İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ANAHTARLANMIŞ DOĞRUSAL SİSTEMLERİN KARARLILIĞININ İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Özkan KARABACAK

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 25 Aralık 2006

Tez Danışmanı :	**Yrd.Doç.Dr. Neslihan Serap ŞENGÖR**
Diğer Jüri Üyeleri	**Prof.Dr. Külmiz ÇEVİK (İ.T.Ü.)**
	Prof.Dr. Leyla GÖREN (İ.T.Ü.)

OCAK 2007

ÖNSÖZ

Dinamik sistemler konusundaki bilgisi ve genel görüşünün yanı sıra bilimsel araştırmayla ilgili yol göstericiliğinden de çokça yararlandığım sevgili hocam Neslihan Serap Şengör'e çok teşekkür ederim. Ayrıca üzerimde çokça emeği geçen hocalarımdan Külmiz Çevik ve Leyla Gören'e sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR

AS : Anahtarlanmış sistem

ADS : Anahtarlanmış doğrusal sistem

İFS : İteratif fonksiyonlar sistemi

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{Z}^{+}$	**:** Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	**:** Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{+}$	**:** Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{n}$	**:** n boyutlu doğrusal vektör uzayI
$\mathbb{R}^{n\times n}$	**:** nxn boyutlu reel değerli matrisler kümesi
$\mathbb{C}^{n\times n}$	**:** nxn boyutlu karmaşık değerli matrisler kümesi
C^{∞}	**:** Sürekli türevlenebilir fonksiyonlar kümesi
$\mathcal{P}$	**:** İndeks kümesi
σ	**:** Anahtarlama işareti
$\mathcal{S}$	**:** Anahtarlama işaretleri kümesi

ANAHTARLANMIŞ DOĞRUSAL SİSTEMLERİN KARARLILIĞININ İNCELENMESİ

ÖZET

Bu çalışmada, bir altsistemler ailesinden ve bu altsistemler arasındaki geçişleri yöneten bir anahtarlama kuralından oluşan anahtarlanmış sistemler genel olarak incelenmiş; ve altsistemler ailesinin her bir üyesinin doğrusal olduğu durumda oluşan anahtarlanmış doğrusal sistemlerin kararlılığına ilişkin literatürde bulunan üç temel problem tanıtılmıştır. Bunlardan keyfi anahtarlama problemi olarak adlandırdığımız birinci problemde anahtarlama işareti ne olursa olsun sistemin kararlı olmasının koşullarını aranır. Kararlılaştırma problemi olarak adlandırdığımız ikinci problemde ise verilmiş bir altsistemler ailesini kararlı kılan bir anahtarlama işaretinin varlığı ve ne olduğu araştırılır. Çalışmamızda bu iki probleme ilişkin birincisinde ortak Lyapunov fonksiyonu bulunmasına, ikincisinde ise altsistemlere ilişkin matrislerin bir Hurwitz konveks kombinasyonunun bulunmasına dayanan literatürde bulunan iki çözüm anlatılmıştır. Uygun anahtarlama işaretleri kümesini bulma problemi olarak adlandırdığımız üçüncü problem ise verilmiş bir altsistemler ailesini kararlı kılan özel anahtarlama işaretleri kümelerini bulma problemidir. Bu probleme ilişkin kendi geliştirdiğimiz bir yaklaşım sunulmuştur. Anahtarlanmış sistemlerin iteratif fonksiyonlar sistemlerine dönüştürülmesine dayanan bu yaklaşım ile anahtarlanmış sistemin kararlı olması için anahtarlama işaretindeki sabit aralıkların minimum uzunluğunun belli bir değerden büyük olmasına dayanan bir yeter koşul verilmiştir. Son olarak elde ettiğimiz sonuçlar iki örnek üzerinden değerlendirilmiş ve elde edilen sonuçların bu konuyla ilgili yapacağımız ileriki çalışmalar konusunda işaret ettiği yönler tartışılmıştır. Özellikle altsistemlere ilişkin matrislerin özvektörlerinin yakınlığına dayalı bir açıklama ile uygun anahtarlama kümesini bulma problemine ilişkin bir çözüm yoluna işaret edilmiştir.

ANALYSIS OF THE STABILITY OF SWITCHED LINEAR SYSTEMS

SUMMARY

In this study, switched systems, which consist of a family of subsystems and a switching rule that controls the switching between the subsystems, are explained generally, and the three problems founded in literature on the stability of switched linear systems, which arise in the case that all the subsystems are linear, are introduced. Among these, the first one called the arbitrary switching problem deals with finding the conditions that results in the stability of the switched system independent of the switching signal. The second one called the stabilizing problem considers how to find a stabilizing switching signal for a given family of subsystems. In the thesis we explained the two approaches to find the solution of these problems which depends on the presence of common Lyapunov function for the former, and on finding a Hurwitz convex combination of the subsystem matrices for the latter. The third problem that we called the problem of finding the proper set of switching signals concerns with some special sets of switching signals forming a stable switched system for a given family of subsystems. We presented our own approach to solve this problem. By the approach of converting a switched system to an equivalent iterated function system, a sufficient condition is presented based on the minimum length of the intervals where the switching signal is constant. Finally, we discuss on some issues for future research that the study points out.

1. GİRİŞ

Bir doğrusal diferansiyel denklemler ya da fark denklemleri takımı ile ifade edilen doğrusal dinamik sistemlerin birçok özelliği günümüzde bilinmektedir. Bu alanda çözülmeyi bekleyen problemlerin varlığına karşılık gelişmiş bir doğrusal sistem kuramı mevcuttur. Öte yandan, uygulamada, doğrusal olmayan problemler önemli bir yer tutmaktadır. Buna karşılık doğrusal olmayan sistem kuramı geliştirilmeye daha açık durumdadır; ancak matematiksel olarak da aynı ölçüde zorluk barındırmaktadır.

Bu zorluk günümüzde sistem kuramcılarının önemli bir kısmını hem uygulamada sıkça karşılaşılan hem de matematiksel olarak doğrusal sistem kuramından yararlanma olanağı sunan doğrusal olmayan sistemlerin özel bir türü ile anahtarlanmış doğrusal sistemler (ADS) ile ilgilenmeye itmiştir. Burada "anahtarlama"dan kasıt, farklı zaman dilimlerinde ya da durum uzayının farklı bölgelerinde farklı doğrusal sistemlerin çalıştırılmasıdır. Dijital teknolojilerin gelişmiş olduğu günümüzde uygulamada bu tür sistemler ile gitgide daha sık karşılaşılmaktadır. Bunun yanı sıra, kontrol teorisinde de anahtarlamalı kontrolör tasarımı fikri ağırlık kazanmıştır.

Tüm bunların sonucunda anahtarlanmış sistem (AS) kuramı alanında kısa zamanda birçok önemli sonuç elde edilmiştir. Kontrolör tasarımında önem teşkil ettiği için AS'lerin kararlılığı başlıca çalışma alanı olmuştur. Bu tezde amacımız, bu geniş çalışma alanının tam bir özetini vermekten ziyade, bu alandaki temel problemleri özetlemek, bu problemlerin çözümlerine ilişkin yaklaşımlardan örnekler vererek okuyucuyu daha kapsamlı bir incelemeye hazırlamak ve ayrıca bahsedilen problemlerden birinin çözümüne ilişkin kendi yaklaşımımızı ve elde ettiğimiz sonuçları sunmaktır.

AS'ler üzerine bir incelemeye başlamadan önce "*Önbilgi*" başlıklı ikinci bölümde lisans seviyesindeki okuyucular için dinamik sistemler üzerine genel bir bilgi vermenin yanı sıra tez içerisinde kullandığımız belli başlı kavram ve teoremleri sunduk. "*Anahtarlanmış Sistemler*" başlıklı üçüncü bölümde ise öncelikle AS'ler ile çok ilişkili olan hibrit sistemlere ve AS'lerin hibrit sistemlerden ne şekilde türediğine değindik. Bu bölümde ayrıca AS'lere ilişkin farklı tanımlardan bahsettik ve bu çalışmada benimsediğimiz tanımı sunduk. Son olarak, AS'lerin diğer bazı sistem türleri ile bir karşılaştırmasını yaparak tanımın anlaşılmasını kolaylaştırmayı amaçladık. "*Anahtarlanmış Sistemlerin Kararlılığı*" isimli dördüncü bölümde ise öncelikle AS'nin denge noktasının kararlılığını tanımladık. Araştırmacılar AS'lerin kararlılığı konusunda başlıca üç tür problem üzerinde durmaktadırlar. Bunları *keyfi anahtarlama problemi*, *kararlılaştırma, problemi*, *uygun anahtarlama işaretleri kümesini bulma problemi* olarak isimlendirerek, her birini, örnekler vererek tanıtmaya çalıştık. Bölüm 4.1'de keyfi anahtarlama probleminin çözümüne ilişkin temel yaklaşımlardan birini, ortak Lyapunov fonksiyonu yaklaşımını tanıttık. Bu yaklaşımın temel teoremlerinden biri olan Teorem 4.2'nin ispatını literatürdekinden farklı bir şekilde verdik. Bölüm 4.2'de kararlılaştırma problemine ilişkin temel yaklaşımlardan biri olan konveks kombinasyon yaklaşımını tanıttık. Son olarak Bölüm 4.3'de uygun anahtarlama işaretleri kümesini bulma problemine ilişkin kendi yaklaşımımızı sunduk ve bulduğumuz sonuçları iki örnek üzerinden değerlendirdik.

2. ÖNBİLGİ

Bu bölümde tez boyunca kullanılan belli başlı matematiksel kavramlar ve teoremler sunulacaktır. Daha çok dinamik sistemler üzerine genel bir bilgiye sahip olmayan okuyucular için yazdığımız bu bölüm sistem kuramı üzerine bir takım temel bilgilerin yanı sıra tezde kullandığımız Campbell-Baker-Hausdorff formülü ve iteratif fonksiyonlar sistemi (İFS) gibi konuları da içermektedir.

2.1 Normlar

$\|\cdot\|$ vektör normu ile 2-normunu, diğer bir deyişle öklit normunu göstereceğiz. Yani, $\mathbf{x} = \left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]^{\mathrm{T}}$ için $\|\mathbf{x}\| = \left(x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2\right)^{1/2}$ olacaktır. Matris normu için de yine aynı gösterilimi kullanacağız ve $\|\mathbf{A}\| = \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|$ olacaktır. Vektör ve matris normlarına ilişkin daha fazla bilgi için [1]'e bakılabilir.

2.2 Kararlılık Tanımları

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f\left(\mathbf{x}(t)\right) \ , \ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ , \ \ t \geq 0 \tag{2.1}$$

diferansiyel denklem takımı ile verilen sürekli zamanlı dinamik sistemi ve varsa bunun $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^*$ şeklindeki bir sabit çözümünü ele alalım. Bu çözüm (2.1)'de yerine koyulduğunda $0 = f\left(\mathbf{x}^*\right)$ sonucunu verir. Bu denklemi sağlayan $\mathbf{x}^*$ değerlerine (2.1) ile verilen dinamik sistemin *denge noktası* denir. Yani $\mathbf{x}^*$ değeri başlangıç durumu olarak alındığında sistemin durumu zaman boyunca hep $\mathbf{x}^*$ noktasında kalacaktır. Ancak daha ilginç ve daha önemli olan soru sistemin bu $\mathbf{x}^*$ denge noktasına yakın bir başlangıç durumu ile başlatılması halinde çözümün zaman ilerledikçe $\mathbf{x}^*$ değerinden uzaklaşıp uzaklaşmayacağıdır. Kararlılık teoremleri genel olarak bu soruya cevap verirler.

(2.1)'ile verilen sistemin denge noktası $\mathbb{R}^n$'den herhangi bir değeri alabilir. Ancak, genellikten ödün vermeden, sistemin denge noktasını $\mathbf{x}^* = [0,0,\ldots,0]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ olarak varsayabiliriz; çünkü $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}$ olduğu durumda $\mathbf{y}(t) \triangleq \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*$ değişken dönüşümü ile denge noktası sıfırda olan $\dot{\mathbf{y}}(t) = g(\mathbf{y}(t))$ sistemi elde edilebilir, burada $g(\mathbf{y}) \triangleq f(\mathbf{y} + \mathbf{x}^*)$'dır.

(2.1) sisteminin $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$'da bir denge noktasına sahip olduğunu varsaydıktan sonra bu denge noktası için aşağıdaki kararlılık tanımlarını verebiliriz.

Tanım 2.1: (2.1) sisteminin tüm çözümleri için her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$, $\forall t > 0$ önermesini geçerli kılan bir $\delta > 0$ sayısı varsa (2.1) sisteminin $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ denge noktası kararlıdır. ■

Tanım 2.2: (2.1) sisteminin $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ denge noktası kararlı değil ise kararsızdır. ■

Tanım 2.3: (2.1) sisteminin tüm çözümleri için $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$ koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı varsa (2.1) sisteminin $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ denge noktası asimptotik kararlıdır. ■

Tanım 2.4: (2.1) sisteminin tüm çözümleri için $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$ ise (2.1) sisteminin $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır. ■

2.3 Lyapunov Kararlılık Teoremleri

Bir denge noktasının kararlı olduğunun ispatlanmasının bir yolu bu denge noktasında sıfır değerini alan ve denge noktasını içeren bir $\mathcal{U}$ açık kümesindeki diğer tüm noktalarda pozitif değerler alan, $\mathcal{U}$ üzerinde tanımlı, skaler bir fonksiyon belirlemek; ve sistemin çözümleri boyunca, yani (2.1)'in çözümü olan herhangi bir $\mathbf{x} : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^n$ için t arttıkça, bu fonksiyonun değerinin azaldığını saptamaktır. Böylece sistemin çözümleri, kullanılan fonksiyon alttan sınırlı olduğundan, fonksiyonun minimum değerini aldığı noktaya, yani $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ denge noktasına yaklaşacaktır. Kararlılık ispatında kullanılan ve yukarıda anlattığımız koşulları ve bazı durumlarda başka ek koşulları da sağlayan bir fonksiyona *Lyapunov fonksiyonu* denir.

