İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU GENELLEŞTİRİLMİŞ 3-REKÜRAN RİEMANN UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kaan ESİN

Anabilim Dalı : **Matematik Mühendisliği**

Programı : **Matematik**

HAZİRAN 2009

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU GENELLEŞTİRİLMİŞ 3-REKÜRAN RİEMANN UZAYLARI

Yüksek Lisans Tezi

Kaan Esin
509061009

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih	:	**4 Mayıs 2009**
Tezin Savunulduğu Tarih	:	**2 Haziran 2009**

Danışmanı	:	**Doç. Dr. Sezgin Altay Demirbağ (İTÜ)**
Diğer Jüri Üyeleri	:	**Doç. Dr. Füsun Özen Zengin (İTÜ)**
		Prof. Dr. Aynur Uysal (Doğuş Üniv.)

HAZİRAN 2009

ÖNSÖZ

Tezin her aşamasında benden yardımlarını, bilgi ve büyük desteğini esirgemeyen değerli hocam Doç.Dr. Sezgin Altay Demirbağ'a ve tezin yazımında büyük katkısı ve yardımı olan arkadaşım Araş.Gör. Sibel Kılıçarslan Cansu'ya teşekkür ederim. Desteklerini her an yanımda hissettiğim aileme teşekkür ve saygılarımı sunuyorum.

Haziran 2009 Kaan Esin

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU GENELLEŞTİRİLMİŞ 3-REKÜRAN RİEMANN UZAYLARI

ÖZET

Literatürde, semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann uzayları bir çok yazar tarafından çalışılmıştır.

Bu çalışmada, semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann uzayları incelenmiştir. Bu uzayda, lineer konneksiyon tanımı verilip, uzayın eğrilik tensörü elde edilmiştir. Semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann uzayının hangi koşullar altında özel uzaylara dönüşeceği teoremlerle ifade ve ispat edilmiştir.

Çalışmanın birinci bölümünde, Riemann uzayına ait temel kavramlar ele alınmıştır.

M^n, n boyutlu diferansiyellenebilen g Riemann metriğine sahip bir manifold olsun ve ∇ Riemann konneksiyonu ∇^* da herhangi bir lineer konneksiyonu göstersin. M^n üzerinde herhangi bir π_j vektör bileşeni için ∇^* konneksiyonunun burulma tensörü

$$T^i_{jk} = \pi_k \delta^i_j - \pi_j \delta^i_k \qquad \mathbf{(1)}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu konneksiyona semi-simetrik konneksiyon denir. Eğer ∇^* konneksiyonu için

$$\nabla^* g_{ij} = 0 \qquad \mathbf{(2)}$$

koşulu sağlanıyorsa, ∇^* konneksiyonuna metrik konneksiyon denir. $\left\{ {h \atop ij} \right\}$, ∇ Riemann konneksiyonunun katsayıları ve Γ^h_{ji} 'ler de ∇^* afin konneksiyonunun katsayıları olsun. Eğer ∇^* konneksiyonuna ait katsayılar

$$\Gamma^h_{ji} = \left\{ {h \atop ji} \right\} + U^h_{ji} \qquad \mathbf{(3)}$$

şeklinde ele alınırsa, ∇^* konneksiyonunun burulma tensörü

$$T^h_{ki} = U^h_{ki} - U^h_{ik} \qquad \mathbf{(4)}$$

olarak elde edilir.

∇^* metrik konneksiyon olduğundan π_i, 1-form olmak üzere, (**1**) ile tanımlı burulma tensörüne sahip ∇^* konneksiyonuna semi-simetrik metrik konneksiyon denir.

Bu konneksiyonun katsayıları,

$$\Gamma_{ji}^{h} = \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} + \delta_j^h \pi_i - g_{ji} \pi^h \tag{5}$$

şeklindedir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, (**5**) numaralı bağıntı yardımıyla, semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann uzayının eğrilik tensörü,

$$R_{ijkl}^{*} = R_{ijkl} - \alpha_{jk} g_{il} + \alpha_{ik} g_{jl} - \alpha_{il} g_{jk} + \alpha_{jl} g_{ik} \tag{6}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada, R_{hijk}, Levi-Civita konneksiyonuna göre bu uzayın eğrilik tensörünü göstermektedir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak reküran burulma tensörüne sahip semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann uzayının hangi koşul altında konsörkılır vektör alanına sahip olacağı araştırılmıştır. Daha sonra, fiziksel uygulamalarda oldukça önemli yer tutan semi-simetrik metrik konneksiyonlu Einstein uzayının, aynı zamanda Levi-Civita konneksiyonuna göre de Einstein uzayı olması koşulları araştırılmıştır.

Çalışmanın son bölümünde ise, semi-simetrik metrik konneksiyonlu genelleştirilmiş 3-reküran Riemann uzayları ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Problemin doğası gereği yerel koordinatlar kullanılmıştır.

Boyutu üçten büyük, semi-simetrik metrik konneksiyonlu bir Riemann uzayının eğrilik tensörü Levi-Civita konneksiyonuna göre genelleştirilmiş 3-reküran ise bu taktirde bu uzayın konformal eğrilik tensörü de aynı konneksiyona göre genelleştirilmiş konformal 3-rekürandır.

Boyutu üçten büyük semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann uzayının eğrilik tensörü genelleştirilmiş 3-reküran ise, bu taktirde ya B_{nhm} tensörü n ve h indislerine göre simetriktir ya da bu uzayın R^{*} skaler eğriliği sıfırdır.

GENERALIZED 3-RECURRENT RIEMANNIAN SPACES WITH SEMI-SYMMETRIC METRIC CONNECTION

SUMMARY

In literature, spaces with semi-symmetric metric connection have been studied by many authors.

In this study, Riemannian spaces with the semi-symmetric metric connection is examined. The definition of the linear connection is given and then the curvature tensor of the space is found. It is proved that Riemannian spaces with semi-symmetric metric connection become special spaces under some conditions.

In the first section, basic concepts of the Riemannian spaces are given.

Supposing that M^n is an n-dimensional differentiable manifold having the Riemannian metric g, ∇ is the Riemannian connection and ∇^* is any linear connection with components Γ^h_{ji}, the torsion tensor of the connection ∇^* for any arbitrary components of vector π_j on M^n is defined as follows

$$T^i_{jk} = \pi_k \delta^i_j - \pi_j \delta^i_k \tag{1}$$

Now, this connection is called a semi-symmetric metric connection.
If ∇^* satisfies

$$\nabla^* g_{ij} = 0 \tag{2}$$

then ∇^* is called a metric connection. Let $\left\{ {h \atop ij} \right\}$ be the coefficients of ∇ Riemannian connection and Γ^h_{ji} be of ∇^* affine connection.

If the coefficients of ∇^* are in the form of

$$\Gamma^h_{ji} = \left\{ {h \atop ji} \right\} + U^h_{ji} \tag{3}$$

where $\left\{ {h \atop ij} \right\}$ is the coefficients of ∇ Riemannian connection then the torsion tensor T^h_{ji} of the connection ∇^* is given by

$$T^h_{ki} = U^h_{ki} - U^h_{ik} \tag{4}$$

The metric connection ∇^* having the torsion tensor defined as in (**1**) where π_j is a 1-form is called a semi-symmetric metric connection. The coefficients of this connection are in the form

$$\Gamma^h_{ji} = \begin{Bmatrix} h \\ ji \end{Bmatrix} + \delta^h_j \pi_i - g_{ji}\pi^h \qquad (\mathbf{5})$$

In the second section of this study, using the equation (**5**), the curvature tensor of the Riemannian space with a semi-symmetric metric connection is obtained as follows

$$R^*_{ijkl} = R_{ijkl} - \alpha_{jk}g_{il} + \alpha_{ik}g_{jl} - \alpha_{il}g_{jk} + \alpha_{jl}g_{ik} \qquad (\mathbf{6})$$

R_{hijk} is the curvature tensor of the space for the Levi-Civita connection here.

In the third section, it is firstly studied that Riemannian space with the semi-symmetric metric connection that has the recurrent torsion tensor has a concircular vector field under some conditions. It is examined that under which conditions the Einstein spaces with semi-symmetric metric connection which is very important in physical applications is transformed into Einstein space with Riemannian connection.

In the last part of the study, some theorems about generalized 3-recurrent Riemannian spaces with semi-symmetric metric connection are proved.

With the nature of the problem, local coordinates are taken.

If the curvature tensor of a Riemannian space with semi-symmetric metric connection, whose dimension is greater than three, is 3-recurrent with respect to Levi-Civita connection, then the conformal curvature tensor of this space is also generalized conformal 3-recurrent with respect to the same connection.

If the curvature tensor of Riemannian space with semi-symmetric metric connection is generalized 3-recurrent, then either B_{nhm} tensor is symmetric with respect to n and h indices or the scalar curvature R^* of this space is zero.

