

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**AFİN LİE CEBİRLERİNİN KARAKTERLERİNDE
PERMÜTASYON AĞIRLIK FONKSİYONELLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Fikri Onur ÖZTIRPAN**

Anabilim Dalı : FİZİK

Programı : FİZİK MÜHENDİSLİĞİ

OCAK 2008

**AFİN LİE CEBİRLERİNİN KARAKTERLERİNDE
PERMÜTASYON AĞIRLIK FONKSİYONELLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Fikri Onur ÖZTIRPAN
(509041106)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24 Aralık 2007
Tezin Savunulduğu Tarih : 23 Ocak 2008**

Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr. Meltem GÜNGÖRMEZ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Neşe ÖZDEMİR (İ.T.Ü.)

Prof.Dr. Ahmet CANOĞLU (M.Ü.)

OCAK 2008

ÖNSÖZ

İTÜ’de Yüksek Lisans’a başladığım ilk günden beri hiç bir konuda benden desteğini esirgemeyen danışmanım Yrd.Doç.Dr.Meltem GÜNGÖRMEZ’e ve lisans yıllarımdan beri çalışmalarımda bana yardımcı olan hocam Prof.Dr.Hasan R. KARADAYI’ya, önümüzdeki yıllarda da çalışmalarımızı sürdürmek dileğiyle, teşekkürlerimi sunarım.

Aralık, 2007

F.Onur Öztırpan

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
SEMBOL LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	xi
1. GİRİŞ	1
2. LİE CEBİRLERİNDE GENEL TANIMLAR	3
2.1. Weyl Basit Yansıması (Simple Weyl Reflection)	3
2.2. Weyl Grubu (Weyl Group)	3
2.3. Weyl Yörüngesi (Weyl Orbit)	4
2.4. Temel Baskın Ağırlık Fonksiyoneli (Fundamental Dominant Weight)	4
2.5. Temel Baskın Ağırlık Fonksiyonelleri ile Basit Kökler Arasındaki İlişkiler	5
2.6. Özelleştirme (Specialization)	5
2.7. İşaret (Signature)	5
2.8. Baskın Ağırlık Fonksiyoneli (Dominant Weight)	5
2.9. Alt-Baskın Ağırlık Fonksiyoneli (Sub-Dominant Weight)	5
2.10. Tam-Baskın Ağırlık Fonksiyoneli (Strongly Dominant Weight)	6
2.11. İndirgenemez Temsil (Irreducible Representation)	6
2.12. Çok Katlılık (Multiplicity)	6
2.13. Yörünge Karakteri (Orbit Character)	7
2.14. Temsil Karakteri	7
2.15. Weyl Karakter Formülü (Weyl Character Formula)	7
3. LİE CEBİRLERİNE FARKLI BİR BAKIŞ AÇISI	9
3.1. Temel Ağırlık Fonksiyonelleri (Fundamental Weights)	9
3.2. Permütasyon Ağırlık Fonksiyonelleri (Permutation Weights)	9
3.3. Permütasyon Ağırlık Fonksiyonellerinde İşaret	10
3.4. Weyl Karakter Formülüne Yeni Bir Bakış	10
3.5. Permütasyon Baskın Ağırlık Fonksiyonelleri ile Karakter Gösterimi	11
4. SONLU LİE CEBİRLERİ İÇİN KARAKTER VE ÇOK KATLILIK HESABI	12
4.1. A_4 Lie Cebirinde Karakterin ve Çok Katlılıkların Açık Hesabı	12
4.2. B_4 Lie Cebirinde Karakterin ve Çok Katlılıkların Açık Hesabı	17

5. AFİN LİE CEBİRLERİ	24
5.1. Derinlik (Depth)	24
5.2. Seviye (Level)	25
5.3. Afin Lie cebirlerinde Baskın Ağırlık Fonksiyonelleri	25
5.4. Afin Lie Cebirleri için Karakter Hesabı ve String Fonksiyonları	25
5.5. String Fonksiyonları (String Functions)	26
5.6. Weyl-Kac Karakter Formülü (Weyl-Kac Character Formula)	26
5.7. Baskın Ağırlık Fonksiyonellerinin Weyl Yörüngelerine Yardımcı Teorem	28
5.8. Afin Lie Cebirlerinde İşaret	29
5.8.1. $A_N^{(1)}$ Afin Lie Cebirlerinde İşaret	29
5.8.2. $B_N^{(1)}$ Afin Lie Cebirlerinde İşaret	29
5.9. Maksimal Ağırlık Fonksiyoneli (Maximal Weight)	30
6. AFİN LİE CEBİRLERİNDE KARAKTER VE STRING FONKSİYON HESAPLARI	31
6.1. $A_4^{(1)}$ Afin Lie Cebirinde Karakterin ve String Fonksiyonlarının Açık Hesabı	31
6.2. $B_4^{(1)}$ Afin Lie Cebirinde Karakterin ve String Fonksiyonlarının Açık Hesabı	35
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	38
KAYNAKLAR	39
EK-1	40
EK-2	42
EK-3	43
EK-4	48
EK-5	51
EK-6	59
EK-7	75
EK-8	79
ÖZGEÇMİŞ	84

SEMBOL LİSTESİ

σ_α	: Weyl Yansıma Operatörü
ρ	: Weyl Vektörü
$R(\Lambda^+)$: İndirgenemez Temsil
$ChR(\Lambda^+)$: İndirgenemez Temsil Karakteri
Λ^{++}	: Tam-Baskın Ağırlık Fonksiyoneli
α_i	: Basit Kök
λ_i	: Temel Baskın Ağırlık Fonksiyoneli
Δ	: Basit Kök Sistemi
$\omega(\Lambda^+)$: Weyl Yörüngesi
$C(G_N)$: G_N Lie Cebirinin Cartan Matrisi
$Ch\omega(\lambda^+)$: Yörünge Karakteri
$m_{\Lambda^+}(\lambda^+)$: Çok Katlılık
μ_i	: Temel Ağırlık Fonksiyoneli
$\wp(\lambda^+)$: Permütasyon Ağırlık Fonksiyoneli Kümesi
$\varepsilon(\sigma)$: Bir Elemanın İşareti
$sub(\Lambda)$: Alt-Baskın Ağırlık Fonksiyoneller Kümesi
W	: Weyl Grubu
$\max w(\Lambda)$: Maksimal Ağırlık Fonksiyoneller Kümesi
$S_{\Lambda^+}(\Lambda^+)$: String Fonksiyonu
δ	: Sanal Kök

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 4.1.1 : A_4 Dynkin diyagramı.....	13
Şekil 4.2.1 : B_4 Dynkin diyagramı.....	18
Şekil 6.1.1: $A_4^{(1)}$ Dynkin diyagramı.....	31
Şekil 6.2.1 : $B_4^{(1)}$ Dynkin diyagramı.....	35

AFİN LİE CEBİRLERİNİN KARAKTERLERİNDE PERMÜTASYON AĞIRLIK FONKSİYONELLERİ

ÖZET

Klasik olarak Weyl grubu üzerinden toplam yaparak, rankı yüksek sonlu Lie cebirlerinde karakter, sonsuz cebirler olan Afin Lie cebirlerinde ise string fonksiyonlarını hesaplamak zordur. Bu zorluğun yanı sıra, Afin Lie cebirlerinde, hangi uzunluktaki Weyl grup elemanlarının string fonksiyonlarının kaçınıcı mertebesine katkıda bulunduğu bilinmediğinden, permütasyon ağırlık fonksiyonelleri kullanılarak yeni bir bakış açısıyla hesaplamalar yapılmıştır. İlk olarak permütasyon ağırlık fonksiyonellerini ortaya koymamız için gerekli olan temel ağırlık fonksiyonelleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\mu_1 = \lambda_1 \quad , \quad \mu_i = \lambda_1 - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \quad , \quad i = 2,3,\dots,N$$

Bu tanımdan yararlanarak, permütasyon ağırlık fonksiyonelleri şu şekilde tanımlanır:

$$\sum_{i=1}^{N-1} k_i \lambda_i - k \lambda_N \quad , \quad k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Bu elemanlar $\wp(\lambda^+)$ adını verdiğimiz kümenin elemanları olup tek bir ortak formun permütasyonları olarak yazılabildiğinden bu kümeye permütasyon ağırlık fonksiyonelleri kümesi denir. Karakterleri hesaplamak için yörüngelere ve işaretlere ihtiyacımız vardır. Her bir yörünge, $\wp(\lambda^+)$ kümelerinin direkt toplamından oluşur ve şu şekilde gösterilebilir:

$$\omega(\Lambda^{++}) \equiv \bigoplus_i \wp_i(\Lambda^{++}) \equiv \wp(\Lambda^{++})$$

Ayrıca bir permütasyon ağırlık fonksiyonellerini

$$\Lambda = \sum_{i=1}^N a_i \mu_i - n \lambda_N$$

şeklinde ifade edecek olursak, $\varepsilon(a_1, a_2, \dots, a_k) = 1$ olmak üzere bu elemanın işareti,

$$\varepsilon(\Lambda) = \varepsilon(|2a_1 + n|, |2a_2 + n|, \dots, |2a_N + n|) \prod_{i=1}^N \frac{|2a_i + n|}{2a_i + n}$$

şeklinde tanımlanır.

Artık karakter eşitliğinin sol tarafını

$$A(\Lambda^{++}) \equiv \sum_{\mu \in \omega(\Lambda^{++})} \varepsilon(\mu) e^\mu$$

olmak üzere,

$$ChR(\Lambda^+) = \frac{A(\Lambda^+ + \rho)}{A(\rho)}$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Karakter eşitliğinin sağ tarafı da, yörünge karakteri tanımını aşağıdaki gibi yapıldıktan sonra verilebilir.

$$Ch\omega(\lambda^+) \equiv \sum_{\mu \in \omega(\lambda^+)} e^\mu$$

Bu tanım altında karakter eşitliğinin sağ tarafı,

$$ChR(\Lambda^+) = \sum_{\mu \in \wp(\Lambda^+)} e^\mu + \sum_{\lambda^+ \in sub(\Lambda^+)} (m_{\Lambda^+}(\lambda^+) \sum_{\mu \in \wp(\lambda^+)} e^\mu)$$

olarak tanımlanır.

Bu tanımlar kullanılarak önce sonlu A_4 Lie cebirinin $R(2\lambda_1 + \lambda_2)$ temsilinin, sonra sonlu B_4 Lie cebirinin $R(\lambda_2 + \lambda_4)$ temsilinin gerekli olan permütasyon ağırlık fonksiyonel kümeleri, işaretleri, karakterleri ve karakterlerin sonucunda bu temsillere karşı gelen çok katlılıklar açıkça hesaplanmıştır. Bu hesaplamalarda, $\wp(\lambda^+)$

kümelerinin işleri nasıl kolaylaştırdığı görülmüştür. Daha sonraki bölümlerde, sonlu cebirlerine bazı kavramlar ekleyerek oluşturulmuş Afin Lie Cebirlerinin yapısı, Weyl karakter formülünün, Weyl-Kac karakter formülüne ve sonlu cebirlerdeki çok katlılık probleminin de Afin cebirler için string fonksiyonlarına dönüştüğü anlatılmıştır.

Afin Lie cebirlerinin yörünge elemanlarının belli ortak formlarda yazılabildiği ve bu formların içinde sonlu cebirlere ait ağırlık fonksiyonlarının olduğu ayrıca gösterilmiştir. Ayrıca, yörüngeye girebilme şartları da yardımcı teorem ile birlikte verilmiştir. Sonlu Lie cebirlerindeki çok katlılıkların Afin Lie cebirlerinde string fonksiyonlarına dönüşümü şu şekilde ifade edilir:

$$S_{\Lambda^+}(\Lambda^+) \equiv \sum_{M=M_0(\Lambda^+, \Lambda^+)}^{\infty} c_{\Lambda^+, \Lambda^+}(M) e^{-\delta M}$$

Bu tanımdan dolayıda karakter eşitliğinin sağ tarafı şu şekle dönüşür:

$$ChR(\Lambda^+) = \sum_{\Lambda^+ \in \max w(\Lambda^+)} (S_{\Lambda^+}(\Lambda^+) \sum_{\mu \in \omega(\Lambda^+)} e^{-\delta M} e^{\mu})$$

Karakteri hesaplamak için ihtiyacımız olan işaretler ise; $A_N^{(1)}$ ve $B_N^{(1)}$ Afin Lie cebirleri için sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır ve örnekler açıkça verilmiştir.

$$\mathcal{E}(\mu^+) = \mathcal{E}(s_1, s_2, \dots, s_{N+1}) \left(\prod_{i=1}^{N+1} (-1)^{n_i} \right)^N$$

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \mathcal{E}(|y_1|, |y_2|, \dots, |y_N|) \prod_{i=1}^N p_i \frac{y_i}{|y_i|}$$

En son olarak, hesaplanan string fonksiyonlarında, permütasyon ağırlık fonksiyonlarının, String fonksiyonlarının istediğimiz mertebeye kadar olan kısımlarını bulmamız için kesin çözüm olduğunu göstermek için $A_4^{(1)}$ Afin Lie cebirinde örnek olarak verdiğimiz $R(2\Lambda_0)$ temsilinde önce $\wp(\lambda^+)$ kümesinden derinliği maksimum 5 olan elemanları alıp string fonksiyonlarını 8. mertebeye kadar bulmak istediğimizde katsayıların sadece 5. mertebeye kadar tamsayı olarak çıktığını, fakat $\wp(\lambda^+)$ kümesinden derinliği maksimum 8 olan elemanları alarak

string fonksiyonlarını yine 8. mertebeye kadar seriye açtığımızda bu sefer tüm katsayıların tamsayı olduğu ve bu sayede $\wp(\lambda^+)$ kümelerinden istediğimiz derinliğe kadar olan elemanları alarak string fonksiyonlarının o merbeye kadar olan seri açılımlarını elde edebileceğimiz açıkça vurgulandı.

Bulunan string fonksiyonları şu şekildedir:

$$S_{2\Lambda_0}(2\Lambda_0) = 1 + 4q + 24q^2 + 100q^3 + 390q^4 + 1328q^5 + 4208q^6 + 12344q^7 + 34260q^8 + \dots$$

$$S_{2\Lambda_0}(\Lambda_1 + \Lambda_4) = q + 8q^2 + 43q^3 + 186q^4 + 693q^5 + 2316q^6 + 7115q^7 + 20418q^8 + \dots$$

$$S_{2\Lambda_0}(\Lambda_2 + \Lambda_3) = 2q^2 + 16q^3 + 83q^4 + 344q^5 + 1236q^6 + 4000q^7 + 11948q^8 + \dots$$

Diğer bir örnek olarakta Afin Lie cebirlerinden $B_4^{(1)}$ seçilerek bu cebirin $R(\Lambda_1)$ indirgenemez temsilinin string fonksiyonları, maksimum 7. derinlikteki permütasyon ağırlık fonksiyonelleri kullanılarak, 7. mertebeye kadar aşağıdaki gibi hesaplandı.

$$S_{\Lambda_1}(\Lambda_0) = 1 + 5q + 19q^2 + 59q^3 + 165q^4 + 421q^5 + 1010q^6 + 2295q^7 + \dots$$

$$S_{\Lambda_1}(\Lambda_1) = 1 + 4q + 15q^2 + 45q^3 + 125q^4 + 316q^5 + 758q^6 + 1720q^7 + \dots$$

PERMUTATION WEIGHTS IN AFFINE LIE ALGEBRA CHARACTERS

SUMMARY

Using the classical way, Weyl group summation, it is very hard to calculate character for higher rank finite Lie algebras or string functions for Affine Lie algebras which is a member of infinite dimensional Lie algebras. With this hardness, also in Affine Lie algebras we could'nt know which Weyl group elements contribute to which degree of string functions. Because of this we calculate the characters and string functions with a new approach which is named "permutation weights". Before constructing permutation weights, firstly we must define fundamental weights as below.

$$\mu_1 = \lambda_1 \quad , \quad \mu_i = \lambda_1 - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \quad , \quad i = 2,3,\dots,N$$

By using this definitions, we can define permutation weights as below.

$$\sum_{i=1}^{N-1} k_i \lambda_i - k \lambda_N \quad , \quad k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

These are elements of a set which we show with $\wp(\lambda^+)$. The elements of $\wp(\lambda^+)$ can be written with permutations of common forms. Because of this common forms we call this set, permutation weight set. To calculate characters we need Weyl orbits and signatures of weights. Each of the Weyl orbits could be written as a direct sum of $\wp(\lambda^+)$ and shown like this:

$$\omega(\Lambda^{++}) \equiv \bigoplus_i \wp_i(\Lambda^{++}) \equiv \wp(\Lambda^{++})$$

If we show any permutation weight as below,

$$\Lambda = \sum_{i=1}^N a_i \mu_i - n \lambda_N$$

with the normalization $\varepsilon(a_1, a_2, \dots, a_k) = 1$, the signature of this weight is defined as:

$$\varepsilon(\Lambda) = \varepsilon(|2a_1 + n|, |2a_2 + n|, \dots, |2a_N + n|) \prod_{i=1}^N \frac{|2a_i + n|}{2a_i + n}$$

Now we can define the left hand side of the character equation by using the definition,

$$A(\Lambda^{++}) \equiv \sum_{\mu \in \omega(\Lambda^{++})} \varepsilon(\mu) e^\mu$$

$$ChR(\Lambda^+) = \frac{A(\Lambda^+ + \rho)}{A(\rho)}$$

Character equation is defined with this formula above. The right hand side of the character formula could be defined after defining the character of a Weyl orbit like this:

$$Ch\omega(\lambda^+) \equiv \sum_{\mu \in \omega(\lambda^+)} e^\mu$$

With this definition the right hand side is:

$$ChR(\Lambda^+) = \sum_{\mu \in \wp(\Lambda^+)} e^\mu + \sum_{\lambda^+ \in sub(\Lambda^+)} (m_{\Lambda^+}(\lambda^+) \sum_{\mu \in \wp(\lambda^+)} e^\mu)$$

By using these definitions firstly we calculate the character of $R(2\lambda_1 + \lambda_2)$ irreducible representation of finite Lie algebra A_4 and secondly the character of $R(\lambda_2 + \lambda_4)$ irreducible representation of finite Lie algebra B_4 . After this we find the multiplicities of these representations. In this calculations we show that how the sets of $\wp(\lambda^+)$ make our work easy. In the other chapters we deal with Affine Lie algebras and we calculate their characters. We show how the Weyl character formula turns to Weyl-Kac character formula and the multiplicities turns to string functions in Affine Lie algebras. Also the Weyl orbits of Affine Lie algebras could be written in some common forms and we show that in this forms there is finite algebras' weights. In addition we show the conditions to become a member of any orbit in Affine Lie

algebras and we define a Lemma for this. The transform of multiplicities of finite Lie algebras to string functions of Affine Lie algebras can be shown as below.

$$S_{\Lambda^+}(\Lambda^+) \equiv \sum_{M=M_0(\Lambda^+, \Lambda^+)}^{\infty} c_{\Lambda^+, \Lambda^+}(M) e^{-\delta M}$$

Because of this definition the right hand side of the character formula turns to this:

$$ChR(\Lambda^+) = \sum_{\Lambda^+ \in \max w(\Lambda^+)} (S_{\Lambda^+}(\Lambda^+) \sum_{\mu \in \mathfrak{w}(\Lambda^+)} e^{-\delta M} e^{\mu})$$

For calculating the string functions we also need signatures of Affine $A_N^{(1)}$ and $B_N^{(1)}$.

For $A_N^{(1)}$ the signature are defined as

$$\mathcal{E}(\mu^+) = \mathcal{E}(s_1, s_2, \dots, s_{N+1}) \left(\prod_{i=1}^{N+1} (-1)^{n_i} \right)^N$$

For $B_N^{(1)}$ the signatures are defined as

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \mathcal{E}(|y_1|, |y_2|, \dots, |y_N|) \prod_{i=1}^N p_i \frac{y_i}{|y_i|}$$

Finally we show that how the depth of permutation weights contribute to string functions' degree. We need them to calculate a string function at any degree we want. For this we give an example from $A_4^{(1)}$ Affine Lie algebra and find string functions for $R(2\Lambda_0)$ irreducible representation. When we take the permutation weights up to depth 5 and want to calculate string functions up to 8. degree we see that we find only the first five terms integer, but when we take the permutation weights up to depth 8 and calculate the string functions up to 8. degree we see that all terms are integer. These three string functions are seen as below.

$$S_{2\Lambda_0}(2\Lambda_0) = 1 + 4q + 24q^2 + 100q^3 + 390q^4 + 1328q^5 + 4208q^6 + 12344q^7 + 34260q^8 + \dots$$

$$S_{2\Lambda_0}(\Lambda_1 + \Lambda_4) = q + 8q^2 + 43q^3 + 186q^4 + 693q^5 + 2316q^6 + 7115q^7 + 20418q^8 + \dots$$

$$S_{2\Lambda_0}(\Lambda_2 + \Lambda_3) = 2q^2 + 16q^3 + 83q^4 + 344q^5 + 1236q^6 + 4000q^7 + 11948q^8 + \dots$$

And another example is for Affine $B_4^{(1)}$. We calculate string functions up to 7.degree for $R(\Lambda_1)$ irreducible representation as below.

$$S_{\Lambda_1}(\Lambda_0) = 1 + 5q + 19q^2 + 59q^3 + 165q^4 + 421q^5 + 1010q^6 + 2295q^7 + \dots$$

$$S_{\Lambda_1}(\Lambda_1) = 1 + 4q + 15q^2 + 45q^3 + 125q^4 + 316q^5 + 758q^6 + 1720q^7 + \dots$$

1. GİRİŞ

Bu çalışma temelde iki kısımdan oluşmakta olup bunlardan ilkinde sonlu Lie cebirlerinin karakterleri ve çok katlılıklarının, ikinci kısımda ise sonsuz Lie cebirlerinin bir tipi olan Afin cebirlerin karakterlerinin ve string fonksiyonlarının nasıl hesaplandığı incelenmiştir. Bu iki kısım arasındaki geçişte karakter formülünün nasıl değiştiği ve sonlu cebirlerdeki çok katlılıkların Afin cebirlerde nasıl string fonksiyonlarına dönüştüğü gösterilmiştir. Tüm bu hesaplamalar yapılırken, uzun bir zaman önce temelleri atılmış [1,2] fakat literatürde [3] yeni yeni kullanılmaya başlanan temel ağırlık fonksiyonelleri ve yörünge karakteriyle birlikte permütasyon ağırlık fonksiyonelleri kavramları temel alınmıştır. Gerek çok katlılık hesaplarında, gerekse string fonksiyonu hesaplarında kullanılan Weyl yörüngeleri, her bir ağırlık fonksiyonellerini belli ortak formlarda yazabildiğimizden, permütasyon ağırlık fonksiyonelleri cinsinden açıkça ifade edilmiştir. Afin cebirlerde karakterleri ve dolayısıyla string fonksiyonlarını bulmak için gerekli olan ve yeni geliştirilen işaret fonksiyonlarıyla ilgili örnekler de açıkça gösterilmiştir. Klasik olarak Weyl grubu kullanılarak hesaplanan string fonksiyonlarında her bir mertebeye nasıl ve hangi çoklu çarpımlardan katkı geleceğini bilemememize karşın permütasyon ağırlık fonksiyonellerini kullandığımız yöntemde, her bir derinliğe ait permütasyon ağırlık fonksiyonellerinin, string fonksiyonlarının o derinlikteki mertebesine yaptığı, tam katkı açıkça gösterilmiştir.

Yaptığımız hesaplarda, özellikle Afin cebirlerde yörüngeler sonsuz olmasına rağmen, her bir derinliğe sonlu sayıda permütasyon ağırlık fonksiyonellerinin katkıda bulunduğu vurgulanmalıdır.

Permütasyon ağırlık fonksiyonellerinin ortaya atılmasının temel sebebi ise, rankı N olan G_N gibi bir Lie cebirinin karakterlerini A_{N-1} alt cebirinin karakterleri cinsinden ifade etmektir.

Afin Lie cebirlerinde tartışmasız olarak önem kazanan permütasyon ağırlık fonksiyonellerinin önemi, yüksek ranka sahip sonlu Lie cebirlerinde daha da açıkça

görülür. Örneğin, Weyl gruplarının boyutu sırasıyla 2.903.040 ve 696.729.600 olan E_7 ve E_8 Lie cebirlerinin karakterleri ve dolayısıyla çok katlılıklarını hesaplamak için bu cebirlerin Weyl grup elemanları üzerinden bir toplam gerekecektir, fakat permütasyon ağırlık fonksiyonelleri sayesinde ortak formlarda yazılabilen bu elemanlar çok az sayıda elemanla temsil edilebildiğinden, yapılacak olan hesaplarda kolaylaşır.

Teorisini anlatarak örneklemeler yaptığımız Afin Lie cebirlerinin karakterlerinin ve string fonksiyonlarının, sicim kuramlarında partiyon fonksiyonları ile alakalı olması [3] da bu yaptığımız hesapların önemini ayrıca ortaya koymaktadır. Tabii bu konuda Afin ötesi sonsuz Lie cebirlerinin karakterlerinin sonucunda ortaya çıkabilecek fonksiyonların, fizikte nasıl bir karşılık bulacağı da ilginç bir araştırma konusudur.

Çalışmamız toplamda altı bölümden oluşmuştur. İkinci bölümde, Lie cebirleriyle ilgili genel tanımlar verilmiş, üçüncü bölümde permütasyon ağırlık fonksiyonelleri kullanılarak, ikinci bölümdeki tanımlara yeni bir bakış açısı getirilmiş, dördüncü bölümde ise sonlu A_N ve B_N cebirlerinden birer indirgenemez temsil örnek olarak alınarak bu indirgenemez temsille ilgili karakter ve çok katlılıklar hesaplanmıştır. Beşinci bölümde, Afin Lie cebirleriyle ilgili genel tanımlar verilip altıncı bölümde ise bu tanımlar altında $A_N^{(1)}$ ve $B_N^{(1)}$ Afin cebirlerinden birer temsilin karakteri ve string fonksiyonları örnek olarak hesaplanmıştır.

2. LİE CEBİRLERİNDE GENEL TANIMLAR

2.1. Weyl Basit Yansıması (Simple Weyl Reflection)

Q ve P sırasıyla bir cebire ait kök ve ağırlık örgüleri olsun. $\mu \in P$ ve $\alpha \in Q$ olmak üzere P ağırlık örgüsü üzerinde tanımlanan skaler çarpım (μ, α) yardımıyla yapılan

$$\langle \mu, \alpha \rangle = 2 \frac{(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \quad (2.1.1)$$

tanımı altında,

$$\sigma_\alpha(\mu) = \mu - \langle \mu, \alpha \rangle \alpha \quad (2.1.2)$$

şeklinde tanımlanan işlem Weyl basit yansıması ve σ_α operatörlerine de basit yansıma operatörü denir [5].

2.2. Weyl Grubu (Weyl Group)

Δ , herhangi bir Lie cebirinin basit kök sistemi olmak üzere birbirinden bağımsız Weyl yansıma operatörlerinden oluşan gruba Weyl grubu denir ve W ile gösterilir. Temel baskın ağırlık fonksiyonelleri, cebire ait ağırlık fonksiyoneli örgüsünün bir baz sistemini oluşturduğuna göre, birbirinden bağımsız Weyl yansıma operatörlerini seçerken, bunların bu baz sistemi üzerindeki etkilerine bakmamız yeterli olacaktır. Weyl grubu tanımı, sonlu ve sonsuz olan Afin ve Afin ötesi cebirler için de geçerlidir. Her bir σ_α grup elemanı, basit kökler cinsinden [5,6] şu şekilde gösterilebilir.

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha_{i_1}} \cdot \sigma_{\alpha_{i_2}} \dots \sigma_{\alpha_{i_l}} \quad \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_l} \in \Delta \quad (2.2.1)$$

Burada Weyl yansımasının uzunluğu, σ_α elemanını basit yansımaların çarpımları olarak ifade ettiğimizde, bu çarpımdaki minimal basit yansıma sayısı olarak

tanımlanır ve $l(\sigma)$ ile gösterilir. Weyl grubunu oluşturmada bizim için önemli olan da bu minimal çarpımla oluşturulan elemanlardır. Bir Weyl grubunda maksimum uzunluğa sahip elemanın uzunluğu, ilgili Lie cebirinin pozitif köklerinin sayısına eşittir [5,6].

2.3. Weyl Yörüngesi (Weyl Orbit)

Weyl grubu elemanlarının herhangi bir λ^+ baskın ağırlık fonksiyoneli üzerindeki etkisi ile elde edilen ağırlık fonksiyonelleri, λ^+ 'nın Weyl eşlenikleridir ve bunların oluşturduğu cümleye de λ^+ 'nın Weyl yörüngesi denir ve $\omega(\lambda^+)$ ile gösterilir. Bir λ^+ baskın ağırlık fonksiyonelinin Weyl yörüngesinde sadece tek bir baskın ağırlık fonksiyoneli vardır, o da λ^+ 'nın kendisidir. Ayrıca Weyl yörüngesindeki tüm elemanların boyları aynıdır.

Weyl yörüngeleriyle ilgili iki önemli teorem:

- i) İki baskın ağırlık fonksiyoneli birbirlerinin Weyl eşlenikleri olamazlar.
- ii) Birbirlerinin Weyl eşleniği olan iki ağırlık fonksiyoneli aynı temsilde aynı çok katlılığa sahiptirler [5].

