ardı edilerek öğrenenlerin fark etmelerini sağlama (MD8) göstergeleri bütün derslerde en az vurgulanan durumlar olduğu görülmektedir. Ancak bu göstergelerin matematik dili ve sistematikleştirme boyutunda yer alan diğer göstergeler nispeten ders bazında farklı oranlarda olduğundan söz konusudur.

İspat sürecinde öğrenci muhakemesine odaklama olarak değerlendirilen boyutta ders bazında göstergelerin oranlarda bir farklılık söz konusu olmakla birlikte bu boyutta benzer göstergelerin yoğunlukta olduğu fark edilmektedir. Öğrenci muhakemesine odaklama boyutunda öğrencileri muhakeme süreçlerini açıklamaları konusunda teşvik etme (ÖM-1), öğrencilerin ispat adımları arasındaki ilişkilere yönelik sorular yönelterek ispata devam etmelerini sağlama (ÖM-12) göstergelerinin yüksek frekans ve yüzdeyle ortaya çıktığı görülmektedir. Bununla beraber bu boyutta yer alan özel durumlardan hareketle öğrencileri genel önermeler üretmeye yönlendirme (ÖM-14) ve öğrencilerin oluşturdukları ispatları açıklayarak sunma, kullandıkları önermelerin gerekçelerini belirtmelerini isteme (ÖM-11) göstergeleri derslere göre değişen oranlara rağmen ön planda olduğu görülmektedir. Öğrenci muhakemesine odaklama boyutunda yer alan göstergeler genel olarak incelendiğinde, grupların oluşturulup öğrencilerin birbirleriyle etkileşime girerek çalışmalarını sağlama (ÖM-3), bir önermenin karşıtının doğru olmadığını karşıt örnekler yardımıyla açıklama (ya da öğrencilerden karşıt örnekler vermelerini isteme) (ÖM-10), çeşitli muhakeme hatalarını içeren farklı ispatların örnek gösterilmesi ve bunların tartışılmasını sağlama (ÖM-13) daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir.

İspat yöntemleri boyutunda yer alan göstergeler genel olarak incelendiğinde bu boyutta yer alan her bir deste en fazla vurgulanan durumların verilen bir önermenin ispatını yapabilmek için en uygun ispat yönteminin belirlenmesine yönelik öğrencilerin

tartışmasını sağlama (İY-1) olduğu fark edilmektedir. Bununla beraber ispat sürecinde farklı ispat yöntemlerinin varlığına vurgu yapma (İY-4) göstergesinin de benzer şekilde yoğunlukta olduğundan söz edilebilir. Buna karşın bir önermenin ispatını birden fazla ispat yöntemini kullanarak yapma (İY-2) ve ispat yöntemi aynı olmak koşuluyla farklı yaklaşımları değerlendirme (İY-3) göstergelerinin daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir.

4. 4. 1. Bahar Dönemi Ders Gözlemlerinin Matematik Dili ve Sistematikleştirme Açısından Değerlendirilmesi

Ortaöğretim matematik öğretmenliği programında bahar döneminde ispatların yoğun olarak işlendiği Soyut Matematik, Analiz 2, Cebir 2 ve Lineer Cebir gibi derslerde yer verilen uygulamaların içeriği, derslerdeki uygulamalarda kullanılan yaklaşımlar, öğretim elemanlarının muhakeme veya muhakeme hatalarına yönelik kullandığı ifadeler, sınıfta yaptığı ispatlar ve açıklamalar, öğrencinin muhakemesine yönelik sorulan sorular, öğrencilerin verdiği cevaplar, öğrencilerin sorduğu sorular, teoremlerin ispatları sırasında yapılan sınıf tartışmaları öğrenci ispatlarının sunumları gibi muhakemeye yönelik durumlar derslere göre farklılık göstermektedir. Bu durum; öğretim elemanlarının ispat sürecinde muhakeme bağlamında geniş bir yelpazede farklı noktalara yoğunlaştıkları göstermektedir.

Her bir ders ayrı ayrı incelendiğinde matematik dili ve sistematikleştirme boyutunda yer alan göstergeler genel olarak incelendiğinde bu boyutta matematik dilinin doğru kullanılmasına vurgu yapma (MD-1) göstergesinin bütün derslerde en yüksek frekans ($f_{ST}=21$, $f_{A2}=16$, $f_{LC}=15$, $f_{C2}=12$) ve yüzdeler (sırasıyla %31,3, %30,1, %35,7, %18,7) sahiptir. MD-1'e ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde genel olarak matematik dilinin doğru kullanılmasına vurgu yapma bütün derslerde dikkate değer bir oranda ön planda olmasına rağmen bu oranının Cebir 2 dersinde %18,7 ile daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, öğretim elemanlarının her birinin derslerinde matematik dilinin doğru kullanılmasına vurgu yapma açısından dikkate değer bir oranda olduğunu göstermektedir. İspat sürecinde MD-1 göstergesine yönelik Soyut Matematik dersinde öğretim elmanı ile öğretmen adayları arasında geçen diyalog örnek olarak sunulmuştur.

ÖE1: Teorem: (iyi sıralama ilkesi) – bu tanımı hep duyarsınız iyi sıralı ne demek işte bu gün onu öğrenmiş oluruz. N doğal sayılar kümesinin boş olmayan her alt kümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu teoremi ispatlamak için iki kavram daha tanımlamak gerekir minimum ve maksimum peki

Minimum ne? Maksimum ne?

Ö1: *en küçük değer ile en büyük değer*

ÖE1: *Güzel günlük dilde böyle denir. Matematiksel olarak nasıl ifade ederiz. Bizim için önemli olan bu*

Ö1: *onu da Oğuzhan söylesin hocam*

ÖE1: *Oğuzhan söyleyecek misin? Topu sana attı*

Ö2: *yok hocam ifade edemem*

ÖE1: *arkadaşlar kullandığımız kavramların ne anlama geldiğini bilmiyorsak veya bunları matematiksel olarak ifade edemiyorsak işimiz zor. Şimdi bunların matematiksel tanımlarını yazalım... (Soyut Matematik 4.ders-10.03.2016)*

Öğretim elmanı yazdığı bir tanım üzerine sorduğu maksimum ve minimum kavramlarının tanımına yönelik sorusuna bir öğrenci günlük dil ile ifade etmektedir. Bunun üzerine öğretim elemanı ifadenin matematik diline uygun olması gerektiğini belirterek matematik dilinin doğru kullanılmasına vurgu yapmaktadır.

Matematik dili ve sistematikleştirme boyutunda yer alan göstergelerden matematiğin aksiyomatik yapısına vurgu yapma (MD-2) göstergesi derslere göre farklı oranlarda olduğu görülmektedir. Bu gösterge en yüksek frekans ($f_{C2}=15$, $f_{ST}=12$, $f_{A2}=11$, $f_{LC}=5$,) ve yüzdeye (sırasıyla %23,4, %17,9, %20,7, %11,3) sahiptir. MD-2 göstergesi Cebir 2 dersinde %23,4 ile diğer derslere nispeten daha ön planda olduğu görülmektedir. Bu durum, genel olarak matematiğin aksiyomatik yapmasına vurgu yapmaya yönelik farklı derslerde öğretim elemanlarının vurguladığı durumların mevcut olduğunu göstermektedir. Bu duruma örnek olarak ÖE4'ün dersinde bir kesit sunulmuştur.

ÖE4: *şimdi yeni bir başlık atalım: Doğal sayılarda sıralama*

- bu bölümde doğal sayılar kümesi üzerinde bir kısmi sıralama tanımlıyoruz. Yani sadece doğal sayılarda çalışacağız

Ö1: *kısmi sıralama ne hocam?*

ÖE4: *Kısmi sıralamayı aslında daha önce tanımlamıştık. Hatırlamaya çalış önceki dönemden bilmemiz gerekiyor. tekrar hatırlatalım :*

$x, y \in \mathbb{N}$ olsun Eğer $x = y + v$ olacak şekilde bir "v" varsa y sayısı eğer $x = y + u$ ve $u \neq 0$ ise x doğal sayısı y doğal sayısından büyüktür denir. $X > Y$ şeklinde gösterilir bundan yararlanarak devam edelim

ÖE4: *Doğal sayılar üzerinde tanımlanan " \leq " bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. neydi kısmi sıralama yani hangi özeliği vardı?*

Ö2: *yansıyan, simetri, geçişken*

ÖE4: *güzel neydi yansıyan? bakalım tekrar. Şimdi arkadaşlar yeni bir şey inşa edeceğiz onun için önceki önermeleri veya tanımları iyi bilmeliyiz bunlar birbirinden bağımsız değil... (Soyut Cebir 2.ders-04.03.2016)*

Öğretim elemanı dersinde doğal sayılarda sırlamaya yönelik verdiği önermenin önceki matematiksel tanım ve teoremlerle ilişkili olduğuna dikkat çekmektedir. Dolayısıyla matematiğin aksiyomatik yapıda olduğu ve bir bütün olarak ele alınması gerektiğini, önermelerin, kurallarının bir birleri ile ilişkili olduğunu vurgulamaktadır.

Matematik dili ve sistematikleştirme boyutunda yer alan göstergelerden matematiksel tanımlara, genel kurallarının geçerli olduğu kümelere dikkat edilmesi gerektiğini vurgulama (MD-4) göstergesi bu boyutta öğretim elemanlarının yoğunlaştıkları durumlardan biridir. Bu gösterge en yüksek frekans ($f_{ST}=21$, $f_{A2}=16$, $f_{LC}=15$, $f_{C2}=12$) ve yüzdeye (sırasıyla %31,3, %30,1, %35,7, %18,7) sahiptir. Bu göstergeye ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde öğretim elemanlarının benzer noktalara vurgulamalar yaptıklarına işaret etmektedir. Matematiksel ifadelerinin geçerli olduğu kümelere öğretmen adaylarının dikkat etmelerini sağlayabilecek ifadelere öğretim elemanları tarafından farklı derslerde yer verilmiştir. ÖE3'ün dersinde bir kesit aşağıda yer almaktadır.

Uyarı: R birim elemanlı kom. bir halka olsun

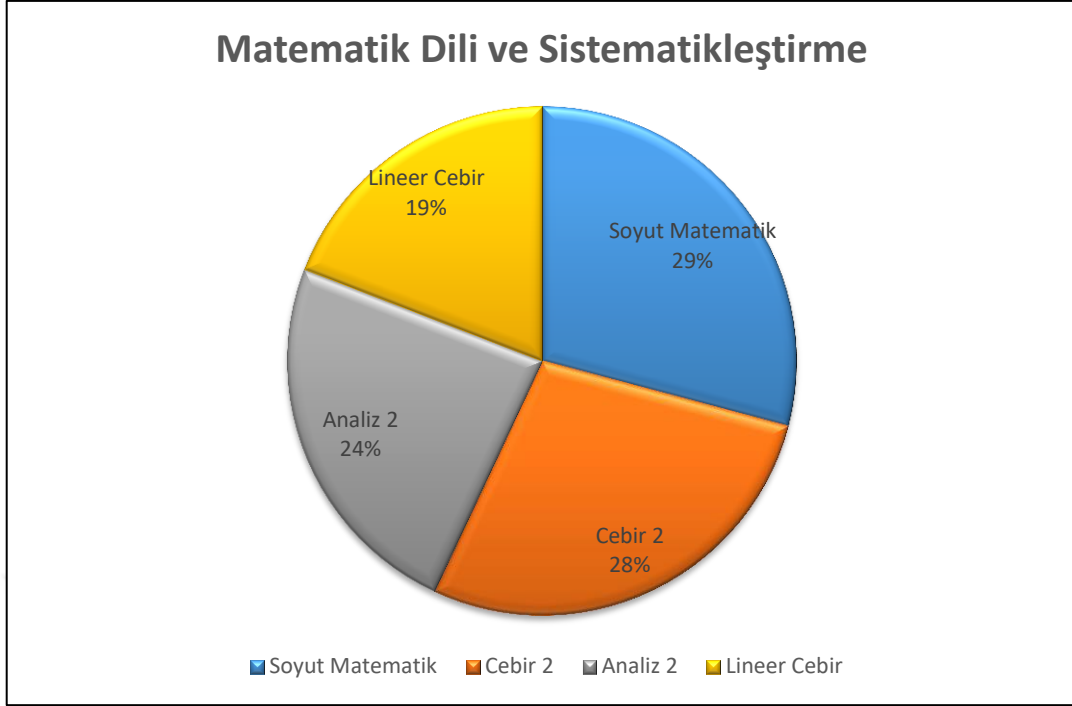
1) $\langle i \rangle = R, \langle 0_R \rangle = (0_R)$ dir.

2) $I \in \diamond R$

Halka birim elemanlı olabilir ama alt kümesi sağlayamayabilir. Mesela grupta bu durum farklı orada birim elemanlı grubun alt grubu da birim elemanlıydı demek ki çalıştığımız yere göre özellikler değişebiliyor. Yani grupta geçerli bir kural ondan daha geniş bir küme olan halkada geçerli olmayabilir. (Cebir 2- 2.ders-03.03.2016)

Öğretim elemanın dersinde kuralların geçerli olduğu kümeye dikkat çekerek hangi sayı kümesinde çalışılıyorsa o sayı kümesinin özelliklerine göre hareket edilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Dolayısıyla grupta çalışıldığında geçerli olan bir önerme halkada geçerli olamayabilir. Bu nedenle bir önerme verilmişse bu önerme bulunduğu sayı kümesinin tamamını kapsayacak şekilde olması gerektiğine dikkat çekmektedir.

Ortaöğretim matematik öğretmenliği programında bahar döneminde Soyut Matematik, Analiz 2, Cebir 2 ve Lineer Cebir gibi yürütülen derslerde örnek olarak verilen durumlar incelendiğinde öğretim elemanlarının ispat sürecinde muhakeme bağlamında farklı noktaların göze çarptığı söz konusudur. Bahar döneminde gözlemlenen dersler bakımından ispat sürecinde matematik dili ve sistematikleştirme boyutunda ortaya çıkan bütün göstergelerin toplamı Grafik 11' de sunulmuştur.



Grafik 11. Bahar dönemi ders gözlemlerinin matematik dili ve sistematiikleştirme bağlamında karşılaştırılması

Grafik 11 Genel olarak incelediğinde matematik dili ve sistematiikleştirme boyutunda yer alan bütün göstergelerin toplamı bakımından Soyut Matematik %29 ve Cebir 2 %28 dersleri diğer derslere nispeten daha fazla vurgulandığı görülmektedir. Bu durum, ispat sürecinde matematik dili ve sistematiikleştirme boyutuna yönelik durumların Soyut Matematik ve Cebir 2 dersinde daha yoğunlukta olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte Lineer Cebir’de matematik dilinin doğru kullanılmasına yönelik göstergelerin daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir.

4. 4. 2. Bahar Dönemi Ders Gözlemlerinin Öğrenci Muhakemesine Odaklanma Açısından Değerlendirilmesi

Her bir ders ayrı ayrı incelendiğinde öğrenci muhakemesine odaklama boyutunda benzer göstergeler ön planda olmasına rağmen bu göstergelerin oranları ders bazında yoğunluk değişim göstermektedir. Öğrenci muhakemesine odaklanma boyutunda yer alan kategorilerden öğrencilerin ispat adımları arasındaki ilişkilere yönelik sorular yönelterek ispata devam etmelerini sağlama(ÖM-12) derslerin genelinde öğretim elemanlarının vurguladıkları göstergelerden biri olarak belirlenmiştir. Bu göstergeye ait en yüksek frekans ($f_{ST} = 17$, $f_{A2} = 21$, $f_{LC} = 10$, $f_{C2} = 11$) ve yüzde (sırasıyla %15,3, %22,5, %, %27,7 ve %29) olarak belirlenmiştir. Öğretim elemanları genel olarak derslerinde öğrencilerinin

ispatları devam edebilmelerini sağlamak amacıyla ispat adımları arasındaki ilişkilere dikkat çekmişlerdir. ÖE 2' nin dersinden bir kesit aşağıda örnek olarak sunulmuştur.

ÖE2: *Yazdığımız diziyi zihninizde canlandırabiliyor muzunuz.? Bir ispata başlarken nereye gideceğimizi nasıl başlayacağımızı kestirebilirsek işimiz daha kolay olur bu dizi de olduğu gibi bazen birkaç örnek vererek bu dizinin nasıl bir gidişat var hakkında fikir sahibi oluruz. Sonra bildiğimiz metotlarla bunu matematiksel bir dille ifade ederiz.*

ÖE2: *ilk terim ne olur?*

Ö1: *0! O da 1 olur*

ÖE2: *güzel sonra $1+1+1/2!+1/3!+...+1/n!$ Devam eder. Peki $(n+1)!$ için ne olur. bize düşen tanımızı kullanarak bu diziyi üstten sınırlamak hiç böyle bir dizi daha önce gördünüz mü?*

Ö2: *LYS ye çalışırken görmüştük. Ama onlar zevkliydi formülü yerine koy çıkıyordu (bütün sınıf gülüyor)*

ÖE2: *formülü biliyorsunuz tebrikler, çünkü ben bilmiyorum. Arkadaşalar formülden ziyade bir ilişkiden hareketle bir şeyler yazmamız gerekir o zaman ispat mantığı olur.*

Ö2: *hocam aslında biz ezberden biliyorduk yani nasıl olduğunu niye öyle olduğunu hiç düşünmedim”*

ÖE2: *güzel aslında Ayşegül bizim temel sorunumuzu dile getiriyor. Bir şeyleri ezberden biliyoruz ama nasıl olduğu nerden geldiğini kafamızı yormuyoruz. Şimdi artık matematik öğretmen adayınız bakalım formül nasıl oluyor.*

Ö3: *keşke olmasaydık”*

ÖE2: *neden Mustafa*

Ö3: *hocam bütün bildiklerimi de unuttum bu ispat işi sakat(gülüyor)*

ÖE2: *peki şöyle de diyebiliriz daha önce kullandığın matematiksel ifadelerinin nereden geldiğini görmüş oluyorsunuz. Evet, arkadaşlar neden ispat yapıyoruz kavgasını artık geride bıraktık daha önce konuşmuştuk şimdi devam edelim bu dizininin terimleri arasındaki ilişkiyi kullanarak formül dediğimiz sonuca ulaşalım.*

...

ÖE2: *Evet bütün bu adımlardan sonra $S = 2(1-1/2^n)$ sonucu çıktı. Yani Mustafa'nın LYS de kullandığı formül. ama burada bizi ilgilendiren asıl kısım yakınsaklık() n doğal sayı olduğu için ne olursa olsun bu dizi 3 e yakınsar. Buda gösteriyor ki dizi üstten sınırlıdır. ve dizinin hem üstten sınırlı hem de monoton artan*

olduğunu söylemiştik. Peki, limiti de size ödev olsun beraber yapabilirsiniz sonra kontrol ederiz. (Analiz2- 4.ders 10.03.2016).

Öğretim elemanı ispat sürecinde yazılan her adımı ifade ederek veya soru sorarak öğretmen adaylarının ispat sürecinde ilerlemelerini sağlamaktadır. Yapılan ispatta dizinin ilk elemanın ne olacağını sorarak öğretmen adaylarının ispata başlangıç yapmaları için ipucu vermektedir. Daha sonra her bir adımda çeşitli sorular sorarak ispat adımları arasındaki ilişkilere dikkat etmeleri gerektiğini vurgulamaktadır. Dolayısıyla öğretim elemanı bu şekilde ispat yapmanın daha kolay olacağını göstermektedir.

Öğrenci muhakemesine odaklanma boyutunda öğrencileri muhakeme süreçlerini açıklamaları konusunda teşvik etme (ÖM-1) göstergesi en yüksek frekans ($f_{ST}=10$, $f_{A2}=10$, $f_{LC}=4$, $f_{C2}=3$) ve yüzdeye (sırasıyla %11, %10,1, %11, %8) sahiptir. Bu boyutta göstergelere ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde Soyut Matematik dersinde öğrencilerin muhakeme süreçlerini açıklama konusunda teşvik etme diğer derslere nispeten daha fazla vurgulandığı görülmektedir. Buna karşın Cebir 2 dersinde bu göstergeye ait frekans ve yüzdeler daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Bütün derslerde öğretim elemanlarının öğrenciyi muhakeme süreçlerini açıklama konusunda teşvik etmeye yönelik ifadelerle sıklıkla yer verdiği fark edilmiştir. Bu duruma yönelik ÖE4' ün dersinde bir kesit aşağıda sunulmuştur.

ÖE4: bundan sonra bu gösterimi kullanacağız alışın şimdi bunların her birine bakalım.

$$r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_6 \text{ gibi}$$

$$\text{Sgn}r_1 = (-1)^0 = 1 \quad \text{Sgn}r_3 = (-1)^2 = 1$$

$$\text{Sgn}r_2 = (-1)^1 = -1$$

yani uzunluğu tek olan olanlar (-1) çift olanlar (1) çıkar

ÖE4: bunların ne anlama geldiğini bize kim açıklayacak?

Ö1: hocam simetri grubundaki tek ve çift permütasyonlar

ÖE4: aferin Saadet iyi dinlemiştin dersi

ÖE 4: peki ayn mantıkla baksak (23) ve (132) bunlar ayrık devre mi tanımım ne diyordu bir bakın ortak terim içermiyorlar mı? Burada var mı?

Ö1: var hocam (23)

ÖE4: güzel fark ettin peki siz ayrık bir devre örneğini gösterebilir misiniz?

Ö2: hocam yok gibi"

ÖE4: *evet denklik S_3 ' te ayrık devre yoktur. Bakın çalıştığımız yer de önemli (Md-5) başka yerde olabilir ama S_3 ' te yok(Md-4)*

Örnek: S_5 simetri grubu, r_5or_3 , r_3or_5 , r^1_4 elemanları bulunuz.

ÖE4: *şimdi çözmemiz için biraz zaman vereceğim düşünün acaba ne yapabiliriz. var mı fikri olan?*

Ö1: *en küçük elemandan başlasak*

ÖE4: *güzel devam et doğru bir yaklaşım tamam şimdi beraber yazalım*

$r_5or_3=(123)0(13)=(1).(23).....(23)...$ (Lineer Cebir 3.ders 10.03.2016)

Öğretim elemanı ispat sürecinde simetri grup, tek veya çift permütasyonlar gibi matematiksel kavramlarının tanımlarını açmak için öğretmen adaylarının düşüncelerini ifade etmeleri için onları teşvik etmektedir. Böylece öğretmen adaylarının muhakeme süreçlerinin açıklamaları için fırsat verilmektedir.

Öğrencilerin yapılan ispatlarla ilgili sorularına ya da yaptıkları eleştirilere uygun cevaplar vererek onları soru sormaya teşvik etme (ÖM-6) göstergesi öğrenci muhakemesine odaklanma boyutunda ön plana çıkan göstergelerden biridir. Bu göstergeye ait en yüksek frekans ($f_{ST}=16$, $f_{A2}=9$, $f_{LC}=3$, $f_{C2}=2$) ve yüzde (sırasıyla %14,4, %10, %5,4 ve %8) olarak belirlenmiştir. İspat sürecinde öğrencilerin sorularına ya da yaptıkları eleştirilere uygun cevaplar verilerek onları soru sormaya teşvik açısından Soyut Matematik dersinde daha yoğunlukta olduğu görülmektedir. Buna karşın Cebir2 ve Lineer Cebir derslerinde bu göstergenin daha düşük oranlarda ön plana çıktığı görülmüştür. ÖE1 kodlu öğretim elemanın dersinde kullandığı ifadeler örnek olarak sunulmuştur.

ÖE1: *Bu durumdan yani son adımımızdan artık $f(c) = c+1 \in T$ çıkar. Ki bu da çelişki oldu o halde üsteki tanımız doğru peki burada çelişki nereden geldi?*

Ö1: *hocam önceki teoremin sonucundan*

ÖE1: *aferin güzel düşünmüşsün. Demek bütün bunlar birbirinde bağımsız değil*

Ö2: *hocam ben hiçbir şey anlamadım*

ÖE1: *Ayşegül tam olarak neyi anlamadın. en son yaptığımızı mı yoksa ispatın tamamını mı?*

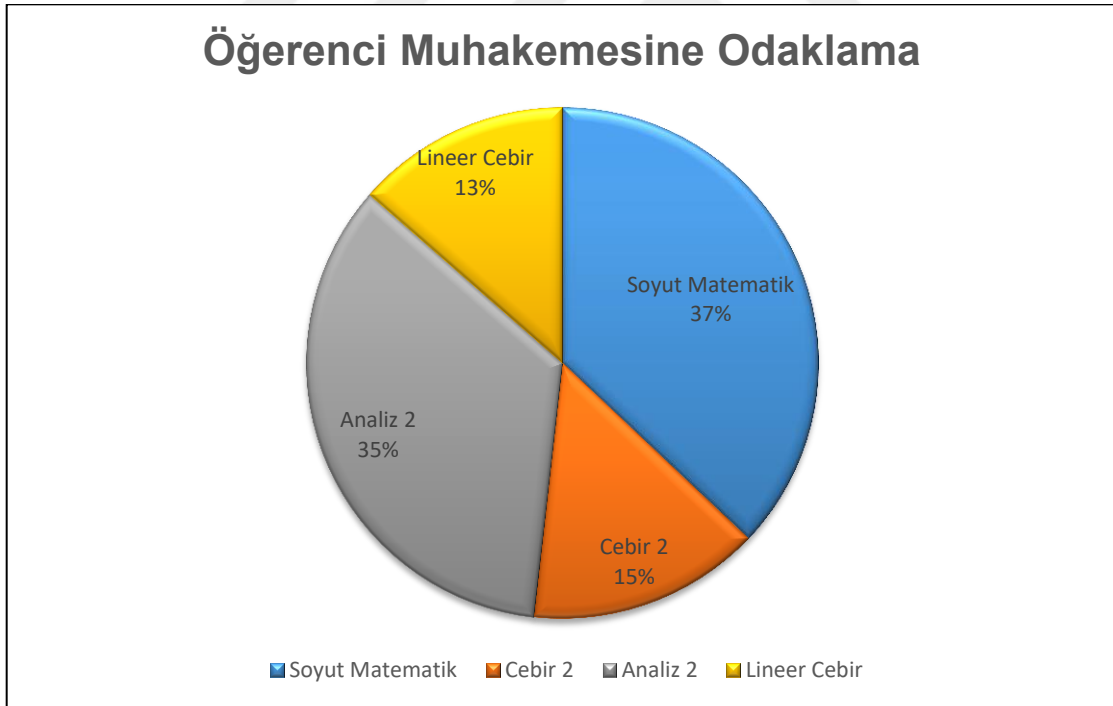
Ö2: *hocam aslında ben bu dersten hiçbir şey anlamıyorum af edersiniz ama kendimi şey... gibi hissediyorum...*

ÖE1: *Güzel yani bu problemi dile getirmen güzel yoksa kendini şey gibi hissetmen güzel değil.(gülüyor) arkadaşlar bu dönemki ispatlar biraz daha karmaşık onun için eski bilgileri de tekrar etmemiz gerekiyor ve daha fazla çaba gerek. o zaman ispatın başından tekrar bakalım anlaşılmayan nokta neresi bakalım*

arkadaşlar. Hep tekrar ediyorum bir önermenin sonucu başak bir teoremi ispatlar ya da bunlar bir birini tamalar eğer bir bütün olarak almasak yani ta dönemin başından beri yaptığımız ispatlar da anlaşılmaz... (Soyut Matematik 8.ders 31.03.2016).

Öğretim elemanı ilgili matematiksel ifadenin ispatını yaparken yazdığı ispat adımlarının neye dayanarak oluşturulduğunu vurgulamaktadır. Öğretmen adayları da sürece dahil etmek için çeşitli sorular sormaktadır. Bunun üzerine öğretmen adaylarından biri, hiçbir şey anlamadığını hatta dersi de anlamadığını belirtmektedir. Öğretim elemanı tepkiyi çok olumlu karşılayarak matematiğin bir bütün olduğunu dolayısıyla eski bilgileri de hatırlatmayı gerektiğine dikkat çekmektedir.

Bahar döneminde gözlemlenen derslerde öğrenci muhakemesine odaklanma boyutunda yer alan durumlar incelendiğinde ispat sürecinde farklı noktaların ön planda olduğu fark edilmektedir. Ortaöğretim matematik programında bahar döneminde ispata yönelik derslerinin öğrenci muhakemesine odaklanma boyutunda ortaya çıkan göstergelerin toplamı Grafik 12'de sunulmuştur.



Grafik 12. Bahar dönemi ders gözlemlerinin öğrenci muhakemesine odaklanma bağlamında karşılaştırılması

Grafik 12 genel olarak incelendiğinde öğrenci muhakemesine odaklanma boyutunda yer alan göstergeler açısından derslerin arasında farklılıklarının olduğu görülmektedir. Bu boyutta Soyut Matematik dersi %37 en yüksek yüzde ile toplamı bakımından daha

yoğunlukta olduğu görülmektedir. Analiz 2 dersinde de %35 ile benzer şekilde öğrenci muhakemesine yönelik durumların diğer derslere nispeten daha fazla vurgulandığı söz konusudur. Buna karşın Lineer Cebir ve Cebir 2 derslerinde öğrenci muhakemesine odaklama boyutunda göstergelerin daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir.

4. 3. 1. Bahar Dönemi Ders Gözlemlerinin İspat Yöntemleri Açısından Değerlendirilmesi

Her bir ders için ayrı ayrı incelendiğinde ispat yöntemleri boyutunda yer alan göstergeler içerisinde en fazla vurgulanan durumların verilen bir önermenin ispatını yapabilmek için en uygun ispat yönteminin belirlenmesine yönelik öğrencilerin tartışmasını sağlama (İY-1) olduğu fark edilmektedir. Ancak ders bazında İY-1 göstergesine yönelik durumların farklı oranlarda olduğu görülmektedir. İspat yöntemleri boyutunda yer alan İY-1 göstergesi en yüksek frekans ($f_{ST}=12$, $f_{A2}=4$, $f_{LC}=3$, $f_{C2}=3$) ve yüzdeye (sırasıyla %66,1, %50, %50 ve %50) sahiptir. Öğretim elemanlarının farklı derslerde ispat sürecinde kullanılacak en uygun ispat yönteminin belirlemeye yönelik ifadeleri mevcuttur. Bu duruma yönelik olarak ÖE2'nin dersinden bir kesit aşağıda sunulmuştur.

ÖE2: *...ispatları yaparken ilk işimiz hangi ispat yöntemini kullanacağımız belirlemek. bu tür ispatlarda ne kullanıyorduk Tümevarım İlkesini kullanıyorduk hatırlarsanız bu yönteme göre en küçük elemandan başlayıp örneğin "0" bu kümenin elemanı ise onu ardılı da kümenin elemanı sonra onunun ardılı diye devam ediyordu... Şimdi son örneğimize baktığımızda çarpanının toplama üzerine nerden dağıttık önce soldan dağılma özeliğini kullandık demi, sağdan da bakacağınızı unutmayın iki taratanda inceleyin zaten bunu ödev vermiştik.*

Yani her $a, b, c \in N$ için $(a+b)c = ac + bc$

Bunu ispatlamak için, daha önce bir küme tanımlamıştık ondan yararlanalım

S = { c ∈ N | a, b ∈ N için (a+b)c = ac+bc } kümesini kullanıyoruz. Bunun ispatını size bırakmışım tekrar yapmaya çalışın beraber bakın sonra bakalım

ÖE2: *nasıl başlayalım var mı fikri olan*

Ö1: *hocam "0" ile başlayalım*

ÖE2: *aferin Oğuzhan o zaman göstermeniz gereken şey $0 \in S$ ilk adımınız*

Şimdi $c \in S$ için ardıl $c \in S$ mi bunu gösterin... şimdi ispat için neye ihtiyacımız var?