1. GİRİŞ

1.1. Tanımlar

1854 yılında Riemann, herhangi bir koordinat sistemindeki, koordinatları x^i ve $x^i + dx^i$ olan birbirine çok yakın iki nokta arasındaki sonsuz küçük ds mesafesini, g_{ij} katsayıları x^i koordinatlarının fonksiyonları olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlamıştır,

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n). \tag{1.1.1}$$

Burada g_{ij} katsayıları Riemann metriği olarak adlandırılır. Böyle bir metrik ile karakterize edilen uzaya Riemann uzayı ve (∇, g) Riemann metrikli geometriye de Riemann geometrisi denir [1,2]. Bu uzay ∇ Levi-Civita konneksiyonu ve g_{ij} metriği ile karakterize edilir.

Tanım 1.1.1. g_{ij} metrik tensörü ile verilmiş bir M^n Riemann uzayında bu metrik tensörle uyumlu, Γ^i_{jk} ve $\Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 'lar, sırasıyla, x ve x' koordinatlarının fonksiyonları olmak üzere,

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} + \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial x'^\beta} = \Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^i}{\partial x'^\gamma} \tag{1.1.2}$$

denklemini sağlayan bir ve yalnız bir konneksiyon vardır. Burada adı geçen Γ fonksiyonlarına konneksiyon katsayıları denir [2].

Özel olarak, $\left\{ {i \atop hk} \right\}$ konneksiyonu Riemann (Levi-Civita) konneksiyonu ise bu durumda

$$g^{ih} g_{jh} = \delta^i_j, \qquad \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\left\{ {i \atop jk} \right\} = g^{ih}[jk, h], \qquad [jk, h] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kh}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h}\right) \tag{1.1.3}$$

dir.

Burada $[jk, h]$ ifadesine 1.Cins, $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ ifadesine ise 2.Cins Christoffel sembolü denir. Görüldüğü gibi Christoffel sembolleri alt iki indise göre simetriktir. Bir Riemann uzayında g_{ij} metrik tensörü ile uyumlu bir ve yalnız bir ∇ Riemann konneksiyonu vardır [2].

Tanım 1.1.2 : M bir Hausdorff uzayı olsun. M nin her p komşuluğunun uygun bir U civarını, R^n in açık bir V alt cümlesine tasvir eden bir φ homeomorfizması varsa, M^n 'ye n-boyutlu topolojik manifold ve (U, φ) çiftine de p nin bir koordinat komşuluğu denir.

M^n, bir topolojik manifold olsun. A indis cümlesi, U_α da A yardımıyla belirlenmiş açık cümleler ailesi olmak üzere, M üzerinde bir $S = (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ kolleksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, bu kolleksiyona M üzerinde n-boyutlu diferansiyellenebilir bir yapı oluşturur denir.

(i) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset M$ için $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$
(ii) Herhangi α, β değerleri için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ve $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfizması için $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ ile $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ kümeleri $\mathbb{R}^n$ de açık olmak üzere, $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ diferansiyellenebilir bir tasvirdir.

$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ (i) ve (ii) koşullarına göre maksimaldir.
C^∞-manifold her mertebeden türevlenebilir manifolddur [3].

M^n, C^∞ sınıfından bir manifold olsun. M^n üzerinde ∇ ile gösterilen bir konneksiyon veya kovaryant türev, her C^∞ sınıfından X,Y vektör çiftini C^∞ sınıfından olan $\nabla_X Y$ vektör alanına taşıyan bir operatördür :

$$\begin{aligned} \nabla : TM \times TM &\to TM \\ (X, Y) &\to \nabla_X Y \end{aligned}$$

$\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $X, Y, Z \in TM$ için ∇ operatörü,

(i) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
(ii) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
(iii) $\nabla_{gX} Z = g \nabla_X Z$
(iv) $\nabla_X (gZ) = (Xg)Z + g \nabla_X Z$

şartlarını sağlıyorsa, ∇ konneksiyonuna afin konneksiyon denir [4]. $\nabla_X Y$, X üzerinde C^∞-lineer ve Y üzerinde $\mathbb{R}$-lineerdir.

M , C^∞-manifoldu üzerinde, $\forall p \in M$ noktasındaki teğet uzay T_pM ile gösterilirse, $X, Y, Z \in T_pM$ için,

$$
\begin{array}{rcl}
< \ , \ >: T_pM \times T_pM & \rightarrow & R \\
(X,Y) & \rightarrow & < X, Y >= g(X,Y)
\end{array}
$$

şeklinde C^∞-sınıfından bilineer, simetrik, pozitif tanımlı bir fonksiyon mevcut ise, $< \ , \ >$ fonksiyonuna Riemann metriği; M manifolduna Riemann manifoldu denir ve (M, g) ile gösterilir [5]. $< \ , \ >$ iç çarpımı aynı zamanda,

(v) $X < Y, Z >=< \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >$

(vi) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

şartlarını da sağlıyorsa, ∇ operatörüne Riemann konneksiyonu denir [4].

T, r. mertebeden bir tensör ve X, $X_i \in TM$ olsun. T tensörünün kovaryant türevi ∇T (r+1). mertebeden bir tensördür ve

$$
\begin{aligned}
(\nabla T)(X_1, X_2, ..., X_r; X) &= (\nabla T)(X_1, ..., X_r) \\
&= \nabla_X(T(X_1, ..., X_r)) - \sum_{i=1}^{r} T(X_1, ..., \nabla_X X_i, ..., X_r)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlıdır.

g Riemann metriğine sahip diferansiyellenebilir M manifoldunda, ∇ afin konneksiyonu ve X vektörü için

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = 0 \qquad \textbf{(1.1.4)}$$

oluyorsa, ∇ konneksiyonuna metrik konneksiyon denir.

M manifoldunda X, Y vektör alanı için

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \qquad \textbf{(1.1.5)}$$

ifadesine, ∇ afin konneksiyonunun burulma tensörü denir.

Lokal koordinatlarda bu denklem

$$T_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h - \Gamma_{ji}^h \qquad \textbf{(1.1.6)}$$

şeklindedir.

∇ afin konneksiyonunun burulma tensörü

$$T_{ij}^h = 0$$

denklemini sağlıyorsa, ∇ konneksiyonuna burulmasız bir konneksiyon denir. Levi-Civita konneksiyonu olarak bilinen Riemann konneksiyonu burulmasız bir konneksiyondur.

λ_i kovaryant vektörü, λ^i kontravaryant yani karşıt vektörü ve T_{ij}^h de bir tensör alanının bileşenleri olmak üzere, bu büyüklüklerin ∇ konneksiyonuna göre kovaryant türevleri sırasıyla [3,6],

$$\nabla_j \lambda^i = \frac{\partial \lambda^i}{\partial x^j} + \begin{Bmatrix} i \\ jh \end{Bmatrix} g_{hj} \lambda^h \qquad (\mathbf{1.1.7})$$

$$\nabla_j \lambda_i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j} - \begin{Bmatrix} h \\ ji \end{Bmatrix} g_{hj} \lambda_k \qquad (\mathbf{1.1.8})$$

$$\nabla_k T_{ji}^h = \frac{\partial T_{ji}^h}{\partial x^k} + \Gamma_{ka}^h T_{ji}^a - \Gamma_{kj}^a T_{ai}^h - \Gamma_{ki}^a T_{ja}^h \qquad (\mathbf{1.1.9})$$

şeklindedir.

Dolayısıyla (**1.1.4**) ve (**1.1.8**) den g_{ij} metrik tensörünün Levi-Civita konneksiyonuna göre kovaryant türevi

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \begin{Bmatrix} h \\ ki \end{Bmatrix} g_{hj} - \begin{Bmatrix} h \\ kj \end{Bmatrix} g_{hi} = 0 \qquad (\mathbf{1.1.10})$$

olarak elde edilir.

1.2. Riemann Eğrilik Tensörü

∇ Riemann konneksiyonu olmak üzere

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \qquad (\mathbf{1.2.1})$$

ifadesine uzayın eğrilik tensörü denir.

Bu durumda eğrilik tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar [6]:

(i) $R_{kji}^h = -R_{jki}^h$

(ii) $R_{kjih} = -R_{jkih} = -R_{kjhi} = R_{ihkj}$

(iii) $R_{kkih} = R_{kjhh} = 0$

(iv) $R_{ji} = R_{aji}^{\,a}$

(v) $R_{ji} = g^{ba} R_{bjia} = g^{ba} R_{jbai}$

Böylece (v)'den Ricci tensörünün simetrik olduğu görülür. Ricci tensörü yardımıyla Riemann uzayının skaler eğriliği $R = g^{ji}R_{ji}$ olarak tanımlanır. Ayrıca,

(vi) $R_{ijkl} = g_{hl}R^h_{ijk}$

(vii) $R^h_{ijk} + R^h_{jki} + R^h_{kji} = 0$ (I. Bianchi Özdeşliği)

Ayrıca, eğrilik tensörünün Levi-Civita konneksiyonuna göre kovaryant türevi göz önüne alınırsa $\nabla_l R_{kji}^{\ \ h} + \nabla_k R_{jli}^{\ \ h} + \nabla_j R_{lki}^{\ \ h} = 0$ II. Bianchi Özdeşliği sağlanır.

g_{ij} metrik tensörü ile verilen bir Riemann uzayının Riemann eğrilik tensörü

$$R_{ijk}^{\ \ h} = \partial_i \begin{Bmatrix} h \\ jk \end{Bmatrix} - \partial_j \begin{Bmatrix} h \\ ik \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} a \\ jk \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} h \\ ia \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} a \\ ik \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} h \\ ja \end{Bmatrix} \quad (\mathbf{1.2.2})$$

şeklindedir.