2.4. Temel Baskın Ağırlık Fonksiyonelleri (Fundamental Dominant Weight)

G_N Lie cebirinin Cartan matrisi $C(G_N)$, $\alpha_i \in \Delta$ ve $(i, j = 1, \dots, N)$ olmak üzere,

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = C(G_N)_{ij} \quad (2.4.1)$$

eşitliği altında,

$$\langle \lambda_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij} \quad (2.4.2)$$

şeklinde tanımlanan λ_j elemanları cebirin temel baskın ağırlık fonksiyonelleri olarak tanımlanırlar ve bu ağırlık fonksiyonellerine basit köklerin dualleri denir.

2.5. Temel Baskın Ağırlık Fonksiyonelleri ile Basit Kökler Arasındaki İlişkiler

G_N , herhangi bir Lie cebiri, α_i ve λ_i sırasıyla bu cebirin basit kökleri ve temel baskın ağırlık fonksiyonelleri olmak üzere basit kökler,

$$\alpha_i = C(G_N)_{ij} \lambda_j \quad (2.5.1)$$

şeklinde ya da tam tersi olarak temel baskın ağırlık fonksiyonelleri,

$$\lambda_i = C(G_N)^{-1}_{ij} \alpha_j \quad (2.5.2)$$

şeklinde yazılabilirler.

2.6. Özelleştirme (Specialization)

e^α gibi herhangi bir formel üstel'e $e^\alpha = x$ şeklindeki gibi bir parametrik değer atama işlemine Weyl karakter formülünün bir özelleştirmesi denir.

2.7. İşaret (Signature)

σ , Weyl grubunun bir elemanı ve $l(\sigma)$ 'da bu elemanın uzunluğu olmak üzere, σ 'nın işareti

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{l(\sigma)} \quad (2.7.1)$$

şeklinde tanımlanır [6].

2.8. Baskın Ağırlık Fonksiyoneli (Dominant Weight)

$(\Lambda, \alpha_i) \geq 0$ koşuluna uyan her Λ , bir baskın ağırlık fonksiyoneli [5] olarak tanımlanır.

2.9. Alt-Baskın Ağırlık Fonksiyoneli (Sub-Dominant Weight)

Λ^+ ve λ^+ baskın ağırlık fonksiyonelleri olmak üzere, aralarında

$$\Lambda^+ - \lambda^+ = \sum_i n_i \alpha_i \quad , \quad n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (2.9.1)$$

şeklinde bir ilişki varsa λ^+ , Λ^+ 'nin alt-baskın ağırlık fonksiyoneli denir.

(2.9.1) yardımıyla bulunan λ^+ alt-baskın ağırlık fonksiyonellerinin oluşturduğu küme de $sub(\Lambda^+)$ ile gösterilir.

2.10. Tam-Baskın Ağırlık Fonksiyoneli (Strongly Dominant Weight)

λ_i 'ler herhangi bir G_N Lie cebirinin temel baskın ağırlık fonksiyonelleri olmak üzere,

$$\Lambda^{++} = \sum_{i=1}^N m_i \lambda_i \quad , \quad m_i \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.10.1)$$

olacak şekilde tanımlanan Λ^{++} ağırlık fonksiyoneline tam-baskın ağırlık fonksiyoneli denir [5]. Tam-baskın ağırlıklar fonksiyonellerinin Weyl yörüngelerinin boyutu, o cebirin Weyl grubunun boyutuna eşittir, yani

$$\dim \omega(\Lambda^{++}) = \dim W(G_N) \quad (2.11.1)$$

şeklinde yazılır.

2.11. İndirgenemez Temsil (Irreducible Representation)

Bir grubun temsili, eğer başka herhangi iki temsilin direkt toplamı şeklinde yazılamıyorsa, o temsile indirgenemez temsil denir [5].

2.12. Çok Katlılık (Multiplicity)

$R(\Lambda^+)$ indirgenemez temsili, Λ^+ yörüngesi ve Λ^+ 'nin tüm alt-baskın ağırlık fonksiyonellerinin yörüngelerinin birleşimidir. Bu birleşimde, her bir yörünge genel olarak 1'den fazla katkıda bulunacaktır. Bu katkıları ifade eden katsayılar, alt-baskın ağırlık fonksiyoneli kümesindeki her bir baskın ağırlık fonksiyoneli λ^+ 'nin, Λ^+ 'ya karşı gelen indirgenemez temsildeki, çok katlılığı denir [5,7] ve $m_{\Lambda^+}(\lambda^+)$ ile gösterilir. Kısaca ifade etmek istersek,

$$R(\Lambda^+) = \omega(\Lambda^+) + \sum_{\lambda^+ \in \text{sub}(\Lambda^+)} m_{\Lambda^+}(\lambda^+) \omega(\lambda^+) \quad (2.12.1)$$

Burada en temel problem $m_{\Lambda^+}(\lambda^+)$ katsayılarının hesaplanmasıdır. Görüldüğü gibi Λ^+ orbitinin çok katlılığı 1 olarak tanımlanmıştır.

2.13. Yörünge Karakteri (Orbit Character)

λ^+ baskın ağırlık fonksiyonelinin Weyl yörüngesindeki elemanların üstel toplamı λ^+ 'nin yörünge karakteri olarak tanımlanır ve

$$\text{Ch}\omega(\lambda^+) \equiv \sum_{\lambda \in \omega(\lambda^+)} e^\lambda \quad (2.13.1)$$

şeklinde ifade edilir [8].

2.14. Temsil Karakteri

Λ^+ ve $R(\Lambda^+)$, sırasıyla sonlu bir cebirin baskın ağırlık fonksiyoneli ve indirgenemez temsili olmak üzere bu indirgenemez temsilin karakteri,

$$\text{Ch}R(\Lambda^+) \equiv \text{Ch}\omega(\Lambda^+) + \sum_{\lambda^+ \in \text{sub}(\Lambda^+)} m_{\Lambda^+}(\lambda^+) \text{Ch}\omega(\lambda^+) \quad (2.14.1)$$

şeklinde tanımlanır [7]. Aşağıda tanımlayacağımız Weyl karakter formülüyle birlikte kullanılmak üzere, bu ifadeye “karakter eşitliğinin sağ tarafı” diyelim. Sonuç olarak $R(\Lambda^+)$ temsiline karakteri, Λ^+ ve bunun tüm alt-baskın ağırlık fonksiyoneli kümesindeki baskın ağırlık fonksiyonellerinin yörüngelerinin karakterlerinin bir toplamıdır. Burada (2.12.1) tanımına yörünge karakteri kavramını da ekleyerek Λ^+ indirgenemez temsili için karakteri tanımlamış olduk.

2.15. Weyl Karakter Formülü (Weyl Character Formula)

(2.14.1)'de tanımladığımız temsil karakterindeki çok katlılıkların bulunabilmesi için klasik teoride geçerli olan temel formül Weyl karakter formülüdür. Λ^+ ve $R(\Lambda^+)$,

sırasıyla sonlu ya da sonsuz bir Lie cebirinin bir baskın ağırlık fonksiyoneli ve indirgenemez bir temsili olmak üzere, $\Lambda^{++} = \Lambda^+ + \rho$ şeklinde ise genel olarak,

$$A(\Lambda^{++}) \equiv \sum_{\sigma \in W} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(\Lambda^{++})} \quad (2.15.1)$$

olmak üzere, en genel Weyl karakter formülü şu şekildedir [9]

$$ChR(\Lambda^+) = \frac{A(\Lambda^{++})}{A(\rho)} \quad (2.15.2)$$

Bu ifadeye de, “karakter eşitliğinin sol tarafı” diyelim. Burada ρ , Φ^+ pozitif kök sistemi olmak üzere,

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha \quad (2.15.3)$$

şeklinde tanımlanır ve Weyl vektörü adını alır. (2.13.1), (2.14.1) ve (2.15.2) ifadelerinden,

$$ChR(\Lambda^+) = \frac{A(\Lambda^+ + \rho)}{A(\rho)} = \sum_{\lambda \in \omega(\Lambda^+)} e^\lambda + \sum_{\lambda^+ \in sub(\Lambda^+)} (m_{\Lambda^+}(\lambda^+) \sum_{\lambda \in \omega(\lambda^+)} e^\lambda) \quad (2.15.4)$$

elde edilir. Burada vurgulamamız gereken nokta, karakter eşitliğinin sol tarafında Weyl grubu üzerinden, sağ tarafında Weyl yörüngesi üzerinden bir toplam olduğudur. Her ne kadar Weyl grubu üzerinden olan toplamlar sonlu toplamlar olsada rankı yüksek cebirlerde bunları hesaplamak çok fazla zorlaşır. Örneğin, E_7 ve E_8 Lie cebirlerinin Weyl gruplarının boyutları sırasıyla 2.903.040 ve 696.729.600 dür. Bu kadar eleman üzerinden toplam yapmak yerine, bu elemanları daha basit bir şekilde ifade edip yeni bir forma sokarak daha basit toplamlar yapmak için yeni bir yola ihtiyacımız vardır.

3. LİE CEBİRLERİNE FARKLI BİR BAKIŞ AÇISI

3.1. Temel Ağırlık Fonksiyonelleri (Fundamental Weights)

2. bölümde belirttiğimiz gibi çok sayıda elemanı, daha az sayıda ortak formlarda yazabilmek için temel ağırlık fonksiyonellerini tanımlamalıyız. Rankı N olan bir cebirde λ_i ve α_i sırasıyla, temel baskın ağırlık fonksiyonelleri ve basit kökler olmak üzere temel ağırlık fonksiyonelleri,

$$\mu_1 = \lambda_1 \quad , \quad \mu_i = \lambda_1 - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \quad , \quad i = 2,3,\dots,N \quad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlanır [1,2,10].

3.2. Permütasyon Ağırlık Fonksiyonelleri (Permutation Weights)

Herhangi bir baskın ağırlık fonksiyoneli λ^+ 'nin Weyl yörüngesi $\omega(\lambda^+)$, her zaman bir ağırlık fonksiyoneli alt kümesi içerir. $\wp(\lambda^+)$ adını verdiğimiz bu ağırlık fonksiyoneli alt kümeleri genel olarak;

$$\sum_{i=1}^{N-1} k_i \lambda_i - k \lambda_N \quad , \quad k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.2.1)$$

formunda olurlar [10,11]. Her bir $\wp(\lambda^+)$ kümesi birbirinin permütasyonları şeklinde tek bir ortak formda yazılabilen elemanlardan oluştuğu için bu kümeye permütasyon ağırlık fonksiyonelleri kümesi denir. Genel olarak A_N Lie cebirlerinin baskın ağırlık fonksiyonellerinin yörüngelerinde tek bir $\wp(\lambda^+)$ kümesi olmasına karşın diğer cebirlerin baskın ağırlık fonksiyonellerinin yörüngelerinde birden fazla $\wp(\lambda^+)$ alt kümesi olacaktır, yani yörünge elemanları birden fazla ortak formun direkt toplamı olarak yazılabilirler. Λ^{++} baskın ağırlık fonksiyonelinin Weyl yörüngesinin

permütasyon ağırlık fonksiyonel kümeleri cinsinden ifadesi, \oplus sembolü, bu birleşimi belirtmek üzere,

$$\omega(\Lambda^{++}) \equiv \bigoplus_i \wp_i(\Lambda^{++}) \equiv \wp(\Lambda^{++}) \quad (3.2.2)$$

şeklinde yazılabilir [10].

3.3. Permütasyon Ağırlık Fonksiyonellerinde İşaret

(3.1.1) ile (3.2.1)'in sonucu olarak yazabileceğimiz bir permütasyon ağırlık fonksiyoneli,

$$\Lambda = \sum_{i=1}^N a_i \mu_i - n \lambda_N \quad a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.3.1)$$

olmak üzere $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$ şartı ile tanımlanan tamamen anti-simetrik tensör,

$$\varepsilon(a_1, a_2, \dots, a_k) = 1 \quad (3.3.2)$$

normalizasyonu altında,

$$\varepsilon(\Lambda) = \varepsilon(|2a_1 + n|, |2a_2 + n|, \dots, |2a_k + n|) \prod_{i=1}^k \frac{|2a_i + n|}{2a_i + n} \quad (3.3.3)$$

şeklinde tanımlanan $\varepsilon(\Lambda)$ 'ya bir permütasyon ağırlık fonksiyonelinin işaret fonksiyonu denir.

3.4. Weyl Karakter Formülüne Yeni Bir Bakış

(3.1.1) ifadesindeki temel ağırlık fonksiyonellerini kullanarak (2.13.1) ve (2.15.1) ifadelerini sırasıyla tekrar yazarsak,

$$Ch\omega(\lambda^+) \equiv \sum_{\mu \in \omega(\lambda^+)} e^\mu \quad (3.4.1)$$

$$A(\Lambda^{++}) \equiv \sum_{\mu \in \omega(\Lambda^{++})} \varepsilon(\mu) e^\mu \quad (3.4.2)$$

ifadelerini elde ederiz [11].

Görüldüğü gibi bu bakış açısıyla (2.15.1) ifadesinde Weyl grubu üzerinden olan toplam yerine temel ağırlık fonksiyonelleri cinsinden yazılmış Weyl yörüngesi üzerinden bir toplam vardır. (3.4.1) ve (3.4.2) ifadelerini kullanarak (2.15.4)'deki Weyl karakter formülünü yeniden yazarsak,

$$ChR(\Lambda^+) = \frac{A(\Lambda^+ + \rho)}{A(\rho)} = \sum_{\mu \in \omega(\Lambda^+)} e^\mu + \sum_{\lambda^+ \in sub(\Lambda^+)} (m_{\Lambda^+}(\lambda^+) \sum_{\mu \in \omega(\lambda^+)} e^\mu) \quad (3.4.3)$$

karakter eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte artık her terim temel ağırlık fonksiyonelleri cinsinden yazılmış oldu. Artık Weyl yörüngesi elemanlarını temel baskın ağırlık fonksiyonelleri λ_i 'ler yerine temel ağırlık fonksiyonelleri μ_i 'ler cinsinden düşüneceğiz.

3.5. Permütasyon Baskın Ağırlık Fonksiyonelleri ile Karakter Gösterimi

Karakter hesaplarımızı permütasyon ağırlık fonksiyonellerini kullanarak yapmak için, (3.4.2) ve (3.4.3)'ü (3.2.2) ifadesini düşünerek yeniden tanımlarsak;

$$A(\Lambda^{++}) \equiv \sum_{\mu \in \omega(\Lambda^{++})} \varepsilon(\mu) e^\mu = \sum_{\mu \in \wp(\Lambda^{++})} \varepsilon(\mu) e^\mu \quad (3.5.1)$$

$$ChR(\Lambda^+) = \frac{A(\Lambda^+ + \rho)}{A(\rho)} = \sum_{\mu \in \wp(\Lambda^+)} e^\mu + \sum_{\lambda^+ \in sub(\Lambda^+)} (m_{\Lambda^+}(\lambda^+) \sum_{\mu \in \wp(\lambda^+)} e^\mu) \quad (3.5.2)$$

ifadelerini elde ederiz. Burada vurgulanması gereken nokta, (2.15.1)'de klasik olarak tanımlanan karakter formülünde Weyl grup elemanları üzerinden bir toplam olması, fakat yeni bir bakışla tanımladığımız (3.5.1) eşitliğinde ilgili temsile ait Weyl yörüngesi elemanları üzerinden, yani permütasyon ağırlık fonksiyonelleri üzerinden bir toplam olduğudur.

4. SONLU LİE CEBİRLERİ İÇİN KARAKTER VE ÇOK KATLILIK HESABI

4.1. A_4 Lie Cebirinde Karakterin ve Çok Katlılıkların Açık Hesabı

Bu bölümde, 2. ve 3. bölümlerde verdiğimiz tanımları A_4 Lie cebirinde bir temsilin karakteri ve çok katlılıklarını hesaplamak için kullanacağız. İlk olarak genel A_N Lie cebirleri için, basit kökleri ve temel baskın ağırlık fonksiyonellerini, (3.1.1)'de tanımladığımız temel ağırlık fonksiyonelleri cinsinden yazarsak,

$$\alpha_i = \mu_i - \mu_{i+1} \quad (4.1.1)$$

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^i \mu_j \quad (4.1.2)$$

ifadelerini elde ederiz. Ayrıca temel ağırlık fonksiyonellerinin iç çarpım bağıntısı A_N Lie cebirleri için,

$$(\mu_i, \mu_j) = \delta_{ij} - \frac{1}{N+1} \quad (4.1.3)$$

şeklinde olup sadece A_N Lie cebirleri için geçerli olan

$$\sum_{i=1}^{N+1} \mu_i = 0 \quad (4.1.4)$$

bağıntısı vardır. (4.1.2) ve (4.1.4)'den dolayı (3.3.1)'i

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{N+1} a_i \mu_i \quad , \quad a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (4.1.5)$$

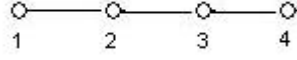
şeklinde yazabiliriz ve bu sonuçla birlikte (3.3.3)'de tanımladığımız işaret fonksiyonu da,

$$\varepsilon(\Lambda) = \varepsilon(a_1, a_2, \dots, a_N, a_{N+1}) \quad (4.1.6)$$

formuna indirgenmiş olur.

Şimdi A_4 Lie cebiri için karakter ve çok katlılık hesabını açık olarak gösterelim.

A_4 Lie cebirinin Dynkin diyagramı:



Şekil 4.1.1: A_4 Dynkin diyagramı

şeklindedir ve buna karşı gelen Cartan matrisi,

$$C(A_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır.

$i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere basit kök α_i 'ler

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = C(A_4)_{ij} \quad (4.1.7)$$

ile tanımlanıp, α_i ile λ_i temel baskın ağırlık fonksiyonelleri arasında:

$$\alpha_i = C(A_4)_{ij} \lambda_j \quad (4.1.8)$$

$$\langle \lambda_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij} \quad (4.1.9)$$

ilişkileri vardır. Temel ağırlıklar içinse,

$$(\mu_i, \mu_j) = \delta_{ij} - \frac{1}{5} \quad (4.1.10)$$

$$\sum_{i=1}^5 \mu_i = 0 \quad (4.1.11)$$

ilişkileri vardır [10]. Temel baskın ağırlık fonksiyonellerinin temel ağırlık fonksiyonelleri cinsinden ifadeleri de şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \mu_1 \\
\lambda_2 &= \mu_1 + \mu_2 \\
\lambda_3 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \\
\lambda_4 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4
\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Şimdi örnek olarak, $R(2\lambda_1 + \lambda_2)$ temsilinin karakterini ve buna karşı gelecek çok katlılıkları hesaplayalım. İlk olarak, $A(2\lambda_1 + \lambda_2 + \rho)$ ve $A(\rho)$ hesaplanmalıdır. ρ Weyl vektörü burada, temel baskın ağırlık fonksiyonelleri ve temel ağırlık fonksiyonelleri cinsinden,

$$\rho = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$$

şeklindedir. (2.15.2)'den dolayı karakter eşitliğinin sol tarafı,

$$\text{Ch}R(2\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{A(2\lambda_1 + \lambda_2 + \rho)}{A(\rho)} \tag{4.1.13}$$

şeklinde olur. Bu karakteri hesaplamak için (3.5.1)'i kullanmamız gerektiğinden, ilk olarak $\wp(2\lambda_1 + \lambda_2 + \rho)$ ve $\wp(\rho)$ permütasyon ağırlık fonksiyoneli kümelerini bulmalıyız. $i \neq j \neq k = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere, $2\lambda_1 + \lambda_2 + \rho$ ve ρ baskın ağırlık fonksiyonellerinin Weyl yörüngeleri, (3.2.2)'deki gibi bunları oluşturan permütasyon ağırlık fonksiyonelleri kümelerinin direkt toplamı ile ifade edilip (4.1.15) ve (4.1.17)'de açıkça verilmiştir.

$$\omega(2\lambda_1 + \lambda_2 + \rho) = \bigoplus_{i=1}^5 \wp_i(2\lambda_1 + \lambda_2 + \rho) \equiv \wp(2\lambda_1 + \lambda_2 + \rho) \tag{4.1.14}$$

$$\begin{aligned}
\wp_1(2\lambda_1 + \lambda_2 + \rho) &= \{ 6\mu_i + 3\mu_j + \mu_k + \lambda_4 \} \\
\wp_2(2\lambda_1 + \lambda_2 + \rho) &= \{ 7\mu_i + 4\mu_j + 2\mu_k - \lambda_4 \} \\
\wp_3(2\lambda_1 + \lambda_2 + \rho) &= \{ 7\mu_i + 4\mu_j + \mu_k - 2\lambda_4 \} \\
\wp_4(2\lambda_1 + \lambda_2 + \rho) &= \{ 7\mu_i + 2\mu_j + \mu_k - 4\lambda_4 \} \\
\wp_5(2\lambda_1 + \lambda_2 + \rho) &= \{ 4\mu_i + 2\mu_j + \mu_k - 7\lambda_4 \}
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

$$\omega(\rho) = \bigoplus_{i=1}^5 \wp_i(\rho) \equiv \wp(\rho) \quad (4.1.16)$$

$$\begin{aligned} \wp_1(\rho) &= \{ 3\mu_i + 2\mu_j + \mu_k + \lambda_4 \} \\ \wp_2(\rho) &= \{ 4\mu_i + 3\mu_j + 2\mu_k - \lambda_4 \} \\ \wp_3(\rho) &= \{ 4\mu_i + 3\mu_j + \mu_k - 2\lambda_4 \} \\ \wp_4(\rho) &= \{ 4\mu_i + 2\mu_j + \mu_k - 3\lambda_4 \} \\ \wp_5(\rho) &= \{ 3\mu_i + 2\mu_j + \mu_k - 4\lambda_4 \} \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Her iki tam-baskın ağırlık fonksiyonelinin de 5'er tane permütasyon ağırlık fonksiyoneli var gibi gözükse de, (4.1.11) ve (4.1.12) ifadeleri düşünüldüğünde, her birinin tek bir ortak formda yazılabileceği görülür.

$i \neq j \neq k \neq t = 1, 2, 3, 4, 5$ olmak üzere,

$$\omega(2\lambda_1 + \lambda_2 + \rho) = \wp(2\lambda_1 + \lambda_2 + \rho) = \{ 7\mu_i + 4\mu_j + 2\mu_k + \mu_t \} \quad (4.1.18)$$

$$\omega(\rho) = \wp(\rho) = \{ 4\mu_i + 3\mu_j + 2\mu_k + \mu_t \} \quad (4.1.19)$$

şeklinde tek formda yazılabilirler. Ayrıca (3.5.1)'de görüldüğü gibi A fonksiyonelinin hesaplamak için ilgili ağırlık fonksiyonelinin işaretine ihtiyacımız vardır. Permütasyon ağırlık fonksiyonelleri için (4.1.6)'daki işaret tanımından yararlanırsak,

$$\mathcal{E}(7\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4) = \mathcal{E}(7, 4, 2, 1, 0) = 1$$

$$\mathcal{E}(4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4) = \mathcal{E}(4, 3, 2, 1, 0) = 1$$

olacak şekilde , antisimetrik tensörleri normalize etmiş oluruz. (3.5.1) tanımı kullanılarak, (4.1.13) hesaplanır ve $e^{h_i} = x_i$ özelleştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} ChR(2\lambda_1 + \lambda_2) &= x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_1^3 x_3 + x_2^3 x_3 + x_1 x_3^3 + x_2 x_3^3 + x_1^3 x_4 + x_2^3 x_4 + x_3^3 x_4 + x_1 x_4^3 + \\ & x_2 x_4^3 + x_3 x_4^3 + x_1^3 x_5 + x_2^3 x_5 + x_3^3 x_5 + x_4^3 x_5 + x_1 x_5^3 + x_2 x_5^3 + x_3 x_5^3 + x_4 x_5^3 + \\ & 2(x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_2 x_4 + x_1 x_2^2 x_4 + x_1^2 x_3 x_4 + x_2^2 x_3 x_4 + x_1 x_3^2 x_4 + \\ & x_2 x_3 x_4^2 + x_1 x_2 x_4^2 + x_1 x_3 x_4^2 + x_2 x_3 x_4^2 + x_1^2 x_2 x_5 + x_1 x_2^2 x_5 + x_1^2 x_3 x_5 + x_2^2 x_3 x_5 + \\ & x_1 x_3^2 x_5 + x_2 x_3^2 x_5 + x_1^2 x_4 x_5 + x_2^2 x_4 x_5 + x_3^2 x_4 x_5 + x_1 x_4^2 x_5 + x_2 x_4^2 x_5 + x_3 x_4^2 x_5 + \\ & x_1 x_2 x_5^2 + x_1 x_3 x_5^2 + x_2 x_3 x_5^2 + x_1 x_4 x_5^2 + x_2 x_4 x_5^2 + x_3 x_4 x_5^2) + \\ & x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_4^2 + x_3^2 x_4^2 + x_1^2 x_5^2 + x_2^2 x_5^2 + x_3^2 x_5^2 + x_4^2 x_5^2 + \\ & 3(x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_5 + x_1 x_2 x_4 x_5 + x_1 x_3 x_4 x_5 + x_2 x_3 x_4 x_5) \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

sonucu ile birlikte karakter eşitliğinin sol tarafını bulmuş oluruz. Ayrıca karakter eşitliğinin sağ tarafına, yani yörünge karakterine bakmak istersek öncelikle baskın ağırlık fonksiyonelimizin, alt-baskın ağırlık fonksiyonellerini bulmalıyız. Bunun için (2.9.1)'den yararlanırsak, $2\lambda_1 + \lambda_2$ 'in alt-baskın ağırlık fonksiyonel kümesi

$$\{\lambda_1 + \lambda_3, 2\lambda_2, \lambda_4\} \quad (4.1.21)$$

elde edilir. (4.1.21)'i kullanarak (3.5.2)'yi yazarsak,

$$\begin{aligned} ChR(2\lambda_1 + \lambda_2) &= \frac{A(2\lambda_1 + \lambda_2 + \rho)}{A(\rho)} = m_{2\lambda_1 + \lambda_2}(2\lambda_1 + \lambda_2) \sum_{\mu \in \omega(2\lambda_1 + \lambda_2)} e^\mu + \\ & m_{2\lambda_1 + \lambda_2}(\lambda_1 + \lambda_3) \sum_{\mu \in \omega(\lambda_1 + \lambda_3)} e^\mu + \\ & m_{2\lambda_1 + \lambda_2}(2\lambda_2) \sum_{\mu \in \omega(2\lambda_2)} e^\mu + \\ & m_{2\lambda_1 + \lambda_2}(\lambda_4) \sum_{\mu \in \omega(\lambda_4)} e^\mu \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

elde edilir. Burada hesaplamada kullandığımız Weyl yörüngelerinden $\omega(2\lambda_1 + \lambda_2)$ 'nin 20 elemanı da örnek olarak (4.1.23)'de verilmiştir. Diğer yörüngeler $\omega(\lambda_1 + \lambda_3)$, $\omega(2\lambda_2)$ ve $\omega(\lambda_4)$ 'de temel ağırlık fonksiyonelleri cinsinden EK1'de verilmiştir.