Ö2: *Bir kümeye ama nasıl yazacağız ?*

ÖE2: *Güzel aferin Elif başka fikri olan var mı ?*

Ö3: *Hocam göstermeye gerek var mı ? aşikar*

ÖE2: *O eskidendi ama bazen yine kullanacağız ama şimdi ispat yapmamız gerekiyor. Evet var mı bizi aydınlatacak olan nasıl yapalım*

Ö3: *Ben elife katılıyorum hocam küme ile yaparız.*

ÖE2: *Gel yap bakalım nasıl yapmışın bakalım*

Ö3: *Yok hocam devamını getiremem...*

ÖE2: *Şimdi arkadaşlarınızın da dediği gibi bir küme ile başlayalım ihtiyacımız olan kümeyi yazalım:*

$S = \{c \in \mathbb{N} \mid a, b \in \mathbb{N} \text{ için } (ab)c = a(bc)\}$ kümesini göz önüne alalım. İlk göstermemiz gereken nedir? Yani ispatımızın ilk adım?

Ö1: *Sıfır*

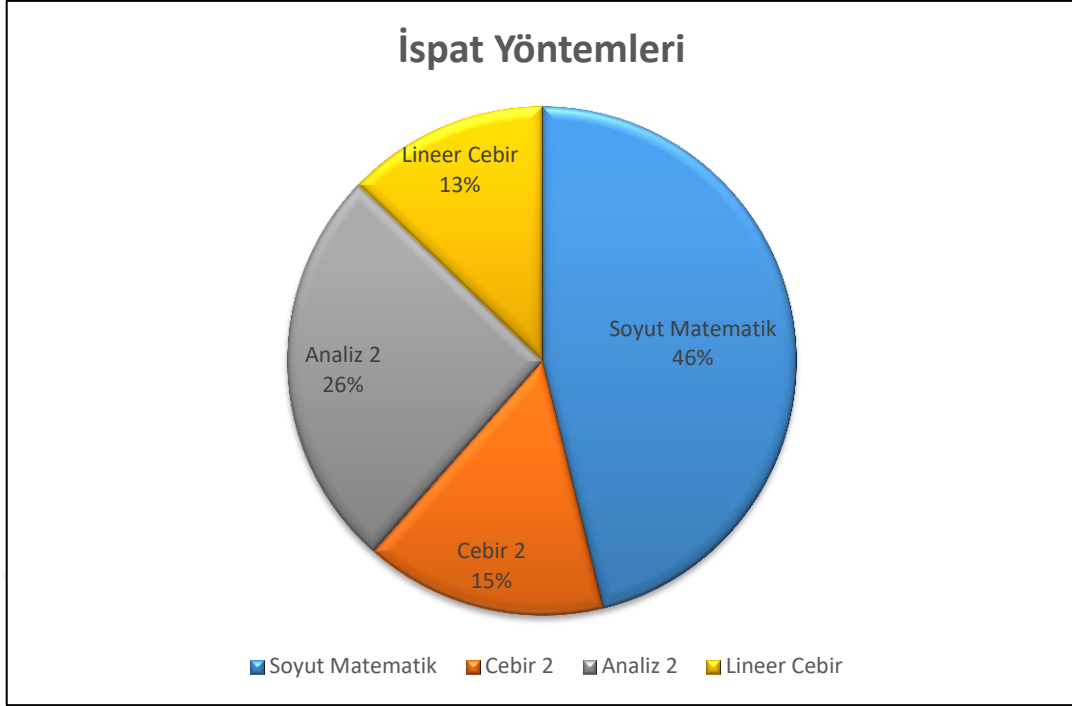
ÖE2: *Güzel "0" ile başlayalım $(ab)0 = 0 = a0 = a(b)0$ olduğundan $0 \in S$ dir. Bunu daha önce ispatlamıştık inceleyebilirsiniz*

...(İspat yapıldı)

ÖE2: *Tümevarım ilkesinden hareketle adım adım gösterdik ve tanımladığımız küme içinde çalıştık bunun dışına çıkmadık...*

Öğretim elemanı verdiği teoremin ispatı için en uygun ispat yöntemini belirlemeleri için öğretmen adaylarına sormaktadır. Bunun üzerine öğretmen adayları bu tür teoremler için en uygun ispat yönteminin "Tümevarım İlkesi" ispat yöntemi olacağına karar veriyorlar. Öğretim elemanı da bu tür ifadeler için en uygun ispat yönteminin bu olacağını ileri sürülen fikirlerinin doğru olduğunu belirtmektedir. Bununla birlikte ispat sürecinde uygun ispat yönteminin belirlenmesinin önemini vurgulamaktadır.

Ortaöğretim matematik öğretmenliği programında bahar döneminde yürütülen Soyut Matematik, Analiz 2, Cebir 2 ve Lineer Cebir gibi derslerde örnek olarak verilen durumlar incelendiğinde öğretim elemanlarının ispat sürecinde muhakeme bağlamında odaklandıkları farklı noktaların olduğu göze çarpmaktadır. Bahar döneminde gözlemlenen dersler incelendiğinde ispat yöntemleri boyutunda ortaya çıkan göstergelerin toplamı dersler bağlamında Grafik 13'te sunulmuştur.



Grafik 13. Bahar dönemi ders gözlemlerinin ispat yöntemleri bağlamında karşılaştırılması

Grafik 13 genel olarak incelendiğinde ispat yöntemleri boyutunda yer alan göstergelerin toplamı açısından derslerin arasında önemli farklılıklarının olduğu görülmektedir. Bu boyutta Soyut Matematik dersinin %46 ile diğer derslere oranla yoğunlukta olduğu fark edilmektedir. Bu durum ilgili derste ispat yöntemlerine yönelik durumların diğer derslere nispeten daha fazla vurgulandığını göstermektedir.

4. 5. Bahar Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular

Orta öğretim matematik öğretmenliği programında yürütülen ispata yönelik bahar dönemi ders gözlemlerinin sonrasında matematik öğretmeni adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarını, muhakeme eksikliklerini ve muhakeme boşluklarına yönelik değişimi belirleyebilmek için Muhakeme Hataları Belirleme Testi 3 (MHBT3) uygulanmıştır. Yapılan bu açık uçlu sınav ile birlikte ispat sürecinde öğretmen adaylarının yaptıkları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarına yönelik veriler; muhakeme hatalarını belirleme ölçeğinin boyutlarında yer alan kategorilere göre değerlendirilerek hatalar, eksiklikler ve boşluklar ile ilgili yoğunluklar belirlenmiştir. Bu kısımda öncelikle MHBT1 ve MHBT2'ye eş değer olacak şekilde hazırlanan MHBT3'te elde edilen veriler, betimsel olarak sunulduktan sonra yapılan klinik mülakatlar ve

öğretmen adaylarının örnek çözümleri ile desteklenerek verilmiştir. Daha sonra her bir sınıf seviyesindeki öğretmen adayları için MHBT2 ve MHBT3 verileri karşılaştırılarak öğretmen adaylarının ispat sürecinde yaptıkları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları ilgili değişim tablo ve grafiklerle sunulmuştur. Son bölümde ise MHBT1, MHBT2 ve MHBT3 sınavlarında elde edilen veriler göz önüne alınarak öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları tablo ve grafikler yardımıyla ne yönde bir değişim olduğu resim edilmeye çalışılmıştır.

Sınıf seviyelerinin her birinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT3'te yer alan ispatlar için yapılan muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının hangi kategoride yer aldığı ve bu kategoriler ile ilgili frekans ve yüzde dağılımları Tablo 23'te sunulmuştur.

Tablo 23. Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşluklarının Hangi Kategoride Yer Aldığı ve Bu Kategoriler İle İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımları

	1.SINIF			2.SINIF			3.SINIF			4.SINIF			5.SINIF		
	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%	Madde	f	%
Muhakeme Hataları	MH-1	25	26,5	MH-1	13	26	MH-1	25	41,6	MH-1	12	22	MH-1	8	20
	MH-2	18	19,1	MH-2	10	20	MH-2	10	16,6	MH-2	9	17	MH-2	4	10
	MH-3	8	8,5	MH-3	5	10	MH-3	5	8,3	MH-3	8	15	MH-3	5	12,5
	MH-4	4	4,25	MH-4	2	4	MH-4	8	13,3	MH-4	4	8	MH-4	3	7,5
	MH-5	4	4,25	MH-5	6	12	MH-5	7	11,6	MH-5	4	8	MH-5	4	10
	MH-6	17	18,3	MH-6	14	28	MH-6	10	16,6	MH-6	10	18	MH-6	12	30
	MH-7	10	10,1	MH-7	10	20	MH-7	12	20	MH-7	7	13	MH-7	4	10
Muhakeme Eksiklikleri	ME-1	10	6,6	ME-1	13	9,1	ME-1	18	7,8	ME-1	10	7,2	ME-1	9	8,6
	ME-2	25	16,6	ME-2	25	17,4	ME-2	71	30,8	ME-2	20	14,4	ME-2	17	14,6
	ME-3	30	20	ME-3	40	27,9	ME-3	45	19,5	ME-3	40	28,8	ME-3	38	32,7
	ME-4	10	6,6	ME-4	8	5,5	ME-4	14	6,1	ME-4	6	4,3	ME-4	3	2,5
	ME-5	5	1	ME-5	2	1,3	ME-5	7	3	ME-5	5	3,5	ME-5	1	0,8
	ME-6	25	16,6	ME-6	20	13,9	ME-6	32	13,9	ME-6	17	12,2	ME-6	14	12,1
	ME-7	20	7,89	ME-7	5	3,4	ME-7	10	4,3	ME-7	13	9,3	ME-7	15	12,9
	ME-8	25	16,6	ME-8	30	20,9	ME-8	33	14,3	ME-8	28	20,1	ME-8	18	15,5
Muhakeme Boşlukları	MB-1	10	32,5	MB-1	10	32,2	MB-1	12	26	MB-1	8	33,3	MB-1	4	21
	MB-2	14	45,2	MB-2	12	38,7	MB-2	21	45,6	MB-2	9	37,5	MB-2	10	52,6
	MB-3	4	12,9	MB-3	4	12,9	MB-3	10	21,7	MB-3	4	16,6	MB-3	3	15,7
	MB-4	3	9,8	MB-4	1	3,2	MB-4	3	6,7	MB-4	3	12,5	MB-4	2	10,5

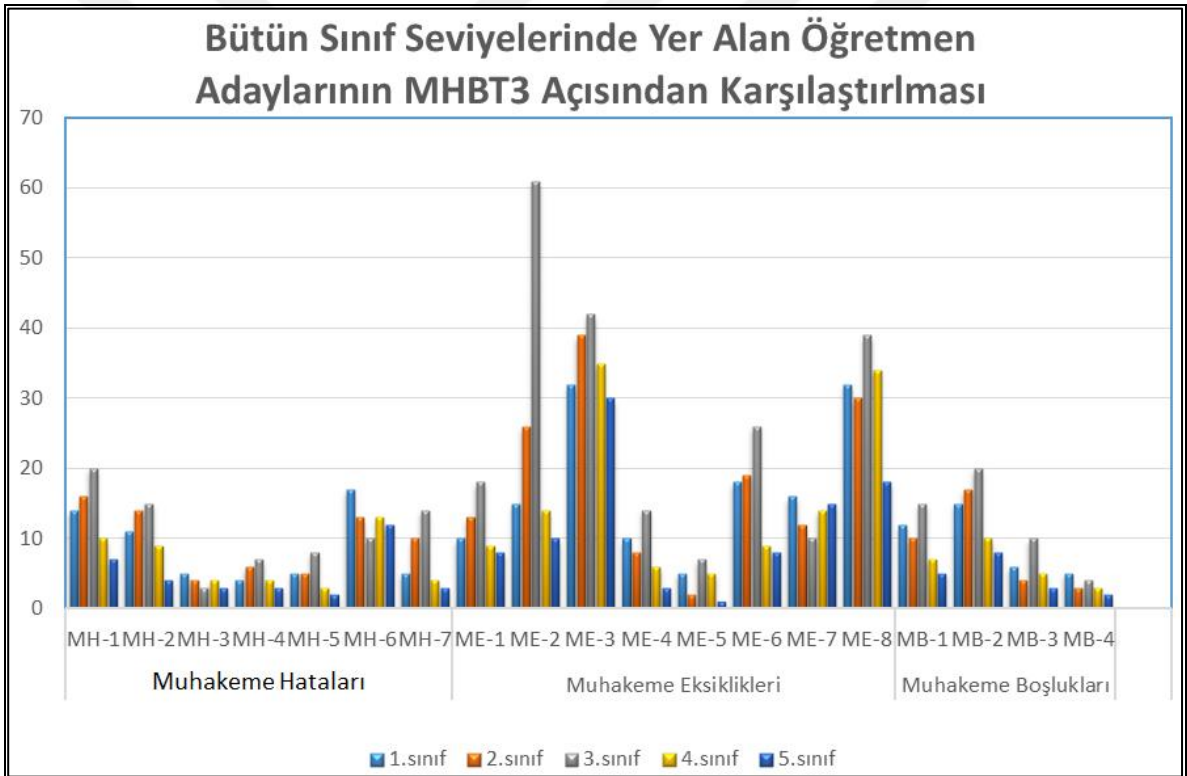
Tablo genel olarak incelendiğinde sınıf seviyelerinin genelinde öğretmen adaylarının muhakeme hatalarının daha çok sonuç ile başlama (MH1), yanlış varsayımlarla başlama (MH2), teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması (MH6) ve özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7), kategorilerinde yoğunlaşmıştır. Farklı notasyonları kullanmayı ispat olarak düşünme (MH3) ve aşırı genelleme hataları (MH5) kategorilerinde ise diğer muhakeme hatalarına oranla daha az sayıda ortaya çıktığı görülmektedir. MHBT3'te elde edilen verilerden hareketle öğretmen adaylarının ispat yaparken daha çok var olan bir gerçek üzerinden başlayarak ulaşmaları gereken matematiksel ifade ile ispata başlangıç yapmışlardır. Diğer bir deyişle sonucu doğru kabul ederek çeşitli matematiksel işlemlerle ilgili matematiksel ifadenin ispatını yapmaya çalışmışlardır. Öğretmen adaylarından bir kısmı ise ispatı istenen matematiksel bir ifadenin hipotez ve hüküm kavramlarını karıştırarak yanlış bir varsayım ile ispatları yapmaya çalışmışlardır. Farklı sınıf seviyelerinde yer alan öğretmen adaylarının bazıları ise ispat sürecinde sadece özel bir durumun veya birkaç sayısal değeri ele alarak ispat yapma gibi muhakeme hatalarına sahip oldukları görülmektedir. Bunun yansira sınıf seviyelerinin genelinde dikkate değer bir oranda öğretmen adaylarının bir teoremin karşıt tersinin kendisinin dengi olduğunun farkına varmadıkları belirlenmiştir.

Muhakeme eksiklikleri; ispat sürecinde yöntem, tanım aralığı, matematiksel dil gibi eksikliklerle ispatın tamamlanması veya ispatın yarıda bırakılmasından kaynaklanan durumlardır. Bu durumlar muhakeme hatasından ziyade doğru bir muhakeme ile başlanması ancak bazı matematiksel bilgi eksikliklerine bağlı olarak ispatın istenilen şekilde tamamlanmamasıdır. MHBT3'te muhakeme eksiklikleri bakımından öğretmen adaylarının daha çok ispata nasıl başlayacağına karar verememe (ME2), tanım aralığını dikkate almama (ME3) ve matematik dilini kullanmada yetersizlik (ME6) kategorilerinde yoğunlaştıkları görülmektedir. Değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı (ME5) ve ispat yapmada sistematikliğin olmaması (ME7) kategorilerinde ise öğretmen adayları daha az oranda muhakeme eksikliğine yönelik davranışlar sergiledikleri fark edilmektedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispat sürecinde yöntem, tanım aralığı, matematiksel dil gibi eksikliklerle birlikte ispatlarını tamamladıklarıyla da ispatlarını yarıda bıraktıkları anlaşılmaktadır.

Muhakeme boşlukları; ispat sürecinde izlenen adımlarda kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunulmadan ya da adımlar arasında bir ilişki kurmadan ispatın tamamlanmasına dayalı durumlardır. Muhakeme boşlukları bakımından öğretmen adaylarının daha çok kullanılan önermelerin gerekçelerinin sunulmaması (MB2) ve yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması (MB1) gibi kategorilere

yönelik davranışlar sergiledikleri görülmektedir. Dolayısıyla öğretmen adayları, ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmadan ispatlarını tamamlamışlardır.

Bahar dönemi ders gözlemleri sonrasında yapılan MHBT3'te elde edilen veriler incelenmiştir. Bu veriler göz önüne alındığında farklı sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının benzer muhakeme hatalarına, muhakeme eksikliklerine veya muhakeme boşluklarına sahip oldukları ve bu göstergelerinin yoğunlukları sınavlara göre bir değişim gösterdiği belirlenmiştir. İspat sürecinde öğretmen adaylarının MHBT3'te yaptıkları ispatların muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları boyutlarında yer alan her bir kategoriye göre değerlendirilmesi sonucunda elde edilen frekans ve yüzde dağılımı Grafik 14' te sunulmuştur.



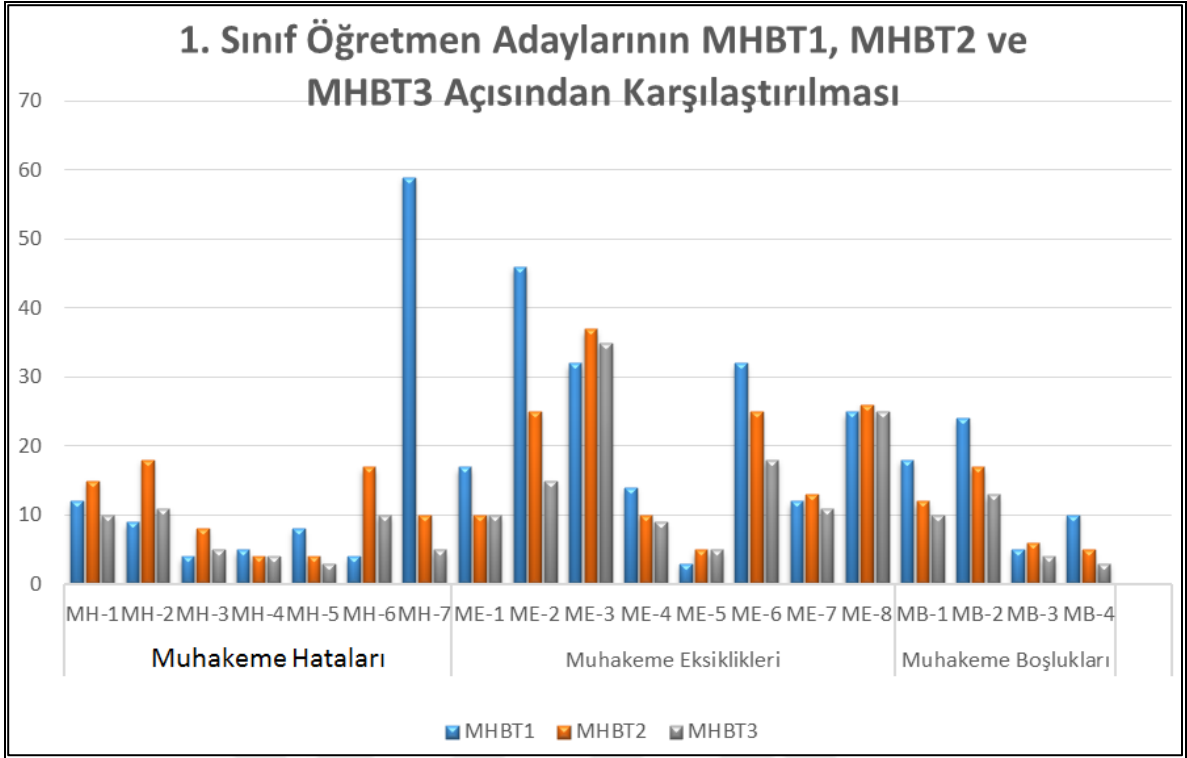
Grafik 14. Bahar dönemi ders gözlemleri sonrası öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının karşılaştırılması

Ders gözlemleri sonrası yapılan MHBT3' ün verileri incelendiğinde sınıf seviyelerinin genelinde MHBT1 ve MHBT2' de olduğu gibi öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının benzer göstergeler olduğu belirlenmiştir. Bununla beraber her bir sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve

muhakeme boşlukları bakımından MHBT1 ve MHBT2' ye göre MHBT3'te genel olarak daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Ancak muhakeme hataları boyutunda MH1,MH6; muhakeme eksiklikleri boyutunda ME3,ME8 ve muhakeme boşlukları boyutunda MB2 kategorileri direnç göstererek fazla değişim göstermişlerdir. Bu durum her bir sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının genel olarak ispat sürecinde sonuç ile başlama, ispat sürecinde tanım aralığına dikkat etmeme ve ispat adımlarında kullanılan önermelerin gerekçelerinin sunulmaması gibi muhakeme hata, eksiklik ve boşluğuna sahip olduklarını göstermektedir. Her bir sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip olduğu muhakeme hatlarının MHBT1, MHBT2 ve MHBT3 arasındaki değişim her bir sınıf için ayrı ayrı ele alınmıştır.

4. 5. 1. Bahar Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 1.Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular

Güz dönemi ders gözlemleri öncesi yapılan MHBT1, güz dönemi ders gözlemleri sonrası yapılan MHBT2 ve bahar dönemi ders gözlemleri sonrasında yapılan MHBT3'te elde edilen veriler incelenmiştir. Bu veriler göz önüne alındığında 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının her üç açık uçlu sınavda da benzer muhakeme hatalarına, muhakeme eksikliklerine veya muhakeme boşluklarına sahip oldukları ve bu göstergelerinin yoğunlukları sınavlara göre bir değişim gösterdiği belirlenmiştir. 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1,MHBT2 ve MHBT3'te yaptıkları ispatların muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları boyutlarında yer alan her bir kategoriye göre değerlendirilmesi sonucunda elde edilen frekans ve yüzde dağılımı Grafik 15'te sunulmuştur.



Grafik 15. Güz dönemi ders gözlemleri öncesi, güz dönemi ders gözlemleri sonrası ve bahar dönemi ders gözlemleri sonrasında 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması

Grafik incelendiğinde 1.sınıf öğretmen adaylarının muhakeme hataları boyutunda yer alan MH7 göstergesinin MHBT1’de büyük bir çoğunluğa sahip olduğu görülmektedir. Ancak MHBT2 ve MHBT3’te bu oran çok büyük bir değişim göstererek azalmıştır. Bu durum 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1’de ispat yaparken daha fazla sayısal değerler kullanma veya sadece birkaç durumdan hareketle ispatın tamamlandığı durumların çoğunlukta olduğunu göstermektedir. Sonraki sınavlarda öğretmen adaylarının çoğu MH7 olarak nitelendirilen muhakeme hatası davranışı terk etmekle birlikte MHBT2’de bu göstergeye yönelik durumların belli bir yoğunlukta olduğundan söz edilebilir. Ancak MHBT3’te bu oran oldukça düşük yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH1 kategorisine yönelik durumlar ise MHBT1’de daha düşük olduğu MHBT2’de ise yüksek oranlarda olduğu görülmektedir. Buna karşın MHBT3’te bu muhakeme hatasına yönelik durumlarının tekrar bir düşüş gösterdiği söz konusudur. Bu durum, 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde sonuç ile başlama muhakemesi olarak değerlendirilen durumlar bakımından MHBT2’de daha fazla muhakeme hatasına sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme hataları boyutu kategorisinde yer alan MH6 göstergesi bu boyutta göze çarpan başka bir muhakeme hatası olduğu görülmektedir. Uygulanan açık

uçlu sınavların verilerine bakıldığında MH6 olarak nitelendirilen durumların MHBT2'de diğer sınavlara göre yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum 1 sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT2'de ispat yaparken bir teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varamama muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar bakımından daha fazla muhakeme hatasına sahip olduklarını göstermektedir. MH4 ve MH5 göstergeleri MHBT1 MHBT2 ve MHBT3'te genel olarak muhakeme hataları boyutunda en düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Dolayısıyla 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılma ve aşırı genelleme muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar bakımından diğer göstergelere nispeten daha düşük oranlarda sahiptirler.

Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergeler incelendiğinde her üç açık uçlu sınavda da benzer göstergelerin ön plana çıktığı görülmektedir. Bununla beraber MHBT1, MHBT2 ve MHBT3 arasında göstergelerin oranlarında bir farklaşma söz konusudur. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME2 kategorisi MHBT1'de bu boyutta yer alan diğer kategorilere göre en yüksek oranda ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte MHBT2 ve MHBT3'te bu göstergeye yönelik durumların değişim göstererek bir düşüş göstermiştir. Bu durum, 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1'de ispatları boş bırakma veya başlanan ispatları devam edememe bakımından yüksek oranlarda olduğunu göstermektedir. Buna karşın MHBT2 ve MHBT3'te öğretmen adayları ispatlar yapmak için daha fazla girişimlerde bulunmuşlardır. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME3 kategorisi ise MHBT1, MHBT2 ve MHBT3' dikkate değer oranlarda ortaya çıkmıştır. Bu durum 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının genel olarak ispat sürecinde tanım aralığına dikkat etmeme olarak nitelendirilen muhakeme hataları bakımından yoğunlukta olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte ME3 açısından sınavlara göre yoğunluğun değiştiği görülmektedir. Dolayısıyla MHBT1'de öğretmen adaylarının daha yoğunlukta iken MHBT3'te bu oranın düşüşü söz konusudur. Bu durum, öğretmen adaylarının MHBT2 ve MHBT3'te ispat yaparken ilgili matematiksel ifadenin tanımlı olduğu aralığa daha fazla dikkat ettiklerini göstermektedir. Her üç açık uçlu sınavda da muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME göstergesi benzer şekilde dikkate değer bir oranda olduğu göze çarpmaktadır. Bununla beraber yöntemsel eksiklik olarak nitelendirilen durumların MHBT1'de daha yoğunlukta iken MHBT2 ve MHBT3'te daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde kullanılacak en uygun ispat yöntemini seçmede MHBT1'de daha fazla zorluklar yaşadıklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME6 göstergesi MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te bu boyutta yer alan diğer göstergelere göre yüksek oranlarda

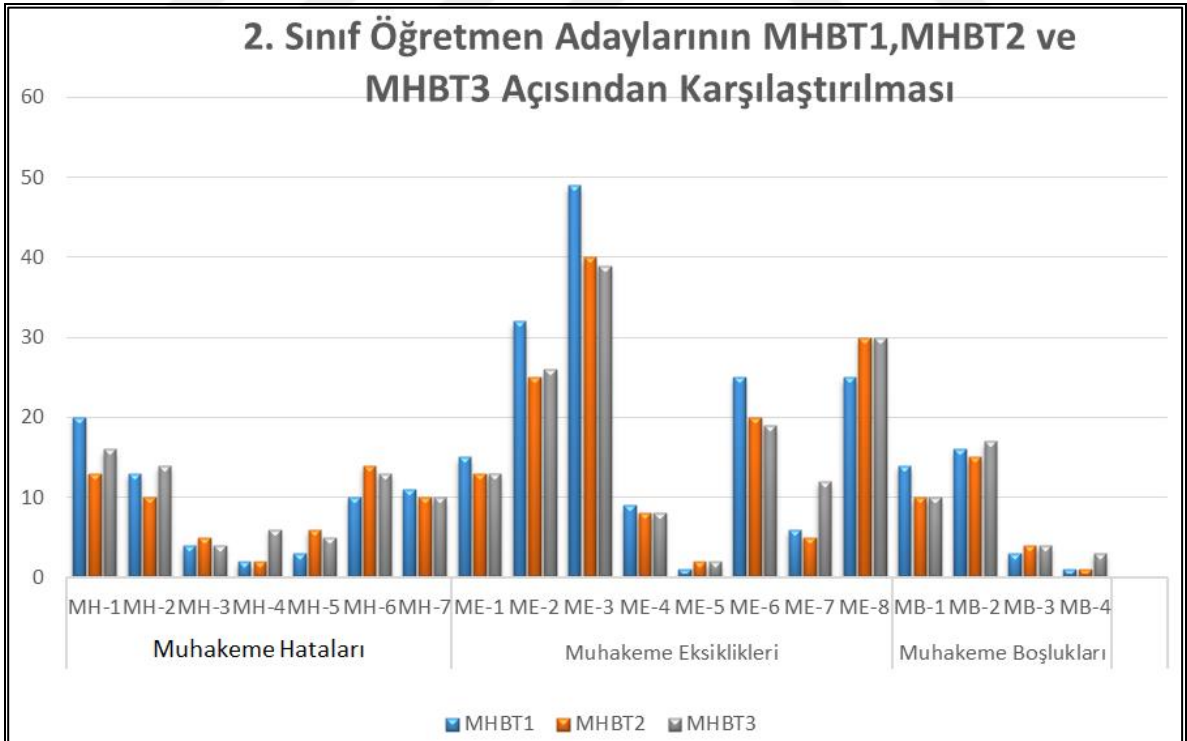
olmakla birlikte MHBT2 ve MHBT3'te bu oran düşmüştür. Bu durum, 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının matematik dilini kullanmada yetersizlik veya ispat adımlarında matematiksel sembol, tanım ve teorem gibi ifadelerinin kullanımında matematik diline dikkat edememe bakımından MHBT1' de daha fazla yoğunlukta olduklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME8 göstergesi üç açık uçlu sınavda da birbirine oldukça yakın oranlarda olduğu görülmektedir. Dolayısıyla 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1,MHBT2 ve MHBT3'te iki yönlü koşullu bir önermenin ispatını yaparken her iki tarafın incelenmesi gerektirdiği durumlarda sadece bir taraftan inceleyerek ispatlarını tamamladıkları fark edilmektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergeler içerisinde üç açık uçlu sınavda da bu boyutta yer alan ME5 ve ME7 göstergeleri diğer göstergelere nispeten daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Bu durum 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı veya ispat yapmada sistematikliğin olmaması açısından daha düşük oranlarda muhakeme eksikliklerine sahip olduklarını göstermektedir.

Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan göstergeler incelendiğinde MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te benzer muhakeme boşluklarının olduğu görülmektedir. Bu durum 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının açık uçlu sınavların üçünde de birbirine oldukça yakın oranlarda muhakeme boşluklarına sahip olduklarını göstermektedir. Bununla birlikte MHBT2 ve MHBT3 'te düşük oranlarda da olsa bir düşüş söz konusudur. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB2 üç açık uçlu sınavda da bu boyutta en fazla ön plana çıkan göstergedir. Bu durum, 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde, ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmayarak ispatın tamamlanması açısından MHBT2'de daha az yoğunlukta olduklarını göstermektedir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB1 göstergesi MHBT1'de dikkate değer bir yoğunlukta iken MHBT2'de bu yoğunlukta bir düşüş söz konusudur. Bu durum, 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması olarak nitelendirilen durumlar bakımından MHBT2' de daha düşük oranda olduklarını göstermektedir. Bununla birlikte 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının her üç açık uçlu sınavda da matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken elde edilen sonucun önceki adımlara dayandırılmama veya bu adımlar arasında bir ilişkinin olmaması muhakeme boşluğu olarak değerlendirilen durumlar açısından belli bir oranda sahip olduklarından söz edilebilir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB3 ve MB4 göstergeleri hem MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te göre farklılık göstermekle birlikte bu boyutta diğer göstergelere nispeten daha düşük oranlarda ortaya çıkmıştır. Bu

durum 1.sınıf öğretmen adaylarının ispatta ara aşamaların göz ardı edilmesi yani ispatta yazılması gereken bazı adımların atlaması ve ispatta gereksiz adımlara veya ifadelere yer verme açısından daha düşük oranlarda sahip olduklarından söz edilebilir.

4. 5. 2. Bahar Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 2.Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular

Güz dönemi ders gözlemleri öncesi yapılan MHBT1, güz dönemi ders gözlemleri sonrası yapılan MHBT2 ve bahar dönemi ders gözlemleri sonrasında yapılan MHBT3' elde edilen veriler incelenmiştir. Bu veriler göz önüne alındığında 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının her üç açık uçlu sınavda da benzer muhakeme hatalarına, muhakeme eksikliklerine veya muhakeme boşluklarına sahip oldukları ve bu göstergelerinin yoğunlukları sınavlara göre bir değişim gösterdiği belirlenmiştir. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1,MHBT2 ve MHBT3'te yaptıkları ispatların muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları boyutlarında yer alan her bir kategoriye göre değerlendirilmesi sonucunda elde edilen frekans ve yüzde dağılımı Grafik 16'da sunulmuştur.