Eğer özel olarak $R_{ijkl} = 0$ ise, uzay düz uzay adını alır.

Tanım 1.2.1 : n boyutlu bir M^n Riemann manifoldunun, bir $p \in M^n$ noktası ve α, β vektörlerince belirlenmiş, π kesitindeki kesitsel eğriliği, lokal koordinatlarda

$$K(\pi) = K_p(\pi) = -\frac{R_{ijkl}\alpha^i\beta^j\alpha^k\beta^l}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})\alpha^i\beta^j\alpha^k\beta^l} \quad (\mathbf{1.2.3})$$

şeklindedir [1].

K_p, her $p \in M^n$ noktasında aynıysa Riemann manifolduna sabit eğrilikli manifold denir. Bu durumda, (**1.2.3**) denklemi aşağıdaki şekle dönüşür

$$R_{ijkl} = -K_0(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \quad (\mathbf{1.2.4})$$

Ricci eğriliği ve skaler eğrilik lokal koordinatlarda, sırasıyla

$$\begin{aligned} R_{ij} &= K(n-1)g_{ij} \\ R &= Kn(n-1) \end{aligned} \quad (\mathbf{1.2.5})$$

olarak bulunur.

Tanım 1.2.2 : n boyutlu, g_{ij} Riemann metriğiyle belirlenmiş bir C^∞ sınıfından M^n manifoldunun Ricci tensörü için

$$R_{ij} = \lambda g_{ij} \quad (\mathbf{1.2.6})$$

denklemini sağlayan bir λ fonksiyonu varsa, M^n Einstein manifoldu adını alır.

Buradan

$$\begin{aligned} R &= g^{ij}R_{ij} = n\lambda \\ R_{ij} &= \frac{1}{n}Rg_{ij} \end{aligned} \qquad (\mathbf{1.2.7})$$

denklemleri bulunur [1].

1.3. Konformal Eğrilik Tensörü

M^n $(n > 3)$ manifoldunun Weyl konformal eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} C^h_{kji} &= R^h_{kji} - \frac{1}{n-2}\left(\delta^h_k R_{ji} - \delta^h_j R_{ki} + R^h_k g_{ji} - R^h_j g_{ki}\right) \\ &+ \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(\delta^h_k g_{ji} - \delta^h_j g_{ki}\right) \end{aligned} \qquad (\mathbf{1.3.1})$$

şeklinde tanımlanmıştır [5,7]. Konformal eğrilik tensörü

$$\lambda_{ji} = \frac{-R_{ji}}{n-2} + \frac{Rg_{ji}}{2(n-1)(n-2)} \qquad (\mathbf{1.3.2})$$

eşitliği ile

$$\begin{aligned} C_{ijk}^{\ \ \ h} &= R_{ijk}^{\ \ \ h} + \delta^h_i \lambda_{jk} - \delta^h_j \lambda_{ik} + \lambda^h_i g_{jk} - \lambda^h_j g_{ik} \\ C_{ijkl} &= R_{ijkl} + \lambda_{jk} g_{il} - \lambda_{ik} g_{jl} + g_{jk}\lambda_{il} - g_{ik}\lambda_{jl} \end{aligned} \qquad (\mathbf{1.3.3})$$

şekline dönüşür. Burada, $\lambda_{ji} g^{ih} = \lambda^h_j$ dır.

Ayrıca, konformal eğrilik tensörünün özellikleri aşağıdaki şekildedir:

(i) $C_{kjil} = -C_{jkil} = C_{ilkj} = -C_{kjli}$

(ii) $C_{kjil} + C_{jikl} + C_{ikjl} = 0$

(iii) $C_{kjil} g^{kl} = C_{mnpr} g^{mp} = 0$

(iv) $C^h_{jlh} = 0$

(v) $C^h_{kji} = -C^h_{jki}$

Her 3 boyutlu Riemann uzayının konformal eğrilik tensörü sıfıra eşittir [8].

1.4. Projektif ve Konsörkılır Eğrilik Tensörleri

M^n bir Riemann manifoldu olsun. Bu manifold üzerinde projektif eğrilik tensörü,

$$P_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{n-1}(R_{jk}g_{il} - R_{ik}g_{jl}) \tag{1.4.1}$$

şeklinde tanımlanır [6].

Konsörkılır eğrilik tensörü

$$Z_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{R}{n(n-1)}(g_{jk}g_{il} - g_{ik}g_{jl}) \tag{1.4.2}$$

denklemiyle tanımlanmıştır [9].

1.5. Genelleştirilmiş n-Reküran Uzaylar

Tanım 1.5.1 : R_{ijkl} eğrilik tensörü için

$$\begin{aligned}\nabla_{m_s}...\nabla_{m_2}\nabla_{m_1}R_{ijkl} &= \Omega_{m_1m_2...m_s}R_{ijkl} \\ &+\Omega_{m_2...m_s}\nabla_{m_1}R_{ijkl} + \Omega_{m_3...m_s}\nabla_{m_2}\nabla_{m_1}R_{ijkl} + ... \\ &+\Omega_{m_s}\nabla_{m_{s-1}}...\nabla_{m_1}R_{ijkl}\end{aligned} \tag{1.5.1}$$

eşitliği sağlanıyorsa, bu tür uzaylara genelleştirilmiş n-reküran uzay denir [10]. Burada, $\Omega_{m_1m_2...m_s} \neq 0$ uzayın reküran vektörüdür.

Özel olarak, $\nabla_h R_{ijkl} = 0$ ise uzaya, paralel eğrilik tensörüne sahiptir denir.

Tanım 1.5.2 : M^n, düz olmayan Riemann uzayının eğrilik tensörü R_{ijkl}

$$\nabla_h R^i_{jkl} = \lambda_h R^i_{jkl} \tag{1.5.2}$$

ifadesini sağlarsa uzaya reküran uzay denir [11]. Burada $\lambda_h \neq 0$ uzayın reküran kovaryant vektörüdür.

Eğer eğrilik tensörü,

$$\nabla_m \nabla_h R^i_{jkl} = B_{hm} R^i_{jkl} \tag{1.5.3}$$

denklemini sağlarsa M^n uzayına 2-reküran uzay denir. Burada, $B_{hm}(\neq 0)$ uzayın reküran tensörü olmaktadır.

Genelleştirilmiş n-reküran uzayla ilgili (**1.5.1**) denkleminde $s = 2$ olması durumunda

$$\nabla_m \nabla_h R_{ijkl} = B_{hm} R_{ijkl} + \lambda_m \nabla_h R_{ijkl} \qquad (\mathbf{1.5.4})$$

sağlanırsa, uzay genelleştirilmiş 2-reküran uzay adını alır [12,13].
Bu bağıntıda, B_{hm} ve $\lambda_m (\neq 0)$, sırasıyla, reküran tensörü ve uzayın kovaryant vektörüdür.
Eğer eğrilik tensörü R_{ijkl}

$$\nabla_m \nabla_h \nabla_n R_{ijkl} = \lambda_m \nabla_h \nabla_n R_{ijkl} + B_{nhm} R_{ijkl} \qquad (\mathbf{1.5.5})$$

denklemini sağlarsa, M^n uzayına genelleştirilmiş 3-reküran uzay adı verilir. Burada, $B_{nhm} \neq 0$ ve $\lambda_m \neq 0$, sırasıyla, uzayın reküran tensörü ve reküran vektörüdür. Bu uzay aynı zamanda $G(^3K_n)$ ile gösterilir [14].

Burada önemli bir fark olarak genelleştirilmiş n-reküran uzayla ilgili (**1.5.1**) ifadesinde $s = 3$ olması halinde

$$\nabla_{m_3} \nabla_{m_2} \nabla_{m_1} R_{ijkl} = \Omega_{m_1 m_2 m_3} R_{ijkl} + \Omega_{m_2 m_3} \nabla_{m_1} R_{ijkl} + \Omega_{m_3} \nabla_{m_2} \nabla_{m_1} R_{ijkl}$$

olmaktadır. Bu durum (**1.5.5**) ifadesinden farklı olarak ayrıca incelenebilir.
Eğer

$$\nabla_m \nabla_h \nabla_n R_{jk} = \lambda_m \nabla_h \nabla_n R_{jk} + B_{nhm} R_{jk} \qquad (\mathbf{1.5.6})$$

denklemi sağlanıyorsa, bu uzaya genelleştirilmiş Ricci 3-reküran Riemann uzayı denir ve $G(^3R_n)$ ile gösterilir. (**1.5.6**) denkleminde $\lambda_m = 0$ alınırsa

$$\nabla_m \nabla_h \nabla_n R_{jk} = B_{nhm} R_{jk} \qquad (\mathbf{1.5.7})$$

elde edilir. Bu durumda uzay Ricci 3-reküran uzay adını alır ve (^3R_n) ile gösterilir.

2. SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU RİEMANN UZAYLARI

2.1. Semi-Simetrik Metrik Konneksiyonlu Riemann Uzayı

Tanım 2.1.1 : M^n, n boyutlu diferansiyellenebilen g Riemann metriğine sahip bir manifold olsun. ∇ , M^n üzerinde Levi-Civita konneksiyonunu, ∇^* da herhangi bir lineer konneksiyonu göstersin. M^n üzerinde herhangi bir π_j vektör bileşeni için ∇^* konneksiyonunun burulma tensörü

$$T^l_{ki} = \delta^l_k \pi_i - \delta^l_i \pi_k \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

şeklinde tanımlanırsa bu konneksiyona semi-simetrik konneksiyon denir [15].

Tanım 2.1.2 : M^n Riemann manifoldu üzerinde, katsayıları Γ^i_{jk} olan ∇^* semi-simetrik metrik konneksiyonu göz önüne alınsın. Eğer ∇^* konneksiyonu

$$\nabla^* g = 0 \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

koşulunu sağlıyorsa ∇^* konneksiyonuna metrik konneksiyon denir [15,16].

$\left\{ {i \atop jk} \right\}$, Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları, Γ^i_{jk} 'ler de semi-simetrik metrik konneksiyonun katsayıları olsun. Γ^i_{jk} katsayılarının simetrik kısmı Λ^i_{jk} ve antisimetrik kısmı da Ω^i_{jk} ile ifade edilirse, bu durumda :

$$\Lambda^i_{jk} = \Gamma^i_{(jk)} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj}\right) \qquad \textbf{(2.1.3)}$$

$$\Omega^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}\right) \qquad \textbf{(2.1.4)}$$

dir. Daha sonra (**2.1.3**) ve (**2.1.4**) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{jk} &= \Lambda^i_{jk} + \Omega^i_{jk} \\ \Gamma^i_{kj} &= \Lambda^i_{jk} - \Omega^i_{jk} \end{aligned} \qquad \textbf{(2.1.5)}$$

yazılabilir.

∇^* konneksiyonuna ait katsayılar en genel haliyle

$$\Gamma_{ij}^h = \begin{Bmatrix} h \\ ij \end{Bmatrix} + U_{ij}^h \quad (\mathbf{2.1.6})$$

şeklinde göz önüne alınsın.

$$U_{ki}^h g_{hj} + U_{kj}^h g_{hi} = 0 \quad (\mathbf{2.1.7})$$

bağıntısı elde edilir. U_{ij}^h tensörü için, (**2.1.4**) ve (**2.1.6**) denklemlerinden

$$U_{ij}^h - U_{ji}^h = 2\Omega_{ij}^h - \begin{Bmatrix} h \\ ij \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} h \\ ji \end{Bmatrix} = \Gamma_{ij}^h - \Gamma_{ji}^h = T_{ij}^h \quad (\mathbf{2.1.8})$$

şeklindeki T_{ij}^h burulma tensörünün ifadesi elde edilmiş olur.

Böylece (**2.1.8**) denklemi kullanılırsa

$$U_{ik}^h g_{hj} + U_{jk}^h g_{hi} + T_{ki}^h g_{hj} + T_{kj}^h g_{hi} = 0 \quad (\mathbf{2.1.9})$$

dir. Bu durumda (**2.1.7**) ile (**2.1.8**) denklemlerinden

$$(U_{ki}^h + U_{ik}^h) g_{hj} + (U_{ij}^h - U_{ji}^h) g_{hk} + (U_{kj}^h - U_{jk}^h) g_{hi} = 0 \quad (\mathbf{2.1.10})$$

bulunur. (**2.1.10**) denkleminden U_{ij}^h ve T_{ij}^h tensörleri arasında,

$$U_{ki}^h + U_{ik}^h = U_{ik}^h + T_{ki}^h + U_{ik}^h = 2U_{ik}^h + T_{ki}^h \quad (\mathbf{2.1.11})$$

bağıntısı elde edilir.

Dolayısıyla (**2.1.10**) ve (**2.1.11**) denklemlerinden

$$2U_{ik}^h g_{hj} + T_{ki}^h g_{hj} + T_{ij}^h g_{hk} + T_{kj}^h g_{hi} = 0 \quad (\mathbf{2.1.12})$$

bulunur. Daha sonra (**2.1.12**) bağıntısı g^{jl} ile çarpılırsa

$$2U_{ik}^l + T_{ki}^l + T_{ij}^h g_{hk} g^{jl} + T_{kj}^h g_{hi} g^{jl} = 0 \quad (\mathbf{2.1.13})$$

ifadesi elde edilir.

Böylece (**2.1.6**) ve (**2.1.13**) denklemlerinden Γ_{ki}^l konneksiyon katsayıları

$$\Gamma_{ki}^l = \begin{Bmatrix} l \\ ki \end{Bmatrix} - \frac{1}{2}\left(T_{ik}^l + T_{kj}^h g_{hi} g^{jl} + T_{ij}^h g_{hk} g^{jl}\right) \quad (\mathbf{2.1.14})$$

şeklinde bulunur.

Burada $U^l_{ki} = \delta^l_k \pi_i - g_{ki}\pi^l$ dir. Son olarak (**2.1.14**) denkleminde (**2.1.1**) yerine yazılırsa

$$\Gamma^l_{ki} = \left\{ {l \atop ki} \right\} + \delta^l_k \pi_i - \pi^l g_{ki} \tag{2.1.15}$$

bulunur [6].

2.2. Semi-Simetrik Metrik Konneksiyonlu Uzayın Eğrilik Tensörü

Semi-simetrik metrik konneksiyona sahip bir M^n Riemann uzayının bu konneksiyona göre eğrilik tensörü $R^{*\ h}_{ijk}$ ve Levi-Civita konneksiyonuna göre eğrilik tensörü $R_{ijk}^{\ \ \ h}$ ile gösterilsin. Bu uzayın eğrilik tensörü

$$R^{*\ h}_{ijk} = \partial_i \Gamma^h_{jk} - \partial_j \Gamma^h_{ik} + \Gamma^a_{jk}\Gamma^h_{ia} - \Gamma^a_{ik}\Gamma^h_{ja} \tag{2.2.1}$$

şeklindedir [6]. (**2.2.1**) ifadesindeki Γ^h_{jk} konneksiyon katsayıları yerine (**2.1.15**) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} R^{*\ h}_{ijk} \;\; = \;\; & \partial_i \left\{ {h \atop jk} \right\} - \partial_j \left\{ {h \atop ik} \right\} + \left\{ {a \atop jk} \right\}\left\{ {h \atop ai} \right\} - \left\{ {a \atop ik} \right\}\left\{ {h \atop aj} \right\} \\ & + \nabla_i \pi_k \delta^h_j - \nabla_i \pi^h g_{jk} - \nabla_j \pi_k \delta^h_i - \nabla_j \pi^h g_{ik} \\ & - \pi^h \Big(\left\{ {a \atop jk} \right\} g_{ai} - \left\{ {a \atop ik} \right\} g_{aj} \Big) \\ & - \pi^a \pi^h (g_{ik} g_{aj} - g_{jk} g_{ai}) \\ & + \pi_k (\pi_i \delta^h_j - \pi_j \delta^h_i) + \pi^h (g_{ik}\pi_j - g_{jk}\pi_i) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

şeklinde bulunur. Burada, $\nabla_j \pi_i = \partial_j(\pi_i) - \left\{ {h \atop ji} \right\} \pi_h$ dir. $(0,2)$ tipinde bir tensör olmak üzere, (**2.2.2**) ifadesinde α_{ki} yerine

$$\alpha_{ki} = \nabla_k \pi_i - \pi_i \pi_k + \frac{1}{2} g_{ki} \pi_t \pi^t = \nabla^*_k \pi_i - \frac{1}{2} g_{ki} \pi_t \pi^t \tag{2.2.3}$$

olarak alınırsa, semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzayın eğrilik tensörü

$$R^{*\ h}_{ijk} = R_{ijk}^{\ \ \ h} - \delta^h_i \alpha_{jk} + \delta^h_j \alpha_{ik} - \alpha_{il} g^{lh} g_{jk} + \alpha_{jl} g^{lh} g_{ik} \tag{2.2.4}$$

şeklinde bulunur.