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 3\mu_1 + \mu_2 & -\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 + 3\lambda_4 &= \mu_2 + 3\mu_4 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 &= \mu_1 + 3\mu_2 & \lambda_1 - 3\lambda_4 &= \mu_1 + 3\mu_5 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 3\mu_1 + \mu_3 & -3\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 &= 3\mu_3 + \mu_4 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_3 &= \mu_1 + 3\mu_3 & -3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_4 &= 3\mu_2 + \mu_5 \\ -3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 3\mu_2 + \mu_3 & -\lambda_2 - 2\lambda_3 + 3\lambda_4 &= \mu_3 + 3\mu_4 \\ 3\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4 &= 3\mu_1 + \mu_4 & -\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_4 &= \mu_2 + 3\mu_5 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= \mu_2 + 3\mu_3 & -3\lambda_2 + 3\lambda_3 - \lambda_4 &= 3\mu_3 + \mu_5 \\ \lambda_1 - 3\lambda_3 + 3\lambda_4 &= \mu_1 + 3\mu_4 & -\lambda_2 + \lambda_3 - 3\lambda_4 &= \mu_3 + 3\mu_5 \\ -3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 &= 3\mu_2 + \mu_4 & -3\lambda_3 + 2\lambda_4 &= 3\mu_4 + \mu_5 \\ 3\lambda_1 - \lambda_4 &= 3\mu_1 + \mu_5 & -\lambda_3 - 2\lambda_4 &= \mu_4 + 3\mu_5 \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Sonuçlardan da görüldüğü gibi bu elemanlar tek bir ortak formun permütasyonlarından ibaret olduğundan tek bir permütasyon ağırlık fonksiyoneli kümesi ile,

$$\omega(2\lambda_1 + \lambda_2) = \wp(3\mu_i + \mu_j) \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5 \quad , \quad i \neq j \quad (4.1.24)$$

şeklinde ifade edilebilirler. Şimdi (4.1.22) eşitliğinin sağ tarafındaki her bir toplama hesaplayarak $e^{\mu_i} = x_i$ özelleştirmesini yaparsak;

$$\sum_{\mu \in \omega(2\lambda_1 + \lambda_2)} e^{\mu} = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_1^3 x_3 + x_2^3 x_3 + x_1 x_3^3 + x_2 x_3^3 + x_1^3 x_4 + x_2^3 x_4 + x_3^3 x_4 + x_1 x_4^3 + x_2 x_4^3 + x_3 x_4^3 + x_1^3 x_5 + x_2^3 x_5 + x_3^3 x_5 + x_4 x_5^3 + x_1 x_5^3 + x_2 x_5^3 + x_3 x_5^3 + x_4 x_5^3$$

$$\sum_{\mu \in \omega(\lambda_1 + \lambda_3)} e^{\mu} = x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_2 x_4 + x_1 x_2^2 x_4 + x_1^2 x_3 x_4 + x_2^2 x_3 x_4 + x_1 x_3^2 x_4 + x_2 x_3 x_4^2 + x_1 x_2 x_4^2 + x_1 x_3 x_4^2 + x_2 x_3 x_4^2 + x_1^2 x_2 x_5 + x_1 x_2^2 x_5 + x_1^2 x_3 x_5 + x_2^2 x_3 x_5 + x_1 x_3^2 x_5 + x_2 x_3^2 x_5 + x_1^2 x_4 x_5 + x_2^2 x_4 x_5 + x_3^2 x_4 x_5 + x_1 x_4^2 x_5 + x_2 x_4^2 x_5 + x_3 x_4^2 x_5 + x_1 x_2 x_5^2 + x_1 x_3 x_5^2 + x_2 x_3 x_5^2 + x_1 x_4 x_5^2 + x_2 x_4 x_5^2 + x_3 x_4 x_5^2$$

$$\sum_{\mu \in \omega(2\lambda_2)} e^{\mu} = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_4^2 + x_3^2 x_4^2 + x_1^2 x_5^2 + x_2^2 x_5^2 + x_3^2 x_5^2 + x_4^2 x_5^2$$

$$\sum_{\mu \in \omega(\lambda_4)} e^{\mu} = x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_5 + x_1 x_2 x_4 x_5 + x_1 x_3 x_4 x_5 + x_2 x_3 x_4 x_5$$

sonuçları elde edilir. Bu sonuçları (4.1.22)'de yerine koyarak (4.1.20) ile karşılaştırsak, çok katlılıklar,

$$m_{2\lambda_1 + \lambda_2}(2\lambda_1 + \lambda_2) = 1$$

$$m_{2\lambda_1 + \lambda_2}(\lambda_1 + \lambda_3) = 2$$

$$m_{2\lambda_1 + \lambda_2}(2\lambda_2) = 1$$

$$m_{2\lambda_1 + \lambda_2}(\lambda_4) = 3$$

olarak bulunur.

4.2. B_4 Lie Cebirinde Karakterin ve Çok Katlılıkların Açık Hesabı

Bu kısımda, 2. ve 3. bölümlerde verdiğimiz tanımları B_4 Lie cebiri için uygulayarak bir temsilin karakteri ve çok katlılıklarını hesaplayalım. İlk olarak genel B_N Lie

cebirleri için, basit kökleri ve temel baskın ağırlık fonksiyonellerini (3.1.1)'de tanımladığımız temel ağırlık fonksiyonelleri cinsinden yazarsak,

$$\alpha_i = \mu_i - \mu_{i+1} \quad , \quad \alpha_N = \mu_N \quad (i = 1, 2, \dots, N-1) \quad (4.2.1)$$

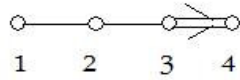
$$\lambda_i = \sum_{j=1}^i \mu_j \quad , \quad \lambda_N = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \mu_j \quad (i = 1, 2, \dots, N-1) \quad (4.2.2)$$

ifadelerini elde ederiz [10]. Ayrıca temel ağırlık fonksiyonellerinin iç çarpım bağıntısı B_N Lie cebirleri için,

$$(\mu_i, \mu_j) = \delta_{ij} \quad (4.2.4)$$

şeklindedir.

B_4 Lie cebirinin Dynkin diyagramı,



Şekil 4.2.1: B_4 Dynkin diyagramı

şeklindedir ve buna karşı gelen Cartan matrisi,

$$C(B_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır. $i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere basit kök α_i 'ler için

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = C(B_4)_{ij} \quad (4.2.4)$$

temel ağırlıklar içinse,

$$(\mu_i, \mu_j) = \delta_{ij} \quad (4.2.5)$$

$$\sum_{i=1}^4 \mu_i = 2\lambda_4 \quad (4.2.6)$$

ilişkileri vardır. Temel baskın ağırlık fonksiyonlarının temel ağırlık fonksiyonelleri cinsinden ifadeleri de (4.2.2)'den dolayı şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_1 \\ \lambda_2 &= \mu_1 + \mu_2 \\ \lambda_3 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \\ \lambda_4 &= \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Örnek olarak, $R(\lambda_2 + \lambda_4)$ temsilinin karakterini ve buna karşı gelecek çok katlılıkları hesaplayalım. İlk olarak, $A(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho)$ ve $A(\rho)$ hesaplanmalıdır. ρ Weyl vektörü burada temel ağırlık fonksiyonelleri cinsinden;

$$\rho = \frac{7}{2}\mu_1 + \frac{5}{2}\mu_2 + \frac{3}{2}\mu_3 + \frac{1}{2}\mu_4 \quad (4.2.8)$$

şeklindedir. $R(\lambda_2 + \lambda_4)$ temsilinin karakterini hesaplamak için (2.15.2)'de tanımlanan karakter eşitliğinin sol tarafı, yani Weyl karakteri şu şekildedir:

$$ChR(\lambda_2 + \lambda_4) = \frac{A(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho)}{A(\rho)} \quad (4.2.9)$$

Bu karakteri bulmak için (3.5.1)'i kullanmamız gerektiğinden, ilk olarak $\wp(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho)$ ve $\wp(\rho)$ permütasyon ağırlık fonksiyoneli kümelerini hesaplamalıyız. $i \neq j \neq k = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere, $\lambda_2 + \lambda_4 + \rho$ ve ρ baskın ağırlık fonksiyonellerinin Weyl yörüngeleri, bunları oluşturan permütasyon ağırlık fonksiyonelleri kümelerinin direkt toplamı ile ifade edilip (4.2.11) ve (4.2.13) de açıkça verilmiştir.

$$\omega(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) = \bigoplus_{i=1}^{16} \wp_i(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) \equiv \wp(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) \quad (4.2.10)$$

$$\begin{aligned} \wp_1(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) &= \{ 4\mu_i + 3\mu_j + \mu_k + 2\lambda_4 \} \\ \wp_2(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) &= \{ 6\mu_i + 5\mu_j + 3\mu_k - 2\lambda_4 \} \\ \wp_3(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) &= \{ 7\mu_i + 6\mu_j + 3\mu_k - 4\lambda_4 \} \\ \wp_4(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) &= \{ 7\mu_i + 6\mu_j + \mu_k - 4\lambda_4 \} \\ \wp_5(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) &= \{ 9\mu_i + 6\mu_j + 5\mu_k - 8\lambda_4 \} \\ \wp_6(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) &= \{ 9\mu_i + 6\mu_j + 3\mu_k - 8\lambda_4 \} \\ \wp_7(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) &= \{ 9\mu_i + 5\mu_j + 2\mu_k - 8\lambda_4 \} \\ \wp_8(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) &= \{ 9\mu_i + 3\mu_j + 2\mu_k - 8\lambda_4 \} \\ \wp_9(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) &= \{ 9\mu_i + 7\mu_j + 6\mu_k - 10\lambda_4 \} \\ \wp_{10}(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) &= \{ 9\mu_i + 7\mu_j + 4\mu_k - 10\lambda_4 \} \\ \wp_{11}(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) &= \{ 7\mu_i + 6\mu_j + \mu_k - 10\lambda_4 \} \\ \wp_{12}(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) &= \{ 9\mu_i + 6\mu_j + 3\mu_k - 10\lambda_4 \} \\ \wp_{13}(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) &= \{ 7\mu_i + 4\mu_j + \mu_k - 10\lambda_4 \} \\ \wp_{14}(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) &= \{ 9\mu_i + 4\mu_j + 3\mu_k - 10\lambda_4 \} \\ \wp_{15}(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) &= \{ 6\mu_i + 3\mu_j + \mu_k - 10\lambda_4 \} \\ \wp_{16}(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho) &= \{ 4\mu_i + 3\mu_j + \mu_k - 10\lambda_4 \} \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

$$\omega(\rho) = \bigoplus_{i=1}^{16} \wp_i(\rho) \equiv \wp(\rho) \quad (4.2.12)$$

$$\begin{aligned} \wp_1(\rho) &= \{ 3\mu_i + 2\mu_j + \mu_k + \lambda_4 \} \\ \wp_2(\rho) &= \{ 4\mu_i + 3\mu_j + 2\mu_k - \lambda_4 \} \\ \wp_3(\rho) &= \{ 5\mu_i + 4\mu_j + 2\mu_k - 3\lambda_4 \} \\ \wp_4(\rho) &= \{ 5\mu_i + 4\mu_j + \mu_k - 3\lambda_4 \} \\ \wp_5(\rho) &= \{ 6\mu_i + 4\mu_j + 3\mu_k - 5\lambda_4 \} \\ \wp_6(\rho) &= \{ 6\mu_i + 4\mu_j + 2\mu_k - 5\lambda_4 \} \\ \wp_7(\rho) &= \{ 6\mu_i + 3\mu_j + \mu_k - 5\lambda_4 \} \\ \wp_8(\rho) &= \{ 6\mu_i + 2\mu_j + \mu_k - 5\lambda_4 \} \\ \wp_9(\rho) &= \{ 6\mu_i + 5\mu_j + 4\mu_k - 7\lambda_4 \} \\ \wp_{10}(\rho) &= \{ 6\mu_i + 5\mu_j + 3\mu_k - 7\lambda_4 \} \\ \wp_{11}(\rho) &= \{ 5\mu_i + 4\mu_j + \mu_k - 7\lambda_4 \} \\ \wp_{12}(\rho) &= \{ 6\mu_i + 4\mu_j + 2\mu_k - 7\lambda_4 \} \\ \wp_{13}(\rho) &= \{ 5\mu_i + 3\mu_j + \mu_k - 7\lambda_4 \} \\ \wp_{14}(\rho) &= \{ 6\mu_i + 3\mu_j + 2\mu_k - 7\lambda_4 \} \\ \wp_{15}(\rho) &= \{ 4\mu_i + 2\mu_j + \mu_k - 7\lambda_4 \} \\ \wp_{16}(\rho) &= \{ 3\mu_i + 2\mu_j + \mu_k - 7\lambda_4 \} \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

(4.2.11) ve (4.2.13)'de görüldüğü gibi hem $\lambda_2 + \lambda_4 + \rho$ hem de ρ baskın ağırlık fonksiyonlarının Weyl yörüngeleri 16 tane alt permütasyon ağırlık fonksiyoneli kümesine, yani alt-yörüngeye sahiptir. Her bir alt kümenin boyutu da 24 olduğundan, Weyl yörüngesinin boyutunun $16 \times 24 = 384$ olduğu ve Weyl grubunun boyutuna eşit olduğu görülmüş olur. Yörüngeleri bildiğimize göre (4.2.9)'u yani karakter eşitliğinin sol tarafını hesaplamak için işaretlere ihtiyacımız vardır. Burada örnek olarak $\wp_8(\lambda_2 + \lambda_4 + \rho)$ alt-orbit kümesinden $\Lambda = 3\mu_1 + 9\mu_2 + 2\mu_3 - 8\lambda_4$ elemanının işaretini hesaplayalım. Bunun için (3.3.3)'den yararlanırsak,

$$\varepsilon(3\mu_1 + 9\mu_2 + 2\mu_3 - 8\lambda_4) = \varepsilon(|2 \times 3 - 8|, |2 \times 9 - 8|, |2 \times 2 - 8|, |2 \times 0 - 8|) \frac{|2 \times 3 - 8|}{2 \times 3 - 8} \frac{|2 \times 9 - 8|}{2 \times 9 - 8} \frac{|2 \times 2 - 8|}{2 \times 2 - 8} \frac{|2 \times 0 - 8|}{2 \times 0 - 8}$$

$$\varepsilon(3\mu_1 + 9\mu_2 + 2\mu_3 - 8\lambda_4) = \varepsilon(2, 10, 4, 8)(-1)(+1)(-1)(-1)$$

$$\varepsilon(2, 10, 4, 8) = +\varepsilon(10, 8, 4, 2) \text{ olduğundan,}$$

$\varepsilon(3\mu_1 + 9\mu_2 + 2\mu_3 - 8\lambda_4) = -1$ olarak bulunur.

(4.2.9)'u hesaplayarak $e^{\mu_i} = x_i$ ve $e^{-\lambda_4} = \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2 x_3 x_4}}$ özelleştirmelerini yaparsak;

karakter eşitliğinin sol tarafını bulmuş oluruz [EK2]. Karakter eşitliğinin sağ tarafını bulmak için önce $\lambda_2 + \lambda_4$ ' ün alt-baskın ağırlık fonksiyonellerini ve bunların yörüngelerini permütasyon baskın ağırlık fonksiyonelleri cinsinden bulmalıyız. $\lambda_2 + \lambda_4$ ' ün alt-baskın ağırlık fonksiyonel kümesi aşağıdaki gibidir.

$$\{\lambda_1 + \lambda_4, \lambda_4\} \quad (4.2.14)$$

$$\omega(\lambda_2 + \lambda_4) = \bigoplus_{i=1}^9 \wp_i(\lambda_2 + \lambda_4) \equiv \wp(\lambda_2 + \lambda_4) \quad (4.2.15)$$

$$\begin{aligned} \wp_1(\lambda_2 + \lambda_4) &= \{ \mu_i + \mu_j + \lambda_4 \} \\ \wp_2(\lambda_2 + \lambda_4) &= \{ 2\mu_i + 2\mu_j + \mu_k - \lambda_4 \} \\ \wp_3(\lambda_2 + \lambda_4) &= \{ 2\mu_i + 2\mu_j - \lambda_4 \} \\ \wp_4(\lambda_2 + \lambda_4) &= \{ 2\mu_i + 2\mu_j - 3\lambda_4 \} \\ \wp_5(\lambda_2 + \lambda_4) &= \{ 2\mu_i + \mu_j - 3\lambda_4 \} \\ \wp_6(\lambda_2 + \lambda_4) &= \{ \mu_i + \mu_j - 3\lambda_4 \} \\ \wp_7(\lambda_2 + \lambda_4) &= \{ 3\mu_i + 2\mu_j + 2\mu_k - 3\lambda_4 \} \\ \wp_8(\lambda_2 + \lambda_4) &= \{ 3\mu_i + 2\mu_j + \mu_k - 3\lambda_4 \} \\ \wp_9(\lambda_2 + \lambda_4) &= \{ 3\mu_i + \mu_j + \mu_k - 3\lambda_4 \} \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

$$\omega(\lambda_1 + \lambda_4) = \bigoplus_{i=1}^8 \wp_i(\lambda_1 + \lambda_4) \equiv \wp(\lambda_1 + \lambda_4) \quad (4.2.17)$$

$$\begin{aligned} \wp_1(\lambda_1 + \lambda_4) &= \{ \mu_i + \lambda_4 \} \\ \wp_2(\lambda_1 + \lambda_4) &= \{ 2\mu_i + \mu_j + \mu_k - \lambda_4 \} \\ \wp_3(\lambda_1 + \lambda_4) &= \{ 2\mu_i + \mu_j - \lambda_4 \} \\ \wp_4(\lambda_1 + \lambda_4) &= \{ 2\mu_i - \lambda_4 \} \\ \wp_5(\lambda_1 + \lambda_4) &= \{ 2\mu_i + 2\mu_j + 2\mu_k - 3\lambda_4 \} \\ \wp_6(\lambda_1 + \lambda_4) &= \{ 2\mu_i + 2\mu_j + \mu_k - 3\lambda_4 \} \\ \wp_7(\lambda_1 + \lambda_4) &= \{ 2\mu_i + \mu_j + \mu_k - 3\lambda_4 \} \\ \wp_8(\lambda_1 + \lambda_4) &= \{ \mu_i + \mu_j + \mu_k - 3\lambda_4 \} \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

$$\omega(\lambda_4) = \bigoplus_{i=1}^5 (\lambda_4) \equiv \wp(\lambda_4) \quad (4.2.19)$$

$$\begin{aligned} \wp_1(\lambda_4) &= \{ \lambda_4 \} \\ \wp_2(\lambda_4) &= \{ \mu_i - \lambda_4 \} \\ \wp_3(\lambda_4) &= \{ \mu_i + \mu_j - \lambda_4 \} \\ \wp_4(\lambda_4) &= \{ \mu_i + \mu_j + \mu_k - \lambda_4 \} \\ \wp_5(\lambda_4) &= \{ -\lambda_4 \} \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Bu sonuçları (4.2.21)'de kullanarak karakter eşitliğinin sağ tarafını [EK2] da hesaplarız.

$$\begin{aligned} ChR(\lambda_2 + \lambda_4) &= m_{\lambda_2 + \lambda_4}(\lambda_2 + \lambda_4) Ch\omega(\lambda_2 + \lambda_4) + \\ & m_{\lambda_2 + \lambda_4}(\lambda_1 + \lambda_4) Ch\omega(\lambda_1 + \lambda_4) + \\ & m_{\lambda_2 + \lambda_4}(\lambda_4) Ch\omega(\lambda_4) \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Karakter eşitliğinin sağ ve sol tarafları karşılaştırıldığında $\lambda_2 + \lambda_4$ baskın ağırlık fonksiyonelinin temsilindeki çok katlılıklar

$$\begin{aligned} m_{\lambda_2 + \lambda_4}(\lambda_2 + \lambda_4) &= 1 \\ m_{\lambda_2 + \lambda_4}(\lambda_1 + \lambda_4) &= 3 \\ m_{\lambda_2 + \lambda_4}(\lambda_4) &= 9 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Görüldüğü gibi aynı bir yörüngedeki tüm permütasyon ağırlık fonksiyoneli kümeleri aynı çok katlılığa sahiptirler.

5. AFİN LİE CEBİRLERİ

Afin Lie cebirlerinde Cartan matrisinin tersi olmadığından, temel baskın ağırlık fonksiyonelleri (2.5.2)'den dolayı tanımlanamazlar. Bu nedenle Afin Lie cebirleri için sonlu Lie cebirlerine ek olarak bazı kavramlar gereklidir.

5.1. Derinlik (Depth)

Afin Lie cebirlerinde, sonlu Lie cebirlerindeki tanımlamalarımıza ek olarak giren “derinlik” kavramı, kendisi sıfır olmayan fakat boyunu sıfır olarak seçeceğimiz ve δ ile göstereceğimiz bir sanal kök olarak tanımlanır. Tüm Afin Lie cebirleri için δ ’yı,

$$\sum_{i=0}^N c_i \alpha_i = \delta \quad , \quad c_i \neq 0 \quad (5.1.1)$$

olacak şekilde tanımlarız [7,12]. Burada c_i katsayıları Kac İşaretleri (Kac Marks) olarak bilinir. Bu katsayılar $(\delta, \delta) = 0$ koşulu altında her Afin cebir için minimum olacak şekilde seçilmelidir. Derinliğin, cebirin diğer elemanlarıyla skaler çarpımı da şu şekildedir:

$$\begin{aligned} (\delta, \alpha_i) &= 0 \\ (\delta, \delta) &= 0 \\ (\Lambda_0, \delta) &= 1 \\ (\mu_i, \delta) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

$i = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere Λ_0 ve Λ_i ’ler, Afin cebirin, λ_i ’ler ise bu Afin cebiri oluşturan sonlu cebirin (horizontal algebra) temel baskın ağırlık fonksiyonelleri olmak üzere,

$$\Lambda_i = m_i \Lambda_0 + \lambda_i \quad (5.1.3)$$

şeklinde bir tanımlama yapmak mümkündür. Burada m_i katsayıları $(\delta, \alpha_i) = 0$ koşulunu sağlayacak şekilde her Afin cebir için farklı olacaktır. Ayrıca derinlik katsayısı, genel bir ağırlık fonksiyoneli, $(\Lambda, \Lambda_0) = M$ iç çarpımıyla da tanımlanır. Burada M 'ye Λ 'nın derinliği denir.

5.2. Seviye (Level)

Sonlu Lie cebirlerindeki tanımlara ek olarak Afin Lie cebirlerinde kullanılacak olan bir diğer kavram da “seviye” kavramıdır. Λ , Afin cebirin en genel bir ağırlık fonksiyoneli olmak üzere,

$$(\Lambda, \delta) = k \quad (5.2.1)$$

şeklinde yazılan ifade de k 'ya Λ 'nın seviyesi denir.

5.3. Afin Lie cebirleri'nde Baskın Ağırlık Fonksiyonelleri

M derinlik, k seviye ve μ^+ sonlu cebirin bir baskın ağırlık fonksiyoneli olmak üzere, Afin Lie cebirlerinde en genel bir baskın ağırlık fonksiyoneli,

$$\Lambda = -M\delta + k\Lambda_0 + \mu^+ \quad (5.3.1)$$

formunda yazılabilir [13].

5.4. Affine Lie Cebirleri için Karakter Hesabı ve String Fonksiyonları

Sonlu Lie cebirleri için anlattığımız Weyl karakter formülü ve çok katlılık problemi Afin Lie cebirlerinde Weyl-Kac karakter formülü ve string fonksiyonları olarak ifade edilir. Afin cebirleri, sonsuz cebirler olduğundan Weyl grubu da sonsuz boyutludur. (2.15.2)'deki Weyl karakter formülünden dolayı string fonksiyonu hesabında bir mertebeye en fazla hangi uzunlukta Weyl grup elemanından katkı geleceğini bilemeyiz. Fakat sonlu cebirler için işin içine kattığımız permütasyon ağırlık fonksiyonelleri, string fonksiyonlarını istediğimiz mertebede hesaplamamıza yardımcı olacaktır.

5.5. String Fonksiyonları (String Functions)

Afin Lie cebirlerinde baskın ağırlık fonksiyonlarının Weyl yörüngeleri sonlu olmadığından, sonlu cebirler için kullandığımız çok katlılık tanımı burada tek başına geçerli olamayacaktır ve dolayısıyla yeni bir tanıma ihtiyacımız vardır. Sonsuzluğu için içine katmak için çok katlılık katsayılarından oluşan sonsuz bir seri olan string fonksiyonlarını,

$$S_{\Lambda^+}(\Lambda^+) \equiv \sum_{M=M_0(\Lambda^+, \Lambda^+)}^{\infty} c_{\Lambda^+, \Lambda^+}(M) e^{-\delta M} \quad (5.5.1)$$

şeklinde tanımlarız [7,12]. Burada $M_0(\Lambda^+, \Lambda^+)$, Λ^+ 'nin bir maksimal ağırlık fonksiyoneli olan Λ^+ 'nin sahip olduğu minimum derinliktir. (5.5.1) ile amacımız sonlu cebirlerde olduğu gibi $c_{\Lambda^+, \Lambda^+}(M)$ çok katlılıklarını hesaplayarak string fonksiyonlarını elde etmektir. Burada, sonlu cebirlerdeki gibi her bir yörünge karakterine karşı gelen tek bir çok katlılık yerine bir fonksiyon hesaplayacak olmamızın nedeni maksimal ağırlık fonksiyonellerinin Weyl yörüngelerinde sonsuz sayıda permütasyon ağırlık fonksiyoneli olmasıdır. $c_{\Lambda^+, \Lambda^+}(M)$ katsayıları da aslında her bir derinlikte bulunan sonlu sayıdaki permütasyon ağırlık fonksiyonellerinin, temsile kaç kez katkıda bulunduğunu göstermektedir.

5.6. Weyl-Kac Karakter Formülü (Weyl-Kac Character Formula)

Sonlu cebirler için (2.14.1)'de tanımladığımız temsil karakteri formülündeki çok katlılıkları, (2.15.4)'deki Weyl karakter formülünü kullanarak hesaplayabiliyorduk. Afin cebirlerde ise, (3.5.2)'deki Weyl karakter formülü, Kac'ın yaptığı katkılarla birlikte Weyl-Kac karakter formülü adını alarak yeniden tanımlanmıştır. Karakter formülünün sol tarafı aynen kalmasına rağmen, sağ tarafta artık çok katlılıklar yerine string fonksiyonları tanımlıdır. (5.5.1)'de tanımladığımız string fonksiyonu ifadesi $S_{\Lambda^+}(\Lambda^+)$ 'yı (3.5.2)'de yerine koyarsak, Afin Lie cebirleri için karakter formülü olan Weyl-Kac karakter formülünü elde etmiş oluruz, yani Afin Lie cebirlerinde karakter eşitliğinin sağ tarafı,

$$ChR(\Lambda^+) = \sum_{\Lambda^+ \in \max w(\Lambda^+)} (S_{\Lambda^+}(\Lambda^+)) \sum_{\mu \in \omega(\Lambda^+)} e^{-\delta M} e^\mu \quad (5.6.1)$$

olarak yeniden tanımlanmış olur [13]. Burada, $\max w(\Lambda^+)$, Λ^+ 'nin maksimal ağırlıklarının kümesini belirtiyor. Λ^+ ve λ^+ sırasıyla, bir Afin ve bir sonlu Lie cebirinin baskın ağırlık fonksiyonelleri olmak üzere,

$$\Lambda^+ = k\Lambda_0 + \lambda^+ \quad (5.6.2)$$

formundadır. σ_α , bir basit yansıma operatörü ve μ sonlu bir cebirin ağırlık fonksiyoneli olmak üzere genel bir Afin ağırlık fonksiyonelinin görünümü

$$\sigma_\alpha(\Lambda^+) = k\Lambda_0 - M\delta + \mu \quad (5.6.3)$$

şeklindedir. Weyl yörüngesindeki her elemanın boyu aynı olması gerektiğinden, yörüngedeki elemanların sonlu cebire ait olan kısımları μ 'lerin hepsi, $M \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$(\mu, \mu) - (\lambda^+, \lambda^+) = 2kM \quad (5.6.4)$$

denklemini çözerler [13]. Görüldüğü gibi bu denklemi baskın olmayan bir μ 'de çözebilir. Fakat her μ , bir μ^+ 'nin permütasyonu olduğundan, sadece μ^+ 'ları bulmamız yeterli olacaktır, yani her bir ağırlık fonksiyoneli bir permütasyon ağırlık fonksiyoneli ile temsil etmiş oluyoruz. Fakat bu denklem μ^+ 'ları bulmamız için yeterli değildir. Burada μ^+ 'ları bulmak için (2.9.1)'de tanımladığımız alt-baskın ağırlık fonksiyoneli kavramından yararlanmamız gerekir. λ^+ , Λ^+ 'nin Weyl yörüngesi içinde bulduğumuz tüm permütasyon ağırlık fonksiyonellerinin bir alt-baskın ağırlık fonksiyonelidir. Alt-baskın ağırlık fonksiyoneli λ^+ olan sonsuz tane baskın ağırlık bulmanın mümkün olduğu düşünüldüğünde ki, bu bilgi Afin Weyl yörüngelerinin sonsuz boyutlu olmasıyla da örtüşür, aşağıdaki alt-baskın ağırlık fonksiyonellik ilişkisini kullanabiliriz [13].

$$\mu^+ = \lambda^+ + \sum_i n_i \alpha_i \quad (5.6.5)$$

Burada n_i ' ler negatif olmayan tamsayılardır. Görüldüğü gibi bu eşitlikten sonsuz sayıda $\{n_1, n_2, \dots, n_r\}$ kümesi ve dolayısıyla sonsuz sayıda μ^+ bulunur. Fakat burada bulduğumuz μ^+ 'lardan, (5.6.4) denklemini çözenleri alırsak, her bir M derinliği için sonlu sayıda μ^+ bulunacaktır ve dolayısıyla Weyl-Kac karakter formülüne de her bir M derinliği için sonlu sayıda katkı gelmiş olacaktır. Burada dikkat etmemiz gereken nokta, bu iki eşitlikle, sadece temel baskın ağırlık fonksiyonellerinin Weyl yörüngelerini bulabileceğimizdir. Herhangi bir baskın ağırlık fonksiyonelinin Weyl yörüngesini bulmak için ise aşağıdaki yardımcı teoremi kullanmamız gerekir.

5.7. Baskın Ağırlık Fonksiyonellerinin Weyl Yörüngelerine Yardımcı Teorem

Afin cebirin herhangi bir

$$\Lambda^+ = a_0\Lambda_0 + a_1\Lambda_1 + a_2\Lambda_2 + \dots + a_N\Lambda_N \quad (5.7.1)$$

baskın ağırlık fonksiyonelinin Weyl yörüngesinde bulunan bir μ^+ sonlu cebir ağırlık fonksiyonelinin (5.6.4) denklemini çözebilmesi için,

$$\mu^+ = \Theta_1 + \Theta_2 + \dots + \Theta_N \quad (5.7.2)$$

şartı sağlanmalıdır [13]. Burada,

$$\Theta_1 \in \wp(\Lambda_1, M_1) , \Theta_2 \in \wp(\Lambda_2, M_2) , \dots , \Theta_N \in \wp(\Lambda_N, M_N)$$

şeklinde permütasyon ağırlık fonksiyonel kümelerinden seçilmiş Θ elemanlarından (5.7.1)'i sağlayanlar aynı zamanda,

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_N \quad (5.7.3)$$

şartı altında (5.6.4) denklemini de çözüyorsa, Λ^+ baskın ağırlık fonksiyonelinin yörüngesine girerler. Afin Lie cebirlerinde, permütasyon ağırlık fonksiyonel kümeleri, son-lu cebirlerdeki gibi sonlu sayıda ortak formlar yerine sonsuz sayıda ortak formlardan oluştuğundan, işin içine sonluluğu katmak için, bu kümelerde belli derinliğe kadar olan elemanları almayı tercih ediyoruz, yani $\wp(\Lambda, M)$ kümesi ile kast olunan, Λ baskın ağırlık fonksiyonelinin yörüngesindeki, M derinliğinde ve M'den daha küçük derinliğe sahip olan elemanlar topluluğudur.