Grafik 16. Güz dönemi ders gözlemleri öncesi, güz dönemi ders gözlemleri sonrası ve bahar dönemi ders gözlemleri sonrasında 2. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması

Grafik genel olarak incelendiğinde 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarını, muhakeme eksikliklerini ve muhakeme boşluklarını belirlemek amacıyla yapılan MHBT1,MHBT2 ve MHBT3'ün verileri incelenmiştir. Açık uçlu sınavların verileri göz önüne alındığında muhakeme hataları boyutunda yer alan göstergeler bakımından MHBT1'de öğretmen adaylarının dikkate değer oranda MH1 muhakeme hatasına sahip oldukları göze çarpmaktadır. Buna karşın yapılan MHBT2 ve MHBT3'te bu muhakeme hatasına yönelik oranın düşüş gösterdiği görülmektedir. Bu durum 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1'de ispatları yaparken, ispatı istenilen matematiksel ifadeyi doğru kabul ederek bunun üzerinde çeşitli işlemler yaparak ispatları yapmayı tercih ettiklerini göstermektedir. Ancak MHBT2 ve MHBT3'te bu düşüncenin belli bir oranda değiştiğinden söz edilebilir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH2 kategorisi MHBT1, MHBT2 ve MHBT3 olarak uygulanan üç açık uçlu sınavda da bu boyutta yer alan diğer kategorilere nispeten yoğunlukta olduğu görülmektedir. Dolayısıyla ispat sürecinde yanlış varsayım ile başlama muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar açısından öğretmen adaylarının genelinde sahip olduğundan söz edilebilir. Bununla birlikte MH2 kategorisinin oranı; MHBT1'e göre MHBT2 ve MHBT3' daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, üç açık uçlu sınavda da öğretmen adaylarının dikkate değer bir kısmının ispat sürecinde hüküm ile hipotez kavramlarını karıştırdığını göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH6 kategorisi ise benzer şekilde 2.sınıf öğretmen adaylarının yoğun olarak sahip oldukları muhakeme hatalarından biridir. Bu durum, öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematiksel bir ilişkinin ispatını yaparken bir teoremin karşıt tersinin kendisinin dengi olmasının farkına varama açısından daha fazla muhakeme hatası yaptıklarını göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH7 kategorisi MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te yine ön plana çıkan kategorilerden biridir. MH7 kategorisi her üç açık uçlu sınavda da benzer frekans ve yüzdeyle ortaya çıktığı görülmektedir. Uygulanan açık uçlu sınavlarının üçünde de muhakeme hataları boyutunda yer alan MH4 ve MH5 kategorilerinin düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Bu durum, 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematiksel ifadelerinin ispat yaparken aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılma ve aşırı genelleme muhakeme hatası olarak değerlendirilen durumlar bakımından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir. Bununla birlikte uygulanan üç açık uçlu sınavın verileri göz önüne alındığında muhakeme hataları boyutunda yer alan kategorilerin genelinde 2. sınıf öğretmen adaylarının MHBT1'de daha yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır.

Öğretmen adaylarının ispat sürecinde yöntem, tanım aralığı, matematiksel dil gibi eksikliklerle ispatlarını tamamlamaları veya ispatlarını yarım bırakmalarından kaynaklanan

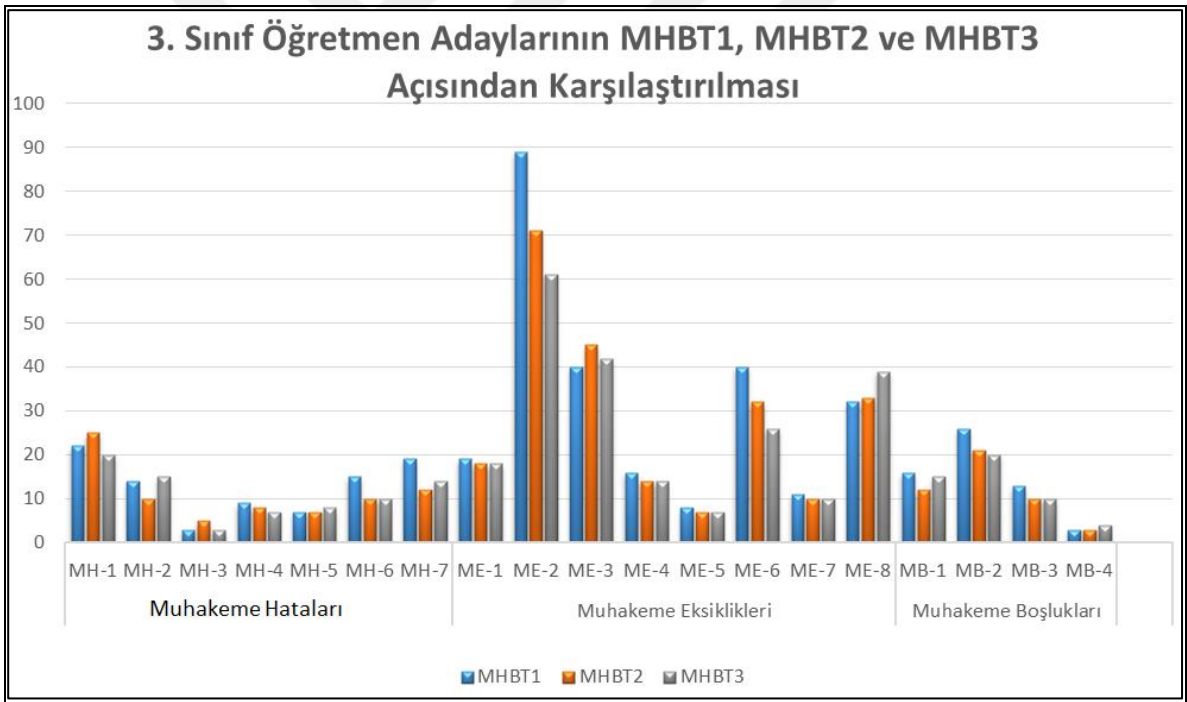
durumlar muhakeme eksiklikleri olarak değerlendirilmiştir. Bu durumlar muhakeme hatasından ziyade doğru bir muhakeme ile başlanması ancak bazı matematiksel bilgi eksikliklerine bağlı olarak ispatın istenilen şekilde tamamlanmamasıdır. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan kategorilerin yoğunlukları göz önüne alındığından 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te benzer muhakeme eksiklerine sahip olduklarından söz edilebilir. Bununla birlikte muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergeler yoğunluk açısından her üç sınavda da değişim göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutundan yer alan ME3 kategorisi MHBT1'de en yüksek frekans yüzdeye sahiptir. Buna karşın bu gösterge MHBT2 ve MHBT3'te ilk açık uçlu sınava göre daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Bununla birlikte ME3 kategorisi üç açık uçlu sınavda da bu boyutta yer alan diğer kategorilere nispeten oldukça yüksek oranlarda olduğundan söz edilebilir. Bu durum, 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının genel olarak ispat sürecinde tanım aralığını dikkate almama muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen durumlar açısından daha fazla yoğunlukta olduklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME2 kategorisi MHBT1'de yoğunlukta iken MHBT2 ve MHBT3'te daha düşük yoğunlukta. Bu durum, öğretmen adaylarının ispat sürecinde ispata başlama veya ispatları devam edememe açısından ikinci ve üçüncü açık uçlu sınavda da daha fazla girişimlerde bulduklarını göstermektedir. Muhakeme eksikleri boyutunda yer alan ME8 kategorisi ise benzer şekilde hem MHBT1'de hem MHBT2'de hem de MHBT3'te benzer şekilde üç açık uçlu sınavda da yüksek frekans ve yüzdeye ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde iki yönlü koşullu bir önermenin ispatı yaparken her iki tarafın incelenmesi gerektirdiği durumlarda sadece bir taraftan inceleyerek ispatları yapma açısından yoğunlukta olduklarından söz edilebilir. Muhakeme eksiklikler boyutunda yer alan ME6 kategorisi üç açık uçlu sınavda da 2.sınıf seviyesinde öğretmen adaylarının birbirine oldukça yakın oranlarda ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte MHBT2 ve MHBT3'te bir düşüş söz konusudur. Bu durum, öğretmen adaylarının matematik dilini kullanmada yetersizlik, ispat adımlarında matematiksel sembol, tanım veya teorem gibi ifadelerinin kullanımında matematik diline dikkat etmeme olarak nitelendirilen muhakeme eksikliği bakımından dikkate değer bir oranda sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME1 kategorisi MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te benzer yoğunlukta ortaya çıkmıştır. Bu durum ispat sürecinde 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının belli bir kısmı yöntemsel eksiklik olarak değerlendirilen muhakeme eksikliğine sahip olduklarını göstermektedir. 2. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme eksikliklerini belirlemek amacıyla yapılan MHBT1 ve MHBT2 ve MHBT3 açık uçlu sınavların verilerine yönelik oluşturulan grafik

incelendiğinde her üç açık uçlu sınavda da muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME5 ve ME7 kategorileri bu boyutta diğer kategorilere nispeten daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Bu durum, 2. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı veya ispat yapmada sistematikliğin olmaması olarak değerlendirilen durumlar bakımından daha düşük oranlarda muhakeme eksikliklerine sahip olduklarını göstermektedir.

İspat sürecinde, ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmayarak ispatın tamamlanması gibi durumlar muhakeme boşluğu olarak değerlendirilmektedir. 2. sınıf öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme boşlukları boyutunda yer alan kategoriler MHBT1, MHBT2 ve MHBT3 için ayrı ayrı incelendiğinden MB2 kategorisi uç açık uçlu sınavda da en yüksek frekans ve yüzdeye sahip olarak ortaya çıkmıştır. Bu durum 2. Sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının dikkate değer bir oranda ispat sürecinde kullandıkları önermeleri gerekçelendirmeden ispat yaptıklarını veya ispatları belli ezber kalıplar ile yapmaya çalıştıklarını göstermektedir. Benzer şekilde ispat adımlarında kullanılan önermelerinin ve ortaya atılan iddiaların bir gerekçeye dayandırmadan geçersiz ispatlar oluşturulmaları söz konusudur. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB1 kategorisi MHBT2 ve MHBT3' göre MHBT1'de daha yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. Dolayısıyla birinci açık uçlu sınavda öğretmen adaylarının ispat yaparken yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması muhakeme boşluğu olarak nitelendirilen durumlar bakımından daha yüksek oranlarda olduğu söz konusudur. Bununla birlikte MHBT2 ve MHBT3'te bu oran düşüş göstermesine rağmen bu boyutta öğretmen adaylarının en fazla sahip oldukları muhakeme boşluklarından biri olarak ön plana çıkmaktadır. Dolayısıyla 2. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken elde ettikleri sonucu önceki adımlara dayandırmalarına rağmen bu adımlar arasında bir ilişki kuramamaları açısından her üç açık uçlu sınavda da belli bir yoğunlukta sahip olduklarından söz edilebilir. MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'ün verileri incelendiğinde 2. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB3 ve MB4 kategorileri üç açık uçlu sınavda da farklılık göstermelerine rağmen bu boyutta diğer kategorilere nispeten daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum 2. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispatta ara aşamaların göz ardı edilme ya da ispatta yazılması gereken bazı adımların atlatılması ve ispatta gereksiz adımlara veya ifadelere yer verme açısından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

4. 5. 3. Bahar Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 3.Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular

Güz dönemi ders gözlemleri öncesi yapılan MHBT1, güz dönemi ders gözlemleri sonrası yapılan MHBT2 ve bahar dönemi ders gözlemleri sonrasında yapılan MHBT3' elde edilen veriler incelenmiştir. Bu veriler göz önüne alındığında 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının her üç açık uçlu sınavda da benzer muhakeme hatalarına, muhakeme eksikliklerine veya muhakeme boşluklarına sahip oldukları ve bu göstergelerinin yoğunlukları sınavlara göre bir değişim gösterdiği belirlenmiştir. 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1,MHBT2 ve MHBT3'te yaptıkları ispatların muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları boyutlarında yer alan her bir kategoriye göre değerlendirilmesi sonucunda elde edilen frekans ve yüzde dağılımı Grafik 17' de sunulmuştur.



Grafik 17. Güz dönemi ders gözlemleri öncesi, güz dönemi ders gözlemleri sonrası ve bahar dönemi ders gözlemleri sonrasında 3. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması

Grafik genel olarak incelendiğinde 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının benzer kategorilerde yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bununla birlikte göz dönemi ders gözlemleri öncesi yapılan MHBT1'de muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve

muhakeme boşluklarının genel olarak daha yoğunlukta olduğundan söz edilebilir. Açık uçlu sınavların verileri göz önüne alındığında muhakeme hataları boyutunda yer alan kategoriler içinde MH1 kategorisinin MHBT1, MHBT2 ve MHBT3 olarak uygulanan üç açık uçlu sınavda da dikkate değer bir oranda olduğu görülmektedir. Bununla birlikte MHBT3'te düşük oranlarda da olsa bir düşüş söz konusudur. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde sonuç ile başlama muhakeme hatasına sahip olma açısından MHBT1 ve MHBT2'ye nispeten MHBT3'te daha düşük yoğunlukta olduğunu göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH7 kategorisi bu boyutta yine ön plana çıkan muhakeme hatalarından biridir. Ancak MHBT1'e göre MHBT2 ve MHBT3'te bu oranın daha düşük yoğunlukta olduğundan söz edilebilir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının dikkate değer bir oranda MHBT1'de MH7 muhakeme hatasına sahip olduklarını göstermektedir. MHBT2 ve MHBT3'te bir düşüş olmakla beraber her iki açık uçlu sınavda da 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının belli bir kısmı ispat sürecinde özel bir durumdan hareketle veya sadece birkaç sayısal değer ile ispatları yapmaya çalışmışlardır. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH6 kategorisi MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te de bu boyutta 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının yoğun olarak sahip olduğu muhakeme hatalarından olduğu görülmektedir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematiksel ifadelerin ispatlarını yaparken bir teoremin karşıt tersinin kendisinin dengi olmasının farkına varamama olarak değerlendirilen durumlar bakımından yoğunlukta olduklarını göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yanlış varsayım ile başlama olarak nitelendirilen MH2 kategorisi üç açık uçlu sınavda da dikkate değer bir oranda olmakla birlikte MHBT1'de daha yoğunluktadır. Dolayısıyla 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde yanlış varsayım ile başlama açısından MHBT2 ve MHBT3'te daha az yoğunlukta olduğundan söz edilebilir. MHBT1, MHBT2 ve MHBT3 olarak uygulanan üç açık uçlu sınavda da muhakeme hataları boyutunda yer alan kategorilere nispeten MH4 ve MH5 kategorileri üç sınavda da daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılma ve aşırı genelleme muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar bakımından daha düşük oranlarda sahip oldukları göstermektedir.

İspat sürecinde yöntem, tanım aralığı, matematiksel dil gibi eksikliklerle ispatlarını tamamlamaları veya ispatlarının yarıda bırakılmasından kaynaklanan durumlar olarak nitelendirilen muhakeme eksiklikleri boyutunda 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te benzer kategorilerin yoğunlukta olduğu görülmektedir. Muhakeme eksikliklerine yönelik veriler incelendiğinde üç açık uçlu

sınavda da benzer muhakeme eksiklerinin ön planda olduğu göze çarpmaktadır. Ancak muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan kategoriler yoğunluk bakımından farklılık göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME2 kategorisi üç açık uçlu sınavda da bu boyutta yoğunlukta olmakla birlikte MHBT1’de en yüksek frekans veya yüzdeye sahiptir. Buna karşın MHBT2 ve MHBT3’te MHBT1’e nispeten daha düşük bir oranda ortaya çıktığı görülmektedir. Ancak üç açık uçlu sınavda da ME2 kategorisi bu boyutta diğer kategorilere göre en yüksek frekans ve yüzdeye sahiptir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının dikkate değer bir kısmı ispat sürecinde ispata başlamama veya başlanan bir ispatı devam ettireme açısından muhakeme eksiklerine sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan başka bir kategori olan ME3 kategorisi MHBT1, MHBT2 ve MHBT3’te bu boyutta en fazla yoğunlukta olan kategorilerdendir. Bununla birlikte MHBT3’te düşük oranda da olsa bir düşüş söz konusudur. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde tanım aralığını dikkate almama muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen durumlar açısından üç açık uçlu sınavda da yoğunlukta olduğunu göstermektedir. Muhakeme eksikleri boyutunda yer alan ME8 kategorisi benzer şekilde MHBT1, MHBT2 ve MHBT3’te 3. sınıf öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme eksikliklerindedir. Dolayısıyla 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının bir kısmı ispat sürecinde iki yönlü koşullu bir önermenin ispatı yaparken her iki taraftan incelenmesi gerektirdiği durumlarda sadece bir taraftan inceleyerek ispat yapmaya çalışmışlardır. Matematik dilinin yetersiz kullanımı muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen ME6 kategorisi bu boyutta öğretmen adayların sahip oldukları başka bir muhakeme eksikliğidir. Üç açık uçlu sınavda da 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ME6 göstergesi bakımından benzer şekilde oldukça yakın oranlarda bu muhakeme eksikliğine sahip olduklarından söz edilebilir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının matematik dilini kullanmada yetersizlik, ispat adımlarında matematiksel sembol, tanım veya teorem gibi ifadelerinin kullanımında matematik diline dikkat edememe olarak nitelendirilen muhakeme eksikliği açısından dikkate değer bir oranda sahip oldukları göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME1 göstergesi MHBT1’de frekans $f_1=19$ ve %7,4 yüzdeyle ve MHBT2’de frekans $f_1=18$ ve %7,4 yüzdeyle aynı yoğunlukta ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla ispat sürecinde yöntemsel eksiklik olarak değerlendirilen durumlar açısından 3.sınıf seviyesinden yer alan öğretmen adaylarının dikkate değer oranda bu muhakeme eksikliğine sahip oldukları söz konusudur. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematiksel bir ifadenin ispatı için en uygun ispat yöntemini seçme veya herhangi bir ispat yöntemini doğru kullanmada sıkıntı yaşadıklarını göstermektedir. Muhakeme eksikleri boyutunda MHBT1, MHBT2 ve MHBT3’ e yönelik

veriler incelendiğinde üç açık uçlu sınavda da bu boyutta yer alan ME5 ve ME7 kategorileri bu boyutta yer alan diğer kategorilere nispeten daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı ve ispat yapmada sistematikliğin olmaması olarak değerlendirilen durumlar açısından daha düşük oranlarda muhakeme eksikliklerine sahip olduklarını göstermektedir.

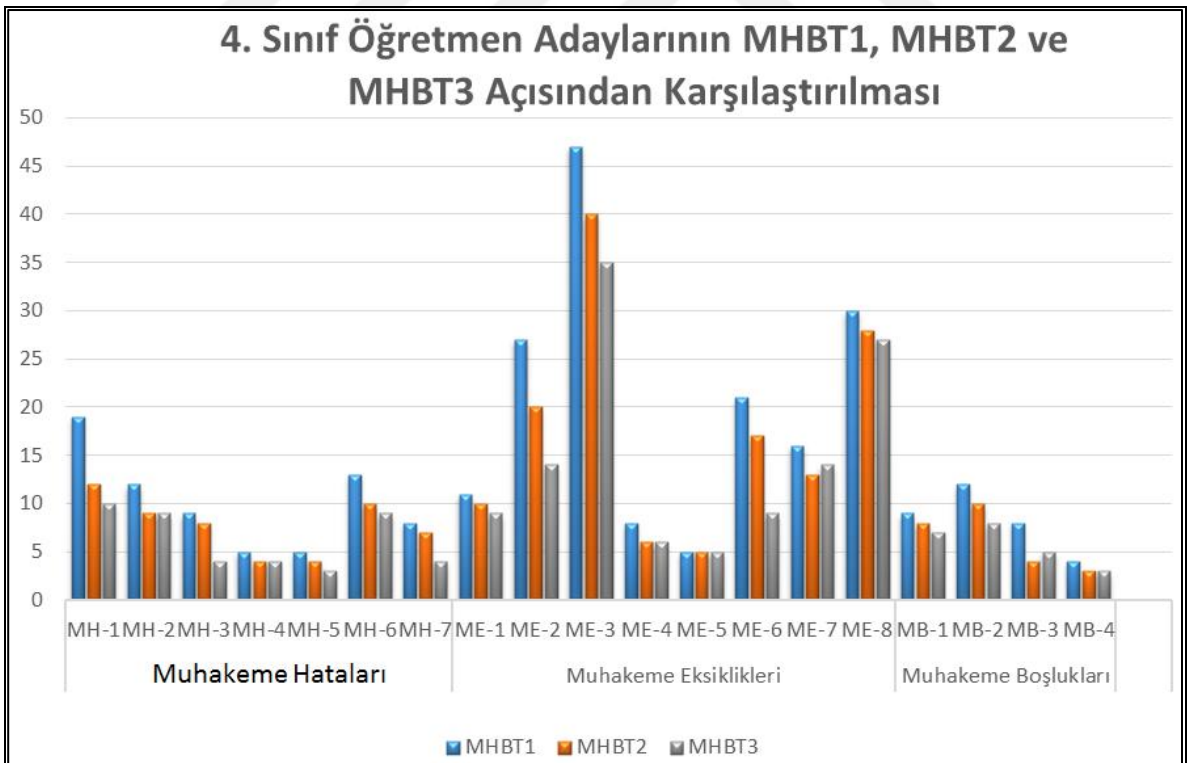
İspat sürecinde; ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmayarak ispatın tamamlanması gibi durumlar muhakeme boşlukları olarak değerlendirilmiştir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan kategoriler MHBT1, MHBT2 ve MHBT3 için ayrı ayrı ele alındığında MB2 kategorisi bu boyutta üç açık uçlu sınavda da en yüksek frekans ve yüzdeye sahiptir. Bu durum, 3. Sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının önemli bir kesiminin ispat sürecinde kullandıkları önermeleri gerekçelendirmeden ispatları belli ezber kalıplar ile yapmaya çalıştıkları veya ispat adımlarında kullanılan önermeleri ve ortaya atılan iddiaların bir gerekçeye dayandırmadan geçersiz ispatlar oluşturdukları göstermektedir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB1 göstergesi MHBT1'de yoğunluktadır. Buna karşın MHBT2 ve MHBT3'te daha düşük oranlarda ortaya çıkmıştır. Bu durum, 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması olarak nitelendirilen muhakeme boşluğu bakımından üç açık uçlu sınavda da benzer şekilde dikkate değer oranda sahip olduklarını göstermektedir. Dolayısıyla 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken elde sonucun önceki adımlara dayandırılmasına rağmen bu adımlar arasında bir ilişkinin olmaması açısından her iki açık uçlu sınavda da daha yoğunlukta oldukları söz konusudur. MHBT1, MHBT2 ve MHBT3 verileri incelendiğinde 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB3 ve MB4 kategorileri bakımından daha düşük oranlarda sahip olduklarından söz edilebilir. Bu durum 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde ara aşamaların göz ardı edilmesi yani ispatta yazılması gereken bazı adımların atlaması veya ispatta gereksiz adımlara ve ifadelere yer verme bakımından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

İspata yönelik güz dönemi ders gözlemleri öncesi yapılan MHBT1 güz dönemi ders gözlemleri gözlem sonrası yapılan MHBT2 ve bahar dönemi ders gözlemler sonrasında yapılan MHBT3'te 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayları, değişen oranlara rağmen benzer muhakeme hatalarına, muhakeme eksikliklerine veya muhakeme boşluklarına sahip oldukları söz konusudur. Ancak muhakeme hataları, eksiklikleri ve

boşlukları boyutlarında yer alan kategorileri ayrı ayrı incelendiğinde MHBT1'e göre genel olarak her bir boyutta frekans ve yüzde olarak bir düşüş olduğu görülmektedir.

4. 5. 4. Bahar Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 4.Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular

Güz dönemi ders gözlemleri öncesi yapılan MHBT1, güz dönemi ders gözlemleri sonrası yapılan MHBT2 ve bahar dönemi ders gözlemleri sonrasında yapılan MHBT3' elde edilen veriler incelenmiştir. Bu veriler göz önüne alındığında 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının her üç açık uçlu sınavda da benzer muhakeme hatalarına, muhakeme eksikliklerine veya muhakeme boşluklarına sahip oldukları ve bu göstergelerinin yoğunlukları sınavlara göre bir değişim gösterdiği belirlenmiştir. 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1,MHBT2 ve MHBT3'te yaptıkları ispatların muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları boyutlarında yer alan her bir kategoriye göre değerlendirilmesi sonucunda elde edilen frekans ve yüzde dağılımı Grafik 18' de sunulmuştur.



Grafik 18. Güz dönemi ders gözlemleri öncesi, güz dönemi ders gözlemleri sonrası ve bahar dönemi ders gözlemleri sonrasında 4. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması

Grafik genel olarak incelendiğinde her bir boyutta benzer muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşluklarının ön planda olduğu göze çarpmaktadır. Bununla birlikte 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarını, muhakeme eksikliklerini ve muhakeme boşluklarını belirlemeye yönelik uygulanan MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te muhakeme hataları boyutunda üç açık uçlu sınav arasında göstergelerin oranlarında bir farklılaşma söz konusudur. Bu boyutta yer alan göstergeler içinde MH1 kategorisi MHBT1'de daha yoğunluktadır. Buna karşın MHBT2 ve MHBT3'te bu oranda bir azalma olmuştur. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde sonuç ile başlama muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar açısından MHBT1'e göre MHBT2 ve MHBT3'te daha düşük yoğunlukta sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan her bir kategoriye yönelik veriler incelendiğinde 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının üç açık uçlu sınavda da dikkate değer bir oranlarda MH2 muhakeme hatasına sahip olduğu görülmektedir. Bu durum, üç açık uçlu sınavda da 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde yanlış varsayım ile başlama muhakeme hatasına sahip olduğunu göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH6 göstergesi MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te bu boyutta ön plana çıkan başka bir muhakeme hatasıdır. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde bir teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olmasının farkına varamama olarak değerlendirilen durumlar bakımından hatasına sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH3 göstergesi üç açık uçlu sınavda da bu boyutta yer alan diğer kategorilere nispeten daha yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. Dolayısıyla 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematiksel bir ifadenin farklı notasyonlarını ispat olarak düşünme açısından MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te benzer yoğunlukta olduklarından söz edilebilir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH7 kategorisi MHBT1'de yüzde on civarında iken MHBT2 ve MHBT3'te dikkate değer bir oranda düşüş göstermiştir. Bu durum, ispat sürecinde 4.sınıf öğretmen adaylarının bir kısmının özel bir durumdan hareketle veya sadece birkaç sayısal değer ile ispatları yapmaya çalıştıklarını göstermektedir. Üç açık uçlu sınavda da muhakeme hataları boyutunda yer alan MH4 ve MH5 kategorileri bu boyuttaki diğer göstergelere göre daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının genel olarak ispat sürecinde matematiksel bir ilişkinin ispatını yaparken aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanma veya aşırı genelleme muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar bakımından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

4. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde yöntem, ilgili matematiksel ifadenin tanım aralığı, matematiksel dil gibi eksikliklerle ispatlarını tamamlamaları veya ispatlarının yarıda bırakılmasından kaynaklanan durumlar muhakeme eksiklikleri olarak değerlendirilmektedir. Bu durumlar muhakeme hatasından ziyade doğru bir muhakeme ile başlanması ancak bazı matematiksel bilgi eksikliklerine bağlı olarak ispatın eksik şekilde tamamlanmamasıdır. 4. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme eksikliklerini belirlemeye yönelik uygulanan MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'ün verileri incelendiğinde üç açık uçlu sınavda da benzer muhakeme eksiklerinin ön planda olduğu fark edilmektedir. Bununla birlikte muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergelerinin oranları arasında MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te bir değişim olduğu görülmektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME3 kategorisi her üç sınavda da bu boyutta en fazla yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. Bununla birlikte MHBT2 ve MHBT3'te bu kategoriye ait yoğunluk gittikçe azalma göstermiştir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının üç açık uçlu sınavda da ispat sürecinde tanım aralığını dikkate almama muhakeme eksikliği olarak nitelendirilen durumlar açısından yoğunlukta olduğunu göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME2 kategorisi MHBT1'de bu boyutta yer alan diğer kategorileri nispeten daha yoğunlukta olduğu görülmektedir. Buna karşın MHBT2'de ve özellikle MHBT3'te daha düşük yoğunlukta ortaya çıkmıştır. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde ispata başlayamama veya başlanan bir ispatı devam ettirememeye açısından yoğunlukta olduğunu göstermektedir. Muhakeme eksikleri boyutunda yer alan ME8 kategorisi MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te benzer şekilde yüksek frekans ve yüzdelerle sahip olduğu görülmektedir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde iki yönlü koşullu bir önermenin ispatı yaparken her iki taraftan incelenmesi gerektirdiği durumlarda sadece bir taraftan inceleyerek ispat yapmaya çalıştıklarını göstermektedir. İspat sürecinde matematik dilinin yetersiz kullanılması muhakeme eksikliği olarak değerlendirilen ME6 kategorisi MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te bu boyuttaki diğer kategorilere nispeten daha yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. Üç açık uçlu sınavda da 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ME6 kategorisi bakımından benzer yoğunlukta bu muhakeme eksikliğine sahip olduklarından söz edilebilir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının matematik dilini kullanmada yetersizlik, ispat adımlarında matematiksel sembol, tanım veya teorem gibi ifadelerinin kullanımında matematik diline dikkat edememe olarak nitelendirilen durumlar açısından dikkate değer bir oranda sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yöntemsel eksiklik olarak değerlendirilen ME1 üç açık uçlu sınavda da benzer yoğunlukta olduğu görülmektedir.