Böylece (**2.2.4**) denkleminden aşağıdaki bağıntı elde edilir [15]

$$R^*_{ijkh} = R_{ijkh} - \alpha_{jk}g_{ih} + \alpha_{ik}g_{jh} - \alpha_{ih}g_{jk} + \alpha_{jh}g_{ik} \qquad (\mathbf{2.2.5})$$

Daha sonra (**2.2.5**) denkleminde h ile i indisleri üzerinde daraltma yapılırsa, semi-simetrik metrik konneksiyonlu bir Riemann uzayının Ricci tensörü

$$R^*_{jk} = R_{jk} - n\alpha_{jk} + \alpha_{jk} - \alpha^h_h g_{jk} + \alpha_{jk} = R_{jk} - (n-2)\alpha_{jk} - g_{jk}\alpha \qquad (\mathbf{2.2.6})$$

olarak bulunur. R^*_{jk} tensörü j ve k indislerine göre simetrik değildir. Dolayısıyla, simetrik ve antisimetrik kısımları yardımıyla

$$R^*_{ij} = R^*_{(ij)} + R^*_{[ij]} \qquad (\mathbf{2.2.7})$$

şeklinde bulunur. Burada

$$R^*_{(ij)} = \frac{R^*_{ij} + R^*_{ji}}{2} \quad \text{ve} \quad R^*_{[ij]} = \frac{R^*_{ij} - R^*_{ji}}{2}$$

dir. (**2.2.6**) denkleminden uzayın skaler eğriliği

$$R^* = R - 2(n-1)\alpha \qquad (\mathbf{2.2.8})$$

olarak bulunur.

Tanım 2.2.1 : M^n, n boyutlu semi-simetrik metrik konneksiyonlu bir Riemann uzayı olsun. Bu uzayın Ricci tensörünün simetrik kısmı

$$R^*_{(ij)} = \lambda g_{ij} \qquad (\mathbf{2.2.9})$$

denklemini sağlarsa, M^n uzayına g metrikli semi-simetrik metrik konneksiyonlu Einstein uzayı denir.

Birinci bölümde tanımlandığı gibi, semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann uzayları için de anoloji kurularak manifoldun kesitsel eğriliği tanımlanabilir.

Semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann uzayının kovaryant eğrilik tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $R^*_{ijkl} = -R^*_{jikl} = R^*_{jilk}$

(ii) $R^* = R^*_{ij} g^{ij}$

(iii) $R^*_{hhlm} = R^*_{ijkk} = 0$

(iv) $R^{*\ \ h}_{ijk} = -R^{*\ \ h}_{jik}$

(v) $R^*_{ijkl} = R^{*\ \ h}_{ijk} g_{hl}$

(vi) $R^{*\ \ h}_{hjk} = R^*_{jk}$

$R^*_{ijkl} = R^*_{klij}$ olması için gerek ve yeter koşul π, 1-formunun gradyent yani α_{ij} tensörünün simetrik olmasıdır [16].

Özel olarak, eğrilik tensörü $R^*_{ijkl} = 0$ ise, semi-simetrik metrik knneksiyonlu uzaya düz uzay denir.

I. Bianchi Özdeşliği, semi-simetrik metrik konneksiyona sahip bir Riemann uzayı ile Levi-Civita konneksiyonuna sahip bir Riemann uzayı için kullanıldığında, (**2.2.3**), (**2.2.5**) ifadelerinden

$$\begin{aligned} R^*_{ijkh} + R^*_{jkih} + R^*_{kijh} &= R_{ijkh} - \alpha_{jk} g_{ih} + \alpha_{ik} g_{jh} - \alpha_{ih} g_{jk} + \alpha_{jh} g_{ik} \\ &\quad + R_{jkih} - \alpha_{ki} g_{jh} + \alpha_{ji} g_{kh} - \alpha_{jh} g_{ki} + \alpha_{kh} g_{ji} \\ &\quad + R_{kijh} - \alpha_{ij} g_{kh} + \alpha_{kj} g_{ih} - \alpha_{kh} g_{ij} + \alpha_{ih} g_{kj} \\ &= (\nabla_k \pi_j - \nabla_j \pi_k) g_{ih} + (\nabla_i \pi_k - \nabla_k \pi_i) g_{jh} + (\nabla_j \pi_i - \nabla_i \pi_j) g_{kh} \\ &= 2 g_{ih} \nabla_{[k\Pi_j]} + 2 g_{jk} \nabla_{[i\Pi_k]} + 2 g_{kh} \nabla_{[j\Pi_i]} \qquad (\mathbf{2.2.10}) \end{aligned}$$

bulunur.

3. SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU GENELLEŞTİRİLMİŞ 3-REKÜRAN RİEMANN UZAYLARI

3.1. Semi-Simetrik Metrik Konneksiyonlu Riemann Uzayları

Üçüncü bölümde ifade edilecek olan teoremlerde π_k kovaryant vektörlerinin boyunun sıfır olmadığı kabul edilecektir.

Teorem 3.1.1 : Reküran burulma tensörüne sahip, semi-simetrik metrik konneksiyonlu bir Riemann uzayının π_k kovaryant vektörü gradyent ise, uzay has konsörkılır vektör alanına sahiptir.

İspat : Semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann uzayının reküran burulma tensörü

$$\nabla_k^* T_{ij}^h = \lambda_k T_{ij}^h \qquad (\mathbf{3.1.1})$$

koşulunu sağlar. (**2.1.1**) bağıntısında h ve i indisleri üzerine daraltma yapılırsa

$$T_{hk}^h = (n-1)\pi_k \qquad (\mathbf{3.1.2})$$

elde edilir. Daha sonra (**3.1.1**) ile (**3.1.2**) denklemlerinden

$$\nabla_m^* \pi_k = \lambda_m \pi_k \qquad (\mathbf{3.1.3})$$

bulunur. Ayrıca (**2.2.3**) ve (**3.1.3**) denklemleri yardımıyla

$$\lambda_m \pi_l - \lambda_l \pi_m = 0 \qquad (\mathbf{3.1.4})$$

dir. Bu durumda (**3.1.4**) denkleminden λ_m ve π_m nin kolineer olduğu anlaşılır. Bununla birlikte (**3.1.4**) denkleminden, $a \neq 0$ bir skaler olmak üzere

$$\lambda_m = a\pi_m \qquad (\mathbf{3.1.5})$$

dir.

(**3.1.5**) denklemi (**3.1.3**) denkleminde yerine yazılırsa

$$\nabla^*_m \pi_k = a\pi_k\pi_m \qquad (\mathbf{3.1.6})$$

bulunur. (**2.2.3**) denklemi aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenirse

$$\nabla^*_m \pi_k = \nabla_m \pi_k - \pi_m\pi_k + \pi_t\pi^t g_{mk} \qquad (\mathbf{3.1.7})$$

dir. (**3.1.6**) ve (**3.1.7**) bağıntıları yardımıyla

$$a\pi_m\pi_k = \alpha_{mk} + \frac{1}{2}\pi_t\pi^t g_{mk} \qquad (\mathbf{3.1.8})$$

bulunur. Eğer (**3.1.8**) denklemi g^{mk} ile çarpılırsa,

$$\alpha = \left(a - \frac{n}{2}\right)\pi_m\pi^m \qquad (\mathbf{3.1.9})$$

elde edilir. Son iki denklem yardımıyla,

$$\alpha_{mk} = a\pi_m\pi_k - \frac{\alpha g_{mk}}{2a-n}, \quad 2a \neq n \qquad (\mathbf{3.1.10})$$

bulunur. (**3.1.6**) ve (**3.1.7**) denklemlerinden

$$\nabla_m \pi_k = \pi_m\pi_k(a+1) - \pi_t\pi^t g_{mk} \qquad (\mathbf{3.1.11})$$

elde edilir.
$\beta_m = (a+1)\pi_m$, $\phi = \dfrac{2\alpha}{n-2a}$, $n \neq 2a$ olarak alınırsa (**3.1.11**) denklemi

$$\nabla_m \pi_k = \beta_m\pi_k + \phi g_{mk} \qquad (\mathbf{3.1.12})$$

şekline dönüşür.
Bu durumda, π_k kovaryant vektörü konsörkılır vektör alanıdır. $\pi_k \neq 0$ olduğundan $\alpha \neq 0$ dır. Bu nedenle, π_k konsörkılır vektör alanı hasdır.

Teorem 1 : Simetrik Ricci tensörlü, semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann uzayı reküran burulma tensörüne sahipse bu uzay, tors oluşturan bir vektör alanı kabul etmektedir [16].

Eğer reküran burulma tensörlü semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann uzayının π_k kovaryant vektörü gradyent ise Ricci tensörünün simetrik olduğu açıktır [16].