Teorem 2.1: [2, s. 114] (2.1) sisteminin $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ denge noktasını içeren bir $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi olsun. $V:\ \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $V \in C^\infty$ şeklinde bir fonksiyon

$$V(\mathbf{0}) = 0 \text{ ve } V(\mathbf{x}) > 0 , \ \mathbf{x} \in \mathcal{D} - \{\mathbf{0}\} \qquad \textbf{(2.2)}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 , \ \mathbf{x} \in \mathcal{D} \qquad \textbf{(2.3)}$$

koşullarını sağlayacak biçimde tanımlanabiliyorsa $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ denge noktası kararlıdır. Dahası,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 , \ \mathbf{x} \in \mathcal{D} - \{\mathbf{0}\} \qquad \textbf{(2.4)}$$

koşulu da sağlanıyorsa $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ denge noktası asimptotik kararlıdır. ■

Lyapunov kararlılık teoremi olarak adlandırılan bu teorem global asimptotik kararlılık üzerine bilgi vermemektedir. Bunun için yine aynı kaynaktan alınan Barbashin-Krasovski teoremini verelim.

Teorem 2.2: [2, s. 124] (2.1) sistemi için $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ denge noktası olsun. $V:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V \in C^\infty$ şeklinde bir fonksiyon

$$V(\mathbf{0}) = 0 \text{ ve } V(\mathbf{x}) > 0 , \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\} \qquad \textbf{(2.5)}$$

$$\|\mathbf{x}\| \to \infty \Rightarrow V(\mathbf{x}) \to \infty \qquad \textbf{(2.6)}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 , \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\} \qquad \textbf{(2.7)}$$

koşullarını sağlayacak şekilde tanımlanabiliyorsa $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır. ■

(2.5) koşulunu sağlayan fonksiyonlara *kesin pozitif*, (2.6) koşulunu sağlayan fonksiyonlara ise *ışınsal sınırsız* denir.

2.4 Doğrusal Sistemlerde Kararlılık

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)\ ,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\ ,\ t \geq 0 \qquad \textbf{(2.8)}$$

şeklinde verilen doğrusal sistemi göz önüne alalım. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ olduğunda $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ koşulunu yalnızca $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ sağladığından sistemin $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$'da tek bir denge noktası vardır. Bu denge noktasının kararlılığı Lyapunov kararlılık teoremleri ile belirlenebildiği gibi doğrudan $\mathbf{A}$ matrisinin özdeğerlerine bakılarak da belirlenebilir.

Teorem 2.3: [2, s. 134] (2.8) sisteminin $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ denge noktası ancak ve ancak $\mathbf{A}$'nın tüm özdeğerleri (λ_i) için $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0$ koşulu ile $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$ ve cebrik katlılığı $q_i \geq 2$ olan özdeğerler için $\mathrm{rank}(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}) = n - q_i$ koşulu sağlanıyorsa kararlıdır. Ayrıca; (2.8) sisteminin $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ denge noktası ancak ve ancak $\mathbf{A}$'nın tüm özdeğerleri (λ_i) için $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ koşulu sağlanıyorsa (global) asimptotik kararlıdır. ■

Tüm özdeğerleri Teorem 2.3'de verilen $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ koşulunu sağlayan matrislere *Hurwitz* matris denir. $\mathbf{A}$ matrisinin Hurwitz olması durumunda (2.8) sistemi asimptotik kararlı olur. Doğrusal sistemler için asimptotik kararlılık ile global asimptotik kararlılık eşdeğerdir.

2.5 Campbell-Baker-Hausdorff formülü

(2.8) sisteminin bir $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}$ başlangıç durumu için çözümü $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{x}_0$ şeklindedir. Burada $e^{\mathbf{X}}$ üstel matris fonksiyonu $e^{\mathbf{X}} = \mathbf{I} + \mathbf{X} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{X}^2 + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}!}\mathbf{X}^3 + \cdots$ şeklinde tanımlıdır. Bu tez boyunca esas olarak ADS'ler inceleneceğinden üstel matris fonksiyonları ve farklı sistemlerin ardı ardına çalışması sonucu açığa çıkan farklı üstel matris fonksiyonlarının çarpımları önemlidir. Aşağıdaki formül bu türden çarpımları basitleştirmek için gereklidir [3].

$$e^{\mathbf{X}} \cdot e^{\mathbf{Y}} = e^{\mathbf{X} + \mathbf{Y} + \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + \frac{1}{12}[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Y}] - \frac{1}{12}[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{X}] + \cdots} \qquad \textbf{(2.9)}$$

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \triangleq \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} - \mathbf{Y} \cdot \mathbf{X} \qquad \textbf{(2.10)}$$

2.6 Ayrık Zamanlı Sistemlerde Kararlılık

Buraya kadar sürekli zamanlı sistemlere ilişkin bazı bilgiler verdik. Bundan sonra ayrık zamanlı sistemlere değineceğiz.

$$\mathbf{x}(k+1) = f\left(\mathbf{x}(k)\right) \ , \ k = 0,1,2,\ldots \qquad \textbf{(2.11)}$$

ayrık zamanlı sistemini ele alalım. $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}$ başlangıç durumu için bu sistemin çözümü $\mathbf{x}(k) = f^k(\mathbf{x}_0)$ şeklindedir. Yani çözüm *f* fonksiyonunun bir $\mathbf{x_0}$ başlangıç noktasına ardı ardına uygulanması ile elde edilen $\mathbf{x}: \mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0), f^2(\mathbf{x}_0), \ldots$ şeklindeki bir dizidir. (2.11) sisteminin varsa $\mathbf{x}: \mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*, \ldots$ şeklindeki bir sabit çözümünü ele alalım. $\mathbf{x}^*$ değerine (2.11)'ün bir *sabit nokta*sı denir. Burada sabit nokta kavramı, sürekli zamanlı sistemlerdeki denge noktası kavramının karşılığıdır. Sabit noktanın kararlılığı da denge noktasının kararlılığına benzer şekilde tanımlanır [4]. $\mathbf{x}^*$ noktası $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ denkleminin çözümü ile bulunur. Bu ise analitik olarak mümkün olmayabilir. Bu durumda böyle bir çözümün yani (2.11) sisteminin sabit noktasının var olup olmadığı, varsa kararlı olup olmadığı önem kazanır. Aşağıdaki teorem ile bu sorulara cevap vermek mümkündür.

Teorem 2.4: (Büzülme dönüşümü teoremi) (2.11) ile verilen ayrık zamanlı sistemi ele alalım. $[0,1)$ aralığındaki bir ρ sayısı için *f* fonksiyonu

$$\left\| f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) \right\| \leq \rho \cdot \left\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \right\| \ , \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \qquad \textbf{(2.12)}$$

koşulunu sağlıyorsa (2.11) sisteminin $\mathbb{R}^n$'de bir ve yalnız bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta asimptotik kararlıdır. ■

2.7 İteratif Fonksiyonlar Sistemi

$\mathcal{X}$ bir metrik uzay olmak üzere, $\mathcal{X}$'den $\mathcal{X}$'e tanımlı, $\rho \in [0,1)$ olmak üzere (2.12) koşulunu sağlayan bir dönüşüme *büzülme dönüşümü* denir. Bir metrik uzay ve onun üzerinde tanımlı N adet büzülme dönüşümünden oluşan sisteme *iteratif fonksiyonlar sistemi* (İFS) denir [5]. Bu sistemdeki fonksiyonları f_i , $i \in \{1,2,\ldots N\}$ şeklinde gösterirsek, sistemin $\mathbf{x}_0$ başlangıç durumu için bir çözümü p, $\mathbb{Z}^+$'dan $\{1, 2, \ldots N\}$'e herhangi bir fonksiyon olmak üzere, $\mathbf{x}(k) = \left(\prod_{m=1}^{k} f_{p(m)} \right) \cdot \mathbf{x}_0$ şeklindedir.

3. ANAHTARLANMIŞ SİSTEMLER

Bu bölümde AS'lerle benzerlik taşıyan hibrit sistemlere değineceğiz ve AS'lerin hibrit sistemlerden nasıl türetildiğini açıklayıp AS'ler ve ADS'lerin matematiksel tanımını sunacağız. Son olarak AS'ler ile diğer sistem türleri arasındaki ilişkileri kısaca irdeleyeceğiz.

3.1 Hibrit Sistemler

Biri sürekli, diğeri ayrık dinamikleri ifade etmek üzere birbirleri ile etkileşim halindeki iki yapıdan oluşan sistemlere *hibrit sistemler* denir. Burada "dinamikler" den kastımız bir kurala bağlı olarak değişmekte olan bir takım büyüklüklerin değişim sürecidir.

"Sürekli dinamik" ile ifade edilen, değişimin diferansiyel denklemler ya da fark denklemleri ile belirlendiği süreçlerdir. Bu türden süreçleri oluşturan yapılara değişimin diferansiyel denklemler ile belirlenmesi durumunda *sürekli zamanlı dinamik sistemler*, değişimin fark denklemleri ile belirlenmesi durumunda ise *ayrık zamanlı dinamik sistemler* denir.

"Ayrık dinamikler" ile ifade edilen ise, değişimin birbirleri ile ilişkisiz olan ve en genel halde bir dizi ile verilen durum ya da olaylara bağlı olarak belirlendiği süreçlerdir. Bu türden süreçleri oluşturan yapılara *ayrık olay sistemleri* denir.

O halde hibrit sistemler, sürekli ya da ayrık zamanlı dinamik sistemler ile ayrık olay sistemlerinin etkileşim halinde bir arada bulunduğu sistemlerdir. Hibrit sistemlerin ilk ortaya atılışına ilişkin tarih 1960'ların ortalarına kadar getirilebilir [6]. Sayısal teknolojilerin gelişmiş olduğu günümüzde, mühendislik uygulamalarında ve özellikle kontrol sistemlerinin tasarımında karşılaşılan birçok sürecin hibrit sistemler aracılığıyla modellenmesi mümkündür. Bu süreçlerdeki fiziksel olayların sürekli ya da ayrık zamanlı dinamik sistemler aracılığıyla; bilgisayarlı kontrol sistemleri gibi, doğal olmayan, insan yapısı düzeneklerin ise ayrık olay sistemleri ile modellenmesi yoluyla hibrit sistemler elde edilebilir. Bir örnek olarak [7]'den aldığımız bir otomobil sistemini inceleyelim.

Bir otomobilin hareketinin sürekli dinamiğine ilişkin basit bir model aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.1}$$

$$\dot{x}_2 = f\left(a, q\right) \tag{3.2}$$

Burada otomobilin hareketi (3.1) ve (3.2) diferansiyel denklemleri ile verilen bir sürekli zamanlı dinamik sistem ile modellenmiştir. x_1 otomobilin konumunu, x_2 ise hızını ifade etmektedirler. $a \geq 0$ gaz girişidir. q ise vites konumunu ifade eden ve $\{1,2,3,4,5,-1,0\}$ kümesinden değerler alabilen bir büyüklüktür. Otomatik vitesli arabalarda q büyüklüğünün de başka bir sistem tarafından, özel olarak söylenirse bir ayrık olay sistemi tarafından, belirlenebileceği açıktır. Bu ayrık olay sistemi, yukarıda açık bir şekilde tanımlanan sürekli zamanlı dinamik sistemin durumlarına bağlı olmalıdır. Öte yandan q'nun değeri, sürekli zamanlı dinamik sistemin davranışlarını değiştirecek, böylece otomobil hareketinin sürekli dinamiğini belirleyecektir. Örneğin $q = -1$ iken f fonksiyonu negatif ve a'ya göre azalan, $q = 0$ iken negatif ve a'dan bağımsız olmalıdır. Pozitif q değerleri için ise f fonksiyonu yeterince büyük a'lar için pozitif ve q'ya göre azalan olmalıdır.