Dolayısıyla ispat sürecinde yöntemsel eksiklik açısından 4.sınıf seviyesinden yer alan öğretmen adaylarının dikkate değer oranlarda bu muhakeme eksikliğine sahip olduklarından söz edilebilir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde ilgili matematiksel ifadenin ispatı yapmak için en uygun ispat yöntemini seçmede veya herhangi bir ispat yöntemini doğru kullanmada zorluklar yaşadıklarını göstermektedir. 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme eksiklerine yönelik MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'ün verileri incelendiğinde üç açık uçlu sınavda da bu boyutta yer alan ME5 ve ME7 kategorileri bu boyutta yer alan diğer kategorilere nispeten daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı ve ispat yapmada sistematikliğin olmaması olarak değerlendirilen durumlar bakımından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

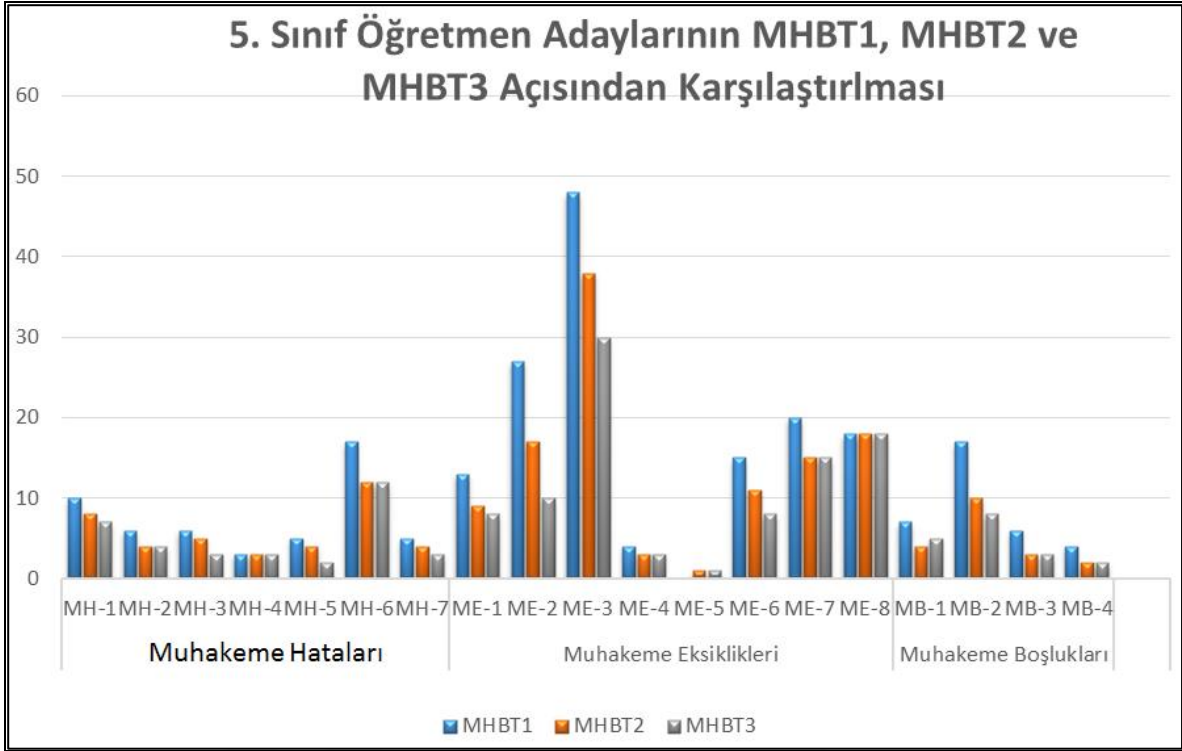
4. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmayarak ispatın tamamlanması gibi durumlar muhakeme boşlukları olarak değerlendirilmektedir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan kategorilere yönelik veriler incelendiğinde genel olarak benzer muhakeme boşluklarının ön planda olduğu fark edilmektedir. Uygulanan üç açık uçlu sınavın verileri ayrı ayrı ele alındığında MB2 kategorisi MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te benzer şekilde en yüksek frekans ve yüzdeye sahiptir. Bu durum, 4. Sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının genel olarak ispat sürecinde kullandıkları önermeleri gerekçelendirmeden ispatları belli ezber kalıplar ile yapmaya çalıştıklarını veya ispat adımlarında kullanılan önermeleri ve ortaya atılan iddiaların bir gerekçeye dayandırmadan geçersiz ispatlar oluşturduklarını göstermektedir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB1 kategorisi MHBT1'de diğer iki açık uçlu sınava göre daha yoğunluktadır. Bununla birlikte MHBT2 ve MHBT3'te MB1'in oranı bu boyutta yer alan diğer kategorilere göre daha yoğunluktadır. Bu durum, 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması olarak nitelendirilen durumlar bakımından üç açık uçlu sınavda da benzer oranda sahip olduklarını göstermektedir. Bu durum 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken elde sonucun önceki adımlara dayandırılmama veya bu adımlar arasında bir ilişkinin kurulmaması olarak değerlendirilen durumlar açısından dikkate değer oranlarda muhakeme boşluklarına sahip olduklarını göstermektedir. MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'ün verileri incelendiğinde 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB3 ve MB4 kategorileri üç açık uçlu sınavda da bu boyutta

diğer kategorilere göre daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde ara aşamaların göz ardı edilmesi veya ispatta yazılması gereken bazı adımların atlaması ve ispatta gereksiz adımlara ve ifadelere yer verme bakımından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

İspata yönelik güz dönemi ders gözlemleri öncesi yapılan MHBT1, gözlem sonrası yapılan MHBT2 ve MHBT3'te 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının farklı oranlara rağmen benzer muhakeme hatalarına, muhakeme eksikliklerine veya muhakeme boşluklarına sahip oldukları söz konusudur. Bununla birlikte muhakeme hataları, eksiklikleri ve boşlukları boyutlarında yer alan kategoriler ayrı ayrı incelendiğinde MHBT1'e göre genel olarak her bir boyutta frekans ve yüzde olarak bir düşüşün olduğu görülmektedir.

4. 5. 5. Bahar Dönemi Ders Gözlemleri Sonrası 5.Sınıf Seviyesinde Yer Alan Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları ile ilgili Bulgular

Güz dönemi ders gözlemleri öncesi yapılan MHBT1, güz dönemi ders gözlemleri sonrası yapılan MHBT2 ve bahar dönemi ders gözlemleri sonrasında yapılan MHBT3'te elde edilen veriler incelenmiştir. Bu veriler göz önüne alındığında 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının her üç açık uçlu sınavda da benzer muhakeme hatalarına, muhakeme eksikliklerine veya muhakeme boşluklarına sahip oldukları ve bu göstergelerinin yoğunlukları sınavlara göre bir değişim gösterdiği belirlenmiştir. 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1,MHBT2 ve MHBT3'te yaptıkları ispatların muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları boyutlarında yer alan her bir kategoriye göre değerlendirilmesi sonucunda elde edilen frekans ve yüzde dağılımı Grafik 19' da sunulmuştur.



Grafik 19. Güz dönemi ders gözlemleri öncesi, güz dönemi ders gözlemleri sonrası ve bahar dönemi ders gözlemleri sonrasında 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları bakımından karşılaştırılması

Grafik genel olarak incelendiğinde 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının benzer kategorilerde yoğunlaştığı görülmektedir. Öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarını belirlemek amacıyla yapılan MHBT1, MHBT2 ve MHBT3 açık uçlu sınavlarının verileri incelendiğinde bu boyutta benzer kategorilerin ön plana çıktığı görülmektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH6 kategorisi üç açık uçlu sınavda da bu boyutta yer alan diğer kategorilere göre en fazla yoğunlukta olan bir muhakeme hatasıdır. Bununla birlikte MHBT1’de bu kategorinin yoğunluğunun daha fazla olduğu görülmektedir. Buna karşın MHBT3’te dikkate değer bir oranda azalma göstermiştir. Bu durum, 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematiksel bir ilişkinin ispatını yaparken bir teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olmasının farkına varama açısından benzer frekans ve yüzdeyle MH6 muhakeme hatasına sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan göstergeler bakımından 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayları MHBT1’de yüksek frekans ve yüzdeyle MH1 muhakeme hatasına sahip olduğu görülmektedir. Buna karşın MHBT2 ve MHBT3’te bu muhakeme hatasına yönelik oranın düşüş gösterdiği göze çarpmaktadır. Bu durum, 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının birinci açık

uçlu sınavda ispat yaparken, ispatı istenilen matematiksel ifadeyi doğru kabul ederek bu ifade üzerinde çeşitli işlemler yaparak ispatları yapmaya çalıştıkları göstermektedir. Ancak MHBT2 ve MHBT3'te bu düşüncenin önemli bir oranda değiştiği fark edilmektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH2 göstergesi MHBT1'de dikkate değer bir oranda ortaya çıktığı görülmektedir. MHBT2 ve MHBT3'te benzer şekilde ispat sürecinde yanlış varsayımla başlama muhakeme hatası olarak nitelendirilen durumlar bu boyutta yer alan diğer göstergelere nispeten ön plana çıktığı fark edilmektedir. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde hüküm ile hipotezi karıştırma veya ispata yanlış varsayımla başlama olarak nitelendirilen durumlar açısından üç açık uçlu sınavda da muhakeme hatasına sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme hataları boyutunda yer alan MH3 göstergesi MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te ön plana çıkan göstergelerden biridir. Buna karşın uygulanan üç açık uçlu sınavda da muhakeme hataları boyutunda yer alan MH4 MH5 ve MH7 göstergeleri bu boyutta diğer göstergelere nispeten düşük oranlarda olduğu fark edilmektedir. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematiksel bir ifadenin ispatı yaparken aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılması ve aşırı genelleme muhakeme hatası olarak değerlendirilen durumlar bakımından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir. 5.sınıf öğretmen adaylarının benzer şekilde ispat sürecinde sayısal değerler verilerek ilgili matematiksel ifadenin doğruluğunu göstermeyi ispat olarak düşünme olarak nitelendirilen durumlar açısından düşük yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır.

5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde yöntem, tanım aralığı, matematiksel dil gibi eksikliklerle ispatlarını tamamlamaları veya ispatlarını yarım bırakmalarından kaynaklanan durumlar muhakeme eksiklikleri olarak değerlendirilmektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan göstergeler genel olarak incelendiğinde bu boyutta 5.sınıf öğretmen adaylarının MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te sahip oldukları muhakeme eksikliklerinin üç açık uçlu sınavda da benzerlik gösterdiği fark edilmektedir. Bununla birlikte muhakeme eksiklikleri boyutunda ortaya çıkan göstergelerin yoğunluk olarak üç açık uçlu sınav arasında bir değişim olduğu göze çarpmaktadır. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME3 göstergesi MHBT1'de bu boyutta en yüksek frekans yüzdeye sahiptir. Buna karşın bu gösterge MHBT2 ve MHBT3'te nispeten daha düşük yoğunlukta olduğu fark edilmektedir. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının MHBT1'de ispat sürecinde ilgili matematiksel ifadesin tanım aralığını dikkate almama muhakeme eksikliği olarak değerlendirilen durumlar açısından daha fazla yoğunlukta olduklarını göstermektedir. Ancak genel olarak 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde ME3 muhakeme eksikliğine sahip olduğu

göze çarpmaktadır. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME2 göstergesi üç açık uçlu sınavda da bu boyutta diğer göstergelere göre yoğunlukta olan başka bir muhakeme eksikliğidir. Bununla birlikte bu göstergenin MHBT2 ve özellikle de MHBT3'te düşük oranda da olsa bir düşüş gösterdiği söz konusudur. Bu durum, 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının genel olarak ispat sürecinde ispata başlayamama veya başlangıç yaptıkları ispatları devam edememe açısından yoğunlukta olduğunu göstermektedir. Muhakeme eksikleri boyutunda yer alan ME8 göstergesi bu boyutta benzer şekilde MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te yüksek frekans ve yüzdeye sahiptir. Bu durum, 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde iki yönlü koşullu bir önermenin ispatı yaparken her iki tarafın incelenmesi gerektirdiği durumlarda sadece bir taraftan inceleyerek ispatları yapmaya çalıştıklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikler boyutunda yer alan ME6 göstergesi bu boyutta ön plana çıkan muhakeme hatalarından biridir. Üç açık uçlu sınavda da 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ME6 göstergesi açısından birbirine oldukça yakın oranlarda bu muhakeme eksikliğine sahip oldukları fark edilmektedir. Bununla birlikte ikinci ve üçüncü açık uçlu sınavlarda bir düşüş söz konusudur. Bu durum, 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanmada yetersizlik, ispat adımlarında matematiksel sembol, tanım veya teorem gibi ifadelerinin kullanımında matematik diline dikkat etmeme olarak nitelendirilen durumlar bakımından önemli oranda sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME7 göstergesi üç açık uçlu sınavda da benzer yoğunlukta ortaya çıkmıştır. Bu durum ispat sürecinde 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının dikkate değer oranda ispat yapmada sistematikliğin olmaması olarak değerlendirilen muhakeme eksikliğine sahip olduklarını göstermektedir. 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme eksikliklerini belirlemek amacıyla yapılan MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te elde edilen veriler incelendiğinde üç açık uçlu sınavda da muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ME4 ve ME5 göstergeleri bu boyutta diğer göstergelere nispeten daha düşük oranlarda sahip oldukları görülmektedir. Bu durum, 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı olarak nitelendirilen durumlar veya ispat sürecinde aşırı genelleme muhakeme hataları olarak değerlendirilen durumlar bakımından üç açık uçlu sınavda da düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayların ispat sürecinde, ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmayarak ispatın tamamlanması gibi durumlar açısından birçok muhakeme boşluğuna sahip olduğu görülmektedir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer

alan göstergeler genel olarak incelendiğinde MHBT1, MHBT2 ve MHBT3'te benzer muhakeme boşluklarının ön planda olduğu görülmektedir. Bu boyutta yer alan MB2 göstergesi üç açık uçlu sınavda da en yüksek frekans ve yüzdeye sahiptir. Bu durum 5. Sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun ispat sürecinde kullandıkları önermeleri gerekçelendirmeden ispatları yapmaya eğilim gösterdiklerini veya ispatları belli ezber kalıplar ile yapmaya çalıştıklarını görülmektedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispat adımlarında kullanılan önermelerinin ve ortaya atılan iddiaların bir gerekçeye dayandırmadan geçersiz ispatlar oluşturuldukları söz konusudur. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB1 göstergesi MHBT1'de frekans $f_1=7$ ve %21,2 yüzdeye sahiptir. Buna karşın bu gösterge MHBT2'de frekans $f_1=4$ ve %21 yüzde ile frekans olarak bir düşüş göstermiştir. Ancak ispat sürecinde yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması muhakeme boşluğu olarak nitelendirilen durumlar bakımından hem MHBT1'de hem MHBT2'de bir farklaşmaya rağmen öğretmen adaylarının her iki açık uçlu sınavda dikkate değer bir oranda MB1 muhakeme boşluğuna sahip oldukları göze çarpmaktadır. Bu durum 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken elde ettikleri sonucu önceki adımlara dayandırmama veya ispat adımları arasında bir ilişki kuramama açısından MHBT2'de daha az yoğunlukta olduklarını göstermektedir. MHBT1 ve MHBT2'nin verileri göz önüne alındığında boşlukları boyutunda yer alan MB3 göstergesi frekans $f_1 =6$, $f_2 =3$ ve yüzdeye sırasıyla %18,1, %15,7 sahiptir. Bu durum 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat yaparken ara aşamaların göz ardı edilme ya da ispatta yazılması gereken bazı adımların atlaması olarak nitelendirilen durumlar açısından dikkate değer bir oranda sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan MB4 göstergesi hem MHBT1 hem MHBT2'de farklı oranlarda olmasına rağmen bu boyutta diğer göstergelere nispeten daha düşük yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ve ispatta gereksiz adımlara veya ifadelerle yer verme açısından daha düşük oranlarda sahip olduklarını göstermektedir.

İspata yönelik güz dönemi ders gözlemleri öncesi yapılan MHBT1 ve gözlem sonrası yapılan MHBT2'de 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerinin veya muhakeme boşluklarının benzer olmakla birlikte bu göstergelerinin yoğunluklarında her iki açık uçlu sınava göre bir farklılık söz konusudur. Ancak muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları boyutlarında yer alan her gösterge incelendiğinde MHBT1'e göre genel olarak her bir boyutta göstergelerin frekans ve yüzdeler bakımından bir azalma gösterdiği görülmektedir.

5. TARTIŞMA

Araştırmanın birinci amacı; matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının belirlenmesi ile matematik öğretmeni adaylarının üniversiteye ne tür muhakeme hatalarıyla geldikleri tespit edilerek üniversite eğitimleri boyunca bu hatalarının gelişimsel olarak nasıl değiştiği; hangi hatalarının direnç gösterdiği, hangilerinin azaldığı ya da yeni hataların oluşup oluşmadığının incelenmesidir. İkinci amaç ise matematik öğretmeni adaylarının üniversite eğitimleri boyunca aldıkları bazı derslerin; matematiksel muhakemelerini geliştirmeleri, uygun stratejiler belirlemeleri ve muhakeme hatalarının üzerindeki rolünün ne ölçüde olduğunu detaylı incelemek, derinlemesine analiz etmektir. Bu amaçlar doğrultusunda ispat sürecinde ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının sahip olduğu muhakeme hatalarına ilişkin bulgular iki ana başlık altında tartışılmıştır. Birinci ana başlık altında ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının sahip olduğu muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerinin veya muhakeme boşluklarının yıllara göre değişimlerine yönelik bulgular ile ilgili tartışma ele alınmıştır. İkinci ana başlıkta ise ortaöğretim matematik öğretmenliği programında yürütülen ve ispatların yoğun olarak işlendiği güz ve bahar dönemi derslerde ispata yönelik yer verilen uygulamaların muhakeme üzerindeki rolüyle ilgili tartışma ele alınmıştır. Ayrıca açık uçlu sınavlarının verileri dikkate alınarak ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının sınıf seviyeleri bakımından nasıl bir değişim gösterdiği belirlenmiştir.

5. 1. Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Sürecinde Sahip Oldukları Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşluklarına İlişkin Bulguların Tartışılması

Araştırmanın alt problemlerinden biri, ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının incelenmesidir. Bu problem doğrultusunda güz dönemi ders gözlemlerinin öncesi ve sonrası ile bahar dönemi ders gözlemlerinin sonrasında uygulanan MHBT1, MHBT2 ve MHBT3 verileri dikkate alınarak öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları belirlenerek sınıf seviyeleri arasında karşılaştırmalar yapılmıştır. Bunun yanı sıra öğretmen adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hatalarında nasıl bir değişimin olduğu ve hangi muhakeme hatalarının direnç gösterdiği de belirlenmeye çalışılmıştır. Öğretmen

adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşlukları aşağıda belirtilen başlıklar halinde tartışılmıştır.

5. 1. 1. Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Sürecinde Sahip oldukları Muhakeme Hatalarına İlişkin Bulguların Tartışılması

Bu bölümde matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hatalarının neler olduğu, uygulanan açık uçlu sınavlarına bağlı olarak nasıl bir değişim gösterdiği ve sınıf düzeyleri arasındaki benzerlik ve farklılaşmanın hangi noktalarda olduğuna ilişkin bulgular tartışılmıştır. Bununla beraber ortaya çıkan muhakeme hataları ile öğretmen adaylarının ispata yönelik aldığı dersler arasındaki ilişkinin ne ölçüde olduğu ya da muhakeme hatalarının değişimine sebep olan sınıf içi uygulamalarının neler olduğu ve bunların muhakeme hatalarını ne yönde etkilediği de tartışılmaya çalışılmıştır. Muhakeme hatalarını belirleme sınavları sonucunda elde edilen veriler göz önüne alındığında genel olarak uygulamaya dâhil olan farklı sınıf seviyesindeki öğretmen adaylarının ispat sürecinde benzer muhakeme hatalarına sahip oldukları ve bu muhakeme hatalarının sınıf seviyelerindeki yoğunluğunun değişim gösterdiği görülmüştür. İspat sürecinde en sıklıkla rastlanan muhakeme hataları; MH7 (*Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi*), MH1 (*Sonuç ile başlama muhakeme hatası*), MH6 (*Teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması*) ve MH2 (*Yanlış varsayımlarla başlama muhakeme hatası*) olarak belirlenmiştir. Bu durum sınıf seviyesine bakılmaksızın genel olarak öğretmen adaylarının ispat sürecinde birçok muhakeme hatasına sahip olduklarını göstermektedir. Muhakeme hatalarına yönelik yapılan bazı çalışmalarda (Andrew, 2009; Jones, 2000; Sarı-Uzun, 2003; Selden ve Selden, 2003; Weber, 2001) da benzer sonuçlar ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte elde edilen verilere bakıldığında sınıf seviyeleri arasında muhakeme hataları yoğunluk ve çeşitlilik bakımından bir farklılaşma gösterdiği de belirlenmiştir. Bu farklılaşmanın ne ölçüde olduğunu belirleme ve yoğun olarak ortaya çıkan her bir muhakeme hatasına ilişkin değişiminin ne yönde olduğu açık uçlu sınavlarda elde edilen veriler göz önüne alınarak tartışılmaya çalışılmıştır.

Özel bir durumdan veya birkaç sayısal değer ile elde edilen bir sonucun ispat olarak kabul edilmesi (MH7) olarak nitelendirilen muhakeme hatası, üst sınıflara doğru gidildikçe dikkate değer bir oranda azalmakla birlikte öğretmen adaylarının ispat sürecinde en fazla yaptığı muhakeme hatalarından biridir. Her bir sınıf seviyesi ayrı ayrı incelendiğinde MHBT1'de 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MH7 kategorisi %53,5 oranında iken MHBT2 ve MHBT3'te bu oran sırasıyla %10,1 ve %8,2 oranına düşerek çok büyük bir değişim göstermiştir. MHBT1'de bu oranın çok yüksek olması, öğretmen

adaylarının önceki akademik yaşamlarında ispat yapma anlamında deneyimsiz olmaları ya da ispatı yapılması istenen matematiksel ifadeleri denklem çözme gibi düşünerek sonucun doğruluğunu göstermeye odaklanmalarına bağlı olduğu düşünülmektedir. MHBT1'nin sonrasında 1. sınıf seviyesinde yer alan B13 kodlu öğretmen adayı ispat yaparken neden sayısal değerler kullandığı sorusuna karşılık olarak ilk defa ispatla karşılaştığını, başta ne yapacağını bilmediğini ve birkaç sayısal değer denediğinde her birinin sonucu sağladığını ifade etmesi ile birlikte bir ifadenin doğru olduğunu belirtmek için birkaç örneğin yeterli olduğunu düşünmesi bu durumu destekleyen örneklerden biridir. Birinci sınıf seviyesinde yer alan diğer öğretmen adayları da çoğunlukla benzer düşünceleri dile getirmişlerdir. Öğretmen adaylarının bu tür açıklamalarına bağlı olarak birinci sınıfa başlayan öğretmen adaylarının; ispatları sadece doğrulama olarak algıladığı, soyutlama, genelleme gibi ispatın fonksiyonlarını bilmedikleri düşünülmektedir. Bu bakımdan 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispatlarda sayısal değerler kullanmayı tercih ettiklerinden söz edilebilir. Bu durum öğretmen adaylarının üniversite eğitimlerine başlamadan önceki akademik hayatlarında özel bir durumu ispat olarak düşünme muhakeme hatasına sahip olduklarını göstermektedir. Özer ve Arıkan (2002) yaptıkları çalışmada lise öğrencilerinin farklı muhakeme hatalarına sahip olmalarına bağlı olarak çoğunun ispat yapabilme düzeylerinin düşük olduğu ve öğrencilerin ispatları sadece sayısal değerler vererek yapmaya çalıştıklarını belirtmeleri bu sonucu desteklemektedir. Benzer şekilde yapılan birçok çalışmada da ortaöğretim seviyesinde veya üniversite 1. sınıf seviyesinde yer alan öğrencilerin ispatları yaparken sayısal değerlere yöneldiğini ve geçerli olmayan ispatlar oluşturmalarına yol açan muhakeme hataları yaptıkları vurgulanmaktadır (Andrew, 2009; Almeida, 2005; Sarı, 2011; Stylianides ve Stylianides; 2009). MHBT1'den elde edilen verilere göre genel olarak birinci sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının üniversitede eğitim görmeye başladıkları ilk zamanlarda MH7 muhakeme hatasını daha yoğunlukla yaptığı belirlenmiştir. MHBT2 ve MHBT3'de 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MH7 kategorisinin önemli bir oranda değişim gösterdiği görülmüştür. Bu değişimde güz ve bahar döneminde aldıkları ispata yönelik derslerinin etkisi olduğu düşünülmektedir. Dolayısıyla ispatların yoğun olarak işlendiği derslerde yapılan uygulamaların öğretmen adaylarının muhakeme hatalarının azalmasında pozitif etki yaptığından söz edilebilir. Örneğin ispatların yoğun olarak işlendiği Matematiğin Temelleri dersinde öğretim elemanı, matematiksel bir teoreminin ispatı için öğretmen adaylarının ısrarla birkaç sayısal değerle doğruluğunun gösterilmesine müdahale ederek bunun yeterli olmayacağını ve bu durumda sonucun doğruluğu için bütün tamsayılarının teker teker denenmesi gerektiğine dikkat çekip bu kadar fazla denemenin yapılamayacağına değinmiştir. Bunun için matematiksel tanım ve

teoremlerden faydalanarak genel kurallarının oluşturulması gerektiğini vurgulamıştır. Bununla birlikte örnek üzerinde göstererek ispat için bir genelleme yapmanın gerekliliğine vurgu yapmıştır. Dolayısıyla öğretim elemanlarının izlediği yaklaşım (ya da işlenen dersler) öğretmen adaylarının MHBT2 ve MHBT3'te ispatları yaparken özel bir durumdan elde edilen sonucu ispat olarak kabul etme eğilimlerini büyük oranda terk etmelerine yardımcı olduğundan söz edilebilir. Ancak 2.sınıf ve 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayları da ispatların yoğun olarak işlendiği dersler almalarına rağmen MH7 kategorisi MHBT1'de %21,7 ve %17,4 iken MHBT2 %20,3, %15,8' ve MHBT3'de bu oran %19,3, %15,5' şeklinde üç sınavda da belirli bir oranda kalarak değişime karşı direnç göstermiştir. Bu durumun birçok sebepten dolayı ortaya çıktığı belirtilebilir. 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının aldığı Temel Matematik, Analiz 1 derslerinin ispatlar için giriş dersler olmalarından dolayı bu derslerde ispatlara yönelik sınıf içi uygulamalara daha çok yer verilmesinden kaynaklanabilir. Bu derslerde yapılan ispatlarda öğretmen adaylarının kendi muhakeme süreçlerini açıklamalarına daha fazla fırsat verilmesinden de kaynaklanabilir. Ayrıca bu derslerde yapılan gözlemlerde daha çok öğrenci merkezli olduğu, öğretmen adaylarının kendi ispatlarının oluşturma ve sunumlarına daha fazla fırsat verildiği belirlenmiştir. Bu durum da öğretmen adaylarının kendi muhakeme süreçleri üzerinde bir farkındalık oluşmasına ve sahip oldukları muhakeme hatalarının azalmasına katkıda bulunmaktadır. Bu yüzden farklı öğretim yaklaşım ve yöntemlerinin muhakeme hatalarının üzerinde etkisi olduğundan söz edilebilir. Başka bir sebep olarak öğretmen adaylarının ispat sürecinde yapamadıkları ispatları boş bırakmak yerine bir şeyler yapmış gibi görünmeyi tercih etmelerinden kaynaklanabilir. Öğretmen adayları ile yapılan görüşme veya klinik mülakatlarda öğretmen adaylarının ispat yaparken neden sayısal değerler kullandığı sorusuna; aslında yeterli olmayacağını bildiklerini ancak boş bırakmak yerine bir şeyler yazmayı tercih ettiklerini belirtmişlerdir. Ayrıca başka öğretmen adayları da eksik de olsa sınavlarda bir şeyler yazıldığında öğretim elemanlarının puan verdiği için ispatlarda sayısal değerler kullandıklarını eklemişlerdir. Yapılan çalışmalara bakıldığında benzer şekilde öğrencilerin puan almak için veya ispatları boş bırakmamak için sayısal değerler kullanarak geçersiz ispatlar oluşturdukları belirtilmektedir (Andrew, 2009; Almeida, 2005; Sarı, 2011; Stylianides ve Stylianides; 2009). Stylianides ve Stylianides (2009) yaptıkları çalışmalarında, birçok öğrencinin matematiksel bir ifadenin ispatını tam anlamıyla yapamayacaklarını düşündükleri zaman cevap olarak bir şeyler yazmaya çalıştıkları ve genellikle örnek durumlara yöneldiklerini belirterek aynı duruma vurgu yapmıştır.

Sınıf seviyelerinin genelinde sadece özel bir durumu ispat kabul etme olarak değerlendirilen muhakeme hatası ön planda olmakla birlikte üst sınıflara doğru ciddi bir oranda düşüşün olduğu belirlenmiştir. Örneğin 4. sınıf ve 5. sınıf seviyesinde yer alan

öğretmen adaylarında bu oran, açık uçlu sınavların üçünde de yaklaşık olarak %10'nun altındadır. Bu muhakeme hatasının Üst sınıflara doğru düşüş göstermesinde matematik eğitime yönelik derslerin etkili olduğu düşünülmektedir. Öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmelerde matematik eğitime yönelik derslerin kendilerinin doğru bir muhakemede bulunmalarına katkı sağladığını belirtmesi bu durumu desteklemektedir. Birçok öğretmen adayı birinci ve ikinci sınıfta ispatları yapamadığını, ispat mantığını kavrayamadığı için ezberleme yolu ile yapmaya çalıştığını ifade etmiştir. Bununla birlikte bu öğretmen adayları; matematik eğitime yönelik derslerden sonra bakış açılarının değiştiğini belirterek bunun da derslerde kendi fikirlerini açıklamalarına fırsat verilmesine bağlamışlardır. Benzer şekilde başka öğretmen adayları da üst sınıflarda gördükleri matematik eğitime yönelik derslerin kendilerinin doğru muhakemeler geliştirmelerine katkı sağladığını belirtmişlerdir. Yapılan açık uçlu sınavlarda da 4. ve 5. sınıf seviyelerinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarının daha düşük oranlarda çıkması ile ikinci, üçüncü açık uçlu sınavlarda MH7' nin azalması bu durumu desteklemektedir. Bu sonuçtan hareketle öğretmen adaylarının aktif olarak katıldıkları, düşüncelerini açıklayabildikleri, arkadaşlarının muhakemelerini değerlendirebildikleri öğrenme ortamların muhakeme hatalarının azalmasına pozitif etki sağladığından bahsedilebilir. Yapılan birçok çalışmada (Altıparmak ve Öziş, 2005; Hartman, 2001; Heinze ve Reiss, 2009; Kramarski, 2004; Kramarski ve Zoldan, 2008; Renkl, 1999; Sarı-Uzun, 2013; Yankelwitz ve diğ., 2010) da benzer şekilde öğrenme ortamlarında öğrencilere kendi ispatlarını oluşturma ya da fikirlerini sunma fırsatlarının verilmesi onların doğru bir muhakeme geliştirmelerine katkıda bulunabileceği ifade edilmiştir. Dolayısıyla öğretmen mesleğine yönelik derslerin öğretmen adaylarının doğru muhakemeler geliştirmelerine, ispat sürecinde uygun stratejiler ileri sürmelerine ve geçerli ispatlar oluşturmalarına katkı sağladığından söz edilebilir.

