

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KABARCIKLI SIVILARDA KAVİTASYONLU DAİMİ LÜLE AKIŞLARININ
KARARLILIĞI VE SOLİTON OLUŞUMU**

**DOKTORA TEZİ
Şenay PASİNLİOĞLU**

Anabilim Dalı : MATEMATİK

Programı : MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

NİSAN 2009

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KABARCIKLI SIVILARDA KAVİTASYONLU DAİMİ LÜLE AKIŞLARININ
KARARLILIĞI VE SOLİTON OLUŞUMU**

**DOKTORA TEZİ
Şenay PASİNLİOĞLU
(509992121)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30 Ocak 2009
Tezin Savunulduğu Tarih : 21 Nisan 2009**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Can Fuat DELALE (İ.T.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Faruk GÜNGÖR (İ.T.Ü.)
Prof. Dr. Hüsnü Ata ERBAY (IŞIK Ü.)
Prof. Dr. Metin Orhan KAYA (İ.T.Ü.)
Prof. Dr. Varga KALANTAROV (KOÇ Ü.)**

NİSAN 2009

Biricik oğlum Barış Eray PASİNLİOĞLU'na...

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında bilimsel desteğini esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. Can Fuat Delale'ye sonsuz teşekkür ederim. Tez İzleme Komitesi üyeleri Prof. Dr. Faruk Güngör ve Prof. Dr. Hüsnü Ata Erbay'a bilimsel katkılarından dolayı teşekkürlerimi sunarım. Maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca doktora tez çalışmalarım sırasında bana her zaman anlayış ve sabır gösterip destek olan eşim Ayhan Pasinlioğlu ve ailesine teşekkürü de bir borç bilirim.

Nisan 2009

Şenay PASİNLİOĞLU

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGE LİSTESİ	ix
ŞEKİL LİSTESİ	xi
SEMBOL LİSTESİ	xv
ÖZET	xvii
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ	1
2. KAVİTASYONLU KABARCIKLI SIVI AKIŞLARI İÇİN MODEL DENKLEMLER	5
2.1 İki-Fazlı Akışlar İçin Homojen Karışım Modeli.....	5
2.2 Kaviteasyonlu Kabarcıklı Sıvı Akışları İçin Model Denklemler	5
2.2.1 Sanki-bir-boyutlu kaviteasyonlu daimi olmayan lüle akışları	6
2.2.2 Akış hızı ve kabarcık yarıçapı için evrim denklemleri	10
2.2.3 Sanki-bir-boyutlu kaviteasyonlu daimi lüle akışları	12
3. KAVİTASYONLU DAİMİ LÜLE AKIŞLARININ KARARLILIĞI	15
3.1 Sanki-Bir-Boyutlu Kaviteasyonlu Daimi Lüle Akışlarının Kararlılığı.....	15
3.1.1 Kararlılık için özdeğer problemi	18
3.1.2 Lüle giriş bölgesi için normal mod analizi	19
3.1.3 Kararlılık diyagramları	22
4. KABARCIKLI SIVILARDA SOLİTON OLUŞUMU	31
4.1 Model Denklemler	32
4.2 Kabarcıklı Sıvılar İçin Boussinesq Denklemleri	33
4.3 Kabarcıklı Sıvılarda KdV-Burgers ve KdV Denklemleri	35
4.4 Soliton Oluşumu ve Etkileşen Soliton Sayısı	37
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	41
KAYNAKLAR	43
EKLER	49
ÖZGEÇMİŞ	76

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1 Soliton sayısının, $\alpha = 0$ için kabarcık/kabarcık etkileşme parametresiyle (Λ) değişimi (N_d : Deneysel olarak gözlenen soliton sayısı, van Wijngaarden, 1995).	40

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1 : Saf bir maddenin sıcaklık(T)-basınç(p) diyagramında kaynama ve kavitasyonu betimleyen faz geçişleri (K.N. : Kritik Nokta, Ü.K.N. : Üçlü Kritik Nokta, F: Saf Sıvı Hali).	2
Şekil 3.1 : Hava kabarcıkları içeren suyun daimi akışında kavitasyonsuz kabarcık yarıçapı ve akış hızının (üst şekil) ve basınç katsayısının (alt şekil), (3.28) denklemiyle kesit alanı verilen lülenin (orta şekil) eksen koordinatı boyunca değişimleri. Burada sönüm katsayısı $\mu'_{eff}/\mu'_l = 1.0$, kabarcık/kabarcık etkileşim parametresi $\Lambda = 1.0$, giriş kabarcık yarıçapı $R'_i = 40\mu m$, mikrodan makroya ölçek oranı $L = 8 \times 10^{-4}$, giriş basıncı $p'_i = 1.013$ bar, giriş hacimsel kabarcık oranı $\beta_i = 10^{-3}$ ve kavitasyon sayısı $\sigma_i = 0.85$ olarak alınmıştır.	24
Şekil 3.2 : Hava-su buharı kabarcıkları içeren suyun kavitasyonlu daimi akışında kabarcık yarıçapı ve akış hızının (üst şekil) ve basınç katsayısının (alt şekil), (3.28) denklemiyle kesit alanı verilen lülenin (orta şekil) eksen koordinatı boyunca değişimleri. Burada sönüm katsayısı $\mu'_{eff}/\mu'_l = 1.0$, kabarcık/kabarcık etkileşim parametresi $\Lambda = 1.0$, giriş kabarcık yarıçapı $R'_i = 40\mu m$, mikrodan makroya ölçek oranı $L = 8 \times 10^{-4}$, giriş basıncı $p'_i = 1.013$ bar, giriş hacimsel kabarcık oranı $\beta_i = 10^{-3}$ ve kavitasyon sayısı $\sigma_i = 0.79$ olarak alınmıştır.	25
Şekil 3.3 : Karışımın ideal akış durumunda sönüm katsayısının (μ'_{eff}/μ'_l) farklı değerleri için (1.0 ve 30.0) lüle girişindeki kavitasyon sayısının (σ_i) pertürbasyon dalga sayısı (k) değişimi ve kararlılık bölgeleri.	26
Şekil 3.4 : Karışımın ideal akış durumunda sönüm katsayısının (μ'_{eff}/μ'_l) farklı değerleri için (1.0 ve 30.0) lüle girişindeki hacimsel kabarcık oranının (β_i) pertürbasyon dalga sayısı (k) değişimi ve kararlılık bölgeleri.	27
Şekil 3.5 : Karışımın türbülanslı cidar kayma gerilmesinin gözönüne alındığı durumda sönüm katsayısının (μ'_{eff}/μ'_l) farklı değerleri (1.0 ve 30.0) için lüle girişindeki kavitasyon sayısının (σ_i) pertürbasyon dalga sayısı (k) değişimi ve kararlılık bölgeleri.	27
Şekil 3.6 : Karışımın türbülanslı cidar kayma gerilmesinin gözönüne alındığı durumda sönüm katsayısının (μ'_{eff}/μ'_l) farklı değerleri (1.0 ve 30.0) için lüle girişindeki hacimsel kabarcık oranının (β_i) pertürbasyon dalga sayısı (k) değişimi ve kararlılık bölgeleri.	28

Şekil 3.7 :	Karışımın ideal akış ve türbülanslı cidar kayma gerilmesinin gözönüne alındığı hallerde lüle girişindeki kavitasyon sayısının (σ_i) pertürbasyon dalga sayısı (k) değişimi ve kararlılık bölgeleri.	29
Şekil 3.8 :	Karışımın ideal akış ve türbülanslı cidar kayma gerilmesinin gözönüne alındığı hallerde lüle girişindeki hacimsel kabarcık oranının (β_i) pertürbasyon dalga sayısı (k) değişimi ve kararlılık bölgeleri.	29
Şekil 4.1 :	(4.1) Airy denkleminin (4.34) denklemiyle verilen başlangıç koşulları için $0 < y < 10$ aralığındaki çözümü	39
Şekil E.1 :	Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki A_1 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.	65
Şekil E.2 :	Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki A_2 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.	65
Şekil E.3 :	Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki A_3 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.	66
Şekil E.4 :	Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki A_4 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.	66
Şekil E.5 :	Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki A_5 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.	67
Şekil E.6 :	Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki A_6 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.	67
Şekil E.7 :	Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki A_7 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.	68
Şekil E.8 :	Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki A_8 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.	68
Şekil E.9 :	Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki A_9 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.	69
Şekil E.10 :	Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki C_1 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.	69
Şekil E.11 :	Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki C_2 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.	70
Şekil E.12 :	Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki C_3 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.	70

Şekil E.13 : Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki C_4 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.	71
Şekil E.14 : Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki C_5 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.	71
Şekil E.15 : Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki C_6 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.	72
Şekil E.16 : Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki C_7 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.	72
Şekil E.17 : Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki C_8 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.	73

SEMBOL LİSTESİ

A	: Lülenin kesit alanı
A_i, B_i	: Airy fonksiyonları
$A_j; j = 1, 2, \dots, 9$: (3.9) denklemindeki katsayılar
$C_j; j = 1, 2, \dots, 8$: (3.10) denklemindeki katsayılar
c'_0	: Başlangıç ses hızı
C_p	: Basınç katsayısı
C_w	: Cidar kayma gerilmesi katsayısı
$f_j; j = 1, 2, \dots, 10$: (3.7) denklemindeki katsayılar
$F_j; j = 1, 2, \dots, 10$: (3.7) denklemindeki katsayılar
H'_i	: Lülenin girişteki yüksekliği
k	: Kabarcıklar içindeki gaz için politropik indeks, pertürbasyon dalga sayısı
ℓ'	: Etkileşen basınç dalgalarının karakteristik uzunluğu
L	: Mikro ile makro boyutlar arasındaki oran
n'	: Karışımın birim hacimdeki kabarcık yoğunluğu sayısı
n'_0	: Sıvının birim hacimdeki kabarcık yoğunluğu sayısı
p	: Boyutsuz karışım basıncı
p'	: Karışım basıncı
p'_i	: Lüle giriş basıncı
\mathcal{P}'	: Islak kesit çevresi
Q	: Soliton sayısını belirleyen parametre
R	: Boyutsuz kabarcık yarıçapı
R'	: Kabarcık yarıçapı
\bar{R}	: Daimi haldeki kabarcık yarıçapı
\mathfrak{R}'	: Gaz sabiti
Re, Re_f	: Reynolds sayısı
Re_ℓ	: Tipik Reynolds sayısı
s	: Özdeğer
S'	: Yüzey gerilim katsayısı
S_0	: Boyutsuz yüzey gerilim katsayısı
t	: Boyutsuz zaman
t'	: Zaman
T'_0	: Sıvının sıcaklığı
T'_g	: Kabarcık içindeki gaz sıcaklığı
u	: Boyutsuz akış hızı
u'	: Akış hızı
\bar{u}	: Daimi haldeki akış hızı
w, \hat{w}, \tilde{w}	: Akış hızı pertürbasyon genliği
We	: Weber sayısı

x'	: Lüle eksen koordinatı
y	: Ölçeklenmiş boyutsuz tüp ekseni koordinatı
β	: Hacimsel kabarcık oranı
γ	: Adyabatik üs
ε	: Pertürbasyon parametresi
$\varepsilon_j ; j = 0, 1, \dots, 4$: (3.24) denklemindeki katsayılar
θ	: Ölçeklenmiş zaman koordinatı
Θ'	: Karakteristik akış zamanı
κ_i	: Hacimsel kabarcık oranını betimleyen bir parametre
λ_n	: (4.26) denkleminin özdeğerleri
Λ	: Kabarcık/kabarcık etkileşim parametresi
μ'_{eff}	: Efektif viskozite
μ'_ℓ	: Sıvının viskozitesi
ν	: KdV-Burgers denklemindeki viskoz yutulma terimi
ν'_D	: Sönüm katsayısını belirleyen kinematik viskozite
ξ	: Pertürbasyon genliği
ρ	: Boyutsuz karışım yoğunluğu
ρ'	: Karışım yoğunluğu
σ_i	: Kavitasyon sayısı
σ, σ_1	: KdV ve KdV-Burgers denklemlerindeki dispersiyon katsayıları
τ'_w	: Cidar kayma gerilmesi
$\phi, \hat{\phi}, \tilde{\phi}$: Kabarcık yarıçapı pertürbasyon genliği
φ	: Islanan çevrenin kesit alanına oranını betimleyen boyutsuz katsayı
χ_1, χ_2	: Gaz kabarcıkları ve sıvı yoğunlukları oranını betimleyen parametreler
ω	: Dalganın açısal frekansı
ω'_B	: İzotermal haldeki Minnaert frekansı

ALT İNDİSLER

c	: Kritik değer
g	: Gaz
I	: Sanal kısım
i	: Lüle giriş bölgesi
j	: İndis
ℓ	: Sıvı
ν	: Buhar
0	: Başlangıç durumu
p	: Basınç
R	: Reel kısım

KABARCIKLI SIVILARDA KAVİTASYONLU DAİMİ LÜLE AKIŞLARININ KARARLILIĞI VE SOLİTON OLUŞUMU

ÖZET

Bu tezde, kabarcıklı sıvılarda kavitasyonlu daimi lüle akışı çözümlerinin kararlılığı ve soliton oluşumu problemleri ele alınmıştır. Birinci problemin amacı, yakınsak-ıraksak bir lülede sanki-bir-boyutlu kavitasyonlu daimi kabarcıklı akış çözümlerinin, kabarcık/kabarcık etkileşimleri de gözönünde bulundurularak zamana göre kararlılığını incelemektir. Bunun için homojen kabarcıklı sıvı akışı modeli kullanılarak, sanki-bir-boyutlu daimi olmayan kavitasyonlu lüle akış denklemleri kabarcık dinamiği yasasıyla birleştirilerek (iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset denklemi) model denklemler inşa edilmiştir. Çekirdekleşme, kabarcık bölünmesi ve kabarcık birleşmeleri ihmal edilmiştir. Tüm sönüm mekanizmaları, viskoz yutulma biçiminde tek bir sönüm katsayısı olarak ele alınmış, kabarcıkların büyüme ve büzülmesinde kabarcık içindeki gaz için politropik yasa kullanılmıştır. Başlangıç dağılımları, giriş koşulları ve lüle geometrisi, lülede kavitasyon oluşacak şekilde alınmıştır. Bu varsayımlar altında, model denklem sistemi, akış hızı ve kabarcık yarıçapı için iki evrim denklemine indirgenmiştir. Evrim denklemleri, daimi olmayan akış baz alınarak pertürbe edildiğinde, kabarcık yarıçapı ve akış hızı pertürbasyonları için kuple lineer kısmi diferensiyel denklem sistemi elde edilmiştir. Bu kuple lineer denklem sistemi genelleştirilmiş özdeğer problemine dönüştürülmüş ve lülenin belli bölgeleri için özdeğerler hesaplanmıştır. Özdeğer problemindeki denklem sisteminin tüm katsayılarının hemen hemen sabit olduğu lüle giriş bölgesinde, normal mod analizi yöntemiyle özdeğer problemi kesin olarak çözülmüş ve çeşitli akış parametrelerinin (kavitasyon sayısı, lüle girişindeki hacimsel kabarcık oranı, vs.) k dalga sayısı ile değişimi için kararlılık diyagramları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, kavitasyonlu daimi lüle akışı çözümlerinin sadece çok küçük dalga sayıları için zamana göre kararlı olduğunu göstermiştir. Lüle giriş bölgesi için kararlılık diyagramlarındaki kararlı bölgelerin, türbülanslı cidar kayma gerilmesi etkisi gözönünde bulundurulduğunda genişlediği görülmüştür.

Tezin sonraki kısmında, kabarcıklı sıvılarda soliton oluşumu incelenmiştir. Bu problemde, küresel kabarcık dinamiği (Rayleigh-Plesset tipi denklemler) kullanılarak seyreltik olmayan kabarcıklı sıvılarda soliton oluşumu ve yayılmasının ana özellikleri araştırılmıştır. Bunun için, kabarcıklı sıvı içeren uzun bir tüpte başlangıçta üçgen profiline sahip bir-boyutlu basınç dalgasının yayılması göz önüne alınmıştır. Seyreltik olmayan durumda kabarcık/kabarcık etkileşimlerini göz önünde bulunduran iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset kabarcık dinamiği yasasıyla kabarcıklı sıvılar için hareket denklemleri kullanılmıştır. Bu varsayımlar altında, model denklemlerde kabarcıktaki gaz basıncı pertürbe edilerek Boussinesq denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemlerde dispersiyon, nonlineerlik ve viskoz yutulmanın zayıf olduğu varsayılarak, Korteweg-de Vries-Burgers denklemi çıkarılmış, daha sonra da yutulma terimi ihmal edilerek standart Korteweg-de

Vries (KdV) denklemi elde edilmiştir. Sonuçta, etkileşen soliton dalga çözümleri bulunmuştur. Burada etkileşen soliton sayısı, ters saçılma yöntemiyle belirlenmiştir. Elde edilen sonuçlar, etkileşen soliton sayısının kabarcık/kabarcık etkileşmesiyle azaldığını göstermektedir.

STABILITY OF STEADY-STATE CAVITATING NOZZLE FLOWS AND FORMATION OF SOLITONS IN BUBBLY LIQUIDS

SUMMARY

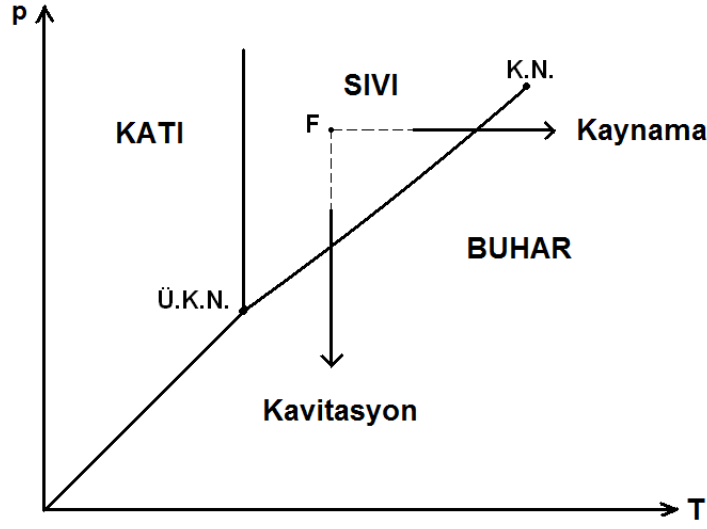
In this thesis, the stability of steady-state bubbly cavitating nozzle flows and the formation of solitons in bubbly liquids are considered. The aim of the first problem is to explore the temporal stability of steady-state quasi-one-dimensional bubbly cavitating flows in converging-diverging nozzles with the inclusion of bubble/bubble interactions. For this reason, quasi-one-dimensional unsteady bubbly cavitating nozzle flows are considered by employing a homogeneous bubbly liquid flow model together with the nonlinear dynamics of cavitating bubbles, described by a modified Rayleigh-Plesset equation. Nucleation, coagulation of bubbles and bubble fission are neglected. The various damping mechanisms are lumped together by a single damping coefficient in the form of viscous dissipation. A polytropic law for the expansion and compression of the gas inside the bubble is assumed. The initial distributions, inlet conditions and nozzle geometry are chosen such that cavitation can occur in the nozzle. Under these assumptions, the complete system of equations are reduced to two evolution equations, one for the flow speed and the other for the bubble radius. The evolution equations are then perturbed with respect to flow unsteadiness resulting in a coupled system of linear partial differential equations for the bubble radius and flow speed perturbations. This system of coupled linear PDE's is then cast into an eigenvalue problem. The eigenvalues for the resulting system are found by normal mode analysis in the inlet region of the nozzle where the coefficients of the system of the PDE's are almost constant. Stability diagrams are obtained by varying the various flow parameters (cavitation number, inlet void fraction, etc.) against the perturbation wave number k . Results found show that the steady-state bubbly cavitating nozzle flow solutions are temporally stable only for perturbations with very small wave numbers. The stable regions of the stability diagram for the inlet region of the nozzle are seen to be broadened by the effect of turbulent wall shear stress. In the second part of the thesis, the formation of solitons in bubbly liquids is investigated. In this part, we show the main features of soliton formation and propagation in bubbly liquids in the non-dilute limit, based on spherical bubble dynamics using a modified Rayleigh-Plesset equation. We consider the one-dimensional propagation of pressure waves with an initial triangular profile in a bubbly liquid contained in a long tube. We use the equations of motion for bubbly liquids where we describe bubble dynamics by a modified Rayleigh-Plesset equation, taking into account bubble/bubble interactions in the non-dilute limit. Under these assumptions, the model equations are perturbed for the gas pressure to arrive at the Boussinesq equations. By order of magnitude arguments and by assuming weak dispersion and weak non-linearity, we derive the KdV-Burgers equation, which is then cast into the standard form of the KdV equation by neglecting dissipation. Using a triangular profile for the initial pressure profile,

a wavetrain of interacting solitons is found, where the number of interacting solitons is obtained by the inverse scattering method. Our results show that bubble/bubble interactions result in the reduction of the number of interacting solitons.

1. GİRİŞ

Kavitasyon, yani başlangıçta homojen olan bir sıvıda buhar boşluklarının görülmesi olayı, değişik durumlarda oluşabilir. Kavitasyon oldukça düşük basınçlar altında sıvı ortamın faz geçişi yoluyla iki-fazlı sıvı-kabarcık karışımına dönüşümü olarak tanımlanabilir. Bu faz geçişi, sıvının durgun ya da akış halinde olduğu durumlarda meydana gelebilir. Sıvının durgun olduğu hallerde, bir hazne içindeki sıvının serbest yüzeyine salınım yapan bir basınç alanı uygulandığında, salınım genliği yeteri derecede büyük ise, faz geçişi sonucu sıvının içinde kavitasyon kabarcıkları oluşabilir. Bu tür kavitasyon *akustik kavitasyon* adını alır. Akış halindeki sıvıda kavitasyon oluşumuna ise *hidrodinamik kavitasyon* adı verilir. Her iki durumda da faz geçişi için sıvı basıncının kavitasyon oluşacak bölgede sıvının doymuş buhar basıncının (p'_v) altına düşmesi gerekir. Kavitasyon olayına, genellikle, sıvı basıncını yaklaşık olarak sabit bir sıcaklıkta sıvının doyma basıncının altına düşürmekle erişilir. Kavitasyon aslında kaynamaya benzer bir mekanizma sonucu oluşur. Ancak aradaki fark, kaynama durumunun aksine, oluşum mekanizmasını tetikleyen sıcaklık farkı yerine basınç değişimidir. Şekil 1.1'de saf bir maddenin sıcaklık(T)-basınç(p) faz diyagramında her iki olay (kavitasyon ve kaynama) gösterilmektedir.

Akış halindeki bir sıvıda, özellikle, sıvının küçük kesitlerden büyük hızla akışı, kavitasyon olayını doğurmaktadır. Bir su türbini, gemi pervanesi, su pompası, vb. kavitasyona elverişli koşullar altındadır. Kavitasyonlu akışlarda sıvı içindeki kabarcıklar yeterli derecede düşük bir basınç bölgesine taşındığında, adeta patlarcasına büyüyerek makro boyutlara erişir ve yeniden yüksek basınç bölgesine taşındıklarında şiddetli bir şekilde büzülürler. Kavitasyon buhar boşluklarının sıvıda doğup kaybolmaları son derece yüksek frekanslarla tekrarlanır ve buhar boşluklarının yok olması sırasında, çevredeki sıvının hücumu sonucu şok dalgaları oluşur ve bu dalgalar boru cidarı, makina pervanesi gibi katı cisim üzerinde darbe etkisi yaratır. Sonucunda bu elemanların darbelere maruz kaldığı bölgeler aşınır. Kavitasyon konusundaki literatür



Şekil 1.1: Saf bir maddenin sıcaklık(T)-basınç(p) diyagramında kaynama ve kavitasyonu betimleyen faz geçişleri (K.N. : Kritik Nokta, Ü.K.N. : Üçlü Kritik Nokta, F: Saf Sıvı Hali).