Hibrit sistemlerin matematiksel tanımları literatürde çeşitli şekillerde yapılmıştır [7-11]. Bu tezin kapsamı açısından aşağıdaki tanım yeterli olacaktır:

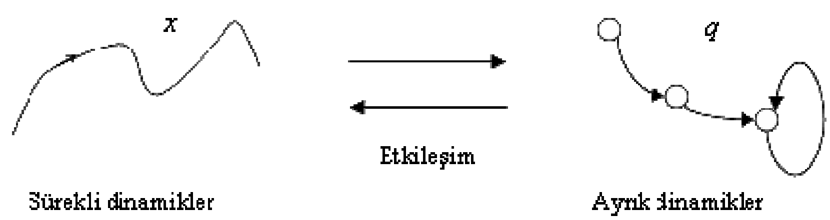
Tanım 3.1: $\mathrm{X} = \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ sürekli durum uzayı, $\mathrm{Q} = \{1, \ldots, \mathrm{N}\}$ ayrık durum uzayı olmak üzere

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}(t), t\right) \tag{3.3}$$

$$\mathbf{q}(t) = v\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}\left(t^{-}\right), t\right) \tag{3.4}$$

denklemleri ile ifade edilen sisteme hibrit sistem denir. ■

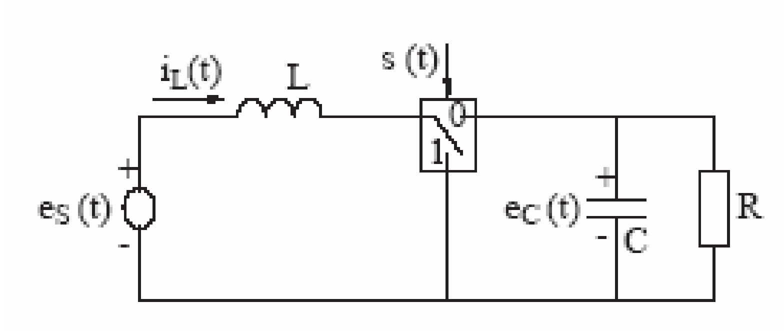
Burada $\mathbf{x} : \mathbb{R}^{+} \cup \{0\} \to \mathrm{X}$ sürekli durumun zamanla değişimini, $\mathbf{q} : \mathbb{R}^{+} \cup \{0\} \to \mathrm{Q}$ ise ayrık durumun zamanla değişimini ifade eden fonksiyonlardır. (3.4) denkleminin sağ tarafındaki $\mathbf{q}(t^{-}) = \lim_{\hat{t} \to t^{-}} \mathbf{q}(\hat{t})$ soldan limiti $\mathbf{q}$ fonksiyonunun sağdan sürekli olacağına işaret ediyor. Burada (3.3) denklemi sürekli zamanlı dinamik sistemi, (3.4) denklemi ise ayrık olay sistemini ifade eder. (3.3) denkleminin sağ tarafındaki $\mathbf{q}(t)$ ve (3.4) denkleminin sağ tarafındaki $\mathbf{x}(t)$ ifadeleri iki sistemin birbirlerini etkilediklerini gösteriyor (bkz. Şekil 3.1).



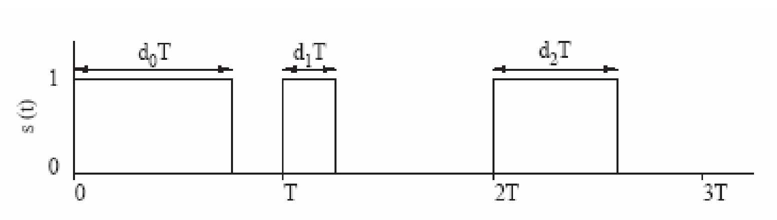
Şekil 3.1: Bir hibrit sistem ([7]'deki Şekil 1'den tekrar üretildi.)

3.2 Anahtarlanmış Sistemlerin Tanımı ve Diğer Sistem Türleri ile Karşılaştırılması

Hibrit sistemler mühendislikteki çeşitli disiplinler tarafından incelenmektedir. Bunun sonucunda hibrit sistemlere farklı yaklaşımlar ortaya çıkmıştır. Bilgisayar bilimcileri tarafından benimsenen yaklaşım, sistemin ayrık dinamiğine yönelmek iken, sistem ve kontrol teorisiyle ilgilenen araştırmacılar ise tam tersi bir yaklaşımı benimsemişler, ayrık olay sistemi tarafından bir şekilde üretilmiş olan $\mathbf{q}$ işareti ile anahtarlanan sistemin sürekli dinamiği ile ilgilenmişlerdir [7]. Böylece, yani hibrit sistemlerin ayrık dinamiklerindeki detayları ihmal edip bunun yerine bu dinamikler tarafından üretilebilecek tüm anahtarlama işaretlerini göz önüne alarak elde edilen sistemlere *anahtarlanmış sistemler* (AS) denilmektedir [7]. AS'ler, altsistemlerden oluşan bir aile ile bu altsistemler arasındaki geçişleri yöneten bir anahtarlama kuralından oluşur. Ailedeki altsistemlerin her birinin doğrusal olması durumunda sisteme *anahtarlanmış doğrusal sistem* (ADS) denir. AS'lere örnek olarak [12]'de ele alınmış olan *darbe genlik modülatörü ile sürülen yükselten çevirici* 'yi inceleyelim:



Şekil 3.2: Yükselten Çevirici [12]



Şekil 3.3: Modülatör tarafından üretilen bir işaret [12]

Şekilde gösterilmeyen bir *darbe genlik modülatörü* tarafından üretilen $s(t)$ işareti ile Şekil 3.2'deki devre anahtarlanmaktadır. Örnek bir $s(t)$ işareti Şekil 3.3'de verilmiştir. Bu şekilde de görüldüğü gibi, $s(t)$ işaretleri, her T uzunluklu zaman dilimi içerisinde bir süre boyunca $s(t)=1$, geri kalan süre boyunca $s(t)=0$ olan işaretlerdir. $s(t)=0$ iken devrenin davranışı

$$\begin{aligned} \dot{e}_C(t) &= -\frac{1}{R\cdot C}\cdot e_C(t)+i_L(t) \\ \dot{i}_L(t) &= -\frac{1}{L}\cdot e_C(t) \end{aligned} \qquad \textbf{(3.5)}$$

denklemleri ile belirlenen bir sürekli zamanlı dinamik sistem ile modellenir, $s(t)=1$ için ise

$$\begin{aligned} \dot{e}_C(t) &= -\frac{1}{R\cdot C}\cdot e_C(t) \\ \dot{i}_L(t) &= \frac{1}{L}\cdot e_S(t) \end{aligned} \qquad \textbf{(3.6)}$$

denklemleri ile belirlenen bir sürekli zamanlı dinamik sistem oluşur. Böylece (3.5) ve (3.6) ile verilen bir altsistemler ailesinden ve bu altsistemler arasındaki geçişleri yöneten bir anahtarlama kuralından oluşan bir AS elde edilir.

Aşağıda AS'lerin matematiksel formülasyonunu ve diğer sistem türleri ile karşılaştırılmasını büyük ölçüde [13]'ü izleyerek vereceğiz.

3.2.1 Anahtarlanmış Sistemlerin Tanımı

Literatürde hibrit sistemler konusunda farklı yaklaşımlar olduğu gibi AS'lerin tanımı konusunda da farklı yaklaşımlar bulunmaktadır. Belli bir amaca uygun anahtarlama işaretinin bulunmasına önem veren kontrol temelli bir yaklaşım ile AS'ler aşağıdaki gibi tanımlanır [7,14,15]:

$\mathcal{P}$ bir indeks kümesi olmak üzere bir $\{f_p,\ p\in\mathcal{P}\}$ $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^n$'e fonksiyonlar ailesi verilmiş olsun.

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=f_p(\mathbf{x}(t))\ ,\ \ p\in\mathcal{P}\ ,\ \ t\geq 0 \qquad \textbf{(3.7)}$$

şeklinde tanımlanan sisteme *anahtarlanmış sistem* (AS) denir. p'nin alacağı değerleri; anahtarlama işareti olarak isimlendirilen, parça parça sabit ve sonlu zaman aralıklarında sonlu sayıda süreksizlik noktası içeren $\sigma:\ [0,\infty)\rightarrow\mathcal{P}$ fonksiyonu belirler.

Bu tanımda anahtarlama işaretinin ne olacağı belirsiz bırakılmıştır. Sistem bu haliyle değer kümesi $\mathcal{P}$ olan her anahtarlama işaretine sahip olabilir gibi gözükmektedir. Bu şekilde tanımlanan sistem açık (nonautonomous) sistem özelliği gösterir. Anahtarlama işareti sistemin girişi olarak görülebilir.

Sistem temelli bir yaklaşım ile AS'ler kapalı sistemler olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır [13,16,17]. Bu tezde AS'lerin kararlılık özelliklerinin incelenmesi sebebiyle daha bütünleşik olan bu tanım benimsenmiştir.

Tanım 3.2: $\mathcal{P}$ bir indeks kümesi olmak üzere bir $\{f_p,\ p\in\mathcal{P}\}$ $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^n$'e fonksiyonlar ailesi verilmiş olsun. Parça parça sabit ve sonlu zaman aralıklarında sonlu sayıda süreksizlik içeren $\sigma: [0,\infty) \to \mathcal{P}$ anahtarlama işaretlerinden oluşan bir $\mathcal{S}$ kümesi verilmiş olsun.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f_\sigma(\mathbf{x}(t)) \ , \ \sigma \in \mathcal{S} \ , \ t \geq 0 \qquad \textbf{(3.8)}$$

şeklinde tanımlanan sisteme *anahtarlanmış sistem* (AS) denir. ■

Burada $\{f_p, \ p \in \mathcal{P}\}$'yi *altsistemler ailesi*, bu ailenin her bir üyesini *altsistem* ve $\mathcal{S}$ kümesini *anahtarlama işaretleri kümesi* olarak isimlendireceğiz. Tanım 3.2'ye göre bir altsistemler ailesi ve bir anahtarlama işaretleri kümesi bir AS tanımlar. Altsistemler ailesinin her bir üyesinin doğrusal olması durumunda oluşan sisteme ise *anahtarlanmış doğrusal sistem* (ADS) denir.

Tanım 3.3: $\mathcal{P}$ bir indeks kümesi olmak üzere bir $\{\mathbf{A}_p \in \mathbb{R}^{\mathrm{nxn}}, \ p \in \mathcal{P}\}$ matris ailesi ve parça parça sabit ve sonlu zaman aralıklarında sonlu sayıda süreksizlik içeren $\sigma: [0,\infty) \to \mathcal{P}$ anahtarlama işaretlerinden oluşan bir $\mathcal{S}$ kümesi verilmiş olsun.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_\sigma \cdot \mathbf{x}(t) \quad , \quad \sigma \in \mathcal{S} \quad , \quad t \geq 0 \qquad \textbf{(3.9)}$$

şeklinde tanımlanan sisteme *anahtarlanmış doğrusal sistem* (ADS) denir. ■

$\{\mathbf{A}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ p \in \mathcal{P}\}$ matris ailesine her bir matrisin bir sürekli zamanlı dinamik sistem tanımlaması sebebiyle *altsistemler ailesi* diyeceğiz.

(3.8) ile verilen AS'nin bir çözümü $(\mathbf{x}, \sigma)$ ikilisi ile tanımlanır; öyle ki, $\sigma \in \mathcal{S}$'dir ve $\mathbf{x}: [0,\infty) \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ fonksiyonu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f_{\sigma(t)}(\mathbf{x}(t)) \quad , \quad t \geq 0 \qquad \textbf{(3.10)}$$

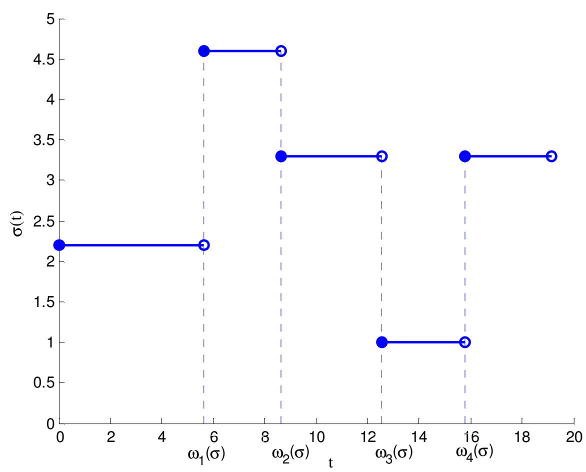
şeklindeki zamanla değişen sistemin bir çözümüdür.

Anahtarlama işaretinin sistemin durumuna bağlı olduğu halleri de göz önüne almak gerekebilir. Bu durumda $\mathcal{S}$ izin verilen $(\mathbf{x}, \sigma)$ çözüm-anahtarlama işareti ikililerinin kümesini belirtmek üzere (3.8) ve (3.9)'da $\sigma \in \mathcal{S}$ yerine $(\mathbf{x}, \sigma) \in \mathcal{S}$ yazılmalıdır.