Teorem 2 : Bir Riemann uzayının konsörkılır bir vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$\alpha, \beta, \gamma = 2, 3, ...n\ ,\ g^*_{\alpha\beta} = g^*_{\alpha\beta}(x^\gamma)\ \text{ ve }\ q = q(x^1) \neq \text{sabit}$$

olmak üzere, birinci esas formun

$$ds^2 = (dx^1)^2 + c^q g^*_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

şeklinde yazılmasıdır [17].

Teorem 3.1.2 : Reküran burulma tensörüne sahip semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann uzayının π_k kovaryant vektörü gradyent ise, bu takdirde, bu uzayın birinci esas formu

$$\alpha, \beta, \gamma = 2, 3, ...n\ ,\ g^*_{\alpha\beta} = g^*_{\alpha\beta}(x^\gamma)\ \text{ ve }\ q = q(x^1) \neq \text{sabit}$$

olmak üzere

$$ds^2 = (dx^1)^2 + c^q g^*_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

şeklindedir.

İspat : Teorem 3.1.1 ve Teorem 2'den ispat açıktır.

Teorem 3 : Bir Riemann uzayı eğrilik tensörü sıfır olan semi-simetrik metrik bir konneksiyona sahip ise bu uzay konformal olarak düzdür [15].

Teorem 4 : Konformal olarak düz bir Riemann uzayı has konsörkılır vektör alanına sahipse, bu takdirde bu uzay Kagan anlamında alt projektif uzaydır [18].

Teorem 3.1.3 : Semi-simetrik metrik konneksiyona göre eğrilik tensörü sıfır olan Riemann uzayının burulma tensörü reküran ise, bu uzay has konsörkılır vektör alanına sahip olup, birinci esas formu $ds^2 = (dx^1)^2 + c^q g^*_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ yapısında olan Kagan anlamında alt projektif uzaydır, $(n > 3)$.

İspat : (**2.2.6**) denkleminden $R^*_{[jk]} = \dfrac{(n-2)}{2}(\nabla_k \pi_j - \nabla_j \pi_k)$ bulunur. Bu uzayın semi-simetrik metrik konneksiyona göre eğrilik tensörünün sıfır olduğu hatırlanırsa π_k kovaryant vektörünün gradyent olduğu görülür.

Aynı zamanda söz konusu uzayın eğrilik tensörü sıfır olduğundan Teorem 3'den, bu uzayın konformal olarak düz olduğu açıktır. Teorem 3.1.1, Teorem 3.1.2 ve Teorem 4'den bu uzayın Kagan anlamında alt projektif uzay olduğu ve birinci esas formunun

$$ds^2 = (dx^1)^2 + c^q g^*_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

yapısında olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Konformal olarak düz bir Riemann manifoldunda aşağıdaki bağıntı mevcuttur [13]

$$R_{ij,k} - R_{ik,j} = \frac{1}{2(n-1)}(R_{,k}g_{ij} - R_{,j}g_{ik}) \qquad (\mathbf{3.1.13})$$

Teorem 5 : Eğer konformal olarak düz bir uzay, konsörkılır vektör alanına sahipse, bu uzay $I \times e^q M^*$ çarpım uzayıdır (warped product). Öyle ki, I, R nin bir açık aralığını, (M^*, g^*) ise $(n-1)$ boyutlu Riemann uzayını gösterir.

Gebarowski (1992) tarafından, $I \times e^q M^*$ çarpım uzayının (**3.1.13**) denklemini sağlaması için gerek ve yeter koşulun M^* uzayının Einstein uzayı olmasından ibaret olduğu gösterilmiştir [18].

Teorem 3.1.4 : Semi-simetrik metrik konneksiyona göre eğrilik tensörü sıfır olan Riemann uzayının burulma tensörü reküran ise bu uzay, M^* Einstein uzayı olmak üzere $I \times e^q M^*$ çarpım uzayıdır, $(n > 3)$.

İspat : Teorem 3.1.3 ve Teorem 5'den ispat açıktır.

Şimdi de semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann uzayının burulma tensörünün

$$\nabla^*_p T^l_{jk} = 0 \qquad (\mathbf{3.1.14})$$

koşulunu sağladığı kabul edilsin. (**2.1.1**) ve (**3.1.2**) denklemleri yardımıyla

$$\nabla^*_p T^h_{hk} = 0 \,, \qquad \nabla^*_p \pi_k = 0 \qquad (\mathbf{3.1.15})$$

bulunur. (**2.2.3**) ve (**3.1.15**) bağıntıları kullanılırsa

$$\alpha_{pk} = \frac{-1}{2}\pi_t \pi^t g_{pk} \qquad (\mathbf{3.1.16})$$

bulunur. Böylece (**3.1.16**) denklemi g^{pk} ile çarpılırsa

$$\alpha = \frac{-n}{2}\pi_t \pi^t \quad (\mathbf{3.1.17})$$

dir. (**3.1.16**) ve (**3.1.17**) denklemlerinden

$$\alpha_{pk} = \frac{\alpha}{n} g_{pk} \quad (\mathbf{3.1.18})$$

elde edilir. (**2.2.6**) ve (**3.1.16**) dan,

$$R^*_{ik} = R_{ik} - 2\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\alpha g_{ik} \quad (\mathbf{3.1.19})$$

olduğu görülür.

Teorem 3.1.5 : Semi-simetrik metrik konneksiyona göre eğrilik tensörü sıfır olan ve burulma tensörü (**3.1.14**) koşulunu sağlayan Riemann uzayı, Levi-Civita konneksiyonuna göre Einstein uzayıdır.

İspat : Bu uzayın semi-simetrik metrik konneksiyona göre eğrilik tensörünün sıfır olduğu hatırlanır ve (**2.2.5**) ve (**3.1.16**) denklemleri kullanılırsa $R_{ijkh} = \pi_m \pi^m (g_{ik} g_{hj} - g_{jk} g_{ih})$ bulunur. Bu son denklem g^{ih} ile çarpılırsa, uzayın Levi-Civita konneksiyonuna göre Einstein uzayı olduğu görülür.

Teorem 3.1.6 : Burulma tensörü (**3.1.14**) koşulunu sağlayan, boyutu üçten büyük, semi-simetrik metrik konneksiyonlu bir Riemann uzayı göz önüne alınsın. Bu uzayda semi-simetrik metrik konneksiyona göre I. Bianchi Özdeşliği sağlanır ve bu uzayın eğrilik tensörü blok simetri özellğine sahiptir.

İspat : (**2.2.6**) ve (**2.2.8**) denklemlerinden,

$$(n-2)\alpha_{ij} = R_{ij} - R^*_{ij} - \frac{(R - R^*)}{2(n-1)} g_{ij} \quad (\mathbf{3.1.20})$$

bulunur.

Son denklemde (**1.3.2**) denklemi kullanılırsa

$$\alpha_{ij} = -\lambda_{ij} - \frac{R^*_{ij}}{n-2} + \frac{R^* g_{ij}}{2(n-1)(n-2)} \quad (\mathbf{3.1.21})$$

dir. (**3.1.16**) ve (**3.1.21**) denklemlerinden

$$R^*_{[ij]} = 0 \quad (\mathbf{3.1.22})$$

bulunur. (**2.2.3**) ve (**3.1.15**) denklemlerinden π_k kovaryant vektörünün gradyent olduğu görülür. Böylece, burulma tensörü (**3.1.14**) koşulunu sağlayan, semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzayın, (**2.2.10**) denklemi yardımıyla I.Bianchi Özdeşliğini sağladığı ve bu uzayın eğrilik tensörünün de blok simetri özelliğine sahip olduğu açıktır. Sonuç olarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.7 : Burulma tensörü (**3.1.14**) koşulunu sağlayan, boyutu üçten büyük, semi-simetrik metrik konneksiyonlu bir Riemann uzayı göz önüne alınsın. Bu uzayın semi-simetrik metrik konneksiyona göre Einstein uzayı olması için gerek ve yeter koşul Levi-Civita konneksiyonuna göre Einstein uzayı olmasıdır.

İspat : (**2.2.5**) ve (**3.1.18**) denklemlerinden

$$R^*_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{2\alpha}{n}(g_{jk}g_{il} - g_{ik}g_{jl}) \qquad (\mathbf{3.1.23})$$

ifadesi bulunur. Böylece (**2.2.8**) ve (**3.1.23**) bağıntıları yardımıyla

$$R^*_{ijkl} - \frac{R^*}{n(n-1)}(g_{jk}g_{il} - g_{ik}g_{jl}) = R_{ijkl} - \frac{R}{n(n-1)}(g_{jk}g_{il} - g_{ik}g_{jl}) \qquad (\mathbf{3.1.24})$$

denklemi elde edilir. (**3.1.24**) denklemi g^{il} ile çarpılırsa

$$R^*_{jk} - \frac{R^*}{n}g_{jk} = R_{jk} - \frac{R}{n}g_{jk} \qquad (\mathbf{3.1.25})$$

bulunur.

Teorem 3.1.6'dan π_k kovaryant vektörünün gradyent olduğu ve $R^*_{[jk]} = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $R^*_{jk} = R^*_{[jk]}$ olur.