çok zengin olmasına karşın, verilen bir akış hali için kavitasyonun fiziksel mekanizması tam olarak anlaşılmış değildir. Konunun belli başlı kitapları arasında Hammitt (1980), Young (1989), Brennen (1995) ile Franc ve Michel (2004) sayılabilir. Ayrıca, bazı ayrıntılar için van Wijngaarden (1968, 1972) ile Plesset ve Prosperetti (1977)'nin derleme makalelerine de başvurulabilir. Kavitasyon için oldukça önemli sayılan kabarcık dinamiği üzerindeki çalışmaların çokluğuna rağmen, kabarcık dinamiğinin hidrodinamik alanla etkileşmesini inceleyen çalışmalar oldukça sınırlıdır. Bunun asıl nedeni, kabarcık dinamiği denklemiyle (örneğin tek kabarcık dinamiği için Rayleigh-Plesset denklemi) Euler ya da Navier-Stokes akış denklemlerinin oluşturduğu sistemin, başlangıç / sınır değer probleminin çözümü için doyurucu analitik ve sayısal bir çözüm tekniği olmamasıdır. Bundan dolayı, gerçek kavitasyonlu akışlar için çoğu kez deneye başvurulur. Özellikle hidrodinamik kavitasyon, kuramsal olarak modellenmesi zor bir olaydır. Daimi olmayan kavitasyonlu akışların sayısal simülasyonu için, genellikle homojen iki-fazlı akış modelleri kullanılır. Bu modellerde, iki-fazlı karışım mezoskopik ölçekte homojen varsayılır. Bu akışlar için, geometrik açıdan en basit konfigürasyonu kavitasyonlu yakınsak-ıraksak lüle akışları oluşturur. Yakınsak-ıraksak bir lüleden geçen kabarcıklı sıvı

akış modeli ilk kez Tangren ve diğ. (1949) tarafından barotropik bir bağıntı kullanılarak incelenmiştir. Problem, daimi olmayan etkiler gözönüne alınarak Ishii ve diğ. (1993) tarafından yeniden ele alınmış, fakat kabarcık dinamiği ihmal edilmiştir. Kaviteasyonlu akışlar için kabarcık dinamiği yasası ile lüle akış denklemlerini birlikte düşünmek zorunludur. Klasik Rayleigh-Plesset denklemi ile tanımlanan küresel kabarcık dinamiği yasasını akış denklemlerine bağlayan sürekli bir kabarcıklı karışım akış modeli van Wijngaarden (1968) tarafından önerilmiştir. Bu model kullanılarak sanki-bir-boyutlu yakınsak-ıraksak lülelerdeki kabarcıklı kaviteasyonlu daimi akışların çözümleri Wang ve Brennen (1998) ile Delale ve diğ. (2001) tarafından verilmiştir. Daimi akış çözümleri yanısıra patlayan çözümler bulunmuştur. Bu modelin daimi olmayan akış hallerinde incelenmesi, özellikle deneylerde gözlenen bazı kaviteasyonlu akış rejimlerinin (örneğin salınım yapan kaviteasyon akışları, kaviteasyonlu akışlarda şok dalgaları oluşumu) yorumlanmasına yol açmıştır (Preston ve diğ., 2002).

Bu tez çalışmasının amacı, yakınsak-ıraksak bir lülede sanki-bir-boyutlu kaviteasyonlu daimi kabarcıklı akış çözümlerinin zamana göre kararlılığını ve kabarcıklı sıvılarda soliton oluşumunu incelemektir. Bunun için homojen kabarcıklı sıvı akışı modelinde sanki-bir-boyutlu daimi olmayan kaviteasyonlu lüle akış denklemleri kabarcık dinamiği yasasıyla birleştirilerek (iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset denklemi) gözönünde bulundurulmuştur. Çekirdekleşme, kabarcık bölünmesi ve kabarcık birleşmeleri ihmal edilmiştir. Tüm sönüm mekanizmaları, viskoz yutulma biçiminde tek bir sönüm katsayısı olarak ele alınmış, kabarcıkların büyüme ve büzülmesinde politropik yasa kullanılmıştır. Başlangıç dağılımları, giriş koşulları ve lüle geometrisi, lülede kaviteasyon oluşacak şekilde alınmıştır. Bu varsayımlar altında, önerilen model denklem sistemi akış hızı ve kabarcık yarıçapı için iki evrim denklemine indirgenmiştir. Daha sonra evrim denklemleri daimi olmayan akışa göre pertürbe edilerek, kabarcık yarıçapı ve akış hızı pertürbasyonları için kupule lineer kısmi diferensiyel denklem sistemi elde edilmiştir. Bu kupule lineer denklem sistemi genelleştirilmiş özdeğer problemine dönüştürülmüş ve özdeğer problemi, denklem sisteminin tüm katsayılarının hemen hemen sabit olduğu lüle giriş bölgesinde normal mod analizi yöntemiyle kesin olarak çözülmüştür. Çeşitli akış parametrelerinin (kaviteasyon

sayısı, hacimsel kabarcık oranı, vs.) k dalga sayısı ile değişimi için kararlılık diyagramları elde edilmiştir (Delale ve diğ., 2007; Pasinlioğlu ve diğ., 2009). Elde edilen sonuçlar, kavitasyonlu daimi lüle akışı çözümlerinin sadece çok küçük dalga sayıları için zamana göre kararlı olduğunu göstermiştir. Lüle giriş bölgesi için kararlılık diyagramlarındaki kararlı bölgelerin, türbülanslı cidar kayma gerilmesi etkisi gözönünde bulundurulduğunda genişlediği görölmüştür (Pasinlioğlu ve diğ., 2009). Tezin sonraki kısmında ise kabarcıklı sıvılarda soliton oluşumu incelenmiştir. Bu çalışmada, küresel kabarcık dinamiğinin (Rayleigh-Plesset tipi denklemler) klasik teorisine dayalı seyreltik olmayan durumda kabarcıklı sıvılarda soliton oluşumu ve yayılmasının ana özellikleri araştırılmıştır. Bunun için, kabarcıklı sıvı içeren uzun bir tüpte, başlangıçta üçgen profiline sahip bir basınç dalgasının yayılması göz önüne alınmıştır. Seyreltik olmayan durumda kabarcık/kabarcık etkileşmelerini göz önünde bulunduran iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset kabarcık dinamiği yasasıyla, kabarcıklı sıvı karışımı için hareket denklemleri kullanılmıştır. Bu varsayımlar altında, model denklemlerde kabarcıktaki gaz basıncına pertürbasyon uygulanarak Boussinesq denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemlerde dispersiyon, nonlinearlik ve viskoz yutulmanın zayıf olduğu varsayılarak, Korteweg-de Vries-Burgers denklemi çıkarılmış, daha sonra da viskoz yutulma terimi ihmal edilerek standart Korteweg-de Vries denklemi elde edilmiştir. Burada, etkileşen soliton sayısı ters saçılma kuramıyla belirlenmiştir. Elde edilen sonuçlar etkileşen soliton sayısının kabarcık/kabarcık etkileşmesiyle azaldığını göstermiştir (Pasinlioğlu ve Delale, 2008).

2. KAVİTASYONLU KABARCIKLI SIVI AKIŞLARI İÇİN MODEL DENKLEMLER

2.1 İki-Fazlı Akışlar İçin Homojen Karışım Modeli

İki veya çok fazlı akışların analizi için en basit model homojen akış modelidir (Wallis, 1969; Brennen, 2005). Bu modelde ortalama özellikler belirlenir ve çok-fazlı karışım tek bir akışkan gibi ele alınır. Bu durumda akışkanlar mekaniğinin tek fazlı akışlardaki tüm yöntemleri uygulanabilir. Burada gerekli olan ortalama özellikler, akış hızı, termodinamik özellikler (sıcaklık, basınç ve yoğunluk) ve transport özellikleri (viskozite, ısı iletkenlik, difüzyon katsayısı, vs.) olarak sınıflandırılabilir. Bu özellikler ağırlıklı ortalamalarla elde edilir ve karışımı oluşturan fazların özellikleriyle aynı olmak zorunda değildir. İki-fazlı karışımın ortalama özelliklerinin belirlenmesinde, genellikle, daha karmaşık denklemlerle başlayan ve tek-fazlı akış denklemlerine indirgenene dek sadeleştirmeler yapılan bir yöntem kullanılır (Biesheuvel ve van Wijngaarden, 1984; Caffisch ve diğ., 1985; Zhang ve Prosperetti, 1994a,b). Fazlar arası akış hızları, sıcaklık ve kimyasal potansiyel farkları, ara yüzeylerdeki momentum, ısı ve kütle geçişi yasalarıyla belirlenir. Bu durumda hız, sıcaklık ve kimyasal potansiyelin ortalama değerleri her bileşen için aynıdır. Bazı durumlarda homojen modelin kullanılması uygun değildir. Örneğin, çift yönlü ya da çapraz akışlar halinde ortalama hız tanımlanamaz. Dolayısıyla, burada homojen model uygulanamaz. Bu durumda iki-fazlı iki akışkan modeli kullanılır.

2.2 Kaviteyonlu Kabarcıklı Sıvı Akışları İçin Model Denklemler

Kaviteyonlu kabarcıklı sıvı akışları için model denklemler, genellikle iki-fazlı homojen karışım için Euler ya da Navier-Stokes denklemlerinin Rayleigh-Plesset tipi küresel kabarcık dinamiği denklemleriyle birleştirilmesiyle elde edilir. Genellikle çekirdekleşme, kabarcık birleşmesi ve bölünmesi gözönüne alınmaz. Bu durumda, birim sıvı hacmindeki kabarcık sayısı sabit kalır. Bugün için, çeşitli

geometrilere model denklemlerin iki veya daha fazla boyutta başlangıç/sınır değer problemlerinin çözümü olası görünmemektedir. Dolayısıyla bu tezde, sanki-bir-boyutlu lüle akışları ele alınacaktır.

2.2.1 Sanki-bir-boyutlu kavitasyonlu daimi olmayan lüle akışları

Bu bölümde, sanki-bir-boyutlu yakınsak-ıraksak bir lülede kavitasyonlu daimi olmayan akışlar için model denklemler göz önünde bulundurulacak, başlangıç ve sınır koşulları ile lüle geometrisi, lülede kavitasyon oluşacak tarzda ele alınacaktır. Kavitasyonlu akışı modellemek için Kogarko (1961) ve van Wijngaarden (1968, 1972) tarafından önerilen, Wang ve Brennen (1998), Delale ve diğ. (2001) ile Preston ve diğ. (2002) tarafından geliştirilen, sanki-bir-boyutlu daimi olmayan lüle akış denklemleri ile küresel kabarcık dinamiğini birbirine bağlayan model denklemler kullanılacaktır. Burada kabarcıklı karışım için homojen iki-fazlı akış modeli kullanılarak kabarcıklar ile sıvının aynı hızla hareket ettiği varsayılmıştır (lüle akışlarında kabarcıklar ve sıvının arasındaki hız farkı etkisi Wang ve Chen, 2002 tarafından incelenmiştir). Bu durumda karışım yoğunluğu

$$\rho' = \rho'_\ell(1 - \beta) + \rho'_g\beta \quad (2.1)$$

biçiminde yazılabilir. Burada ρ' karışım yoğunluğunu, β karışımdaki hacimsel kabarcık oranını, ρ'_ℓ sıkıştırılmaz varsayılan sıvının sabit yoğunluğunu ve ρ'_g gaz yoğunluğunu göstermektedir (seyreltik kabarcıklı sıvılarda ve gaz yoğunluğunun sıvının yoğunluğuna oranının çok küçük olduğu hallerde, genellikle, $\rho'_g\beta$ terimi ihmal edilebilir). Kabarcıklı karışımın sanki-bir-boyutlu lüle akışı için süreklilik ve momentum denklemleri

$$A' \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'} (\rho' u' A') = 0 \quad (2.2)$$

$$\rho' \frac{du'}{dt'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} - \frac{\mathcal{P}'}{A'} \tau'_w \quad (2.3)$$

biçiminde yazılabilir. Yukarıdaki (2.2) ve (2.3) denklemlerinde u' akış hızını, p' karışım basıncını ve τ'_w cidar kayma gerilmesini göstermektedir. Bu denklemlerde A' lüle kesit alanını, \mathcal{P}' ıslak kesit çevresini, x' lüle eksen koordinatını (orijin boğaz kesitinde olacak şekilde) ve t' gerçek zamanı göstermektedir. Ayrıca,

(2.3) momentum denkleminde viskoz ve yerçekimi terimleri ihmal edilmiş olup $d/dt' = \partial/\partial t' + u'\partial/\partial x'$ maddesel veya toplam türevi göstermektedir. Eğer kabarcıkların oluşumu (çekirdekleşme ve kabarcık bölünmesi Brennen, 2002; Delale ve Tunç, 2004; Delale ve diğ., 2005b) ve birleşmesi ihmal edilirse, karışımın birim hacmindeki kabarcık sayısı yoğunluğu n' hacimsel kabarcık oranı β cinsinden

$$n' = n'_0(1 - \beta) \quad (2.4)$$

olarak ifade edilebilir. Burada n'_0 sıvının birim hacmindeki kabarcık yoğunluğu sayısıdır ve akış boyunca sabittir. Ayrıca, yarıçapı R' küresel kabarcıklardan oluşan karışımda, β hacimsel kabarcık oranı

$$\beta = \frac{4}{3} \pi R'^3 n' = \frac{(4/3) \pi R'^3 n'_0}{1 + (4/3) \pi R'^3 n'_0} \quad (2.5)$$

olarak tanımlıdır. (2.4) ve (2.5) denklemlerinden

$$\frac{R'^3(1 - \beta)}{\beta} = \frac{3}{4\pi n'_0} = \text{sabit} \quad (2.6)$$

bağıntısı elde edilir. (2.1)-(2.3) denklem sistemi ile (2.6) denklemi, küresel kabarcık dinamiği için model bir denklem ile tamamlanır. Viskoz yutulma, sıvı sıkıştırılabilirliği ve gaz/buhar kabarcığı ile sıvı arasındaki ısı iletiminden oluşan çeşitli sönüm mekanizmaları kabarcık dinamiğini etkiler (Nigmatulin ve diğ., 1981; Prosperetti ve Lezzi, 1986; Prosperetti ve diğ., 1988; Prosperetti, 1991; Delale, 2002). Bu çalışmada, tüm sönüm mekanizmaları viskoz yutulma şeklinde ele alınmış olup tek bir sönüm katsayısıyla betimlenmiştir. Burada küresel kabarcık dinamiği için kabarcıkların birbirleriyle etkileşimini gözönünde bulunduran

$$\begin{aligned} \frac{p'_v - p'}{\rho'_\ell} &= \frac{[1 + (2/3) \pi n'_0 (3\Lambda^2 - 1) R'^3]}{[1 + (4/3) \pi n'_0 R'^3]} R' \frac{d^2 R'}{dt'^2} \\ &+ \frac{3}{2} \frac{[1 + (8/3) \pi n'_0 (2\Lambda^2 - 1) R'^3 + (16/9) \pi^2 n'^2_0 \Lambda^2 R'^6]}{[1 + (4/3) \pi n'_0 R'^3]^2} \left(\frac{dR'}{dt'} \right)^2 \\ &+ \frac{2S'}{\rho'_\ell R'} + \frac{4\mu'_{eff}}{\rho'_\ell R'} \frac{dR'}{dt'} - p'_{gi} \left(\frac{R'_i}{R'} \right)^{3k} \end{aligned} \quad (2.7)$$

iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset denklemi kullanılacaktır (Delale ve diğ., 2001). Bu denklemde S' yüzey gerilim katsayısını, p'_v kabarcığın kısmi buhar basıncını, p'_g kabarcığın lüle girişindeki kısmi gaz basıncını, k politropik üssü (sabit sıcaklıkta hal değişimi için $k = 1$, izentropik hal değişimi için γ adyabatik üs olmak üzere, $k = \gamma$ olur), μ'_{eff} viskoz yutulma şeklinde tüm sönüm mekanizmalarını betimleyen karışımın efektif viskozitesini, $\Delta r'$ kabarcıklar arası etkileşme erimi olmak üzere (Kubota ve diğ., 1992; Delale ve diğ., 2001)

$$\Lambda = \frac{\Delta r'}{R'} \quad (2.8)$$

ile tanımlanan Λ ise kabarcık/kabarcık etkileşim parametresini göstermektedir ($\Lambda = 1$ için klasik Rayleigh-Plesset denklemi elde edilir). Önce karışım yoğunluğu, akış hızı, karışım basıncı ve kabarcık içindeki gaz ve buharın kısmi basınçları

$$\rho = \frac{\rho'}{\rho'_\ell} = 1 - \beta, \quad u = \frac{u'}{\sqrt{p'_i/\rho'_\ell}}, \quad (2.9)$$

$$p = \frac{p'}{p'_i}, \quad p_v = \frac{p'_v}{p'_i}, \quad p_g = \frac{p'_g}{p'_i},$$

şeklinde boyutsuzlaştırılır. Burada p'_i lüle giriş basıncını ve $\sqrt{p'_i/\rho'_\ell}$ karakteristik hızı göstermektedir. Ayrıca x' eksen koordinatı, H'_i (lüle giriş yüksekliği olarak seçilebilir) karakteristik bir makroölçek uzunluğu ile, A' kesit alanı A'_i lülenin giriş alanı ile, t' zaman koordinatı $\Theta' = \frac{H'_i}{\sqrt{p'_i/\rho'_\ell}}$ karakteristik akış zamanı ile, R' kabarcık yarıçapı R'_i karakteristik mikroölçek uzunluğu (lüle girişindeki kabarcık yarıçapı) ile

$$x = \frac{x'}{H'_i}, \quad A = \frac{A'}{A'_i}, \quad t = \frac{t'}{\Theta'} = \frac{\sqrt{p'_i/\rho'_\ell} t'}{H'_i}, \quad R = \frac{R'}{R'_i} \quad (2.10)$$

biçiminde boyutsuzlaştırılır (Delale ve diğ., 2006). (2.2)-(2.7) denklemleri bu boyutsuzlaştırmalarla

$$\rho = 1 - \beta \quad (2.11)$$

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u A) = 0 \quad (2.12)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - C_w \phi \rho u^2 \quad (2.13)$$

$$R^3 \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) = \frac{1-\beta_i}{\beta_i} = \kappa_i^3 \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_v - p}{L^2} &= \frac{\left[1 + (3\Lambda^2 - 1)(R/\kappa_i)^3/2 \right]}{\left[1 + (R/\kappa_i)^3 \right]} R \frac{d^2 R}{dt^2} \\ &+ \frac{3}{2} \frac{\left[1 + 2(2\Lambda^2 - 1)(R/\kappa_i)^3 + \Lambda^2(R/\kappa_i)^6 \right]}{\left[1 + (R/\kappa_i)^3 \right]^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \\ &+ \frac{S_0}{L^2 R} + \frac{4}{L^2 (Re) R} \frac{dR}{dt} - \frac{p_{gi}}{L^2 R^{3k}}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

normalize şeklini alır. Burada u , p , ρ , β ve R sırasıyla, boyutsuz akış hızını, karışım basıncını, karışım yoğunluğunu, hacimsel kabarcık oranını ve kabarcık yarıçapını göstermektedir. Ayrıca, (2.11)-(2.15) denklem sisteminde L mikro ile makro boyutlar arasındaki oran

$$L = \frac{R'_i}{H'_i}, \quad (2.16)$$

C_w cidar kayma gerilmesi katsayısı

$$C_w = \frac{\tau'_w}{(1/2)\rho' u'^2}, \quad (2.17)$$

φ ıslanan çevrenin kesit alanına oranını betimleyen boyutsuz katsayı

$$\varphi = \frac{H'_i \mathcal{P}'}{2A'}, \quad (2.18)$$

κ_i hacimsel kabarcık oranını betimleyen bir parametre

$$\kappa_i^3 = \frac{1-\beta_i}{\beta_i}, \quad (2.19)$$

S_0 boyutsuz yüzey gerilim katsayısı

$$S_0 = \frac{2S'}{p'_i R'_i}, \quad (2.20)$$

μ'_ℓ sıvının viskozitesi olmak üzere Re_ℓ tipik Reynolds sayısı

$$Re_\ell = \frac{\rho'_\ell H'_i \sqrt{p'_i/\rho'_\ell}}{\mu'_\ell} \quad (2.21)$$

ve μ'_{eff}/μ'_ℓ sönüm katsayısı olmak üzere Re sönüm mekanizmalarını viskoz yutulma şeklinde varsayan Reynolds sayısı

$$Re = (Re_\ell)(\mu'_\ell/\mu'_{eff}) \quad (2.22)$$

olarak tanımlıdır. (2.18) denklemindeki φ , sanki-bir-boyutlu daimi akışlar için $\varphi = 1/A$ değerini alır. (2.13) ve (2.15) denklemlerindeki d/dt operatörü ise, hareketi izleyerek türev operatörüdür. Yukarıdaki (2.11)-(2.15) denklemleri, boyutsuz lüle kesit alanı $A = A(x)$ şeklinde verildiğinde, p , ρ , β , u , ve R değişkenleri için daimi olmayan kavitsiyonlu lüle akışı model denklemlerini oluştururlar.

2.2.2 Akış hızı ve kabarcık yarıçapı için evrim denklemleri

(2.11), (2.12) ve (2.14) denklemleri arasında hacimsel kabarcık oranı β ile karışım yoğunluğu ρ yok edilirse,

$$\frac{dR}{dt} - \frac{R}{3\beta(1-\beta)} \frac{d\beta}{dt} = \frac{dR}{dt} - \frac{R}{3\beta A} \frac{\partial}{\partial x}(uA) = 0 \quad (2.23)$$

denklemini elde edilir. Ayrıca (2.15) iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset denklemini x 'e göre türetilip, (2.23) denkleminde $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dR}{dt}\right)$ ve $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d^2R}{dt^2}\right)$ kısmi türevleri elde edildiğinde, (2.13) momentum denklemini ile aralarında p basıncı yok edilebilir. Daha sonra birtakım karmaşık hesaplamalar sonucu kabarcık yarıçapı $R(x,t)$ ve akış hızı $u(x,t)$ için

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -u \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{1}{3R^2} (R^3 + \kappa_i^3) \left[\left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) u + \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (2.24)$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x,t) \quad (2.25)$$

evrim denklemleri elde edilir. Burada daimi olmayan akış için $a(x,t)$ yerel ani ivmesi

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + g\left(R, \frac{\partial R}{\partial x}, x\right) \frac{\partial a}{\partial x} + h\left(R, \frac{\partial R}{\partial x}, x\right) a = s\left(R, u, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, x\right) \quad (2.26)$$

lineer kısmi diferensiyel denklemini sağlar. Yukarıdaki g , h ve s fonksiyonları sırasıyla

$$g\left(R, \frac{\partial R}{\partial x}, x\right) = \frac{F_1(R)}{F_2(R)} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx}, \quad (2.27)$$

$$h\left(R, \frac{\partial R}{\partial x}, x\right) = \frac{F_1(R)}{F_2(R)} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{F_3(R)}{F_2(R)} + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \quad (2.28)$$

ve

$$\begin{aligned}
s \left(R, u, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, x \right) = & - \left\{ u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right. \\
& + \left[\frac{F_1(R)}{F_2(R)} u \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{F_4(R)}{F_2(R)} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{F_4(R)}{F_2(R)} u \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + \frac{F_5(R)}{F_2(R)} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& + \frac{F_6(R)}{F_2(R)} \frac{\partial R}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left[\frac{F_7(R)}{F_2(R)} u \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) - 3 \frac{F_3(R)F_5(R)}{RF_2(R)} \right] \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \\
& + \frac{F_4(R)}{F_2(R)} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\
& + \left[\frac{F_8(R)}{F_2(R)} u \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + \frac{F_9(R)}{F_2(R)} u \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)^2 + \frac{F_5(R)}{F_2(R)} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + \frac{F_3(R)}{F_2(R)} u \right] \frac{\partial u}{\partial x} \\
& + \left[\frac{F_6(R)}{F_2(R)} u^2 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)^2 - 3 \frac{F_3(R)F_5(R)}{RF_2(R)} u \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + \frac{F_1(R)}{F_2(R)} u^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \right. \\
& + \left. \frac{F_{10}(R)}{F_2(R)} \right] \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{F_9(R)}{F_2(R)} u^2 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + u^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \\
& \left. + \frac{F_5(R)}{F_2(R)} u \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + \frac{\partial p_v / \partial x + \kappa_i C_w u^2 / (R^3 + \kappa_i^3)}{F_2(R)} \right\} \quad (2.29)
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır. (2.27)-(2.29) denklemlerindeki $F_j(R); j = 1, 2, \dots, 10$ fonksiyonları Ek.A'da tanımlanmıştır. (2.24)-(2.26) denklemleri, verilen bir lüle geometrisi için, başlangıçta belirlenen kabarcık yarıçapı ve akış hızı dağılımlarıyla lüle giriş ve çıkış sınır koşulları ile birlikte çözülür. Bu durumda diğer hidrodinamik değişkenler bu çözümle ilişkilendirilerek elde edilir. Özellikle, basınç alanı

$$\begin{aligned}
p = p_v - & \frac{L^2 \kappa_i^6}{18R^4} \left[(6\Lambda^2 - 1)(R/\kappa_i)^6 + (6\Lambda^2 - 2)(R/\kappa_i)^3 - 1 \right] \left[\left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) u + \frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 \\
& - \frac{L^2 \kappa_i^3}{6R} \left[2 + (3\Lambda^2 - 1)(R/\kappa_i)^3 \right] \left[\frac{\partial a}{\partial x} + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) a \right. \\
& + \left. u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) u \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \right] \\
& - \frac{S_0}{R} + \frac{p_{gi}}{R^{3k}} - \frac{4\kappa_i^3}{3(Re)R^3} \left[1 + (R/\kappa_i)^3 \right] \left[\left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) u + \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (2.30)
\end{aligned}$$

olarak verilir. (2.30) denklemi basınç alanının, kabarcık yarıçapı R' 'ye, akış sıkıştırılabilirliği $\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx}\right) u$ terimine ve onun uzaysal türevine, yerel ani ivme a ve x' 'e göre türevi a_x 'e bağlılığını açık bir şekilde göstermektedir. Nihayet β hacimsel kabarcık oranı ve ρ karışım yoğunluğu

$$\beta = 1 - \rho = \frac{R^3}{R^3 + \kappa_i^3} \quad (2.31)$$

bağıntılarıyla hesaplanır.