3.2.2 Anahtarlama İşareti ve Çeşitli Anahtarlama İşaretleri Kümeleri

Şekil 3.4'de görüldüğü gibi bir anahtarlama işareti, parça parça sabit, sağdan sürekli ve sonlu zaman aralıklarında sonlu sayıda süreksizlik içeren bir fonksiyondur. Bu özelliklere sahip mümkün tüm fonksiyonların oluşturduğu kümeye $S_{\text{tüm}}$ diyelim. $\omega_i\colon S_{\text{tüm}} \to \mathbb{R}^+$ bir anahtarlama işaretinin i' inci süreksizlik noktasını veren bir fonksiyon olsun (bkz. Şekil 3.4). Uygunluk açısından $\omega_0 \equiv 0$ olarak tanımlayalım. $\Delta_i\colon S_{\text{tüm}} \to \mathbb{R}^+$ bir anahtarlama işaretinin i' inci sabit parçasının uzunluğunu veren bir fonksiyon olsun. Yani;

$$\Delta_i(\sigma) = \omega_i(\sigma) - \omega_{i-1}(\sigma) \ , \ i = 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(3.11)}$$



Şekil 3.4: Bir anahtarlama işareti

Sıkça kullanacağımız anahtarlama işaretleri kümelerinden biri de $S_{\text{bekleme}}(\tau)$ ile göstereceğimiz ardışık süreksizlik noktaları arasındaki mesafenin belli bir sayıdan büyük olduğu işaretler kümesidir.

$$S_{\text{bekleme}}(\tau) = \left\{ \sigma \in S_{\text{tüm}} \,\middle|\, \Delta_i(\sigma) > \tau \ , \ i = 1, 2, 3, \ldots \right\} \qquad \textbf{(3.12)}$$

Buraya kadar yalnızca zamana bağlı olarak değişen anahtarlama işaretlerini göz önüne aldık. Öte yandan bazı örneklerde anahtarlama işaretinin sistemin durumuna bağlı olarak değiştiği haller de göz önüne alınabilir. Yalnızca sistemin durumuna bağlı olarak değişen anahtarlama işaretleri kümesini aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz. Öncelikle durum uzayının bir $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_p : p \in \mathcal{P}\}$ bölmelemesini göz önüne alalım; öyle ki, $\bigcup_{p\in\mathcal{P}} \mathcal{X}_p = \mathbb{R}^n$ 'dir. Bu bölmeleme için tanımlanan

$$\mathcal{S}_{\text{bölmeleme}}(\mathcal{X}) = \left\{(x,\sigma) \in \mathcal{S}_{\text{tüm}} \,\middle|\, x(t) \in \mathcal{X}_{\sigma(t)} \quad \forall \mathrm{t} \in \mathbb{R}^n\right\} \qquad \textbf{(3.13)}$$

kümesi yalnızca duruma bağlı olarak değişen anahtarlama işaretlerini içerir.

3.2.3 Anahtarlanmış Sistemler ile Diğer Sistem Türlerinin Karşılaştırılması

AS'ler ile başka üç tür sistem benzer özellikler taşımaktadır. Bunlar hibrit sistemler, zamanla değişen sistemler ve süreksiz sistemlerdir. Hatta bazı özel hallerde AS'ler bu üç türden biri ile tamamen aynı olmaktadır. Bu sebeple, aşağıda, AS'lerin bu üç sistem türü ile ilişkisini sırayla ele alacağız.

Hibrit Sistemler ile Anahtarlanmış Sistemlerin Karşılaştırılması

Bölüm 3.1'de bahsedildiği gibi hibrit sistemler sürekli ve ayrık dinamiklerin etkileşim halinde birleşmeleriyle oluşmaktadır. AS'ler de ise sürekli dinamikler ön plandadır. Ayrık olay sisteminin ayrıntılarıyla ilgilenilmektense bu sistemin üretebileceği ve sürekli dinamikleri etkileyen tüm işaretler göz önüne alınır. Bu işaretler tarafından sürekli sistem anahtarlanacaktır. Hibrit sistemleri analiz etmenin bir yolu onları bu şekilde AS'lere dönüştürmektir [13]. Bu durumda, ayrık olay sisteminin ayrıntıları göz ardı edildiği için AS'nin çözümleri hibrit sistemin çözümlerinden daha fazla sayıda olacaktır; ama hibrit sistemin her çözümünü içerecektir. Bu sebeple, elde edilen AS'nin tüm çözümlerinin sahip olduğu bir takım özellikler hibrit sistemin çözümleri için de geçerli olacaktır. Öte yandan AS'lerin analizi daha kolay yapılabilmektedir.

Zamanla Değişen Sistemler ile Anahtarlanmış Sistemlerin Karşılaştırılması

Belli bir σ anahtarlama işareti için (3.8) ile verilen bir sistem (3.10) denklemi ile ifade edilebilir ve bu da $\dot{\mathbf{x}}(t) = f\left(\mathbf{x}(t), t\right)$ şeklinde bir zamanla değişen sistem tanımlar. Öyleyse tek bir anahtarlama işareti göz önüne alınırsa AS ile zamanla değişen sistem tamamıyla aynı nesneyi ifade eder. Ancak Tanım 3.2'ye göre AS bir

$\mathcal{S}$ anahtarlama işaretleri kümesi ile tanımlanır. Bu, birden fazla anahtarlama işaretini göz önüne alacağımız durumları da belirtir ki; bir AS'yi zamanla değişen sistemden farklı kılan da bu durumlardır. Bir zamanla değişen sistemin çözümleri yalnızca başlangıç durumları ile parametrelenirken, bir AS'nin çözümleri hem başlangıç durumu hem de anahtarlama işareti ile parametrelenir. Bu ayrım, sistemin tüm çözümlerinin birlikte sahip oldukları kararlılık, yakınsaklık gibi özellikleri incelerken önem kazanır.

Süreksiz Sistemler ile Anahtarlanmış Sistemlerin Karşılaştırılması

Bir süreksiz sistem aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_{p_1}(x) & , \quad x \in \mathcal{X}_{p_1} \\ f_{p_2}(x) & , \quad x \in \mathcal{X}_{p_2} \\ \vdots & \quad \vdots \qquad \vdots \end{cases} \tag{3.14}$$

Burada $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_p : p \in \mathcal{P}\}$ ile durum uzayının ayrık bir bölmelenmesini gösteriyoruz. O halde süreksiz sistemleri AS'lerin bir türü olarak görmek mümkündür. Bunun için yapmamız gereken anahtarlama işaretini duruma bağlı olarak belirlemektir. $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{bölmeleme}}(\mathcal{X})$ için AS ile (3.14) ile verilen süreksiz sistem tamamıyla aynı nesneyi ifade etmektedirler. Ancak burada dikkat edilmesi gereken nokta bu tür sistemlerin her zaman bir çözüme sahip olmayabileceğidir [13].

4. ANAHTARLANMIŞ SİSTEMLERİN KARARLILIĞI

Önceki bölümde bahsedildiği gibi (3.8) ile verilen AS için tanımlanan özellikler S anahtarlama işaretleri kümesindeki tüm anahtarlama işaretleri için geçerli olan özeliklerdir. Bir AS'nin kararlılığı da bu çerçevede tanımlanmıştır. Bu tez boyunca aynı bir denge noktasına sahip altsistemlerden oluşan AS'ler incelenecektir. Her bir altsistemin farklı denge noktalarına sahip olduğu AS'ler bu çalışmanın konusunun dışında tutulmuştur. Bu sebeple her bir altsistemin sıfırda bir denge noktasına sahip olduğu varsayımı altında aşağıdaki tanımlar verilmiştir.

Tanım 4.1: Verilen herhangi bir $\delta > 0$ sayısına karşılık, (3.8) sisteminin tüm çözümleri için $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \gamma \|x(0)\|$ önermesini geçerli kılan bir γ sayısı bulunabiliyorsa (3.8) sistemi kararlıdır. ■

Tanım 4.2: (3.8) sistemi kararlı değilse kararsızdır. ■

Tanım 4.3: (3.8) sisteminin tüm çözümleri için $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$ önermesini geçerli kılan bir $\delta > 0$ sayısı varsa (3.8) sistemi asimptotik kararlıdır. ■

Tanım 4.4: (3.8) sisteminin tüm çözümleri için $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$ koşulu sağlanıyorsa (3.8) sistemi global asimptotik kararlıdır. ■

Tanım 4.5: (3.8) sisteminin tüm çözümleri için $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \gamma \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \|x(0)\|$ önermesini geçerli kılan bir $(\delta > 0, \gamma, \beta > 0)$ üçlüsü varsa (3.8) sistemi üstel kararlıdır. ■

Tanım 4.6: Verilen herhangi bir $\delta > 0$ sayısına karşılık, (3.8) sisteminin tüm çözümleri için $\|x(0)\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| \leq \gamma \cdot e^{-\beta \cdot t} \|x(0)\|$ önermesini geçerli kılan bir $(\gamma, \beta > 0)$ ikilisi bulunabiliyorsa (3.8) sistemi global üstel kararlıdır. ■

Yukarıda verilen tanımlar, genel olarak sistem teorisi ile ilgili kitaplarda verilen tanımlar ile örtüşmektedir [2]. Kararlılık, asimptotik kararlılık ve üstel kararlılık tanımları dinamik sistemin çözümlerinin, sırasıyla, denge noktası civarında kalması, denge noktasına doğru yakınsaması ve denge noktasına doğru üstel bir hızla yakınsamasına işaret etmektedirler. AS'ler için verilen bu tanımların klasik tanımlardan tek farkı burada anahtarlama işaretleri kümesindeki her anahtarlama işareti için geçerli olmasıdır.

AS'lerin kararlılık analizinde literatürde üç tip problem ile karşılaşılmaktadır [18]. Aşağıda bu problemleri kısaca anlattıktan sonra, altbölümlerde her bir probleme ilişkin çözümlerden daha uzunca bahsedeceğiz.

Keyfi Anahtarlama Problemi

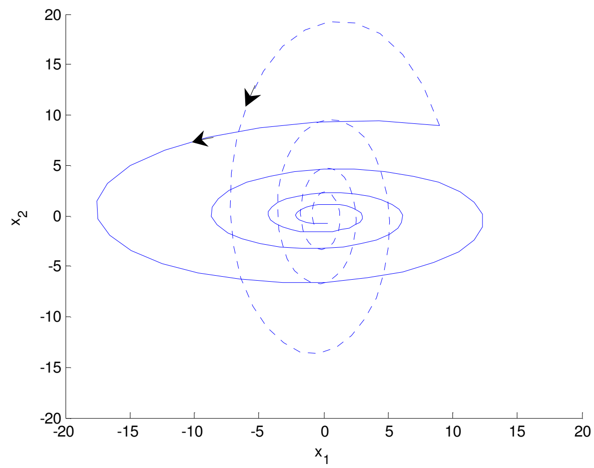
Uygulamada karşılaşılan anahtarlama işaretlerinin bir kısmında anahtarlama düzeneği çok yüksek hızlarda çalışabilmektedir. Bu sebeple hangi sistemlerin keyfi anahtarlama durumunda kararlı olduğu problemi ile ilgilenilmiştir. Diğer bir deyişle (3.8) sisteminin $S = S_{\text{tüm}}$ için kararlılığı incelenmiştir. $S_{\text{tüm}}$ kümesinin $\sigma(t) \equiv p$ tipindeki anahtarlama işaretlerini de içermesi sebebiyle bu sistemin kararlı olması için öncelikle her bir altsistemin kararlı olması gerektiği açıktır. Öyleyse bu problem çerçevesinde kararlı altsistemlerden oluşan hangi ailelerin keyfi anahtarlama altında kararlı olacağı incelenir. Bu problemin apaçık bir çözümü olmadığını görmek için aşağıdaki karşı örneği inceleyelim:

Örnek 1:

$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & -5 \\ 1 & -0.3 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & -1 \\ 5 & -0.3 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_\sigma \cdot \mathbf{x}\ ,\ \ \sigma\colon [0,\infty) \to \{1,2\}\ ,\ \ \sigma \in S \qquad \textbf{(4.1)}$$

ile verilmiş bir AS'yi göz önüne alalım. Her iki matrisin de köklerinin reel kısmı negatiftir, dolayısıyla iki altsistem de kararlıdır. Sistemlerin birer yörüngesi Şekil 4.1'de gösterilmiştir.

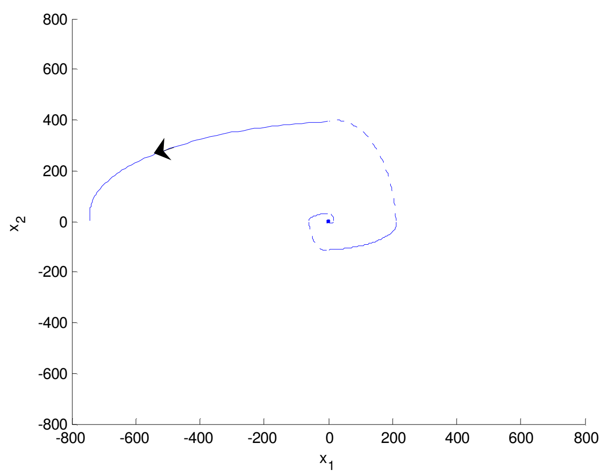


Şekil 4.1: Örnek 1'e ilişkin altsistemlerin birer yörüngesi (düz çizgi birinci altsisteme, noktalı çizgi ise ikinci altsisteme ilişkin çözümleri göstermektedir.)

Altsistemlerin yörüngeleri kararlı oldukları halde,

$$\sigma_1(t) = \begin{cases} 1 & , \quad x_1 \cdot x_2 < 0 \\ 2 & , \quad x_1 \cdot x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

şeklinde duruma bağlı bir anahtarlama işareti ile sistem anahtarlandığında AS'nin çözümü kararsız olmaktadır (bkz. Şekil 4.2).