Burulma tensörü (**3.1.14**) koşulunu sağlayan uzayın semi-simetrik metrik konneksiyona göre Einstein uzayı olduğu kabul edilsin. (**3.1.25**) denkleminden

$$R_{jk} = \frac{R}{n}g_{jk} \qquad (\mathbf{3.1.26})$$

bulunur. Böylece, bu uzay Levi-Civita konneksiyonuna göre de Einstein uzayıdır.

Tersine olarak, burulma tensörü (**3.1.14**) koşulunu sağlayan semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzay Levi-Civita konneksiyonuna göre Einstein uzayı olsun. (**3.1.25**) ve (**3.1.26**) bağıntılarından bu uzayın aynı zamanda semi-simetrik metrik konneksiyona göre Einstein uzayı olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.8 : Burulma tensörü (**3.1.14**) koşulunu sağlayan uzay, semi-simetrik metrik konneksiyona göre Einstein uzayı ise, bu uzayın konformal, konsörkılır ve projektif eğrilik tensörleri birbirine eşittir.

İspat : Burulma tensörü (**3.1.14**) koşulunu sağlayan uzayın semi-simetrik metrik konneksiyona göre Einstein uzayı olduğu kabul edilsin. (**3.1.21**) bağıntısı (**2.2.5**) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} R^*_{ijkl} &= R_{ijkl} + \lambda_{jk}g_{il} - \lambda_{ik}g_{jl} + \lambda_{il}g_{jk} - \lambda_{jl}g_{ik} \\ &\quad + \frac{2R^* g_{jk}g_{il}}{n(n-2)} - \frac{2R^* g_{ik}g_{jl}}{n(n-2)} \\ &\quad + \frac{R^* g_{ik}g_{jl}}{(n-1)(n-2)} - \frac{R^* g_{il}g_{jk}}{(n-1)(n-2)} \end{aligned} \qquad (\mathbf{3.1.27})$$

bulunur. (**1.3.3**) ve (**3.1.27**) denklemleri yardımıyla

$$R^*_{ijkl} = C_{ijkl} + \frac{R^*}{n(n-1)}(g_{jk}g_{il} - g_{ik}g_{jl}) \qquad (\mathbf{3.1.28})$$

elde edilir.
Burada (**3.1.24**) ve (**3.1.28**) denklemleri kullanılırsa

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{R}{n(n-1)}(g_{jk}g_{il} - g_{ik}g_{jl}) \qquad (\mathbf{3.1.29})$$

bulunur.

Teorem 3.1.7, (**1.4.1**), (**1.4.2**) ve (**3.1.29**) bağıntılarından ispat açıktır.

Teorem 3.1.9 : Boyutu üçten büyük, semi-simetrik metrik konneksiyonlu bir Riemann uzayının eğrilik tensörü Levi-Civita konneksiyonuna göre genelleştirilmiş 3-reküran ise, bu takdirde bu uzayın konformal eğrilik tensörü de aynı konneksiyona göre genelleştirilmiş konformal 3-rekürandır.

İspat : Boyutu üçten büyük, semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzayın eğrilik tensörü genelleştirilmiş 3-reküran olsun. Bu durumda

$$\nabla_m \nabla_h \nabla_n R^*_{ijkl} = \lambda_m \nabla_h \nabla_n R^*_{ijkl} + B_{nhm} R^*_{ijkl} \qquad (\mathbf{3.1.30})$$

bağıntısı mevcuttur. R^*_{ijkl}, için (**2.2.5**) denkleminden

$$\begin{aligned} \nabla_m \nabla_h \nabla_n R^*_{ijkl} &= \nabla_m \nabla_h \nabla_n R_{ijkl} - g_{il} \nabla_m \nabla_h \nabla_n \alpha_{jk} + g_{jl} \nabla_m \nabla_h \nabla_n \alpha_{ik} \\ &\quad - g_{jk} \nabla_m \nabla_h \nabla_n \alpha_{il} + g_{ik} \nabla_m \nabla_h \nabla_n \alpha_{jl} \qquad (\mathbf{3.1.31}) \end{aligned}$$

ifadesi gerçeklenir. Böylece (**3.1.30**) ve (**3.1.31**) ifadelerinden

$$\begin{aligned} \nabla_m \nabla_h \nabla_n R^*_{ijkl} &= \lambda_m (\nabla_h \nabla_n R_{ijkl} - g_{il} \nabla_h \nabla_n \alpha_{jk} + g_{jl} \nabla_h \nabla_n \alpha_{ik} \\ &\quad - g_{jk} \nabla_h \nabla_n \alpha_{il} + g_{ik} \nabla_h \nabla_n \alpha_{jl}) \qquad (\mathbf{3.1.32}) \\ &\quad + B_{nhm} (R_{ijkl} - \alpha_{jk} g_{il} + \alpha_{ik} g_{jl} - \alpha_{il} g_{jk} + \alpha_{jl} g_{ik}) \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer konformal eğrilik tensörünün Levi-Civita konneksiyonuna göre üç kez kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \nabla_m \nabla_h \nabla_n C_{ijkl} &= \nabla_m \nabla_h \nabla_n R_{ijkl} + g_{il} \nabla_m \nabla_h \nabla_n \lambda_{jk} - g_{jl} \nabla_m \nabla_h \nabla_n \lambda_{ik} \\ &\quad + g_{jk} \nabla_m \nabla_h \nabla_n \lambda_{il} - g_{ik} \nabla_m \nabla_h \nabla_n \lambda_{jl} \qquad (\mathbf{3.1.33}) \end{aligned}$$

bulunur.

Ayrıca, (**3.1.30**) denkleminden

$$\nabla_m \nabla_h \nabla_n R^*_{jk} = \lambda_m \nabla_h \nabla_n R^*_{jk} + B_{nhm} R^*_{jk} \qquad (\mathbf{3.1.34})$$

$$\nabla_m \nabla_h \nabla_n R^* = \lambda_m \nabla_h \nabla_n R^* + B_{nhm} R^* \qquad (\mathbf{3.1.35})$$

dir. (**3.1.31**) denklemi g^{il} ile çarpılırsa, (**2.2.6**) ve (**3.1.34**) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \nabla_m \nabla_h \nabla_n R^*_{jk} &= \nabla_m \nabla_h \nabla_n R_{jk} - (n-2) \nabla_m \nabla_h \nabla_n \alpha_{jk} - g_{jk} \nabla_m \nabla_h \nabla_n \alpha \\ &= \lambda_m \Big(\nabla_h \nabla_n R_{jk} - (n-2) \nabla_h \nabla_n \alpha_{jk} - g_{jk} \nabla_h \nabla_n \alpha \Big) \\ &\quad + B_{nhm} (R_{jk} - \alpha_{jk}(n-2) - \alpha g_{jk}) \end{aligned} \qquad (\mathbf{3.1.36})$$

bulunur.

(**3.1.36**) denklemi yeniden düzenlenirse

$$(n-2)[\nabla_m\nabla_h\nabla_n\alpha_{jk}-\lambda_m\nabla_h\nabla_n\alpha_{jk}-B_{nhm}\alpha_{jk}]$$
$$=\nabla_m\nabla_h\nabla_n R_{jk}-\lambda_m\nabla_h\nabla_n R_{jk}-B_{nhm}R_{jk}-g_{jk}[\nabla_m\nabla_h\nabla_n\alpha-\lambda_m\nabla_h\nabla_n\alpha-B_{nhm}\alpha] \quad (\mathbf{3.1.37})$$

denklemi elde edilir. Bu durumda (**2.2.8**) ve (**3.1.35**) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\nabla_m\nabla_h\nabla_n R^* &= \nabla_m\nabla_h\nabla_n R-2(n-1)\nabla_m\nabla_h\nabla_n\alpha\\ &= \lambda_m[\nabla_m\nabla_h R-2(n-1)\nabla_h\nabla_n\alpha]+B_{nhm}[R-2(n-1)\alpha]\end{aligned} \quad (\mathbf{3.1.38})$$

bulunur. Daha sonra (**3.1.37**) ve (**3.1.38**) bağıntıları yardımıyla

$$\nabla_m\nabla_h\nabla_n R-\lambda_m\nabla_h\nabla_n R-B_{nhm}R=2(n-1)[\nabla_m\nabla_h\nabla_n\alpha-\lambda_m\nabla_h\nabla_n\alpha-B_{nhm}\alpha] \quad (\mathbf{3.1.39})$$

elde edilir. Böylece (**3.1.37**) ve (**3.1.39**) denklemlerinden

$$(n-2)[\nabla_m\nabla_h\nabla_n\alpha_{jk}-\lambda_m\nabla_h\nabla_n\alpha_{jk}-B_{nhm}\alpha_{jk}]=$$
$$\nabla_m\nabla_h\nabla_n R_{jk}-\lambda_m\nabla_h\nabla_n R_{jk}-B_{nhm}R_{jk}-\frac{g_{jk}}{2(n-1)}[\nabla_m\nabla_h\nabla_n R-\lambda_m\nabla_h\nabla_n R-B_{nhm}R] \quad (\mathbf{3.1.40})$$

dir. (**1.3.2**) denkleminin Levi-Civita konneksiyonuna göre üç kez türevinin alınmasıyla

$$\nabla_m\nabla_h\nabla_n\lambda_{jk}=\frac{-1}{n-2}\nabla_m\nabla_h\nabla_n R_{jk}+\frac{g_{jk}}{2(n-1)(n-2)}\nabla_m\nabla_h\nabla_n R \quad (\mathbf{3.1.41})$$

elde edilir.