5.8. Afin Lie Cebirlerinde İşaret

$\varepsilon(s_1, s_2, \dots, s_d)$, aşağıdaki normalizasyon ile birlikte tamamen antisimetrik bir tensör olsun.

$$\varepsilon(s_1, s_2, \dots, s_d) = +1 \quad , \quad s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_d \quad (5.8.1)$$

5.8.1. $A_N^{(1)}$ Afin Lie Cebirlerinde İşaret

$n_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $s_i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ olmak üzere, k seviyesine sahip bir baskın ağırlık fonksiyonelinin Weyl yörüngesinin elemanı μ^+ 'nın,

$$\mu^+ = \sum_{i=1}^{N+1} (s_i + kn_i) \mu_i \quad (5.8.1.1)$$

şeklindeki bir ayrışımı ile birlikte,

$$\sum_{i=1}^{N+1} (s_i + kn_i) \mu_i \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N+1} s_i \mu_i \quad (5.8.1.2)$$

dönüşümü olur ve μ^+ 'nın işareti:

$$\varepsilon(\mu^+) = \varepsilon(s_1, s_2, \dots, s_{N+1}) \left(\prod_{i=1}^{N+1} (-1)^{n_i} \right)^N \quad (5.8.1.3)$$

olarak tanımlanır.

5.8.2. $B_N^{(1)}$ Afin Lie Cebirlerinde İşaret

$$\Lambda^+ = k\Lambda_0 + n\lambda_N + a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \dots + a_N\mu_N$$

$$\Lambda = -M\delta + k\Lambda_0 + m\lambda_N + b_1\mu_1 + b_2\mu_2 + \dots + b_N\mu_N$$

Λ , Λ^+ baskın ağırlık fonksiyonelinin yörüngesindeki bir ağırlık fonksiyoneli ise, $i = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere yapılan

$$u_i = 2a_i + n \quad , \quad v_i = 2b_i + m \quad , \quad A_i = \{-u_i, u_i\} \quad (5.8.2.1)$$

tanımları altında,

$$y_i = v_i - 2kp_i \quad , \quad y_i \in A_j \quad i = j = 1, 2, \dots, N \quad (5.8.2.2)$$

olacak şekilde seçilen p_i 'lerle birlikte Λ 'nın işareti,

$$\varepsilon(\Lambda) = \varepsilon(|y_1|, |y_2|, \dots, |y_N|) \prod_{i=1}^N p_i \frac{y_i}{|y_i|} \quad (5.8.2.3)$$

olarak tanımlanır.

5.9. Maksimal Ağırlık Fonksiyoneli (Maximal Weight)

Sonlu Lie cebirleri için (2.9.1)'de tanımladığımız şekilde Λ^+ 'nın alt-baskın ağırlık fonksiyoneller kümesi $sub(\Lambda^+)$ ise, ve

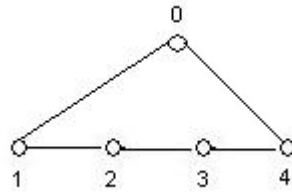
$$\forall \Lambda \in sub(\Lambda^+) \quad \text{için} \quad \Lambda + \delta \notin sub(\Lambda^+) \quad (5.9.1)$$

ise, Λ 'ya Λ^+ 'nın bir maksimal ağırlık fonksiyoneli denir [7].

6. AFİN LİE CEBİRLERİNDE KARAKTER VE STRING FONKSİYON HESAPLARI

6.1. $A_4^{(1)}$ Afın Lie Cebirinde Karakterin ve String Fonksiyonlarının Açık Hesabı

Bu bölümde, 5. bölümde verdiğimiz tanımları $A_4^{(1)}$ Afın Lie cebirinden bir temsilin karakteri ve string fonksiyonlarını hesaplamak için kullanacağız. $A_4^{(1)}$ Afın Lie cebiri için Dynkin diyagramı ve Cartan matrisi şu şekildedir:



Şekil 6.1.1: $A_4^{(1)}$ Dynkin diyagramı

$$C(A_4^{(1)}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Burada $R(2\Lambda_0)$ temsilinin karakterini ve buna karşı gelen string fonksiyonlarını hesaplayalım. İlk olarak (2.15.2)'yi kullanarak karakter eşitliğinin sol tarafını hesaplamak için $2\Lambda_0 + \rho$ ve ρ baskın ağırlık fonksiyonlarının Weyl yörüngelerini ve bunlara karşılık gelen işaretleri hesaplamalıyız. Weyl yörüngelerini hesaplamak için yardımcı teoremden belirtildiği gibi temel baskın ağırlık fonksiyonlarının Weyl yörüngelerinin hepsi teker teker bulunmalı ve bunların birleşimiyle birlikte $2\Lambda_0 + \rho$ ve ρ Weyl yörüngeleri hesaplanmalıdır [EK 3]. Karakteri hesaplamak için ayrıca işaretleri hesaplamamız gerekir. Bununla ilgili bir örnek vermek için, $\omega(2\Lambda_0 + \rho)$ yörüngesinden bir ağırlık fonksiyoneli

$$\Lambda = -6\delta + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 10\mu_2 + 9\mu_3 + 8\mu_4$$

seçersek, (5.8.1.1)'e göre Λ 'nın sonlu cebire ait kısmının,

$$13\mu_1 + 10\mu_2 + 9\mu_3 + 8\mu_4 = (6 + 7 \times 1)\mu_1 + (3 + 7 \times 1)\mu_2 + (2 + 7 \times 1)\mu_3 + (1 + 7 \times 1)\mu_4$$

şeklinde bir ayrışımı vardır. Görüldüğü gibi $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$, $n_5 = 0$ dır.

Bunları (5.8.1.3)'de yerine koyarsak,

$$\varepsilon(\Lambda) = \varepsilon(6, 3, 2, 1, 0) ((-1)^4)^4 = +1$$

şeklinde Λ 'nın işaretinin +1 olduğu görülür. Karakter eşitliğinin sağ tarafını bulmak için ise (5.6.1)'i hesaplamalıyız [EK4]. Bunun için önce $2\Lambda_0$ baskın ağırlık fonksiyonelinin alt-baskın ağırlık fonksiyonellerini bulmamız gerektiğinden, aşağıdaki SUB fonksiyonundan oluşan programı [14] kullanırsak,

```
SUB[ 2Λ0, 0, 3] :=
For[i0 = 0, i0 < 4, i0++, For[i1 = 0, i1 < 4, i1++,
For[i2 = 0, i2 < 4, i2++, For[i3 = 0, i3 < 4, i3++,
For[i4 = 0, i4 < 4, i4++, For[M = 0, M < 4, M++,
sonuc = Expand[ 2Λ0 - (i0* Λ0 + i1* Λ1 + i2* Λ2 + i3* Λ3 + i4* Λ4 - M* δ)];
If[(pro[ 2Λ0, δ] - (i0 + i1 + i2 + i3 + i4)) == 0 &&
Coefficient[sonuc, α0] >= 0 && IntegerQ[Coefficient[sonuc, α0]] &&
Coefficient[sonuc, α1] >= 0 && IntegerQ[Coefficient[sonuc, α1]] &&
Coefficient[sonuc, α2] >= 0 && IntegerQ[Coefficient[sonuc, α2]] &&
Coefficient[sonuc, α3] >= 0 && IntegerQ[Coefficient[sonuc, α3]] &&
Coefficient[sonuc, α4] >= 0 && IntegerQ[Coefficient[sonuc, α4]]
Print[Expand[i0* Λ0 + i1* Λ1 + i2* Λ2 + i3* Λ3 + i4* Λ4 - M* δ ]]]]]]]]]]
```

$2\Lambda_0$ 'ın alt-baskın ağırlık fonksiyonel kümesini şu şekilde buluruz:

$$\{\Lambda_2 + \Lambda_3 - 2\delta, \Lambda_2 + \Lambda_3 - 3\delta, \Lambda_1 + \Lambda_4 - \delta, \Lambda_1 + \Lambda_4 - 2\delta, \\ \Lambda_1 + \Lambda_4 - 3\delta, 2\Lambda_0 - 2\delta, 2\Lambda_0 - 3\delta, \dots\}$$

Görüldüğü gibi alt-baskın ağırlık kümesi sonsuz eleman içermektedir. Bu yüzden sonlu cebirlerden farklı olarak Afin cebirlerde, alt-baskın ağırlık fonksiyonelleri kavramı yerine (5.9.1)'de tanımladığımız maksimal ağırlık fonksiyoneli kavramını kullanarak, bu alt-baskın ağırlık fonksiyoneli kümesinden maksimal olan ağırlık

fonksiyonellerini almalıyız. Bu sonuca bakarak ve (5.9.1) tanımını kullanarak $2\Lambda_0$ baskın ağırlık fonksiyonelinin maksimal ağırlık fonksiyonellerinin cümlesi şu şekilde olur:

$$\max w(2\Lambda_0) = \{\Lambda_2 + \Lambda_3 - 2\delta, \Lambda_1 + \Lambda_4 - \delta, 2\Lambda_0\}$$

ya da, $M_0(\Lambda^+, \Lambda^+)$, Λ^+ 'nin derinliği olmak üzere,

$$\begin{aligned} M_0(2\Lambda_0, 2\Lambda_0) &= 0 \\ M_0(\Lambda_1 + \Lambda_4, 2\Lambda_0) &= 1 \\ M_0(\Lambda_2 + \Lambda_3, 2\Lambda_0) &= 2 \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

şeklinde de gösterilebilir. (5.6.1)'i hesaplamak için, $\Lambda_2 + \Lambda_3$, $\Lambda_1 + \Lambda_4$ ve $2\Lambda_0$ baskın ağırlık fonksiyonellerinin yörüngelerini bulmamız gerekir. Bu yörüngeler EK3'de açıkça verilmiştir. $2\Lambda_0$ baskın ağırlık fonksiyonelinin üç tane maksimal ağırlığı olduğundan $R(2\Lambda_0)$ indirgenemez temsiline karşılık üç tane string fonksiyonu bulmalıyız. $e^{-\delta M} = q^M$ özelleştirmesi ile birlikte, (5.5.1) denklemi de kullanılarak üç tane string fonksiyonu da şu şekilde gösterilebilir:

$$\begin{aligned} S_{2\Lambda_0}(2\Lambda_0) &= \sum_{M=0}^{\infty} q^M c_{2\Lambda_0, 2\Lambda_0}(M) = c_0 + c_1 q + c_2 q^2 + c_3 q^3 + \dots \\ S_{2\Lambda_0}(\Lambda_1 + \Lambda_4) &= \sum_{M=1}^{\infty} q^M c_{\Lambda_1 + \Lambda_4, 2\Lambda_0}(M) = b_1 q + b_2 q^2 + b_3 q^3 + \dots \\ S_{2\Lambda_0}(\Lambda_2 + \Lambda_3) &= \sum_{M=2}^{\infty} q^M c_{\Lambda_2 + \Lambda_3, 2\Lambda_0}(M) = a_2 q^2 + a_3 q^3 + \dots \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

$e^{\mu_i} = x_i$, $e^{-\delta M} = q^M$, $e^{\Lambda_0} = 1$ özelleştirmeleri ile birlikte, bulmamız gereken üç tane string fonksiyonu olduğu için, (4.1.4)'e de uygun olacak şekilde üç farklı sayı ataması takımı şu şekilde seçilebilir:

$$x_1 = 2, x_2 = 15, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = \frac{1}{5}, x_5 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 2, x_2 = 35, x_3 = \frac{1}{5}, x_4 = \frac{1}{7}, x_5 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 2, x_2 = 55, x_3 = \frac{1}{5}, x_4 = \frac{1}{11}, x_5 = \frac{1}{2}$$

Bu atamaları yaparak, her biri için karakter eşitliğinin sağ ve sol taraflarını [EK4]

5. derinliğe kadar olan permütasyon ağırlık fonksiyonellerini [EK3] kullanarak hesaplarız ve elde edilen üç farklı denklem sistemini kullanarak, string fonksiyonlarını 8.mertebeğe kadar şu şekilde bulunur.

$$S_{2\Lambda_0}(2\Lambda_0) = 1 + 4q + 24q^2 + 100q^3 + 390q^4 + 1328q^5 - \\ \frac{202507357836365162639329826381}{4406630546379600000}q^6 - \\ \frac{521703502753797527208999967339517478811}{18754178942336939640000000}q^7 - \\ \frac{110833859454882871408903195690536982113891303500407}{8799704095216268900879829000000000}q^8 + \dots$$

$$S_{2\Lambda_0}(\Lambda_1 + \Lambda_4) = q + 8q^2 + 43q^3 + 186q^4 + 693q^5 + \\ \frac{141054966337976734354894633}{220331527318980000}q^6 + \\ \frac{3413302807699393320961803836113411}{7501671576934775856000}q^7 + \\ \frac{380016806878016152817196397698596884025063005781}{1759940819043253780175965800000000}q^8 + \dots$$

$$S_{2\Lambda_0}(\Lambda_2 + \Lambda_3) = 2q^2 + 16q^3 + 83q^4 + 344q^5 + \\ \frac{844790109607325483456977}{13770720457436250}q^6 - \\ \frac{2430104186552257919423819982010243}{46885447355842349100000}q^7 - \\ \frac{353578334400008681840923975253405238855040759}{13749537648775420157624732812500}q^8 + \dots$$

Karakter eşiliğinin sağ ve sol taraflarını, 8.derinliğe kadar olan permütasyon ağırlık fonksiyonellerini [EK3] de hesaba katarak bulmak istersek [EK5], string fonksiyonlarını bu kez:

$$S_{2\Lambda_0}(2\Lambda_0) = 1 + 4q + 24q^2 + 100q^3 + 390q^4 + 1328q^5 + 4208q^6 + 12344q^7 + 34260q^8 + \dots$$

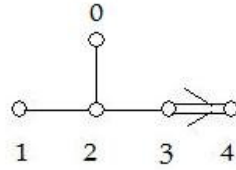
$$S_{2\Lambda_0}(\Lambda_1 + \Lambda_4) = q + 8q^2 + 43q^3 + 186q^4 + 693q^5 + 2316q^6 + 7115q^7 + 20418q^8 + \dots$$

$$S_{2\Lambda_0}(\Lambda_2 + \Lambda_3) = 2q^2 + 16q^3 + 83q^4 + 344q^5 + 1236q^6 + 4000q^7 + 11948q^8 + \dots$$

şeklinde doğru olarak elde ederiz. Görüldüğü gibi, string fonksiyonlarını kaçınıcı mertebeye kadar doğru olarak bulmak istiyorsak, o derinliğe kadar olan tüm permütasyon ağırlık fonksiyonellerini hesaba katmamız gerekeceği açıktır.

6.2. $B_4^{(1)}$ Afın Lie Cebirinde Karakterin ve String Fonksiyonlarının Açık Hesabı

Bu bölümde, 5. bölümde verdiğimiz tanımları $B_4^{(1)}$ Afın Lie cebirinden bir temsilin karakteri ve string fonksiyonlarını hesaplamak için kullanacağız. $B_4^{(1)}$ Afın Lie cebiri için Dynkin diagramı ve Cartan matrisi şu şekildedir:



Şekil 6.2.1: $B_4^{(1)}$ Dynkin diyagramı

$$C(B_4^{(1)}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Burada $R(\Lambda_1)$ temsilinin karakterini ve buna karşı gelen string fonksiyonlarını hesaplayalım. (2.15.2)'deki karakter eşitliğinin sol tarafı ve bunu hesaplamak için gerekli olan Weyl yörüngeleri permütasyon ağırlık fonksiyonelleri cinsinden EK6'da verilmiştir. Ayrıca gerekli olan işaretleri bulmak için bir örnek olarak, $\omega(\Lambda_1 + \rho)$ yörüngesinden,

$$\Lambda = -3\delta + 8\Lambda_0 + 3\lambda_4 + 6\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$$

elemanının işaretini inceleyelim. $\omega(\Lambda_1 + \rho)$ yörüngesinde,

$$\Lambda^+ = 8\Lambda_0 + \lambda_4 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$$

olduğundan, (5.8.2.1)'deki tanımları kullanırsak,

$$\begin{array}{lll} u_1 = 2 \times 4 + 1 = 9 & v_1 = 2 \times 6 + 3 = 15 & A_1 = \{-9, 9\} \\ u_2 = 2 \times 2 + 1 = 5 & v_2 = 2 \times 2 + 3 = 7 & A_2 = \{-5, 5\} \\ u_3 = 2 \times 1 + 1 = 3 & v_3 = 2 \times 1 + 3 = 5 & A_3 = \{-3, 3\} \\ u_4 = 2 \times 0 + 1 = 1 & v_4 = 2 \times 0 + 3 = 3 & A_4 = \{-1, 1\} \end{array}$$

sonuçlarını elde ederiz. Ayrıca (5.8.2.2) tanımını kullanırsak, $k=8$ olduğundan,

$$\begin{aligned} y_1 &= v_1 - 16p_1 = 15 - 16 \times 1 = -1 \in A_4 \\ y_2 &= v_2 - 16p_2 = 7 - 16 \times 1 = -9 \in A_1 \\ y_3 &= v_3 - 16p_3 = 5 - 16 \times 0 = 5 \in A_2 \\ y_4 &= v_4 - 16p_4 = 3 - 16 \times 0 = 3 \in A_3 \end{aligned}$$

$$y_1 = -1, y_2 = -9, y_3 = 5, y_4 = 3$$

$$p_1 = 1, p_2 = 1, p_3 = 0, p_4 = 0$$

olarak bulunur. Bu değerler (5.8.2.3)'de yerine koyulursa,

$$\varepsilon(\Lambda) = -1$$

olarak bulunur. Λ_1 ağırlık fonksiyonelinin 2 tane maksimal ağırlığı olduğundan $R(\Lambda_1)$ temsiline karşılık iki tane string fonksiyonu bulmalıyız. Λ_1 'in alt-baskın ağırlık fonksiyonel cümlesi şu şekildedir:

$$\{ \Lambda_0, \Lambda_0 - \delta, \Lambda_0 - 2\delta, \Lambda_1, \Lambda_1 - \delta, \Lambda_1 - 2\delta, \dots \}$$

Bu sonuca bakarak (5.9.1) tanımını kullanırsak, Λ_1 baskın ağırlık fonksiyonelinin maksimal ağırlık fonksiyonellerinin kümesi şu şekilde bulunur.

$$\max w(\Lambda_1) = \{ \Lambda_0, \Lambda_1 \}$$

yani, diğer bir gösterimle:

$$\begin{aligned} M_0(\Lambda_0, \Lambda_1) &= 0 \\ M_0(\Lambda_1, \Lambda_1) &= 0 \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

şeklindedir. (5.6.1)'i hesaplamak için, Λ_0 ve Λ_1 baskın ağırlık fonksiyonlarının yörüngelerini bulmamız gerekir. Bu yörüngeler EK6'da açıkça verilmiştir.

$e^{-\delta M} = q^M$ özelleştirmesi ile birlikte, (5.5.1) denklemi de kullanılarak iki string fonksiyonu şu şekilde gösterilebilir:

$$\begin{aligned} S_{\Lambda_1}(\Lambda_0) &= \sum_{M=0}^{\infty} q^M c_{\Lambda_0, \Lambda_1}(M) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + a_3 q^3 + \dots \\ S_{\Lambda_1}(\Lambda_1) &= \sum_{M=0}^{\infty} q^M c_{\Lambda_1, \Lambda_1}(M) = b_0 + b_1 q + b_2 q^2 + b_3 q^3 + \dots \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

$e^{\mu_i} = x_i$, $e^{-\delta M} = q^M$, $e^{\Lambda_0} = 1$, $e^{-\lambda_4} = \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2 x_3 x_4}}$ özelleştirmeleri ile birlikte,

bulmamız gereken iki tane string fonksiyonu olduğu için, (4.2.6)'ya da uygun olacak şekilde iki farklı sayı ataması takımı şu şekilde seçilebilir:

$$x_1 = 4, x_2 = 9, x_3 = 16, x_4 = 25$$

$$x_1 = 9, x_2 = 16, x_3 = 25, x_4 = 36$$

Her bir sayı ataması takımı için, karakter eşitliğinin sağ ve sol taraflarını [EK7] 7. derinliğe kadar olan permütasyon ağırlık fonksiyonlarını de hesaba katarak bulursak, (6.2.2)'deki string fonksiyonlarını şu şekilde elde ederiz

$$S_{\Lambda_1}(\Lambda_0) = 1 + 5q + 19q^2 + 59q^3 + 165q^4 + 421q^5 + 1010q^6 + 2295q^7 + \dots$$

$$S_{\Lambda_1}(\Lambda_1) = 1 + 4q + 15q^2 + 45q^3 + 125q^4 + 316q^5 + 758q^6 + 1720q^7 + \dots$$

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, klasik olarak Weyl karakter formülünde yüksek mertebelerden çoklu çarpımlara sahip Weyl grup elemanları üzerinden yapılan toplamın temel ağırlık fonksiyonelleri yardımıyla tanımlanan permütasyon ağırlık fonksiyonelleri kullanılarak yeniden tanımlanması ve grup elemanlarının ortak formlarda yazılmasıyla birlikte çok katlılıkların ve string fonksiyonlarının daha kolay bir şekilde hesaplandığı görülmüştür. Ayrıca klasik yöntemi kullanarak, hangi uzunluktaki Weyl grup elemanlarının string fonksiyonlarının kaçınıcı mertebesine katkı sağladığı bilinmemesine karşın, permütasyon ağırlık fonksiyonellerini kullandığımızda, string fonksiyonlarının istediğimiz mertebesini elde edebildiğimizi gördük. İlk bölümde verilen genel tanımların 2. ve 3. bölümlerde yeni bir bakış açısıyla Weyl grup elemanları toplamından Weyl orbit elemanları toplamına dönüştüğü ve bu elemanlarında temel ağırlık fonksiyonelleri cinsinden belli ortak formlarda yazıldığı anlatılmıştır. Örnek olarakta, A_4 Lie cebirinden $R(2\lambda_1 + \lambda_2)$ ve B_4 Lie cebirinden $R(\lambda_2 + \lambda_4)$ temsillerinin karakterleri hesaplanarak çok katlılıkların tamsayılar çıktığı görülmüştür. 5. ve 6. bölümlerde ise sonsuz cebirlerin bir tipi olan Afin Lie cebirleri tanımlanarak, bu cebirlerin karakterlerinin ve bunlara karşı gelen string fonksiyonlarının, permütasyon ağırlık fonksiyonellerini ve bunlar için ayrıca tanımlanan işaretleri kullanarak istenilen mertebeye kadar rahatça hesaplandığı gösterilmiştir. Örnek olarak $A_4^{(1)}$ Afin Lie cebirinden $R(2\Lambda_0)$ temsilinin ve $B_4^{(1)}$ Afin Lie cebirinden $R(\Lambda_1)$ temsilinin string fonksiyonları hesaplanmıştır. Sonlu ve Afin Lie cebirlerinde kullandığımız bu yeni yöntemi, daha ileriki çalışmalarımızda, Afin ötesi cebirler olan hiperbolik cebirlerde de uygulayarak, buradan elde edeceğimiz fonksiyonların yapıları hakkında çalışmalar yapmayı amaçlamaktayız. Şu ana kadar hiperbolik Lie cebirlerinde karakterlerin ve bunlara karşı gelecek fonksiyonların hesaplanmamış olması da bu çalışmayı orijinal yapmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] **Karadayı, H.R.**, 1981. Anatomy of Grand Unifying Groups I ICTP preprints
- [2] **Karadayı, H.R.**, 1981. Anatomy of Grand Unifying Groups II ICTP preprints
- [3] **Carter, R.**, 2005. Lie Algebras of Finite and Affine Type
- [4] **Green, M., Schwarz, J., ve Witten, E.**, 1987. Superstring Theory
- [5] **Humphreys J.E.**, 1972. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory,
Springer-Verlag.
- [6] **Humphreys J.E.**, 1990. Reflection Groups and Coxeter Groups, Cambridge Univ
- [7] **Kac, V.G.**, 1990. Infinite Dimensional Lie Algebras, N.Y., Cambridge Univ
- [8] **Karadayı, H.R.**, 1998. A(n) multiplicity rules and Schur functions
- [9] **Weyl, H.**, 1946. The Classical Groups, N.J. Princeton Univ. Press
- [10] **Canoğlu, A.**, 1984. Klasik ve Ayrıcalıklı Cebirlerin Weyl Yörüngelerinde Alt
Yörünge Ayrışimleri, Doktora Tezi İ.T.Ü., Fen-Edebiyat Fak.
- [11] **Karadayı, H.R.**, ve **Güngörmez, M.**, 1999. J.Phys.A32:1701-1707
- [12] **Kass, S., Moody, R.V., Patera, J., ve Slansky, R.**, 1990. Affine Lie Algebras,
Weight Multiplicities and Branching Rules, Univ. Calif.Press
- [13] **Karadayı, H.R.**, ve **Güngörmez, M.**, 1999. Permutation weights for Affine Lie
algebras, math-ph/9906011
- [14] **Wolfram, S.**, 1990. MathematicaTM, Addison-Wesley

EK-1

A_4 sonlu Lie cebirinde:

$\lambda_1 + \lambda_3$ baskın ağırlık fonksiyonelinin Weyl orbitinin temel baskın ağırlık fonksiyonelleri ve temel ağırlık fonksiyonelleri cinsinden dökümü:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - \lambda_3 &= 2\mu_1 + \mu_4 + \mu_5 & -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 &= 2\mu_2 + \mu_3 + \mu_5 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 2\mu_2 + \mu_4 + \mu_5 & \lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4 &= \mu_1 + 2\mu_3 + \mu_5 \\ \lambda_1 + \lambda_3 &= 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4 &= \mu_2 + 2\mu_3 + \mu_5 \\ -2\lambda_2 + \lambda_3 &= 2\mu_3 + \mu_4 + \mu_5 & 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 &= 2\mu_1 + \mu_3 + \mu_4 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 &= 2\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 &= \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 & \lambda_1 - 2\lambda_3 + \lambda_4 &= \mu_1 + 2\mu_4 + \mu_5 \\ \lambda_2 - 2\lambda_4 &= \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_5 & -\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 &= \mu_2 + 2\mu_4 + \mu_5 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 - 2\lambda_4 &= \mu_2 + \mu_3 + 2\mu_5 & -\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 &= \mu_3 + 2\mu_4 + \mu_5 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 &= \mu_1 + \mu_3 + 2\mu_5 & \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 &= 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_4 \\ -\lambda_2 - \lambda_4 &= \mu_3 + \mu_4 + 2\mu_5 & -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 &= \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 &= 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_5 & \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= \mu_1 + 2\mu_3 + \mu_4 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_4 &= \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_5 & -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= \mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4 \\ \lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_4 &= \mu_1 + \mu_4 + 2\mu_5 & \lambda_2 - 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_4 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 &= \mu_2 + \mu_4 + 2\mu_5 & -\lambda_1 - \lambda_3 + 2\lambda_4 &= \mu_2 + \mu_3 + 2\mu_4 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 &= 2\mu_1 + \mu_3 + \mu_5 & \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 &= \mu_1 + \mu_3 + 2\mu_4 \end{aligned}$$

$2\lambda_2$ baskın ağırlık fonksiyonelinin Weyl orbitinin temel baskın ağırlık fonksiyonelleri ve temel ağırlık fonksiyonelleri cinsinden dökümü:

$$\begin{aligned} 2\lambda_2 &= 2\mu_1 + 2\mu_2 & -2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_4 &= 2\mu_2 + 2\mu_5 \\ -2\lambda_3 &= 2\mu_4 + 2\mu_5 & -2\lambda_2 + 2\lambda_3 - 2\lambda_4 &= 2\mu_3 + 2\mu_5 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_3 &= 2\mu_2 + 2\mu_3 & -2\lambda_2 + 2\lambda_4 &= 2\mu_3 + 2\mu_4 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 2\mu_1 + 2\mu_3 & 2\lambda_1 - 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= 2\mu_1 + 2\mu_4 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_4 &= 2\mu_1 + 2\mu_5 & -2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= 2\mu_2 + 2\mu_4 \end{aligned}$$

λ_4 baskın ağırlık fonksiyonelinin Weyl orbitinin temel baskın ağırlık fonksiyonelleri ve temel ağırlık fonksiyonelleri cinsinden dökümü:

$$-\lambda_1 = \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \mu_1 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5$$

$$\lambda_2 - \lambda_3 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_4 + \mu_5$$

$$\lambda_3 - \lambda_4 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_5$$

$$\lambda_4 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$$

EK-2

Sonlu B_4 Lie cebirinde $R(\lambda_2 + \lambda_4)$ indigenemez temsilinin karakterinin sol ve sağ tarafları aşağıda sırasıyla verilmiştir.

$$\text{Sol}(\text{ChR}(\lambda_2 + \lambda_4)) =$$

$$\frac{1}{x_1 x_2 x_3 x_4 \sqrt{x_1 x_2 x_3 x_4}} (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)(1+x_4) \\ (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_1 x_4 + x_2 x_4 + \\ x_1^2 x_2 x_4 + x_1 x_2^2 x_4 + x_3 x_4 + x_1^2 x_3 x_4 + 3x_1 x_2 x_3 x_4 + x_2^2 x_3 x_4 + x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 + \\ x_1 x_3^2 x_4 + x_2 x_3^2 x_4 + x_1^2 x_2 x_3^2 x_4 + x_1 x_2^2 x_3^2 x_4 + x_1 x_2 x_4^2 + x_1 x_3 x_4^2 + x_2 x_3 x_4^2 + \\ x_1^2 x_2 x_3 x_4^2 + x_1 x_2^2 x_3 x_4^2 + x_1 x_2 x_3^2 x_4^2)$$

$$\text{Sağ}(\text{ChR}(\lambda_2 + \lambda_4)) =$$

$$\frac{1}{x_1 x_2 x_3 x_4 \sqrt{x_1 x_2 x_3 x_4}} (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)(1+x_4) \\ (a_2 x_1 x_2 + a_2 x_1 x_3 + a_2 x_2 x_3 - 3a_2 x_1 x_2 x_3 + a_3 x_1 x_2 x_3 + a_2 x_1^2 x_2 x_3 + a_2 x_1 x_2^2 x_3 + \\ a_2 x_1 x_2 x_3^2 + a_2 x_1 x_4 + a_2 x_2 x_4 - 3a_2 x_1 x_2 x_4 + a_3 x_1 x_2 x_4 + a_2 x_1^2 x_2 x_4 + a_2 x_1 x_2^2 x_4 + \\ a_2 x_3 x_4 - 3a_2 x_1 x_3 x_4 + a_3 x_1 x_3 x_4 + a_2 x_1^2 x_3 x_4 - 3a_2 x_2 x_3 x_4 + a_3 x_2 x_3 x_4 + a_1 x_1 x_2 x_3 x_4 + \\ 6a_2 x_1 x_2 x_3 x_4 - 4a_3 x_1 x_2 x_3 x_4 - 3a_2 x_1^2 x_2 x_3 x_4 + a_3 x_1^2 x_2 x_3 x_4 + a_2 x_2^2 x_3 x_4 - 3a_2 x_1 x_2^2 x_3 x_4 + \\ a_3 x_1 x_2^2 x_3 x_4 + a_2 x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 + a_2 x_1 x_3^2 x_4 + a_2 x_2 x_3^2 x_4 - 3a_2 x_1 x_2 x_3^2 x_4 + a_3 x_1 x_2 x_3^2 x_4 + \\ a_2 x_1^2 x_2 x_3^2 x_4 + a_2 x_1 x_2^2 x_3^2 x_4 + a_2 x_1 x_2 x_4^2 + a_2 x_1 x_3 x_4^2 + a_2 x_2 x_3 x_4^2 - 3a_2 x_1 x_2 x_3 x_4^2 + a_3 x_1 x_2 x_3 x_4^2 + \\ a_2 x_1^2 x_2 x_3 x_4^2 + a_2 x_1 x_2^2 x_3 x_4^2 + a_2 x_1 x_2 x_3^2 x_4^2)$$

Sol ve Sağ taraf karşılaştırılırsa çok katlılıklar $a_1 = 9$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$ olarak bulunur.