Şekil 4.2: σ_1 anahtarlama işareti için Örnek 1'deki sistemin bir çözümü

Kararlılaştırma Problemi

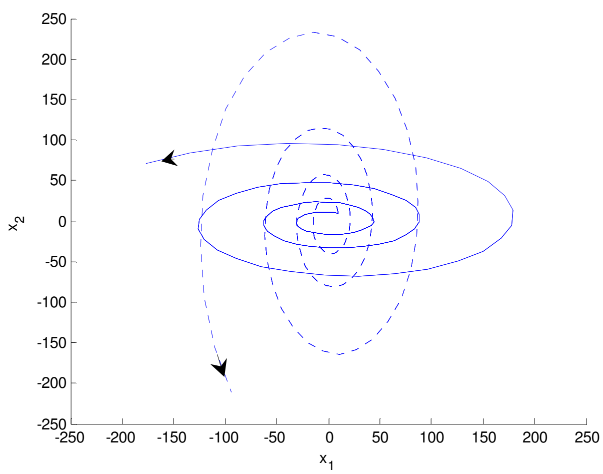
Literatürdeki çalışmaların önemli bir kısmında da verilmiş bir altsistemler ailesi için AS'yi kararlı kılan anahtarlama işaretinin bulunmasına çalışılmıştır. Diğer bir deyişle (3.8) sisteminin hangi tek elemanlı $\mathcal{S}$ kümeleri için kararlı olduğu sorusuna cevap aranmıştır. Altsistemler ailesinin üyelerinden birinin $\left(f_p\right)$ kararlı olması durumunda bu problemin apaçık bir çözümünün $\sigma(t) \equiv p$ olduğu basitçe görülebilir. Bu sebeple, kararlılaştırma problemi ile ilgilenen araştırmacılar, her bir altsistemin kararsız olduğunu varsaymışlardır. Bu probleme ilişkin aşağıdaki örnek, kararsız altsistemlerin uygun anahtarlama ile kararlı çözümlere sahip olmasına ilişkindir.

Örnek 2:

$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & -5 \\ 1 & 0.3 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & -1 \\ 5 & 0.3 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_\sigma \cdot \mathbf{x}\ ,\ \ \sigma\colon [0,\infty) \to \{1,2\}\ ,\ \ \sigma \in \mathcal{S} \qquad \textbf{(4.3)}$$

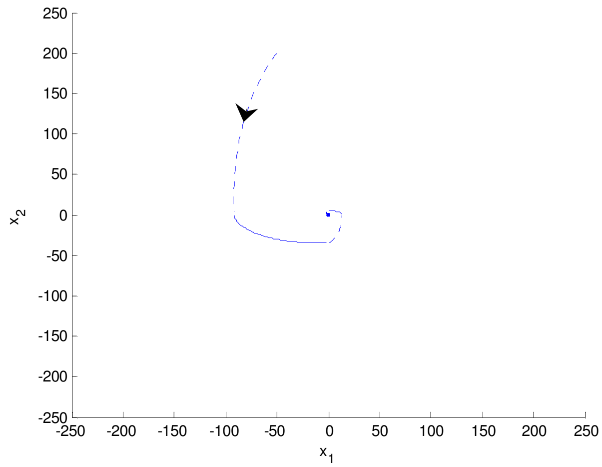
ile verilen AS'yi göz önüne alalım. Her iki matrisin de köklerinin reel kısmı pozitiftir, dolayısıyla iki altsistem de kararsızdır. Sistemlerin birer yörüngesi Şekil 4.3'de gösterilmiştir.



Şekil 4.3: Örnek 2'e ilişkin altsistemlerin birer yörüngesi (düz çizgi birinci altsisteme, noktalı çizgi ise ikinci altsisteme ilişkin çözümleri göstermektedir.)

$$\sigma_2(t) = \begin{cases} 1 & , \quad x_1 \cdot x_2 \geq 0 \\ 2 & , \quad x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

şeklinde duruma bağlı bir anahtarlama işareti ile sistem anahtarlandığında AS'nin çözümü kararlı olmaktadır (bkz. Şekil 4.4).



Şekil 4.4: σ_2 anahtarlama işareti için Örnek 2'deki sistemin çözümü

Uygun Anahtarlama İşaretleri Kümesini Bulma Problemi

Tüm anahtarlama işaretleri için olmasa da belli bir takım özellikleri sağlayan anahtarlama işaretleri için kararlı olan AS'lerin var olabileceği görülmüştür. Bu durumda verilmiş bir altsistemler ailesi için hangi S anahtarlama işaretleri kümelerinin bir kararlı AS oluşturacağı problemi ile ilgilenilmiştir. Genel olarak ilgilenilen S anahtarlama işaretleri kümelerinin $\sigma(t) \equiv p$ şeklindeki sabit fonksiyonları içermesi sebebiyle bir önceki problemde olduğu gibi bu problemde de her bir altsistemin kararlı olduğu kabul edilmektedir. Bu çalışmanın özgün kısmı olan Bölüm 4.3'de bu probleme farklı bir yaklaşım ile çözüm getirilmeye çalışılacaktır. Bu problemi daha iyi anlamak için keyfi anahtarlama altında kararlı olmayan bir AS'yi inceleyelim:

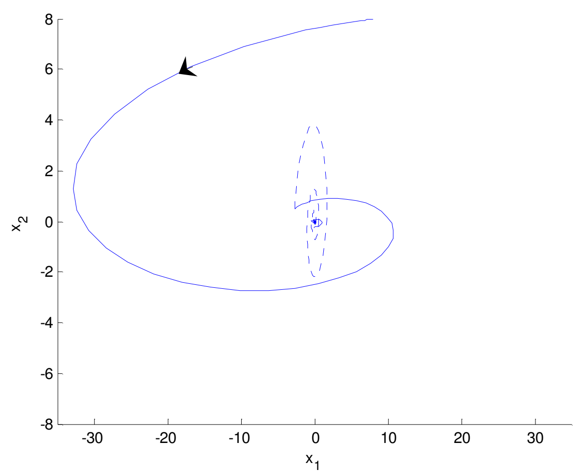
Örnek 3:

Örnek 1'de verilmiş olan AS'yi göz önüne alalım. Her iki altsisteme ilişkin matrislerin köklerinin reel kısımları negatiftir, dolayısıyla iki altsistem de kararlıdır.

Ancak bu sistemlerin bazı anahtarlama işaretleri için kararsız çözüm verebileceği Örnek 1'de gösterilmiştir. Öte yandan, Anahtarlama işaretinin her iki sistemde de yeterince beklemesi durumunda sistemin kararlı olacağı açıktır. Örneğin, her iki altsistem için de sistemin durumunun ilgili yörüngede en az bir tur dönmesine müsaade edecek bir anahtarlama işareti için AS kararlı çözümlere sahiptir. Bu özelliğe sahip

$$\sigma_3(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le \mathrm{mod}_{20}(t) < 10 \\ 2 & , \quad 10 \le \mathrm{mod}_{20}(t) < 20 \end{cases} \tag{4.5}$$

işareti ile anahtarlanan sistemin bir çözümü Şekil 4.5'da gösterilmiştir. Burada $\mathrm{mod}_x(y)$ ile x sayısının y sayısına bölümünden kalanı gösteriyoruz. Bu anahtarlama işareti için çözümlerin kararlı olduğunu söyleyebiliriz. Dikkat edilirse $\sigma_3 \in S_{\text{bekleme}}(9.9)$'dur ve her $\sigma \in S_{\text{bekleme}}(10)$ için sistemin asimptotik kararlı olduğunu söyleyebiliriz. Diğer bir deyişle (4.1) ile verilen sistem $S = S_{\text{bekleme}}(10)$ için asimptotik kararlıdır.



Şekil 4.5: σ_3 anahtarlama işareti için Örnek 1'deki sistemin çözümü

4.1 Keyfi Anahtarlama Problemi

Yukarıda da bahsedildiği gibi bu problemin net ifadesi (3.8) sisteminin $S = S_{\text{tüm}}$ için kararlı olup olmadığı sorusu ile verilebilir. Yani incelenecek olan

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f_\sigma(\mathbf{x}(t)) \ , \ \sigma \in S_{\text{tüm}} \ , \ t \geq 0 \qquad \textbf{(4.6)}$$

sisteminin kararlılığıdır, ya da özel olarak

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_\sigma \cdot \mathbf{x}(t) \ , \ \sigma \in S_{\text{tüm}} \ , \ t \geq 0 \qquad \textbf{(4.7)}$$

ADS'si incelenecektir. Kararlılık için sistemin altsistemler ailesi üzerine koşul getirilecektir.

Dinamik sistemlerin kararlılığının Lyapunov fonksiyonu aracılığıyla nasıl incelendiği Bölüm 2.3'de verilmiştir. Benzer bir yöntem AS'ler için de kullanılabilir. Bunun için AS'nin her bir altsisteminin aynı bir Lyapunov fonksiyonuna sahip olduğu durum incelenir. Burada kararlılığa ilişkin teoremi vermeden önce ortak Lyapunov fonksiyonu kavramını tanımlayalım.

Tanım 4.7: $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir ($V \in C^\infty$), kesin pozitif ve ışınsal sınırsız (bkz. Bölüm 2.3) bir fonksiyon olsun. $\{f_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ , p \in \mathcal{P}\}$ altsistemler ailesi için $\frac{dV}{d\mathbf{x}} f_p(\mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, p \in \mathcal{P}$ koşulunu sağlayan sürekli, kesin pozitif bir $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa V'ye $\{f_p \ , p \in \mathcal{P}\}$ altsistemler ailesinin ortak Lyapunov fonksiyonu denir. ■

Teorem 4.1: (4.6) ile verilen sistemin altsistemler ailesinin bir ortak Lyapunov fonksiyonu varsa (4.6) sistemi global asimptotik kararlıdır. ■

Teorem 4.1'de ortak Lyapunov fonksiyonunun varlığı bir yeter koşul olarak verilmektedir. Bu koşulun sağlanmadığı durumlarda sistemin kararlı olup olmayacağı sorulabilir. [7, Teorem 2.2]'de global asimptotik kararlı AS'lerin bazı süreklilik ve sınırlılık koşulları altında ortak Lyapunov fonksiyonuna sahip olduğu belirtilmiştir. Öyleyse (4.6) sisteminin kararlılığı ortak Lyapunov fonksiyonunun varlığına eşdeğer kabul edilebilir. Bu sebeple, araştırmacılar, son yıllarda özellikle doğrusal sistemler için hangi altsistemler ailelerinin ortak Lyapunov fonksiyonuna sahip olduğu ile ilgilenmişlerdir [19-22]. Bu konuda bildiğimiz ilk çalışma [19] $\{\mathbf{A}_p \ , p \in \mathcal{P}\}$ doğrusal altsistemler ailesinin üyesi olan matrislerin çarpmaya göre değişme özelliği olmasını yeter koşul olarak vermektedir.

Teorem 4.2: (4.7) ile verilen ADS için $\mathcal{P}$ sonlu elemanlı bir küme, $\left\{\mathbf{A}_p \in \mathbb{R}^{n\times n},\ p\in\mathcal{P}\right\}$ matrislerinin her biri Hurwitz ve her $\left(\mathbf{A}_i,\mathbf{A}_j\right)$, $i,j\in\mathcal{P}$ ikilisi için $\mathbf{A}_i\cdot\mathbf{A}_j=\mathbf{A}_j\cdot\mathbf{A}_i$ özelliği geçerli ise (4.7) sistemi global asimptotik kararlıdır. ■

Bu teoremin ispatı [19]'da bir ortak Lyapunov fonksiyonu oluşturmak suretiyle verilmiştir. Bizse burada kararlılık tanımından yola çıkarak ispatı vereceğiz.

İspat: $\left\{\mathbf{A}_p \in \mathbb{R}^{n\times n},\ p\in\mathcal{P}\right\}$ matrislerinin her biri Hurwitz olduğuna göre her $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}_p\cdot\mathbf{x}$, $p\in\mathcal{P}$ sistemi global asimptotik kararlıdır. O halde, Tanım 4.4'den

$$\lim_{t\to\infty}\left\|e^{\mathbf{A}_p\cdot t}\cdot\mathbf{x}_0\right\|=0\ ,\ \ \forall\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n\ ,\ \ \forall p\in\mathcal{P} \qquad \textbf{(4.8)}$$

olur. Herhangi bir anahtarlama işareti için (4.7)'nin bir çözümü

$$\mathbf{x}(t)=e^{\left(t-\omega_{i-1}(\sigma)\right)\cdot\mathbf{A}_{\sigma\left(\omega_{i-1}(\sigma)\right)}}\cdot\left(\prod_{k=1}^{i-1}e^{\Delta_k(\sigma)\cdot\mathbf{A}_{\sigma\left(\omega_{k-1}(\sigma)\right)}}\right)\cdot\mathbf{x}(0)\ ,\ \ \mathrm{t}\in\left[\omega_{i-1}(\sigma),\omega_i(\sigma)\right)\ ,\ \ i\in\mathbb{Z}^+ \qquad \textbf{(4.9)}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{A}_i\cdot\mathbf{A}_j=\mathbf{A}_j\cdot\mathbf{A}_i$, $\forall i,j\in\mathcal{P}$ olduğundan Campbell-Baker-Hausdorff formülü (bkz. Bölüm 2.5) ile $e^{\mathbf{A}_i}\cdot e^{\mathbf{A}_j}=e^{\mathbf{A}_i+\mathbf{A}_j}$'ye ulaşılır. Öyleyse, her altsisteme ilişkin çarpanları bir araya getirerek, çözümü,

$$\mathbf{x}(t)=e^{\left(t-\omega_{i-1}(\sigma)\right)\cdot\mathbf{A}_{\sigma\left(\omega_{i-1}(\sigma)\right)}}\cdot\left(\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(e^{\left(\mathbf{A}_{\sigma\left(\omega_{k-1}(\sigma)\right)}\cdot\left(\sum_{\substack{k\\ \sigma\left(\omega_{k-1}(\sigma)\right)=p}}\left(\Delta_k(\sigma)\right)\right)\right)}\right)\right)\cdot\mathbf{x}(0) \qquad \textbf{(4.10)}$$

şeklinde yazabiliriz.