Her bir sınıf düzeyinde sonuç ile başlama muhakeme hatası (MH1) başka bir ifadeyle ispat sürecinde var olan bir gerçek üzerinden başlayarak ulaşılmaması gereken matematiksel ifade ile ispata başlangıç yapma olarak nitelendirilen durumlar ön plana çıkmaktadır. Bununla birlikte açık uçlu sınavlarda elde edilen veriler göz önüne alındığında sınıf seviyeleri bakımından bir değişimin söz konusu olduğu görülmektedir. Ders gözlemlerinin öncesinde uygulanan MHBT1'de 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayları genellikle ispatları boş bırakmışlar ya da sadece sayısal değerlerle ilgili matematiksel ifadelerin doğruluğunu göstermeye çalışmışlardır. Dolayısıyla birinci sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarından bazıları bu davranışlarla sınırlı kalarak MHBT1'e tam anlamıyla yansımamıştır. Bu nedenle birinci sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında sonuç ile başlama

muhakeme hatasına yönelik yoğunluğun daha düşük çıktığı düşünülmektedir.. Bununla birlikte MHBT2 ve MHBT3'te birinci sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispatları yapmak için daha fazla girişimde bulunması sahip oldukları muhakeme hatalarının daha iyi yansıtılmasına yardımcı olmuştur. Bu bakımdan birinci sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları sonuç ile başlama muhakeme hatalarının değerlendirilmesinde MHBT2 ve MHBT3 verilerinin temel alınmasının daha doğru olacağı düşünülmüştür. Güz dönemi ders gözlemlerinin sonrası uygulanan MHBT2'de 1. sınıf öğretmen adaylarında MH1 %26,5 iken bahar dönemindeki ders gözlemlerinin sonrasında uygulanan MHBT3'de bu oran %21'lik bir değer olarak azalma göstermiştir. Sonuç ile başlama muhakeme hatasının üçüncü açık uçlu sınavda azalma göstermesi, ispatların yoğun olarak işlendiği derslerden kaynaklanabilir. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MH1 kategorisine yönelik muhakeme hatası, MHBT1'de % 31 iken sırasıyla MHBT2 ve MHBT3'te bu oran %23 ve %21'lik bir değer olarak bir azalma göstermiştir. 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MH1 kategorisine yönelik muhakeme hatası, MHBT1'de % 24,7 iken sırasıyla MHBT2 ve MHBT3'te bu oran %23 ve %20 olarak belirlenmiştir. Bu durum sınıf seviyesinde sonuç ile başlama muhakeme hatasının çok fazla değişim göstermediğine işaret etmektedir. 4. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MH1 kategorisi MHBT1'de %26 iken sırasıyla MHBT2 ve MHBT3'te %22 ve %19,1'lik bir orana sahip olarak bir düşüş olduğu dikkat çekmektedir. 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ise MH1 kategorisi MHBT1'de %24 iken sırasıyla MHBT2 ve MHBT3'te bu oran %20 ve %17 ile dikkate değer bir oranda düşüş göstermiştir. Genel olarak MH1 kategorisine yönelik muhakeme hatasında bütün sınıf seviyelerinde bir düşüşün olduğu görülmektedir. Bu durumun sebebi, işlenen derslerde sonuç ile başlama muhakeme hatasına yönelik uygulamalara yer verilmesi olabilir. Örneğin ispatların yoğun olarak işlendiği Matematiğin Temelleri dersinde öğretim elemanı sonuç ile başlama muhakeme hatası olarak gördüğü bir duruma müdahale ederek bu muhakeme hatasına vurgu yapmıştır. Ayrıca bu öğretim elemanı; ispatların denklemlerde olduğu gibi verilen sonucu doğru kabul edilip geriye doğru çözülmemesini, hipotez ve sonucun mutlaka belirlenmesi gerektiğinin altını özellikle çizmiştir. Benzer şekilde diğer öğretim elemanları da derslerinde öğretmen adaylarının kendi ispatlarını oluşturulmasına fırsat tanıyarak bu süreçte ortaya çıkan sonuç ile başlama muhakeme hatasına dikkat çekip doğru bir ispatın nasıl oluşturulabileceği, nelere dikkat edilmesi gerektiğine vurgu yapmışlardır.. Gözlemlenen birçok derste öğretim elemanları yapılan ispatlardaki muhakeme hatalarının neler olduğunu ifade ederek öğretmen adaylarının bu durumun farkında olmalarını sağlamışlardır. Örneğin Analiz 1 dersinde öğretim elemanı öğretmen adaylarına ödev olarak verilen ispatları incelendiğinde

bunların birçoğunda sonuç ile başlama muhakeme hatasının olduğunu örnekler üzerinde gösterilerek bu durumun ciddi bir hata olduğunu belirtmiştir. Ayrıca bu tür hatalara düşülmemesi için verilen ifadelerin öncelikle iyi analiz edilmesi gerektiğini, varsayım ve sonucun ne olduğunun belirtilmesi ve ispat yöntemlerinin doğru uygulanması gerektiğini vurgulamıştır. Bu bakımdan ispatların yoğun olarak işlendiği derslerde bu tür uygulamalar ya da uyarılar, öğretmen adaylarının sahip olduğu sonuç ile başlama muhakeme hatasının azalmasında pozitif yönde bir katkı sağlamış olabilir. Literatürde yapılan birçok çalışma (Erdem, 2015; Francisco ve Maher, 2005; Generazzo, 2011; Hiebert ve Grouws, 2007; Hsu, 2010; Martin ve McCrone, 2009; Öztürk, 2016; Pulley, 2010; Sarı, 2011; Selden ve Selden, 2003; Weber, 2009) da ispat sürecinde öğretim elemanlarının kullandığı yaklaşımlar, yöntemler ve öğrencilere ispatlarını oluşturmaları için verilen fırsatların öğrencilerin doğru muhakemeler geliştirmelerine katkı sağladığını belirtmektedir. Selden ve Selden (2003) yaptıkları çalışmada ispat sürecinde veya öğrenme ortamlarında öğrencilerinin kendi ispatlarının oluşturmalarına fırsat verilerek onların sahip oldukları muhakeme hatalarının farkında olmalarını sağlamanın doğru bir muhakemenin kazanılması konusunda son derece önemli olduğunu belirtmiştir. Almeida (2008) benzer şekilde öğretmen adaylarının ispat sürecinde çeşitli zorluklar yaşadığını ve bu zorluklara bağlı olarak birçok muhakeme hatası yaptıklarını belirterek bu tür durumların değiştirilmesi ve öğrencilerin ispat yapmak için doğru strateji veya muhakemeler geliştirmelerinde öğretim elemanlarının doğru müdahalelerinin önemli olduğunu ifade etmiştir. Hem ders gözlemlerinin verileri, hem de literatürde benzer sonuçlarının ortaya çıkması göz önüne alındığında ispat sürecinde yapılan uygulamaların ve öğretim elemanlarının bu tür durumların farkında olarak bunlar üzerine yaptıkları vurgu ya da uyarıların sonuç ile başlama muhakeme hatasının azalmasına katkı sağladığına işaret etmektedir.

İspatı istenen matematiksel bir ifadede hipotez ve hüküm kavramlarının karıştırılması olarak nitelendirilen MH2 (yanlış varsayımlarla başlama muhakeme hatası) kategorisi farklı sınıf seviyelerinde yer alan öğretmen adaylarının değişen oranlarda sahip olduğu muhakeme hatalarından biri olarak ön plana çıkmaktadır. 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MH2 kategorisi MHBT1'de % 12,8 iken sırasıyla MHBT2 ve MHBT3'te bu oran %19,1 ve %18'lik oranlarla bir artış gösterdiği göze çarpmaktadır. MHBT1'de bu kategoriye yönelik durumların daha az yoğunlukta olmasının sebebi, öğretmen adaylarının ilk açık uçlu sınavda ispatları boş bırakma veya sayısal değerlere yönelmeleri olabilir. 2. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MH2 kategorisi MHBT1'de % 20 iken sırasıyla MHBT2 ve MHBT3'de bu oran %16 ve %18 ile sınavların üçünde de birbirine oldukça yakın oranlarda ortaya çıkmıştır. 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MH2 kategorisi MHBT1'de %15,5 iken sırasıyla MHBT2 ve

MHBT3'te bu oran %12,8 ve %16'lik oranlarla benzer yoğunlukta ortaya çıktığı görülmektedir. 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MH2 kategorisi MHBT1'de % 15,9 iken sırasıyla MHBT2 ve MHBT3'te bu oran %14,6 ve %14 ile çok düşük oranlarda bir azalmadan olduğundan söz edilebilir. 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MH2 kategorisi MHBT1'de % 10,9 iken sırasıyla MHBT2 ve MHBT3'de bu oran %10 ve %9,1 ile diğer sınıflara nispeten daha düşük oranlarda olduğu fark edilmektedir. Alt sınıf seviyelerinde yoğunluğun fazla olması, öğretmen adaylarının liseden beri gelen bir alışkanlıkla ispatları denklem gibi çözmeye çalışmaları ya da sınavlarda puan almak için boş bırakmaktansa bir şeyler yazma eğiliminde olmalarından kaynaklanmış olabilir. Birçok çalışmada (Andrew, 2009; Healy ve Hoyles, 2000; McCrone ve Martin, 2009, Sarı, 2013) da bu paralellikte sonuçlar elde edilmiştir. Öğretim elemanları ile yapılan görüşmelerde yanlış varsayım ile başlama muhakeme hatasının düşüş göstermemesinin başka sebeplerden kaynaklanabileceği de belirtilmiştir. Örneğin ÖE3 kodlu öğretim elemanına öğretmen adaylarının ispat sürecinde yanlış varsayım ile başlama nedeni sorulduğunda; ispatların genel olarak soyut matematik, analiz ve cebir gibi derslerde daha çok yer verildiğini ve bu derslerde yoğun olarak işlendiğinden bir ispat üzerinde çok fazla durulmadığını belirtmiştir. Ayrıca öğrencilerin genel olarak ispata olumsuz yaklaştıkları ve bundan dolayı ispat mantığını kavramak yerine yazılan ispatları ezberleme yolunu tercih ettiklerini ifade etmiştir. Ancak ispatları anlamak için gayret gösteren, çalışıp derse katılan öğrencilerin ispat mantığını doğru inşa ettiklerini de belirtmiştir. İspatların yoğun olarak işlendiği derslerde elde edilen gözlem verileri de öğretim elemanlarının düşünceleri ile paralellik göstermektedir. Bu derslerde bir ders saatinde çok fazla ispatın yapılması, bir ispat üzerinde fazla durulmaması, genellikle öğretmen merkezli işlenmesi ve öğretmen adaylarının kendi muhakeme hatalarının farkında olmalarına yeteri kadar fırsat verilmemesi ya da kendi ispatlarını oluşturmalarına imkân sağlanmaması onların bu muhakeme hatasını devam ettirmelerine sebep olmuş olabilir. Birçok çalışmada da (Andrew, 2009; Sarı, 2011; Selden ve Selden, 2003, 2007; Weber, 2005) benzer sonuçlar elde edilmiştir. Erdem (2015) yaptığı çalışmada öğretmen adaylarına ispat sürecinde kendi ispatlarını oluşturma fırsatının tanınmasının doğru bir ispat oluşturacak muhakemeler geliştirebilmelerine yardımcı olduğunu belirtmektedir. Benzer şekilde Öztürk (2016) çalışmasında ispat sürecinde öğretmen adaylarının aktif olduğu, kendi ispatlarını oluşturabildikleri, sorular sorabildikleri ve birbirlerinin muhakemelerini değerlendirebildikleri öğrenme ortamlarında hem matematik dili hem de muhakeme geliştirme bakımından pozitif yönde bir gelişim olduğunu vurgulamaktadır. Bu bakımdan üst sınıflarda özellikle öğretmenlik mesleğine yönelik öğrenci merkezli derslere ağırlık verilmesinin öğretmen adaylarının hem sahip oldukları hatalı muhakemelerin

farkına varmalarına hem de doğru muhakemeler geliştirmelerine katkı sağladığı düşünülmektedir. Bununla birlikte 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının KPSS için ispata yönelik derslere çalışmalarının da bu durum üzerinde etkisi olabilir. Yapılan görüşmelerde birçok öğretmen adayı, öğretmenlik alan bilgisi sınavı için Analiz, Cebir gibi derslerine tekrar çalışmalarının ispatları anlama ve oluşturmaları üzerinde pozitif etki oluşturduğuna yönelik ifadelerde bulunmuşlardır. Öğretmen adaylarının geneli herhangi bir not kaygısı taşımadan, yeterince zaman ayırarak ispatlar üzerinde çalışmaları ve mesleklerine başlayabilmeleri için ispatların yoğun olarak işlendiği derslerin anlaşılmasının önemli bir eşik noktası olduğuna yönelik ifadelerde bulunmuşlardır. Dolayısıyla bu durum onların ispat anlayışlarının gelişmesinde ve doğru bir muhakeme kazanmaları üzerine olumlu bir katkıda bulunduğu düşünülmektedir.

İspat sürecinde MH6 (*Teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması*) kategorisine ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde sınıf seviyelerinin genelinde belirli bir yoğunlukta olduğu görülmektedir. 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MH6 kategorisi MHBT1’de ispatları boş bırakma ya da sayısal değerler kullanma eğilimlerine bağlı olarak bu muhakeme hatasına sahip olup olmadıklarının tam olarak ortaya çıkmadığı düşünülmektedir. Bununla birlikte MHBT2 ve MHBT3’te bu muhakeme hatasına yönelik oranın %18 ve %22’lik değerlerle yoğunlukta olduğu göze çarpmaktadır. 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adayları, MHBT2 ve MHBT3’te ispatları yapmak için daha çok çaba sarf etmişlerdir. Bu durum da öğretmen adayların sahip oldukları muhakeme hatalarının ortaya çıkmasına ya da yansıtılmasına katkıda bulunmuştur. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MH6 kategorisi MHBT1’de % 15,8 oranında iken sırasıyla MHBT2 ve MHBT3’te bu oran %19 ve %18 ile birbirine oldukça yakın bir oranda artış göstermiştir. 3. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MH6 kategorisi MHBT1’de %15 iken sırasıyla MHBT2 ve MHBT3’de %15,4 ve %16,8 oranlarla nerdeyse aynı yoğunlukta ortaya çıktığı görülmektedir. 4. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MH6 kategorisi MHBT1’de % 18,9 iken MHBT2 ve MHBT3’te bu oran sırasıyla %18,6 ve %25 olmak üzere çok düşük oranlarda bir artış göstermiştir. 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MH2 kategorisi MHBT1’de % 30 iken sırasıyla MHBT2 ve MHBT3’de bu oran %27 ve %30,1 ile diğer sınıflara nispeten daha fazla yoğunlukta olduğu belirtilebilir. Bu durum öğretmen adaylarının ispatları yaparken teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunu fark edemediklerine işaret etmektedir. Birinci sınıf ve ikinci sınıf gibi alt sınıf seviyelerinde yer alan öğretmen adaylarında ise bu muhakeme hatasının nispeten daha düşük oranda ortaya çıkması, ispat yöntemlerine yönelik derslerin genellikle ilk dönemlerde verilmesine bağlı olabilir. Bununla birlikte dördüncü sınıf ve beşinci sınıf gibi üst sınıf seviyelerinde yer

alan öğretmen adaylarının ispat yöntemlerini hatırlayamamalarından kaynaklanabilir. Beşinci sınıf seviyesinde yer alan S3 kodlu öğretmen adayı ispat yöntemlerini unuttuğu için böyle bir muhakeme hatası yaptığını belirtmesi bu durumu destekleyen örneklerden biridir. MH6 kategorisinin yüksek oranlarda çıkmasının bir diğer sebebi ise öğretmen adaylarının bazı ispat yöntemlerini doğru kullanamamalarında kaynaklanmış olabilir. Örneğin bir teoremin doğrudan ispatının yapılmasının zor olduğu durumlarda teoremin dengi olan karşıt tersinin kullanılması ispat sürecinde uygulanan bir metottur. Ancak öğretmen adayları bu yöntemi genellikle başka bir ispat yöntemi olan çelişki yöntemi ile karıştırarak geçerli olmayan ispatlar oluşturmuşlardır. Literatürde yapılan bazı çalışmalarda (Andrew, 2009; Sarı, 2011; Selden ve Selden, 2003, 2007; Weber, 2005) benzer şekilde ispat sürecinde öğretmen adaylarının ispat yöntemlerini doğru kullanmayıp çeşitli muhakeme hataları yaptıkları ifade edilmiştir. Selden ve Selden (2003) çalışmasında ispat yöntemlerinin uygun kullanılmaması sonucunda oluşturulan ispatların mantıksal olarak hatalı ispatlar ya da muhakeme hataları içeren ispatlar olarak değerlendirmişlerdir. Aynı çalışmada bu tür hataların çok yaygın olarak yapıldığı belirtilerek öğrenci merkezli öğrenme ortamların önemi vurgulanmıştır. Sarı (2011) doktora tezi olarak yaptığı çalışmasında öğretmen adaylarının ispat sürecinde verilen bir önermenin ispatlanmasında uygun bir ispat yöntemini belirlemede de güçlük yaşadıklarını belirtmiştir. Bu çalışmada öğretmen adaylarının başlangıçta karşıt ters ispat yöntemi ile başka ispat yöntemlerini karıştırdıkları ve ispat yöntemlerini doğru kullanmadıkları görülmüştür. Ancak yapılan sınıf içi ispat etkinliklerinden sonra bu durumun değişebileceği aynı çalışmada ifade edilmiştir. İlgili çalışmada elde edilen sonuçlar bu çalışmanın sonuçlarını desteklemektedir.

5. 1. 2. Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Sürecinde Sahip Oldukları Muhakeme Eksikliklerine İlişkin Bulguların Tartışılması

Bu bölümde matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme eksikliklerinin neler olduğu, uygulanan açık uçlu sınavlara göre nasıl bir değişim gösterdiği ve sınıf seviyeleri arasındaki benzerlik ve farklılaşmanın hangi noktalarda olduğuna ilişkin bulgular tartışılmıştır. Muhakeme eksiklikleri; ispat sürecinde öğretmen adaylarının yöntem, tanım aralığı, matematik dili gibi eksikliklerle ispatlarını tamamlamaları ya da ispatlarının yarıda bırakılmasından kaynaklanan durumlar olarak değerlendirilmiştir. Bu durumlar muhakeme hatasından ziyade doğru bir muhakeme ile başlanıp bazı matematiksel bilgi eksikliklerine bağlı olarak ispatların istenilen şekilde tamamlanmamasıdır. Açık uçlu sınavların uygulanması sonucunda elde edilen veriler göz önüne alındığında genel olarak bütün sınıf seviyelerinde yer alan öğretmen adaylarının

ispat sürecinde benzer muhakeme eksikliklerine sahip oldukları ve bu muhakeme eksikliklerinin sınıf seviyelerine bağlı olarak değişim gösterdiği belirlenmiştir. İspat sürecinde en sıklıkla rastlanan muhakeme eksiklikleri; ME2 kategorisi (İspata başlayamama veya başlanan bir ispatı devam ettirememe), ME3 kategorisi (İlgili matematiksel ifadesinin tanım aralığını dikkate almama), ME6 (matematik dilini kullanmada yetersizlik) ve ME8 (Tek yönlü inceleme) olarak belirlenmiştir. Yapılan çalışmalarda (Andrew, 2009; Jones, 2000; Knapp, 2006; Sarı-Uzun, 2013; Selden ve Selden, 2003; Selden ve Selden, 2009; Weber, 2001) da benzer muhakeme eksiklikleri belirlenmiştir. Russell (1999) yaptığı çalışmasında öğrencilerin konunun iyi kavranmaması sonucu, matematiksel bir temeli olmayan, anlık uydurulmuş veya eksik düşünülmüş geçersiz ispatlar oluşturduğunu ve bunların muhakeme eksikliklerine bağlı olduğunu ifade etmiştir. İlgili çalışmalarda ortaya çıkan sonuçlarla araştırmanın sonuçları paralellik göstermektedir. Bu anlamda hem sınıf seviyeleri arasında yoğunluk ve çeşitlilik bakımından nasıl bir farklılık olduğunun incelenmesi hem de alınan derslerin bu farklılaşmadaki rolünü belirleme ile yoğun olarak ortaya çıkan her bir muhakeme hatasına ilişkin değişimin ne yönde olduğu açık uçlu sınavlarda elde edilen veriler göz önüne alınarak tartışılmaya çalışılmıştır.

Birinci sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME2 kategorisi MHBT1'de %28,3 iken sırasıyla MHBT2 ve MHBT3'de bu oran %22 ve %18 olarak belirlenmiştir. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME2 kategorisi MHBT1'de % 19,8 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %17,1 ve %18 ile birbirine oldukça yakın oranlardadır. 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME2 kategorisi MHBT1'de %34,1 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %30,4 ve %29,8 ile bütün sınıf seviyeleri arasında en fazla yoğunlukta olan sınıf seviyesi olduğu görülmektedir. 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME2 kategorisi MHBT1'de % 16,9 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %14,6 ve %15'e sahiptir. 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ise ME2 kategorisi MHBT1'de % 15 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %13 ve %11,1 ile diğer sınıflara nispeten daha az yoğunlukta olduğundan söz edilebilir. Bu durum üst sınıf seviyelerinde yer alan öğretmen adaylarının verilen ispatları yapmak için daha fazla girişimlerde bulunarak ispatları boş bırakma veya eksik yapmaya daha az eğilimli olduklarından diğer sınıflara göre daha az oranda muhakeme eksikliklerine sahip olduklarını göstermektedir. Ancak sınıf seviyelerinin genelinde ispata nasıl başlayacağına karar verememe veya başlanan ispatları devam ettirememe bakımından belirli bir yoğunluk söz konusudur. Sarı-Uzun (2013) öğrencilerin ispatları nasıl oluşturacağına karar vermeye çalışırken sezgisel olarak ikna oldukları durumlarda bile sahip oldukları argümanları formel ispatlara dönüştüremediklerini

belirtmiştir. Weber (2001) de lisans düzeyinde yer alan öğrencilerle yaptığı çalışmasında öğrencilerin tanım ve kavram bilgisine sahip oldukları halde bunları nasıl ve nerede kullanacaklarını bilemedikleri sonucuna varmıştır. Bu durum öğretmen adaylarında gerekli bir matematiksel alt yapının var olmasına rağmen ispata başlayamadıkları veya başlanan ispatları devam ettiremedikleri gerçeğini ortaya çıkarmaktadır.

Çalışmanın verileri göz önüne alındığında sınıf seviyelerinin genelinde tanım aralığına dikkat etmeme (ME3) muhakeme eksikliğinin diğer muhakeme eksikliklerine göre yoğunlukta olduğu söylenebilir. 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME3 kategorisi MHBT1'de % 20,3 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %20 ve %19 olarak belirlenmiştir. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME3 kategorisi MHBT1'de % 19,7 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %17,8 ve %18,8 ile birbirine oldukça yakın oranlarda olduğu fark edilmiştir. 3. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME2 kategorisi MHBT1'de %15,6 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %17,8 ve %19 ile yoğunlukta olduğu görülmüştür. 4.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME2 kategorisi MHBT1'de % 29,3 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %28,6 ve %27'e olmak üzere dikkate değer oranda bir yoğunluğa sahiptir. 5.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME2 kategorisi MHBT1'de % 32 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %33 ve % 30,1 ile diğer sınıflara nispeten en fazla yoğunlukta olduğu belirtilebilir. Bu durum öğretmen adaylarının ispat yaparken tanım aralığına dikkat etmeden girişimlerde buldukları ve sadece verilen ifadeye odaklanarak ispat yapmaya çalıştıklarını göstermektedir.4. ve 5. sınıf seviyelerinde bu oranın yüksek çıkmasının sebeplerinden biri olarak öğretim elemanlarının sınavlarda tanım aralığının dışına çıktığı zaman puanlarının kırılmaması ve öğretmen adaylarını uyarmamalarına bağlı olabilir. yapılan mülakatlarda öğretmen adaylarının genellikle bu yönde ifadelerde bulunarak bu durumu destekleyici açıklamalar sunmuşlardır.. Örneğin 4. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarından D16 kodlu öğretmen adayı; herhangi bir tanımlama yapılmasa da öğretim elemanlarının ne demek istenildiğini anladıkları ve sınavlarda bu duruma bağlı olarak puan kırmadıklarını belirtmiştir. Başka bir öğretmen adayı da soru kökünü okumadan doğrudan ispata yöneldiğini belirterek bu durumun yanlış olduğuna değinmiştir. Genel olarak öğretmen adaylarının matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken bu ifade için uygun olmayan değerler kullanıldığı ya da tanım aralığının dışına çıktığının farkına varamadıkları fark edilmiştir.. Bu durumda derslerde tanım aralığına çok vurgu yapılmaması ve sınavlarda öğretim elemanlarının bu tür eksikliklerden dolayı puan kırmaması etkili olmakla birlikte öğretmen adaylarının bu tür muhakeme eksikliklerine devam etmelerine yol açtığından söz edilebilir. Literatürde yapılan birçok çalışmada (Andrew, 2009; Healy ve Hoyles, 2000; McCrone ve Martin, 2009; Sarı-Uzun,

2013) benzer sonuçların ortaya çıkması bu çalışmada elde edilen sonuçları desteklemektedir. Selden ve Selden (2003) lisans düzeyinde pür matematik ve matematik eğitimi öğrencileri ile yaptıkları çalışmada öğrencilerin ilgili matematiksel ifadelerinin tanım aralığının dışına çıktıkları için geçerli olmayan ispatlar oluşturduklarını belirtmişlerdir. McCrone ve Martin (2009) de öğrencilerin, tanım aralığının dışına çıktığında ispatların geçersiz olmayacağı fikrine sahip olduklarını; bunun, öğretmenlerin böyle durumlarla karşılaştıklarında puan vermeleri ve doğru olmayan ispat çabalarının da ispatmış gibi ödüllendirilmesinden kaynaklandığını belirtmişlerdir.

Matematik dilini kullanmada yetersizlik, ispat adımlarında matematiksel sembol, tanım veya teorem gibi ifadelerin kullanımında matematik diline dikkat edilmemesi olarak nitelendirilen ME6 kategorisinin sınıf seviyelerinin genelinde olmak üzere ispat sürecinde yoğun olarak yapılan muhakeme eksikliklerinden olduğu görülmüştür. 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME6 kategorisi MHBT1'de % 19,8 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %16,1 ve %13,4 olmak üzere bir azalma göstermiştir. Bu azalmanın sebebi olarak öğretim elemanlarının derslerinde matematik dilinin doğru kullanılmasına sık sık vurgulama yapmaları olabilir. Örneğin ÖE2 dersinde bir öğretmen adayının rasyonel sayıların tanımını günlük dil ile ifade etmesi üzerine öğretim elemanı müdahale edip ifadelerin matematik diline uygun olarak belirtilmesi gerektiğine özellikle vurgu yapmıştır. Benzer şekilde birçok derste öğretim elemanları matematiksel ifadelerinin doğru kullanılması gerektiğine vurgu yaparak simge ve sembollerin anlamlarının bilinmesinin oldukça önemli olduğunu belirtmişlerdir. Derslerde bu tür uyarı ve vurgulamaların yapılması, öğretmen adaylarının ikinci ve üçüncü sınavlardaki muhakeme eksikliklerinin azalmasında katkı sağladığı düşünülmektedir. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME6 kategorisi MHBT1'de % 17,3 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %16,8 ve %17 ile birbirine oldukça yakın oranlarda olduğu fark edilmektedir. 3. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME6 kategorisi MHBT1'de %16,6 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %17,8 ve %16 dir. 4. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME6 kategorisi MHBT1'de % 13 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %12,6 ve %12 olarak belirlenmiştir. 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME6 kategorisi MHBT1'de % 12 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %11 ve % 10,1 ile diğer sınıflara nispeten en az yoğunlukta olduğundan söz edilebilir. Sınıf seviyelerinin genelinde öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini yetersiz kullandıkları tanım, teorem gibi kavramlarının kullanılmasında eksikliklere sahip oldukları düşünülmektedir. Bu durum da öğretmen adaylarının ispatları eksik bırakmalarına ya da geçersiz ispatlar oluşturmalarına sebep olabilir. Yapılan bazı çalışmalarda (Erdem, 2015; Francisco ve Maher, 2005; Generazzo, 2011; Hiebert ve

Grouws, 2007; Hsu, 2010; Martin ve McCrone, 2009; Öztürk, 2016; Pulley, 2010; Selden ve Selden, 2003; Sarı, 2011; Weber, 2009) da benzer sonuçlar söz konusudur. Moore (1994) öğrencilerin matematik dilini yetersiz kullanmaları veya matematiksel kavram ve teoremleri anlama bakımından yetersiz olmalarının ispata başlama ve ispat yapmada da yetersiz olmalarına neden olabileceğini belirtmiştir. Üniversite öğrencileri, matematiksel kavram ve tanımları sezgi veya muhakeme yoluyla anlamış olsalar bile bunları doğru uygulamadıklarından ispatlarını oluşturamayabilirler (Selden ve Selden, 2009). Knapp (2006) da yaptığı çalışmada, kural ve tanımların doğru algılanmaması sonucunda ispat sürecinde öğrencilerin bu kural ve tanımları uygun yerlerde kullanamadıklarını belirtmiştir. Benzer şekilde Sarı-Uzun (2013) yaptığı çalışmada öğretmen adaylarının matematiksel kavram ve sembolleri ispat sürecinde doğru kullanabilmeleri için bu kavramların ne zaman ve nasıl kullanılması gerektiğini bilmelerinin son derece önemli olduğunu vurgulamaktadır. Bütün bu çalışmalar; araştırmanın sonuçlarını desteklemekle birlikte yapılan çalışmalarda sadece belli konu veya dönem incelendiğinden araştırmanın verileri ders gözlemleri ile de ilişkilendirilerek tartışılmaya çalışılmıştır.

Çalışmanın verileri göz önüne alındığında sınıf seviyelerinin genelinde öğretmen adayları matematiksel bir ilişkinin ispatını yapmaya çalışırken ispat yöntemlerini doğru kullanmada çeşitli zorluklar yaşamışlardır. Bundan dolayı muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan kategorilerden yöntemsel eksiklik (ME1) sınıf seviyelerinde farklı yoğunlukta olmakla beraber öğretmen adaylarının muhakeme eksiklikleri boyutunda en fazla sahip olduğu muhakeme eksikliklerinden biri olarak ortaya çıkmıştır. 1.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME1 kategorisi MHBT1’de % 17 iken MHBT2 ve MHBT3’de bu oran sırasıyla %8,9 ve %7,6 olarak dikkate değer bir oranda düşüş göstermiştir. 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ispat sürecinde yöntemsel eksiklik olarak değerlendirilen durumların azalmasında güz ve bahar döneminde aldıkları ispata yönelik derslerinin etkisi olabilir. Gözlemlenen derslerde öğretim elemanlarının ispat yöntemlerinin doğru kullanılmasını sık sık vurgulamaları bu durumu desteklemektedir. Örneğin ÖE1 dersinde hangi ispat yönteminin nerede kullanılacağını, ispat yöntemlerinin hatırlanmasının önemli olduğunu ve bunun da yavaş yavaş öğrenmeye başlanmasının gerektiğini belirtmiştir. Benzer şekilde başka derslerde de öğretim elemanları derslerinde ispatlar için en uygun ispat yönteminin ne olacağını belirlemenin önemini özellikle vurgulamışlardır. Başka bir öğretim elemanı da dersinde sadece bir ispat yöntemine bağlı kalınmaması gerektiği uyarısında bulunarak farklı ispat yöntemlerinin varlığına işaret etmiştir. Bazı derslerde de öğretim elemanları yapılan ispatları için öğretmen adaylarından hangi ispat yönteminin kullanılmasının gerektiğine yönelik sorular sorarak onların fikirlerinin belirtmelerini istemişlerdir. Derslerde bu tür uygulamalar veya uyarılar

yapılması, öğretmen adaylarının ispat sürecinde ispat yöntemlerini uygun bir şekilde kullanmalarına katkı sağladığından söz edilebilir. Dolayısıyla ilgili derslerdeki bu tür uyarı ve vurgulamaların yapılması birinci sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının sahip olduğu muhakeme eksikliklerinin azalmasına katkı sağladığı düşünülebilir. Üst sınıflara doğru gidildikçe ME1 kategorisinin yoğunluğunda bir düşüş olduğundan söz edilebilir. 2.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME1 kategorisi MHBT1'de % 14,7 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %13,8 ve %12 ile birbirine oldukça düşük oranlarda azaldığı görülmektedir. 3.sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME1 kategorisi MHBT1'de %14,6 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %12,8 ve %11 olup başlangıca göre neredeyse yoğunluğun korunduğundan bahsedilebilir. 4. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME1 kategorisi MHBT1'de % 8,3 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %8,6 ve %7'dir. 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında ME1 kategorisi MHBT1'de % 7 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %6,3 ve % 6,1 ile diğer sınıflara nispeten düşük yoğunlukta olduğu söz konusudur. Bununla birlikte sınıf seviyelerinin genelinde öğretmen adaylarının ispat yaparken uygun olmayan bir ispat yöntemini seçmeleri ve bundan dolayı ispat adımlarında ilerleme kaydedememeleri ya da ispatları yanlış yapmaları bakımından bu kategoriye yönelik göze çarpan bir yoğunluğun olduğundan söz edilebilir. Literatürde yapılan birçok çalışmada da benzer sonuçlar elde edilmiştir. (Erdem, 2015; Francisco ve Maher, 2005; Generazzo, 2011; Hiebert ve Grouws, 2007; Hsu, 2010; Martin ve McCrone, 2009; Öztürk,2016; Pulley, 2010; Sarı,2011; Selden ve Selden, 2003; Weber, 2009). Sarı (2011) yaptığı çalışmada öğretmen adaylarının, verilen bir önermenin ispatlamasında uygun olan ispat yöntemini belirlemede zorluklar yaşadıklarının belirtmiştir. Selden ve Selden (2003) yaptıkları çalışmalarında akademik olarak zayıf öğrencilerin ispat yaparken ispat yöntemlerini doğru kullanmada güçlük yaşayabildiklerini ifade ederek aynı durumu ifade etmektedir. Aynı çalışmada bu tür öğrencilerin ya önceden ezberlemiş oldukları ifadeleri hatırlayarak ya da bir yöntemle aşırı bağlı kaldıkları belirtilmiştir. Benzer bir çalışmada, Alcock ve Inglis (2008) bazı öğrencilerin belirli bir ispat yöntemini diğerlerinden daha fazla kullanılmalarına bağlı olarak ispatları istenilen şekilde tamamlayamadıklarını belirtmişlerdir. Araştırmanın bulgularına ilişkin veriler göz önüne alındığında yapılan muhakeme hatalarını belirleme sınavlarında öğretmen adaylarının belli bir kısmının ispat sürecinde ispat yöntemlerini uygun kullanmadığı veya belli bir ispat yöntemine aşırı bağlı kalmaları sonucu doğru ispatlar oluşturamamışlardır. Bu sonuçlar literatürde yapılan birçok çalışmanın sonuçları ile paralellik gösterdiği ilgili çalışmalardan örneklerle gösterilmiştir. Bununla birlikte bu çalışmada diğer araştırmalarda farklı olarak öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme eksikliklerinin aldıkları ispatlara yönelik derslerle

ilişkinin ne ölçüde olduğu veya muhakeme hatalarının değişmesinde etkili olabilen muhtemel kaynaklarının neler olabileceği de tartışılmaya çalışılmıştır.