EK-3

Burada $A_4^{(1)}$ Afin Lie cebirinde Λ baskın ağırlık fonksiyonelinin yörüngeleri 8. derinliğe kadar $\wp(\Lambda, 8)$ formunda verilmiştir.

Λ_0 yörüngesinde $\wp(\Lambda_0, 8)$

Λ_0	$-6\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2$
$-\delta + \Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$	$-6\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 + 3\mu_4$
$-2\delta + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-7\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$
$-3\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-7\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 + 3\mu_4$
$-3\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 + 2\mu_4$	$-7\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3$
$-4\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 + 2\mu_4$	$-7\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 + \mu_4$
$-4\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2$	$-8\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 + \mu_4$
$-4\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 + \mu_4$	$-8\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 + 2\mu_4$
$-5\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$	$-8\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3$

Λ_1 yörüngesinde $\wp(\Lambda_1, 8)$

$\Lambda_0 + \mu_1$	$-5\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2$
$-\delta + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 + \mu_4$	$-6\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 + 2\mu_4$
$-2\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$	$-6\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2$
$-2\delta + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3$	$-6\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$
$-3\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-7\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$
$-3\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 + 2\mu_4$	$-7\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 + 3\mu_4$
$-4\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 + 2\mu_4$	$-8\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3 + 3\mu_4$
$-5\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-8\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3$
$-5\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 + \mu_4$	

Λ_2 yörüngesinde $\wp(\Lambda_2, 8)$

$\Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2$	$-5\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$
$-\delta + \Lambda_0 + 2\mu_1$	$-5\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 + 2\mu_4$
$-\delta + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$	$-6\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 + 2\mu_4$
$-2\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 + \mu_4$	$-6\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 + \mu_4$
$-3\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3$	$-7\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 + \mu_4$
$-3\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 + 3\mu_4$	$-7\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2$
$-4\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$	$-8\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$
$-4\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 + 2\mu_4$	$-8\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 + 3\mu_4$
$-4\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$	

Λ_3 yörüngesinde $\wp(\Lambda_3, 8)$

$\Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-5\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3$
$-\delta + \Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2$	$-5\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 + 2\mu_4$
$-\delta + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 + 2\mu_4$	$-6\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 + 2\mu_4$
$-2\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$	$-6\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$
$-3\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1$	$-7\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 + 2\mu_4$
$-3\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 + \mu_4$	$-7\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 + \mu_4$
$-4\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 + \mu_4$	$-8\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$
$-4\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 + 3\mu_4$	$-8\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 + \mu_4$
$-4\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	

Λ_4 yörüngesinde $\wp(\Lambda_4, 8)$

$\Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$	$-5\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3$
$-\delta + \Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-6\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 + 3\mu_4$
$-2\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 + 2\mu_4$	$-6\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$
$-2\delta + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2$	$-6\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 + 2\mu_4$
$-3\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2$	$-7\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 + \mu_4$
$-3\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$	$-7\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 + 2\mu_4$
$-4\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$	$-8\delta + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3$
$-5\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 + \mu_4$	$-8\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3$
$-5\delta + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 + 3\mu_4$	

$\Lambda_2 + \Lambda_3$ yörüngesinde $\wp(\Lambda_2 + \Lambda_3, 8)$

$2\Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-6\delta + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 5\mu_2 + 5\mu_3 + 3\mu_4$
$-\delta + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 + \mu_4$	$-6\delta + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 + 2\mu_4$
$-\delta + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2$	$-7\delta + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 6\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$
$-2\delta + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 + 3\mu_4$	$-7\delta + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$
$-2\delta + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2$	$-7\delta + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 6\mu_2 + 6\mu_3 + 6\mu_4$
$-3\delta + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 + \mu_4$	$-7\delta + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3$
$-3\delta + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 + 2\mu_4$	$-8\delta + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 7\mu_2 + 3\mu_3 + 3\mu_4$
$-4\delta + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + 5\mu_3 + 5\mu_4$	$-8\delta + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 6\mu_2 + 3\mu_3$
$-4\delta + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 + 2\mu_4$	$-8\delta + 2\Lambda_0 + 8\mu_1 + 6\mu_2 + 6\mu_3 + 5\mu_4$
$-4\delta + 2\Lambda_0 + 5\mu_1$	$-8\delta + 2\Lambda_0 + 8\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 + 2\mu_4$
$-5\delta + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 + \mu_4$	$-8\delta + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3$
$-5\delta + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3 + 2\mu_4$	

$\Lambda_1 + \Lambda_4$ yörüngesinde $\wp(\Lambda_1 + \Lambda_4, 8)$

$2\Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$	$-6\delta + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 + 4\mu_4$
$-\delta + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 + 2\mu_4$	$-6\delta + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3 + 3\mu_4$
$-\delta + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-6\delta + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3 + \mu_4$
$-2\delta + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$	$-6\delta + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$
$-3\delta + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3$	$-6\delta + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 + 2\mu_4$
$-3\delta + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$	$-7\delta + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2$
$-3\delta + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 + \mu_4$	$-7\delta + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3 + 3\mu_4$
$-3\delta + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 + 3\mu_4$	$-7\delta + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3$
$-4\delta + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	$-7\delta + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + 5\mu_3$
$-4\delta + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 + 3\mu_4$	$-8\delta + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3 + 2\mu_4$
$-4\delta + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3 + 2\mu_4$	$-8\delta + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$
$-5\delta + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 5\mu_3 + 4\mu_4$	$-8\delta + 2\Lambda_0 + 8\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 + 3\mu_4$
$-5\delta + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3$	$-8\delta + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 7\mu_2 + 6\mu_3 + 5\mu_4$
$-5\delta + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 + \mu_4$	$-8\delta + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$
$-5\delta + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 + \mu_4$	

$2\Lambda_0$ yörüngesinde $\wp(2\Lambda_0, 8)$

$2\Lambda_0$	
$-2\delta + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 + 2\mu_4$	
$-4\delta + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3$	
$-6\delta + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3 + 4\mu_4$	
$-6\delta + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3$	
$-8\delta + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 6\mu_2 + 6\mu_3 + 2\mu_4$	
$-8\delta + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2$	
$-8\delta + 2\Lambda_0 + 8\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 + 4\mu_4$	

ρ yörüngesinde $\wp(\rho, 8)$

$5\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$	$-6\delta + 5\Lambda_0 + 11\mu_1 + 9\mu_2 + 8\mu_3 + 7\mu_4$
$- \delta + 5\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 + 2\mu_4$	$-6\delta + 5\Lambda_0 + 11\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 + 2\mu_4$
$-2\delta + 5\Lambda_0 + 7\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3 + 3\mu_4$	$-6\delta + 5\Lambda_0 + 11\mu_1 + 7\mu_2 + 4\mu_3 + 3\mu_4$
$-2\delta + 5\Lambda_0 + 7\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 + \mu_4$	$-6\delta + 5\Lambda_0 + 11\mu_1 + 8\mu_2 + 7\mu_3 + 4\mu_4$
$-3\delta + 5\Lambda_0 + 8\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3 + 2\mu_4$	$-7\delta + 5\Lambda_0 + 11\mu_1 + 8\mu_2 + 4\mu_3 + 2\mu_4$
$-3\delta + 5\Lambda_0 + 8\mu_1 + 7\mu_2 + 6\mu_3 + 4\mu_4$	$-7\delta + 5\Lambda_0 + 11\mu_1 + 9\mu_2 + 7\mu_3 + 3\mu_4$
$-3\delta + 5\Lambda_0 + 8\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$	$-7\delta + 5\Lambda_0 + 12\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3 + 3\mu_4$
$-4\delta + 5\Lambda_0 + 8\mu_1 + 7\mu_2 + 4\mu_3 + \mu_4$	$-7\delta + 5\Lambda_0 + 12\mu_1 + 9\mu_2 + 8\mu_3 + 6\mu_4$
$-4\delta + 5\Lambda_0 + 9\mu_1 + 7\mu_2 + 6\mu_3 + 3\mu_4$	$-7\delta + 5\Lambda_0 + 12\mu_1 + 8\mu_2 + 6\mu_3 + 4\mu_4$
$-4\delta + 5\Lambda_0 + 9\mu_1 + 6\mu_2 + 3\mu_3 + 2\mu_4$	$-8\delta + 5\Lambda_0 + 12\mu_1 + 11\mu_2 + 9\mu_3 + 8\mu_4$
$-4\delta + 5\Lambda_0 + 9\mu_1 + 8\mu_2 + 7\mu_3 + 6\mu_4$	$-8\delta + 5\Lambda_0 + 12\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 + \mu_4$
$-4\delta + 5\Lambda_0 + 9\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$	$-8\delta + 5\Lambda_0 + 11\mu_1 + 9\mu_2 + 3\mu_3 + 2\mu_4$
$-5\delta + 5\Lambda_0 + 9\mu_1 + 8\mu_2 + 6\mu_3 + 2\mu_4$	$-8\delta + 5\Lambda_0 + 11\mu_1 + 9\mu_2 + 8\mu_3 + 2\mu_4$
$-5\delta + 5\Lambda_0 + 9\mu_1 + 7\mu_2 + 3\mu_3 + \mu_4$	$-8\delta + 5\Lambda_0 + 12\mu_1 + 9\mu_2 + 6\mu_3 + 3\mu_4$
$-6\delta + 5\Lambda_0 + 9\mu_1 + 8\mu_2 + 7\mu_3 + \mu_4$	$-8\delta + 5\Lambda_0 + 13\mu_1 + 7\mu_2 + 6\mu_3 + 4\mu_4$
$-6\delta + 5\Lambda_0 + 9\mu_1 + 8\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$	$-8\delta + 5\Lambda_0 + 13\mu_1 + 9\mu_2 + 7\mu_3 + 6\mu_4$

$2\Lambda_0 + \rho$ yörüngesinde $\wp(2\Lambda_0 + \rho, 8)$

$7\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4$	$-6\delta + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 10\mu_2 + 9\mu_3 + 8\mu_4$
$-3\delta + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3 + 4\mu_4$	$-6\delta + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 8\mu_2 + 5\mu_3 + 4\mu_4$
$-4\delta + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3 + 3\mu_4$	$-6\delta + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 9\mu_2 + 8\mu_3 + 5\mu_4$
$-4\delta + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 8\mu_2 + 6\mu_3 + 5\mu_4$	$-8\delta + 7\Lambda_0 + 15\mu_1 + 10\mu_2 + 9\mu_3 + 6\mu_4$
$-5\delta + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3 + 3\mu_4$	$-8\delta + 7\Lambda_0 + 15\mu_1 + 9\mu_2 + 6\mu_3 + 5\mu_4$
$-5\delta + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 9\mu_2 + 8\mu_3 + 6\mu_4$	$-8\delta + 7\Lambda_0 + 15\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3 + 4\mu_4$
$-5\delta + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 8\mu_2 + 6\mu_3 + 4\mu_4$	$-8\delta + 7\Lambda_0 + 15\mu_1 + 11\mu_2 + 10\mu_3 + 9\mu_4$
$-6\delta + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 + 3\mu_4$	$-8\delta + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 11\mu_2 + 6\mu_3 + \mu_4$

EK-4

$A_4^{(1)}$ Afin Lie cebirinde $R(2\Lambda_0)$ indirgenemez temsilinin karakterinin sol ve sağ kısımları permütasyon ağırlık fonksiyonlarının 5. derinliğe kadar olan elemanları kullanılarak hesaplanmış ve her bir atama takımı için aşağıda sırasıyla verilmiştir.

$$x_1 = 2, x_2 = 15, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = \frac{1}{5}, x_5 = \frac{1}{2} \quad \text{atamaları için:}$$

$$Sol(ChR(2\Lambda_0)) =$$

$$1 + \frac{170597q}{900} + \frac{18258923389q^2}{810000} + \frac{128485033859q^3}{405000} + \frac{16678461158093q^4}{4050000} + \frac{24902754269028713q^5}{729000000} + \dots$$

$$Sağ(ChR(2\Lambda_0)) =$$

$$\begin{aligned} & a_0 + \frac{7104195769q^2a_0}{810000} + \frac{46081507669q^4a_0}{135000} + qa_1 + \frac{7104195769q^3a_1}{810000} + \frac{46081507669q^5a_1}{135000} \\ & q^2a_2 + \frac{7104195769q^4a_2}{810000} + \frac{46081507669q^6a_2}{135000} + q^3a_3 + \frac{7104195769q^5a_3}{810000} + \frac{46081507669q^7a_3}{135000} + \\ & q^4a_4 + \frac{7104195769q^6a_4}{810000} + \frac{46081507669q^8a_4}{135000} + q^5a_5 + \frac{7104195769q^7a_5}{810000} + \frac{46081507669q^9a_5}{135000} + \\ & \frac{166997qb_1}{900} + \frac{44461369q^2b_1}{4500} + \frac{18513925717q^3b_1}{135000} + \frac{5198999730863q^4b_1}{4050000} + \frac{3206474236040633q^5b_1}{729000000} + \\ & \frac{903880863761009q^6b_1}{24300000} + \frac{166997q^2b_2}{900} + \frac{44461369q^3b_2}{4500} + \frac{18513925717q^4b_2}{135000} + \frac{5198999730863q^5b_2}{4050000} + \\ & \frac{3206474236040633q^6b_2}{729000000} + \frac{903880863761009q^7b_2}{24300000} + \frac{166997q^3b_3}{900} + \frac{44461369q^4b_3}{4500} + \frac{18513925717q^5b_3}{135000} + \\ & \frac{5198999730863q^6b_3}{4050000} + \frac{3206474236040633q^7b_3}{729000000} + \frac{903880863761009q^8b_3}{24300000} + \frac{166997q^4b_4}{900} + \frac{44461369q^5b_4}{4500} + \\ & \frac{18513925717q^6b_4}{135000} + \frac{5198999730863q^7b_4}{4050000} + \frac{3206474236040633q^8b_4}{729000000} + \frac{903880863761009q^9b_4}{24300000} + \\ & \frac{166997q^5b_5}{900} + \frac{44461369q^6b_5}{4500} + \frac{18513925717q^7b_5}{135000} + \frac{5198999730863q^8b_5}{4050000} + \frac{3206474236040633q^9b_5}{729000000} + \\ & \frac{903880863761009q^{10}b_5}{24300000} + \frac{178691q^2c_2}{150} + \frac{87396313q^3c_2}{4500} + \frac{4267353751q^4c_2}{27000} + \frac{9789610469471q^5c_2}{4050000} + \\ & \frac{1003181254875539q^6c_2}{121500000} + \frac{3133612963549679q^7c_2}{121500000} + \frac{178691q^3c_3}{150} + \frac{87396313q^4c_3}{4500} + \frac{4267353751q^5c_3}{27000} + \\ & \frac{9789610469471q^6c_3}{4050000} + \frac{1003181254875539q^7c_3}{121500000} + \frac{3133612963549679q^8c_3}{121500000} + \frac{178691q^4c_4}{150} + \\ & \frac{87396313q^5c_4}{4500} + \frac{4267353751q^6c_4}{27000} + \frac{9789610469471q^7c_4}{4050000} + \frac{1003181254875539q^8c_4}{121500000} + \\ & \frac{3133612963549679q^9c_4}{121500000} + \frac{178691q^5c_5}{150} + \frac{87396313q^6c_5}{4500} + \frac{4267353751q^7c_5}{27000} + \frac{9789610469471q^8c_5}{4050000} + \\ & \frac{1003181254875539q^9c_5}{121500000} + \frac{3133612963549679q^{10}c_5}{121500000} + \dots \end{aligned}$$

$x_1 = 2$, $x_2 = 35$, $x_3 = \frac{1}{5}$, $x_4 = \frac{1}{7}$, $x_5 = \frac{1}{2}$ atamaları için:

$$Sol(ChR(2\Lambda_0)) =$$

$$1 + \frac{2689133q}{4900} + \frac{4783698380749q^2}{24010000} + \frac{42707404582739q^3}{12005000} + \frac{65918621437061163q^4}{840350000} + \frac{106773116375956260257q^5}{117649000000} + \dots$$

$$Sağ(ChR(2\Lambda_0)) =$$

$$\begin{aligned} & a_0 + \frac{2309510926409q^2a_0}{24010000} + \frac{13459184726361q^4a_0}{1715000} + qa_1 + \frac{2309510926409q^3a_1}{24010000} + \frac{13459184726361q^5a_1}{1715000} + \\ & q^2a_2 + \frac{2309510926409q^4a_2}{24010000} + \frac{13459184726361q^6a_2}{1715000} + q^3a_3 + \frac{2309510926409q^5a_3}{24010000} + \\ & \frac{13459184726361q^7a_3}{1715000} + q^4a_4 + \frac{2309510926409q^6a_4}{24010000} + \frac{13459184726361q^8a_4}{1715000} + q^5a_5 + \frac{2309510926409q^7a_5}{24010000} + \\ & \frac{13459184726361q^9a_5}{1715000} + \frac{2669533qb_1}{4900} + \frac{15175637511q^2b_1}{171500} + \frac{23238249945231q^3b_1}{12005000} + \frac{30669170501872953q^4b_1}{840350000} + \\ & \frac{23419100537368853617q^5b_1}{117649000000} + \frac{32537188852489731099q^6b_1}{11764900000} + \frac{2669533q^2b_2}{4900} + \frac{15175637511q^3b_2}{171500} + \\ & \frac{23238249945231q^4b_2}{12005000} + \frac{30669170501872953q^5b_2}{840350000} + \frac{23419100537368853617q^6b_2}{117649000000} + \\ & \frac{32537188852489731099q^7b_2}{11764900000} + \frac{2669533q^3b_3}{4900} + \frac{15175637511q^4b_3}{171500} + \frac{23238249945231q^5b_3}{12005000} + \\ & \frac{30669170501872953q^6b_3}{840350000} + \frac{23419100537368853617q^7b_3}{117649000000} + \frac{32537188852489731099q^8b_3}{11764900000} + \\ & \frac{2669533q^4b_4}{4900} + \frac{15175637511q^5b_4}{171500} + \frac{23238249945231q^6b_4}{12005000} + \frac{30669170501872953q^7b_4}{840350000} + \\ & \frac{23419100537368853617q^8b_4}{117649000000} + \frac{32537188852489731099q^9b_4}{11764900000} + \frac{2669533q^5b_5}{4900} + \frac{15175637511q^6b_5}{171500} + \\ & \frac{23238249945231q^7b_5}{12005000} + \frac{30669170501872953q^8b_5}{840350000} + \frac{23419100537368853617q^9b_5}{117649000000} + \\ & \frac{32537188852489731099q^{10}b_5}{11764900000} + \frac{12468177q^2c_2}{2450} + \frac{36370249287q^3c_2}{171500} + \frac{10302381719157q^4c_2}{2401000} + \\ & \frac{78758156467379241q^5c_2}{840350000} + \frac{25577221868929753233q^6c_2}{58824500000} + \frac{98631230532500452293q^7c_2}{58824500000} + \\ & \frac{12468177q^3c_3}{2450} + \frac{36370249287q^4c_3}{171500} + \frac{10302381719157q^5c_3}{2401000} + \frac{78758156467379241q^6c_3}{840350000} + \\ & \frac{25577221868929753233q^7c_3}{58824500000} + \frac{98631230532500452293q^8c_3}{58824500000} + \frac{12468177q^4c_4}{2450} + \frac{36370249287q^5c_4}{171500} + \\ & \frac{10302381719157q^6c_4}{2401000} + \frac{78758156467379241q^7c_4}{840350000} + \frac{25577221868929753233q^8c_4}{58824500000} + \\ & \frac{98631230532500452293q^9c_4}{58824500000} + \frac{12468177q^5c_5}{2450} + \frac{36370249287q^6c_5}{171500} + \frac{10302381719157q^7c_5}{2401000} + \\ & \frac{78758156467379241q^8c_5}{840350000} + \frac{25577221868929753233q^9c_5}{58824500000} + \frac{98631230532500452293q^{10}c_5}{58824500000} + \dots \end{aligned}$$

$x_1 = 2$, $x_2 = 55$, $x_3 = \frac{1}{5}$, $x_4 = \frac{1}{11}$, $x_5 = \frac{1}{2}$ atamaları için:

$Sol(ChR(2\Lambda_0)) =$

$$1 + \frac{12937109q}{12100} + \frac{117160340624221q^2}{146410000} + \frac{1141991044242371q^3}{73205000} + \frac{3840676414599319887q^4}{8052550000} + \frac{11738719070824705008569q^5}{1771561000000} + \dots$$

$Sağ(ChR(2\Lambda_0)) =$

$$\begin{aligned} & a_0 + \frac{66638228292761q^2a_0}{146410000} + \frac{3371258035284639q^4a_0}{73205000} + qa_1 + \frac{66638228292761q^3a_1}{146410000} + \\ & \frac{3371258035284639q^5a_1}{73205000} + q^2a_2 + \frac{66638228292761q^4a_2}{146410000} + \frac{3371258035284639q^6a_2}{73205000} + q^3a_3 + \\ & \frac{66638228292761q^5a_3}{146410000} + \frac{3371258035284639q^7a_3}{73205000} + q^4a_4 + \frac{66638228292761q^6a_4}{146410000} + \frac{3371258035284639q^8a_4}{73205000} + \\ & q^5a_5 + \frac{66638228292761q^7a_5}{146410000} + \frac{3371258035284639q^9a_5}{73205000} + \frac{12888709qb_1}{12100} + \frac{208319398563q^2b_1}{665500} + \\ & \frac{691799982416319q^3b_1}{73205000} + \frac{2139528468007930437q^4b_1}{8052550000} + \frac{3296117133019969707529q^5b_1}{1771561000000} + \\ & \frac{27552874767920933942319q^6b_1}{885780500000} + \frac{12888709q^2b_2}{12100} + \frac{208319398563q^3b_2}{665500} + \frac{691799982416319q^4b_2}{73205000} + \\ & \frac{2139528468007930437q^5b_2}{8052550000} + \frac{3296117133019969707529q^6b_2}{1771561000000} + \frac{27552874767920933942319q^7b_2}{885780500000} + \\ & \frac{12888709q^3b_3}{12100} + \frac{208319398563q^4b_3}{665500} + \frac{691799982416319q^5b_3}{73205000} + \frac{2139528468007930437q^6b_3}{8052550000} + \\ & \frac{3296117133019969707529q^7b_3}{1771561000000} + \frac{27552874767920933942319q^8b_3}{885780500000} + \frac{12888709q^4b_4}{12100} + \frac{208319398563q^5b_4}{665500} + \\ & \frac{691799982416319q^6b_4}{73205000} + \frac{2139528468007930437q^7b_4}{8052550000} + \frac{3296117133019969707529q^8b_4}{1771561000000} + \\ & \frac{27552874767920933942319q^9b_4}{885780500000} + \frac{12888709q^5b_5}{12100} + \frac{208319398563q^6b_5}{665500} + \frac{691799982416319q^7b_5}{73205000} + \\ & \frac{2139528468007930437q^8b_5}{8052550000} + \frac{3296117133019969707529q^9b_5}{1771561000000} + \frac{27552874767920933942319q^{10}b_5}{885780500000} + \\ & \frac{71088921q^2c_2}{6050} + \frac{529410914787q^3c_2}{665500} + \frac{1878311957872281q^4c_2}{73205000} + \frac{5896146960550112373q^5c_2}{8052550000} + \\ & \frac{4464270252628994241321q^6c_2}{885780500000} + \frac{17776440066925130486589q^7c_2}{885780500000} + \frac{71088921q^3c_3}{6050} + \frac{529410914787q^4c_3}{665500} + \\ & \frac{1878311957872281q^5c_3}{73205000} + \frac{5896146960550112373q^6c_3}{8052550000} + \frac{4464270252628994241321q^7c_3}{885780500000} + \\ & \frac{17776440066925130486589q^8c_3}{885780500000} + \frac{71088921q^4c_4}{6050} + \frac{529410914787q^5c_4}{665500} + \frac{1878311957872281q^6c_4}{73205000} + \\ & \frac{5896146960550112373q^7c_4}{8052550000} + \frac{4464270252628994241321q^8c_4}{885780500000} + \frac{17776440066925130486589q^9c_4}{885780500000} + \\ & \frac{71088921q^5c_5}{6050} + \frac{529410914787q^6c_5}{665500} + \frac{1878311957872281q^7c_5}{73205000} + \frac{5896146960550112373q^8c_5}{8052550000} + \\ & \frac{4464270252628994241321q^9c_5}{885780500000} + \frac{17776440066925130486589q^{10}c_5}{885780500000} + \dots \end{aligned}$$

EK-5

$A_4^{(1)}$ Afin Lie cebirinde $R(2\Lambda_0)$ indirgenemez temsilinin karakterinin sol ve sağ kısımları permütasyon ağırlık fonksiyonlarının 8. derinliğe kadar olan elemanları[EK3] kullanılarak hesaplanmış ve her bir atama takımı için aşağıda sırasıyla verilmiştir.