2.2.3 Sanki-bir-boyutlu kavitasyonlu daimi lüle akışları

(2.1)-(2.7) denklemleriyle modellenen sanki-bir-boyutlu kavitasyonlu daimi olmayan lüle akış denklemleri, daimi akış halinde ($\partial/\partial t' \equiv 0$) aşağıdaki denklem sistemine indirgenir:

$$\bar{\rho}' = \rho'_\ell(1 - \bar{\beta}), \quad (2.32)$$

$$\bar{\rho}' \bar{u}' A' = \text{sabit}, \quad (2.33)$$

$$\bar{\rho}' \bar{u}' \frac{d\bar{u}'}{dx'} = -\frac{d\bar{p}'}{dx'} - \frac{\mathcal{P}'}{A'} \tau'_w, \quad (2.34)$$

$$\bar{\beta} = \frac{4}{3} \pi \bar{R}'^3 \bar{n}' = \frac{\frac{4}{3} \pi \bar{R}'^3 n'_0}{1 + \frac{4}{3} \pi \bar{R}'^3 n'_0} \quad (2.35)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{p'_v - \bar{p}'}{\bar{\rho}'_\ell} &= \frac{\left[1 + \frac{2}{3} \pi n'_0 (3\Lambda^2 - 1) \bar{R}'^3\right]}{\left[1 + \frac{4}{3} \pi n'_0 \bar{R}'^3\right]} \bar{R}' \left[\bar{u}'^2 \frac{d^2 \bar{R}'}{dx'^2} + \bar{u}' \frac{d\bar{u}'}{dx'} \frac{d\bar{R}'}{dx'} \right] \\ &+ \frac{3}{2} \frac{\left[1 + \frac{8}{3} \pi n'_0 (2\Lambda^2 - 1) \bar{R}'^3 + \frac{16}{9} \pi^2 n'_0{}^2 \Lambda^2 \bar{R}'^6\right]}{\left[1 + \frac{4}{3} \pi n'_0 \bar{R}'^3\right]^2} \bar{u}'^2 \left(\frac{d\bar{R}'}{dx'}\right)^2 \\ &+ \frac{2S'}{\rho'_\ell \bar{R}'} + \frac{4\mu'_{eff}}{\rho'_\ell \bar{R}'} \frac{d\bar{R}'}{dx'} - p'_{gi} \left(\frac{R'_i}{R'}\right)^{3k}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Bu denklemlerde \bar{u}' , \bar{p}' , $\bar{\rho}'$, \bar{R}' ve $\bar{\beta}$, sırasıyla, karışım hızı, karışım basıncı, karışım yoğunluğu, kabarcık yarıçapı ve hacimsel kabarcık oranının daimi akıştaki değerleridir. Ayrıca ρ'_ℓ sıvının yoğunluğunu, R'_i lüle girişindeki kabarcık yarıçapını,

\mathcal{P}' lülenin ıslak kesit çevresini, τ'_w cidar kayma gerilmesinin mutlak değerini ve n' karışımın birim hacimdeki kabarcık sayısı yoğunluğunu göstermektedir. Sıvının birim hacmindeki kabarcık yoğunluğu sayısı n'_0 ise (2.4) denklemi ile tanımlıdır. (2.32)-(2.36) denklemleri, (2.9) ve (2.10) denklemlerine benzer şekilde boyutsuzlaştırıldığında,

$$\bar{\rho} = 1 - \bar{\beta} \quad (2.37)$$

$$\bar{\rho} \bar{u} A = \lambda_i = (1 - \bar{\beta}_i) \bar{u}_i \quad (2.38)$$

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{d\bar{u}}{dx} = -\frac{d\bar{p}}{dx} - \varphi C_w \bar{\rho} \bar{u}^2 \quad (2.39)$$

$$\bar{R} = \kappa_i \left(\frac{\bar{\beta}}{1 - \bar{\beta}} \right)^{1/3} \quad (2.40)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{p_v - \bar{p}}{L^2} &= \frac{\left[1 + (3\Lambda^2 - 1)(\bar{R}/\kappa_i)^3 / 2 \right]}{\left[1 + (\bar{R}/\kappa_i)^3 \right]} \left[\bar{u}^2 \bar{R} \frac{d^2 \bar{R}}{dx^2} + \bar{u} \bar{R} \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{d\bar{R}}{dx} \right] \\ &+ \frac{3}{2} \frac{\left[1 + 2(2\Lambda^2 - 1)(\bar{R}/\kappa_i)^3 + \Lambda^2 (\bar{R}/\kappa_i)^6 \right]}{\left[1 + (\bar{R}/\kappa_i)^3 \right]^2} \bar{u}^2 \left(\frac{d\bar{R}}{dx} \right)^2 \\ &+ \frac{S_0}{L^2 \bar{R}} + \frac{4}{L^2 (Re)} \frac{\bar{u}}{\bar{R}} \frac{d\bar{R}}{dx} - \frac{p_{gi}}{L^2 \bar{R}^{3k}} \end{aligned} \quad (2.41)$$

şeklinde sanki-bir-boyutlu daimi kavitasyonlu lüle akışlarının boyutsuz denklemleri elde edilir. Bu denklemler, Delale ve diğ. (2001)'deki gibi boyutsuz hız alanı için dinamik denklem sistemine indirgenerek, başlangıç değer problemi kesin olarak çözülür.

3. KAVİTASYONLU DAİMİ LÜLE AKIŞLARININ KARARLILIĞI

3.1 Sanki-Bir-Boyutlu Kavıtasyonlu Daimi Lüle Akışlarının Kararlılığı

Kabarcıklı akışların sabit kesitli bir kanaldaki akış kararlılığı d'Agostino ve diğ. (1997) tarafından incelenmiştir. Bu bölümde, (2.24) ve (2.25) evrim denklemleri kullanılarak, sanki-bir-boyutlu kavıtasyonlu daimi lüle akışları için model denklemlerin çözümlerinin zamana bağlı kararlılığı incelenecektir. Wang ve Brennen (1998) ile Delale ve diğ. (2001), lüle geometrisi ve diğer parametreler sabit alınıp sadece bir parametrenin belirli bir aralıkta değiştirilmesi durumunda, sanki-bir-boyutlu lülelerde daimi akış çözümlerinin var olduğunu göstermişlerdir. Bu parametre, genellikle, giriş başlangıç hacimsel kabarcık oranı β_i veya

$$\sigma_i = \frac{p'_i - p'_v}{(1/2)\rho'_i u_i'^2} = \frac{1 - p_v}{(1/2)u_i'^2} \quad (3.1)$$

ile tanımlanan kavıtasyon sayısı olarak seçilir. Yukarıdaki (3.1) denkleminde u'_i ve u_i , sırasıyla, boyutlu ve boyutsuz lüle girişindeki akış hızlarıdır. Parametrelerden herhangi birinin belirli bir kritik değerinin altında ya da üzerinde değiştirilmesi durumunda daimi akış çözümlerinde kararsızlıklar görülür. Bu nedenle, daimi akış çözümlerinin varolduğu durumda, bu çözümlerin zamana bağlı kararlılığının incelenmesinde yarar vardır.

Sanki-bir-boyutlu kavıtasyonlu daimi lüle akışlarının zamana bağlı kararlılığını incelemek için, önce daimi olmayan lüle akışı için elde edilen (2.24) ve (2.25) evrim denklemlerine daimi akış halindeki $\bar{u}(x)$ akış hızı ve $\bar{R}(x)$ kabarcık yarıçapı alanları baz alınarak (örneğin Delale ve diğ., 2001),

$$u(x, t) = \bar{u}(x)[1 + \varepsilon w(x, t)] \quad (3.2)$$

$$R(x, t) = \bar{R}(x)[1 + \varepsilon \phi(x, t)] \quad (3.3)$$

şeklinde zamanla değişen w ve ϕ (her ikisi de $O(1)$ mertebesinde) yerel pertürbasyonları uygulanır. Yukarıdaki (3.2) ve (3.3) denklemlerinde $\varepsilon > 0$ parametresi $o(1)$ mertebesinde dir. Daimi lüle akışları için (2.38) kütle korunumu denklemi ile (2.37) eşitliği (2.40) denkleminde kullanılırsa,

$$\bar{R} = \kappa_i \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{1/3} \quad (3.4)$$

denklemi elde edilir. Yukarıdaki (3.2) ve (3.3) pertürbasyon denklemleri, (2.24) denkleminde uygulanıp (3.4) denkleminde de yararlanılarak $O(1)$ ve $O(\varepsilon)$ mertebesindeki terimler düzenlendiğinde,

$O(1)$ için

$$\bar{u} \frac{d\bar{R}}{dx} - \frac{\bar{R}^3 + \kappa_i^3}{3\bar{R}^2} \left[\frac{d\bar{u}}{dx} + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} \right] = 0 \quad (3.5)$$

ve $O(\varepsilon)$ için

$$[\bar{u}A - \lambda_i] \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\bar{u}^2 A}{3} \frac{\partial w}{\partial x} + \lambda_i \left[\frac{d\bar{u}}{dx} + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} \right] \phi = 0 \quad (3.6)$$

denklemleri elde edilir. Ayrıca (3.2) ve (3.3) pertürbasyon denklemleri, (2.27)-(2.29) denklemlerindeki $F_j(R)$ fonksiyonlarına uygulanarak

$$F_j(R) = F_j(\bar{R}) - \varepsilon \phi f_j(\bar{R}); \quad j = 1, 2, \dots, 10 \quad (3.7)$$

elde edilir. Yukarıdaki (3.7) denkleminde $F_j(\bar{R})$ ve $f_j(\bar{R}); j = 1, 2, \dots, 10$ fonksiyonlarında, (3.4) eşitliği kullanılırsa bu fonksiyonlar Ek.B'de gösterildiği gibi \bar{u} cinsinden ifade edilebilir. Nihayet (3.2) ve (3.3) pertürbasyon denklemleri, (2.26) denkleminde uygulandığında ve (2.24) ile (3.6) denklemleri kullanıldığında, varılan denklemdeki $O(1)$ ve $O(\varepsilon)$ mertebeli terimler için, sırasıyla,

$$\begin{aligned} F_2 \bar{u} \frac{d^3 \bar{u}}{dx^3} &+ \left\{ F_1 \bar{u} \frac{d\bar{R}}{dx} + F_4 \left[\frac{d\bar{u}}{dx} + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} \right] + F_5 \right\} \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} \\ &+ \left\{ F_6 \frac{d\bar{R}}{dx} + F_4 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \right\} \left(\frac{d\bar{u}}{dx} \right)^2 + \left\{ F_7 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} - \frac{3F_3 F_5}{\bar{R}} \right\} \frac{d\bar{R}}{dx} \frac{d\bar{u}}{dx} \\ &+ \left\{ F_8 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} + F_9 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)^2 \bar{u} + F_5 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + F_3 \bar{u} \right\} \frac{d\bar{u}}{dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ F_6 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)^2 \bar{u}^2 - \frac{3F_3F_5}{\bar{R}} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} + F_1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u}^2 + F_{10} \right\} \frac{d\bar{R}}{dx} \\
& + \left\{ F_9 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u}^2 + F_2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u}^2 + \bar{\rho} \phi C_w \bar{u}^2 \right. \\
& \left. + F_5 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} + \frac{\partial p_v}{\partial x} \right\} = 0 \tag{3.8}
\end{aligned}$$

ve

$$A_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + A_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + A_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + A_5 \frac{\partial w}{\partial x} + A_6 \frac{\partial w}{\partial t} + A_7 \frac{\partial \phi}{\partial x} + A_8 w + A_9 \phi = 0 \tag{3.9}$$

denklemleri bulunur. Yukarıdaki (3.8) denklemindeki $F_j(\bar{R})$; $j = 1, 2, \dots, 10$ fonksiyonları Ek.B'de gösterildiği üzere \bar{u} 'nun fonksiyonları olup (3.9) denklemindeki A_j ; $j = 1, 2, \dots, 9$ katsayıları ise Ek.C'de tanımlanmıştır. Ayrıca (3.5) ve (3.8) denklemlerinin, Delale ve diğ. (2001) tarafından verilen daimi lüle akışı denklemlerine eşdeğer olduğu gösterilebilir. Diğer taraftan $A_7 \neq 0$ olduğundan, (3.9) denkleminde $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ terimi çekilerek (3.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$C_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + C_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + C_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + C_5 \frac{\partial w}{\partial x} + C_6 \frac{\partial w}{\partial t} + C_7 w + C_8 \phi - \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{3.10}$$

denklemini elde edilir. Buradaki C_j ; $j = 1, 2, \dots, 8$ katsayıları, $\lambda_i = (1 - \beta_i)u_i$ ve $(\bar{u}A - \lambda_i) \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
C_1 &= \bar{u} \frac{A_1}{A_7}, & C_2 &= \bar{u} \frac{A_2}{A_7}, & C_3 &= \bar{u} \frac{A_3}{A_7}, & C_4 &= \bar{u} \frac{A_4}{A_7}, \\
C_5 &= \bar{u} \frac{A_5}{A_7} + \frac{\bar{u}^2 A}{3(\bar{u}A - \lambda_i)}, & C_6 &= \bar{u} \frac{A_6}{A_7}, & C_7 &= \bar{u} \frac{A_8}{A_7}, & & \\
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$C_8 = \bar{u} \frac{A_9}{A_7} - \frac{\lambda_i}{(\bar{u}A - \lambda_i)} \left[\frac{d\bar{u}}{dx} + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} \right]$$

olarak tanımlanmıştır. (3.9) ve (3.10) denklemlerindeki A_j ; $j = 1, \dots, 9$ ve C_j ; $j = 1, \dots, 8$ katsayıları, Ek.C'de gösterildiği üzere, daimi akışlardaki $\bar{u}(x)$ akış hızı (veya $\bar{R}(x)$ kabarcık yarıçapı), $A(x)$ lüle kesit alanı ve türevlerinin fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir.

3.1.1 Kararlılık için özdeğer problemi

Sanki-bir-boyutlu kavitsiyonlu daimi lüle akışı denklem sisteminin çözümlerinin kararlılığını incelemek için, önce (3.9) ve (3.10) denklem sistemine

$$w(x,t) = \tilde{w}(x)e^{st} \quad (3.12)$$

$$\phi(x,t) = \tilde{\phi}(x)e^{st} \quad (3.13)$$

dönüşümleri uygulanarak sistem

$$L_1 \psi = sL_2 \psi \quad (3.14)$$

biçiminde genelleştirilmiş özdeğer problemine dönüştürülür. Burada ψ vektörel fonksiyonu ile L_1 ve L_2 operatörleri

$$\psi = \begin{pmatrix} \tilde{w}(x) \\ \tilde{\phi}(x) \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} A_1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + A_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_5 \frac{\partial}{\partial x} + A_8 & A_7 \frac{\partial}{\partial x} + A_9 \\ C_1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + C_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_5 \frac{\partial}{\partial x} + C_7 & C_8 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

ve

$$L_2 = \begin{pmatrix} -A_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - A_4 \frac{\partial}{\partial x} - A_6 & 0 \\ -C_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - C_4 \frac{\partial}{\partial x} - C_6 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda daimi akış çözümlerinin zamana bağlı olarak kararlı olabilmesi için, (3.14) genelleştirilmiş özdeğer probleminin çözümü ile elde edilecek olan s özdeğerlerinin s_R reel kısımlarının, her x için, negatif ($s_R < 0$) olması gerekir (Lin, 1966; Iooss ve Joseph, 1980; Drazin ve Reid, 1981;

Drazin, 2002). Genelleştirilmiş özdeğer probleminin çözümü için, kavitsiyonlu akış parametrelerinden birinin değişmesi halinde, sisteme 'merkezi sonlu farklar' yöntemi uygulanarak lüle eksenini boyunca çeşitli bölgelerde s özdeğerlerinin nasıl değiştiği incelenmiştir. Ancak, parametre değişimiyle elde edilen s özdeğerlerinin reel kısımları pozitif ve negatif değerler etrafında salınım yaptıklarından, bu değerlerden hangilerinin fiziksel, hangilerinin fiziksel olmadığını belirlemek olası olmamıştır (Delale ve Pasinlioğlu, 2005). Dolayısıyla, (3.14)-(3.17) özdeğer problemi $A_j; j = 1, 2, \dots, 9$ ve $C_j; j = 1, 2, \dots, 8$ katsayılarının sabit olduğu lüle giriş bölgesinde, normal mod analiziyle kesin olarak çözülebilmektedir (Pasinlioğlu ve Delale, 2006; Delale ve diğ., 2007; Pasinlioğlu ve diğ., 2009).

3.1.2 Lüle giriş bölgesi için normal mod analizi

Lülelerde en kritik bölgeler giriş ve boğaz bölgeleridir. Eğer verilen bir akış, lülenin giriş bölgesinde kararlı değilse, lülenin tamamında da kararlı olmayacaktır. Bu yüzden kararlılık problemi için önce lülenin giriş bölgesini incelemek gereklidir. (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki $A_j; j = 1, \dots, 9$ ve $C_j; j = 1, \dots, 8$ katsayılarının, lülenin giriş bölgesinde hemen hemen sabit olduğu gösterilebilir (Bkz. Şekil E.1-Şekil E.17). Dolayısıyla, zamana bağlı kararlılık problemini lüle giriş bölgesinde normal mod analizi yöntemiyle kesin olarak çözmek olasıdır. Bu durumda, k pertürbasyon dalga sayısı, ω dalğanın açısal frekansı, \hat{w} ve $\hat{\phi}$, sırasıyla, akış hızı genliği ve kabarcık yarıçapı genliği olmak üzere, (3.9) ve (3.10) denklemlerine

$$w(x, t) = \hat{w}e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.18)$$

$$\phi(x, t) = \hat{\phi}e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.19)$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$L\omega^2 + M\omega + N = 0 \quad (3.20)$$

dispersiyon bağıntısı elde edilir. Yukarıdaki (3.20) bağıntısında L , M ve N katsayıları pertürbasyon dalga sayısı k 'nın karmaşık değerlikli fonksiyonları olup

$$L = L_R + iL_I = (A_6 - A_2k^2) + iA_4k, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} M &= M_R + iM_I \\ &= [(A_4C_8 - A_5 - A_9C_4 - A_7C_6)k + (A_1 + A_7C_2)k^3] \\ &+ i[(A_8 - A_6C_8 + A_9C_6) + (A_2C_8 - A_3 - A_7C_4 - A_9C_2)k], \end{aligned} \quad (3.22)$$

ve

$$\begin{aligned} N &= N_R + iN_I \\ &= [(A_8C_8 - A_9C_7) + (A_7C_5 + A_9C_3 - A_3C_8)k^2 - A_7C_1k^4] \\ &+ i[(A_5C_8 - A_7C_7 - A_9C_5)k + (A_7C_3 + A_9C_1 - A_1C_8)k^3] \end{aligned} \quad (3.23)$$

olarak tanımlanır. Burada, R ve I indisleri, sırasıyla, reel ve sanal kısımları göstermektedir. Zamana bağlı kararlılık için k dalga sayısı reel, ω açısal frekansı kompleks, uzaysal kararlılıkta ise k kompleks, ω reel alınmalıdır (Drazin, 2002). Burada zamana bağlı kararlılık incelendiğinden k reel, $\omega = \omega_R + i\omega_I$ açısal frekansı da karmaşık bir sayı alınmıştır. Sistemin zamana bağlı kararlılığı için ω_I sanal kısmı negatif olmalıdır. (3.20) dispersiyon bağıntısında L , M ve N katsayıları ile $\omega = \omega_R + i\omega_I$ yerine yazılır ve elde edilen denklemin sanal ve reel kısımları arasında reel açısal frekans ω_R yok edilirse, ω_I için

$$\varepsilon_4\omega_I^4 + \varepsilon_3\omega_I^3 + \varepsilon_2\omega_I^2 + \varepsilon_1\omega_I + \varepsilon_0 = 0 \quad (3.24)$$

cebrik denklemi elde edilir. Buradaki ε_j , $j = 0, 1, \dots, 4$ katsayıları k 'ya bağlı olup Ek.D'de tanımlanmıştır. Ayrıca, ε_j ; $j = 0, \dots, 4$ katsayılarının k 'nın çift fonksiyonları olduğu ispatlanabilir. Bundan dolayı, (3.24) denklemi ile verilen ω_I 'nin işaretini incelemek için yalnızca $k > 0$ durumunu incelemek yeterli olacaktır. Verilen bir k için (3.24) denkleminin ya iki veya dört reel kökü vardır, ya da hiç reel kökü yoktur. Sistemin kararlılığı için ω_I reel alındığından, bu son durum gözönünde bulundurulmayacaktır. Eğer (3.24) denkleminin verilen bir k değeri için iki reel ω_I kökü varsa, bunlar katlı veya farklı kökler olabilir. Eğer kökler katlı ise, yani $\omega_{I1} = \omega_{I2} = \omega_I$ durumunda, sistem bu k değeri için ya kararlıdır ($\omega_I < 0$ için), ya da kararsızdır ($\omega_I > 0$ için). Eğer kökler farklı

yani $\omega_{I1} \neq \omega_{I2}$ ise, bu durumda bu köklerden hangisinin fiziksel olduğu belirli bir kritere göre saptanır. (3.24) denkleminin verilen bir k değeri için dört reel kökü olması durumunda da benzer yöntem kullanılır.

(3.24) denklemdeki ε_j , $j = 0, 1, \dots, 4$ katsayıları k 'nın fonksiyonları olduğundan, ω_I 'nin işaretinin verilen k değerlerine bağlı olarak incelenmesi gerekir. (3.24) denklemdeki ε_0 katsayısını sıfır yapan k_j noktalarında $\omega_I = 0$ 'dır. ε_0 katsayısı, k^2 'ye göre 5. dereceden bir polinom olduğundan, en az bir reel pozitif köke sahiptir. Sistemin kararlılığının incelenmesi için önce, ε_0 polinomunun pozitif reel k_j ($j = 1$ veya $j = 1, 2, 3$ veya $j = 1, \dots, 5$) kökleri bulunur. Eğer ε_0 tek bir $k_1 > 0$ değerinde sıfırlanıyorsa, bu durumda ω_I bu k_1 değerinin komşuluğunda ya işaret değiştirir, ya da işareti aynı kalır (bu son durumda bölgenin kararlılığı $\omega_I = 0$ 'dan etkilenmez). ω_I 'nin işaretini incelemek için, k_1 değerinin sağında ve solunda yakın değerler alınarak, yani $\delta > 0$ istenildiği kadar küçük olmak üzere $k_1 \pm \delta$ değerlerinde ε_j , $j = 0, 1, \dots, 4$ 'ler hesaplanarak (3.24) denkleminin ω_I kökleri bulunur ($\delta > 0$ sayısı k 'nın $(k_1 - \delta, k_1 + \delta)$ aralığında ω_I sadece k_1 değerinde sıfırlanacak tarzda seçilir). (3.24) denkleminin köklerinin işareti, ω_I 'lar hesaplanmadan, ε_j , $j = 0, 1, \dots, 4$ katsayılarının işaretleri yardımıyla da bulunabilir. 4. dereceden (3.24) polinomunun köklerinin çarpımı

$$\omega_{I1} \cdot \omega_{I2} \cdot \omega_{I3} \cdot \omega_{I4} = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_4} \quad (3.25)$$

biçimindedir. Eğer herhangi bir $k_j > 0$ değeri için $\varepsilon_0 = 0$ ve $\varepsilon_1 \neq 0$ ise,

$$\omega_I(\varepsilon_4 \omega_I^3 + \varepsilon_3 \omega_I^2 + \varepsilon_2 \omega_I + \varepsilon_1) = 0$$

olduğundan, köklerden biri örneğin $\omega_{I4} = 0$ olur. Bu durumda geriye kalan 3. dereceden polinom denklemin köklerinin çarpımı

$$\omega_{I1} \cdot \omega_{I2} \cdot \omega_{I3} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_4} \neq 0 \quad (3.26)$$

biçimindedir. Eğer, $\delta > 0$ istenildiği kadar küçük olmak üzere, $k = k_j \pm \delta$ 'da

$$-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_4} > 0 \text{ ise, } \omega_{I4}'\text{ün işareti } -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_4}'\text{ün işareti ile aynıdır;} \quad (3.27)$$

$$-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_4} < 0 \text{ ise } \omega_{I4}'\text{ün işareti } \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_4}'\text{ün işareti ile aynıdır.}$$

Böylece ω_l 'ların işaretinden, sanki bir boyutlu kaviteye sahip daimi lüle akışlarının kararlı olduğu bölgeler belirlenmiş olur. Bu durumda ω_l 'nın negatif olduğu bölgede sistem kararlı, ω_l 'nın pozitif olduğu bölgede sistem kararsızdır. Eğer ϵ_0 birden fazla (3 veya 5) reel k_j köküne sahipse, her k_j ($j = 1, 2, 3$ veya $j = 1, \dots, 5$) kökü için yine benzer hesaplamalar yapılarak ω_l 'ların işareti incelenir. Verilen bir polinomun pozitif veya negatif reel köklerinin sayısı, Descartes İşaret Kuralı yardımıyla bulunabilir. Bu yöntemde polinomun pozitif köklerinin sayısı, en düşük dereceli terimin katsayısından başlanarak, katsayıların kaç kez işaret değiştirdiğine bakılarak saptanır. Negatif köklerin sayısını bulmak için ise, önce polinomda x değişkeni yerine $-x$ yazılır, daha sonra yine en küçük dereceli terimin katsayısından başlanarak, katsayıların kaç kez işaret değiştirdiğine bakılır. ϵ_0 'ı sıfır yapan birden fazla k_j olması durumunda, $k > 0$ ($0, \infty$) aralığında değiştiğinde (3.24) denkleminin ω_l köklerinde dallanmalar meydana gelebilir. Bu durumda fiziksel kökler için, bölgeler arasında işaret uyumunun sağlanması gerekir. Fiziksel köklerin belirlenebilmesi için μ'_{eff}/μ'_l sönüm katsayısının değişiminden yararlanılabilir. Eğer verilen bir kök ($\omega_l = 0$) için sönüm katsayısı arttırıldığında kararlı bölge genişliyorsa, bu kök fizikselidir. Aksi durumda, bulunan kök fiziksel değildir.