5. 1. 3. Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Sürecinde Sahip Oldukları Muhakeme Boşluklarına İlişkin Bulguların Tartışılması

Bu kısımda matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme boşluklarının neler olduğu, uygulanan açık uçlu sınavlara göre nasıl bir değişim gösterdiği ve sınıf düzeyleri arasındaki benzerlik ve farklılaşmanın hangi noktalarda olduğuna ilişkin bulgular tartışılmıştır. İspat sürecinde matematiksel ifadelerinin ispat oluşturulurken ispat adımlarında kullanılan önermeler ve yapılan işlemlere yönelik gerekçeler sunmadan veya adımlar arasında bir ilişki kurmayarak ispatın tamamlanması gibi durumlar muhakeme boşlukları olarak düşünülebilir (Selden ve Selden, 2003) Çalışmada elde edilen sonuçlar incelendiğinde genel olarak bütün sınıf seviyelerinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde benzer muhakeme boşluklarına sahip oldukları ve bu muhakeme boşluklarının sınıf seviyelerine bağlı olarak değişim gösterdiği belirlenmiştir. MB2 kategorisi (kullanılan önermelerin gerekçelerinin sunulmaması), sınıf seviyelerinin her birinde ispat süreçleri boyunca en sıklıkla rastlanan muhakeme boşluklarından biri olduğu fark edilmiştir. 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MB2 kategorisi MHBT1’de % 50,3 iken MHBT2 ve MHBT3’de bu oran sırasıyla %45,2 ve %39,2 olarak dikkate değer bir oranda azalmıştır. 1. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MB2 kategorisinin ikinci ve üçüncü açık uçlu sınavda düşüş göstermesinde ispata yönelik derslerin etkisi olduğu düşünülmektedir. Örneğin ÖE2 kodlu öğretim elemanı dersinde bazı tanımların üzerinde çok durduğunu belirterek bu tanımların ilerideki teoremler ve tanımların anlaşılması için önemli olduğunu ifade etmiştir. İlgili öğretim elemanı örnek olarak “*yığılma noktası, Sub...*” gibi kavramların ilerideki teoremler için temel teşkil ettiğini vurgulamıştır. Benzer şekilde başka derslerde de öğretim elemanları sıklıkla matematikte her bir önermenin başka bir önermeyle ya da tanımla ilişkili olduğu için ispat yapılabildiğini ve bu teoremlerin hepsinin birbirleri ile ilişkili sonuçlar olduğuna dikkat çekmişlerdir. ÖE1 kodlu öğretim elemanı dersinde ispatın bir bütün olduğunu her aşamanın mutlaka incelenmesi ve adımlar arasındaki ilişkinin bir gerekçeye dayandırılması gerektiğini ifade ederek öğretmen adaylarının derse katılmalarının önemli olduğunu belirtmiştir. İlgili öğretim elemanı, ispatın sadece sonuçtan ibaret olmadığını her aşamada kullanılan gerekçenin ilişkinin belirtilmesi gerektiğini vurgulamıştır. Derslerdeki bu tür uyarı ve vurgulamaların yapılması, MB2 muhakeme boşluklarının azalmasına pozitif yönde bir katkıda bulunmuş olabilir. 2. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MB2 kategorisi MHBT1’de % 47,2 iken MHBT2 ve

MHBT3'de bu oran sırasıyla %42,8 ve %41 ile düşüş göstermiştir. 3. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MB2 kategorisi MHBT1'de %45,6 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %44,8 ve %43 ile yoğunlukta olduğundan söz edilebilir. 4. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MB2 kategorisi MHBT1'de % 38,3 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %37,6 ve %35 olmak üzere dikkate değer bir orandadır. 5. sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MB2 kategorisi MHBT1'de % 42 iken MHBT2 ve MHBT3'de bu oran sırasıyla %41,3 ve % 40,1 ile diğer sınıflara nispeten bu kategorinin en fazla yoğunlukta olduğundan söz edilebilir. Yapılan çalışmalarda da (Andrew, 2009; Sarı-Uzun, 2013; Selden ve Selden, 2003; Selden ve Selden, 2009) benzer sonuçlar elde edilmiştir. VanSpronsen (2008) yaptığı çalışmada da öğrencilerin ispat sürecinde bazı önermeleri doğrudan kabul ettikleri ve doğruluğu açık olan bazı önermelere yönelik işlem yapmaktan kaçındıklarını belirterek bu duruma vurgu yapmıştır.

5. 1. 4. Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Muhakeme Hataları ile Soru Yapıları Arasındaki İlişkiye Yönelik Tartışma

Öğretmen adaylarının muhakeme hataları belirleme testlerine ilişkin cevapları değerlendirilerek hangi soruda ne tür muhakeme hatalarının ön plana çıktığı, soruların yapısına göre muhakeme hata, eksiklik ve boşluklarının yoğunluklarının ne yönde olduğu ve testin doğasına ilişkin elde edilen bulgular tartışılmıştır. Bu testlerden elde edilen verilere yönelik bulgular incelendiğinde soru yapısı ile muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşlukları arasında bir ilişkinin olduğu belirlenmiştir. Başka bir ifadeyle sorunun doğasından veya soruda yer alan matematiksel ilişkinin yapısından dolayı muhakeme hatalarının soruya göre yoğunluk veya çeşitlilik açısından farklılaştığı görülmüştür.

Muhakeme hataları belirleme testinde yer alan sorular genel olarak incelendiğinde testin 1. sorusunda pozitif tamsayılar üzerinde matematiksel bir ilişkinin ispatı istenmektedir. Benzer şekilde testin 3. sorusunda reel sayılar kümesinde geçerli olan matematiksel bir ilişkinin doğruluğunun gösterilmesi istenmektedir. Her iki soru da doğal sayılar veya reel sayılar kümesi üzerinde öğretmen adaylarının çeşitli sayısal değerlerle verilen matematiksel ilişkinin doğruluğunu gösterme eğiliminin baskın olduğu sorulardır. Bundan dolayı öğretmen adayları özel bir durumdan hareketle veya birkaç örnekle yapılan doğrulama işleminin matematiksel ispat için yeterli olacağını düşünerek MH7 muhakeme hatasına düşmüşlerdir. Dolayısıyla bu durum sayısal değer içeren 1. ve 3. sorularda öğretmen adaylarının özel bir durumdan elde edilen sonucu ispatı olarak kabul etme olarak nitelendirilen muhakeme hatasının daha yoğunlukta yapıldığı görülmektedir. Mutlak

değer ifadesini içeren bir matematiksel ilişkinin ispatının istendiği testin 4. sorusu ve ön bir koşula bağlı olarak yazılan bir sonucun doğruluğunun gösterilmesinin istendiği testin 2. sorusunda MH1 yoğunlukta ortaya çıkmıştır. Bu durum, ispat sürecinde doğrudan ispatların yapılmasının zor olduğu, çelişki yöntemi ile ispatların yapılmasını gerektiren veya belli bir ön koşula bağlı sorularda sonuç ile başlama muhakeme hatası daha yoğunlukta ortaya çıktığını göstermektedir. Dolayısıyla bu tür sorularda öğretmen adaylarının sıklıkla sonuçla başlama muhakeme hatasına düştükleri görülmektedir. Bununla birlikte matematiksel bir ilişkinin ispatının tümevarım ile yapılmasını gerektiren testin 3. sorusunda MH1'in çok düşük yoğunlukta olduğu belirlenmiştir. Bu durum, öğretmen adaylarının tümevarım yönteminin kullanıldığı sorularda birkaç sayısal değerden hareketle çeşitli genellemelere ulaşma eğiliminden kaynaklanabilir.

Muhakeme hataları belirleme testinde yer alan 7. soru, fonksiyonlar ilgili çift yönlü ispatlama gerektirmektedir. Bu soruda, sınıf seviyesine bakılmaksızın öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğunun ispat sürecinde tek yönlü inceleme muhakeme eksikliği olarak değerlendirilen ME8 muhakeme eksikliğine düştüğü belirlenmiştir. Bu durum, “*ancak ve ancak*” koşullu sorularda öğretmen adaylarının ilgili matematiksel ilişkinin ispatını “ise” gibi algıladığını göstermektedir. Dolayısıyla ilgili soruda sınıf seviyelerinin tamamında öğretmen adayları büyük bir oranda ispatları tek taraftan incelemeyi yeterli bulmuştur. Muhakeme hataları belirleme testinde yer alan 1.soru pozitif tamsayılar üzerinde belli bir ön koşuldan hareketle belli bir sonucunun doğruluğunun gösterilmesi istenmiştir. Testin 5. sorusu tamsayılar üzerinde teklik ve çiftlik ile ilgili bir sorudur. Testin 6. sorusu ise doğal sayılar kümesi üzerinde geçerli ve bölme algoritması ile ilgili bir önermenin ispatının yapılmasını gerektiren bir sorudur. Belirtilen bu üç soruda da genel olarak matematiksel bir ilişkinin ispatı birden fazla ispat yöntemiyle yapılabilmektedir. Bu durum, birden fazla ispat yöntemi ile yapılabilen ve ilk başta hangi ispat yönteminin kullanılabileceği açık olmayan sorularda öğretmen adaylarının uygun ispat yöntemini belirlemede zorluklar yaşadığını göstermektedir.

Muhakeme hataları belirleme testlerinden elde edilen veriler genel olarak incelendiğinde, ispat sürecinde ortaya çıkan muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşluklarının ilgili matematiksel ilişkinin doğasıyla bağlantılı olduğu belirlenmiştir. Bununla birlikte ispat sürecinde muhakeme hataları boyutunda MH2 ve MH5 kategorileri; muhakeme eksiklikler boyutunda ME3, ME4, ME7 kategorileri ve muhakeme boşlukları boyutunda MB1 ve MB2 kategorileri ise sorulara göre dikkate değer bir değişim göstermemiştir. Dolayısıyla bu tür muhakeme hata, eksiklik veya boşluklar, soruların yapısına bakılmaksızın testin her sorusunda belirli bir yoğunlukta ortaya çıkabilir.

5. 2. İspata Yönelik Derslerde Yer Verilen Sınıf İçi Uygulamalarının Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları Bağlamında Tartışılması

Bu çalışmada ispat sürecinde muhakeme veya muhakeme hatalarına odaklanan durumlar, öğretim elemanlarının kullandığı yaklaşımlar, derslerinde yer verilen uygulamalar, ispata yönelik ders içerikleri, öğrencilerin sorduğu sorular, sorulan sorulara verdikleri cevaplar, oluşturdukları veya sundukları ispatlar, derslerde kullanılan yöntem ve öğretim elemanlarının görüşlerinin muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerinin veya muhakeme boşluklarının üzerindeki etkisini belirlemek amacıyla gözlemler yapılmıştır. Bu kısımda ispata yönelik farklı derslerde muhakeme hatalarına yönelik durumların nasıl ortaya çıktığı, farklı bileşenlere odaklanan derslerin hangi noktalarda farklılaştığı veya benzer olduğuna ilişkin bulgular değerlendirilerek bu durumun muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşlukları ile ilişkisinin ne ölçüde olduğuna yönelik tartışma yapılmıştır. Çalışma kapsamında ortaöğretim matematik öğretmenliği programında hem güz dönemi hem de bahar döneminde okutulan ve ispatların yoğun olarak işlendiği dersler gözlemlenmiştir. Elde edilen veriler oluşturulan gözlem formunun alt boyutları altında kategorize edilmiştir. Her bir kategori altında yer alan göstergelere ilişkin bulgular muhakeme hataları ile ilişkilendirilmeye çalışılmıştır. Farklı derslerde farklı boyutların ön plana çıkması veya göstergeler bazında yoğunlukların farklı olması, yapılan muhakeme hataları belirleme testlerinin verileri arasındaki değişim de göz önüne alınarak bu kısımda güz dönemi ve bahar dönemi dersleri ayrı ayrı ele alınarak tartışılmıştır. Her iki dönemde de gözlemlenen her bir dersin verilerine ilişkin bulgular; matematik dili ve sistematikleştirme, öğrenci muhakemesine odaklama ve ispat yöntemleri boyutları altında tartışılmıştır.

5. 2. 1. İspata Yönelik Güz ve Bahar Dönemi Derslerinde Yer Verilen Sınıf İçi Uygulamalarının Muhakeme Hataları, Muhakeme Eksiklikleri ve Muhakeme Boşlukları Bağlamında Tartışılması

Ortaöğretim matematik öğretmenliği programının güz döneminde yürütülen ve ispatların yoğun olarak işlendiği; Analiz I, Cebir I, Matematiğin Temelleri, Soyut Cebir 1 ve Sayılar Teorisi dersleri ile bahar döneminde yürütülen; Soyut Matematik, Analiz 2, Cebir 2 ve Lineer Cebir gibi dersler incelendiğinde ispat sürecinde muhakeme bağlamında farklı noktaların göze çarptığı görülmüştür. Derslerdeki içerik ve yaklaşım, öğretim elemanlarının görüşleri ve öğrencilerin soru ve görüşleri bağlamında ele alınarak ispat sürecinde muhakeme veya muhakeme hatalarına odaklanan noktalar resmedilmeye çalışılmıştır. İspat sürecinde muhakeme veya muhakeme hatalarına odaklanan durumlar

göz önüne alındığında dersler arasında dikkate değer farklılıkların olduğu göze çarpmaktadır. Örneğin bir derste matematik dili ve sistematik boyutuna yönelik göstergeler yoğunlukta iken başka bir derste öğrenci muhakemesine odaklama boyutu altındaki göstergelerin yoğunlukta olduğu görülmüştür. Bu farklılıklar ve her bir boyutun altındaki göstergelerin muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşlukları üzerine etkisi incelenerek güz ve bahar dönemi ders gözlemlerine ilişkin bulgular; gözlem formunda yer alan öğrenci muhakemesine odaklama, matematik dili ve sistematikleştirme ve ispat yöntemleri boyutları altında ayrı ayrı ele alınarak tartışılmıştır.

5. 2. 1. 1. Derslerde Yer Verilen Sınıf İçi Uygulamalarının Öğrenci Muhakemesine Odaklama Açısından Tartışılması

Bu bölümde hem güz dönemi hem de bahar dönemi derslerine ilişkin bulgular ders içerikleri, öğretim elemanının görüşleri ve uygulamaları ile birlikte ele alınarak Öğrenci Muhakemesine Odaklama bileşeni bağlamında tartışılmıştır. Her bir ders ayrı ayrı incelendiğinde öğrenci muhakemesine odaklama boyutunda yer alan göstergeler, derslerin her birinde benzer şekilde ön plana çıkarken yoğunluk açısından değişim göstermektedir. Gözlemlenen bütün dersler genel olarak incelendiğinde; öğrencileri muhakeme süreçlerini açıklamaları konusunda teşvik etme (ÖM-1) göstergesi öğrenci muhakemesine odaklama boyutunda en yüksek yoğunluğa sahiptir. Bu göstergeye ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde güz döneminde Matematiğin Temelleri dersinde frekans ($f_{MT}=28$) ve yüzde (%34); Analiz1 dersinde frekans ($f_{A1}=15$) ve yüzde (%29) ile öğrencilerin muhakeme süreçlerini açıklama konusunda teşvik etme diğer derslere nispeten daha fazla vurgulandığı görülmektedir. Buna karşın Sayılar Teorisi frekans ($f_{ST}=5$) ile yüzde (%12) ve Cebir1 frekans ($f_{C1}=4$) yüzde (%13) derslerinde ise bu göstergeye ait frekans ve yüzdeler daha düşük oranlarda olduğu görülmektedir. Analiz1 ve Matematiğin Temelleri derslerinde öğrencilerin muhakeme süreçlerini açıklama konusunda daha fazla teşvik edilmesi öğrencilerinin sahip oldukları muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerinin veya muhakeme boşluklarının farkında olmalarına bağlı olarak bunların azalmasında önemli ölçüde etkisi olduğundan bahsedilebilir. Bu dersleri alan birinci sınıf öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerinin veya muhakeme boşluklarının güz dönemi başında uygulanan MHBT1'e göre MHBT2'de büyük düşüş göstermesi bu durumu desteklemektedir. Literatürde yapılan birçok çalışmada (Erdem, 2015; Francisco ve Maher, 2005; Generazzo, 2011; Hiebert ve Grouws, 2007; Hsu, 2010; Lee, 1999; Martin ve McCrone, 2009; Pulley, 2010; Öztürk, 2016) ispat sürecinde öğrencilerin muhakeme süreçlerini açıklama konusunda teşvik edilmesinin; muhakeme hatalarını azalttığı, doğru

muhakemeler geliştirebildikleri ve geçerli ispatlar oluşturmalarına katkıda bulunduğunu göstermektedir. Francisco ve Maher (2005) yaptıkları çalışmada öğrencilerin matematiksel aktivite veya ispatlar yaparken onların muhakeme süreçlerini açıklama konusunda cesaretlendirilmesinin doğru muhakemeler geliştirmelerine pozitif yönde etki oluşturacağını belirtmişlerdir. Pulley (2010) öğrencilerin kendi muhakeme süreçlerini açıklama veya ispatları değerlendirmelerini sağlayan ortamların oluşturulmasının onların sahip oldukları kavram yanılgıları veya muhakeme hatalarını ortadan kaldırayabileceğini ifade etmiştir. Benzer şekilde Öztürk (2016) doktora tez çalışmasında ispat sürecinde veya öğrenme ortamında öğrencilerin kendi düşüncelerini açıklamaları konusunda teşvik edilmesi veya çeşitli sorular sorulmasına fırsat verilmesi onların doğru muhakemeler geliştirmelerine olumlu katkılar sağlayabileceğini ifade etmiştir. Öğrencilerin aktif olarak katılabildiği, kendi düşüncelerini ifade edebildiği, kendi muhakeme süreçlerinin farkında olabildiği öğrenci merkezli öğrenme ortamlarının öğrencilerin sahip oldukları muhakeme hatalarını azaltabilmekte ya da ortadan kaldırayabilmektedir (NCTM, 2000; Umay, 2003).

Öğrenci muhakemesine odaklanma boyutunda yer alan öğrencilerin ispat adımları arasındaki ilişkilere yönelik sorular yönelterek ispata devam etmelerini sağlama (ÖM-12) göstergesi derslerin genelinde öğretim elemanlarının vurguladıkları göstergelerden biri olduğu belirlenmiştir. Bununla birlikte derslere göre bu göstergenin yoğunluklarının farklı oranlarda olduğu fark edilmiştir. Örneğin Matematiğin Temelleri dersinde oluşturulan ispatların adımları arasındaki ilişkileri vurgulama veya öğretmen adaylarına çeşitli sorular yöneltilerek ispatlarını devam etmelerini sağlama açısından bu göstergenin %27 yoğunlukta, Cebir1 dersinde ise bu oranın %6,5 olarak çok daha düşük oranda olduğu gözlemlenmiştir. Benzer şekilde başkalarının muhakemelerini değerlendirebilmeleri için teşvik etme (ÖM-2), özel durumlardan hareketle öğrencileri genel önermeler üretmeye yönlendirme (ÖM-14), öğrencilerin oluşturdukları ispatları açıklayarak sunma, kullandıkları önermelerin gerekçelerini belirtmelerini isteme (ÖM-11) göstergelerinin Matematiğin Temelleri ve Analiz1 derslerinde daha yoğunlukta olduğu Sayılar Teorisi, Soyut Cebir ve Cebir1 derslerinde daha düşük yoğunluklarda olduğu belirlenmiştir. Matematiğin Temelleri ve Analiz1 dersleri ortaöğretim matematik öğretmenliği 1. sınıfta verilmektedir. Dolayısıyla bu derslerde ilgili göstergelerin yoğunlukta olması, bu dersleri alan birinci sınıf seviyesindeki öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarının MHBT2 ve MHBT3'te düşüş göstermesine katkı sağladığından bahsedilebilir. Benzer şekilde ikinci ve üçüncü sınıfta okutulan Sayılar Teorisi, Soyut Cebir ve Cebir1 gibi derslerde bu göstergelerin düşük yoğunlukta olmasıyla öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerinin veya muhakeme boşluklarının MHBT1'e göre MHBT2 ve MHBT3'te çok az bir değişim göstermesi veya hiç göstermemesi bu

sonuçla paralellik göstermektedir. Bu durum ispat sürecinde öğrencilerin aktif olduğu, kendi muhakeme süreçlerini açıklayabildiği veya başkalarının muhakemelerini değerlendirebildiği, ispat adımları arasındaki ilişkilere yönelik soruların sorulduğu veya gerekçelendirilmelerinin istendiği ortamların öğretmen adaylarının doğru bir muhakeme geliştirmelerine yardımcı olduğunu göstermektedir. Selden ve Selden (2007) ispat sürecinde öğrencilerinin kendi düşünce veya muhakemelerini açıklama, arkadaşlarının muhakemelerini değerlendirme, ispatlar veya bazı ispat adımları üzerinde tartışabildikleri, eleştirel sorular sorabildikleri veya sınıf tartışmaları yapabildikleri zeminlerin oluşturulmasının onların geçerli ispatlar oluşturabilmeleri ve doğru muhakemeler geliştirmelerinde önemli olduğunu vurgulamaktadır. Benzer şekilde yapılan birçok çalışma bu araştırmanın sonuçlarını desteklemektedir. Erdem (2015) yaptığı çalışmada doğru bir muhakeme becerisinin gelişmesinde öğrencilerin ispat sürecinde kendi stratejilerinin doğru olup olmadığını kontrol edebildikleri, birbiriyle etkileşime geçebildikleri, muhakeme süreçlerini veya fikirlerini rahatlıkla açıklayabildikleri ortamların oluşturulmasıyla olabileceğini vurgulamaktadır. NCTM (2000) de öğrencilerinin ispat sürecinde birçok muhakeme hatası yapabildiklerini belirtilerek bu muhakeme hatalarının onların matematiksel muhakemelerini arttıracak şekilde analiz edilip ve çeşitli muhakemeler geliştirmelerini sağlayacak öğrenme ortamlarının oluşturulmasını önermektedir. Benzer şekilde birçok araştırma (Altıparmak ve Öziş, 2005; Hartman, 2001; Kramarski, 2004; Kramarski ve Zoldan, 2008; Renkl, 1999; Sarı-Uzun, 2013; Yankelwitz ve diğ., 2010) ispat sürecinde öğrencilerinin sahip oldukları muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerinin veya muhakeme boşluklarının azaltılmasında; öğrencilerinin fikirlerini açıklamalarına, ispat adımlarında kullanılan önermeleri veya kuralları sorgulamalarına, çeşitli muhakeme stratejilerini ileri sürmelerine fırsat tanımanın önemli olduğunu vurgulamışlardır.

5. 2. 1. 2. Derslerde Yer Verilen Sınıf İçi Uygulamalarının Matematik Dili ve Sistemikleştirme Açısından Tartışılması

Bu bölümde hem güz dönemi hem bahar dönemi derslerine ilişkin bulgular ders içerikleri, öğretim elemanının görüşleri ve uygulamaları birlikte ele alınarak matematik dili ve sistemikleştirme bileşeni bağlamında tartışılmıştır. Her bir ders ayrı ayrı incelendiğinde matematik dili ve sistemikleştirme boyutunda yer alan göstergeler dersler bazında benzer şekilde ön plana çıkarken yoğunluk açısından değişim göstermektedir. Matematik dili ve sistemikleştirme boyutunda yer alan göstergeler incelendiğinde güz dönemi derslerinin genelinde; matematik dilinin doğru kullanılmasına vurgu yapma (MD-1), matematiğin aksiyomatik yapısına vurgu yapma (MD-2), matematiksel tanımlara, genel

kurallarının geçerli olduğu kümelere dikkat edilmesi gerektiğini vurgulama (MD-4) ve ispatta kullanılan önermelerin gerekçelerini belirtmek amacıyla soru sorma (MD-9) göstergelerinin yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bununla beraber gözlemlenen dersler arasında yoğunluk açısından bir farklılık söz konusudur. Bu boyutta ortaya çıkan göstergeler genel olarak incelendiğinde Cebir1 (%26), Matematiğin Temelleri (%24) ve Analiz1 (%22) derslerinde benzer şekilde dikkate değer bir oranda ortaya çıkarken Sayılar Teorisi (%13) ve Soyut Cebir(%16) derslerinde daha düşük oranlarda ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla öğretim elemanlarının derslerinde, matematik dilinin doğru kullanılmasına vurgu yapma, matematiğin aksiyomatik yapısına vurgu yapma veya ispatı yapılan teoremlerin, önermelerin geçerli oldukları sayı kümelerine dikkat çekme gibi durumların üzerinde durduklarından söz edilebilir. Öğretim elemanlarının derslerinde bu tür vurgulamaları yapmaları veya teoremlerinin ispatları sırasında üzerinde önemle durdukları noktalar öğretmen adaylarının bir kısmının sahip oldukları bazı muhakeme hatalarının azalmasına katkı sağladığından söz edilebilir. Örneğin birinci sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında MHBT1’de tanım aralığına dikkat etmeme muhakeme eksikliği yaklaşık olarak %20 civarında iken MHBT2’ de bu oran %10 civarında bir düşüş göstermiştir. Benzer şekilde üçüncü sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarda kullanılan önermelerin gerekçelendirilmemesi muhakeme boşluğunun ikinci açık uçlu sınavda daha düşük oranlarda çıkması, ispata yönelik derslerdeki bu tür durumların pozitif yönde bir etki yaptığından söz edilebilir. Yapılan bazı çalışmalar da matematik öğretiminde veya ispat sürecinde yürütülen sınıf içi uygulamalarının öğretmen adaylarının matematik dilinin doğru kullanılmasına dikkat etme, semboller ve kavramları uygun bir şekilde kullanma, tanım veya teoremlerin geçerli olduğu sayı kümelerine dikkat etme veya ve kullanmaları üzerinde etkili olduğunu özellikle belirtmektedir (Capraro ve Joffrion, 2006; Erdem, 2015; Mercer ve Sams, 2006; Selden ve Selden, 2003; Öztürk, 2016; Woods, 2009).

Matematik dili ve sistematikleştirme boyutunda yer alan göstergeler incelendiğinde bahar dönemi derslerinin genelinde; matematik dilinin doğru kullanılmasına vurgu yapma (MD-1), ispat sürecinde sistematikliğe dikkat çekme (MD-3), matematiksel tanımlara, genel kurallarının geçerli olduğu kümelere dikkat edilmesi gerektiğini vurgulama (MD-4) ve ispatta kullanılan önermelerin gerekçelerini belirtmek amacıyla soru sorma (MD-9) göstergelerinin ön planda olduğu göze çarpmaktadır. Bununla beraber gözlemlenen dersler arasında yoğunluk açısından bir farklılık söz konusudur. Bu boyutta ortaya çıkan göstergeler genel olarak incelendiğinde Soyut Matematik dersinde %29 ile en fazla yoğunluğa sahipken Lineer Cebir dersinde %19 ile daha düşük bir oranda olduğu gözlemlenen ders saatlerinde bir veri olarak kaydedilmiştir. Bu durum soyut matematik

dersinde matematik dilinin doğru kullanılmasına vurgu yapma, ispat sürecinde sistematikleğe dikkat çekme veya ispatı yapılan teoremlerin, önermelerin geçerli oldukları sayı kümelerine dikkat çekme gibi durumların daha yoğunlukta olduğunu göstermektedir. Örneğin ÖE1 dersinde matematik dilinin doğru kullanılmasının ve ispatlarının sistematik olarak düzgün bir şekilde yazılmasının çok önemli olduğunu şu sözlerle vurgulamaktadır: "Geçen hafta vizenizi okudum daha doğrusu okumak için azami derecede gayret gösterdim. Arkadaşlar bir ispatı yapmak kadar o ispatı düzgün yazmak da önemlidir. Bazı arkadaşların yaptıkları şey ispat mıdır değil midir inanın anlaşılması mümkün değil nereden başlamış nereye varmış, kim kiminle bağlı karman çorman bir şeyler. Ben buna nasıl puan vereyim açık söylüyorum finalde düzgün yazmazsanız hiç okumam puan da vermem çizer geçerim. Bundan sonra hem derslerde defterinize yazarken hem de sınavlarda düzgün yazın. Yazınızın çirkinliğini hiç hesaba katmıyorum sadece sistemli düzgün bir şeyler yazın birinci sorunun cevabının bir kısmını üçüncü sorunun altındaki boşluğa yazanı gördüm bundan sonra buna dikkat edin..."Öğretim elemanın ispat sürecinde bu tür durumlarının üzerinde durması, çeşitli uyarılarda bulunması öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hata, eksik veya boşlukların MHBT3'te düşük oranlarda da olsa azalmasına katkı sağladığından bahsedilebilir.

Matematik dili ve sistematikleştirme boyutunda yer alan göstergelerin yoğunlukta olduğu derslerde öğretim elemanlarının matematiksel kavram ve sembollerinin doğru kullanılmasına vurgu yapmaları, sunulan ispatlarda hata veya eksik kullanımlara dikkat çekmeleri öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini doğru kullanmaları üzerinde pozitif bir etki yapmış olabilir. Öztürk (2016) ispat sürecinde öğretmen adaylarının matematiksel kavram veya sembollerin doğru kullanılmasına tanık olmaları veya kendi ispatlarını oluştururken hata veya doğru bir dil kullanmalarına dikkat çekilmesinin öğretmen adaylarında bir farkındalık oluşturabileceğini belirtmektedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının kendi ispatlarını oluştururken matematik dilini daha doğru ve uygun bir şekilde uygulama fırsatını bulmaları; onların MHBT3'te ispatlarda daha düşük oranlarda muhakeme hatalarını yapmalarına katkı sağlandığı düşünülmektedir. Mercer ve Sams'in (2006) yaptığı çalışmada öğretim elemanlarının derslerinde matematik dilinin doğru kullanılmasına vurgu yapmaları veya öğrencilerini bu konuda teşvik etmelerinin öğrencilerin ispat yaparken veya muhakemelerde bulunurken daha doğru bir matematik dili kullanabilmelerini sağladığını vurgulamışlardır. Öğretim adaylarının ispat sürecinde matematik sembol, kavram veya tanımlarını doğru kullanılmaları ve muhakeme hatalarının azalmasını ispat sürecinde öğretim elemanlarının kullandıkları metot ve yaklaşımların önemli ölçüde etkilediğini birçok araştırmancının sonucu göstermektedir (Dickson, Brown ve Gibson, 1993; Çakmak, 2013; Philipp, Thanheiser ve Clement, 2002; Yeşildere, 2007).

Benzer şekilde ispat sürecinde matematik dilinin üzerinde fazla durulması veya önem verilmemesi öğrencilerinin ispatlarını oluştururken matematik dilini doğru kullanmamasına bağlı olarak birçok muhakeme hatası, muhakeme eksikliği veya muhakeme boşluğunu yapmalarına sebep olacağı da araştırmalarda vurgulanmaktadır. Selden ve Selden (2003) öğretmen adaylarının sahip oldukları bazı muhakeme hatalarının giderilmesinde veya azalmasında öğrenme ortamlarında ya da ispat sürecinde matematiksel ifade ve ilişkilerinin uygunluğu üzerine tartışılmasının, öğrencilerin sundukları ispatlarda yer alan gerekçelerin uygunluğunu sorgulanmasının öğrencilerinin geçerli ispatları oluşturmalarına önemli derecede etki yapacağını vurgulamaktadır.