$$x_1 = 2, x_2 = 15, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = \frac{1}{5}, x_5 = \frac{1}{2} \quad \text{atamaları için:}$$

$$Sol(ChR(2\Lambda_0)) =$$

$$1 + \frac{170597q}{900} + \frac{18258923389q^2}{810000} + \frac{128485033859q^3}{405000} + \frac{16678461158093q^4}{4050000} + \frac{24902754269028713q^5}{729000000} + \frac{48827533828418863q^6}{182250000} + \frac{1490371575524080739q^7}{911250000} + \frac{5949419355956756748481q^8}{656100000000} + \dots$$

$$Sağ(ChR(2\Lambda_0)) =$$

$$\begin{aligned} & a_0 + \frac{7104195769q^2a_0}{810000} + \frac{46081507669q^4a_0}{135000} + \frac{94623218223949q^6a_0}{4860000} + \frac{147594147898455366361q^8a_0}{656100000000} + \\ & qa_1 + \frac{7104195769q^3a_1}{810000} + \frac{46081507669q^5a_1}{135000} + \frac{94623218223949q^7a_1}{4860000} + \frac{147594147898455366361q^9a_1}{656100000000} + \\ & q^2a_2 + \frac{7104195769q^4a_2}{810000} + \frac{46081507669q^6a_2}{135000} + \frac{94623218223949q^8a_2}{4860000} + \frac{147594147898455366361q^{10}a_2}{656100000000} + \\ & q^3a_3 + \frac{7104195769q^5a_3}{810000} + \frac{46081507669q^7a_3}{135000} + \frac{94623218223949q^9a_3}{4860000} + \frac{147594147898455366361q^{11}a_3}{656100000000} + \\ & q^4a_4 + \frac{7104195769q^6a_4}{810000} + \frac{46081507669q^8a_4}{135000} + \frac{94623218223949q^{10}a_4}{4860000} + \frac{147594147898455366361q^{12}a_4}{656100000000} + \\ & q^5a_5 + \frac{7104195769q^7a_5}{810000} + \frac{46081507669q^9a_5}{135000} + \frac{94623218223949q^{11}a_5}{4860000} + \frac{147594147898455366361q^{13}a_5}{656100000000} + \\ & q^6a_6 + \frac{7104195769q^8a_6}{810000} + \frac{46081507669q^{10}a_6}{135000} + \frac{94623218223949q^{12}a_6}{4860000} + \frac{147594147898455366361q^{14}a_6}{656100000000} + \\ & q^7a_7 + \frac{7104195769q^9a_7}{810000} + \frac{46081507669q^{11}a_7}{135000} + \frac{94623218223949q^{13}a_7}{4860000} + \frac{147594147898455366361q^{15}a_7}{656100000000} + \\ & q^8a_8 + \frac{7104195769q^{10}a_8}{810000} + \frac{46081507669q^{12}a_8}{135000} + \frac{94623218223949q^{14}a_8}{4860000} + \frac{147594147898455366361q^{16}a_8}{656100000000} + \\ & \frac{166997qb_1}{900} + \frac{44461369q^2b_1}{4500} + \frac{18513925717q^3b_1}{135000} + \frac{5198999730863q^4b_1}{4050000} + \frac{3206474236040633q^5b_1}{729000000} + \\ & \frac{903880863761009q^6b_1}{24300000} + \frac{727831350689198701q^7b_1}{3645000000} + \frac{764758045773085351q^8b_1}{1822500000} + \\ & \frac{310570730921885870113q^9b_1}{109350000000} + \frac{166997q^2b_2}{900} + \frac{44461369q^3b_2}{4500} + \frac{18513925717q^4b_2}{135000} + \frac{5198999730863q^5b_2}{4050000} + \\ & \frac{3206474236040633q^6b_2}{729000000} + \frac{903880863761009q^7b_2}{24300000} + \frac{727831350689198701q^8b_2}{3645000000} + \frac{764758045773085351q^9b_2}{1822500000} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{310570730921885870113q^{10}b_2}{109350000000} + \frac{166997q^3b_3}{900} + \frac{44461369q^4b_3}{4500} + \frac{18513925717q^5b_3}{135000} + \frac{5198999730863q^6b_3}{4050000} + \\
& \frac{3206474236040633q^7b_3}{729000000} + \frac{903880863761009q^8b_3}{24300000} + \frac{727831350689198701q^9b_3}{3645000000} + \frac{764758045773085351q^{10}b_3}{1822500000} + \\
& \frac{310570730921885870113q^{11}b_3}{109350000000} + \frac{166997q^4b_4}{900} + \frac{44461369q^5b_4}{4500} + \frac{18513925717q^6b_4}{135000} + \frac{5198999730863q^7b_4}{4050000} + \\
& \frac{3206474236040633q^8b_4}{729000000} + \frac{903880863761009q^9b_4}{24300000} + \frac{727831350689198701q^{10}b_4}{3645000000} + \\
& \frac{764758045773085351q^{11}b_4}{1822500000} + \frac{310570730921885870113q^{12}b_4}{109350000000} + \frac{166997q^5b_5}{900} + \frac{44461369q^6b_5}{4500} + \\
& \frac{18513925717q^7b_5}{135000} + \frac{5198999730863q^8b_5}{4050000} + \frac{3206474236040633q^9b_5}{729000000} + \frac{903880863761009q^{10}b_5}{24300000} + \\
& \frac{727831350689198701q^{11}b_5}{3645000000} + \frac{764758045773085351q^{12}b_5}{1822500000} + \frac{310570730921885870113q^{13}b_5}{109350000000} + \frac{166997q^6b_6}{900} + \\
& \frac{44461369q^7b_6}{4500} + \frac{18513925717q^8b_6}{135000} + \frac{5198999730863q^9b_6}{4050000} + \frac{3206474236040633q^{10}b_6}{729000000} + \\
& \frac{903880863761009q^{11}b_6}{24300000} + \frac{727831350689198701q^{12}b_6}{3645000000} + \frac{764758045773085351q^{13}b_6}{1822500000} + \\
& \frac{310570730921885870113q^{14}b_6}{109350000000} + \frac{166997q^7b_7}{900} + \frac{44461369q^8b_7}{4500} + \frac{18513925717q^9b_7}{135000} + \frac{5198999730863q^{10}b_7}{4050000} + \\
& \frac{3206474236040633q^{11}b_7}{729000000} + \frac{903880863761009q^{12}b_7}{24300000} + \frac{727831350689198701q^{13}b_7}{3645000000} + \\
& \frac{764758045773085351q^{14}b_7}{1822500000} + \frac{310570730921885870113q^{15}b_7}{109350000000} + \frac{166997q^8b_8}{900} + \frac{44461369q^9b_8}{4500} + \\
& \frac{18513925717q^{10}b_8}{135000} + \frac{5198999730863q^{11}b_8}{4050000} + \frac{3206474236040633q^{12}b_8}{729000000} + \\
& \frac{903880863761009q^{13}b_8}{24300000} + \frac{727831350689198701q^{14}b_8}{3645000000} + \frac{764758045773085351q^{15}b_8}{1822500000} + \\
& \frac{310570730921885870113q^{16}b_8}{109350000000} + \frac{178691q^2c_2}{150} + \frac{87396313q^3c_2}{4500} + \frac{4267353751q^4c_2}{27000} + \frac{9789610469471q^5c_2}{4050000} + \\
& \frac{1003181254875539q^6c_2}{121500000} + \frac{3133612963549679q^7c_2}{121500000} + \frac{497323267691151727q^8c_2}{3645000000} + \\
& \frac{1228489501542778511q^9c_2}{3645000000} + \frac{7385115683914961363q^{10}c_2}{4374000000} + \frac{178691q^3c_3}{150} + \frac{87396313q^4c_3}{4500} + \\
& \frac{4267353751q^5c_3}{27000} + \frac{9789610469471q^6c_3}{4050000} + \frac{1003181254875539q^7c_3}{121500000} + \frac{3133612963549679q^8c_3}{121500000} + \\
& \frac{497323267691151727q^9c_3}{3645000000} + \frac{1228489501542778511q^{10}c_3}{3645000000} + \frac{7385115683914961363q^{11}c_3}{4374000000} + \frac{178691q^4c_4}{150} + \\
& \frac{87396313q^5c_4}{4500} + \frac{4267353751q^6c_4}{27000} + \frac{9789610469471q^7c_4}{4050000} + \frac{1003181254875539q^8c_4}{121500000} + \\
& \frac{3133612963549679q^9c_4}{121500000} + \frac{497323267691151727q^{10}c_4}{3645000000} + \frac{1228489501542778511q^{11}c_4}{3645000000} + \\
& \frac{7385115683914961363q^{12}c_4}{4374000000} + \frac{178691q^5c_5}{150} + \frac{87396313q^6c_5}{4500} + \frac{4267353751q^7c_5}{27000} + \frac{9789610469471q^8c_5}{4050000} + \\
& \frac{1003181254875539q^9c_5}{121500000} + \frac{3133612963549679q^{10}c_5}{121500000} + \frac{497323267691151727q^{11}c_5}{3645000000} + \\
& \frac{1228489501542778511q^{12}c_5}{3645000000} + \frac{7385115683914961363q^{13}c_5}{4374000000} + \frac{178691q^6c_6}{150} + \frac{87396313q^7c_6}{4500} + \\
& \frac{4267353751q^8c_6}{27000} + \frac{9789610469471q^9c_6}{4050000} + \frac{1003181254875539q^{10}c_6}{121500000} + \frac{3133612963549679q^{11}c_6}{121500000} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{497323267691151727q^{12}c_6}{3645000000} + \frac{1228489501542778511q^{13}c_6}{3645000000} + \frac{7385115683914961363q^{14}c_6}{4374000000} + \frac{178691q^7c_7}{150} + \\
& \frac{87396313q^8c_7}{4500} + \frac{4267353751q^9c_7}{27000} + \frac{9789610469471q^{10}c_7}{4050000} + \frac{1003181254875539q^{11}c_7}{121500000} + \\
& \frac{3133612963549679q^{12}c_7}{121500000} + \frac{497323267691151727q^{13}c_7}{3645000000} + \frac{1228489501542778511q^{14}c_7}{3645000000} + \\
& \frac{7385115683914961363q^{15}c_7}{4374000000} + \frac{178691q^8c_8}{150} + \frac{87396313q^9c_8}{4500} + \frac{4267353751q^{10}c_8}{27000} + \frac{9789610469471q^{11}c_8}{4050000} + \\
& \frac{1003181254875539q^{12}c_8}{121500000} + \frac{3133612963549679q^{13}c_8}{121500000} + \frac{497323267691151727q^{14}c_8}{3645000000} + \\
& \frac{1228489501542778511q^{15}c_8}{3645000000} + \frac{7385115683914961363q^{16}c_8}{4374000000} + \dots
\end{aligned}$$

$x_1 = 2$, $x_2 = 35$, $x_3 = \frac{1}{5}$, $x_4 = \frac{1}{7}$, $x_5 = \frac{1}{2}$ atamaları için:

$$Sol(ChR(2\Lambda_0)) =$$

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{2689133q}{4900} + \frac{4783698380749q^2}{24010000} + \frac{42707404582739q^3}{12005000} + \frac{65918621437061163q^4}{840350000} + \frac{106773116375956260257q^5}{117649000000} + \\
& \frac{344362528174595351527q^6}{29412250000} + \frac{94258168258076858402421q^7}{1029428750000} + \frac{384610150064168194209591521q^8}{576480100000000} + \dots
\end{aligned}$$

$$Sağ(ChR(2\Lambda_0)) =$$

$$\begin{aligned}
& a_0 + \frac{2309510926409q^2a_0}{24010000} + \frac{13459184726361q^4a_0}{1715000} + \frac{5477049697230902703q^6a_0}{2352980000} + \\
& \frac{19776343871150332252780281q^8a_0}{576480100000000} + qa_1 + \frac{2309510926409q^3a_1}{24010000} + \frac{13459184726361q^5a_1}{1715000} + \\
& \frac{5477049697230902703q^7a_1}{2352980000} + \frac{19776343871150332252780281q^9a_1}{576480100000000} + q^2a_2 + \frac{2309510926409q^4a_2}{24010000} + \\
& \frac{13459184726361q^6a_2}{1715000} + \frac{5477049697230902703q^8a_2}{2352980000} + \frac{19776343871150332252780281q^{10}a_2}{576480100000000} + q^3a_3 + \\
& \frac{2309510926409q^5a_3}{24010000} + \frac{13459184726361q^7a_3}{1715000} + \frac{5477049697230902703q^9a_3}{2352980000} + \\
& \frac{19776343871150332252780281q^{11}a_3}{576480100000000} + q^4a_4 + \frac{2309510926409q^6a_4}{24010000} + \frac{13459184726361q^8a_4}{1715000} + \\
& \frac{5477049697230902703q^{10}a_4}{2352980000} + \frac{19776343871150332252780281q^{12}a_4}{576480100000000} + q^5a_5 + \frac{2309510926409q^7a_5}{24010000} + \\
& \frac{13459184726361q^9a_5}{1715000} + \frac{5477049697230902703q^{11}a_5}{2352980000} + \frac{19776343871150332252780281q^{13}a_5}{576480100000000} + q^6a_6 + \\
& \frac{2309510926409q^8a_6}{24010000} + \frac{13459184726361q^{10}a_6}{1715000} + \frac{5477049697230902703q^{12}a_6}{2352980000} + \\
& \frac{19776343871150332252780281q^{14}a_6}{576480100000000} + q^7a_7 + \frac{2309510926409q^9a_7}{24010000} + \frac{13459184726361q^{11}a_7}{1715000} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{5477049697230902703q^{13}a_7}{2352980000} + \frac{19776343871150332252780281q^{15}a_7}{57648010000000} + q^8a_8 + \frac{2309510926409q^{10}a_8}{24010000} + \\
& \frac{13459184726361q^{12}a_8}{1715000} + \frac{5477049697230902703q^{14}a_8}{2352980000} + \frac{19776343871150332252780281q^{16}a_8}{57648010000000} + \\
& \frac{2669533qb_1}{4900} + \frac{15175637511q^2b_1}{171500} + \frac{23238249945231q^3b_1}{12005000} + \frac{30669170501872953q^4b_1}{840350000} + \\
& \frac{23419100537368853617q^5b_1}{117649000000} + \frac{32537188852489731099q^6b_1}{11764900000} + \frac{92523473197013256110019q^7b_1}{4117715000000} + \\
& \frac{142899339152381947786729q^8b_1}{2058857500000} + \frac{179292405367755396452277219q^9b_1}{28824005000000} + \frac{2669533q^2b_2}{4900} + \\
& \frac{15175637511q^3b_2}{171500} + \frac{23238249945231q^4b_2}{12005000} + \frac{30669170501872953q^5b_2}{840350000} + \frac{23419100537368853617q^6b_2}{117649000000} + \\
& \frac{32537188852489731099q^7b_2}{11764900000} + \frac{92523473197013256110019q^8b_2}{4117715000000} + \frac{142899339152381947786729q^9b_2}{2058857500000} + \\
& \frac{179292405367755396452277219q^{10}b_2}{28824005000000} + \frac{2669533q^3b_3}{4900} + \frac{15175637511q^4b_3}{171500} + \frac{23238249945231q^5b_3}{12005000} + \\
& \frac{30669170501872953q^6b_3}{840350000} + \frac{23419100537368853617q^7b_3}{117649000000} + \frac{32537188852489731099q^8b_3}{11764900000} + \\
& \frac{92523473197013256110019q^9b_3}{4117715000000} + \frac{142899339152381947786729q^{10}b_3}{2058857500000} + \\
& \frac{179292405367755396452277219q^{11}b_3}{28824005000000} + \frac{2669533q^4b_4}{4900} + \frac{15175637511q^5b_4}{171500} + \frac{23238249945231q^6b_4}{12005000} + \\
& \frac{30669170501872953q^7b_4}{840350000} + \frac{23419100537368853617q^8b_4}{117649000000} + \frac{32537188852489731099q^9b_4}{11764900000} + \\
& \frac{92523473197013256110019q^{10}b_4}{4117715000000} + \frac{142899339152381947786729q^{11}b_4}{2058857500000} + \\
& \frac{179292405367755396452277219q^{12}b_4}{28824005000000} + \frac{2669533q^5b_5}{4900} + \frac{15175637511q^6b_5}{171500} + \frac{23238249945231q^7b_5}{12005000} + \\
& \frac{30669170501872953q^8b_5}{840350000} + \frac{23419100537368853617q^9b_5}{117649000000} + \frac{32537188852489731099q^{10}b_5}{11764900000} + \\
& \frac{92523473197013256110019q^{11}b_5}{4117715000000} + \frac{142899339152381947786729q^{12}b_5}{2058857500000} + \\
& \frac{179292405367755396452277219q^{13}b_5}{28824005000000} + \frac{2669533q^6b_6}{4900} + \frac{15175637511q^7b_6}{171500} + \frac{23238249945231q^8b_6}{12005000} + \\
& \frac{30669170501872953q^9b_6}{840350000} + \frac{23419100537368853617q^{10}b_6}{117649000000} + \frac{32537188852489731099q^{11}b_6}{11764900000} + \\
& \frac{92523473197013256110019q^{12}b_6}{4117715000000} + \frac{142899339152381947786729q^{13}b_6}{2058857500000} + \\
& \frac{179292405367755396452277219q^{14}b_6}{28824005000000} + \frac{2669533q^7b_7}{4900} + \frac{15175637511q^8b_7}{171500} + \frac{23238249945231q^9b_7}{12005000} + \\
& \frac{30669170501872953q^{10}b_7}{840350000} + \frac{23419100537368853617q^{11}b_7}{117649000000} + \\
& \frac{32537188852489731099q^{12}b_7}{11764900000} + \frac{92523473197013256110019q^{13}b_7}{4117715000000} + \frac{142899339152381947786729q^{14}b_7}{2058857500000} + \\
& \frac{179292405367755396452277219q^{15}b_7}{28824005000000} + \frac{2669533q^8b_8}{4900} + \frac{15175637511q^9b_8}{171500} + \frac{23238249945231q^{10}b_8}{12005000} + \\
& \frac{30669170501872953q^{11}b_8}{840350000} + \frac{23419100537368853617q^{12}b_8}{117649000000} + \frac{32537188852489731099q^{13}b_8}{11764900000} + \\
& \frac{92523473197013256110019q^{14}b_8}{4117715000000} + \frac{142899339152381947786729q^{15}b_8}{2058857500000} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{179292405367755396452277219q^{16}b_8}{288240050000000} + \frac{12468177q^2c_2}{2450} + \frac{36370249287q^3c_2}{171500} + \frac{10302381719157q^4c_2}{2401000} + \\
& \frac{78758156467379241q^5c_2}{840350000} + \frac{25577221868929753233q^6c_2}{58824500000} + \frac{98631230532500452293q^7c_2}{58824500000} + \\
& \frac{75435690096710721294273q^8c_2}{4117715000000} + \frac{191280473564483619596769q^9c_2}{4117715000000} + \\
& \frac{27536890545643945491298269q^{10}c_2}{57648010000000} + \frac{12468177q^3c_3}{2450} + \frac{36370249287q^4c_3}{171500} + \frac{10302381719157q^5c_3}{2401000} + \\
& \frac{78758156467379241q^6c_3}{840350000} + \frac{25577221868929753233q^7c_3}{58824500000} + \frac{98631230532500452293q^8c_3}{58824500000} + \\
& \frac{75435690096710721294273q^9c_3}{4117715000000} + \frac{191280473564483619596769q^{10}c_3}{4117715000000} + \\
& \frac{27536890545643945491298269q^{11}c_3}{57648010000000} + \frac{12468177q^4c_4}{2450} + \frac{36370249287q^5c_4}{171500} + \frac{10302381719157q^6c_4}{2401000} + \\
& \frac{78758156467379241q^7c_4}{840350000} + \frac{25577221868929753233q^8c_4}{58824500000} + \frac{98631230532500452293q^9c_4}{58824500000} + \\
& \frac{75435690096710721294273q^{10}c_4}{4117715000000} + \frac{191280473564483619596769q^{11}c_4}{4117715000000} + \\
& \frac{27536890545643945491298269q^{12}c_4}{57648010000000} + \frac{12468177q^5c_5}{2450} + \frac{36370249287q^6c_5}{171500} + \frac{10302381719157q^7c_5}{2401000} + \\
& \frac{78758156467379241q^8c_5}{840350000} + \frac{25577221868929753233q^9c_5}{58824500000} + \frac{98631230532500452293q^{10}c_5}{58824500000} + \\
& \frac{75435690096710721294273q^{11}c_5}{4117715000000} + \frac{191280473564483619596769q^{12}c_5}{4117715000000} + \\
& \frac{27536890545643945491298269q^{13}c_5}{57648010000000} + \frac{12468177q^6c_6}{2450} + \frac{36370249287q^7c_6}{171500} + \frac{10302381719157q^8c_6}{2401000} + \\
& \frac{78758156467379241q^9c_6}{840350000} + \frac{25577221868929753233q^{10}c_6}{58824500000} + \frac{98631230532500452293q^{11}c_6}{58824500000} + \\
& \frac{75435690096710721294273q^{12}c_6}{4117715000000} + \frac{191280473564483619596769q^{13}c_6}{4117715000000} + \\
& \frac{27536890545643945491298269q^{14}c_6}{57648010000000} + \frac{12468177q^7c_7}{2450} + \frac{36370249287q^8c_7}{171500} + \frac{10302381719157q^9c_7}{2401000} + \\
& \frac{78758156467379241q^{10}c_7}{840350000} + \frac{25577221868929753233q^{11}c_7}{58824500000} + \frac{98631230532500452293q^{12}c_7}{58824500000} + \\
& \frac{75435690096710721294273q^{13}c_7}{4117715000000} + \frac{191280473564483619596769q^{14}c_7}{4117715000000} + \\
& \frac{27536890545643945491298269q^{15}c_7}{57648010000000} + \frac{12468177q^8c_8}{2450} + \frac{36370249287q^9c_8}{171500} + \\
& \frac{10302381719157q^{10}c_8}{2401000} + \frac{78758156467379241q^{11}c_8}{840350000} + \frac{25577221868929753233q^{12}c_8}{58824500000} + \\
& \frac{98631230532500452293q^{13}c_8}{58824500000} + \frac{75435690096710721294273q^{14}c_8}{4117715000000} + \frac{191280473564483619596769q^{15}c_8}{4117715000000} + \\
& \frac{27536890545643945491298269q^{16}c_8}{57648010000000} + \dots
\end{aligned}$$

$x_1 = 2$, $x_2 = 55$, $x_3 = \frac{1}{5}$, $x_4 = \frac{1}{11}$, $x_5 = \frac{1}{2}$ atamaları için:

$Sol(ChR(2\Lambda_0)) =$

$$1 + \frac{12937109q}{12100} + \frac{117160340624221q^2}{146410000} + \frac{1141991044242371q^3}{73205000} + \frac{3840676414599319887q^4}{8052550000} + \frac{11738719070824705008569q^5}{1771561000000} + \frac{52462224957228939220879q^6}{442890250000} + \frac{25723169776427844479902617q^7}{24358963750000} + \frac{194433883209128971880873752961q^8}{21435888100000000} + \dots$$

$Sağ(ChR(2\Lambda_0)) =$

$$a_0 + \frac{66638228292761q^2a_0}{146410000} + \frac{3371258035284639q^4a_0}{73205000} + \frac{29732175998971472771391q^6a_0}{885780500000} + \frac{12571260862901417784709652121q^8a_0}{21435888100000000} + qa_1 + \frac{66638228292761q^3a_1}{146410000} + \frac{3371258035284639q^5a_1}{73205000} + \frac{29732175998971472771391q^7a_1}{885780500000} + \frac{12571260862901417784709652121q^9a_1}{21435888100000000} + q^2a_2 + \frac{66638228292761q^4a_2}{146410000} + \frac{3371258035284639q^6a_2}{73205000} + \frac{29732175998971472771391q^8a_2}{885780500000} + \frac{12571260862901417784709652121q^{10}a_2}{21435888100000000} + q^3a_3 + \frac{66638228292761q^5a_3}{146410000} + \frac{3371258035284639q^7a_3}{73205000} + \frac{29732175998971472771391q^9a_3}{885780500000} + \frac{12571260862901417784709652121q^{11}a_3}{21435888100000000} + q^4a_4 + \frac{66638228292761q^6a_4}{146410000} + \frac{3371258035284639q^8a_4}{73205000} + \frac{29732175998971472771391q^{10}a_4}{885780500000} + \frac{12571260862901417784709652121q^{12}a_4}{21435888100000000} + q^5a_5 + \frac{66638228292761q^7a_5}{146410000} + \frac{3371258035284639q^9a_5}{73205000} + \frac{29732175998971472771391q^{11}a_5}{885780500000} + \frac{12571260862901417784709652121q^{13}a_5}{21435888100000000} + q^6a_6 + \frac{66638228292761q^8a_6}{146410000} + \frac{3371258035284639q^{10}a_6}{73205000} + \frac{29732175998971472771391q^{12}a_6}{885780500000} + \frac{12571260862901417784709652121q^{14}a_6}{21435888100000000} + q^7a_7 + \frac{66638228292761q^9a_7}{146410000} + \frac{3371258035284639q^{11}a_7}{73205000} + \frac{29732175998971472771391q^{13}a_7}{885780500000} + \frac{12571260862901417784709652121q^{15}a_7}{21435888100000000} + q^8a_8 + \frac{66638228292761q^{10}a_8}{146410000} + \frac{3371258035284639q^{12}a_8}{73205000} + \frac{29732175998971472771391q^{14}a_8}{885780500000} + \frac{12571260862901417784709652121q^{16}a_8}{21435888100000000} + \frac{12888709qb_1}{12100} + \frac{208319398563q^2b_1}{665500} + \frac{691799982416319q^3b_1}{73205000} + \frac{2139528468007930437q^4b_1}{8052550000} + \frac{3296117133019969707529q^5b_1}{1771561000000} + \frac{27552874767920933942319q^6b_1}{885780500000} + \frac{33086534030934637212025983q^7b_1}{97435855000000} + \frac{65612353832647507226491037q^8b_1}{48717927500000} + \frac{146026875109476868132951751619q^9b_1}{10717944050000000} + \frac{12888709q^2b_2}{12100} + \frac{208319398563q^3b_2}{665500} + \frac{691799982416319q^4b_2}{73205000} + \frac{2139528468007930437q^5b_2}{8052550000} + \frac{3296117133019969707529q^6b_2}{1771561000000} + \frac{27552874767920933942319q^7b_2}{885780500000} + \frac{33086534030934637212025983q^8b_2}{97435855000000} + \frac{65612353832647507226491037q^9b_2}{48717927500000} + \frac{146026875109476868132951751619q^{10}b_2}{10717944050000000} + \frac{12888709q^3b_3}{12100} + \frac{208319398563q^4b_3}{665500} + \frac{691799982416319q^5b_3}{73205000} + \dots$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2139528468007930437q^6b_3}{8052550000} + \frac{3296117133019969707529q^7b_3}{1771561000000} + \frac{27552874767920933942319q^8b_3}{885780500000} + \\
& \frac{33086534030934637212025983q^9b_3}{97435855000000} + \frac{65612353832647507226491037q^{10}b_3}{48717927500000} + \\
& \frac{146026875109476868132951751619q^{11}b_3}{10717944050000000} + \frac{12888709q^4b_4}{12100} + \frac{208319398563q^5b_4}{665500} + \frac{691799982416319q^6b_4}{73205000} + \\
& \frac{2139528468007930437q^7b_4}{8052550000} + \frac{3296117133019969707529q^8b_4}{1771561000000} + \frac{27552874767920933942319q^9b_4}{885780500000} + \\
& \frac{33086534030934637212025983q^{10}b_4}{97435855000000} + \frac{65612353832647507226491037q^{11}b_4}{48717927500000} + \\
& \frac{146026875109476868132951751619q^{12}b_4}{10717944050000000} + \frac{12888709q^5b_5}{12100} + \frac{208319398563q^6b_5}{665500} + \frac{691799982416319q^7b_5}{73205000} + \\
& \frac{2139528468007930437q^8b_5}{8052550000} + \frac{3296117133019969707529q^9b_5}{1771561000000} + \frac{27552874767920933942319q^{10}b_5}{885780500000} + \\
& \frac{33086534030934637212025983q^{11}b_5}{97435855000000} + \frac{65612353832647507226491037q^{12}b_5}{48717927500000} + \\
& \frac{146026875109476868132951751619q^{13}b_5}{10717944050000000} + \frac{12888709q^6b_6}{12100} + \frac{208319398563q^7b_6}{665500} + \frac{691799982416319q^8b_6}{73205000} + \\
& \frac{2139528468007930437q^9b_6}{8052550000} + \frac{3296117133019969707529q^{10}b_6}{1771561000000} + \frac{27552874767920933942319q^{11}b_6}{885780500000} + \\
& \frac{33086534030934637212025983q^{12}b_6}{97435855000000} + \frac{65612353832647507226491037q^{13}b_6}{48717927500000} + \\
& \frac{146026875109476868132951751619q^{14}b_6}{10717944050000000} + \frac{12888709q^7b_7}{12100} + \frac{208319398563q^8b_7}{665500} + \frac{691799982416319q^9b_7}{73205000} + \\
& \frac{2139528468007930437q^{10}b_7}{8052550000} + \frac{3296117133019969707529q^{11}b_7}{1771561000000} + \frac{27552874767920933942319q^{12}b_7}{885780500000} + \\
& \frac{33086534030934637212025983q^{13}b_7}{97435855000000} + \frac{65612353832647507226491037q^{14}b_7}{48717927500000} + \\
& \frac{146026875109476868132951751619q^{15}b_7}{10717944050000000} + \frac{12888709q^8b_8}{12100} + \frac{208319398563q^9b_8}{665500} + \frac{691799982416319q^{10}b_8}{73205000} + \\
& \frac{2139528468007930437q^{11}b_8}{8052550000} + \frac{3296117133019969707529q^{12}b_8}{1771561000000} + \frac{27552874767920933942319q^{13}b_8}{885780500000} + \\
& \frac{33086534030934637212025983q^{14}b_8}{97435855000000} + \frac{65612353832647507226491037q^{15}b_8}{48717927500000} + \\
& \frac{146026875109476868132951751619q^{16}b_8}{10717944050000000} + \frac{71088921q^2c_2}{6050} + \frac{529410914787q^3c_2}{665500} + \frac{1878311957872281q^4c_2}{73205000} + \\
& \frac{5896146960550112373q^5c_2}{8052550000} + \frac{4464270252628994241321q^6c_2}{885780500000} + \frac{17776440066925130486589q^7c_2}{885780500000} + \\
& \frac{32981957305470863496165717q^8c_2}{97435855000000} + \frac{74709176834416340230859253q^9c_2}{97435855000000} + \\
& \frac{140996313452198743860847497201q^{10}c_2}{10717944050000000} + \frac{71088921q^3c_3}{6050} + \frac{529410914787q^4c_3}{665500} + \frac{1878311957872281q^5c_3}{73205000} + \\
& \frac{5896146960550112373q^6c_3}{8052550000} + \frac{4464270252628994241321q^7c_3}{885780500000} + \frac{17776440066925130486589q^8c_3}{885780500000} + \\
& \frac{32981957305470863496165717q^9c_3}{97435855000000} + \frac{74709176834416340230859253q^{10}c_3}{97435855000000} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{140996313452198743860847497201q^{11}c_3}{10717944050000000} + \frac{71088921q^4c_4}{6050} + \frac{529410914787q^5c_4}{665500} + \frac{1878311957872281q^6c_4}{73205000} + \\
& \frac{5896146960550112373q^7c_4}{8052550000} + \frac{4464270252628994241321q^8c_4}{885780500000} + \frac{17776440066925130486589q^9c_4}{885780500000} + \\
& \frac{32981957305470863496165717q^{10}c_4}{97435855000000} + \frac{74709176834416340230859253q^{11}c_4}{97435855000000} + \\
& \frac{140996313452198743860847497201q^{12}c_4}{10717944050000000} + \frac{71088921q^5c_5}{6050} + \frac{529410914787q^6c_5}{665500} + \frac{1878311957872281q^7c_5}{73205000} + \\
& \frac{5896146960550112373q^8c_5}{8052550000} + \frac{4464270252628994241321q^9c_5}{885780500000} + \frac{17776440066925130486589q^{10}c_5}{885780500000} + \\
& \frac{32981957305470863496165717q^{11}c_5}{97435855000000} + \frac{74709176834416340230859253q^{12}c_5}{97435855000000} + \\
& \frac{140996313452198743860847497201q^{13}c_5}{10717944050000000} + \frac{71088921q^6c_6}{6050} + \frac{529410914787q^7c_6}{665500} + \frac{1878311957872281q^8c_6}{73205000} + \\
& \frac{5896146960550112373q^9c_6}{8052550000} + \frac{4464270252628994241321q^{10}c_6}{885780500000} + \frac{17776440066925130486589q^{11}c_6}{885780500000} + \\
& \frac{32981957305470863496165717q^{12}c_6}{97435855000000} + \frac{74709176834416340230859253q^{13}c_6}{97435855000000} + \\
& \frac{140996313452198743860847497201q^{14}c_6}{10717944050000000} + \frac{71088921q^7c_7}{6050} + \frac{529410914787q^8c_7}{665500} + \frac{1878311957872281q^9c_7}{73205000} + \\
& \frac{5896146960550112373q^{10}c_7}{8052550000} + \frac{4464270252628994241321q^{11}c_7}{885780500000} + \frac{17776440066925130486589q^{12}c_7}{885780500000} + \\
& \frac{32981957305470863496165717q^{13}c_7}{97435855000000} + \frac{74709176834416340230859253q^{14}c_7}{97435855000000} + \\
& \frac{140996313452198743860847497201q^{15}c_7}{10717944050000000} + \frac{71088921q^8c_8}{6050} + \frac{529410914787q^9c_8}{665500} + \frac{1878311957872281q^{10}c_8}{73205000} + \\
& \frac{5896146960550112373q^{11}c_8}{8052550000} + \frac{4464270252628994241321q^{12}c_8}{885780500000} + \frac{17776440066925130486589q^{13}c_8}{885780500000} + \\
& \frac{32981957305470863496165717q^{14}c_8}{97435855000000} + \frac{74709176834416340230859253q^{15}c_8}{97435855000000} + \frac{140996313452198743860847497201q^{16}c_8}{10717944050000000} + \dots
\end{aligned}$$