Anahtarlama işaretinin t süresine kadar p değerini aldığı tüm aralıkların toplam uzunluğunu $\Lambda_p(t)\triangleq\begin{cases} t-\max\limits_{\omega_i(\sigma)\le t}\omega_i(\sigma)+\sum\limits_{\substack{k\\ \sigma\left(\omega_{k-1}(\sigma)\right)=p}}\left(\Delta_k(\sigma)\right) & ,\quad \sigma(t)=p\\ \sum\limits_{\substack{k\\ \sigma\left(\omega_{k-1}(\sigma)\right)=p}}\left(\Delta_k(\sigma)\right) & ,\quad \sigma(t)\neq p\end{cases}$ sayıları ile tanımlayalım. Öyleyse (4.10)'u daha sade bir şekilde $\mathbf{x}(t)=\left(\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(e^{\left(\mathbf{A}_p\cdot\Lambda_p(t)\right)}\right)\right)\cdot\mathbf{x}(0)$ olarak yazabiliriz. Bu ifade sonlu sayıda çarpan içerir; çünkü $\mathcal{P}$ sonlu elemanlıdır.

$$0\le\left\|\mathbf{x}(t)\right\|=\left\|\left(\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(e^{\left(\mathbf{A}_p\cdot\Lambda_p(t)\right)}\right)\right)\cdot\mathbf{x}(0)\right\|\le\left(\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(\left\|e^{\left(\mathbf{A}_p\cdot\Lambda_p(t)\right)}\right\|\right)\right)\cdot\mathbf{x}(0) \qquad \textbf{(4.11)}$$

$$\begin{aligned}0\le\lim_{t\to\infty}\left\|\mathbf{x}(t)\right\|&=\lim_{t\to\infty}\left\|\left(\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(e^{\left(\mathbf{A}_p\cdot\Lambda_p(t)\right)}\right)\right)\cdot\mathbf{x}(0)\right\|\\&\le\lim_{t\to\infty}\left(\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(\left\|e^{\left(\mathbf{A}_p\cdot\Lambda_p(t)\right)}\right\|\right)\right)\cdot\mathbf{x}(0)\\&=\left(\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(\lim_{t\to\infty}\left\|e^{\left(\mathbf{A}_p\cdot\Lambda_p(t)\right)}\right\|\right)\right)\cdot\mathbf{x}(0)\end{aligned} \qquad \textbf{(4.12)}$$

t sonsuza giderken Λ_p ifadelerinden en az birinin sonsuza gideceği açıktır. O halde (4.8)'i de kullanırsak, (4.12)'in sağ tarafındaki ifadede sonlu sayıdaki $\lim_{t\to\infty}\left\|e^{\left(\mathbf{A}_{\sigma(\omega_{k-1}(\sigma))}\cdot\Lambda_p(t)\right)}\right\|$ çarpanlarından en az biri sıfır ve diğerleri de sonlu büyüklükteki sayılar olduğunu görürüz. Öyleyse (4.12) eşitsizliğinin hem sağ tarafı hem de sol tarafı sıfırdır, dolayısıyla $\lim_{t\to\infty}\left\|\mathbf{x}(t)\right\|=0$ sonucuna varılır, yani (4.7) ile verilen AS asimptotik kararlıdır. ■

Teorem 4.2 ile asimptotik kararlılık için yeter koşul verildi. Ancak bu koşulun gerek koşul olmadığını görmek zor değildir. Örneğin,

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.13)}$$

matrislerinden oluşan

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}_\sigma\cdot\mathbf{x}(t)\ ,\ \sigma\in\mathcal{S}_{\text{tüm}}\ ,\ \mathcal{P}=\{1,2\}\ ,\ t\ge0 \qquad \textbf{(4.14)}$$

sistemini göz önüne alalım. $\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_2\neq\mathbf{A}_2\cdot\mathbf{A}_1$'dir; ancak $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ için $V(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{x}$ bir ortak Lyapunov fonksiyonudur, dolayısıyla sistem global asimptotik kararlıdır. O halde Teorem 4.2 ile verilen koşulun dar bir koşul olduğu açıkça görülmektedir. (4.7) sisteminin ortak Lyapunov fonksiyonunun varlığına ilişkin daha geniş bir koşul [21]'da verilmiştir. Bu çalışmada verilen koşul Hurwitz matrislerden oluşan altsistemler ailesinin *eşüçgenleştirilebilir* olmasıdır, yani altsistemler ailesi için her $\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{A}_p\cdot\mathbf{V}$ matrisini üst (alt) üçgen forma dönüştürecek bir $\mathbf{V}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ matrisinin bulunabiliyor olmasıdır [23]. Çarpmaya göre değişme özelliğine sahip olan matrislerin eşüçgenleştirilebilir olduğu bilinmektedir [24]. O halde eşüçgenleştirilebilirliğe dayanan bu koşul Teorem 4.2 ile verilen koşulu kapsamaktadır.

Bir matris ailesinin ortak Lyapunov fonksiyonunun varlığına ilişkin bir başka koşul ise [20]'de verilmiştir. Daha dar bir kümeyi kapsamasına karşın kontrol edilmesi daha kolay olan bu koşul matris ailesinin oluşturduğu Lie cebrinin çözülebilir olmasına dayanmaktadır [3].

4.2 Kararlılaştırma Problemi

Yukarıda da bahsedildiği gibi bu problem, AS'lerin Tanım 3.2 kapsamında ele alınması durumunda, AS'yi kararlı kılan tek elemanlı $\mathcal{S}$ kümelerini bulma problemidir. Burada anahtarlama işaretinin özel bir tipte olması aranmamaktadır; önemli olan AS'yi kararlı kılan herhangi bir anahtarlama işaretini bulmaktır. Bu problem için de literatürde ele alınmış birçok yaklaşımdan bahsedilebilir [7,8,14,25-27]. Biz burada önemli bulduğumuz ve anlatılması daha kolay olan, yalnızca zamana bağlı bir anahtarlama işareti ile sistemi kararlı kılmayı sağlayan konveks kombinasyon yaklaşımından bahsedeceğiz [8,14].

Konveks Kombinasyon Yaklaşımı

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}_\sigma\cdot\mathbf{x}(t)\quad,\quad \sigma\in\mathcal{S}\quad,\quad t\geq 0 \qquad \textbf{(4.15)}$$

sisteminin bir $\sigma\in\mathcal{S}$ için çözümü

$$\mathbf{x}(t)=e^{t-t_i(\sigma)}\cdot\left(\prod_{k=1}^{i-1}e^{\Delta_i(\sigma)\cdot\mathbf{A}_i}\right)\cdot\mathbf{x}(0)\ ,\ \mathrm{t}\in\left(t_{i-1}(\sigma),t_i(\sigma)\right)\ ,\ i=1,2,... \qquad \textbf{(4.16)}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bu yaklaşımın ana teoremini sunmadan önce ortalama sistem kavramını tanımlayalım:

Tanım 4.8: $T>0$, $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$, $\sum_{k=1}^{m}\alpha_i=1$ koşulunu sağlayan pozitif reel sayılar ve

$$\mathbf{A}(t)=\begin{cases}\mathbf{A}_1 & , \quad t\in\left[0,\alpha_1\cdot T\right) \\ \mathbf{A}_2 & , \quad t\in\left[\alpha_1\cdot T,\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\cdot T\right) \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \mathbf{A}_m & , \quad t\in\left[\left(\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_1\right)\right)\end{cases} \tag{4.17}$$

olmak üzere

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{x}(t)\ ,\ t\geq 0 \tag{4.18}$$

periyodik doğrusal sistemini göz önüne alalım. Bu sistem için tanımlanan

$$\dot{x}(t)=\mathbf{A}_0\cdot x(t)\ ,\ \mathbf{A}_0=\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{m}}\alpha_i\cdot\mathbf{A}_i\ ,\ t\geq 0 \tag{4.19}$$

sistemine (4.18)'in ortalama sistemi denir. ■

[14, Lemma 2.10]'a göre

$$\lim_{T\to 0^+} e^{\alpha_m\cdot\mathbf{A}_m\cdot T}\cdot e^{\alpha_{m-1}\cdot\mathbf{A}_{m-1}\cdot T}\cdots e^{\alpha_1\cdot\mathbf{A}_1\cdot T}=e^{\mathbf{A}_0\cdot T} \tag{4.20}$$

olduğundan (4.18) ile (4.19)'nin çözümleri yeterince küçük T'ler için birbirlerine istenildiği kadar yakın olabilecektir. Bu da bizi yeterince küçük T'ler için iki sistemin üstel kararlılıklarının eşdeğer olduğu sonucuna götürür.

Teorem 4.3: (4.19) ortalama sistemi üstel kararlı ise öyle bir $\rho>0$ sayısı bulunabilir ki her $T<\rho$ için (4.18) üstel kararlı olur. ■

Öyleyse verilmiş bir $\left\{\mathbf{A}_p\ ,p\in\mathcal{P}\right\}$ ailesi için bu ailenin üyelerinin $\mathbf{A}_0=\alpha_1\cdot\mathbf{A}_1+\alpha_2\cdot\mathbf{A}_2+\cdots+\alpha_m\cdot\mathbf{A}_m$, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1$ şeklinde Hurwitz bir konveks kombinasyonu varsa yeterince küçük T'ler için $\Delta_i(\sigma) = \alpha_{\text{mod}(i,m)} \cdot T$ koşulunu sağlayan σ periyodik anahtarlama işaretleri ile AS'yi kararlı kılmak mümkün olacaktır.

Teorem 4.4: Verilmiş bir $\{\mathbf{A}_p \ , p \in \mathcal{P}\}$ matris ailesi için bu ailenin üyelerinin Hurwitz konveks kombinasyonunun varlığı,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_\sigma \cdot \mathbf{x}(t) \quad , \quad \sigma \in \mathcal{S} \quad , \quad t \geq 0 \qquad \textbf{(4.21)}$$

sistemini üstel kararlı kılan $\mathcal{S}$ anahtarlama işaretlerinin kümelerinin varlığına eşdeğerdir. ■

Sonuç olarak, bir Hurwitz konveks kombinasyonu olan matris aileleri için sistemi kararlılaştıran bir periyodik anahtarlama işaretini T'yi yeterince küçük alarak oluşturabiliriz.

4.3 Uygun Anahtarlama İşaretleri Kümesini Bulma Problemi

Büzülme dönüşüm teoremleri, yani Banach sabit nokta teoremi ve benzerleri, ayrık zamanlı dinamik sistemlerin kararlı denge noktalarının varlığına ilişkin koşulları verirler [28]. Bu teoremlerden yararlanarak; zamanla değişmeyen, sürekli zamanlı, doğrusal sistemlerin de kararlılığı gösterilebilir. Bunun için bir yol, sürekli zamanlı sistemin davranışına benzer bir şekilde davranan ayrık zamanlı sistemi yaratmaktır. Bu bölümde ADS'lerin kararlılığının, bu tür sistemleri iteratif fonksiyonlar sistemlerine (İFS) [5] dönüştürmek yoluyla incelenebileceği gösterilecektir. Ayrıca; AS'lerin kararlılığı için anahtarlama işareti üzerine koşullar verilecektir. Böylece hangi özel $\mathcal{S}$ kümeleri için (3.8) sisteminin kararlı olduğu problemine ilişkin bir çözüm sunulacaktır.

Sürekli Zamanlı Sistemlerin Ayrık Zamanlı Sistemlere Dönüştürülmesi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) \ , \ \mathbf{x}: \ \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^n \ , \ t \geq 0 \qquad \textbf{(4.22)}$$

sürekli zamanlı sistemini ele alalım. Bir $\mathbf{x}(0)=\mathbf{a}$ başlangıç durumu için (4.22)'in bir çözümüne $\mathbf{x_a}$ diyelim. $\mathbf{F}_\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau \geq 0$ fonksiyonlarını $\mathbf{F}_\tau(\mathbf{a})=\mathbf{x_a}=e^{\mathbf{A}\cdot\tau}\cdot\mathbf{a}$ şeklinde tanımlayalım. Burada $\mathbf{F}_\tau$ fonksiyonu, argümanını (4.22) sisteminde başlangıç durumu olarak koyar ve değer olarak (4.22)'nin bu başlangıç durumu için τ süre boyunca çalışmasından sonraki durumu verir. $\mathbf{F}_\tau$, $\tau \geq 0$ fonksiyonları aracılığıyla

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{F}_\tau(\mathbf{x}(k)) \ , \ \mathbf{x}: \ \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^n \ , \ k=0,1,2,... \qquad \textbf{(4.23)}$$

ayrık zamanlı sistemlerini tanımlayalım. (4.22) sistemi ile (4.23) sisteminin çözümlerinin örtüşeceği ve dolayısıyla kararlılık özelliklerinin de aynı olacağı açıktır.