İspatlarının yoğun olarak işlendiği bazı derslerde öğretim elemanları ispat adımlarında kullanılan önermelerin neye dayalı olarak yazıldığına belirtilmesi veya ispat adımları arasındaki ilişkilerin gerekçelendirilmesinin önemi üzerinde durmuşlardır. Örneğin ÖE3 dersinde ispat yazılırken her adımın önemli olduğunu, sadece sonucun yazılmasının ispat için yeterli olmayacağını "...arkadaşlar yazdığınız her şeyin bir matematiksel bir temeli olmalı öyle kafamıza göre bu zaten böyledir diyemeyiz onu Mustafa lisede diyordu. Yazdığınız gerekçeleri mutlaka belirtin aradaki ilişkiyi nasıl kurdunuz, ispatınızı okuyan ne yaptığınızı görsün..." Derslerde bu tür uyarı veya vurgulamaların yapılması, öğretmen adaylarının MHBT2 ve MHBT3'te ispatları yazarken önermeleri gerekçelendirme bakımından daha düşük oranlarda muhakeme boşluklarına sahip olmaları üzerinde pozitif bir etki oluşturmuş olabilir. Birçok araştırmada (Akay ve diğ., 2006; Altun, 2008; Cai ve Cifarelli, 2005; Duatepe ve diğ., 2005; Erdem ve Gürbüz, 2015; Gürbüz, 2008; Kramarski ve Zeichner, 2001; Mandacı-Şahin, 2007; Öztürk, 2016; Umay, 2003) öğrenme ortamlarında veya ispat sürecinde ispat için gerekli çıkarımları belirtme ve bu çıkarım veya varsayımları gerekçelendirme konusunda öğretim elemanlarının vurgulamaları veya uyarılarının öğrencilerin bu konuya yönelik bir farkındalık kazandırabileceğini göstermektedir.

5. 2. 1. 3. Derslerde Yer Verilen Sınıf İçi Uygulamalarının İspat Yöntemleri Açısından Tartışılması

Bu bölümde hem güz dönemi hem bahar dönemi derslerine ilişkin bulgular ders içerikleri, öğretim elemanının görüşleri ve uygulamaları birlikte ele alınarak matematik dili ve sistematikleştirme bileşeni bağlamında tartışılmıştır.. Her bir ders için bulgular ayrı ayrı incelendiğinde ispat yöntemleri boyutunda yer alan göstergeler içerisinde en fazla vurgulanan durumların verilen bir önermenin ispatını yapabilmek için en uygun ispat yönteminin belirlenmesine yönelik öğrencilerin tartışmasını sağlama (İY-1), farklı ispat yöntemlerinin varlığına vurgu yapma (İY-4) ve bir önermenin ispatını birden fazla ispat

yöntemini kullanarak yapma (İY-2) göstergeleri olduğu görülmektedir. Ancak dersler arasında göstergelerin oranları oldukça farklı yoğunluktadır. Örneğin bir önermenin ispatını farklı ispat yöntemleri kullanarak yapma Analiz1 dersinde yaklaşık olarak % 17 civarında ortaya çıkarken Sayılar Teorisi dersinde gözlemlenen ders saatleri içerisinde bu göstergeye ait herhangi bir durum veri olarak kaydedilmemiştir. Bu durum ispata yönelik derslerinin içerikleri ve dersi alan öğretmen adaylarının buldukları sınıf seviyelerinin etkisinden kaynaklanabilir. Bu göstergelerin yüksek çıktığı dersler güz döneminde Matematiğin Temelleri ve Analiz1 dersleri, bahar döneminde ise Soyut Matematik ve Analiz 2 dersleri olarak belirlenmiştir. Söz konusu derslerin ispata giriş mahiyetinde olmaları ve birinci sınıfta okutulması; bu derslerde sıklıkla ispat yöntemlerinin kullanılması ve öğretim elemanlarının bu tür durumlarının üzerinde daha fazla durmasına sebep olduğu düşünülmektedir. Dolayısıyla bu dersleri alan öğretmen adaylarının MHBT1'e nispeten MHBT2 ve MHBT3'te ispat yöntemlerinin doğru kullanılmamasına veya ilgili matematiksel ilişkinin ispatı için uygun ispat yöntemini belirlememeye bağlı olarak ortaya çıkan muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ya da muhakeme boşluklarının azalmasında etkisi olmuş olabilir. Yapılan bazı çalışmalarda (Altun, 2004; Campbell ve Campbell, 1999; Checkley, 1997; Demirel, 2002; Gürbüz, 2008; NCTM, 1989; 2000; Pape ve diğ., 2003; Tuğrul ve Duran, 2003; Yıldırım ve Tarım, 2008) ispat sürecinde birden fazla ispat yönteminin kullanılması, sadece belli bir ispat yöntemiyle çözülen sorulara az yer verilmesi, birden fazla ispat yöntemlerinin kullanılmasına vurgu yapılması veya ispatlarda uygulanması öğrencilerin ispat yaparken daha fazla strateji geliştirmelerine veya doğru muhakemeler geliştirmelerine katkı sağlayacağı vurgulanmıştır. Erdem (2015) farklı ispat yöntemleri veya çözüm stratejileri kullanmaya teşvik etme sayesinde öğrencilerin doğru muhakemeler geliştirmelerine pozitif etki yapabileceğini belirtmiştir. Bu çalışmada da benzer şekilde öğretim elemanlarının derslerinde farklı ispat yöntemlerine vurgu yapma veya uygulama neticesinde ispat sürecinde öğrencilerin sahip oldukları muhakeme hatalarının azılması literatürdeki sonuçlarla uyumaktadır. Benzer şekilde Mandacı-Şahin (2007) birden fazla yöntemle yapılabilecek açık uçlu problemlerin veya ispatların öğrenciye farklı strateji veya muhakemeler geliştirmelerine katkı sağlayacağını belirtmesi bu çalışmada elde edilen sonuçları desteklemektedir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

6. 1. Sonuçlar

Bu çalışma ile ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarını belirleme; muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarının gelişimsel olarak nasıl değiştiğini inceleme amaçlanmıştır. Bunun yanı sıra ispatların yoğun olarak işlendiği derslerde ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat yaklaşımlarını belirleme ve bunların muhakeme hataları ile ilişkisini inceleme; bu süreçte öğretim elemanlarının kullandığı öğretim yaklaşımları ve derslerde yer verilen uygulamaların, muhakeme hataları üzerindeki rolünün ne ölçüde olduğu hakkında detaylı bilgi elde etmek için ders gözlemleri yapılmıştır. Bu bağlamda ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının üniversite eğitimlerine başlarken sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ya da muhakeme boşluklarının neler olduğu, üniversite eğitimleri boyunca nasıl bir değişim gösterdiği ve ispatların yoğun olarak işlendiği derslerin muhakeme hataları ile ilişkisinin ne ölçüde olduğu ile ilgili elde edilen sonuçlara bu bölümde verilmiştir.

6. 1. 1. Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Sürecinde Sonuç ile Başlama, Özel Bir Durumdan Elde Edilen Sonucun İspat Olarak Kabul Edilmesi, Yanlış Varsayımlarla Başlama Gibi Muhakeme Hatalarına Sıklıkla Düştüğü Belirlenmiştir.

Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ya da muhakeme boşluklarını belirlemek için güz dönemi ders gözlemlerinin öncesi ve sonrası ile bahar dönemi ders gözlemlerinin sonrasında muhakeme hatalarını belirleme testleri uygulanmıştır. Bu açık uçlu sınavlar; MHBT1, MHBT2 ve MHBT3 şeklinde üç aşamalı olarak uygulanarak öğretmen adaylarının üniversite eğitimlerine başladıklarında ne tür muhakeme hatalarına, eksikliklerine ya da boşluklarına sahip oldukları belirlenerek ilerleyen süreçte nasıl bir değişim gösterdiği incelenmiştir. Muhakeme hatalarını belirleme testleri ve öğretmen adayları ile yapılan klinik mülakatlar sonucunda elde edilen veriler göz önüne alındığında genel olarak uygulamaya dâhil olan farklı sınıf seviyesindeki öğretmen adaylarının ispat sürecinde benzer muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarına sahip oldukları belirlenmiştir. Bununla birlikte muhakeme hataları, eksiklikleri ya da boşlukların yoğunluk bakımından sınıf seviyelerine göre dikkate değer bir oranda değişim göstermiştir.

Muhakeme hatalarını belirleme testleri ve öğretmen adayları ile yapılan klinik mülakatlar sonucunda elde edilen veriler incelendiğinde ispat sürecinde en sıklıkla rastlanan muhakeme hataları; Sonuç ile başlama, Teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması, özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi ve yanlış varsayımlarla başlama muhakeme hatası olarak belirlenmiştir. Sonuç ile başlama kategorisi sınıfların genelinde muhakeme hataları boyutunda en fazla ön plana çıkan muhakeme hatasıdır. Dolayısıyla sınıfların genelinde öğretmen adayları ispat yaparken çoğunlukla var olan bir gerçek üzerinden başlayıp ulaşmaları gereken matematiksel ifade ile ispata başlangıç yapmışlardır. Başka bir ifadeyle sonucu doğru kabul edip bunun üzerinden çeşitli matematiksel işlemler yaparak matematiksel ifadenin ispatını yapmaya çalışmışlardır. Bu durum öğretmen adaylarının ispatları denklem gibi çözmeye çalıştıklarını, hipotez ve hüküm gibi kavramları tam anlamıyla belirleyemediklerini göstermektedir. Benzer şekilde muhakeme hataları boyutunda yer alan yanlış varsayımlarla başlama muhakeme hatası kategorisi öğretmen adaylarının en fazla sahip oldukları muhakeme hatalarından biri olarak göze çarpmaktadır. Dolayısıyla öğretmen adaylarından bir kısmı, ispatı istenen matematiksel bir ifadenin hipotez ve hüküm kavramlarını karıştırarak yanlış bir varsayım ile ispatları yapmaya çalışmışlardır. Muhakeme hataları belirleme testlerindeki ispatlarda birçok öğretmen adayının matematiksel bir ilişkinin ispatını yaparken ispat sürecine yanlış varsayımla başlangıç yaptıkları belirlenmiştir. Benzer şekilde ortamında sunulan ispatlarda da öğretmen adaylarının ispat sürecinde hipotez ve hüküm kavramlarını karıştırarak ispat sürecine yanlış varsayımla başlama muhakeme hatasını yaptıkları gözlemlenmiştir. Sınıf seviyelerinin genelinde farklı oranlarda olmakla birlikte dikkate değer oranda öğretmen adaylarının yanlış varsayımla başlama muhakeme hatasına sahip oldukları belirlenmiştir.

Muhakeme hataları boyutunda göze çarpan diğer bir muhakeme hatası da teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması olarak belirlenmiştir. Başka bir deyiş ile sınıf seviyelerinin genelinde dikkate değer bir oranda öğretmen adaylarının ispat sürecinde bir teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varamadıkları görülmüştür. İspat sürecinde öğretmen adayları matematiksel bir ilişkinin ispatını yaparken doğrudan ispat yapmanın zor olduğunu düşündükleri zaman ifadenin dengi olan karşıt-tersini kullanmaya çalışmışlardır. Ancak bu yöntemi kullanmaya çalışan öğretmen adaylarının çoğu bunu başka bir ispat yöntemi olan çelişki yöntemiyle karıştırmışlardır. Bu durum öğretmen adaylarının ispat yöntemlerini uygun kullanamayıp ispatlarını yanlış yorumlamalarına sebep olmuştur. Farklı sınıf seviyelerinde yer alan öğretmen adaylarının bazıları ise ispat sürecinde sadece özel bir durumu veya birkaç sayısal değeri ele alarak geçersiz ispatlar yapmışlardır. Muhakeme

hataları boyutunda özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi kategorisi olarak değerlendirilen bu muhakeme hatası üst sınıflara doğru kayda değer bir oranda düşüş göstermektedir. Bununla birlikte öğretmen adaylarının bir kısmı soyutlama, genelleme gibi ispat fonksiyonlarını hesaba katmadan ispatları sadece doğrulama olarak algılamışlardır.

6. 1. 2. Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Sürecinde Yöntemsel Eksiklik, İlgili Matematiksel İfadesinin Tanım Aralığını Dikkate Almama, Matematik Dilini Kullanmada Yetersizlik, Tek Yönlü İnceleme Gibi Muhakeme Eksikliklerine Sıklıkla Düştüğü Belirlenmiştir.

Muhakeme hatalarını belirleme testleri ve öğretmen adayları ile yapılan klinik mülakatlar sonucunda elde edilen veriler incelendiğinde sınıf seviyelerinin genelinde ispat sürecinde en sıklıkla rastlanan muhakeme eksiklikleri; yöntemsel eksiklik, ispata başlayamama veya başlanan bir ispatı devam ettirememe, ilgili matematiksel ifadesinin tanım aralığını dikkate almama, matematik dilini kullanmada yetersizlik, tek yönlü inceleme muhakeme eksikliği olarak belirlenmiştir. Bu durum, sınıf seviyelerinin genelinde öğretmen adaylarının ispat sürecinde ispat yöntemlerini uygun kullanamama, ilgili matematiksel ifadenin tanım aralığına dikkat etmeme, matematik dilini doğru kullanamama gibi eksikliklerle ispatlarını tamamladıklarını ya da ispatlarını yarıda bıraktıklarını göstermektedir. Muhakeme hatalarını belirleme testleri ve klinik mülakatlar sonucunda elde edilen veriler göz önüne alındığında genel olarak bütün sınıf seviyelerinde yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde benzer muhakeme eksikliklerine sahip oldukları görülmektedir. Her bir sınıf seviyesinde benzer muhakeme eksiklikleri olmakla birlikte sınıf seviyeleri arasında yoğunluk bakımından bir değişim söz konusudur. Örneğin muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ispata başlayamama veya başlanan bir ispatı devam ettirememe kategorisi birinci sınıf, ikinci sınıf ve üçüncü sınıf öğretmen adaylarında yüzde 40-50 civarında iken dördüncü ve beşinci sınıflarda bu oran yüzde 10 civarında belirlenmiştir. Dolayısıyla üst sınıf seviyelerinde yer alan öğretmen adayları ispata başlangıç yapma ya da başladıkları ispatları devam ettirme konusunda daha fazla girişimlerde bulunmuşlardır denilebilir. Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan ilgili matematiksel ifadesinin tanım aralığını dikkate almama ve tek yönlü inceleme gibi kategorileri ise sınıf seviyelerine bakılmaksızın öğretmen adayların genelinde ön plana çıkmıştır. Bu durum, öğretmen adaylarının ispat sürecinde ispatı istenen matematiksel ifadenin tanım aralığına dikkat etmeme açısından veya “ancak ve ancak” koşullunu içeren ispatlarda tek yönde ispat yapma açısından muhakeme eksikliğine sahip olduklarını göstermektedir.

6. 1. 3. Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Sürecinde Yazılan İspat Adımları ile Elde Edilen Sonucun Uyuşmaması ve Kullanılan Önermelerin Gerekçelerinin Sunulmaması Gibi Muhakeme Boşluklarına Sıklıkla Düştüğü Belirlenmiştir.

Muhakeme hatalarını belirleme testleri ve öğretmen adayları ile yapılan klinik mülakatlar sonucunda elde edilen veriler incelendiğinde sınıf seviyelerinin genelinde ispat sürecinde en sıklıkla rastlanan muhakeme boşlukları; yazılan ispat adımları ile elde edilen sonucun uyuşmaması ve kullanılan önermelerin gerekçelerinin sunulmaması olarak belirlenmiştir. Bu durum, öğretmen adaylarının ispat sürecinde kullandıkları önermeleri gerekçelendirmede güçlük yaşadıklarını göstermektedir. Sınıf seviyesine bakılmaksızın birçok öğretmen adayı matematiksel bir ilişkinin ispatını yaparken ispat adımlarında kullandığı önermeleri gerekçelendirmediği görülmüştür. Öğretmen adaylarında bazıları ispatlarda belirli kuralları yazmakla yetinip ispat adımlarında kullanılan önermelerin matematiksel dayanaklarını açıklamamışlardır. Başka bir deyişle öğretmen adaylarının bir kısmı ispat yaparken sadece genel kuralları ya da bir teoremin ismini yazmayı ispat olarak düşünmüşlerdir. Ayrıca öğretmen adayları genel olarak ispatlarında yazılan ispat adımları ile elde ettikleri sonuç arasında bir bağ kurmakta zorluklar yaşamışlardır. Birçok öğretmen adayı matematiksel bir ilişkinin ispatını yaparken başlangıç adımları ile uyuşmayan sonuçlar elde etmişlerdir. Bu durum, öğretmen adaylarının ispatları bir bütün olarak düşünemediklerini, ispat adımları arasındaki ilişkiyi doğru kullanmadıklarını göstermektedir.

6. 1. 4. Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Sürecinde Sahip Oldukları Sonuç ile Başlama, Teoremin Karşıt Tersinin Kendisinin Mantıksal Dengi Olduğunun Farkına Varılamaması Gibi Muhakeme Hataları Direnç Gösterirken Önemli Bir Kısımının ise Azaldığı Görülmüştür.

Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarını, muhakeme eksikliklerini veya muhakeme boşluklarını belirlemek için güz dönemi ders gözlemlerinin öncesi ve sonrası ile bahar dönemi ders gözlemlerinin sonrasında muhakeme hatalarını belirleme testleri uygulanmıştır. Böylece öğretmen adaylarının üniversite eğitimlerine başladıklarında ne tür muhakeme hatalarına, eksikliklerine veya boşluklarına sahip olduklarının belirlenip ilerleyen süreçte nasıl bir değişim gösterdiği incelenmiştir. Muhakeme hataları belirleme testlerinin verileri göz önüne alındığında birinci sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının üniversite eğitimlerine başlarken birçok muhakeme hatalarına, muhakeme eksikliklerine ve muhakeme boşluklarına sahip oldukları görülmüştür. Muhakeme hataları boyutunda yer alan özel bir durumdan elde

edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi kategorisi birinci sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında %50'den fazla bir oranda ortaya çıkmıştır. Bu durum birinci sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi muhakeme hatasına sahip olduğunu göstermektedir. Buna karşın üst sınıflara doğru gittikçe bu oran oldukça düşüş göstermiştir. Özellikle beşinci sınıf öğretmen adaylarında özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi muhakeme hatasının oranı %10' nun altında bir değer ile çok büyük bir azalma göstermiştir. Bu durum, ispat sürecinde özel bir durumu düşünme veya sadece birkaç sayısal değerle matematiksel bir ilişkinin ispatı için yeterli olacağını düşünme olarak nitelendirilen muhakeme hatası bakımından gelişimsel olarak bir düşüş olduğunu göstermektedir. Benzer şekilde muhakeme hataları boyutunda yer alan yanlış varsayımlarla başlama, farklı notasyonlar kullanmayı ispat olarak düşünme ve aşırı genelleme hataları kategorileri birinci sınıflarda veya ikinci ve üçüncü sınıflarda yer alan öğretmen adaylarında yoğunlukta iken üst sınıflarda özellikle de beşinci sınıfta yer alan öğretmen adaylarında oldukça düşük oranlarda olduğu belirlenmiştir. Bu durum üniversite eğitiminde ispata yer verilen derslerdeki uygulamalarının, öğretim elemanlarının vurgu ya da uyarılarının muhakeme hatalarının azalmasında etkili olduğunu göstermektedir. Ancak muhakeme hataları boyutunda yer alan sonuç ile başlama ve teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması gibi kategorilerinde çok fazla bir değişim olmamıştır. Bu durum sınıfların genelinde öğretmen adaylarının matematiksel bir ilişkinin ispatını yaparken çoğunlukla var olan bir gerçek üzerinden başlayıp ulaşmaları gereken matematiksel ifade ile ispata başlangıç yaptıklarını göstermektedir.

6. 1. 5. İspat Sürecinde Tanım Aralığını Dikkate Almama, Tek Yönlü İnceleme, İspat Yapmada Sistematiğin Olmaması Gibi Muhakeme Eksiklikleri Direnç Göstermiş Önemli Bir Kısmı İse Azalmıştır.

Muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan yönetsel eksiklik, İspata nasıl başlayacağına karar verememe veya ispata devam edememe, matematiksel tanımların yetersiz kullanılması ve matematik dilini kullanmada yetersizlik kategorileri birinci sınıf öğretmen adaylarında muhakeme hataları belirleme testlerinde yüksek yoğunlukta iken dördüncü ve beşinci sınıflarda oldukça düşük yoğunlukta olduğu görülmüştür. Örneğin ispata başlayamama veya başlanan ispatları devam ettirememeye muhakeme eksikliği birinci sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında çok yüksek oranlarda iken üst sınıflara doğru azalma göstermiştir. Özellikle beşinci sınıflarda bu oran oldukça düşük olduğu görülmüştür. Benzer şekilde tanım ve teorem gibi matematiksel kavram ya da kuralları doğru kullanamama muhakeme eksiklikleri muhakeme hataları belirleme

testlerinde, birinci sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında yüksek oranlarda ortaya çıkmıştır. Buna karşın son sınıflarda bu muhakeme eksiklikleri önemli bir derecede azalma göstermiştir. Bu durum ispatların yoğun olarak işlendiği derslerde yer verilen uygulamaların veya öğretim elemanlarının muhakeme eksikliklerine yönelik vurgu veya uyarılarının etkili olduğunu göstermektedir. Buna karşın muhakeme eksiklikleri boyutunda yer alan tanım aralığını dikkate almama ve tek yönlü inceleme kategorileri bütün sınıf seviyelerinde yüksek oranlarda ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla ispat sürecinde tanım aralığına dikkat edememe ya da çift taraflı olarak ispatı yapılması gereken önermeleri tek taraflı olarak ispatlamayı yeterli görme olarak nitelendirilen muhakeme eksiklikleri gelişimsel anlamda önemli bir değişim göstermemektedir.

Muhakeme boşlukları boyutunda yer alan yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması ve kullanılan önermelerin gerekçelerinin sunulmaması kategorilerinin birinci sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarında oldukça yüksek oranlarda olduğu belirlenmiştir. Buna karşın dördüncü ve beşinci sınıflarda daha düşük oranlarda olduğu görülmüştür. Bu durum birinci sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının ispat adımlarında kullanılan önermeleri gerekçelendirme açısından üst sınıflara göre daha fazla muhakeme boşluklarına sahip olduklarını göstermektedir. Bunun yanı sıra yazılan ispat adımları ile elde edilen sonucun uyuşmaması olarak değerlendirilen muhakeme boşlukları bakımından da üst sınıflara doğru gelişimsel olarak bir azalma söz konusudur.

6. 1. 6. İspatların Yoğun Olarak İşlendiği Derslerin Her Birinde Matematik Dili ve Sistemleştirme, Öğrenci Muhakemesine Odaklama, İspat Yöntemleri Boyutları Ön Plana Çıkarken Bu Boyutların Yoğunlukları Açısından Bir Farklılaşma Görülmüştür.

Bu çalışmada ispat sürecinde muhakeme veya muhakeme hatalarına odaklanan durumlar, öğretim elemanlarının kullandığı yaklaşımlar, derslerinde yer verilen uygulamalar, ispata yönelik ders içerikleri, öğrencilerin sorduğu sorular, sorulan sorulara verdikleri cevaplar, oluşturdukları veya sundukları ispatlar, derslerde kullanılan yöntem ve öğretim elemanlarının görüşlerinin muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerin veya muhakeme boşluklarının üzerindeki etkisini belirlemek amacıyla gözlemler yapılmıştır. İspatların yoğun olarak işlendiği farklı derslerde muhakeme veya muhakeme hataları ile ilgili odaklanılan bileşen ve göstergeler açısından dersler arasında benzerlik ve farklılıklar olduğu tespit edilmiştir. Her iki dönemde de gözlemlenen her bir dersin verilerine ilişkin bulgular incelendiğinde matematik dili ve sistemleştirme, öğrenci muhakemesine odaklama ve ispat yöntemleri boyutları altında farklı göstergeler ön plana çıkmıştır.

Her bir ders ayrı ayrı incelendiğinde öğrenci muhakemesine odaklama boyutunda yer alan göstergeler dersler bazında benzer şekilde ön plana çıkmakla birlikte yoğunluk açısından değişim göstermektedir. Derslerin genelinde öğrenci muhakemesine odaklama boyutunda öğrencileri muhakeme süreçlerini açıklamaları konusunda teşvik etme, öğrencilere ispat adımları arasındaki ilişkilere yönelik sorular yönelterek ispata devam etmelerini sağlama göstergeleri genel olarak öğretim elemanlarının derslerinde vurguladıkları göstergeler olarak belirlenmiştir. Bu durum derslerin genelinde öğretim elemanlarının, öğretmen adaylarının kendi muhakeme süreçlerini açıklama veya ispat sürecinde çeşitli stratejiler ileriye sürmelerine fırsat verdiklerini göstermektedir. Benzer şekilde başkalarının muhakemelerini değerlendirebilmeleri için teşvik etme, özel durumlardan hareketle öğrencileri genel önermeler üretmeye yönlendirme, öğrencilerin oluşturdukları ispatları açıklayarak sunma, kullandıkları önermelerin gerekçelerini belirtmelerini isteme gibi göstergelere de sıklıkla yer verildiği tespit edilmiştir. Ancak bütün göstergelerin toplamı açısından dersler arasında önemli derecede farklılıkların olduğu belirlenmiştir. Öğrenci muhakemesine odaklama boyutunda yer alan göstergelerin Matematiğin Temelleri ve Analiz1 derslerinde daha yoğunlukta olduğu buna karşın Sayılar Teorisi, Soyut Cebir ve Cebir1 derslerinde daha düşük yoğunlukta olduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının muhakeme süreçlerini açıklama konusunda daha fazla teşvik edildiği derslerde; öğretmen adayların sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ya da muhakeme boşluklarının farkında olmalarına katkı sağlamıştır. Örneğin Matematiğin Temelleri veya Analiz1 derslerinde bu göstergelerin en fazla yoğunlukta olması ile paralel olarak bu dersleri alan birinci sınıf öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerinin veya boşluklarının önemli oranlarda azalma gösterdiği belirlenmiştir. Bu durum ispatların yoğun olarak işlendiği derslerde yer verilen sınıf içi uygulamalarının öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşlukları ile doğrudan ilişkili olduğunu ve pozitif yönden katkı sağladığını göstermektedir.

İspatların yoğun olarak işlendiği derslerin genelinde sıklıkla ortaya çıkan matematik dilinin doğru kullanılmasına yönelik göstergeler, matematik dili ve sistematikleştirme boyutu altında incelenmiştir. Bu derslerin genelinde; matematik dilinin doğru kullanılmasına vurgu yapma, matematiğin aksiyomatik yapısına vurgu yapma, matematiksel tanımlara, genel kurallarının geçerli olduğu kümelere dikkat edilmesi gerektiğini vurgulama ve ispatta kullanılan önermelerin gerekçelerini belirtmek amacıyla soru sorma göstergelerinin yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu durum, ispat sürecinde öğretim elemanlarının genel olarak matematik dilinin doğru kullanılması gerektiğini vurguladıklarını göstermektedir. Benzer şekilde derslerde sık sık matematiğin aksiyomatik

yapısına dikkat çekilerek önermelerin bir birbirleri ile ilişkili olduğunun üzerinde durulmuştur. Bununla beraber gözlemlenen dersler arasında yoğunluk açısından bir farklılık söz konusudur. Bu boyutta ortaya çıkan göstergeler genel olarak incelendiğinde Cebir1, Matematiğin Temelleri, Soyut Matematik ve Analiz1 derslerinde dikkate değer oranlarda matematik dili ve sistematikleştirmeye yönelik göstergeler yoğunlukta iken bu göstergeler Sayılar Teorisi, Lineer Cebir ve Soyut Cebir derslerinde daha düşük oranlarda ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla farklı derslerde öğretim elemanlarının matematik dilinin doğru kullanılmasına vurgu yapma, matematiğinin aksiyomatik yapısına vurgu yapma veya ispatı istenilen önermelerin geçerli oldukları sayı kümelerine dikkat çekme gibi durumları derslerinde sıklıkla yer vermişlerdir. Bu durum özellikle birinci ve ikinci sınıf seviyesinde yer alan öğretmen adaylarının önemli bir kısmının sahip oldukları bazı muhakeme hatalarının azalmasına katkı sağladığı yapılan ikinci ve üçüncü açık uçlu muhakeme hataları belirleme testlerinde görülmüştür. Sınıf seviyelerinin genelinde birçok muhakeme hatası, muhakeme eksiği ya da muhakeme boşluğu ilk muhakeme hataları belirleme testine göre ikinci ve üçüncü muhakeme hataları belirleme testlerinde düşüş göstermiştir. Dolayısıyla ispatların yoğun olarak işlendiği derslerde yer verilen sınıf içi uygulamalarının pozitif yönde katkı sağlamıştır.

İspatların yoğun olarak işlendiği derslerde ispat yöntemlerinin doğru kullanılmasına yönelik göstergelerin oluşturduğu ispat yöntemleri boyutunda benzer göstergelerin ön planda olduğu tespit edilmiştir. Bu boyutta farklı derslerde verilen bir önermenin ispatını yapabilmek için en uygun ispat yönteminin belirlenmesine yönelik öğrencilerin tartışmasını sağlama, farklı ispat yöntemlerinin varlığına vurgu yapma ve bir önermenin ispatını birden fazla ispat yöntemi kullanarak yapma göstergelerinin yoğunlukta olduğu belirlenmiştir. Bununla birlikte dersler arasında bu göstergelerin yoğunluklar açısından farklılık gösterdiği görülmüştür. Örneğin bir önermenin ispatını farklı ispat yöntemleri kullanarak yapma Analiz1 dersinde yaklaşık olarak % 17 civarında ortaya çıkarken Sayılar Teorisi dersinde gözlemlenen ders saatleri içerisinde bu göstergelere ait herhangi bir durum veri olarak kaydedilmemiştir. Bu göstergelerin yüksek çıktığı dersler güz döneminde Matematiğin Temelleri ve Analiz1 dersleri, bahar döneminde ise Soyut Matematik ve Analiz 2 dersleri olarak belirlenmiştir.

Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşlukları, ispatların yoğun olarak işlendiği derslerde sınıf içi uygulamalardan etkilenmiştir. Özellikle ikinci ve üçüncü muhakeme hatalarını belirleme testlerinde elde edilen veriler ve öğretmen adayları ile yapılan mülakatlar göz önüne alındığında ispatların yoğun olarak işlendiği derslerde yapılan açıklama ve vurgulamaların etkili olduğu görülmüştür. Ancak öğretmen adaylarının sahip

oldukları muhakeme hatalarının sadece ispata yönelik yapılan derslerde açıklama ve uygulamalara bağlı olmadığı başka faktörlerin de etkili olduğu ortaya çıkmıştır. Bu noktada öğretmen mesleğine yönelik alınan eğitim derslerinin de muhakeme hataları üzerinde etkili olduğu görülmüştür. Dördüncü ve beşinci sınıf seviyelerinde ispata yönelik uygulamalara daha az yer verilirken öğretmen mesleğine yönelik derslere daha çok yer verilmektedir. Buna rağmen bu sınıf seviyelerinde yer alan öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşluklarında ciddi oranda bir azalma olmuştur. Bu durum da öğretmenlik mesleğine yönelik *özel öğretim teknikleri, materyal tasarım, okul deneyimi gibi* eğitim derslerinin etkisi olduğunu göstermektedir. Hem öğretim elemanları ile hem de öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerde bu durum sıklıkla vurgulanmıştır. Benzer şekilde birçok öğretmen adayı da öğretmen mesleğine yönelik eğitim derslerinin doğru bir muhakeme geliştirmenin üzerinde etkisi olduğunu belirtmiştir.