EK-6

Burada $B_4^{(1)}$ Afin Lie cebirinde Λ baskın ağırlık fonksiyonelinin yörüngeleri 7. derinliğe kadar $\wp(\Lambda, 7)$ formunda verilmiştir.

Λ_0 yörüngesinde $\wp(\Lambda_0, 7)$

Λ_0	$-5\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$
$-\delta + \Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2$	$-5\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$
$-\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-5\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2$
$-\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2$	$-5\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2$
$-2\delta + \Lambda_0 + 2\mu_1$	$-5\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2$
$-2\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3$	$-6\delta + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3$
$-2\delta + 2\lambda_4 + \Lambda_0$	$-6\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3$
$-2\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3$	$-6\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2$
$-2\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2$	$-6\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1$
$-2\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1$	$-6\delta + 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1$
$-2\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0$	$-6\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3$
$-3\delta + \Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-6\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2$
$-3\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-6\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1$
$-3\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2$	$-6\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3$
$-3\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	$-6\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3$
$-3\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-6\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3$
$-3\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-6\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3$
$-4\delta + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2$	$-7\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$
$-4\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3$	$-7\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$
$-4\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2$	$-7\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$
$-5\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2$	$-7\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$
$-5\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-7\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3$
$-5\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3$	$-7\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$
$-5\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	$-7\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$
	$-7\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$
$-5\delta + 2\lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2$	
$-5\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	
$-5\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2$	
$-5\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3$	

Λ_1 yörüngesinde $\wp(\Lambda_1, 7)$

$\Lambda_0 + \mu_1$	$-6\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2$
$-2\lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-6\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3$
$-\delta + \Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-6\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3$
$-\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-6\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$
$-\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2$	$-6\delta + 2\lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$
$-\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1$	$-6\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3$
$-2\delta + \Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2$	$-6\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3$
$-2\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-6\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3$
$-2\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3$	$-6\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2$
$-2\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-6\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2$
$-3\delta + 2\lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1$	$-6\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1$
$-3\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3$	$-6\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1$
$-3\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2$	$-7\delta + 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2$
$-3\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1$	$-7\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$
$-3\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3$	$-7\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2$
$-3\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$	$-7\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3$
$-3\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-7\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$
$-3\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-7\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$
$-4\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1$	$-7\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3$
$-4\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3$	$-7\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3$
$-4\delta + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-7\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3$
$-4\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$	$-7\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3$
$-4\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	$-7\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$
$-4\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-7\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$
$-4\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2$	
$-4\delta - 4\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2$	
$-5\delta + \Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	
$-5\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	
$-5\delta - 2\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2$	
$-5\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3$	
$-5\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	
$-5\delta - 6\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3$	

Λ_2 yörüngesinde $\wp(\Lambda_2, 7)$

$2\Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2$	$-4\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + \mu_2$
$-2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-4\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3$
$-2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2$	$-4\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3$
$-\delta + 2\Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-4\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3$
$-\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-4\delta + 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$
$-\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2$	$-4\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3$
$-\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	$-4\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3$
$-\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-4\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3$
$-\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-4\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2$
$-2\delta + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2$	$-4\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + \mu_2$
$-2\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-4\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3$
$-2\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3$	$-4\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3$
$-2\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	$-4\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3$
$-2\delta + 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2$	$-4\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$
$-2\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	$-4\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$
$-2\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2$	$-4\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$
$-2\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3$	$-4\delta + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2$
$-2\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$	$-4\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3$
$-2\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-4\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2$
$-2\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2$	$-5\delta + 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2$
$-2\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2$	$-5\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$
$-2\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2$	$-5\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2$
$-3\delta + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-5\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3$
$-3\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$	$-5\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$
$-3\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	$-5\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$
$-3\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-5\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 5\mu_3$
$-3\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3$	$-5\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3$
$-3\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	$-5\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3$
$-3\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$	$-5\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3$
$-3\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-5\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$
$-4\delta + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	$-5\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$
$-4\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-5\delta + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$

$$\begin{aligned}
& -5\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3 & -7\delta - 10\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -5\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3 & -7\delta - 10\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -5\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & -7\delta + 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
& -5\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 & -7\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -5\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2 & -7\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -6\delta + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + \mu_2 & -7\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 \\
& -6\delta - 10\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 5\mu_3 & -7\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 10\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 & -7\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3 \\
& -6\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 & -7\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 6\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -6\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 & -7\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 & -7\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 & -7\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & \\
& -6\delta + 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2 & \\
& -6\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 & \\
& -6\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 & \\
& -6\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 5\mu_3 & \\
& -6\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_3 & \\
& -6\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & \\
& -6\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 & \\
& -6\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + \mu_2 & \\
& -6\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2 & \\
& -7\delta + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & \\
& -7\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & \\
& -7\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 & \\
& -7\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & \\
& -7\delta - 10\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3 & \\
& -7\delta - 10\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 & \\
& -7\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & \\
& -7\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 &
\end{aligned}$$

Λ_3 yörüngesinde $\wp(\Lambda_3, 7)$

$$\begin{array}{ll}
2\Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -4\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 \\
-2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & -4\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 \\
-2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 & -4\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + 5\mu_3 \\
-2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + \mu_1 & -4\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3 \\
-\delta + 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + \mu_1 & -4\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 \\
-\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 & -4\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 \\
-\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 & -4\delta + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 \\
-\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 & -4\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 \\
-\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 & -4\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 \\
-\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & -4\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 \\
-\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -4\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 \\
-\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -4\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 \\
-2\delta + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -5\delta + 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
-2\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & -5\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 \\
-2\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2 & -5\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3 \\
-2\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 & -5\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_3 \\
-2\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 & -5\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 \\
-2\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 & -5\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3 \\
-3\delta + 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 & -5\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 \\
-3\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 & -5\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
-3\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 & -5\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 \\
-3\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 & -5\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 \\
-3\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & -5\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2 \\
-3\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -5\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 \\
-3\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 & -6\delta + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \\
-3\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 & -6\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
-3\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 & -6\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + \mu_2 \\
-3\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 10\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3 \\
-3\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 10\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 \\
-3\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 10\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 \\
-4\delta + 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 & -6\delta + 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 \\
-4\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 & -6\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
& -6\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 & -7\delta - 10\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -6\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 & -7\delta - 10\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -6\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 & -7\delta + 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 & -7\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + 5\mu_3 \\
& -6\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 5\mu_2 + 5\mu_3 & -7\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3 \\
& -6\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3 & -7\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 6\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 & -7\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 \\
& -6\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + \mu_2 \\
& -6\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & \\
& -6\delta - 8\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & \\
& -6\delta + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 & \\
& -6\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 6\mu_2 + 3\mu_3 & \\
& -6\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 3\mu_2 & \\
& -6\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 3\mu_1 & \\
& -7\delta + 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2 & \\
& -7\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 & \\
& -7\delta - 2\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 3\mu_2 & \\
& -7\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 & \\
& -7\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & \\
& -7\delta - 4\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & \\
& -7\delta - 10\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 6\mu_2 + 6\mu_3 & \\
& -7\delta - 10\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3 & \\
& -7\delta - 10\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 7\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 & \\
& -7\delta - 10\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 6\mu_1 + 6\mu_2 + 3\mu_3 & \\
& -7\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + 5\mu_1 & \\
& -7\delta - 6\lambda_4 + 2\Lambda_0 + \mu_1 &
\end{aligned}$$

Λ_4 yörüngesinde $\wp(\Lambda_4, 7)$

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_4 + \Lambda_0 & -3\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 \\
 -\lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -3\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 \\
 -\lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2 & -3\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 \\
 -\lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1 & -3\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2 \\
 -\lambda_4 + \Lambda_0 & -3\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 \\
 -\delta + \lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1 & -3\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1 \\
 -\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -4\delta + \lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 \\
 -\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 & -4\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
 -\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 & -4\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 \\
 -\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 & -4\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 \\
 -\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & -4\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
 -\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -4\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \\
 -\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -4\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 \\
 -2\delta + \lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2 & -4\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 \\
 -2\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & -4\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 \\
 -2\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 & -4\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 \\
 -2\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 & -4\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
 -2\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & -4\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
 -2\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -4\delta + 3\lambda_4 + \Lambda_0 \\
 -2\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 & -4\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 \\
 -2\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 & -4\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 \\
 -2\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2 & -4\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 \\
 -3\delta + \lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 & -4\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 \\
 -3\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -5\delta + \lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \\
 -3\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2 & -5\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 \\
 -3\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 & -5\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 \\
 -3\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 & -5\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 \\
 -3\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 & -5\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 \\
 -3\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 & -5\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2 \\
 -3\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 & -5\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 \\
 -3\delta + \lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -5\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 \\
 -3\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 & -5\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& -5\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
& -5\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \\
& -5\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 7\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 \\
& -6\delta + \lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 & -7\delta - 7\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -6\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 7\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -6\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2 & -7\delta - 7\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 & -7\delta - 7\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 7\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 & -7\delta - 7\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 7\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 & -7\delta + \lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 7\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 & -7\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 7\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 & -7\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta + 3\lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1 & -7\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 & -7\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -6\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 & -7\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 & -7\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 & -7\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 \\
& -6\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 \\
& -6\delta + \lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 & -6\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 \\
& -6\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & -7\delta + \lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2 \\
& -6\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 & -7\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 & -7\delta - \lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 \\
& -6\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 & -7\delta - 3\lambda_4 + \Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -7\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 & \\
& -7\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 & \\
& -7\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 3\mu_1 + \mu_2 & \\
& -7\delta - 5\lambda_4 + \Lambda_0 + 2\mu_1 + \mu_2 &
\end{aligned}$$

ρ yörüngesinde $\wp(\rho, 7)$

$-7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-2\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$
$-7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$	$-2\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3$
$-5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-2\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3$
$-7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	$-2\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$
$-7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-2\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$
$-5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3$	$-2\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 8\mu_2 + 5\mu_3$
$-7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3$	$-2\delta - 5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 6\mu_2 + 2\mu_3$
$-3\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3$	$-2\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 6\mu_2 + 3\mu_3$
$-7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3$	$-2\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 6\mu_2 + 3\mu_3$
$-5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$	$-2\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 6\mu_2 + 2\mu_3$
$-7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3$	$-2\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3$
$-\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	$-2\delta - \lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3$
$-5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3$	$-2\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 8\mu_2 + 6\mu_3$
$-7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3$	$-2\delta - 5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 6\mu_2 + 3\mu_3$
$-3\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3$	$-2\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3$
$\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-2\delta + \lambda_4 + 7\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$
$-\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$	$-3\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$
$-\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3$	$-3\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3$
$-\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	$-3\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3$
$-\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3$	$-3\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_3$
$-\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$	$-3\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3$
$-\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3$	$-3\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$
$-\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3$	$-3\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$
$-\delta - 3\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_3$	$-3\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3$
$-\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_3$	$-3\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3$
$-\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3$	$-3\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3$
$-\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3$	$-3\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 9\mu_2 + 5\mu_3$
$-\delta - \lambda_4 + 7\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3$	$-3\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 8\mu_2 + 3\mu_3$
$-\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3$	$-3\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 8\mu_2 + 4\mu_3$
$-\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3$	$-3\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 6\mu_2 + 2\mu_3$
$-\delta - 3\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3$	$-3\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 6\mu_2 + \mu_3$
$-\delta + \lambda_4 + 7\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$	$-3\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_3$

$$\begin{aligned}
& -3\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_3 & -4\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -3\delta - 5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 6\mu_2 + \mu_3 & -4\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 \\
& -3\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 6\mu_2 + 2\mu_3 & -4\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -3\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 8\mu_2 + 4\mu_3 & -4\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -3\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 8\mu_2 + 3\mu_3 & -4\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -3\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 9\mu_2 + 5\mu_3 & -4\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 6\mu_2 + \mu_3 \\
& -3\delta - \lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 & -4\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 8\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -3\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 9\mu_2 + 6\mu_3 & -4\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 8\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -3\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 8\mu_2 + 4\mu_3 & -4\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 8\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -3\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 8\mu_2 + 5\mu_3 & -4\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 8\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -3\delta - 5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3 & -4\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 10\mu_2 + 5\mu_3 \\
& -3\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3 & -4\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 8\mu_2 + 5\mu_3 \\
& -3\delta - 3\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 & -4\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 8\mu_2 + 6\mu_3 \\
& -3\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 9\mu_2 + 8\mu_3 & -4\delta - 3\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3 \\
& -3\delta + \lambda_4 + 7\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 & -4\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 10\mu_2 + 8\mu_3 \\
& -3\delta + 3\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 5\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & -4\delta + 3\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -4\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 & -5\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -4\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 & -5\delta - 17\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3 \\
& -4\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3 & -5\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -4\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3 & -5\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3 \\
& -4\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 9\mu_2 + 5\mu_3 & -5\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 6\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -4\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 9\mu_2 + 4\mu_3 & -5\delta - 17\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 8\mu_2 + 6\mu_3 \\
& -4\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 10\mu_2 + 6\mu_3 & -5\delta - 17\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 8\mu_2 + 5\mu_3 \\
& -4\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 10\mu_2 + 9\mu_3 & -5\delta - 17\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3 \\
& -4\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & -5\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 9\mu_2 + 4\mu_3 \\
& -4\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_3 & -5\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 9\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -4\delta - 5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 6\mu_2 + \mu_3 & -5\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 11\mu_2 + 6\mu_3 \\
& -4\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 6\mu_2 + 2\mu_3 & -5\delta - 17\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 11\mu_2 + 8\mu_3 \\
& -4\delta - 5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3 & -5\delta - 17\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 9\mu_2 + 6\mu_3 \\
& -4\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3 & -5\delta - 17\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 9\mu_2 + 5\mu_3 \\
& -4\delta - 3\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 & -5\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 11\mu_2 + 9\mu_3 \\
& -4\delta + 3\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & -5\delta - 17\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 11\mu_2 + 9\mu_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -5\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -5\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 19\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 8\mu_2 + 6\mu_3 \\
& -5\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 6\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 17\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 \\
& -5\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 8\mu_2 + 2\mu_3 & -6\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -5\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 8\mu_2 + 3\mu_3 & -6\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -5\delta - 5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 6\mu_2 + 2\mu_3 & -6\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 \\
& -5\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 6\mu_2 + 3\mu_3 & -6\delta - 19\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 9\mu_2 + 6\mu_3 \\
& -5\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 19\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 9\mu_2 + 8\mu_3 \\
& -5\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 8\mu_2 + 5\mu_3 & -6\delta - 17\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 8\mu_2 + 5\mu_3 \\
& -5\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 8\mu_2 + 6\mu_3 & -6\delta - 17\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 8\mu_2 + 4\mu_3 \\
& -5\delta - 3\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3 & -6\delta - 19\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 8\mu_2 + 6\mu_3 \\
& -5\delta - \lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 & -6\delta - 17\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 \\
& -5\delta - 5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 6\mu_2 + 3\mu_3 & -6\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 10\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -5\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3 & -6\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 11\mu_2 + 5\mu_3 \\
& -5\delta + 3\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 6\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 & -6\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 10\mu_2 + 4\mu_3 \\
& -5\delta + \lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 & -6\delta - 19\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 11\mu_2 + 9\mu_3 \\
& -5\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 17\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 12\mu_2 + 8\mu_3 \\
& -5\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 & -6\delta - 19\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 10\mu_2 + 6\mu_3 \\
& -5\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 19\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 10\mu_2 + 8\mu_3 \\
& -5\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 17\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 9\mu_2 + 5\mu_3 \\
& -5\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 & -6\delta - 17\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 9\mu_2 + 4\mu_3 \\
& -5\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 9\mu_2 + 3\mu_3 & -6\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 11\mu_2 + 10\mu_3 \\
& -5\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 8\mu_2 + 2\mu_3 & -6\delta - 19\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 11\mu_2 + 10\mu_3 \\
& -5\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 9\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 17\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 12\mu_2 + 9\mu_3 \\
& -5\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 9\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -5\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 10\mu_2 + 4\mu_3 & -6\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -5\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 9\mu_2 + 3\mu_3 & -6\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 \\
& -5\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 9\mu_2 + 8\mu_3 & -6\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 9\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -5\delta - 5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 8\mu_2 + 6\mu_3 & -6\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 8\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -5\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 9\mu_2 + 6\mu_3 & -6\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 9\mu_2 + \mu_3 \\
& -5\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 10\mu_2 + 9\mu_3 & -6\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -5\delta + 5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 3\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -6\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 8\mu_2 + 3\mu_3 & -7\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 8\mu_2 + 4\mu_3 & -7\delta - 21\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 9\mu_2 + 8\mu_3 \\
& -6\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 & -7\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 9\mu_2 + 8\mu_3 & -7\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -6\delta - 5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 8\mu_2 + 6\mu_3 & -7\delta - 21\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 10\mu_2 + 8\mu_3 \\
& -6\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 9\mu_2 + 6\mu_3 & -7\delta - 21\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 10\mu_2 + 9\mu_3 \\
& -6\delta - \lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 & -7\delta - 21\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 9\mu_2 + 8\mu_3 \\
& -6\delta - \lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 & -7\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 11\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 & -7\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 12\mu_2 + 4\mu_3 \\
& -6\delta - 3\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3 & -7\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 11\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -6\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 8\mu_2 + 4\mu_3 & -7\delta - 21\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 12\mu_2 + 10\mu_3 \\
& -6\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 8\mu_2 + 5\mu_3 & -7\delta - 21\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 11\mu_2 + 8\mu_3 \\
& -6\delta + 5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 21\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 11\mu_2 + 9\mu_3 \\
& -6\delta + \lambda_4 + 7\Lambda_0 + 9\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 15\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 12\mu_2 + 11\mu_3 \\
& -6\delta + \lambda_4 + 7\Lambda_0 + 8\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 & -7\delta - 21\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 12\mu_2 + 11\mu_3 \\
& -6\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 10\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 9\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 & -7\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 10\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 10\mu_2 + 2\mu_3 & -7\delta - 5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 9\mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 3\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 10\mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 10\mu_2 + \mu_3 & -7\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 10\mu_2 + 9\mu_3 \\
& -6\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 11\mu_2 + 3\mu_3 & -7\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 9\mu_2 + 8\mu_3 \\
& -6\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 10\mu_2 + 2\mu_3 & -7\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 10\mu_2 + 8\mu_3 \\
& -6\delta - 11\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 10\mu_2 + 9\mu_3 & -7\delta - \lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 9\mu_2 + 8\mu_3 & -7\delta - 5\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 13\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -6\delta - 9\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 11\mu_1 + 10\mu_2 + 8\mu_3 & -7\delta - 3\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 13\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 12\mu_1 + 11\mu_2 + 10\mu_3 & -7\delta + 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta + 7\lambda_4 + 7\Lambda_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 & -7\delta + \lambda_4 + 7\Lambda_0 + 10\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3
\end{aligned}$$

$\Lambda_1 + \rho$ yörüngesinde $\wp(\Lambda_1 + \rho, 7)$

$-9\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 7\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3$	$-2\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 9\mu_2 + 7\mu_3$
$-9\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 7\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3$	$-2\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 9\mu_1 + 7\mu_2 + 3\mu_3$
$-9\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3$	$-2\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 7\mu_2 + 4\mu_3$
$-9\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 7\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3$	$-2\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 9\mu_2 + 6\mu_3$
$-9\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	$-2\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 7\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3$
$-9\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 7\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3$	$-2\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 9\mu_1 + 6\mu_2 + 3\mu_3$
$-9\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3$	$-2\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3$
$-9\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	$-2\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3$
$\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-2\delta + \lambda_4 + 8\Lambda_0 + 6\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$
$-3\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3$	$-2\delta - 7\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3$
$-5\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 7\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3$	$-2\delta - 5\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 9\mu_1 + 6\mu_2 + 3\mu_3$
$-\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	$-2\delta - \lambda_4 + 8\Lambda_0 + 7\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3$
$-5\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 7\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$	$-2\delta - 7\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3$
$-3\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3$	$-2\delta - 7\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 6\mu_2 + 3\mu_3$
$-5\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 7\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3$	$-2\delta - 5\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 9\mu_1 + 6\mu_2 + 2\mu_3$
$-5\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 7\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$	$-2\delta - 7\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$
$-\delta - 11\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 9\mu_1 + 7\mu_2 + 6\mu_3$	$-3\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 11\mu_1 + 10\mu_2 + 9\mu_3$
$-\delta - 11\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 9\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3$	$-3\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 11\mu_1 + 10\mu_2 + 6\mu_3$
$-\delta - 11\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 7\mu_1 + 6\mu_2 + 2\mu_3$	$-3\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 9\mu_2 + 4\mu_3$
$-\delta - 11\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 9\mu_1 + 7\mu_2 + 5\mu_3$	$-3\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 11\mu_1 + 9\mu_2 + 5\mu_3$
$-\delta - 11\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3$	$-3\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3$
$-\delta - 11\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 9\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3$	$-3\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 11\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3$
$-\delta - 11\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 7\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3$	$-3\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 9\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3$
$-\delta - 11\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3$	$-3\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 6\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3$
$-\delta + \lambda_4 + 8\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3$	$-3\delta + 3\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 6\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$
$-\delta - 3\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 7\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3$	$-3\delta - 3\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 9\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3$
$-\delta - 7\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 9\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3$	$-3\delta - 7\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 11\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3$
$-\delta - \lambda_4 + 8\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3$	$-3\delta - 5\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3$
$-\delta - 7\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 9\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3$	$-3\delta - 7\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 11\mu_1 + 6\mu_2 + 2\mu_3$
$-\delta - 3\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 7\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_3$	$-3\delta - 5\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 6\mu_2 + \mu_3$
$-\delta - 7\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 9\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3$	$-3\delta - 7\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 11\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_3$
$-\delta - 7\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 9\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3$	$-3\delta - 7\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 11\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$

$$\begin{aligned}
& -6\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 21\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 12\mu_2 + 11\mu_3 \\
& -6\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 5\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 21\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 11\mu_2 + 9\mu_3 \\
& -6\delta - 17\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 & -6\delta - 21\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 12\mu_1 + 11\mu_2 + 7\mu_3 \\
& -6\delta - 17\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 7\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 & -6\delta - 21\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 12\mu_2 + 10\mu_3 \\
& -6\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 10\mu_2 + 3\mu_3 & -6\delta - 21\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 11\mu_1 + 9\mu_2 + 7\mu_3 \\
& -6\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 12\mu_1 + 10\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 21\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 10\mu_2 + 9\mu_3 \\
& -6\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 9\mu_2 + 2\mu_3 & -6\delta - 21\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 12\mu_1 + 10\mu_2 + 7\mu_3 \\
& -6\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3 & -6\delta - 21\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 9\mu_2 + 7\mu_3 \\
& -6\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 12\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_3 & -6\delta + \lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 & -6\delta - 3\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 12\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 11\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 7\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - 7\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 \\
& -6\delta - 11\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 & -6\delta - \lambda_4 + 8\Lambda_0 + 11\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 17\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 13\mu_1 + 10\mu_2 + 3\mu_3 & -6\delta - 7\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 17\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 10\mu_2 + 4\mu_3 & -6\delta - 3\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 12\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 17\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 13\mu_1 + 7\mu_2 + 3\mu_3 & -6\delta - 7\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 5\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -6\delta - 17\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 7\mu_2 + 4\mu_3 & -6\delta - 7\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 12\mu_2 + 10\mu_3 & -7\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 11\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 9\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 12\mu_1 + 11\mu_2 + 7\mu_3 & -7\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 4\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 11\mu_2 + 9\mu_3 & -7\delta - 19\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 \\
& -6\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 12\mu_2 + 5\mu_3 & -7\delta - 17\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 11\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 9\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 12\mu_1 + 11\mu_2 + 2\mu_3 & -7\delta - 19\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 9\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 \\
& -6\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 11\mu_2 + 4\mu_3 & -7\delta - 17\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 11\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 10\mu_2 + 7\mu_3 & -7\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 11\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 9\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 13\mu_1 + 10\mu_2 + 6\mu_3 & -7\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 13\mu_1 + 11\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 11\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 10\mu_2 + 4\mu_3 & -7\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 10\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 9\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 13\mu_1 + 10\mu_2 + 3\mu_3 & -7\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta - 17\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 13\mu_2 + 10\mu_3 & -7\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 13\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 17\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 13\mu_2 + 7\mu_3 & -7\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta + 5\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 5\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 & -7\delta - 11\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 15\mu_1 + 6\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 5\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 9\mu_2 + 7\mu_3 & -7\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 15\mu_1 + 9\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -6\delta + 3\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 7\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 & -7\delta - 11\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 15\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_3 \\
& -6\delta - 3\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 7\mu_2 + 6\mu_3 & -7\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 15\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -7\delta - 19\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 10\mu_2 + 4\mu_3 & -7\delta - 23\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 13\mu_2 + 12\mu_3 \\
& -7\delta - 19\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 15\mu_1 + 10\mu_2 + 5\mu_3 & -7\delta - 23\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 12\mu_2 + 10\mu_3 \\
& -7\delta - 17\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 15\mu_1 + 11\mu_2 + 4\mu_3 & -7\delta - 23\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 13\mu_1 + 12\mu_2 + 9\mu_3 \\
& -7\delta - 17\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 13\mu_1 + 11\mu_2 + 2\mu_3 & -7\delta - 23\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 13\mu_2 + 11\mu_3 \\
& -7\delta - 19\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 9\mu_2 + 4\mu_3 & -7\delta - 23\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 12\mu_1 + 10\mu_2 + 9\mu_3 \\
& -7\delta - 19\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 15\mu_1 + 9\mu_2 + 5\mu_3 & -7\delta - 23\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 11\mu_2 + 10\mu_3 \\
& -7\delta - 17\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 15\mu_1 + 6\mu_2 + 4\mu_3 & -7\delta - 23\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 13\mu_1 + 11\mu_2 + 9\mu_3 \\
& -7\delta - 17\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 13\mu_1 + 6\mu_2 + 2\mu_3 & -7\delta - 23\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 11\mu_1 + 10\mu_2 + 9\mu_3 \\
& -7\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 13\mu_2 + 11\mu_3 & -7\delta + \lambda_4 + 8\Lambda_0 + 11\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
& -7\delta - 11\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 13\mu_1 + 12\mu_2 + 9\mu_3 & -7\delta - 3\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 13\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -7\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 12\mu_2 + 10\mu_3 & -7\delta - 5\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 4\mu_2 + 3\mu_3 \\
& -7\delta - 15\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 13\mu_2 + 4\mu_3 & -7\delta - \lambda_4 + 8\Lambda_0 + 12\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -7\delta - 11\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 13\mu_1 + 12\mu_2 + 2\mu_3 & -7\delta - 5\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 \\
& -7\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 12\mu_2 + 3\mu_3 & -7\delta - 3\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 13\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 \\
& -7\delta - 11\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 15\mu_1 + 10\mu_2 + 6\mu_3 & -7\delta - 5\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 \\
& -7\delta - 9\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 10\mu_2 + 5\mu_3 & -7\delta - 5\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\
& -7\delta - 9\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 13\mu_1 + 11\mu_2 + 7\mu_3 & \\
& -7\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 15\mu_1 + 11\mu_2 + 9\mu_3 & \\
& -7\delta - 11\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 15\mu_1 + 10\mu_2 + 5\mu_3 & \\
& -7\delta - 9\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 14\mu_1 + 10\mu_2 + 4\mu_3 & \\
& -7\delta - 9\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 13\mu_1 + 11\mu_2 + 2\mu_3 & \\
& -7\delta - 13\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 15\mu_1 + 11\mu_2 + 4\mu_3 & \\
& -7\delta - 19\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 15\mu_1 + 14\mu_2 + 10\mu_3 & \\
& -7\delta - 17\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 15\mu_1 + 13\mu_2 + 11\mu_3 & \\
& -7\delta - 19\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 15\mu_1 + 14\mu_2 + 9\mu_3 & \\
& -7\delta - 17\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 15\mu_1 + 13\mu_2 + 6\mu_3 & \\
& -7\delta + 7\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 4\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 & \\
& -7\delta - 7\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 11\mu_1 + 10\mu_2 + 9\mu_3 & \\
& -7\delta + \lambda_4 + 8\Lambda_0 + 9\mu_1 + 5\mu_2 + 4\mu_3 & \\
& -7\delta + 5\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + 2\mu_3 & \\
& -7\delta - \lambda_4 + 8\Lambda_0 + 10\mu_1 + 6\mu_2 + 5\mu_3 & \\
& -7\delta - 5\lambda_4 + 8\Lambda_0 + 11\mu_1 + 9\mu_2 + 7\mu_3 &
\end{aligned}$$

Ek-7

$B_4^{(1)}$ Afin Lie cebirinde $R(\Lambda_1)$ indirgenemez temsilinin karakterinin sol ve sağ kısımları permütasyon ağırlık fonksiyonlarının 7. derinliğe kadar olan elemanları kullanılarak hesaplanmış ve her bir atama takımı için aşağıda sırasıyla verilmiştir.