Böylelikle büzülme dönüşümü teoremlerinden yararlanarak ayrık zamanlı sistemler üzerine elde edilecek sonuçlar, sürekli zamanlı sistemler hakkında da bilgi verecektir. Öte yandan bu yaklaşımın uygulamada gereksiz olduğu açıktır zira ayrık zamanlı sistemi elde etmek için sürekli zamanlı sistem çözülmelidir ve sürekli zamanlı sistemin çözümü kararlılığa ilişkin bilgi vermeye yetecektir. Ancak bu yaklaşım ADS'lerin hangi anahtarlama işaretleri için kararlı olduklarına ilişkin bilgi verebilir.

Anahtarlanmış Doğrusal Sistemlerin İteratif Fonksiyonlar Sistemlerine Dönüştürülmesi

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}_\sigma \cdot \mathbf{x}(t) \ , \ \sigma \in S_{\text{bekleme}}(\tau_{\text{bekleme}}) \ , \ t \geq 0 \qquad \textbf{(4.24)}$$

ile verilen bir AS'yi göz önüne alalım. Her $\mathbf{A}_p$, $p \in \mathcal{P}$ için $\left\{F_\tau \middle| F_\tau(\mathbf{a})=e^{\mathbf{A}_p\cdot\tau}\cdot\mathbf{a} \ , \ \tau > \tau_{\text{bekleme}}\right\}$ fonksiyonlar kümesini düşünelim. $\sigma(t) \equiv p$ olan her zaman aralığında, $\mathbf{A}_p$ yerine, τ' bu zaman aralığının boyu olmak üzere, bu kümeden bir $F_{\tau'}(\mathbf{a})=e^{\mathbf{A}_p\cdot\tau'}\cdot\mathbf{a}$ fonksiyonu karşılık gelir; öyle ki bu aralıkta $\dot{x}(t)=\mathbf{A}_p \cdot x(t)$ sürekli zamanlı sistemi yerine $\mathbf{x}(k+1)=F_{\tau'}(\mathbf{x}(k))$ ayrık zamanlı sisteminin yalnızca bir adım çalıştığı düşünülebilir. Böylece (4.24) yerine

$$\left\{F_\tau \middle| F_\tau(\mathbf{a}) = e^{\mathbf{A}_p \cdot \tau} \cdot \mathbf{a}\ ,\ p \in \mathcal{P}\ ,\ \ \tau > \tau_{\text{bekleme}}\right\} \qquad \textbf{(4.25)}$$

ile verilen bir İFS karşı düşer. Bir İFS tanımı gereği büzülme dönüşümlerinden oluşmalıdır [9]. AS'lerin hangi anahtarlama işaretleri kümeleri için kararlı olduğu problemi incelenirken, genelde, her $\mathbf{A}_p$ sisteminin asimptotik kararlı olduğu kabul edilir. Ancak $\mathbf{A}_p$'nin özdeğerlerinin karmaşık düzlemin sol yarısında olması $\mathbf{A}_p$'ye ilişkin $F_{\tau'}(\mathbf{a}) = e^{\mathbf{A}_p \cdot \tau'} \cdot \mathbf{a}$ fonksiyonunun her $\tau' \geq 0$ için büzülme dönüşümü olduğu anlamına gelmez.

Anahtarlanmış Sistemi Kararlı Kılan Anahtarlama İşaretinin Bulunması

(4.24) ile verilen sistemin (4.25) ile verilen sisteme denk olduğunu gösterdik. Öte yandan (4.25)'in bir İFS olması için her F_τ fonksiyonunun bir büzülme dönüşümü olması gerekmektedir. Bu koşul sağlandığında (4.25) ile verilen sistemin tek bir kararlı sabit noktaya sahip olacağı [9]'daki Teorem 3.2'den kolaylıkla görülebilir. Bu teoreme göre bir İFS'nin nihai kümesi İFS'yi oluşturan fonksiyonların nihai kümelerinin birleşimidir. Burada ise İFS'yi oluşturan her fonksiyonun tek bir nihai kümesi vardır, o da sıfırdır. Böylelikle (4.25) ile verilen sistemin kararlılığı için her F_τ fonksiyonunun büzülme dönüşümü olduğu gösterilmelidir. Öyleyse her $F_\tau(\mathbf{a}) = e^{\mathbf{A}_p \cdot \tau} \cdot \mathbf{a}$ için

$$\left\| F_\tau(\mathbf{x}) - F_\tau(\mathbf{y}) \right\| < \rho \cdot \left\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \right\|\ ,\ \rho < 1\ ,\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \qquad \textbf{(4.26)}$$

koşulu sağlanmalıdır. O halde;

$$\left\| F_\tau(\mathbf{x}) - F_\tau(\mathbf{y}) \right\| = \left\| e^{\mathbf{A}\cdot\tau} \cdot \mathbf{x} - e^{\mathbf{A}\cdot\tau} \cdot \mathbf{y} \right\| \leq \left\| e^{\mathbf{A}\cdot\tau} \right\| \cdot \left\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \right\| < \rho \cdot \left\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \right\| \qquad \textbf{(4.27)}$$

Sonuç olarak $\left\| e^{\mathbf{A}\cdot\tau} \right\| < 1$ ise F_τ büzülme dönüşümüdür. Her $\mathbf{A}_p$'nin katsız ve sıfırdan farklı kökleri olduğunu varsayalım. Pratikte karşılaştığımız doğrusal sistemler genelde bu yapıdadır [29, s. 387]. $e^{\mathbf{A}\cdot t} = \mathbf{V} \cdot e^{\mathbf{A}\cdot t} \cdot \mathbf{V}^{-1}$ benzerlik dönüşümünü ele alalım [1, s. 304]. $s_\ell = a_\ell + b_\ell \cdot i\ ,\ \ell = 1, 2, ..., n$ $\mathbf{A}$'nın özdeğerlerini ve $\mathbf{v}_\ell,\ \ell = 1, 2, ..., n$ aynı sırayla özdeğerlere karşı düşen özvektörleri göstermek üzere

$$\mathbf{V}=\left[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_n\right] \quad \text{ve} \quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s_n \end{bmatrix} \Longrightarrow e^{\mathbf{D}\cdot t}=\begin{bmatrix} e^{s_1\cdot t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{s_2\cdot t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{s_n\cdot t} \end{bmatrix}\text{'dir.}$$

$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}$ tipindeki bir matrisin normu $\left\|\mathbf{C}\right\|=\sqrt{\lambda_{\max}\left(\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{C}\right)}=\sqrt{\max_{\ell} c_\ell^{\,2}}=\max_{\ell}\left|c_\ell\right|$ şeklinde yazılabildiğinden ve her $z=a+b\cdot i$ karmaşık sayısı için $\left|e^{z\cdot t}\right|=\left|e^{a\cdot t}\right|\cdot\left|e^{b\cdot i\cdot t}\right|=\left|e^{a\cdot t}\right|$ olduğundan $\left|e^{\mathbf{D}\cdot t}\right|=\max_{\ell}\left|e^{a_\ell\cdot t}\right|=\max_{\ell} e^{a_\ell\cdot t}=e^{\left(\max_{\ell} a_\ell\right)\cdot t}$'dir; çünkü $a_\ell<0,\ \forall\ell$. Sonuç olarak;

$$\left\|e^{\mathbf{A}\cdot\tau}\right\|=\left\|\mathbf{V}\cdot e^{\mathbf{D}\cdot\tau}\cdot\mathbf{V}^{-1}\right\|\le\left\|\mathbf{V}\right\|\cdot\left\|e^{\mathbf{D}\cdot\tau}\right\|\cdot\left\|\mathbf{V}^{-1}\right\|=\left\|\mathbf{V}\right\|\cdot\left\|\mathbf{V}^{-1}\right\|\cdot e^{\left(\max_{\ell} a_\ell\right)\cdot\tau} \tag{4.28}$$

Öyleyse $\left\|\mathbf{V}\right\|\cdot\left\|\mathbf{V}^{-1}\right\|\cdot e^{\left(\max_{\ell} a_\ell\right)\cdot\tau}<1$ koşulunun sağlanması F_τ'nun büzülme dönüşümü olması için yeterlidir.

$$\begin{aligned} &\left\|\mathbf{V}\right\|\cdot\left\|\mathbf{V}^{-1}\right\|\cdot e^{\left(\max_{\ell} a_\ell\right)\cdot\tau}<1\Longrightarrow\left\|\mathbf{V}\right\|\cdot\left\|\mathbf{V}^{-1}\right\|<e^{-\left(\max_{\ell} a_\ell\right)\cdot\tau} \\ &\Longrightarrow \ln\left(\left\|\mathbf{V}\right\|\cdot\left\|\mathbf{V}^{-1}\right\|\right)<-\left(\max_{\ell} a_\ell\right)\cdot\tau\Longrightarrow\tau>\tau_{\min}\triangleq\frac{\ln\left(\left\|\mathbf{V}\right\|\cdot\left\|\mathbf{V}^{-1}\right\|\right)}{-\left(\max_{\ell} a_\ell\right)} \end{aligned} \tag{4.29}$$

Böylece F_τ'nun büzülme dönüşümü olması için yeter koşul bulmuş olduk. Bu şekilde her $\mathbf{A}_p$'ye karşılık bir $\tau_{\min_p}$ bulabiliriz; öyle ki $F_\tau\left(\mathbf{a}\right)=e^{\mathbf{A}_p\cdot\tau}\cdot\mathbf{a}$, $\forall\tau>\tau_{\min_p}$ fonksiyonları büzülme dönüşümü olsun.

$$\tau_{\text{bekleme}}=\max_{p}\tau_{\min_p} \tag{4.30}$$

olarak belirlenirse (4.24) sistemi asimptotik kararlı olur. Bulduğumuz sonucu aşağıdaki teorem ile özetleyelim:

Teorem 4.5:

$$\dot{\mathbf{x}}\left(t\right)=\mathbf{A}_\sigma\cdot\mathbf{x}\left(t\right)\ ,\ \sigma\in\mathcal{S}:\mathbb{R}^+\cup\left\{0\right\}\to\mathcal{P}\ ,\ t\ge 0 \tag{4.31}$$

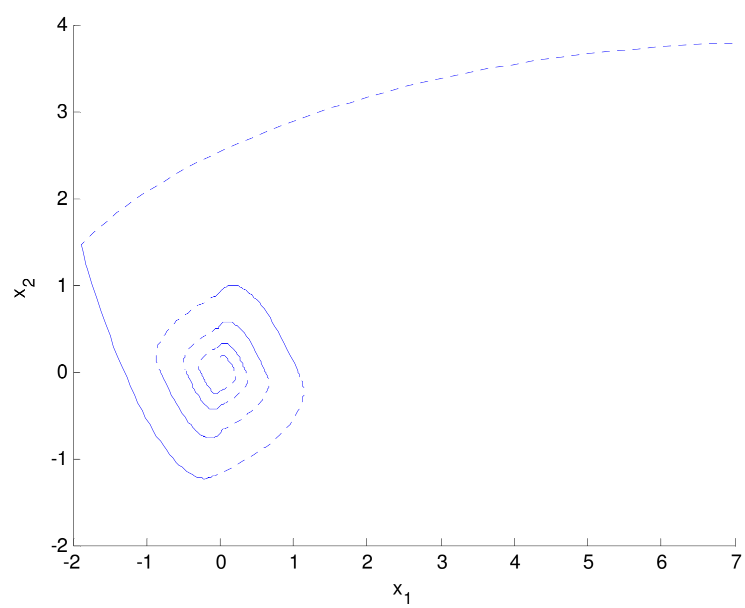
ADS'si verilmiş olsun. $\mathbf{V}_p$, sütunları $\mathbf{A}_p$ matrisinin özvektörlerinden oluşan bir matris ve $\lambda\left(\mathbf{A}_p\right)$, $\mathbf{A}_p$'nin özdeğerlerinden oluşan kümeyi göstermek üzere $S = S_{\text{bekleme}}\left(\sup_{p\in\mathcal{P}}\left(\dfrac{\ln\left(\left\|\mathbf{V}_p\right\|\cdot\left\|\mathbf{V}_p^{-1}\right\|\right)}{\min\left|\mathrm{Re}\left\{\lambda\left(\mathbf{A}_p\right)\right\}\right|}\right)\right)$ için (4.31) global asimptotik kararlıdır. ■

Örnek 4:

$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ olmak üzere

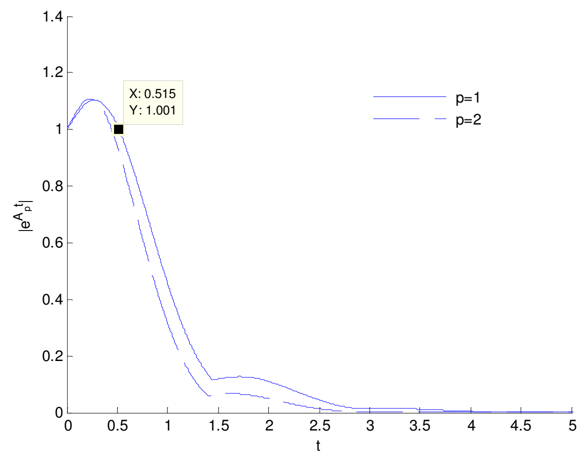
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_\sigma \cdot \mathbf{x}\ ,\ \ \sigma\colon [0,\infty) \rightarrow \{1,2\}\ ,\ \ \sigma \in S_{\text{bekleme}}\left(\tau_{\text{bekleme}}\right) \tag{4.32}$$

AS'sini göz önüne alalım. (4.29)'dan birinci altsistem için $\tau_{\min_1} = 0.5617$ ikinci altsistem için ise $\tau_{\min_2} = 0.5093$ olarak bulunur. (4.30) uygulanırsa $\tau_{\text{bekleme}} = 0.5617$ bulunur. O halde, $\Delta_i(\sigma) = 0.57$, $i = 1,2,3,...$ ile belirlenen bir anahtarlama işaretine ilişkin çözüm sıfıra yakınsamalıdır. Şekil 4.6'de bu anahtarlama işareti ile oluşan bir çözüm gösterilmektedir



Şekil 4.6: Örnek 4'e ilişkin kararlı çözüm (noktalı ve düz çizgiler sırasıyla birinci ve ikinci altsistemin çalıştığı durumları gösteriyor.)