3.1.3 Kararlılık diyagramları

Sayısal sonuçlar için su/su-buharı-hava iki-fazlı sıvı/kabarcık karışımı ele alınmıştır. Kabarcıkların içindeki su-buharı-hava gaz karışımının izotermal olarak büyüdüğü ve büzüldüğü varsayılarak suyun sıcaklığı 20°C 'de sabit tutulmuştur. Bu durumda, kabarcık içindeki kısmi buhar basıncı $p'_v = 0.0234$ bar, yüzey gerilim katsayısı $S' = 7.1 \times 10^{-2} \text{N/m}$ ve suyun viskozitesi $\mu'_l = 10^{-3} \text{kg/m-s}$ olur. Lüle giriş basıncı $p'_i = 1.013$ bar değerinde varsayılmıştır. Geometrik özellikleri Şekil 3.1 ve Şekil 3.2'de gösterilen ve kesit alanı

$$A(x) = 1 - 0.25 \exp \left[- \left(\frac{x - 150L}{30L} \right)^2 \right] \quad (3.28)$$

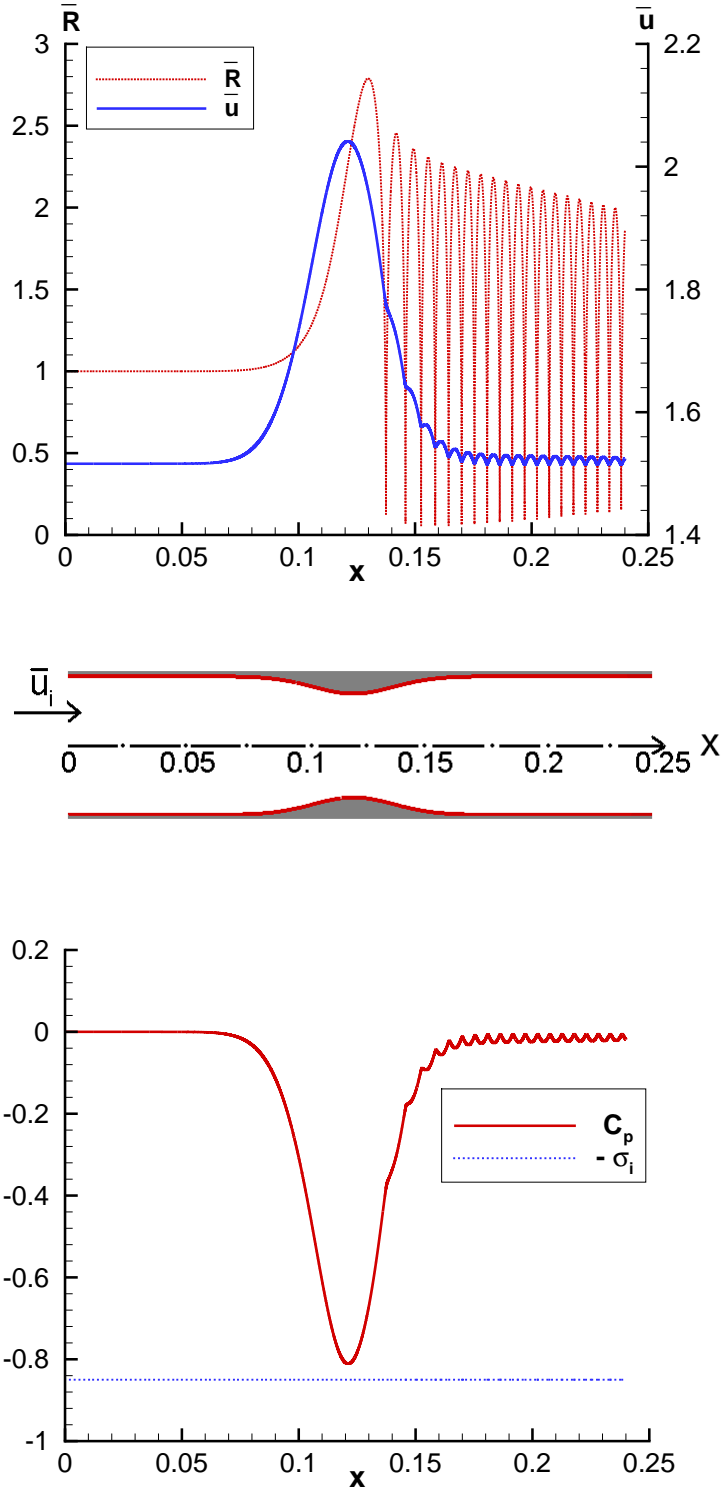
olan yakınsak-ıraksak bir lüle kullanılmıştır (Preston ve diğ., 2002). Cidar kayma gerilmesi katsayısı C_w , türbülanslı akış durumunda (Ward-Smith, 1980)

$$\frac{1}{C_w^{1/2}} = 1.768 \ln \left[(Re_f) C_w^{1/2} \right] - 0.94 \quad (3.29)$$

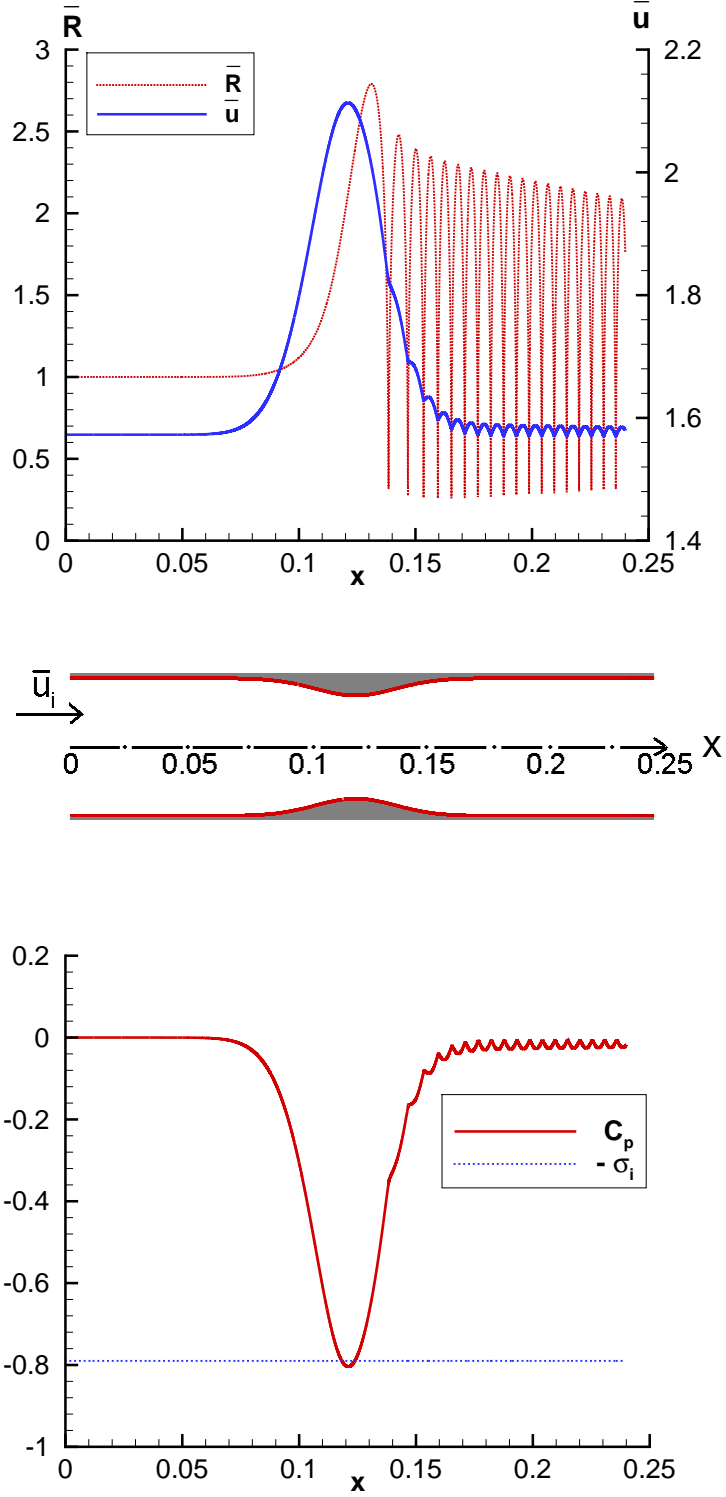
kullanılarak hesaplanmıştır (ideal akış halinde $C_w = 0$ 'dır). Yukarıdaki ifadedeki Re_f Reynolds sayısı, (2.22) denkleminde tanımlanan Re Reynolds sayısı

$$Re_f = 2uA(Re) \frac{\mu'_{eff}}{\mu'_\ell} \quad (3.30)$$

bağıntısıyla ilişkilendirilebilir. Lüle giriş kabarcık yarıçapı $R'_i = 40\mu m$ ve mikro ve makro ölçekler oranı $L = 8 \times 10^{-4}$ olarak alınmıştır. Lüle girişinde kabarcık/kabarcık etkileşmesi ihmal edilebildiğinden, kabarcık/kabarcık etkileşme parametresi $\Lambda = 1$ varsayılmıştır. Hem ideal akış, hem de türbülanslı akış durumunda lüle giriş hacimsel kabarcık oranı $\beta_i = 10^{-3}$ ve σ_i kavitasyon sayısı 0.7 ile 1.0 değerleri arasında değiştirilmiştir. Bir önceki bölümde verilen sanki-bir-boyutlu daimi lüle akışları için model denklemlerin çözümünün ancak σ_i kavitasyon sayısının σ_{ic} kritik değeri üzerinde (ya da β_i lüle girişindeki hacimsel kabarcık oranının β_{ic} kritik değerinin altında) var olduğu Wang ve Brennen (1998) ile Delale ve diğ. (2001)'in sonuçlarından bilinmektedir. Yukarıda belirtilen koşullar altındaki daimi lüle akışı çözümlerinden, ideal akış durumunda $\mu'_{eff}/\mu'_\ell = 1$ iken $\sigma_{ic} = 0.78$, $\mu'_{eff}/\mu'_\ell = 30$ iken $\sigma_{ic} = 0.72$; türbülanslı cidar kayma gerilmesi gözönüne alındığında $\mu'_{eff}/\mu'_\ell = 1$ iken $\sigma_{ic} = 0.78$, $\mu'_{eff}/\mu'_\ell = 30$ iken $\sigma_{ic} = 0.76$ olduğu sonucu bulunur. Daimi akışlardaki $\bar{u}(x)$ akış hızı, $\bar{R}(x)$ kabarcık yarıçapı ve $C_p(x)$ basınç katsayısının kavitasyonsuz ($\sigma_i > -(C_p)_{min}$) ve kavitasyonlu ($\sigma_i < -(C_p)_{min}$) kabarcıklı akışlardaki değişimi, sırasıyla, Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 'de görülmektedir. Buradaki $(C_p)_{min}$, minimum basınç katsayısını göstermektedir (bu durumda türbülanslı cidar kayma gerilmesinin etkisi ihmal edilmiştir). Bu çalışmada, $\epsilon_0(k_j) = 0$ denklemi için üç adet k_j değeri bulunmuş ve bu k_j , $j = 1, 2, 3$ değerlerinin ayırdığı bölgelerde, Bölüm 3.1.2 'de belirtilen yöntemler kullanılarak ω_I 'nin işareti incelenmiştir. Ancak bulunan bu k_j , $j = 1, 2, 3$ değerleri için bölgeler arasında ω_I 'nin işareti uyumlu olmamıştır. Yani (3.24) denkleminin köklerinde dallanmalar meydana gelmiştir. Bulunan bu k_j , $j = 1, 2, 3$ köklerinin fiziksel olanlarının belirlenmesi için, lüle akış denklemlerindeki μ'_{eff}/μ'_ℓ sönüm katsayısı arttırılarak kararlı bölgelerin genişleyip genişlemediği incelenmiştir.

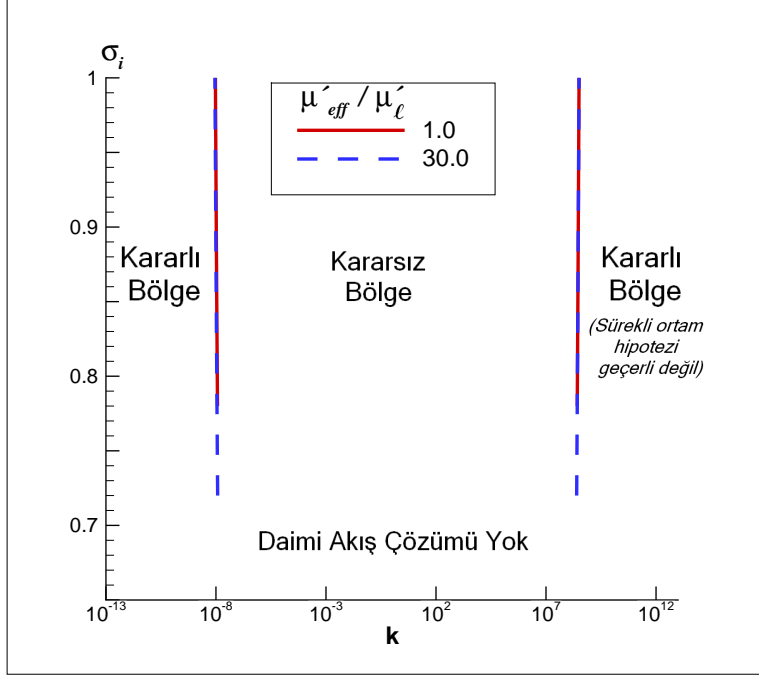


Şekil 3.1: Hava kabarcıkları içeren suyun daimi akışında kavitasyonsuz kabarcık yarıçapı ve akış hızının (üst şekil) ve basınç katsayısının (alt şekil), (3.28) denklemlle kesit alanı verilen lülenin (orta şekil) eksen koordinatı boyunca değişimleri. Burada sönüm katsayısı $\mu'_{eff}/\mu'_l = 1.0$, kabarcık/kabarcık etkileşim parametresi $\Lambda = 1.0$, giriş kabarcık yarıçapı $R'_i = 40\mu m$, mikrodan makroya ölçek oranı $L = 8 \times 10^{-4}$, giriş basıncı $p'_i = 1.013$ bar, giriş hacimsel kabarcık oranı $\beta_i = 10^{-3}$ ve kavitasyon sayısı $\sigma_i = 0.85$ olarak alınmıştır.



Şekil 3.2: Hava-su buharı kabarcıkları içeren suyun kaviteasyonlu daimi akışında kabarcık yarıçapı ve akış hızının (üst şekil) ve basınç katsayısının (alt şekil), (3.28) denklemiyle kesit alanı verilen lülenin (orta şekil) eksen koordinatı boyunca değişimleri. Burada sönüm katsayısı $\mu'_{eff}/\mu'_l = 1.0$, kabarcık/kabarcık etkileşim parametresi $\Lambda = 1.0$, giriş kabarcık yarıçapı $R'_i = 40\mu m$, mikrodan makroya ölçek oranı $L = 8 \times 10^{-4}$, giriş basıncı $p'_i = 1.013$ bar, giriş hacimsel kabarcık oranı $\beta_i = 10^{-3}$ ve kaviteasyon sayısı $\sigma_i = 0.79$ olarak alınmıştır.

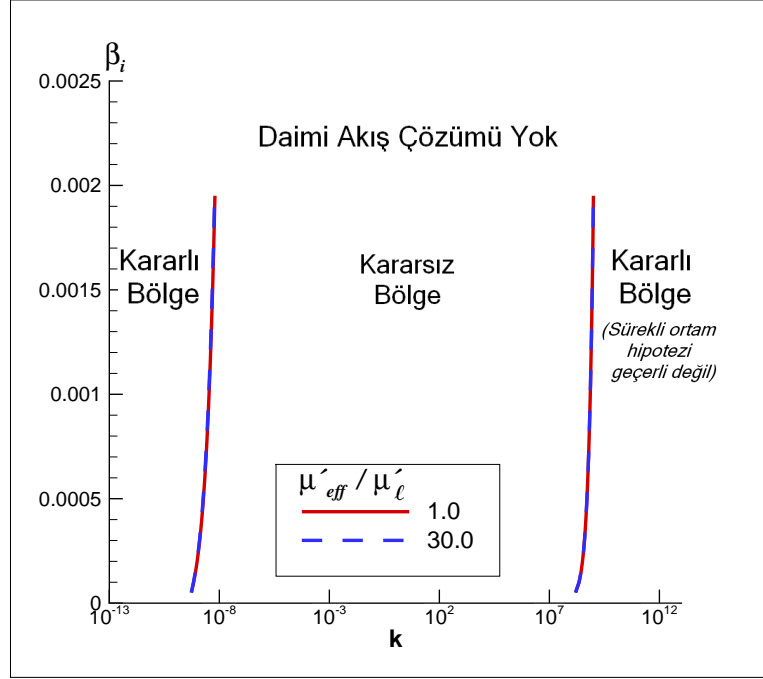
Sonuç olarak bu kritere göre $k_1 \ll 1$ ve $k_3 \gg 1$ köklerinin bu modelde fiziksel olduğu bulunmuştur (Pasinlioğlu ve Delale, 2006; Delale ve diğ., 2007; Pasinlioğlu ve diğ., 2009). Yapılan bu hesaplamalar sonucu elde edilen kararlılık bölgeleri, aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir. Şekil 3.3 yukarıdaki koşullar altında σ_i



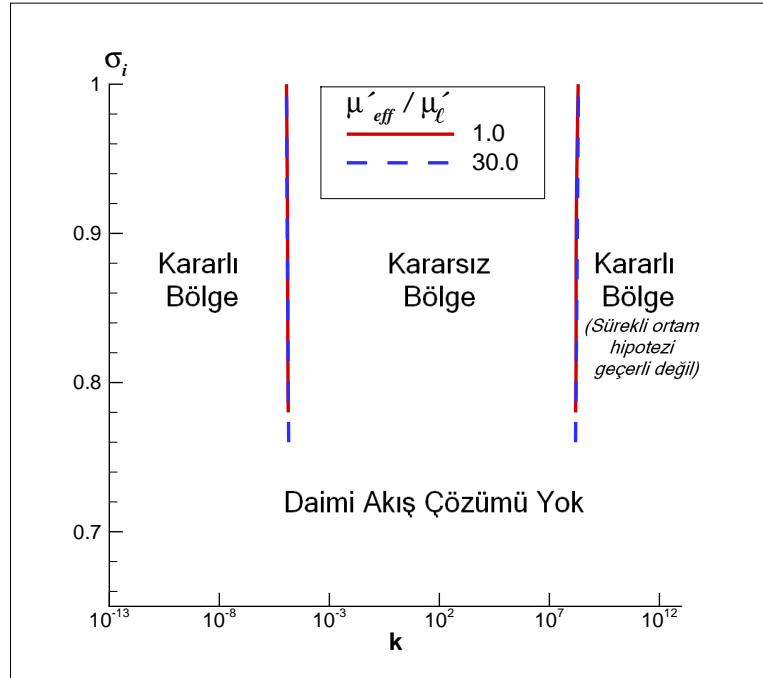
Şekil 3.3: Karışımın ideal akış durumunda sönüm katsayısının (μ'_{eff}/μ'_l) farklı değerleri için (1.0 ve 30.0) lüle girişindeki kavitasyon sayısının (σ_i) pertürbasyon dalga sayısı (k) değişimi ve kararlılık bölgeleri.

kavitasyon sayısının ideal akış durumunda μ'_{eff}/μ'_l sönüm katsayısının farklı değerleri için (1.0, 30.0) pertürbasyon dalga sayısı k ile değişimini göstermektedir. Bu şekilden de açıkça görüldüğü üzere, burada kritik kavitasyon sayısının ($\mu'_{eff}/\mu'_l = 1.0$ için $\sigma_{ic} = 0.78$ ve $\mu'_{eff}/\mu'_l = 30.0$ için $\sigma_{ic} = 0.72$) altında daimi akış çözümlerinin olmadığı görülmektedir. Kritik kavitasyon sayısının üzerinde elde edilen daimi akış çözümleri ise, pertürbasyonun ya çok küçük dalga sayıları ya da çok büyük dalga sayıları için karardır. Ancak çok büyük dalga sayıları için sürekli ortam hipotezi geçerli olmadığından, bu bölgenin kararlılığı da safdışı bırakılmıştır. Sönüm katsayısı μ'_{eff}/μ'_l arttırıldığında, kararlılık diyagramındaki kararlı bölgelerde önemli bir değişim görülmektedir, ancak kritik kavitasyon sayısının değerinde değişme olmaktadır. Şekil 3.4, aynı koşullar altında ideal durumda sönüm katsayısının farklı değerleri için ($\mu'_{eff}/\mu'_l=1.0$ ve $\mu'_{eff}/\mu'_l=30.0$), β_i hacimsel kabarcık oranının k dalga sayısı ile değişimini göstermektedir. Giriş bölgesinde kabarcık büyüme oranı oldukça küçük olduğundan, Şekil 3.4'den

görülebileceği gibi sönüm katsayısı μ'_{eff}/μ'_l arttırıldığında, kararlılık diyagramındaki kararlı bölgelerde önemli bir değişim görülmektedir.

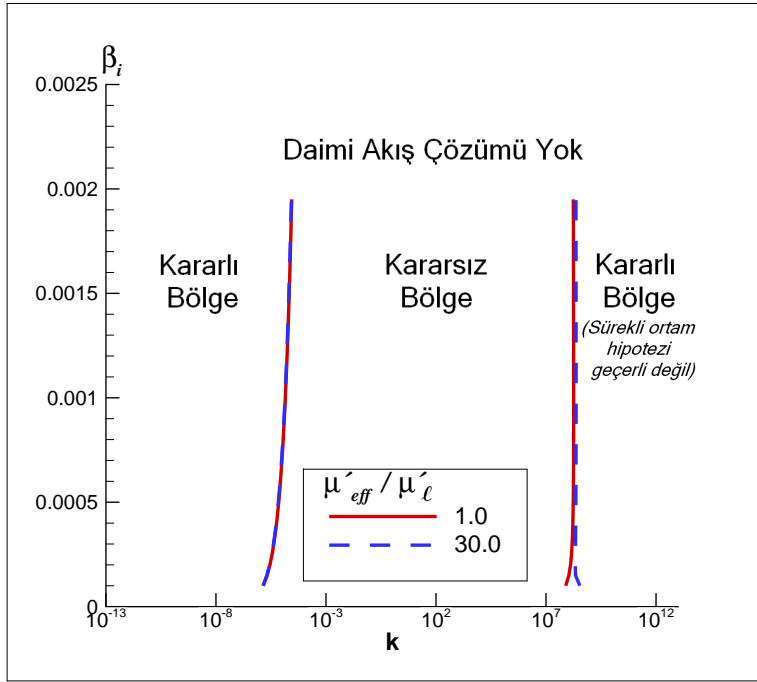


Şekil 3.4: Karışımın ideal akış durumunda sönüm katsayısının (μ'_{eff}/μ'_l) farklı değerleri için (1.0 ve 30.0) lüle girişindeki hacimsel kabarcık oranının (β_i) pertürbasyon dalga sayısı (k) değişimi ve kararlılık bölgeleri.



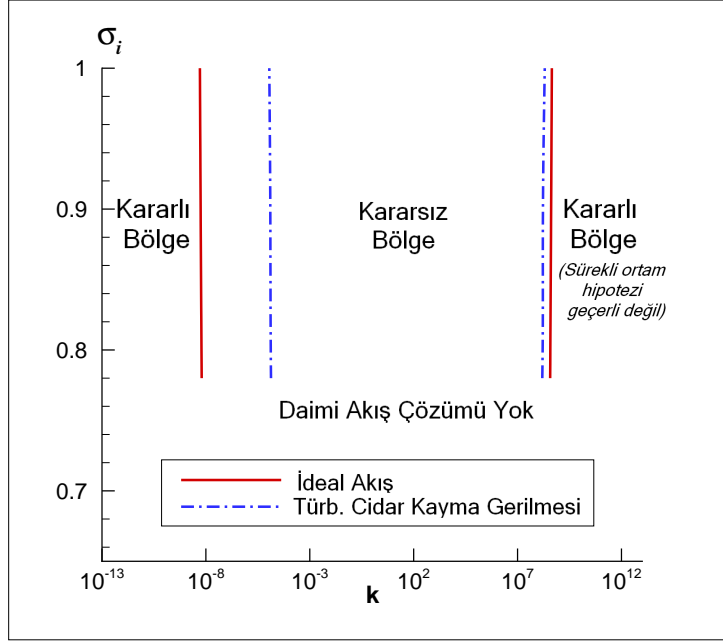
Şekil 3.5: Karışımın türbülanslı cidar kayma gerilmesinin gözönüne alındığı durumda sönüm katsayısının (μ'_{eff}/μ'_l) farklı değerleri (1.0 ve 30.0) için lüle girişindeki kaviteasyon sayısının (σ_i) pertürbasyon dalga sayısı (k) değişimi ve kararlılık bölgeleri.

Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 türbülanslı cidar kayma gerilmesi gözönüne alındığında μ'_{eff}/μ'_ℓ sönüm katsayısının farklı değerleri için, σ_i kavitasyon sayısı ve β_i hacimsel kabarcık oranının k pertürbasyon dalga sayısı ile değişimini göstermektedir. Bu durumda da sönüm katsayısının kararlılık bölgesine önemli bir etkisi görülmemektedir. Ancak yine kritik kavitasyon sayısının değeri değişmektedir. Bununla beraber türbülanslı cidar kayma gerilmesinin etkisi



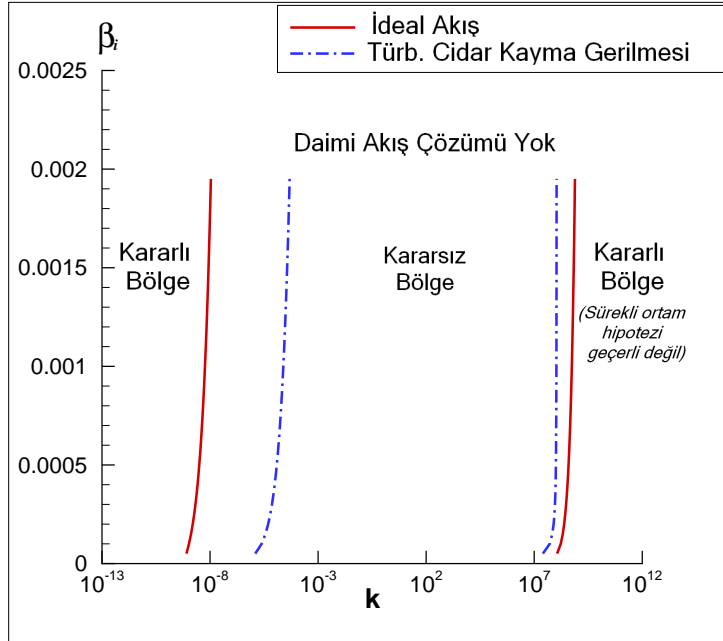
Şekil 3.6: Karışımın türbülanslı cidar kayma gerilmesinin gözönüne alındığı durumda sönüm katsayısının (μ'_{eff}/μ'_ℓ) farklı değerleri (1.0 ve 30.0) için lüle girişindeki hacimsel kabarcık oranının (β_i) pertürbasyon dalga sayısı (k) değişimi ve kararlılık bölgeleri.

gözönüne alındığında, Şekil 3.7'de görüldüğü gibi kararlılık bölgesi ideal akıştakine göre genişlemektedir. Burada türbülansın etkisi yalnızca daimi akış için türbülanslı cidar kayma gerilmesi olarak gözönüne alınmış ve türbülanslı akış çalkantılarının kararlılığa etkisi gözönünde bulundurulmamıştır. Fiziksel olarak, kararlı daimi akış çözümleri çok küçük dalga sayıları için gözlenmiştir. Burada kararlı bölge, türbülanslı cidar kayma gerilmesiyle genişlemektedir. Şekil 3.8, diğer parametreler ve lüle geometrisi sabit tutulup kavitasyon katsayısı ($\sigma_i = 0.79$) değerinde, β_i hacimsel kabarcık oranının k pertürbasyon dalga sayısı ile değişimini göstermektedir. Bu durumda, lüle girişindeki hacimsel kabarcık oranının kritik değer ($\beta_{ic} = 2 \times 10^{-3}$) üzerinde daimi akış çözümü yoktur ve kararlı daimi akış



Şekil 3.7: Karışımın ideal akış ve türbülanslı cidar kayma gerilmesinin gözönüne alındığı hallerde lüle girişindeki kavitasyon sayısının (σ_i) pertürbasyon dalga sayısı (k) ile değişimi ve kararlılık bölgeleri.

çözümleri yine çok küçük dalga sayıları için gözlenmiştir. Burada kararlılık bölgesi de, türbülanslı cidar kayma gerilmesiyle genişlemiştir.



Şekil 3.8: Karışımın ideal akış ve türbülanslı cidar kayma gerilmesinin gözönüne alındığı hallerde lüle girişindeki hacimsel kabarcık oranının (β_i) pertürbasyon dalga sayısı (k) ile değişimi ve kararlılık bölgeleri.

4. KABARCIKLI SIVILARDA SOLİTON OLUŞUMU

Akışkan yüzeyinde biçimini değiştirmeden sabit hızla yayılan yükselim dalgasına *soliter (yalnız) dalga* denir. Bu dalganın genliği ne kadar büyükse yayılma hızı o kadar fazladır. Soliter dalga, ilk olarak 1834 yılında Edingburg'da bir kanal üzerinde İskoçyalı mühendis John Scott Russel tarafından deneysel olarak gözlemlenmiştir. Çarpışan iki soliter dalga, çarpışma sonucu önceki hız ve şeklini koruyorsa bu tür dalgalara *soliton* denir. Soliton, matematiksel olarak nonlinear bir denklemin veya denklem sisteminin üç özelliğe sahip olan bir çözümdür. Bu özelliklerden birincisi, soliton düzgün bir yapıya sahiptir. Yani özel bir yapıya ve sabit bir hıza sahiptir. İkincisi; soliton, yüksekliği aynı kalan veya sabit bir değerle azalan dalga olarak betimlenir. Üçüncüsü ise çok önemli ve şaşırtıcıdır. Bir soliton, diğer bir solitonla etkileştiğinde yapısını değiştirmez. Solitonlar, nonlinear kısmi diferansiyel denklemlerle ilgili en ilginç olaylardan biridir. Solitonlar, nonlinear dalgalar için en büyük model denklem olan Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin çözümleridir. Bu denklemler, 19. yüzyılın sonunda Korteweg ve de Vries tarafından bir su dalgası denklemi olarak çalışılmış, daha sonra soliton olayının en temel denkleminde biri olarak literatüre geçmiştir. KdV denkleminin sayısal çözümü ilk olarak Fermi ve diğ. (1965) tarafından elde edilmiştir. Soliton terimi ise ilk olarak, Zabusky ve Kruskal (1965) tarafından, KdV denkleminin soliter dalga çözümü için kullanılmıştır. Zabusky ve Kruskal, KdV denkleminin sayısal çözümlerinde solitonları keşfetmişlerdir. Daha sonra Gardner ve diğ. (1967) tarafından KdV denklemi için başlangıç değer probleminin kesin çözümünü veren Ters Saçılma Yöntemi önerilmiştir. KdV denkleminin yanısıra nonlinear Schrödinger denklemi, Sine-Gordon denklemi günümüzde bilinen soliton denklemlerinden bazılarıdır. Düzgün dalga çözümlerine sahip olan KdV denkleminde nonlinearlik ve dispersiyon bir arada bulunur. Bu yüzden KdV denklemi yalnızca matematiksel değil, pratikte de bir öneme sahiptir. Konunun belli başlı kitapları arasında Drazin (1983), Novikov ve diğ. (1984), Drazin ve Johnson (1989), Infeld ve Rowlands (1990), Ablowitz ve Clarkson (1992),

Crighton (1995) sayılabilir.

Bu bölümde, iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset kabarcık dinamiği yasasını akış denklemlerine bağlayan iki-fazlı homojen karışım modeli kullanılarak kabarcıklı sıvıların soliton çözümleri incelenmiştir. Kabarcıklı sıvılarda soliton çözümleri, Kuznetsov ve diğ. (1978) ve van Wijngaarden (1995) tarafından bulunmuştur. Bu çalışmada, kabarcıklı sıvılarda soliton çözümlere kabarcık/kabarcık etkileşim parametresinin ve gaz parametresinin etkisi araştırılmış ve elde edilen sonuçlar van Wijngaarden (1995)'in yaptığı deney sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

4.1 Model Denklemler

Bu bölümde, homojen iki-bileşenli (sıvı ve gaz kabarcığı) karışım modeli kullanılmış ve bileşenler arasındaki hareketin etkisi ihmal edilmiştir. Bu durumda karışımın yoğunluğu

$$\rho' = \rho'_\ell(1 - \beta) + \rho'_g\beta \quad (4.1)$$

olarak yazılabilir. Burada ρ'_ℓ sıvı yoğunluğunu, ρ'_g gaz kabarcığı yoğunluğunu, β hacimsel kabarcık oranını göstermektedir. Küresel kabarcık yarıçapı R' alındığında, β hacimsel kabarcık oranı

$$\beta = \frac{4}{3} \pi R'^3 n' = \frac{\frac{4}{3} \pi n'_0 R_0'^3 R^3}{1 + \frac{4}{3} \pi n'_0 R_0'^3 (R^3 - \alpha)} \quad (4.2)$$

olarak tanımlıdır. (4.2) denkleminde n'_0 sıvının birim hacmindeki kabarcık yoğunluğu sayısıdır ve akış boyunca sabittir. Burada, R'_0 başlangıçtaki kabarcık yarıçapı olup, $R = R'/R'_0$ ve eşsıcaklık durum değişimi için T'_g gaz sıcaklığı T'_0 sıvı sıcaklığına eşit olduğundan, kabarcık gazının ideal gaz yasasını sağladığı varsayılırsa

$$\alpha = \frac{\rho'_{g0}}{\rho'_\ell} = \frac{p'_{g0}}{\rho'_\ell \mathfrak{R}' T'_0} \quad (4.3)$$

olarak tanımlanabilir. Yukarıdaki (4.3) denkleminde ρ'_{g0} ve p'_{g0} , sırasıyla, kabarcık içindeki yoğunluk ve basıncın başlangıçtaki değerlerini, \mathfrak{R}' ise gaz sabitini göstermektedir. Karışımın birim hacmindeki kabarcık sayısı yoğunluğu n' , hacimsel kabarcık oranı β cinsinden

$$n' = n'_0 \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha}{R^3} \right) \beta \right] \quad (4.4)$$

olarak ifade edilebilir. Kabarcık dinamiği yasası, kabarcık/kabarcık etkileşmeleri için iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset denklemiyle karakterize edilirse, akış denklemleri aşağıdaki hali alır:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'} (\rho' u') = 0 \quad (4.5)$$

$$\rho' \frac{\partial u'}{\partial t'} + \rho' u' \frac{\partial u'}{\partial x'} = - \frac{\partial p'}{\partial x'} \quad (4.6)$$

$$p'_g R'^3 = \text{sabit} = p'_{g0} R_0'^3 \quad (4.7)$$

Bu durumda ortalama yarıçap için iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset denklemi

$$\begin{aligned} \frac{p'_g - p'}{\rho'_\ell} &= \frac{\left[1 + \frac{2}{3} \pi n'_0 (3\Lambda^2 - 1) R'^3 - \frac{4}{3} \pi n'_0 R_0'^3 \alpha\right]}{\left[1 + \frac{4}{3} \pi n'_0 R'^3 - \frac{4}{3} \pi n'_0 R_0'^3 \alpha\right]} R' \frac{d^2 R'}{dt'^2} \\ &+ \frac{3}{2} \frac{\left[\left(1 - \frac{4}{3} \pi n'_0 R_0'^3 \alpha\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{3} \pi n'_0 R_0'^3 \alpha\right) \frac{8}{3} \pi n'_0 (2\Lambda^2 - 1) R'^3 + \frac{16}{9} \pi^2 n_0'^2 \Lambda^2 R'^6\right]}{\left[1 + \frac{4}{3} \pi n'_0 R'^3 - \frac{4}{3} \pi n'_0 R_0'^3 \alpha\right]^2} \left(\frac{dR'}{dt'}\right)^2 \\ &+ \frac{4 v'_D}{R'} \frac{dR'}{dt'} + \frac{2S'}{\rho'_\ell R'}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

biçimindedir. (4.5)-(4.8) denklemlerindeki u' , ρ' , p' ve p'_g sırasıyla akış hızını, karışım yoğunluğunu, karışım basıncını ve gaz basıncını göstermektedir. Ayrıca v'_D viskoz yutulma biçimindeki sönüm katsayısını, S' yüzey gerilim katsayısını ve Λ ise (2.8) ile tanımlı kabarcık/kabarcık etkileşim parametresini göstermektedir.

4.2 Kabarcıklı Sıvılar İçin Boussinesq Denklemleri

(4.5)-(4.8) akış denklemlerine öncelikle

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\rho'}{\rho'_\ell}, & p &= \frac{p'}{p'_{g0}}, & R &= \frac{R'}{R_0'}, \\ x &= \frac{x'}{\ell'}, & t &= \frac{t' c'_0}{\ell'} \end{aligned} \quad (4.9)$$

normalizasyonu uygulanır. Bu boyutsuzlaştırmalarda, ρ'_ℓ sıvının yoğunluğu, p'_{g0} başlangıç gaz basıncı, R'_0 kabarcıkların başlangıç yarıçapı, x' tüpün ekseninin koordinatı, t' zaman koordinatı, ℓ' etkileşen basınç dalgalarının karakteristik uzunluğudur. Ayrıca kabarcıklı sıvılarda sesin yayılma hızı c'_0 ve Minnaert frekansı ω'_B için

$$c'^2_0 = \frac{p'_{g0}}{\rho'_\ell \beta_0 (1 - \beta_0)}, \quad \omega'^2_B = \frac{3 p'_{g0}}{R'^2_0 \rho'_\ell} \quad (4.10)$$

tanımları kullanılarak, akış denklemlerine, $\varepsilon \ll 1$ pozitif bir sayı olmak üzere,

$$\frac{p'_g}{p'_{g0}} = \frac{1}{R^3} = 1 + \varepsilon \xi \quad (4.11)$$

pertürbasyonu uygulandığında, karışımdaki boyutsuz akış hızı

$$w = \frac{u'}{\varepsilon \beta_0 c'_0} \quad (4.12)$$

olarak tanımlanabilir. (4.11) pertürbasyonu (4.5)-(4.8) denklemler sistemine, (4.1)-(4.3) bağıntıları kullanılarak uygulandığında, ξ ve w pertürbasyonları için aşağıdaki denklem sistemi bulunur:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \varepsilon \beta_0 w \frac{\partial \xi}{\partial x} + \left[1 + (2 - \beta_0) \varepsilon \xi \right] \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon \beta_0 w \frac{\partial w}{\partial x} + \chi_1 \left\{ (1 - \beta_0 \varepsilon \xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\sigma_1}{3} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial t^2} + \frac{4 v'_D c'_0}{\omega'^2_B R'^2_0 \ell'} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} \right\} = 0. \quad (4.14)$$

Elde edilen bu denklemler, sonlu derinlikli yerçekimine maruz su dalgalarını betimleyen Boussinesq denklemleriyle aynı formdadır. (4.14) denkleminin sol tarafındaki son iki terim, sırasıyla, kabarcıklı sıvıdaki dispersiyon etkisini ve viskoz etkiyi göstermektedir. Buradaki σ_1 ve χ_1 parametreleri

$$\sigma_1 = \frac{3 c'^2_0}{\omega'^2_B \ell'^2} \left[1 + \frac{3}{2} (\Lambda^2 - 1) \beta_0 \right] \quad (4.15)$$

$$\chi_1 = \frac{(1 - \beta_0)}{\left[1 - (1 - \alpha) \beta_0 \right]}$$

olarak tanımlıdır. Yukarıdaki (4.14) denkleminde dispersiyon ve viskoz yutulma terimlerinin ε mertebesinde olduğu varsayılmıştır (küçük dispersiyon ve küçük viskoz yutulma). Ayrıca yukarıdaki hesaplarda, (4.8) denklemindeki yüzey gerilim katsayısı $S' = 0$ olarak alınmıştır. (4.13) ve (4.14) denklemlerinde kabarcık/kabarcık etkileşimleri ihmal edilirse, yani $\Lambda = 1$ ve $\alpha = 0$ alınırsa, kabarcıklı sıvılar için van Wijngaarden (1972)'nin elde ettiği denklemlerle aynı tipte denklemler elde edilir.

4.3 Kabarcıklı Sıvılarda KdV-Burgers ve KdV Denklemleri

KdV denklemleri, düzgün dalga çözümlerine sahiptir. Bunlar cnoidal dalgalar ve soliter dalgalar olarak bilinirler. Bu tipteki dalgalar, kabarcıklı akışlarda oluşabilir. (4.13)-(4.14) Boussinesq denklemlerine θ ve τ , $O(1)$ mertebesinde olmak üzere

$$\begin{aligned}\theta &= x - t \\ \tau &= \varepsilon t\end{aligned}\tag{4.16}$$

biçiminde bir ölçekleme uygulanır ve yüksek mertebeli türevlerde $w \approx \xi$ varsayımı kullanılırsa

$$\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \left(\frac{\chi_1 - 1}{2} + \varepsilon \xi \right) \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\sigma}{6} \frac{\partial^3 \xi}{\partial \theta^3} - v \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} = O(\varepsilon^2, \varepsilon \sigma, \sigma^2)\tag{4.17}$$

denklemleri elde edilir. Burada

$$\sigma = \sigma_1 \chi_1 = \frac{3c_0'^2(1-\beta_0)}{\omega_B'^2 \ell'^2} \frac{\left[1 + \frac{3}{2}(\Lambda^2 - 1)\beta_0 \right]}{\left[1 - (1-\alpha)\beta_0 \right]}\tag{4.18}$$

ve

$$v = \frac{2v_D'c_0'}{\omega_B'^2 R_0'^2 \ell'} \chi_1\tag{4.19}$$

biçiminde tanımlıdır. Burada Λ arttıkça ve α azaldıkça σ parametresinin arttığı görülmektedir. (4.17) denkleminde tekrar x, t koordinatlarına geçilirse,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(\chi_2 + \varepsilon \xi \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\sigma}{6} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} - v \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = O(\varepsilon^2, \varepsilon \sigma, \sigma^2)\tag{4.20}$$

denklemini elde edilir. Burada $x = O(1)$, $t = O(\frac{1}{\varepsilon})$ mertebesinde olup

$$\chi_2 = \frac{\chi_1 + 1}{2} = \frac{1 - (1 - \alpha/2)\beta_0}{1 - (1 - \alpha)\beta_0} \quad (4.21)$$

olarak tanımlanmıştır. (4.20) denkleminde $\bar{x} = x - \chi_2 t$ ve $\bar{t} = t$ koordinatlarına geçilir ve $O(\varepsilon^2)$ terimleri ihmal edilirse

$$\frac{\partial \xi}{\partial \bar{t}} + \varepsilon \xi \frac{\partial \xi}{\partial \bar{x}} + \frac{\sigma}{6} \frac{\partial^3 \xi}{\partial \bar{x}^3} - \nu \frac{\partial^2 \xi}{\partial \bar{x}^2} = 0 \quad (4.22)$$

KdV-Burgers denklemi elde edilir. Bu denklemin sol tarafındaki son üç terim sırasıyla nonlineerlik, dispersiyon ve viskoz yutulma terimlerini betimler ve kabarcıklı sıvılarda şok dalgalarının yapısını belirler (van Wijngaarden, 1968, 1972; Delale ve diğ., 2005a; Delale ve Tryggvason, 2008). Şayet KdV-Burgers denklemlerinde viskoz yutulma terimi ihmal edilirse ($\nu \rightarrow 0$),

$$\frac{\partial \xi}{\partial \bar{t}} + \varepsilon \xi \frac{\partial \xi}{\partial \bar{x}} + \frac{\sigma}{6} \frac{\partial^3 \xi}{\partial \bar{x}^3} = 0 \quad (4.23)$$

KdV denklemi bulunur. Son olarak boyutsuz x^* , t^* ve u büyüklükleri

$$\bar{x} = \left(\frac{\sigma}{6\varepsilon}\right)^{1/3} x^*, \quad \bar{t} = \frac{t^*}{\varepsilon}, \quad \xi = -\left(\frac{36\sigma}{\varepsilon}\right)^{1/3} u \quad (4.24)$$

olarak seçilirse, (4.23) denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} - 6u \frac{\partial u}{\partial x^*} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^{*3}} = 0 \quad (4.25)$$

standart formda Korteweg-de Vries denklemi şeklinde yazılabilir. Böylece (4.13) ve (4.14) denklemlerinde viskoz yutulma ihmal edildiğinde, büyük zamanlarda ($t \gg 1$) asimptotik olarak soliton çözümlerinin varlığı kanıtlanmış olur.

4.4 Soliton Oluşumu ve Etkileşen Soliton Sayısı

Bu bölümde, (4.25) denkleminin soliton çözümlerini bulmak için Ters Saçılma Yöntemi kullanılmıştır. Birçok fiziksel problem, nonlinear kısmi diferansiyel denklemler ile modellenir. Çözülebilir nonlinear kısmi diferansiyel denklemler sınıfı için genel bir çözüm yöntemi yoktur. Bu yüzden Gardner ve diğ. (1967) tarafından önerilen ve KdV denklemini için başlangıç değer probleminin kesin çözümünü veren Ters Saçılma Yöntemi, matematiksel soliton teorisinin zirvesi olarak görülebilir. Bu yöntem, integre edilebilir bir sistemin tüm çözümlerini bir araya toplayan sistematik bir yöntem olup lineer bir denklem için Fourier moduna benzer. Bu yöntemin amacı, (x^*, t^*) , $x^* \in \mathbb{R}$, $t^* > 0$ için $u(x^*, 0)$ başlangıç koşulu ile KdV denklemini çözmektir. Temel fikir, KdV denklemini zamandan bağımsız Schrödinger denklemiyle ilişkilendirmektir (Ablowitz ve Clarkson, 1992). Bunun için ilk olarak $\varphi(x^*)$ dalga fonksiyonu için

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^{*2}} + \{\lambda - u(x^*, t^*)\} \varphi = 0 \quad (4.26)$$

Schrödinger denklemini gözönüne alınsın. Şayet $u(x^*, t^*)$, (4.25) KdV denkleminin soliton çözümü ise, bu durumda (4.26) denkleminin λ_n özdeğerleri zamandan bağımsızdır. Tüm özdeğerler negatif ve sonlu (N) olup $\lambda_n = -k_n^2$, $k_1 > k_2 > \dots > k_N > 0$ biçiminde sıralıdır (Whitham, 1974). $\lambda = \lambda_n$; $n = 1, 2, \dots, N$ özdeğerleri zamandan bağımsız olduğundan (4.26) denklemini aşağıdaki Sturm-Liouville denklemine dönüştür

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^{*2}} + \{\lambda - u(x^*, 0)\} \varphi = 0, \quad -\infty < x^* < +\infty. \quad (4.27)$$

Burada, asimptotik olarak her λ özdeğeri, bir solitona karşı gelir. Bu yüzden soliton sayısını bulmak için özdeğerlerin sayısını bulmak yeterli olacaktır.