$x_1 = 4$, $x_2 = 9$, $x_3 = 16$, $x_4 = 25$ atamaları için:

$$Sol(ChR(\Lambda_1)) =$$

$$\frac{199669}{3600} + \frac{117769573p}{14400} + \frac{4297643189881p^2}{51840000} + \frac{4817164561909p^3}{3240000} + \frac{246677823107278817p^4}{23328000000} +$$
$$\frac{11488948627843258153p^5}{186624000000} + \frac{280529879073944015657p^6}{746496000000} + \frac{37454188844810870347p^7}{186624000000}$$

$$Sağ(ChR(\Lambda_1)) =$$

$$a_0 + \frac{4752491pa_0}{4800} + \frac{214518478561p^2a_0}{12960000} + \frac{1352626633027p^3a_0}{4320000} + \frac{17060722701227p^4a_0}{69120000} +$$
$$\frac{960694114447919051p^5a_0}{62208000000} + \frac{1485959156572377797p^6a_0}{46656000000} + \frac{9245871468207812579p^7a_0}{62208000000} + pa_1 +$$
$$\frac{4752491p^2a_1}{4800} + \frac{214518478561p^3a_1}{12960000} + \frac{1352626633027p^4a_1}{4320000} + \frac{17060722701227p^5a_1}{69120000} +$$
$$\frac{960694114447919051p^6a_1}{62208000000} + \frac{1485959156572377797p^7a_1}{46656000000} + \frac{9245871468207812579p^8a_1}{62208000000} + p^2a_2 +$$
$$\frac{4752491p^3a_2}{4800} + \frac{214518478561p^4a_2}{12960000} + \frac{1352626633027p^5a_2}{4320000} + \frac{17060722701227p^6a_2}{69120000} +$$
$$\frac{960694114447919051p^7a_2}{62208000000} + \frac{1485959156572377797p^8a_2}{46656000000} + \frac{9245871468207812579p^9a_2}{62208000000} + p^3a_3 +$$
$$\frac{4752491p^4a_3}{4800} + \frac{214518478561p^5a_3}{12960000} + \frac{1352626633027p^6a_3}{4320000} + \frac{17060722701227p^7a_3}{69120000} +$$
$$\frac{960694114447919051p^8a_3}{62208000000} + \frac{1485959156572377797p^9a_3}{46656000000} + \frac{9245871468207812579p^{10}a_3}{62208000000} + p^4a_4 +$$
$$\frac{4752491p^5a_4}{4800} + \frac{214518478561p^6a_4}{12960000} + \frac{1352626633027p^7a_4}{4320000} + \frac{17060722701227p^8a_4}{69120000} +$$
$$\frac{960694114447919051p^9a_4}{62208000000} + \frac{1485959156572377797p^{10}a_4}{46656000000} + \frac{9245871468207812579p^{11}a_4}{62208000000} + p^5a_5 +$$
$$\frac{4752491p^6a_5}{4800} + \frac{214518478561p^7a_5}{12960000} + \frac{1352626633027p^8a_5}{4320000} + \frac{17060722701227p^9a_5}{69120000} +$$
$$\frac{960694114447919051p^{10}a_5}{62208000000} + \frac{1485959156572377797p^{11}a_5}{46656000000} + \frac{9245871468207812579p^{12}a_5}{62208000000} + p^6a_6 +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4752491p^7a_6}{4800} + \frac{214518478561p^8a_6}{12960000} + \frac{1352626633027p^9a_6}{4320000} + \frac{17060722701227p^{10}a_6}{69120000} + \\
& \frac{960694114447919051p^{11}a_6}{62208000000} + \frac{1485959156572377797p^{12}a_6}{46656000000} + \frac{9245871468207812579p^{13}a_6}{62208000000} + \\
& p^7a_7 + \frac{4752491p^8a_7}{4800} + \frac{214518478561p^9a_7}{12960000} + \frac{1352626633027p^{10}a_7}{4320000} + \frac{17060722701227p^{11}a_7}{69120000} + \\
& \frac{960694114447919051p^{12}a_7}{62208000000} + \frac{1485959156572377797p^{13}a_7}{46656000000} + \frac{9245871468207812579p^{14}a_7}{62208000000} + \frac{196069b_0}{3600} + \\
& \frac{8358583pb_0}{1200} + \frac{565078585079p^2b_0}{17280000} + \frac{10812529148213p^3b_0}{12960000} + \frac{197863688468752309p^4b_0}{46656000000} + \\
& \frac{92652724112495863p^5b_0}{15552000000} + \frac{27147663655844099063p^6b_0}{248832000000} + \frac{30782951997960313679p^7b_0}{62208000000} + \frac{196069pb_1}{3600} + \\
& \frac{8358583p^2b_1}{1200} + \frac{565078585079p^3b_1}{17280000} + \frac{10812529148213p^4b_1}{12960000} + \frac{197863688468752309p^5b_1}{46656000000} + \\
& \frac{92652724112495863p^6b_1}{15552000000} + \frac{27147663655844099063p^7b_1}{248832000000} + \frac{30782951997960313679p^8b_1}{62208000000} + \frac{196069p^2b_2}{3600} + \\
& \frac{8358583p^3b_2}{1200} + \frac{565078585079p^4b_2}{17280000} + \frac{10812529148213p^5b_2}{12960000} + \frac{197863688468752309p^6b_2}{46656000000} + \\
& \frac{92652724112495863p^7b_2}{15552000000} + \frac{27147663655844099063p^8b_2}{248832000000} + \frac{30782951997960313679p^9b_2}{62208000000} + \frac{196069p^3b_3}{3600} + \\
& \frac{8358583p^4b_3}{1200} + \frac{565078585079p^5b_3}{17280000} + \frac{10812529148213p^6b_3}{12960000} + \frac{197863688468752309p^7b_3}{46656000000} + \\
& \frac{92652724112495863p^8b_3}{15552000000} + \frac{27147663655844099063p^9b_3}{248832000000} + \frac{30782951997960313679p^{10}b_3}{62208000000} + \frac{196069p^4b_4}{3600} + \\
& \frac{8358583p^5b_4}{1200} + \frac{565078585079p^6b_4}{17280000} + \frac{10812529148213p^7b_4}{12960000} + \frac{197863688468752309p^8b_4}{46656000000} + \\
& \frac{92652724112495863p^9b_4}{15552000000} + \frac{27147663655844099063p^{10}b_4}{248832000000} + \frac{30782951997960313679p^{11}b_4}{62208000000} + \frac{196069p^5b_5}{3600} + \\
& \frac{8358583p^6b_5}{1200} + \frac{565078585079p^7b_5}{17280000} + \frac{10812529148213p^8b_5}{12960000} + \frac{197863688468752309p^9b_5}{46656000000} + \\
& \frac{92652724112495863p^{10}b_5}{15552000000} + \frac{27147663655844099063p^{11}b_5}{248832000000} + \frac{30782951997960313679p^{12}b_5}{62208000000} + \frac{196069p^6b_6}{3600} + \\
& \frac{8358583p^7b_6}{1200} + \frac{565078585079p^8b_6}{17280000} + \frac{10812529148213p^9b_6}{12960000} + \frac{197863688468752309p^{10}b_6}{46656000000} + \\
& \frac{92652724112495863p^{11}b_6}{15552000000} + \frac{27147663655844099063p^{12}b_6}{248832000000} + \frac{30782951997960313679p^{13}b_6}{62208000000} + \\
& \frac{196069p^7b_7}{3600} + \frac{8358583p^8b_7}{1200} + \frac{565078585079p^9b_7}{17280000} + \frac{10812529148213p^{10}b_7}{12960000} + \frac{197863688468752309p^{11}b_7}{46656000000} + \\
& \frac{92652724112495863p^{12}b_7}{15552000000} + \frac{27147663655844099063p^{13}b_7}{248832000000} + \frac{30782951997960313679p^{14}b_7}{62208000000}
\end{aligned}$$

$x_1 = 9$, $x_2 = 16$, $x_3 = 25$, $x_4 = 36$ atamaları için:

$$Sol(ChR(\Lambda_1)) =$$

$$\frac{314069}{3600} + \frac{4481937893p}{129600} + \frac{187862914955513p^2}{466560000} + \frac{147966943903877p^3}{9720000} + \frac{23305871715850192753p^4}{209952000000} +$$

$$\frac{1388255635193316558473p^5}{1679616000000} + \frac{492310071110448033964073p^6}{60466176000000} + \frac{126780583175568588132577p^7}{2519424000000}$$

$$Sağ(ChR(\Lambda_1)) =$$

$$a_0 + \frac{335116993pa_0}{129600} + \frac{580102781387p^2a_0}{4320000} + \frac{255540442128329p^3a_0}{116640000} + \frac{24827261574024961p^4a_0}{16796160000} +$$

$$\frac{190713831130241311691p^5a_0}{559872000000} + \frac{85438075731351515959p^6a_0}{139968000000} + \frac{36954778273580152566953p^7a_0}{15116544000000} + pa_1 +$$

$$\frac{335116993p^2a_1}{129600} + \frac{580102781387p^3a_1}{4320000} + \frac{255540442128329p^4a_1}{116640000} + \frac{24827261574024961p^5a_1}{16796160000} +$$

$$\frac{190713831130241311691p^6a_1}{559872000000} + \frac{85438075731351515959p^7a_1}{139968000000} + \frac{36954778273580152566953p^8a_1}{15116544000000} +$$

$$p^2a_2 + \frac{335116993p^3a_2}{129600} + \frac{580102781387p^4a_2}{4320000} + \frac{255540442128329p^5a_2}{116640000} + \frac{24827261574024961p^6a_2}{16796160000} +$$

$$\frac{190713831130241311691p^7a_2}{559872000000} + \frac{85438075731351515959p^8a_2}{139968000000} + \frac{36954778273580152566953p^9a_2}{15116544000000} + p^3a_3 +$$

$$\frac{335116993p^4a_3}{129600} + \frac{580102781387p^5a_3}{4320000} + \frac{255540442128329p^6a_3}{116640000} + \frac{24827261574024961p^7a_3}{16796160000} +$$

$$\frac{190713831130241311691p^8a_3}{559872000000} + \frac{85438075731351515959p^9a_3}{139968000000} + \frac{36954778273580152566953p^{10}a_3}{15116544000000} + p^4a_4 +$$

$$\frac{335116993p^5a_4}{129600} + \frac{580102781387p^6a_4}{4320000} + \frac{255540442128329p^7a_4}{116640000} + \frac{24827261574024961p^8a_4}{16796160000} +$$

$$\frac{190713831130241311691p^9a_4}{559872000000} + \frac{85438075731351515959p^{10}a_4}{139968000000} + \frac{36954778273580152566953p^{11}a_4}{15116544000000} +$$

$$p^5a_5 + \frac{335116993p^6a_5}{129600} + \frac{580102781387p^7a_5}{4320000} + \frac{255540442128329p^8a_5}{116640000} + \frac{24827261574024961p^9a_5}{16796160000} +$$

$$\frac{190713831130241311691p^{10}a_5}{559872000000} + \frac{85438075731351515959p^{11}a_5}{139968000000} + \frac{36954778273580152566953p^{12}a_5}{15116544000000} +$$

$$p^6a_6 + \frac{335116993p^7a_6}{129600} + \frac{580102781387p^8a_6}{4320000} + \frac{255540442128329p^9a_6}{116640000} + \frac{24827261574024961p^{10}a_6}{16796160000} +$$

$$\frac{190713831130241311691p^{11}a_6}{559872000000} + \frac{85438075731351515959p^{12}a_6}{139968000000} + \frac{36954778273580152566953p^{13}a_6}{15116544000000} +$$

$$p^7a_7 + \frac{335116993p^8a_7}{129600} + \frac{580102781387p^9a_7}{4320000} + \frac{255540442128329p^{10}a_7}{116640000} + \frac{24827261574024961p^{11}a_7}{16796160000} +$$

$$\frac{190713831130241311691p^{12}a_7}{559872000000} + \frac{85438075731351515959p^{13}a_7}{139968000000} + \frac{36954778273580152566953p^{14}a_7}{15116544000000} +$$

$$\frac{310469b_0}{3600} + \frac{1025366341pb_0}{32400} + \frac{59506191074117p^2b_0}{466560000} + \frac{1320682989600533p^3b_0}{116640000} +$$

$$\frac{19832180950992993181p^4b_0}{419904000000} + \frac{25211914963340311301p^5b_0}{419904000000} + \frac{251754583813078135053509p^6b_0}{60466176000000} +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{252212731105360054307597p^7b_0}{15116544000000} + \frac{310469pb_1}{3600} + \frac{1025366341p^2b_1}{32400} + \frac{59506191074117p^3b_1}{466560000} + \\
& \frac{1320682989600533p^4b_1}{116640000} + \frac{19832180950992993181p^5b_1}{419904000000} + \frac{25211914963340311301p^6b_1}{419904000000} + \\
& \frac{251754583813078135053509p^7b_1}{60466176000000} + \frac{252212731105360054307597p^8b_1}{15116544000000} + \frac{310469p^2b_2}{3600} + \frac{1025366341p^3b_2}{32400} + \\
& \frac{59506191074117p^4b_2}{466560000} + \frac{1320682989600533p^5b_2}{116640000} + \frac{19832180950992993181p^6b_2}{419904000000} + \\
& \frac{25211914963340311301p^7b_2}{419904000000} + \frac{251754583813078135053509p^8b_2}{60466176000000} + \frac{252212731105360054307597p^9b_2}{15116544000000} + \\
& \frac{310469p^3b_3}{3600} + \frac{1025366341p^4b_3}{32400} + \frac{59506191074117p^5b_3}{466560000} + \frac{1320682989600533p^6b_3}{116640000} + \\
& \frac{19832180950992993181p^7b_3}{419904000000} + \frac{25211914963340311301p^8b_3}{419904000000} + \frac{251754583813078135053509p^9b_3}{60466176000000} + \\
& \frac{252212731105360054307597p^{10}b_3}{15116544000000} + \frac{310469p^4b_4}{3600} + \frac{1025366341p^5b_4}{32400} + \frac{59506191074117p^6b_4}{466560000} + \\
& \frac{1320682989600533p^7b_4}{116640000} + \frac{19832180950992993181p^8b_4}{419904000000} + \frac{25211914963340311301p^9b_4}{419904000000} + \\
& \frac{251754583813078135053509p^{10}b_4}{60466176000000} + \frac{252212731105360054307597p^{11}b_4}{15116544000000} + \frac{310469p^5b_5}{3600} + \\
& \frac{1025366341p^6b_5}{32400} + \frac{59506191074117p^7b_5}{466560000} + \frac{1320682989600533p^8b_5}{116640000} + \frac{19832180950992993181p^9b_5}{419904000000} + \\
& \frac{25211914963340311301p^{10}b_5}{419904000000} + \frac{251754583813078135053509p^{11}b_5}{60466176000000} + \frac{252212731105360054307597p^{12}b_5}{15116544000000} + \\
& \frac{310469p^6b_6}{3600} + \frac{1025366341p^7b_6}{32400} + \frac{59506191074117p^8b_6}{466560000} + \frac{1320682989600533p^9b_6}{116640000} + \\
& \frac{19832180950992993181p^{10}b_6}{419904000000} + \frac{25211914963340311301p^{11}b_6}{419904000000} + \frac{251754583813078135053509p^{12}b_6}{60466176000000} + \\
& \frac{252212731105360054307597p^{13}b_6}{15116544000000} + \frac{310469p^7b_7}{3600} + \frac{1025366341p^8b_7}{32400} + \frac{59506191074117p^9b_7}{466560000} + \\
& \frac{1320682989600533p^{10}b_7}{116640000} + \frac{19832180950992993181p^{11}b_7}{419904000000} + \frac{25211914963340311301p^{12}b_7}{419904000000} + \\
& \frac{251754583813078135053509p^{13}b_7}{60466176000000} + \frac{252212731105360054307597p^{14}b_7}{15116544000000}
\end{aligned}$$

EK-8

Eklerde verdiğimiz sonuçları bulmaya yarayan Mathematica kodlarının bir kısmı burada verilmiştir.

```
B4:={ {2,-1,0,0},
      {-1,2,-1,0},
      {0,-1,2,-2},
      {0,0,-1,2} }
```

```
AB4:={ {2,0,-1,0,0},
        {0,2,-1,0,0},
        {-1,-1,2,-1,0},
        {0,0,-1,2,-2},
        {0,0,0,-1,2} }
```

```
For[i = 0, i < 5, i++,
  alf[i]=lam[0]*AB4[[i+1]][[1]]+lamA[1]*AB4[[i+1]][[2]]+lamA[2]*AB4[[i+1]][[3]]
        + lamA[3]*AB4[[i+1]][[4]] + lamA[4]*AB4[[i+1]][[5]]
]
```

```
lamA[1]:=lam[1] + lam[0]
lamA[2]:=lam[2] + 2*lam[0]
lamA[3]:=lam[3] + 2*lam[0]
lamA[4]:=lam[4] + lam[0]
```

```
atLamMu:= { lam[1]-> M[1],
            lam[2]-> M[1]+M[2],
            lam[3]-> M[1]+M[2]+M[3] }
```

```

OrbitBul[lamda_, imin_, imax_] :=
Do[Dosya = OpenWrite["C://Dosya.m"];
For[m1 = imin, m1 < imax + 1, m1++,
For[m2 = imin, m2 < imax + 1, m2++,
For[m3 = imin, m3 < imax + 1, m3++,
For[m4 = imin, m4 < imax + 1, m4++,
Coef = Coefficient[lamda, lam[0]];
lamdafunc = lamda - Coef*lam[0];
ustdom = m1*lam[1] + m2*lam[2] + m3*lam[3] + m4*lam[4];
sonuc = Expand[(ustdom - lamdafunc) /. atLamAlf];
If[(Coefficient[sonuc, alfa[1]] >= 0 && IntegerQ[Coefficient[sonuc, alfa[1]])]&&
(Coefficient[sonuc, alfa[2]] >= 0 && IntegerQ[Coefficient[sonuc, alfa[2]])]&&
(Coefficient[sonuc, alfa[3]] >= 0 && IntegerQ[Coefficient[sonuc, alfa[3]])]&&
(Coefficient[sonuc, alfa[4]] >= 0 && IntegerQ[Coefficient[sonuc, alfa[4]]]),
ktsy = ((pro[ustdom, ustdom] - pro[lamdafunc, lamdafunc])/(2*Coef));
delta = ktsy*del;
netice = Expand[(ustdom)] - delta + Coef*lam[0];
If[IntegerQ[ktsy], [Expand[netice /. atMuLam /. atLamMu]]]]];
Close[Dosya]; DeleteFile["C://Dosya.m"]

```

```

KarmaOrbitBul[XX_, YY_] :=
Do[i1max = DiziBoyut[XX];
  i2max = DiziBoyut[YY];
  kat = Coefficient[XX[1], lam[0]] + Coefficient[YY[1], lam[0]];
  mmm = XX[0] + YY[0];
  Dosya = OpenWrite["C://Dosya.m"];
  For[i1 = 1, i1 < i1max + 1, i1++,
    For[i2 = 1, i2 < i2max + 1, i2++,
      CC4 = Coefficient[XX[i1], lam[4]] + Coefficient[YY[i2], lam[4]];
      CCD = Coefficient[XX[i1], del] + Coefficient[YY[i2], del];
      CC1 = Coefficient[XX[i1], M[1]] + Coefficient[YY[i2], M[1]];
      CC2 = Coefficient[XX[i1], M[2]] + Coefficient[YY[i2], M[2]];
      CC3 = Coefficient[XX[i1], M[3]] + Coefficient[YY[i2], M[3]];
      lamda = CCD*del + kat*lam[0] + CC1*M[1] + CC2*M[2] +
        CC3*M[3] + CC4*lam[4];
      KK = CC1*M[1] + CC2*M[2] + CC3*M[3] + CC4*lam[4];
      If[pro[KK, KK] - pro[mmm, mmm] == 2*kat*(-CCD),
        Write[Dosya, lamda]]];
    Close[Dosya]; Sirala]

```

```

Isarett[dizi_, w_] := Do[kb = 0;
  vvb = Expand[dizi[0] /. atLamMu];
  uu1 = Coefficient[vvb, M[1]];
  uu2 = Coefficient[vvb, M[2]];
  uu3 = Coefficient[vvb, M[3]];
  rr = Coefficient[vvb, lam[4]];
  la0 = Coefficient[dizi[w], lam[0]];
  rn = Coefficient[dizi[w], lam[4]];
  aa = Coefficient[dizi[w], M[1]];
  bb = Coefficient[dizi[w], M[2]];
  cc = Coefficient[dizi[w], M[3]];
  dd = Coefficient[dizi[w], M[4]];

```



```

aa1 = 2*aa + rn; aa2 = 2*bb + rn; aa3 = 2*cc + rn; aa4 = 2*dd + rn;
kk=Sort[{Abs[aa1],Abs[aa2],Abs[aa3],Abs[aa4]},Greater];
yt=eps[Abs[aa1],Abs[aa2],Abs[aa3],Abs[aa4]]*
      Sign[aa1]*Sign[aa2]*Sign[aa3]*Sign[aa4];
aa1 = kk[[1]]; aa2 = kk[[2]]; aa3 = kk[[3]]; aa4 = kk[[4]];
bb1 = 2*uu1 + rr;
bb2 = 2*uu2 + rr;
bb3 = 2*uu3 + rr;
bb4 = 2*0 + rr;
While[aa1 != bb1 && aa1 != bb2 && aa1 != bb3 && aa1 != bb4 && aa1 != -bb1
      &&
      aa1 != -bb2 && aa1 != -bb3 && aa1 != -bb4, aa1 = aa1 - 2*|a|0; kb = kb + 1];
While[aa2 != bb1 && aa2 != bb2 && aa2 != bb3 && aa2 != bb4 && aa2 != -bb1
      &&
      aa2 != -bb2 && aa2 != -bb3 && aa2 != -bb4, aa2 = aa2 - 2*|a|0; kb = kb + 1];
While[aa3 != bb1 && aa3 != bb2 && aa3 != bb3 && aa3 != bb4 && aa3 != -bb1
      &&
      aa3 != -bb2 && aa3 != -bb3 && aa3 != -bb4, aa3 = aa3 - 2*|a|0; kb = kb + 1];
While[aa4 != bb1 && aa4 != bb2 && aa4 != bb3 && aa4 != bb4 && aa4 != -bb1
      &&
      aa4 != -bb2 && aa4 != -bb3 && aa4 != -bb4, aa4 = aa4 - 2*|a|0; kb = kb + 1];
k1 = Sign[aa1]; k2 = Sign[aa2]; k3 = Sign[aa3]; k4 = Sign[aa4];
isrtr = eps[k1*aa1, k2*aa2, k3*aa3, k4*aa4];
tiss = yt*((-1)^kb)*k1*k2*k3*k4*isrtr;
Return[tiss]]

```

```

Sol[XX_,M_,ata1_,ata2_,ata3_,ata4_] :=
Do[Pay = Expand[yazro[M, XX] /. u1 -> ata1 /. u2 -> ata2 /. u3 -> ata3 /. u4 -> ata4];
Payda = Expand[yazro[M, BBB] /. u1 -> ata1 /. u2 -> ata2 /. u3 -> ata3 /. u4 -> ata4];
SOL = Collect[Series[Pay/Payda, {p, 0, M}],p]; Return[SOL]]

```

```

SagPer[a_, b_, c_, d_] :=
Sum[u1^Permutations[{a, b, c, d}][[i]][[1]]*
  u2^Permutations[{a, b, c, d}][[i]][[2]]*
  u3^Permutations[{a, b, c, d}][[i]][[3]]*
  u4^Permutations[{a, b, c, d}][[i]][[4]] , {i, 1, Length[Permutations[{a, b, c, d}]]}]

```

```

Sag[XX_, depth_, ata1_, ata2_, ata3_, ata4_] :=
Do[ k = 1; j = 1; sonuc = 0;
  While[Coefficient[XX[k], del] >= -depth,
    a0 = Coefficient[XX[k], del];
    alam = Coefficient[XX[k], lam[0]];
    a1 = Coefficient[XX[k], M[1]];
    a2 = Coefficient[XX[k], M[2]];
    a3 = Coefficient[XX[k], M[3]];
    a4 = Coefficient[XX[k], M[4]];
    alm = Coefficient[XX[k], lam[4]];
    k = k + 1;
  sonuc = sonuc + (p^-a0)*((u1*u2*u3*u4)^(1/2))^alm)* SagPer[a1, a2, a3, a4] ;
  sonuc = sonuc /. u1 -> ata1 /. u2 -> ata2 /. u3 -> ata3 /. u4 -> ata4 ;
  If[XX[k]==0,Return[sonuc]]; j = j + 1]; Return[sonuc]]

```

ÖZGEÇMİŞ

Fikri Onur Öztırpan 23 Nisan 1982’de Sakarya’da doğmuş, orta öğrenimini Marmara Lisesinde tamamlamıştır. 2000 yılında girdiği İstanbul Kültür Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümünü 2004 yılında bitirerek aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Mühendisliği Bölümüne girerek yüksek lisans eğitimine başlamıştır.

Lisans Tezi : Afin Lie Cebirlerinin Poincare Polinomlarına Bir Yaklaşım