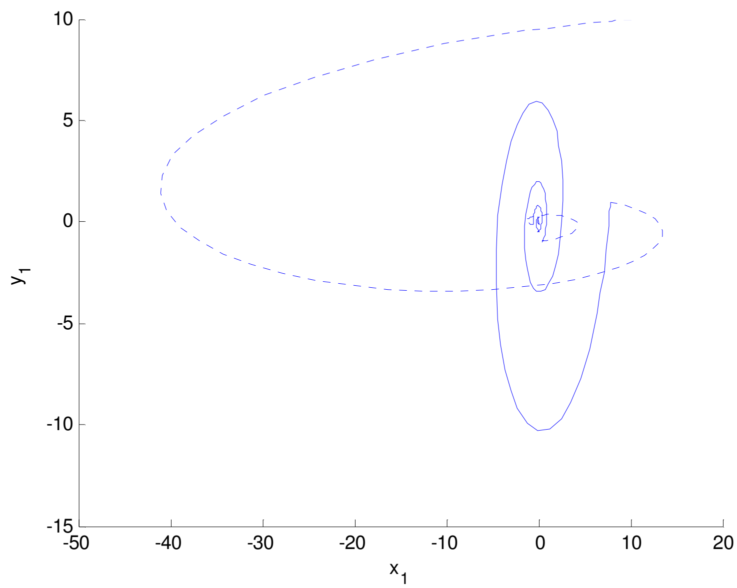
Bulduğumuz bekleme süresinin $\left\| e^{\mathbf{A}_p \cdot \tau} \right\| < 1$, $p \in \mathcal{P}$ koşulunu sağlayan oldukça uygun bir değer olduğunu görmek için bilgisayar yardımıyla hesaplanan $\left\| e^{\mathbf{A}_1 \cdot t} \right\|$ ve $\left\| e^{\mathbf{A}_2 \cdot t} \right\|$'nin grafiklerine bakılabilir (bkz. **Şekil 4.7**).



Şekil 4.7: Örnek 4'teki sistemlerin $e^{\mathbf{A} \cdot t}$ normu

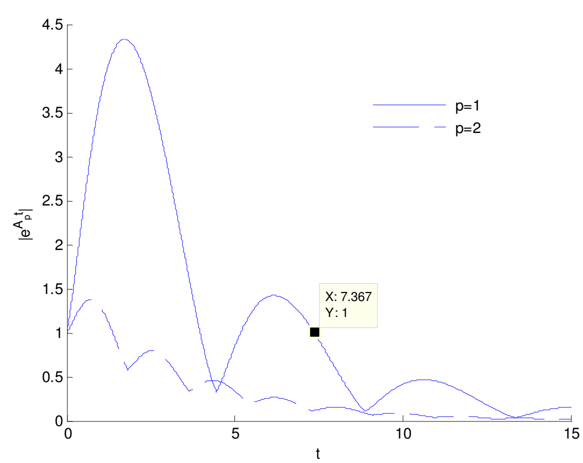
Örnek 5:

$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & -5 \\ 0.1 & -0.3 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ -3 & -0.1 \end{bmatrix}$ olmak üzere (4.32) AS'sini göz önüne alalım. (4.29)'dan birinci altsistem için $\tau_{\min_1} = 7.8345$ ikinci altsistem için ise $\tau_{\min_2} = 1.8753$ olarak bulunur. (4.30) uygulanırsa $\tau_{\text{bekleme}} = 7.8345$ bulunur. O halde, $\Delta_i(\sigma) = 7.84$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ ile belirlenen bir anahtarlama işaretine ilişkin çözüm sıfıra yakınsamalıdır. Şekil 4.8 bu anahtarlama işareti ile oluşan bir çözüm gösterilmektedir



Şekil 4.8: Örnek 5'e ilişkin kararlı çözüm (noktalı ve düz çizgiler sırasıyla birinci ve ikinci altsistemin çalıştığı durumları gösteriyor.)

Bulduğumuz bekleme süresinin $\left\| e^{\mathbf{A}_p \cdot \tau} \right\| < 1$, $p \in \mathcal{P}$ koşulunu sağlayan oldukça uygun bir değer olduğunu görmek için bilgisayar yardımıyla hesaplanan $\left\| e^{\mathbf{A}_1 \cdot t} \right\|$ ve $\left\| e^{\mathbf{A}_2 \cdot t} \right\|$'nin grafiklerine bakılabilir (bakınız **Şekil 4.9**).



Şekil 4.9: Örnek 5'teki sistemlerin $e^{\mathbf{A} \cdot t}$ normu

5. SONUÇ

Bu çalışmada ADS'lerin literatürdeki tanımları karşılaştırılmış ve sistem temelli tanım olarak adlandırdığımız tüm izin verilen anahtarlama işaretlerini de içinde barındıran bir tanım benimsenmiştir. ADS'lerin kararlılık tanımları da buna dayanarak verilmiş ve literatürde bulunan AS'lere ilişkin üç temel kararlılık problemi sistem temelli bu tanım çerçevesinde yeniden ifade edilmiştir. Keyfi anahtarlama problemi, kararlılaştırma problemi, uygun anahtarlama işaretleri kümesini bulma problemi olarak adlandırdığımız bu üç problemden sonuncusunun kapsamında bulunan anahtarlama işaretlerinin sabit aralıklarının alabileceği minimum değeri bulma problemine kolay sınanabilir bir koşula dayanan bir çözüm verilmiştir.

Altsistemlerin özvektörlerine ve özdeğerlerine dayanan bu koşulun geliştirilmesi ve daha dar ve hatta mümkünse gerek-yeter koşullara ulaşılması bu çalışmanın ileriki aşaması olabilir. Dikkat edilirse bu çalışmada verilen koşul altsistemlerin birbirleri ile ilişkilerine dayanmamaktadır, yalnızca tek tek her bir altsistemin büzülme dönüşümü olması için gereken bekleme sürelerinin bulunması ve bunların en büyüğünün seçilmesi ilkesine dayanmaktadır. Daha gelişmiş bir koşul, verilmiş olan altsistemler arasındaki ilişkilere bağlı olarak ortaya çıkmalıdır. Özellikle, özvektörlerin birbirlerine yakınlığının incelenmesinin verimli sonuçlar doğuracağı fikrindeyiz. Örneğin, altsistemlerin özvektörlerinin eşit olması durumunda bekleme süresinin sıfır alınabileceği aşikardır; ancak bu tezdeki koşul böylesi bir durumda oldukça büyük bir bekleme süresi verecektir. Altsistemlerin özvektörlerinin birbirlerine eşit değil ama yakın olduğunda da bekleme süresinin sıfıra yakın olacağı ve özvektörlerin arasındaki dar açı büyüdükçe bekleme süresinin büyüyeceği öngörülebilir.

KAYNAKLAR

[1]**Leon, S.J.**, 1998. Linear Algebra with Applications, Prentice-Hall, London.

[2]**Khalil, H.K.**, 2000. Nonlinear Systems 3. ed., Prentice-Hall, New Jersey.

[3]**Jacobson, N.**, 1966. Lie Algebras, John Wiley & Sons, New York.

[4]**Elaydi, S.**, 2005. An Introduction to Difference Equations, Springer, New York.

[5]**Barnsley, M.F.**, 1993. Fractals Everywhere, Academic Press Professional, Boston.

[6]**Witsenhausen, H.S.**, 1966. A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems, *IEEE Trans. on Auto. Cont.*, **11(2)**, 161-167.

[7]**Daniel, L.**, 2003. Switching in Systems and Control, Birkhauser, Boston.

[8]**DeCarlo, R.A., Branicky, M.S., Pettersson, S. and Lennartson B.**, 2000. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems, *Proceedings of the IEEE*, **88(7)**, 1069-1082.

[9]**Branicky, M.S.**, 1998, Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems, *IEEE Trans. on Auto. Cont.*, **43(4)**, 475-482.

[10] **Michel, A.N. and Hu, B.**, 1998. Towards a stability theory of general hybrid dynamical systems, *Automatica*, **35**, 371-384.

[11] **Schaft, A.J. van der, and Schumacher, H.**, 2000. An Introduction to Hybrid Dynamical Systems, Springer-Verlag London, Great Britain.

[12] **DeKoning W.L.**, 2003. Digital optimal reduced-order control of pulse-width-modulated switched linear systems, *Automatica*, **39**, 1997-2003.

[13] **Hespanha, J.P.**, 2004. Uniform stability of switched linear systems: extensions of LaSalle's invariance principle, *IEEE Trans. on Auto. Cont.*, **49(4)**, 470-482.

[14] **Sun, Z. and Ge S.S.**, 2005. Switched Linear Systems: Control and Design, Springer-Verlag London, USA.

[15] **Sun, Y.G., Wang, L. and Xie, G.**, 2006. Necessary and sufficient conditions for stabilization of discrete-time planar switched systems, *Nonlinear Analysis*, **65**, 1039-1049.

[16] **Hespanha, J.P. and Morse S.**, 1999. Stability of switched systems with average dwell-time, Proc. of the 38th Conf. on Decision and Control, **7**, Phoenix, AZ, USA, December 1999, 2655-2660.

[17] **Zhai, G., Hu, B., Yasuda, K. and Michel A.N.**, 2001. Stability analysis of switched systems with stable and unstable subsystems: an average dwell time approach, *Int. Journal of Systems Science*, **32(8)**, 1055-1061.

[18] **Liberzon, D. and Morse, S.**, 1999. Basic problems in stability and design of switched systems, IEEE *Control Systems Magazine*, **19 (5)**, 59-70.

[19] **Narendra, K.S. and Balakrishnan, J.**, 1994. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting *A*-matrices, *IEEE Trans. on Auto. Cont.*, **39(12)**, 2469-2471.

[20] **Liberzon, D., Hespanha, J.P. and Morse A.S.**, 1999. Stability of switched systems: a Lie-algebraic condition, *Systems & Control Letters*, **37**, 117-122.

[21] **Mori, Y., Mori, T. and Kuroe, Y.**, 1997. A solution to the common Lyapunov function problem for continuous-time systems, Proc. of the 36th Conf. on Decision and Control, **7**, San Diego, California, USA, December 1997, 3530-3531.

[22] **Johansson, M. and Rantzer, A.**, 1998. Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems, *IEEE Trans. on Auto. Cont.*, **43(4)**, 555-559.

[23] **Radjavi, E. and Rosenthal, P.**, 2000. Simultaneous Triangularization, Springer-Verlag New York, USA.

[24] **Horn, R.A. and Johnson C.R.**, 1985. Matrix Analysis, Cambridge University Pres, New York.

[25] **Xie G., and Wang, L.**, 2005. Periodical stabilization of switched linear systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **181**, 176-187.

[26] **Sun, Z.**, 2004. Stabilizability and insensitivity of switched linear systems, *IEEE Trans. on Auto. Cont.*, **49(7)**, 1133-1137.

[27] **Xu, X. and Antsaklis, P.J.**, 2000. Stabilization of second-order LTI switched systems, *Int. Journal of Control*, **73(14)**, 1261-1279.

[28] **Vidyasagar, M.**, 1993. Nonlinear System Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J..

[29] **Chua, L.O., Desoer, C.A. and Kuh E.S.**, 1987. Linear and Nonlinear Circuits, McGraw-Hill, Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

Özkan Karabacak, 1982 İstanbul doğumludur. Orta öğrenimini Kartal Anadolu Lisesi'nde 1999 yılında tamamladı. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü'nde lisans eğitimine başladı. 2003-2004 bahar yarıyılı sonunda mezun oldu. 2004 yılında İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü Elektronik yüksek lisans programına kaydoldu. 2005 şubat ayından itibaren İTÜ Elektrik-Elektronik Fakültesi Devreler ve Sistemler Ana Bilim Dalı'nda araştırma görevliliğine başladı. 2005 yılında Leipzig'de Max-Planck uygulamalı matematik enstitüsünde üç ay, 2006 yılında Sheffield'de Sheffield Üniversitesi ABRG grubunda bir ay süresince misafir araştırmacı olarak çalıştı. SCI-Expanded indeksinde taranan iki yayını ve çeşitli konferanslarda sunulmuş üç yayını bulunmaktadır. Halen Devreler ve Sistemler Ana Bilim Dalı'nda araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.