Tüp içindeki kabarcıklı sıvı başlangıç basınç profili

$$\begin{aligned}\varepsilon \xi &= \frac{p'_g - p'_{g0}}{p'_{g0}} = \frac{p_g^+ - p'_{g0} x'}{p'_{g0} \ell'}, & 0 < x' < \ell' \\ &= 0, & x' \leq 0 \text{ ve } x' \geq \ell'\end{aligned}\tag{4.28}$$

şeklinde seçilmiş olsun. Yani, başlangıçta dengede olan bir ortama üçgensel bir sinyal gönderilsin. (4.24) dönüşümleri (4.28)'de kullanılırsa,

$$\begin{aligned}u(x^*, 0) &= -\frac{p_g^+ - p'_{g0} x^*}{p'_{g0} 6\varepsilon}, & 0 < x^* < \left(\frac{6\varepsilon}{\sigma}\right)^{1/3} \\ &= 0, & x^* \leq 0 \text{ ve } x^* \geq \left(\frac{6\varepsilon}{\sigma}\right)^{1/3}\end{aligned}\tag{4.29}$$

elde edilir. Sturm Birinci Karşılaştırma Teoreminden (Ince, 1956), en büyük k_1 özdeğerine karşılık gelen φ_1 öz fonksiyonunun bir adet sıfırı, k_2 özdeğerine karşılık gelen φ_2 öz fonksiyonunun iki adet sıfırı ve k_N özdeğerine karşılık gelen φ_N öz fonksiyonunun N adet sıfırı olacaktır. Dolayısıyla, (4.27) denkleminin $\lambda = 0$ için çözümüne karşılık gelen φ fonksiyonunun, $\lambda = -k_N^2$ sifira yakın en büyük özdeğer olduğundan, N adet sıfırı olacaktır (Hammack ve Segur, 1974). Bu amaçla x^* koordinatına

$$x^* = \left(\frac{6p'_{g0}}{p_g^+ - p'_{g0}}\right)^{1/3} \varepsilon^{1/3} y\tag{4.30}$$

ölçeklemesi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}u(y, 0) &= -\left(\frac{p_g^+ - p'_{g0}}{6p'_{g0}}\right)^{2/3} \frac{y}{\varepsilon^{2/3}}, & 0 < y < Q = \left(\frac{p_g^+ - p'_{g0}}{p'_{g0}} \frac{1}{\sigma}\right)^{1/3} \\ &= 0, & y \leq 0 \text{ ve } y \geq Q\end{aligned}\tag{4.31}$$

şeklini alır. Bu ölçekleme kullanıldığında $\lambda = 0$ için (4.27) denklemi $0 < y < Q$ aralığında

$$\frac{d^2 \varphi}{dy^2} + y \varphi = 0\tag{4.32}$$

Airy denklemini, $y \leq 0$ ve $y \geq Q$ için

$$\frac{d^2 \varphi}{dy^2} = 0\tag{4.33}$$

denklemini verir. Bu durumda başlangıç koşulu

$$\varphi(0) = 1 \quad \text{ve} \quad \frac{d\varphi}{dy} \Big|_{y=0} = 0 \quad (4.34)$$

şeklini alır. (4.32)-(4.34) sisteminin çözümü

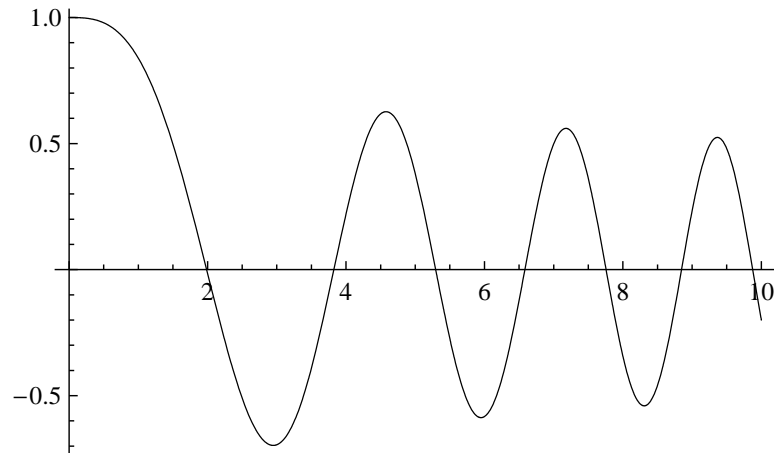
$$\varphi(y) = 1, \quad y \leq 0 \quad (4.35)$$

$$\varphi(y) = 1.408Ai(-y) + 0.813Bi(-y), \quad 0 < y < Q \quad (4.36)$$

ve

$$\varphi(y) = \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)_{y=Q} (y - Q) + \varphi(Q), \quad y \geq Q \quad (4.37)$$

şeklini alır. Burada Ai ve Bi Airy fonksiyonlarıdır. Özdeğerlere karşı gelen çözümün köklerinin sayısı soliton sayısını verdiğinden, çözümün köklerinin sayısını incelemek gerekmektedir. $0 < y < Q$ aralığında (4.36) çözümü Şekil 4.1'de gösterilmiştir. Bu durumda çözümün köklerinin sayısını Q belirlemektedir. Q



Şekil 4.1: (4.1) Airy denkleminin (4.34) denklemiyle verilen başlangıç koşulları için $0 < y < 10$ aralığındaki çözümü

büyüdükçe köklerin sayısı, dolayısıyla soliton sayısı artar. Q , σ parametresine bağlı olduğundan σ azaldıkça yani Λ azaldıkça ve α arttıkça soliton sayısı artar.

$y \leq 0$ için $\varphi(y) = 1$ 'in kökü olmadığından soliton yoktur.

$y \geq Q$ için ise

$$\left\{ \frac{d\varphi}{dy} / \varphi \right\}_{y=Q} > 0 \Rightarrow \text{soliton sayısı aynı,} \quad (4.38)$$

$$\left\{ \frac{d\varphi}{dy} / \varphi \right\}_{y=Q} < 0 \Rightarrow \text{soliton sayısı 1 fazladır.} \quad (4.39)$$

Yapılan bu çalışmadaki amaç, Λ kabarcık/kabarcık etkileşmesi parametresi ve α gaz-sıvı yoğunlukları oranının soliton çözümlerine etkisini incelemektir. Bu etki incelenirken van Wijngaarden (1995) tarafından yapılan deneyler gözönüne alınmış ve elde edilen soliton sayıları deneylerle karşılaştırılmıştır (Pasinlioğlu ve Delale, 2008). Çizelge 4.1'de görüldüğü gibi $\Lambda = 1$ (kabarcık/kabarcık etkileşmesi yok) ve $\alpha = 0$ (gazın yoğunluğunun sıvı yoğunluğuna oranının ihmal edilmesi) durumunda elde edilen soliton sayıları, deney sonuçlarıyla uyumludur. Λ arttıkça

Çizelge 4.1: Soliton sayısının, $\alpha = 0$ için kabarcık/kabarcık etkileşme parametresiyle (Λ) değişimi (N_d : Deneysel olarak gözlenen soliton sayısı, van Wijngaarden, 1995).

DENEY	$N_d \setminus \Lambda$	1	2	3	4	5	6
1.	4	4	2	2	1	1	1
2.	3	3	2	1	1	1	1
3.	2	2	1	1	1	1	1
4.	3	3	2	2	1	1	1
5.	1	1	1	1	1	1	1
6.	2	2	1	1	1	1	1

soliton sayısının azaldığı görülmektedir. Van Wijngaarden (1995)'in deneyleri için elde edilen sonuçlar, bu durumda kabarcık/kabarcık etkileşmesinin pek de önemli olmadığını göstermektedir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, sanki-bir-boyutlu kaviteye sahip lüle akışları için model denklemlerin daimi akış çözümlerinin zamana göre kararlılığı ve kabarcıklı sıvılarda soliton oluşumu incelenmiştir. Model denklemler, homojen iki-fazlı akış modelindeki kabarcıklı sıvı karışımı için Euler/Navier-Stokes denklemlerine nonlinear küresel kabarcık dinamiği yasası eklenerek elde edilmiştir. Özellikle, kabarcık dinamiği yasası için ortalama alan teorisinde kabarcık/kabarcık etkileşimlerini gözönünde bulunduran iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset denklemi kullanılmış, tüm sönüm mekanizmaları viskoz yutulma biçiminde tek bir sönüm katsayısıyla betimlenmiş, kabarcıkların içindeki gazın büyüme ve büzülmesi halinde politropik yasa kullanılmıştır. Tüm denklem sistemi, akış hızı ve kabarcık yarıçapı için iki evrim denklemine indirgenmiştir. Lüle giriş koşulları ve lüle geometrisi daimi akış çözümleri var olacak şekilde seçilmiştir. Bu koşullar altında, zamana bağlı kararlılık için evrim denklemlerine, daimi akışlardaki akış hızı ve kabarcık yarıçapı alanları baz alınarak pertürbasyon uygulanmıştır. Sonuçta, daimi akış çözümlerinin zamana bağlı kararlılığı için kuple lineer kısmi diferensiyel denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklem sistemi önce genelleştirilmiş özdeğer problemine dönüştürülerek belli bölgeler için özdeğerler hesaplanmıştır. Fakat özdeğerlerin sık işaret değiştirmesinden dolayı fiziksel olanlarını belirlemek olası olmamıştır. Bundan dolayı, denklem sistemi tüm katsayılarının hemen hemen sabit olduğu lüle giriş bölgesinde normal mod analizi kullanılarak kesin olarak çözülmüştür. Lüle geometrisi ve diğer tüm parametreler sabit tutularak akış parametrelerinden biri (kaviteye sayı ya da lüle girişindeki hacimsel kabarcık oranı) değiştirilmiş ve bu parametrenin k pertürbasyon dalga sayısı ile değişimini gösteren kararlılık diyagramları çıkarılmıştır. Bu diyagramlarda, kaviteye sayısının kritik bir değerin altında (ya da lüle girişindeki hacimsel kabarcık oranının kritik bir değerin üstünde) olduğu durumlarda, daimi akış çözümlerinin mevcut olmadığı görülmüştür. Daimi akış çözümlerinin mevcut olduğu hallerde, bu çözümlerin sadece çok

küçük dalga sayıları için kararlı olduğu gözlemlenmiştir (aslında çok büyük dalga sayıları için de kararlı bölgeler bulunmuştur, ancak bu bölgelerde süreklilik hipotezi geçerliliğini yitirmektedir). Lüle giriş bölgesi için kararlılık diyagramlarındaki kararlı bölgelerin, türbülanslı cidar kayma gerilmesi etkisiyle genişlediği görülmüştür. Sonuç olarak sanki-bir-boyutlu daimi lüle akışları için inşa edilen model denklemlerin çözümleri, sadece çok küçük dalga sayıları için zamana göre kararlıdır (Pasinlioğlu ve Delale, 2006; Delale ve diğ., 2007; Pasinlioğlu ve diğ., 2009). Reel kaviteasyonlu akışlar çok-boyutludur. Bundan dolayı, model denklemlerin iki ya da üç boyutta düşünülmesi gerekir. Ayrıca gerçek kaviteasyonlu lüle akışları için model denklemlerde, özellikle kabarcıkların büzüldükleri bölgelerde, politropik yasa yerine her faz için enerji denklemi gözönünde bulundurularak gerçekçi bir ısıl sönüm mekanizması eklenmelidir.

Bu tezin ikinci kısmında kabarcıklı sıvılarda soliton oluşumu araştırılmıştır. Burada, kabarcıkların birbirleriyle etkileşimleri gözönünde bulundurularak, kabarcık/kabarcık etkileşim parametresinin soliton çözümlerine etkisi incelenmiştir. Yine homojen iki-fazlı kabarcıklı karışım modeli kullanılmıştır. Kabarcıklar, gaz kabarcıkları olarak ele alınmış olup, büyüme ve büzülmelerinde izotermal hal değişimi varsayılmıştır. Kullanılan model denklemlerde, önce gaz basıncına pertürbasyon uygulanarak Boussinesq denklemleri elde edilmiştir. Daha sonra bu denklemler küçük nonlineerlik ve küçük dispersiyon varsayılarak, standart Korteweg-de Vries-Burgers denklemine ve viskoz yutulma ihmal edilerek Korteweg-de Vries (KdV) denklemine dönüştürülmüştür. Korteweg-de Vries denkleminin soliton çözümlerinin sayısını bulmak için Ters Saçılma Yönteminden yararlanılmıştır. Asimptotik olarak her özdeğer bir solitona karşı geldiğinden problem, özdeğer sayısını bulma problemine dönüşmüştür. Özdeğerlerin sayısını bulmak için ise, Hammack ve Segur'un kullandığı yöntemden yararlanılmıştır. Elde edilen sonuçlar göstermiştir ki kabarcık/kabarcık etkileşim parametresi arttırıldığında soliton sayısı azalmakta, gazın sıvıya yoğunluğu oranı arttırıldığında ise soliton sayısı artmaktadır (Pasinlioğlu ve Delale, 2008).

KAYNAKLAR

- Ablowitz, M. J. and Clarkson, P. A.**, 1992. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge University Press.
- Biesheuvel, A. and van Wijngaarden, L.**, 1984. Two-phase flow equations for a dilute dispersion of gas bubbles in liquids, *J. Fluid Mech.*, **148**, 301-318.
- Brennen, C. E.**, 1995. *Cavitation and Bubble Dynamics*, Oxford University Press, USA.
- Brennen, C. E.**, 2002. Fission of collapsing cavitating bubbles, *J. Fluid Mech.*, **472**, 153-166.
- Brennen, C. E.**, 2005. *Fundamentals of Multiphase Flow*, Cambridge University Press, New York.
- Caflich, R. E., Miksis, M. J., Papanicolaou, G. C. and Ting, L.**, 1985. Effective equations for wave propagation in bubbly liquids, *J. Fluid Mech.*, **153**, 159-253.
- Crighton, D. G.**, 1995. Applications of KdV, *Acta Applicandae Mathematicae*, **39**, 39-67.
- d'Agostino, L., d'Auria, F. and Brennen, C. E.**, 1997. On the inviscid stability of parallel bubbly flows, *J. Fluid Mech.*, **339**, 261-274.
- Delale, C. F.**, 2002. Thermal damping in cavitating nozzle flows, *ASME J. Fluids Eng.*, **124**, 969-976.
- Delale, C. F., Nas, S. and Tryggvason, G.**, 2005a. Direct numerical simulations of shock propagation in bubbly liquids, *Phys. Fluids*, **17**, 121705-1-4.
- Delale, C. F., Okita, K. and Matsumoto, Y.**, 2005b. Steady-state cavitating nozzle flows with nucleation, *ASME J. Fluids Eng.*, **127**, 770-777.
- Delale, C. F. and Pasinlioglu, Ş.**, 2005. Stability of steady-state solutions of quasi-one-dimensional bubbly cavitating nozzle flows, *Workshop at the Lorentz Center and Euromech Colloquium 465 on Hydrodynamics of Bubbly Flows*, Leiden, The Netherlands, June 6-16.

- Delale, C. F., Schnerr, G. H. and Pasinlioglu, Ş.**, 2006. Model evolution equations for unsteady cavitating nozzle flows and their applications, *VI. International Symposium on Cavitation CAV2006*, Wageningen, The Netherlands, September 11-15, paper no:112. (CD Rom, ed. G. Kuiper).
- Delale, C. F., Schnerr, G. H. and Pasinlioglu, Ş.**, 2007. On the temporal stability of steady-state quasi-one-dimensional bubbly cavitating nozzle flow solutions, *VI. International Conference on Multiphase Flow ICMF 2007*, Leipzig, Germany, July 9-13, paper no:S7_Tue_D_27 (CD Rom, ed. M. Sommerfeld).
- Delale, C. F., Schnerr, G. H. and Sauer, J.**, 2001. Quasi-one-dimensional cavitating nozzle flows, *J. Fluid Mech.*, **427**, 167-204.
- Delale, C. F. and Tryggvason, G.**, 2008. Shock structure in bubbly liquids: Comparison of direct numerical simulations and model equations, *Shock Waves*, **17**, 433-440; doi: 10.1007/s00193-008-0126-1.
- Delale, C. F. and Tunç, M.**, 2004. A bubble fission model for collapsing cavitation bubbles, *Phys. Fluids*, **16**, 4200-4203.
- Drazin, P. G.**, 1983. *Solitons*, Cambridge University Press.
- Drazin, P. G.**, 2002. *Introduction to Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press.
- Drazin, P. G. and Johnson, R. S.**, 1989. *Solitons: An Introduction*, Cambridge University Press.
- Drazin, P. G. and Reid, W. H.**, 1981. *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press.
- Fermi, E., Ulam, S. and Pasta, J.**, 1955. Studies in nonlinear problems I., *Report LA 1940*; also, 1965. Collected papers of Enrico Fermi, Segre, E. (ed.), University of Chicago, **2**, 978-88.
- Franc, J.-P. and Michel, J.-M.**, 2004. *Fundamentals of Cavitation*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal, M. D. and Miura, R. M.**, 1967. Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.*, **19 (19)**, 1095-1097.

- Hammack, J. L. and Segur, H.**, 1974. The Korteweg-de Vries equation and water waves. Part 2: Comparison with experiments, *J. Fluid Mech.*, **65**, 289-314.
- Hammitt, F. G.**, 1980. *Cavitation and Multiphase Flow Phenomena*, McGraw-Hill, New York.
- Ince, E. L.**, 1956. *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications.
- Infeld, E. and Rowlands, G.**, 1990. *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*, Cambridge Univ. Press.
- Iooss, G. and Joseph, D. D.**, 1980. *Elementary Stability and Bifurcation Theory*, Springer-Verlag New York Inc.
- Ishii, R., Umeda, Y., Murata, S. and Shishido, N.**, 1993. Bubbly flows through a converging-diverging nozzle, *Phys. Fluids*, **A5**, 1630-1643.
- Kogarko, B. S.**, 1961. On a model of a cavitating liquid, *Soviet Physics-Doklady*, **6**, Num. 4, 305-306.
- Kubota, A., Kato, H. and Yamaguchi, H.**, 1992. A new modelling of cavitating flow: A numerical study of unsteady cavitation on a hydrofoil section, *J. Fluid Mech.*, **240**, 59-96.
- Kuznetsov, V. V., Nakaryakov, V. E., Pokusaev, P. G. and Shreiber, I. R.**, 1978. Propagations of perturbations in a gas-liquid mixture, *J. Fluid Mech.*, **85**, 85-96.
- Lin, C. C.**, 1966. *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press.
- Nigmatulin, R. I., Khabeev, N. S. and Nagiev, F. B.**, 1981. Dynamics, heat and mass transfer of vapor-gas bubbles in a liquid, *Intl. J. Heat Mass Transfer*, **24**, 1033-1044.
- Novikov, S., Manakov, S. V., Pitaevskii, L. P. and Zakharov, V. E.**, 1984. *Theory of Solitons: Inverse Scattering Method*, Contemporary Soviet Mathematics.
- Pasinlioğlu, Ş. and Delale, C. F.**, 2006. Temporal stability of quasi-one-dimensional steady-state bubbly cavitating nozzle flows, *X. Ulusal Sıvıhal Fiziği Sempozyumu*, İstanbul-Türkiye, 28 Eylül-1 Ekim, Bildiri Kitapçığı, s.19.

- Pasinlioğlu, Ş. and Delale, C. F.**, 2008. Solitons in bubbly liquids, *X. Ulusal Sıvıhal Fiziği Sempozyumu*, İstanbul-Türkiye, 31 Ekim-2 Kasım, Bildiri Kitapçığı, s.7.
- Pasinlioğlu, Ş., Delale, C. F. and Schnerr, G. H.**, 2009. On the temporal stability of quasi-one-dimensional steady-state bubbly cavitating nozzle flow solutions. *IMA Journal of Applied Mathematics*, **74**, 230-249, doi: 10.1093/imamat/hxn036.
- Plesset, M. S. and Prosperetti, A.**, 1977. Bubble dynamics and cavitation, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **9**, 145-185.
- Preston, A. T., Colonius, T. and Brennen, C. E.**, 2002. A numerical investigation of unsteady bubbly cavitating nozzle flows, *Phys. Fluids*, **14**(1), 300-311.
- Prosperetti, A.**, 1991. The thermal behaviour of oscillating gas bubbles, *J. Fluid Mech.*, **222**, 587-616.
- Prosperetti, A., Crum, L. A. and Commander, K. W.**, 1988. Nonlinear bubble dynamics, *J. Acoust. Soc. Am.*, **83**, 502-514.
- Prosperetti, A. and Lezzi, A.**, 1986. Bubble dynamics in compressible liquid. Part 1. First-order theory, *J. Fluid Mech.*, **168**, 457-478.
- Tangren, R. F., Dodge, C. H. and Seifert, H. S.**, 1949. Compressibility effects in two-phase flow. *J. Appl. Phys.*, **20**, 637-645.
- van Wijngaarden, L.**, 1968. On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles, *J. Fluid Mech.*, **33**, 465-474.
- van Wijngaarden, L.**, 1972. One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **4**, 369-396.
- van Wijngaarden, L.**, 1995. Evolving solitons in bubbly flows, *Acta Applicandae Mathematicae*, **39**, 507-516.
- Wallis, G. B.**, 1969. *One-Dimensional Two Phase Flow*, McGraw-Hill, New York.
- Wang, Y. C. and Brennen, C. E.**, 1998. One-dimensional bubbly cavitating flows through a converging-diverging nozzle, *ASME J. Fluids Eng.*, **120**, 166-170.

- Wang, Y. C. and Chen, E.,** 2002. Effects of phase relative motion on critical bubbly flows through a converging-diverging nozzle, *Phys. Fluids*, **14**, 3215-3223.
- Ward-Smith, A. J.,** 1980. *Internal Fluid Flow*, McGraw-Hill.
- Whitham, G. B.,** 1974. *Linear and Nonlinear Wave*, John Wiley&Sons.
- Young, F. R.,** 1989. *Cavitation*, McGraw-Hill, London.
- Zabusky, N. J. and Kruskal, M. D.,** 1965. Interactions of 'solitons' in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.*, **157**, 240-3.
- Zhang, D. Z. and Prosperetti, A.,** 1994a. Averaged equations for inviscid disperse two-phase flow, *J. Fluid Mech.*, **267**, 185-219.
- Zhang, D. Z. and Prosperetti, A.,** 1994b. Ensemble phase-averaged equations for bubbly flows, *Phys. Fluids*, **6**, 2956-2970.

EKLER

EK A: (2.27)-(2.29) Denklemlerindeki $F_j(R)$; $j = 1, 2, \dots, 10$ Katsayıları

EK B: (2.27)-(2.29) Denklemlerindeki $F_j(\bar{u})$ ve $f_j(\bar{u})$; $j = 1, 2, \dots, 10$ Katsayıları

EK C: (3.9) Denklemindeki A_j ; $j = 1, 2, \dots, 9$ Katsayıları

EK D: (3.24) Denklemindeki ε_j ; $j = 0, 1, \dots, 4$ Katsayıları

EK E: (3.9)-(3.10) Denklemlerindeki A_j ; $j = 1, \dots, 9$ ve C_j ; $j = 1, \dots, 8$ Katsayılarının Lüle Giriş Bölgesindeki Değişimleri

EK A: (2.27)-(2.29) Denklemlerindeki $F_j(R)$; $j = 1, 2, \dots, 10$ Katsayıları

$$F_1(R) = -\frac{L^2 \kappa_i^3}{3R^2 \left[1 + \left(R/\kappa_i \right)^3 \right]} \times \left[(3\Lambda^2 - 1) \left(R/\kappa_i \right)^6 + (3\Lambda^2 - 2) \left(R/\kappa_i \right)^3 - 1 \right] \quad (\text{A.1})$$

$$F_2(R) = -\frac{L^2 \kappa_i^3}{6R} \left[2 + (3\Lambda^2 - 1) \left(R/\kappa_i \right)^3 \right] \quad (\text{A.2})$$

$$F_3(R) = \frac{1}{\left[1 + \left(R/\kappa_i \right)^3 \right]} \quad (\text{A.3})$$

$$F_4(R) = -\frac{L^2 \kappa_i^6}{18R^4} \left[(21\Lambda^2 - 5) \left(R/\kappa_i \right)^6 + (12\Lambda^2 + 2) \left(R/\kappa_i \right)^3 - 2 \right] \quad (\text{A.4})$$

$$F_5(R) = -\frac{4\kappa_i^3}{3(Re)R^3} \left[1 + \left(R/\kappa_i \right)^3 \right] \quad (\text{A.5})$$

$$F_6(R) = -\frac{L^2 \kappa_i^6}{18R^5 \left[1 + \left(R/\kappa_i \right)^3 \right]} \times \left[(12\Lambda^2 - 2) \left(R/\kappa_i \right)^9 + 6\Lambda^2 \left(R/\kappa_i \right)^6 - 6(\Lambda^2 - 1) \left(R/\kappa_i \right)^3 + 4 \right] \quad (\text{A.6})$$

$$F_7(R) = -\frac{L^2 \kappa_i^6}{9R^5 \left[1 + \left(R/\kappa_i \right)^3 \right]} \left[(21\Lambda^2 - 5) \left(R/\kappa_i \right)^9 + (15\Lambda^2 - 6) \left(R/\kappa_i \right)^6 + (-6\Lambda^2 + 3) \left(R/\kappa_i \right)^3 + 4 \right] \quad (\text{A.7})$$

$$F_8(R) = -\frac{L^2 \kappa_i^6}{18R^4} \left[(39\Lambda^2 - 11) \left(\frac{R}{\kappa_i} \right)^6 + (12\Lambda^2 + 14) \left(\frac{R}{\kappa_i} \right)^3 - 2 \right] \quad (\mathbf{A.8})$$

$$F_9(R) = -\frac{L^2 \kappa_i^6}{9R^4} \left[(6\Lambda^2 - 1) \left(\frac{R}{\kappa_i} \right)^6 + (6\Lambda^2 - 2) \left(\frac{R}{\kappa_i} \right)^3 - 1 \right] \quad (\mathbf{A.9})$$

$$F_{10}(R) = \frac{S_0}{R^2} - \frac{3k p_{gi}}{R^{3k+1}}. \quad (\mathbf{A.10})$$