6. 2. Öneriler

Matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinde sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri ve muhakeme boşluklarını belirleme; bu hata, eksik ve boşluklarının gelişimsel olarak nasıl değiştiği; hangilerinin direnç gösterdiği, hangilerinin azaldığı ya da yeni hataların oluşup oluşmadığını incelenmeyi amaçlayan bu çalışmada ayrıca ispatların yoğun olarak işlendiği derslerinin rolü incelenmiştir. Öğretmen adaylarının ispat sürecinde birçok muhakeme hata, eksik veya boşluğuna sahip oldukları belirlenmiştir. Muhakeme hatalarının bir kısmı gelişimsel olarak azalırken bazıları direnç göstermiştir. Bunun yanı sıra ispatlarının yoğun olarak işlendiği derslerdeki sınıf içi uygulama, kullanılan yaklaşımlar bağlamında değerlendirilmesini amaçlayan bu çalışmada, sınıf içi uygulama ve yaklaşımların öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarının azalmasında pozitif yönde katkı sağladığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu bölümde ulaşılan sonuçlar ışığında öneriler sunulmuştur.

6. 2. 1. Araştırma Sonuçlarına Dayalı Öneriler

Matematikselsel bir ispat denince akla sadece soyut kavramlar, kurallar ya da zor anlaşılabilir işlemler gelebilir. Ancak ispat aynı zamanda kendi içinde tutarlı ve anlam bütünlüğü olan ilişkiler, problem çözme, iletişim, muhakeme gibi üst düzey fonksiyonları da içermektedir. Ayrıca birkaç örnekten hareketle daha geniş kümeler hakkında fikir veren, genellemeler sağlayan zihinsel bir süreçtir. Başka bir ifade ile soyutlama, sezgi ve muhakeme gibi kavramların hayat bulduğu bir süreçtir. Dolayısıyla matematiğin temel

bileşenlerinden olan ispatın sahip olduğu rollerinin bilinmesi, anlaşılması veya kurulan ilişkilerinin matematiksel dayanak ve mantıksal boyutunun ortaya çıkarılması gerekmektedir. Bu nedenle ispat, kapsamlı bir süreç olarak ele alınarak bu süreçte ileriye sürülen muhakemeler, stratejiler, yanılgılar ya da zorluklar belirlenmelidir. Böylece bu süreçte ele alınan matematiksel ilişkilerin araştırılması, tartışılması ve genelleştirilmesi gibi durumlar anlam kazanarak öğrencilerin ispatı dolayısıyla matematiği daha rahat öğrenmeleri sağlanacaktır. Başka bir deyişle öğrencilerin ispat sürecinde doğru muhakemeler geliştirmelerine katkısı olacaktır. Bu çalışmanın sonuçları göz önüne alındığında öğretmen adaylarının ispat sürecinde birçok zorlukları yaşadığını ve bu zorluklarla beraber çeşitli muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşluklarına sahip oldukları belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının çoğu üniversite eğitimlerine başlarken ispat anlamda deneyimsiz oldukları, herhangi matematiksel bir ilişkinin ispatını yapmadıkları görülmüştür. Ayrıca ispatları sadece matematiksel bir sonucun doğruluğunu gösterme olarak algılamışlardır. Bundan dolayı verilen önermelerin ispatlarını sadece bir kaç sayısal değerler vererek göstermenin yeterli olacağını düşünmüşlerdir. Bu durum ortaöğretim matematik programlarında ispat, muhakeme, soyutlama, genelleme gibi kazanımlara az yer verildiğini göstermektedir. Bu nedenle ilköğretim ve özellikle de ortaöğretim matematik programlarında matematiksel düşünme, ispat, problem çözme, iletişim ve muhakemeye yönelik kazanımlara daha fazla yer verilerek matematiksel kavramların sınıf ortamında tartışması sağlanmalıdır. Böylece ispat aktif bir süreç olarak alınarak öğrencilerin sorgulama, matematiksel ilişkileri keşif etme, çeşitli stratejiler geliştirme, kendi muhakeme süreçlerinin farkında olma, başkalarının muhakemelerini değerlendirme gibi kazanımlar elde etmelerine fırsat verilmiş olacaktır. Bununla birlikte ortaöğretim matematik programlarında temel matematiksel ispata daha fazla yer verilerek matematiksel bir ispatın hangi fonksiyonlar içerdiği ya da ispat mantığının ne olduğunun öğrenilmesi sağlanmalıdır.

Çalışmanın bir başka sonucu da ortaöğretim matematik programlarında yürütülen ve ispatların yoğun olarak işlendiği derslere yöneliktir. Bu derslerde ispatların işleniş şekli, ispat sürecinde odaklanan durumlar, derslere göre farklılık gösterdiği belirlenmiştir. Bununla birlikte bu derslerde öğretmen adaylarının çeşitli zorluklar yaşadığı ispat mantığını anlamakta güçlük çektikleri gözlemlenmiştir. Bu nedenle öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hataları, muhakeme eksiklikleri veya muhakeme boşluklarının değişmesinde derslerinin çok önemli olduğu ve bu değişimin dersler bazında farklı olduğu görülmüştür. İspatların yoğun olarak işlendiği bazı derslerde geleneksel bir öğretim yaklaşımıyla tanım-teorem-ispata mantığıyla derslerin yapıldığı gözlemlenmiştir. Bu tür derslerde genel olarak öğretmen merkezli bir yaklaşımla ispatlar yapılmaktadır.

Dolayısıyla öğretmen adaylarının sürece dâhil olması sınırlı kalmaktadır. Bu durumda öğretmen adaylarının sahip oldukları muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerinin veya muhakeme boşluklarının ortaya çıkmasına imkan verilmemektedir. Bu nedenle öğretmen adaylarının doğru muhakemeler geliştirmeleri, ispat mantığını anlamaları için ispatlarının yoğun olarak işlendiği derslerde aşağıda verilen durumlara daha fazla yer verilmesinin faydalı olacağı düşünülmektedir.

1. İspatların yoğun olarak işlendiği derslerde öğretmen adaylarının kendi ispatlarını oluşturma ve bunları sunmalarına daha fazla fırsat verilebilir.
2. Öğretmen adaylarının muhakeme süreçlerini açıklamaları konusunda teşvik edilerek sahip oldukları muhakeme hatalarının, muhakeme eksikliklerinin veya muhakeme boşluklarının yansıtılması sağlanabilir.
3. Öğretmen adaylarının birbirlerinin muhakemelerini değerlendirebilmeleri için sınıf içi tartışmaların yapıldığı ortamların oluşturulmasını sağlanabilir.
4. Öğretmen adaylarının, yapılan ispatlarla ilgili sorularına ya da yaptıkları eleştirilerine uygun cevaplar verilerek öğretmen adayları soru sormaya teşvik edilebilir.
5. Oluşturulan ispatların geçerli olup olmadığını tartışmaya açılarak öğretmen adaylarının çeşitli muhakemeler geliştirmeleri sağlanabilir.

Çalışmada elde edilen veriler göz önüne alındığında öğretmen adaylarının birçoğunun matematik dilini uygun kullanamadığı görülmüştür. Öğretmen adayları matematik dilinin eksik veya hatalı kullanılmasına bağlı olarak birçok muhakeme hatası, muhakeme eksikliği veya muhakeme boşluğu yapmışlardır. Bunun için lisans düzeyinde verilen derslerde matematik dilinin doğru kullanılmasına yönelik uygulama, açıklama veya vurgulara daha fazla yer verilmesi gerekmektedir. Çalışmanın sonuçlarına bağlı olarak aşağıdaki önerilerin muhakeme hatalarının azalmasında faydalı olacağı düşünülmektedir.

1. Derslerde matematik dilinin ve terminolojinin doğru ve etkin kullanılmasının önemi vurgulanabilir.
2. Öğretmen adaylarının matematiksel ilişkileri keşfetmelerini sağlama ve başka kavramlarla ilişkilendirme ve matematiğin aksiyomatik yapısına dikkat etmeleri sağlanabilir.
3. İspat sürecinde ispat adımları oluşturulurken, kullanılan önermelerin gerekçeleri; adımlar arasındaki bağlar açıklanarak ispatların bir bütün olarak ele alınıp işlenmesi sağlanabilir.
4. İspatta gereksiz adım veya ifadeler yer verilerek öğretmen adaylarının bunları fark etmeleri sağlanabilir.

5. Matematiksel tanımlara, genel kurallarının geçerli olduğu kümelere dikkat edilerek bunun gerekliliği vurgulanabilir.

Çalışmada birçok öğretmen adayının ispat yöntemlerini doğru kullanmadığı veya ispatı istenilen bir önerme için en uygun ispat yöntemin seçmede güçlükler yaşadığı görülmüştür. Bu nedenle ispatların yoğun olarak işlendiği derslerde ispat yöntemlerine daha çok yer verilmesi gerektiği düşünülmektedir. İspat yöntemlerine bağlı olarak ortaya çıkan muhakeme hatalarının azalmasına pozitif katkı sağlanacağı düşünülen öneriler aşağıda sunulmuştur.

1. İspat sürecinde verilen bir önermenin ispatını yapabilmek için en uygun ispat yönteminin belirlenmesine yönelik öğretmen adaylarının tartışması sağlanabilir.
2. Birden fazla ispat yöntemlerinin kullanılabilirdiği ispatlara daha çok yer verilebilir veya öğretmen adaylarının farklı çözüm yolları geliştirmelerine fırsat verilebilir.
3. Öğretmen adaylarının verilen bir matematiksel ilişkinin ispatı için kullandıkları ispat yöntemlerinin geçerliliği ya da uygunluğunun tartışılması sağlanabilir.
4. Öğretmen adaylarının ispat sürecinde kullandıkları ispat yöntemlerine yönelik “Niçin böyle düşünüyorsunuz?”, “Bu yöntemi niye seçtiniz?”, “Bu sonuca nasıl ulaştınız?”, “Başka yöntemde kullanabilir misiniz?” gibi sorular yöneltilerek farklı ispat yöntemlerinin varlığına dikkat çekilebilir.

6. 2. 2. İleride Yapılabilecek Araştırmalara Yönelik Öneriler

Muhakeme, yaşamın her alanında olduğu gibi matematik öğretme ve öğrenmenin de merkezinde yer alan temel kavramlardan biridir. Matematiksel düşünme, ilişkilendirme, soyut düşünme, sezgi ve iletişim gibi matematiğin temelini oluşturan kavramlar ancak doğru bir muhakeme ile kazandırılabilir. Bu anlamda zihinsel bir alışkanlık olan muhakeme birçok alanda olduğu gibi matematikte özellikle de ispat yapmada tutarlı davranmayı sağlar. Doğru muhakemelerin geliştirilmesi için ilköğretim yıllarından itibaren her kademede öğrencilerin matematiksel ispatları anlayabilme, hipotezlerden mantıksal sonuçlar çıkarabilme, yani doğru muhakemeler kazanmalarına veya çeşitli strateji geliştirmelerine destek olunmalıdır. Bunun için her kademede öğrencilerin kendi muhakeme süreçlerinin farkında olmaları veya başkalarının muhakemelerini değerlendirebilecekleri sınıf içi tartışmaları oluşturularak onların kendi çözümlerini ortaya koymalarına veya ispatlarını oluşturmalarına fırsat veren öğretim modellerini geliştiren çalışmaların yapılması önerilmektedir. Özellikle öğrenciler yetiştirecek olan öğretmen adaylarının ispat ve muhakeme açısından donanımlı olmaları için lisans düzeyinde çalışmalar yapılması önerilmektedir.

7. KAYNAKLAR

- Alcock, L. and Weber, K. (2008). Referential and syntactic approaches to proving: Case studies from a transition-to-proof course. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 7, 101–123.
- Alcock, L. and Inglis, M. (2008). Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 111-129.
- Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: Some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 869-890.
- Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488.
- Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25-37.
- Andrew, L. (2009). Creating a proof error evaluation tool for use in the grading of student-generated "Proofs". *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 19(5), 447-462.
- Antonini, S. and Mariotti, M. A. (2006). *Reasoning in an absurd world: Difficulties with proof by contradiction*. Paper presented at Proceedings of the 30th PME Conference, International Group for the Psychology of Mathematics Education, hangi..
- Arslan, Ç. (2007). İlköğretim öğrencilerinde muhakeme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi. Yayınlanmamış doktora tezi, Uludağ Üniversitesi, Bursa.
- Atwood, P. R. (2001). Learning to construct proof in a first course on mathematical proof. Doctoral dissertation, Western Michigan University, Kalamazoo, Michigan
- Bahtiyari, Ö. A. (2010). 8. sınıf matematik öğretiminde ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkındalığı. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.
- Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N. and Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. III, pp. 907–920). Beijing: Higher Education Press.

- Birinci, K. S. (2010). Matematik öğretmen adaylarının ispatlama performanslarının süreç-nesne ilişkisi açısından incelenmesi. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Retrieved June 22, 2015 <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html>
- Çoban, H. (2010). Öğretmen adaylarının matematiksel muhakeme becerileri ile bilişötesi öğrenme stratejilerini kullanma düzeyleri arasındaki ilişki. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Tokat.
- Dean, E. E. (1996). Teaching the proof process. *College Teaching*, 44(2), 52-55.
- Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove? *Educational Studies in Mathematics*, 38(1/3), 85-109.
- Erdem, E. (2011). İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel ve olasılıksal muhakeme becerilerinin incelenmesi. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Adıyaman Üniversitesi, Adıyaman.
- Erdem, E., Gürbüz, R. ve Duran, H. (2011). Geçmişten günümüze gündelik yaşamda kullanılan matematik üzerine: Teorik değil pratik. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 2(3), 232-246.
- Erdem, E. (2015). Zenginleştirilmiş öğrenme ortamının matematiksel muhakeme ve tutuma etkisi. Yayınlanmamış doktora tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Ev-Çimen, E. (2008). Matematik öğretiminde, bireye "matematiksel güç" kazandırmaya yönelik ortam tasarımı ve buna uygun öğretmen etkinlikleri geliştirilmesi. Yayınlanmamış doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir
- Ferrari, P. L. (2004). Mathematical language and advanced mathematical learning. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp.383-390). Bergen, Norway.
- Flores, A. (2002). How do children know that what they learn in mathematics is true? *Teaching Children Mathematics*, 8(5), 269-274.
- Forman, E. A., Joernes, J. L., Stein, M. K. and Brown, C. A. (1998). You're going to want to find out which and prove it: Collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction*, 8, 527-548.
- Francisco, J. M. and Maher, C. A. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 361-372.

- Frasier, B. J. (2010). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. Unpublished doctoral dissertation, University of Massachusetts Lowell, Massachusetts.
- Generazzo, S. D. (2011). Proof and reasoning in an inquiry-oriented class: The impact of classroom discourse. Unpublished doctoral dissertation, University of New Hampshire, New Hampshire.
- Güven, B., Çelik D. ve Karataş İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi*, 316, 35–45.
- Güven B., Öztürk T. ve Demir E. (2014, Eylül). *Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispat sürecindeki muhakeme hatalarının incelenmesi*. XI. Ulusal Fen ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulan bildiri, Çukurova Üniversitesi, Adana.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5–23.
- Hanna, G. and Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM Mathematics Education*, 40, 345–353. doi: 10.1007/s11858-008-0080-5
- Hanna, G. and Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of mathematical knowledge. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 85-100). New York: Springer.
- Hanna, G., Jahnke, H. N. and Pulte, H. (Eds.). (2010). *Explanation and proof in mathematics: philosophical and educational perspectives*. New York: Springer.
- Harel, G., Selden, A. and Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp.147-172). Sense Publishers, Rotterdam.
- Harel, G. and Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. 3, pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Hartman, J. H. (2001). Teaching metacognitively. In H. J. Hartman (Ed.), *Metacognition in learning and instruction* (pp. 149-172). The Netherlands: Kluwer.
- Healy L. and Hoyles C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics: Technical report on the nationwide survey*. Institute of Education, University of London.
- Herbst, P. and Brach, C. (2006). Proving and doing proofs in high school geometry classes: What is it that is going on for students? *Cognition and Instruction*, 24(1), 73-122.
- Hiebert, J. and Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on*

mathematics teaching and learning (pp. 371-404). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

- İmamoğlu, Y. (2010). Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispata ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi. Yayınlanmamış doktora tezi, Boğaziçi Üniversitesi, İstanbul.
- İskenderoğlu, T. (2010). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları. Yayınlanmamış doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.
- Jahnke, H. N. (2010). The conjoint origin of proof and theoretical physics. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 17-32). New York: Springer.
- Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 53-60.
- Knapp, J. (2006). A framework to examine definition use in proof. *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 15-22.
- Knuth, E. (2002a). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(1), 61-88.
- Knuth, E. J. (2002b). Proof as a tool for learning mathematics. *Mathematics Teacher*, 95(7), 486-490.
- Kramarski, B. (2004). Making sense of graphs: Does metacognitive instruction make a difference on students' mathematical conceptions and alternative conceptions. *Learning and Instruction*, 14, 593-619.
- Kramarski, B. and Zoldan, S. (2008). Using errors as springboards for enhancing mathematical reasoning with three metacognitive approaches. *The Journal of Educational Research*, 102(2), 137-151.
- Lakatos, I. (1961). *Essays in the logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematics discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lee, K. (2011). Students' logical reasoning and mathematical proving of implications. Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University, Michigan.
- Martin, G. and Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 41-51.
- McCrone, S. S. (2005). The development of mathematical discussion: An investigation in a fifth grade classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(2), 111-133.

- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı. Ankara: MEB Yayınları.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.
- Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147-160
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Özer, Ö. ve Arıkan, A. (2002, Eylül). *Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri*. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulan bildiri, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- Öztürk, T. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispatlama becerilerini geliştirmeye yönelik tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi. Yayınlanmamış doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.
- Pilten, P. (2008). Üstbiliş stratejileri öğretiminin ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin matematiksel muhakeme becerilerine etkisi. Yayınlanmamış doktora tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara.
- Pulley, C. A. (2010). Using instruction to investigate the effects of assessing reasoning tasks on students' understanding of proof. Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University, Illinois.
- Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics*, 52, 319–325.
- Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, 7(1), 5-41.
- Recio, A. M. and Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meaning of proof, *Educational Studies in Mathematics*, 48, 83–99.
- Reiss, K., ve Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 34(1), 29-35.
- Ridley, D. S., Schutz, P. A., Glanz, R. S. and Weinstein, C. E. (1992). Selfregulated learning: The interactive influence of metacognitive awareness and goal-setting. *Journal of Experimental Education* 60(4), 293-306.
- Ron, G. and Dreyfus, T. (2004, July). The use of models in teaching proof by mathematical induction. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 113-120). Bergen, Norway.

- Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 105(3), 252-255.
- Sarı, M. (2011). Üniversite öğrencilerinin matematiksel kanıt ile ilgili güçlükleri ve kanıt öğretimi. Yayınlanmamış doktora tezi, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego, CA: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In Alan H. Schoenfeld, (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-69). Hillsdale, NJ, England: Lawrence Erlbaum Associates Inc.
- Schoenfeld, A. H. (2009). Series editor's foreword. In M. L. B. D. A. Stylianou ve E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades* (pp. xii-xvi). New York, NY: Routledge.
- Selden, A. and Selden, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, 29(2), 123-151.
- Selden, A. and Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36.
- Selden, A. and Selden J. (2007a). *Overcoming students' difficulties in learning to understand and construct proofs* (Report No. 2007-1). Cookeville, TN: Tennessee Technological University.
- Selden, A. and Selden, J. (2007b). *Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students' abilities* (Technical Report). Tennessee, USA: Mathematics Department, Tennessee Technological University.
- Selden, J. and Selden, A. (2009). Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students' abilities. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton ve E.J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across grades: A K-16 perspective* (pp. 339-354). New York/Washington, DC: Routledge/National Council of Teachers of Mathematics.
- Selden, J., Selden, A. and McKee, K. (2008). *Improving advanced students proving abilities*. Paper presented at 11th International Congress of Mathematical Education (ICME-11). Monterrey, Mexico.
- Selden, A., McKee, K. and Selden, J. (2008). *The relation between affect and the proving process*. Paper presented at 11th International Congress on Mathematical Education ICME-11, Mexico.
- Selden, A.; McKee, K. and Selden, J. (2010). Affect, behavioural schemas and the proving process. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 199-215.
- Stylianides, A. J. and Stylianides, G. J. (2006). Content knowledge for mathematics teaching: The case of reasoning and proving. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká,

M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 201-208). Prague: PME.

- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. and Philippou, G.N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 145-166.
- Stylianides, A. J. and Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 237-253. doi: 10.1007/s10649-009-9191-3
- Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching*, 127, 28-32.
- Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp: 495-511). New York, NY: Macmillan.
- Tall, D. and Mejia-Ramos, J. P. (2006). The long-term cognitive development of different types of reasoning and proof. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp.137-150). New York: Springer.
- Uğurel, I. (2010). Ortaöğretim matematik programının temel öğeleri çerçevesinde öğrencilerin ispat kavramına yönelik matematiksel bilgilerini nasıl düzenlediklerinin söylem çözümlemesi ile belirlenmesi. Yayınlanmamış doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.
- Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243.
- Umay, A. (2007). *Eski arkadaşımız okul matematiğinin yeni yüzü*. Ankara: Aydan Web T Tesisleri.
- Umay, A. ve Kaf, Y. (2005). Matematikte kusurlu akıl yürütme üzerine bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 188-195.
- VanSpronsen, H. (2008). Proof processes of novice mathematics proof writers. Unpublished doctoral dissertation, The University of Montana, Montana.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101–119.
- Weber, K. (2005). A procedural route toward understanding aspects of proof: Case studies from real analysis. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, 5(4), 469–483.
- Weber, K. (2006). Investigating and teaching the thought processes used to construct proofs. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 6, 197-232.
- Weber, K., Maher, C., Powell, A. and Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from group discussions: Warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics*, 68, 247-261.

- Weber, K. and Alcock, L. (2009). Semantic and syntactic reasoning in the representation system of proof. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across grades: A K-16 perspective* (pp. 323-338). New York/Washington, DC: Routledge/National Council of Teachers of Mathematics.
- Wu Yu, J., Lin, F. and Lee, Y. (2003). Students' understanding of proof by contradiction. *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*, 4, 443-449.
- Yeşildere, S. (2007). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel alan dilini kullanma yeterlikleri. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, 24(2), 61-70.
- Yıldırım, C. (2000). *Matematiksel düşünme*. İstanbul: Remzi Kitabevi.





8. EKLER

Ek 1. Muhakeme Hataları Belirleme Testi 1**SORULAR**

S1: “Herhangi bir n pozitif tam sayısı için $n^2 - 2$ 'nin katı ise $n - 2$ 'nin katıdır.” ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.
S2: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için, $a \leq b$ ise $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ dir. İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.
S3: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n^3 - n$ ifadesinin 3 ile tam bölünebildiğini gösteriniz.
S4: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $ a - b \leq a + b $ eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Ek 1'in devamı

S5: $a, b \in \mathbb{Z}^+$ için $a + b$ tek ise a veya b den sadece biri tektir. İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.
S6: a, b ve c gibi üç tamsayıdan a sayısı, b sayısını ve b sayısı da c sayısını tam olarak bölebilmektedir. a sayısının c sayısını tam olarak bölebildiğini gösteriniz.
S 7: $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, $A \subset X$ ve $B \subset X$ olsun. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.
S8: . “Üç ardışık tam sayının toplamı ortadaki sayının 3 katıdır.” Önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

Yukarıdaki soruları cevaplandırırken düşüncelerinizi ve gerekçelerinizi açık bir şekilde ifade etmeye dikkat ediniz.

BAŞARILAR

Ek 2. Muhakeme Hataları Belirleme Testi 2**SORULAR**

S1: “ Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 tek tam sayı ise, n de tek tam sayıdır.” İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.

S2: a ve $b \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $a > b > 0$ ise $\frac{b+1}{b} > \frac{b}{a}$ dir. Gösteriniz.

S3 : $\forall n \in \mathbb{N}$ için $4^n - 1$ ifadesinin 3 ile tam bölünebildiğini gösteriniz.

S4: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $|a| - |b| \leq |a+b|$ eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Ek 2'nin devamı

<p>S5: $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a \cdot b$ tek sayıdır. Ancak ve ancak a ve b nin her ikisi de tektir. Önermesinin doğruluğunu gösteriniz.</p>
<p>S6: a, b ve c gibi üç doğal sayıdan ; “a sayısı hem b sayısını hem c sayısını tam bölüyorsa a sayısı $b+c$ sayısını tam böler.” İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.</p>
<p>S 7: $f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon, $X \subset B; Y \subset B$ olsun $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ olduğunu gösteriniz.</p>
<p>S8: “Eğer x bir rasyonel sayı ve y bir irrasyonel sayı ise $y - x$ bir irrasyonel sayıdır.” Önermesinin doğruluğunu gösteriniz.</p>

Yukarıdaki soruları cevaplandırırken düşüncelerinizi ve gerekçelerinizi açık bir şekilde ifade etmeye dikkat ediniz.

BAŞARILAR

Ek 3. Muhakeme Hataları Belirleme Testi 3

S1: “Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 çift tam sayı ise, n de çift tam sayıdır.” İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.

S2: m ve $n \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $m > n > 0$ ise $\frac{m}{n} \leq \frac{m+1}{n}$ dir. İfadesinin doğruluğunu Gösteriniz.

S3 : $\forall n \in \mathbb{N}$ için $5^n - 1$ ifadesinin 4 ile tam bölünebildiğini gösteriniz.

S4: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $||a| - |b|| \leq |a + b|$ olduğunu gösteriniz.

Ek 3'ün devamı

S5: $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun, a, b çift sayıdır ancak ve ancak a ve b ' den en az biri çifttir. önermesinin doğruluğunu gösteriniz
S6: a, b, c ve d gibi dört doğal sayıdan ; “ a sayısı b sayısını, c sayısı d sayısını tam bölüyorsa $a.c$ sayısı $b.d$ sayısını tam böler.” ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.
S 7: $f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon, $X \subset B; Y \subset B$ olsun. $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ olduğunu gösteriniz.
S8: “Eğer x bir rasyonel sayı ve y bir irrasyonel sayı ise $y.x$ bir irrasyonel sayıdır.” Önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

Yukarıdaki soruları cevaplandırırken düşüncelerinizi ve gerekçelerinizi açık bir şekilde ifade etmeye dikkat ediniz.

BAŞARILAR

Ek 4. Muhakeme Hatalarını Belirleme Testlerinin Kaynakçası

Sorular	Test Sorusunun Kaynakçası
<p>S1: “ Herhangi bir n pozitif tam sayısı için n^2 tek tam sayı ise, n de tek tam sayıdır.” İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.</p>	<p>(Sarı-Uzun, 2013) (İmamoğlu, 2010) Doktora Tezi (Güler, 2013)- Doktora Tezi</p>
<p>S2: a ve $b \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $a > b > 0$ ise $\frac{a+1}{a} > \frac{a}{b}$ dir. Gösteriniz.</p>	<p>(Balcı, 2006) – Kitap Matematiğin Temelleri Ders notları - 2015</p>
<p>S3 : $\forall n \in \mathbb{N}$ için $4^n - 1$ ifadesinin 3 ile tam bölünebildiğini gösteriniz.</p>	<p>(Bilgiç, 2010) - Kitap (Güler, 2013)- Doktora Tezi (Yılmaz, 2015)-Yüksek Lisans Tezi</p>
<p>S4: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a - b \leq a+b$ eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.</p>	<p>(Balcı, 2006) – Kitap</p>
<p>S5: $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a.b$ tek sayıdır. Ancak ve ancak a ve b nin her ikisi de tektir. Önermesinin doğruluğunu gösteriniz.</p>	<p>(Birinci, 2010)- Yüksek Lisans Tezi</p>
<p>S6: a, b ve c gibi üç doğal sayıdan ; “a sayısı hem b sayısını hem c sayısını tam bölüyorsa a sayısı $b+c$ sayısını tam böler.” İfadesinin doğruluğunu gösteriniz</p>	<p>(Sarı-Uzun, 2013) Doktora Tezi (Pekşen, 2013) Doktora Tezi (Birinci, 2010)- Yüksek Lisans Tezi</p>
<p>S 7: $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon, $X \subset B$; $Y \subset B$ olsun $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ olduğunu gösteriniz</p>	<p>(Taştepe, 2012)- Yüksek Lisans Tezi (Bilgiç, 2010) - Kitap</p>
<p>S8: “Eğer x bir rasyonel sayı ve y bir irrasyonel sayı ise $y - x$ bir irrasyonel sayıdır.” Önermesinin doğruluğunu gösteriniz.</p>	<p>(Sarı-Uzun, 2013) Doktora Tezi (Pekşen, 2013) Doktora Tezi</p>

Ek 5. Muhakeme Hatlarını Belirleme Ölçeğinin Kaynakçası

	<i>Muhakeme Hataları</i>	<i>Muhakeme Eksiklikleri</i>	<i>Muhakeme Boşlukları</i>
H1	Sonuç ile başlama (Selden & Selden, 2003, Pilot Çalışma) E1	Yöntemsel eksiklik(Selden & Selden, 2003; Stylianides et al, 2004; 2007; Antonini & Mariotti, 2007; 2008) B1	I Yazılan ispat adımları ile elde edilen sonuçların uyuşmaması (Selden & Selden, 1995; Weber, 2001; Knapp, 2005; Harel & Sowder, 2007)
H2	Yanlış varsayımlarla başlama (Weber, 2006, Sarı-Uzun, 2013, Pilot Çalışma) E2	İspata nasıl başlayacağına karar verememe veya ispata devam edememe (Dreyfus, 1999; Dubinsky, 2000; Ko & Knuth, 2009; Weber & Alcock, 2009) B2	I Kullanılan önermelerin gerekçelerinin sunulmaması (Selden & Selden, 2003, Pilot Çalışma)
H3	Farklı notasyonlar kullanmayı ispat olarak düşünme (Sarı,2011 Pilot Çalışma) E3	Tanım aralığını dikkate almama (Selden & Selden, 2003, Pilot Çalışma) B3	I Ara aşamaların göz ardı edilmesi (Balacheff, 1988; Bell, 1976; Harel & Sowder, 1998)
H4	Aynı ifade için birden fazla değişkenin kullanılması (Selden ve Selden,2003; VanSpronsen,2008) E4	Matematiksel tanımların yetersiz kullanılması (Weber, 2001; Selden & Selden, 2007a; Pedemonte, 2007) B4	I İspatta gereksiz adımlara veya ifadelere yer verme (Pilot Çalışma)
H5	Aşırı genelleme hataları ((Selden ve Selden,2003; Pilot Çalışma) E5	Değişken tanımlamada eksiklik veya gereksiz değişken kullanımı(Selden & Selden, 2003, Pilot Çalışma)	
H6	Teoremin karşıt tersinin kendisinin mantıksal dengi olduğunun farkına varılamaması (Weber ve Alcock, 2004; Selden & Selden, 2003; Pilot Çalışma) E6	Matematik dilini kullanmada yetersizlik (Epp, 2003; Ferrari, 2004; Baker & Campbell, 2004; Selden & Selden, 2007a)	
H7	Özel bir durumdan elde edilen sonucun ispat olarak kabul edilmesi (Weber, 2001; Selden & Selden, 2003; Pilot Çalışma) E7	İspat yapmada sistematikliğin olmaması (Turğut, Yenilmez, 2013)	
		Tek yönlü inceleme (Pilot Çalışma) E8	

9. ÖZ GEÇMİŞ VE İLETİŞİM BİLGİLERİ

Enes DEMİR, 1982 tarihinde Ağrı/Hamur'da doğdu. Sırasıyla Ekincik Köyü İlköğretim Okulu, Ozanlar YİBO Ortaokulu ve Araklı Anadolu Öğretmen Lisesi'ni okul birincisi olarak tamamladı. 2006 yılında %100 burslu ve birincisi sırada yerleştiği Başkent Üniversitesi Bağlıca Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Öğretmenliği programını 2011 yılında tamamladı. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim dalı Matematik Eğitiminde doktora eğitimine başladı. Araştırmacının yabancı dili İngilizcedir

İLETİŞİM BİLGİLERİ

Adres : Enes DEMİR, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi A.B.D. Trabzon.

E-Posta : enes04demir@hotmail.com

Tel : 0506 696 68 14