EK B: (2.27)-(2.29) Denklemlerindeki $F_j(\bar{u})$ ve $f_j(\bar{u})$; $j = 1, 2, \dots, 10$ Katsayıları

$$F_1(\bar{u}) = -\frac{L^2 \kappa_i}{3 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{2/3}} \left[(3\Lambda^2 - 1) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) - 3\Lambda^2 \right] \quad (\text{B.1})$$

$$f_1(\bar{u}) = \frac{L^2 \kappa_i}{3 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{2/3}} \left[(3\Lambda^2 - 1) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) - 3(\Lambda^2 - 1) \right] \quad (\text{B.2})$$

$$F_2(\bar{u}) = -\frac{L^2 \kappa_i^2}{6 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{1/3}} \left[(3\Lambda^2 - 1) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) - 3(\Lambda^2 - 1) \right] \quad (\text{B.3})$$

$$f_2(\bar{u}) = \frac{L^2 \kappa_i^2}{3 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{1/3}} \left[(3\Lambda^2 - 1) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) - 3\Lambda^2 \right] \quad (\text{B.4})$$

$$F_3(\bar{u}) = \frac{1}{\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)} \quad (\text{B.5})$$

$$f_3(\bar{u}) = \frac{3 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)}{\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2} \quad (\text{B.6})$$

$$F_4(\bar{u}) = -\frac{L^2 \kappa_i^2}{18 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{4/3}} \times \left[(21\Lambda^2 - 5) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 + (-30\Lambda^2 + 12) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) + 9(\Lambda^2 - 1) \right] \quad (\text{B.7})$$

$$f_4(\bar{u}) = \frac{L^2 \kappa_i^2}{9 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{4/3}} \left[(21\Lambda^2 - 5) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 + (-48\Lambda^2 + 9) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) + 27\Lambda^2 \right] \quad (\text{B.8})$$

$$F_5(\bar{u}) = -\frac{4\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)}{3(Re)\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)} \quad (\text{B.9})$$

$$f_5(\bar{u}) = -\frac{4}{(Re)\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)} \quad (\text{B.10})$$

$$F_6(\bar{u}) = -\frac{L^2\kappa_i}{9\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)^{5/3}} \left[(6\Lambda^2 - 1)\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^2 + (-15\Lambda^2 + 3)\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right) + 9\Lambda^2 \right] \quad (\text{B.11})$$

$$f_6(\bar{u}) = \frac{L^2\kappa_i}{9\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)^{5/3}} \left[(6\Lambda^2 - 1)\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^2 - 6\Lambda^2\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right) - 9 \right] \quad (\text{B.12})$$

$$F_7(\bar{u}) = -\frac{L^2\kappa_i}{9\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)^{5/3}} \left[(21\Lambda^2 - 5)\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^2 + (-48\Lambda^2 + 9)\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right) + 27\Lambda^2 \right] \quad (\text{B.13})$$

$$f_7(\bar{u}) = \frac{L^2\kappa_i}{9\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)^{5/3}} \left[(21\Lambda^2 - 5)\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^2 + (-30\Lambda^2 + 12)\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right) + 9(\Lambda^2 - 3) \right] \quad (\text{B.14})$$

$$F_8(\bar{u}) = -\frac{L^2\kappa_i^2}{18\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)^{4/3}} \times \left[(39\Lambda^2 - 11)\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^2 + (-66\Lambda^2 + 36)\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right) + 27(\Lambda^2 - 1) \right] \quad (\text{B.15})$$

$$f_8(\bar{u}) = \frac{L^2\kappa_i^2}{9\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)^{4/3}} \left[(39\Lambda^2 - 11)\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^2 + (-84\Lambda^2 + 15)\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right) + 45\Lambda^2 \right] \quad (\text{B.16})$$

$$F_9(\bar{u}) = -\frac{L^2 \kappa_i^2 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)}{9\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)^{4/3}} \left[(6\Lambda^2 - 1)\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right) - 6\Lambda^2 \right] \quad (\text{B.17})$$

$$f_9(\bar{u}) = \frac{L^2 \kappa_i^2}{9\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)^{4/3}} \left[(12\Lambda^2 - 2)\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^2 + (-30\Lambda^2 + 6)\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right) + 18\Lambda^2 \right] \quad (\text{B.18})$$

$$F_{10}(\bar{u}) = \frac{S_0}{\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)^{2/3} \kappa_i^2} - \frac{3k p_{gi}}{\kappa_i^{(3k+1)} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)^{(3k+1)/3}} \quad (\text{B.19})$$

$$f_{10}(\bar{u}) = \frac{2S_0}{\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)^{2/3} \kappa_i^2} - \frac{3k(3k+1)p_{gi}}{\kappa_i^{(3k+1)} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)^{(3k+1)/3}}. \quad (\text{B.20})$$

EK C: (3.9) Denklemindeki A_j ; $j = 1, 2, \dots, 9$ Katsayıları

$$\begin{aligned}
 A_1 &= F_2 \bar{u}^2 \\
 &= -\frac{L^2 \kappa_i^2 \bar{u}^2}{6 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{1/3}} \left[(3\Lambda^2 - 1) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) - 3(\Lambda^2 - 1) \right]
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= F_2 \bar{u} \\
 &= -\frac{L^2 \kappa_i^2 \bar{u}}{6 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{1/3}} \left[(3\Lambda^2 - 1) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) - 3(\Lambda^2 - 1) \right]
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}
 A_3 &= 3F_2 \bar{u} \frac{d\bar{u}}{dx} + \left[F_1 \bar{u} \frac{d\bar{R}}{dx} + F_4 \left[\frac{d\bar{u}}{dx} + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} \right] + F_5 \right] \bar{u} \\
 &= -\frac{L^2 \kappa_i^2 \bar{u}}{18 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{4/3}} \\
 &\quad \times \left\{ \left[(54\Lambda^2 - 16) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 + (-90\Lambda^2 + 48) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) + 36(\Lambda^2 - 1) \right] \frac{d\bar{u}}{dx} \right. \\
 &\quad \left. + \left[(27\Lambda^2 - 7) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 + (-36\Lambda^2 + 12) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) + 9(\Lambda^2 - 1) \right] \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{24 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)}{L^2 (Re) \kappa_i^2} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{1/3} \right\}
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned}
 A_4 &= 2F_2 \frac{d\bar{u}}{dx} + \left[F_1 \frac{d\bar{R}}{dx} + F_2 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \right] \bar{u} \\
 &= -\frac{L^2 \kappa_i^2}{18 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{4/3}} \\
 &\quad \times \left\{ \left[(24\Lambda^2 - 8) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 + (-42\Lambda^2 + 24) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) + 18(\Lambda^2 - 1) \right] \frac{d\bar{u}}{dx} \right. \\
 &\quad \left. + \left[(15\Lambda^2 - 5) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 + (-24\Lambda^2 + 12) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) + 9(\Lambda^2 - 1) \right] \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} \right\}
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned}
A_5 &= [3F_2 + F_4] \bar{u} \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + 2F_4 \left(\frac{d\bar{u}}{dx} \right)^2 \\
&+ \left[(F_1 + F_6) \bar{u} \frac{d\bar{R}}{dx} + 2F_4 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} + F_5 \right] 2 \frac{d\bar{u}}{dx} \\
&+ \left[F_7 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} - \frac{3F_3 F_5}{\bar{R}} \right] \frac{d\bar{R}}{dx} \bar{u} \\
&+ \left\{ F_8 \bar{u} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + F_9 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)^2 \bar{u} + F_5 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + F_3 \bar{u} \right\} \bar{u} \\
&= -\frac{L^2 \kappa_i^2}{54 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{7/3}} \left\{ \left[(144\Lambda^2 - 42) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^3 + (-396\Lambda^2 + 186) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 \right. \right. \\
&+ (360\Lambda^2 - 252) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) - 108(\Lambda^2 - 1) \left. \right] \bar{u} \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} \\
&+ \left[(186\Lambda^2 - 46) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^3 + (-438\Lambda^2 + 126) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 + (306\Lambda^2 - 126) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) \right. \\
&- 54(\Lambda^2 - 1) \left. \right] \left(\frac{d\bar{u}}{dx} \right)^2 \\
&+ \left\{ \left[(354\Lambda^2 - 86) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^3 + (-840\Lambda^2 + 246) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 + (594\Lambda^2 - 252) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) \right. \right. \\
&- 108(\Lambda^2 - 1) \left. \right] \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} + \frac{72 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)}{L^2 (Re) \kappa_i^2} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{1/3} \left(2 \frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 3 \right) \left. \right\} \frac{d\bar{u}}{dx} \\
&+ \left\{ \left[(117\Lambda^2 - 33) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^3 + (-315\Lambda^2 + 141) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 + (279\Lambda^2 - 189) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) \right. \right. \\
&- 81(\Lambda^2 - 1) \left. \right] \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \\
&+ \left[(78\Lambda^2 - 16) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^3 + (-168\Lambda^2 + 24) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 + 90\Lambda^2 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) \right] \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)^2 \\
&- \frac{54}{L^2 \kappa_i^2 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{7/3} \left. \right\} \bar{u}^2 \\
&+ \frac{72 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)}{L^2 (Re) \kappa_i^2} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{1/3} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 2 \right) \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} \left. \right\} \tag{C.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_6 &= F_2 \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + \left[F_1 \frac{d\bar{R}}{dx} + F_2 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \right] \frac{d\bar{u}}{dx} \\
&\quad + \left[F_1 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \frac{d\bar{R}}{dx} + F_2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + F_3 \right] \bar{u} \\
&= -\frac{L^2 \kappa_i^2}{18 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{4/3}} \left\{ \left[(9\Lambda^2 - 3) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 + (-18\Lambda^2 + 12) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 9(\Lambda^2 - 1) \right] \left[\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + \bar{u} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \right] - \frac{18 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{4/3} \bar{u}}{L^2 \kappa_i^2 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)} \right. \\
&\quad \left. + \left[(6\Lambda^2 - 2) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 - 6\Lambda^2 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) \right] \left\{ \frac{1}{\bar{u}} \left(\frac{d\bar{u}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)^2 \bar{u} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \left[(21\Lambda^2 - 7) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 + (-30\Lambda^2 + 12) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) + 9(\Lambda^2 - 1) \right] \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \frac{d\bar{u}}{dx} \right\} \quad (\text{C.6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_7 &= F_1 \bar{u} \bar{R} \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + F_6 \bar{R} \left(\frac{d\bar{u}}{dx} \right)^2 + \left[F_7 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} - \frac{3F_3 F_5}{\bar{R}} \right] \bar{R} \frac{d\bar{u}}{dx} \\
&\quad + \left[F_1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u}^2 + F_6 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)^2 \bar{u}^2 - \frac{3F_3 F_5}{\bar{R}} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} + F_{10} \right] \bar{R} \\
&= -\frac{L^2 \kappa_i^2}{9 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{4/3}} \left\{ \left[(9\Lambda^2 - 3) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 + (-18\Lambda^2 + 3) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 9\Lambda^2 \right] \left[\bar{u} \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + \bar{u}^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[(6\Lambda^2 - 1) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 + (-15\Lambda^2 + 3) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) + 9\Lambda^2 \right] \left\{ \left(\frac{d\bar{u}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)^2 \bar{u}^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \left[(21\Lambda^2 - 5) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 + (-48\Lambda^2 + 9) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) + 27\Lambda^2 \right] \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{36}{L^2 \kappa_i^2} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_0} - 1 \right)^{1/3} \right\} \frac{d\bar{u}}{dx} - \frac{36 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{1/3}}{L^2 (Re) \kappa_i^2} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} \right. \\
&\quad \left. - \frac{9S_0}{L^2 \kappa_i^3} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right) + \frac{27k p_{gi}}{L^2 \kappa_i^{3k+2}} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{\frac{4}{3}-k} \right\} \quad (\text{C.7})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_8 &= -F_5 \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + \left[\frac{3F_3 F_5}{\bar{R}} \frac{d\bar{R}}{dx} - F_5 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \right] \frac{d\bar{u}}{dx} \\
&\quad + \left[\frac{3F_3 F_5}{\bar{R}} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \frac{d\bar{R}}{dx} - F_5 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \right] \bar{u} + \left(-2F_{10} \frac{d\bar{R}}{dx} - 2 \frac{\partial p_v}{\partial x} \right) \\
&= \frac{4 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)}{3(Re) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^2} \left\{ \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right) \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \frac{1}{\bar{u}} \left(\frac{d\bar{u}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 3 \right) \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \frac{d\bar{u}}{dx} \right. \\
&\quad + \left[-\frac{S_0(Re)}{2\kappa_i} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{2/3} + \frac{3kp_{gi}(Re)}{2 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{k-1} \kappa_i^{3k}} \right] \left[\frac{d\bar{u}}{dx} + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} \right] \frac{1}{\bar{u}} \\
&\quad \left. + \left[\left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) - \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)^2 \right] \bar{u} - \frac{3(Re)}{2 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^2 \frac{\partial p_v}{\partial x} \right\} \quad (\text{C.8})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_9 &= -f_2 \bar{u} \frac{d^3 \bar{u}}{dx^3} + \left\{ (F_1 - f_1) \bar{u} \frac{d\bar{R}}{dx} - f_4 \left[\frac{d\bar{u}}{dx} + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} \right] - f_5 \right\} \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} \\
&\quad + \left[(F_6 - f_6) \frac{d\bar{R}}{dx} - f_4 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \right] \left(\frac{d\bar{u}}{dx} \right)^2 \\
&\quad + \left[(F_7 - f_7) \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} + \frac{3}{\bar{R}} [F_3 f_5 + F_5 f_3] \right] \frac{d\bar{R}}{dx} \frac{d\bar{u}}{dx} \\
&\quad + \left\{ -f_8 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} - f_9 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)^2 \bar{u} - f_5 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) - f_3 \bar{u} \right\} \frac{d\bar{u}}{dx} \\
&\quad + \left\{ (F_6 - f_6) \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)^2 \bar{u}^2 + (F_1 - f_1) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{\bar{R}} [F_3 f_5 + F_5 f_3] \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} + (F_{10} - f_{10}) \right\} \frac{d\bar{R}}{dx} \\
&\quad + \left[-f_2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u}^2 - f_9 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u}^2 - f_3 \varphi C_w \bar{u}^2 \right. \\
&\quad \left. - f_5 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{L^2 \kappa_i^2}{27 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)^{7/3}} \left\{ \left[(27\Lambda^2 - 9) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^3 + (-81\Lambda^2 + 18) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (81\Lambda^2 - 9) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right) - 27\Lambda^2 \right] \bar{u} \frac{d^3 \bar{u}}{dx^3} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \left[(81\Lambda^2 - 21) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^3 + (-243\Lambda^2 + 57) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^2 + (243\Lambda^2 - 36) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 81\Lambda^2 \right] \left[\frac{d\bar{u}}{dx} + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx}\right) \bar{u} \right] - \frac{108}{L^2(Re)\kappa_i^2} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)^{4/3} \right\} \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} \\
&\quad + \left[(12\Lambda^2 - 2) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^3 + (-21\Lambda^2 + 3) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^2 + 9(\Lambda^2 - 1) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right) \right] \frac{1}{\bar{u}} \left(\frac{d\bar{u}}{dx}\right)^3 \\
&\quad + \left\{ \left[(117\Lambda^2 - 27) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^3 + (-306\Lambda^2 + 66) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^2 + (270\Lambda^2 - 63) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 81\Lambda^2 \right] \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx}\right) + \frac{108 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)}{L^2(Re)\kappa_i^2 \bar{u}} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)^{1/3} \right\} \left(\frac{d\bar{u}}{dx}\right)^2 \\
&\quad + \left\{ \left[(135\Lambda^2 - 39) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^3 + (-405\Lambda^2 + 93) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (405\Lambda^2 - 54) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right) - 135\Lambda^2 \right] \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx}\right) \bar{u} \right. \\
&\quad \left. + \left[(90\Lambda^2 - 18) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^3 + (-225\Lambda^2 + 48) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (189\Lambda^2 - 54) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right) - 54\Lambda^2 \right] \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx}\right)^2 \bar{u} \right. \\
&\quad \left. + \frac{108 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx}\right)}{L^2(Re)\kappa_i^2} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} + 1\right) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)^{1/3} + \frac{81\bar{u}}{L^2\kappa_i^2 \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)^2} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)^{10/3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{9S_0}{L^2\kappa_i^3 \bar{u}} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right) - \frac{81k^2 p_{gi} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i}\right)}{L^2\kappa_i^{3k+2} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1\right)^{k-\frac{4}{3}} \bar{u}} \right\} \frac{d\bar{u}}{dx}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \left[(27\Lambda^2 - 9) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^3 + (-81\Lambda^2 + 18) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 \right. \right. \\
& + (81\Lambda^2 - 9) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) - 27\Lambda^2 \left. \right] \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \\
& + \left[(54\Lambda^2 - 12) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^3 + (-162\Lambda^2 + 39) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 + (162\Lambda^2 - 27) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) \right. \\
& \left. - 54\Lambda^2 \right] \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \\
& + \left[(12\Lambda^2 - 2) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^3 + (-21\Lambda^2 + 3) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)^2 + 9(\Lambda^2 - 1) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) \right] \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)^3 \left. \right\} \bar{u}^2 \\
& + \left\{ - \frac{108}{L^2(Re)\kappa_i^2} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{4/3} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \right. \\
& \left. + \frac{108}{L^2(Re)\kappa_i^2} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{1/3} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)^2 \right\} \bar{u} \\
& + \left\{ \frac{9S_0}{L^2\kappa_i^3} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right) \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right) - \frac{81k^2 p_{gi} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} \right)}{L^2\kappa_i^{3k+2} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{k-\frac{4}{3}}} \right\} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \\
& + \frac{81\lambda_i^2}{L^2\kappa_i^2 A^3} \left(\frac{\bar{u}A}{\lambda_i} - 1 \right)^{10/3} C_w \left. \right\} \tag{C.9}
\end{aligned}$$

EK D: (3.24) Denklemdeki ε_j ; $j = 0, 1, \dots, 4$ Katsayıları

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 = & L_R^2 L_I N_I^2 - 2L_R L_I^2 N_R N_I + L_I^3 N_R^2 + L_R L_I M_I^2 N_R - L_R L_I M_R M_I N_I \\ & + L_I^2 M_R^2 N_I - L_I^2 M_R M_I N_R\end{aligned}\quad \text{(D.1)}$$

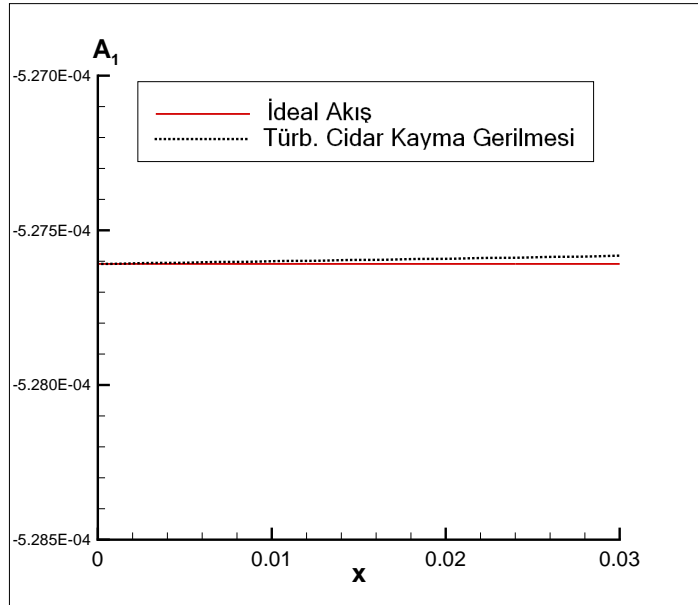
$$\begin{aligned}\varepsilon_1 = & 4L_R^2 L_I M_I N_R - 4L_R L_I^2 M_R N_R - 4L_I^3 M_R N_I + 4L_R L_I^2 M_I N_I + L_I^2 M_R M_I^2 \\ & - L_R L_I M_R^2 M_I + L_I^2 M_R^3 - L_R L_I M_I^3\end{aligned}\quad \text{(D.2)}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 = & 8L_R L_I^2 M_R M_I - 5L_R^2 L_I M_I^2 + 4L_R^3 L_I N_R + 4L_I^4 N_I - L_I^3 M_I^2 - L_R^2 L_I M_R^2 \\ & + 4L_R L_I^3 N_R + 4L_R^2 L_I^2 N_I - 5L_I^3 M_R^2\end{aligned}\quad \text{(D.3)}$$

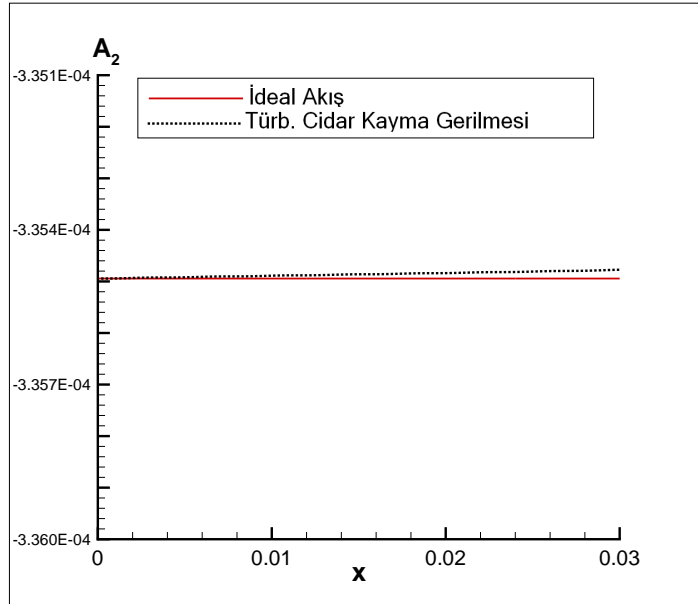
$$\varepsilon_3 = 8L_I(L_R^2 + L_I^2)[L_I M_R - L_R M_I]\quad \text{(D.4)}$$

$$\varepsilon_4 = -4L_I(L_R^2 + L_I^2)^2\quad \text{(D.5)}$$

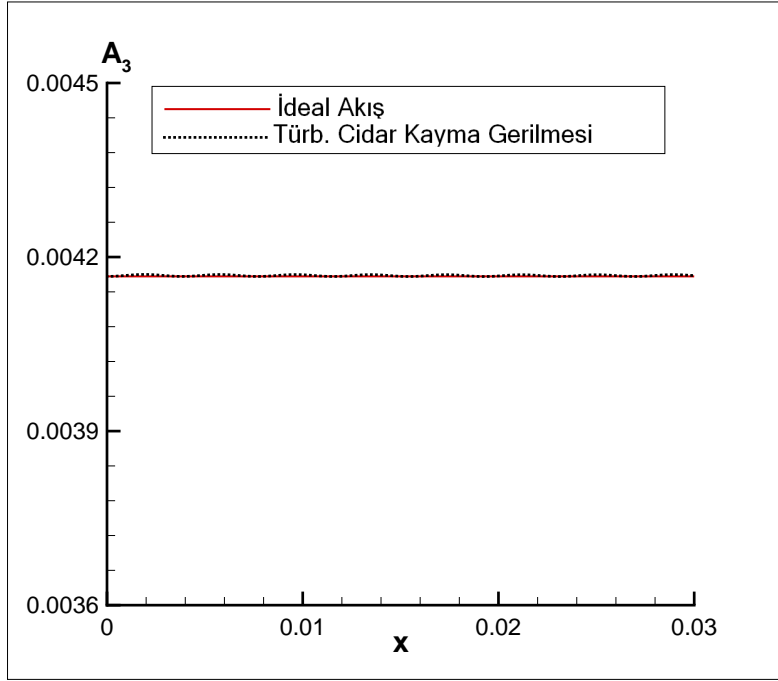
EK E: (3.9)-(3.10) Denklemlerindeki A_j ; $j = 1, \dots, 9$ ve C_j ; $j = 1, \dots, 8$ Katsayılarının Lüle Giriş Bölgesindeki Değişimleri



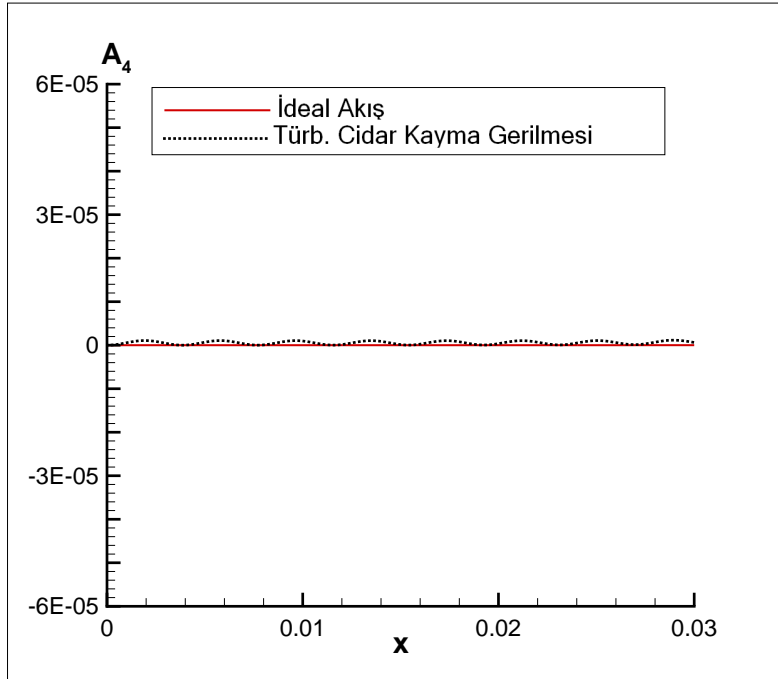
Şekil E.1: Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki A_1 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.



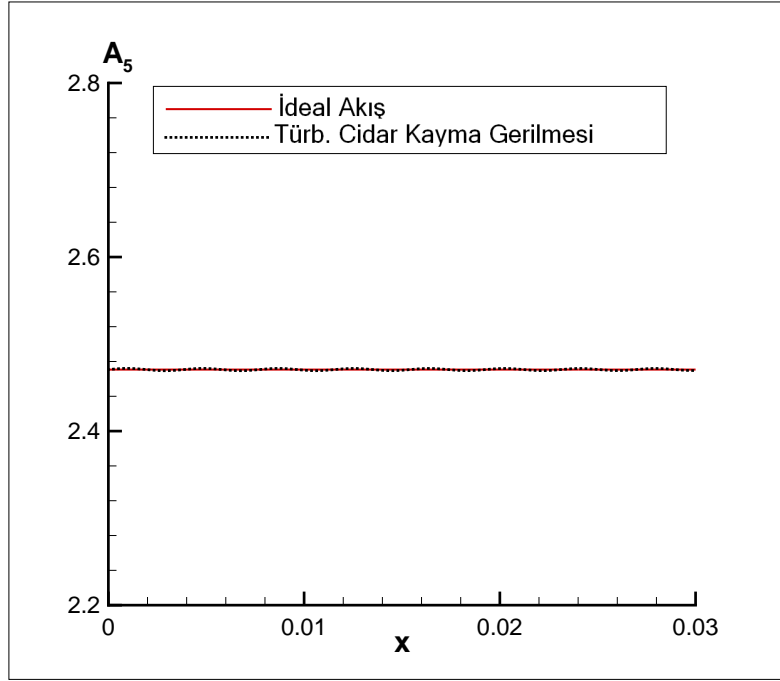
Şekil E.2: Kavitasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki A_2 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.



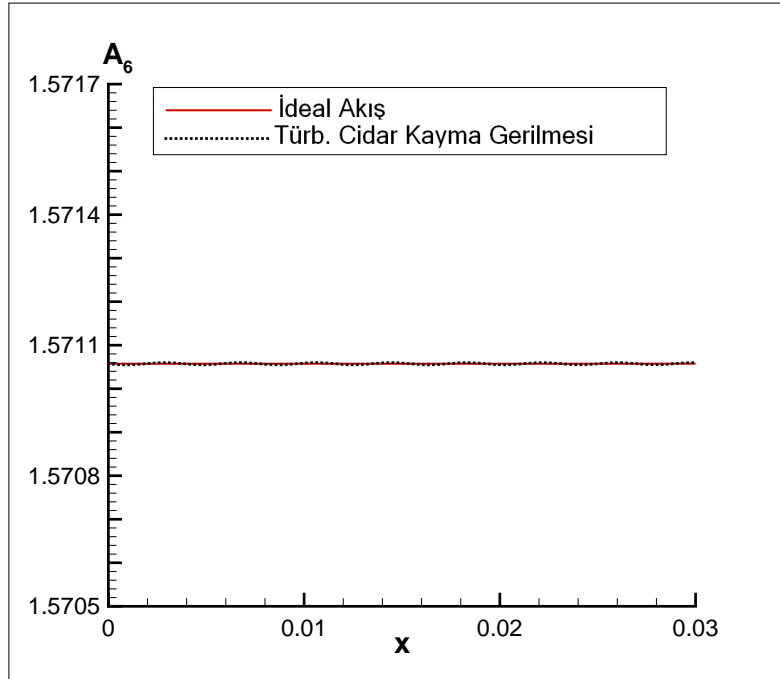
Şekil E.3: Kaviteasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki A_3 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.



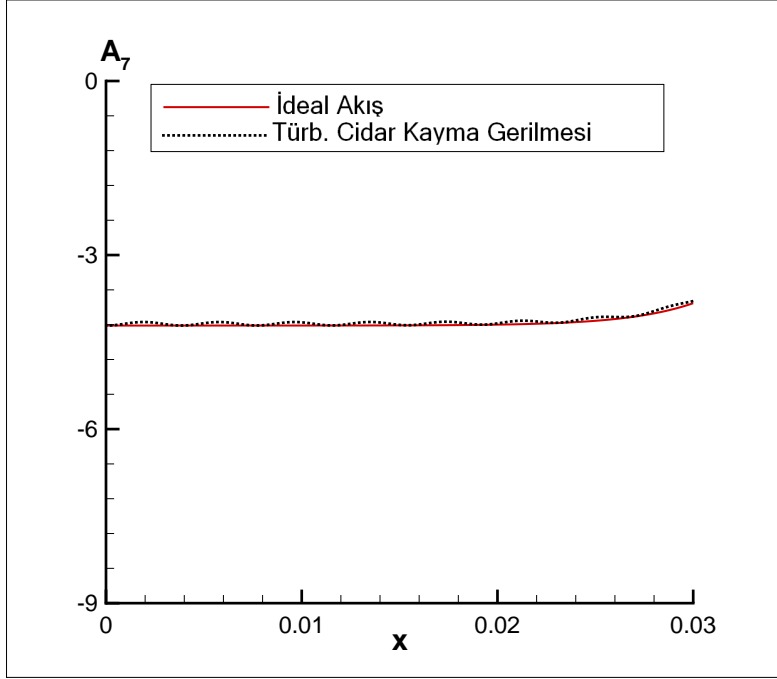
Şekil E.4: Kaviteasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki A_4 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.



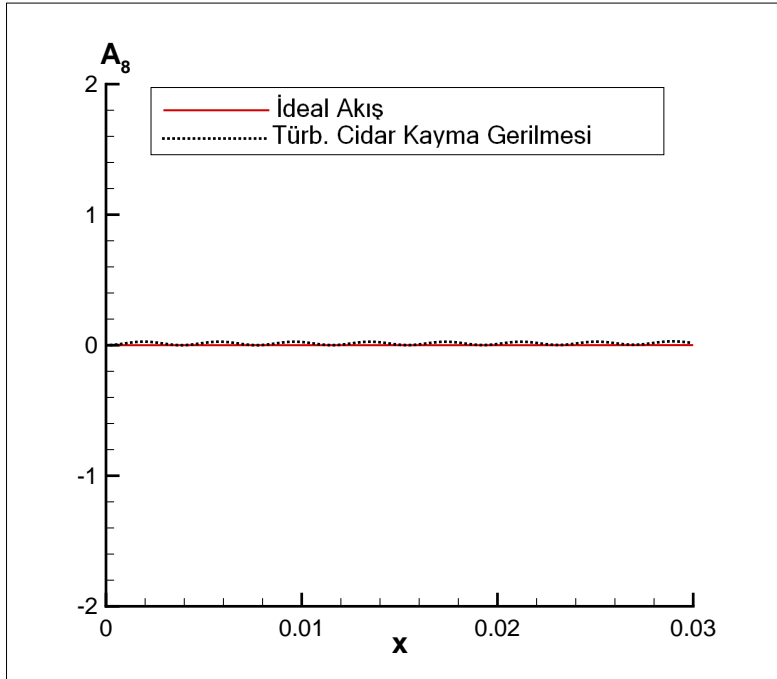
Şekil E.5: Kaviteasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki A_5 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.



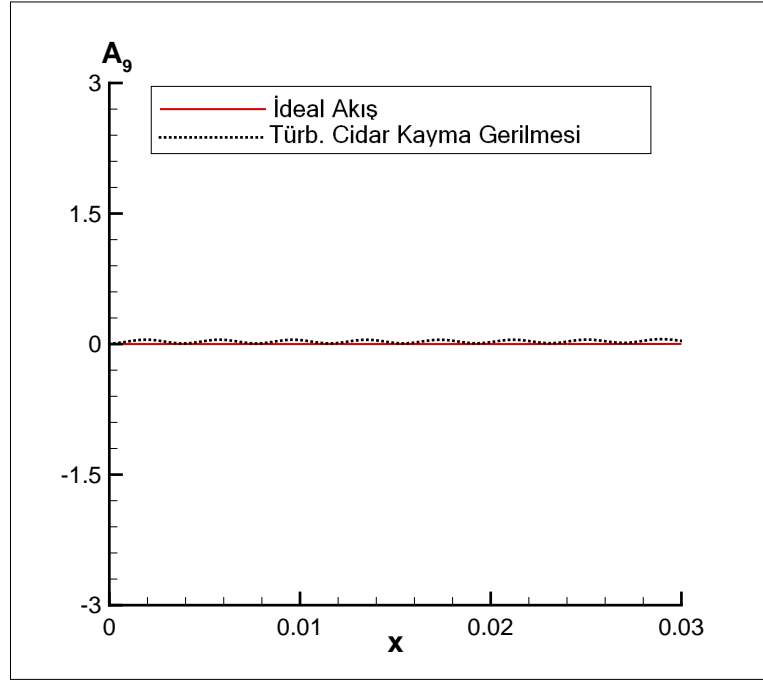
Şekil E.6: Kaviteasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki A_6 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.



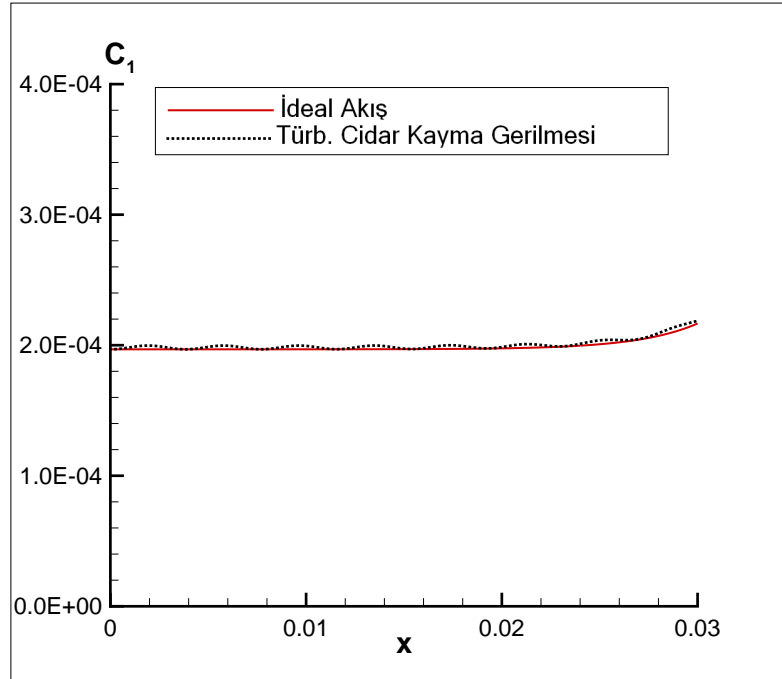
Şekil E.7: Kaviteasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki A_7 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.



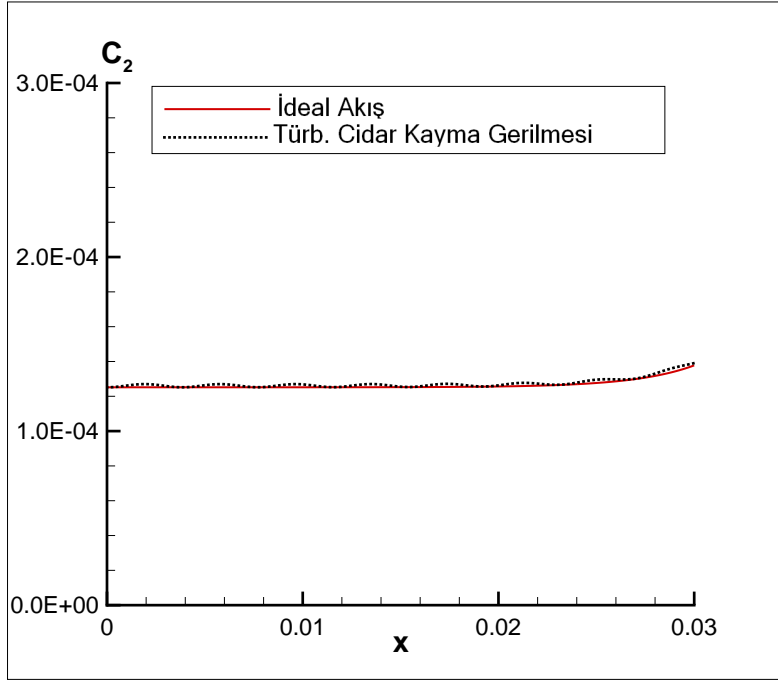
Şekil E.8: Kaviteasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki A_8 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.



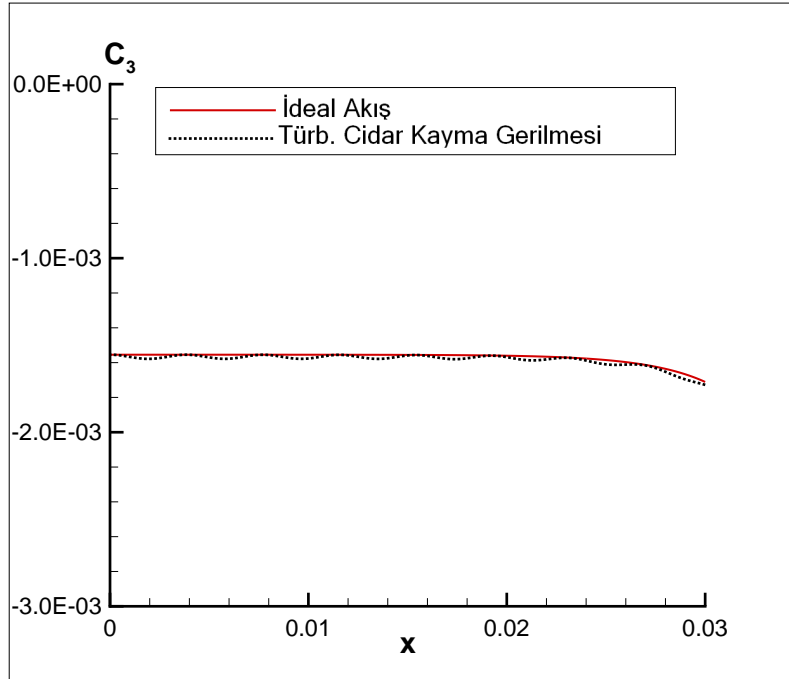
Şekil E.9: Kaviteasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki A_9 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.



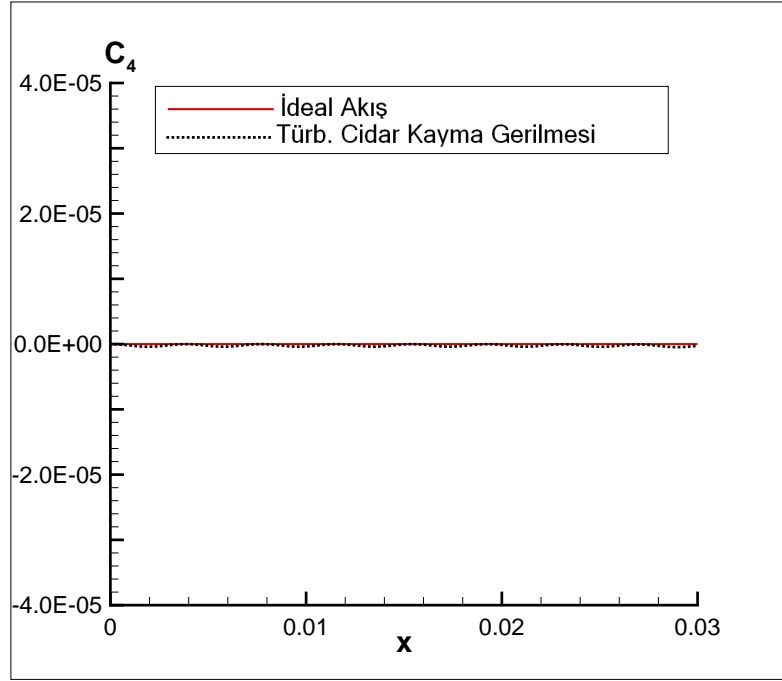
Şekil E.10: Kaviteasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki C_1 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.



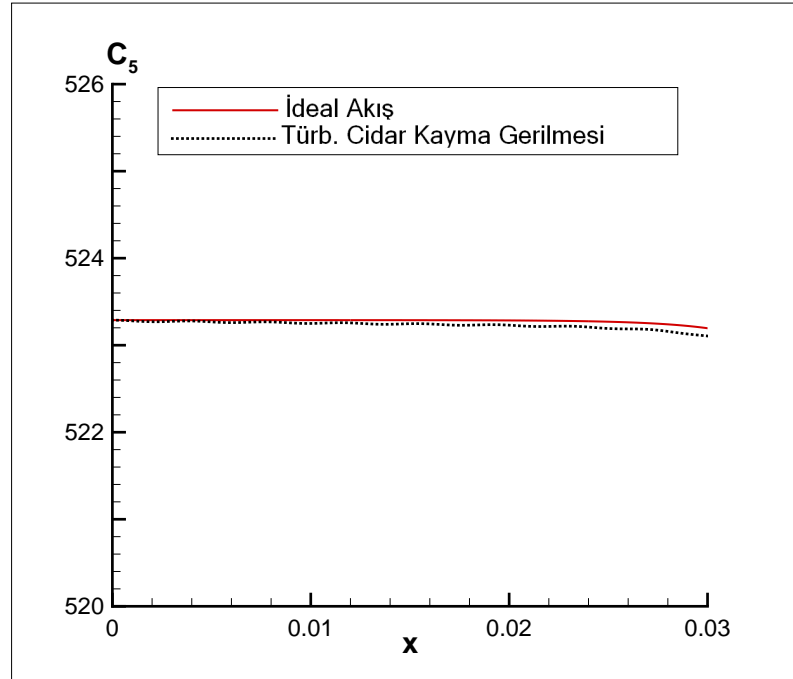
Şekil E.11: Kaviteasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki C_2 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.



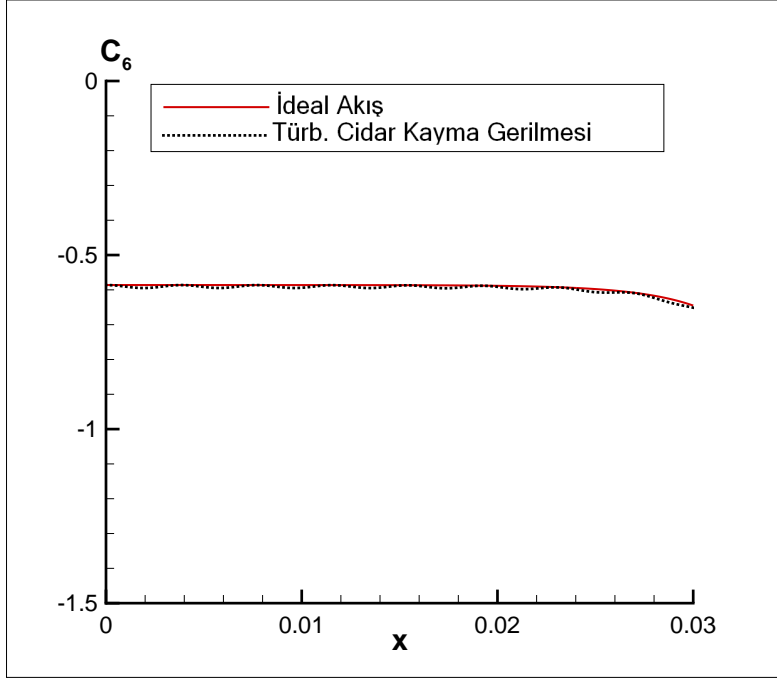
Şekil E.12: Kaviteasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki C_3 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.



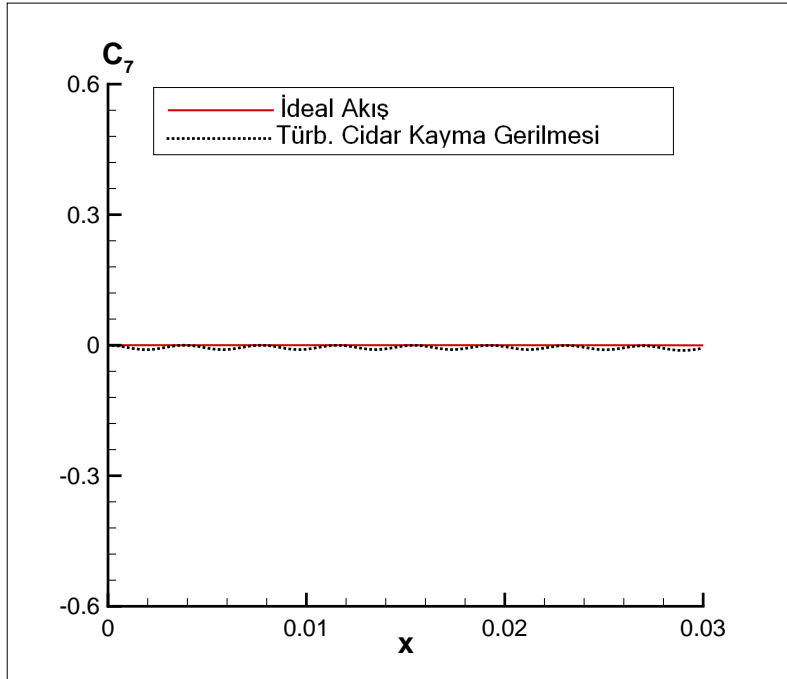
Şekil E.13: Kaviteasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki C_4 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.



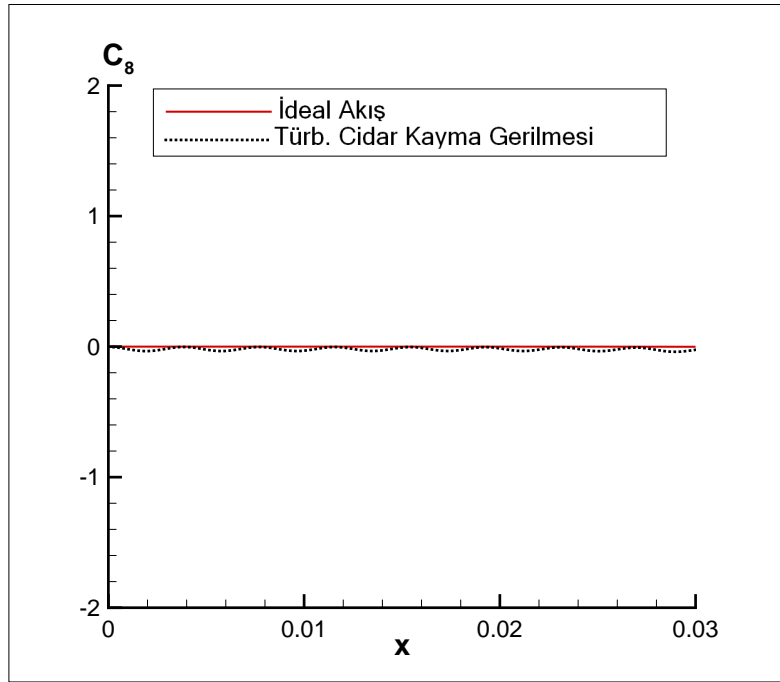
Şekil E.14: Kaviteasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki C_5 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.



Şekil E.15: Kaviteasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki C_6 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.



Şekil E.16: Kaviteasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki C_7 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.



Şekil E.17: Kaviteasyon katsayısı $\sigma_i = 0.79$ ve Şekil 3.2'deki koşullar altında (3.9)-(3.10) denklem sistemindeki C_8 katsayısının lüle giriş bölgesindeki değişimi.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : Şenay (Yaman) Pasinlioğlu

Doğum Yeri ve Tarihi : Diyarbakır, 08-01-1975

Adres : Başakşehir Mah. 2. Etap, E-10 Blok, D:14 Başakşehir/İSTANBUL

Lisans Üniversite : 1992-1996 Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Üniversite : 1997-2000 Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü

Yayın Listesi :

- Tiryaki, A. and **Yaman, Ş.**, 2001. Asymptotic behaviour of a class of nonlinear functional differential equations of third order, *Applied Mathematics Letters*, **14**, 327-332.
- Tiryaki, A. and **Pasinlioğlu (Yaman), Ş.**, 2001. Oscillatory behaviour of a class of nonlinear differential equations of third order, *Acta Mathematica Scientia*, **21**, 21B(2): 182-188.
- **Pasinlioğlu, Ş.**, Delale, C. F. and Schnerr, G. H., 2009. On the Temporal stability of quasi-one-dimensional steady-state bubbly cavitating nozzle flow solutions, *IMA Journal of Applied Mathematics*, **74**, 230-249, **doi:10.1093/imamat/hxn036**.

Uluslararası Konferans Bildirileri :

- Delale, C. F. and **Pasinlioğlu, Ş.**, 2005. Stability of steady-state solutions of quasi-one-dimensional bubbly cavitating nozzle flows, *Workshop at the Lorentz Center & Euromech Colloquium 465 on "Hydrodynamics of Bubbly Flows"*, Leiden, The Netherlands, June 6-16, p.47.
- Delale, C. F., Schnerr, G. H. and **Pasinlioğlu, Ş.**, 2006. Model evolution equations for unsteady cavitating nozzle flows and their applications, *VI. International Symposium on Cavitation CAV2006*, Wageningen, The Netherlands, September 11-15, paper no:112. (CD Rom, ed. G. Kuiper).

- Delale, C. F., Schnerr, G. H. and **Pasinlioğlu, Ő.**, 2007. On the temporal stability of steady-state quasi-one-dimensional bubbly cavitating nozzle flow solutions, *6th International Conference on Multiphase Flow, ICMF 2007*, Leipzig, Germany, July 9-13, paper no:S7-Tue-D-28 (CD Rom, ed. M. Sommerfeld).

Ulusal Konferans Özetleri :

- **Pasinlioğlu, Ő.** and Delale, C. F., 2006. Temporal stability of quasi-one-dimensional steady-state bubbly cavitating nozzle flows, *X. Ulusal Sıvıhal Fiziği Sempozyumu*, İstanbul, 28 Eylül-1 Ekim, Bildiri Kitapçığı, s.19.
- **Pasinlioğlu, Ő.** and Delale, C. F., 2008. Solitons in bubbly liquids, *XII. Ulusal Sıvıhal Fiziği Sempozyumu*, İstanbul, 31 Ekim-2 Kasım, Bildiri Kitapçığı, s.7.