Daha sonra (**3.1.40**) ve (**3.1.41**) denklemlerinden

$$\nabla_m\nabla_h\nabla_n\alpha_{jk}-\lambda_m\nabla_h\nabla_n\alpha_{jk}-B_{nhm}\alpha_{jk}=\ -\nabla_m\nabla_h\nabla_n\lambda_{jk}+\lambda_m\nabla_h\nabla_n\lambda_{jk}+B_{nhm}\lambda_{jk} \quad (\mathbf{3.1.42})$$

ifadesi bulunur. Ayrıca, (**3.1.42**) denklemi (**3.1.30**) denkleminde yerine yazılırsa

$$\nabla_m\nabla_h\nabla_n R_{ijkl}+g_{il}\nabla_m\nabla_h\nabla_n\lambda_{jk}-g_{jl}\nabla_m\nabla_h\nabla_n\lambda_{ik}+g_{jk}\nabla_m\nabla_h\nabla_n\lambda_{il}-g_{ik}\nabla_m\nabla_h\nabla_n\lambda_{jl}=$$
$$\lambda_m[\nabla_h\nabla_n R_{ijkl}+g_{il}\nabla_h\nabla_n\lambda_{jk}-g_{jl}\nabla_h\nabla_n\lambda_{ik}+g_{jk}\nabla_h\nabla_n\lambda_{il}-g_{ik}\nabla_h\nabla_n\lambda_{jl}]$$
$$+B_{nhm}[R_{ijkl}+\lambda_{jk}g_{il}-\lambda_{ik}g_{jl}+g_{jk}\lambda_{il}-g_{ik}\lambda_{jl}]$$

elde edilir. Burada son olarak (**3.1.33**) denklemi kullanılırsa

$$\nabla_m \nabla_h \nabla_n C_{ijkl} = \lambda_m \nabla_h \nabla_n C_{ijkl} + B_{nhm} C_{ijkl} \tag{3.1.43}$$

bulunur ki, böylece konformal eğrilik tensörünün genelleştirilmiş 3-reküran olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.10 : Eğer boyutu üçten büyük, semi-simetrik metrik konneksiyonlu bir Riemann uzayının eğrilik tensörü 3-reküran ise, bu taktirde, bu uzayın konformal eğrilik tensörü de 3-rekürandır.

İspat : Eğer (**3.1.30**) denkleminde özel olarak, $\lambda_m = 0$ ise, semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzayın eğrilik tensörü Levi-Civita konneksiyonuna göre 3-rekürandır. Buradan da M^n konformal 3-reküran olur, yani

$$\nabla_m \nabla_h \nabla_n R^*_{ijkl} = B_{nhm} R^*_{ijkl}$$

$$\nabla_m \nabla_h \nabla_n C_{ijkl} = B_{nhm} C_{ijkl}$$

dir.

Teorem 3.1.11 : Boyutu üçten büyük, semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann uzayının eğrilik tensörü genelleştirilmiş 3-reküran ise, bu taktirde ya B_{nhm} tensörü n ve h indislerine göre simetriktir ya da bu uzayın R^* skaler eğriliği sıfırdır.

İspat : Semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzayın eğrilik tensörü genelleştirilmiş 3-reküran olsun. (**3.1.30**) denkleminden

$$\nabla_m \nabla_h \nabla_n R^* = \lambda_m \nabla_h \nabla_n R^* + B_{nhm} R^* \tag{3.1.44}$$

dir. Bu durumda (**3.1.44**) denkleminde (**2.2.8**) ifadesi yerine yazılırsa

$$\nabla_m \nabla_h \nabla_n (R - 2(n-1)\alpha) = \lambda_m \nabla_h \nabla_n (R - 2(n-1)\alpha) + B_{nhm}(R - 2(n-1)\alpha) \tag{3.1.45}$$

bulunur. (**3.1.45**) denkleminde n ile h indislerinin yerleri değiştirilip bu iki denklem birbirinden çıkartılırsa ve (**2.2.8**) denkleminden faydalanılırsa

$$R^*(B_{nhm} - B_{hnm}) = 0 \tag{3.1.46}$$

elde edilir. Böylece (**3.1.46**) denkleminden $R^* = 0$ veya $B_{nhm} - B_{hnm} = 0$ olduğu görülür.

Eğer, $R^* \neq 0$ ise, B_{nhm} tensörünün n ve h indisine göre simetrik olduğu açıktır.

Uyarı 1 : Yukarıdaki son iki teoremde genelleştirilmiş 3-reküran semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzay almak yerine genelleştirilmiş 2-reküran semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzay göz önüne alınırsa, elde edilen sonuçlar [19] nolu referansta verilmiştir.

Teorem 3.1.12 : Semi-simetrik metrik konneksiyonlu, bir Riemann uzayının eğrilik tensörü genelleştirilmiş 3-reküran olsun ve burulma tensörü (**3.1.14**) koşulunu sağlasın. Eğer bu uzayın Levi-Civita konneksiyonuna göre skaler eğriliği sıfır ise, bu taktirde uzayın Levi-Civita konneksiyonuna göre eğrilik tensörü de genelleştirilmiş 3-rekürandır.

İspat : Semi-simetrik metrik konneksiyonlu bir Riemann uzayının eğrilik tensörü genelleştirilmiş 3-reküran olsun. (**2.2.5**) ve (**3.1.18**) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\nabla_m \nabla_h \nabla_n R^*_{ijkl} - \lambda_m \nabla_h \nabla_n R^*_{ijkl} - B_{nhm} R^*_{ijkl} = 0 \\
&\quad = \nabla_m \nabla_h \nabla_n R_{ijkl} - \lambda_m \nabla_h \nabla_n R_{ijkl} - B_{nhm} R_{ijkl} \\
&\qquad -\frac{2}{n}(g_{jk}g_{il} - g_{ik}g_{jl})(\nabla_m \nabla_h \nabla_n \alpha - \lambda_m \nabla_h \nabla_n \alpha - B_{nhm}\alpha)
\end{aligned} \tag{3.1.47}$$

bulunur. (**3.1.39**) denklemi ile

$$\nabla_m \nabla_h \nabla_n \alpha - \lambda_m \nabla_h \nabla_n \alpha - B_{nhm}\alpha = 0 \tag{3.1.48}$$

elde edilir. Bundan dolayı, (**3.1.47**) denkleminden ispat açıktır.

Teorem 3.1.12'den aşağıdaki Uyarı 2 elde edilir:

Uyarı 2 : Semi-simetrik metrik konneksiyonlu, bir Riemann uzayının eğrilik tensörü genelleştirilmiş 2-reküran olsun ve burulma tensörü (**3.1.14**) koşulunu sağlasın. Eğer bu uzayın Levi-Civita konneksiyonuna göre skaler eğriliği sıfır ise, bu taktirde uzayın Levi-Civita konneksiyonuna göre eğrilik tensörü de genelleştirilmiş 2-rekürandır.

Teorem 3.1.13 : Burulma tensörü (**3.1.14**) koşulunu sağlayan, semi-simetrik metrik konneksiyonlu Einstein uzayı Levi-Civita konneksiyonuna göre genelleştirilmiş 3-reküran (veya 2-reküran) ise, bu uzay aynı zamanda genelleştirilmiş projektif 3-reküran (veya 2-reküran) ve genelleştirilmiş konsörkılır 3-reküran (veya 2-reküran) uzaydır.

İspat : Teorem 3.1.8 ve Teorem 3.1.10'dan ispat açıktır.

Uyarı 3 : Semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzayın K^* kesitsel eğriliği seçilen oryantasyondan bağımsız olmamalıdır. Aksi takdirde, konformal eğrilik tensörü sıfır olmaktadır [15].

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann uzayı göz önüne alınmış olup, bu uzayın temel tanım ve özelliklerine yer verilmiştir. İlk olarak bu uzayın burulma tensörünün reküran olması durumunda, π_k gradyent vektörünün konsörkılır vektör alanından ibaret olduğu gösterilmiştir. Buradan hareketle bu uzayların birinci esas formlarının ifadesi belirlenebilmiştir. Ayrıca böyle bir uzayın hem özel bir çarpım uzayı olacağı, hem de alt projektif uzay olacağı ispatlanmıştır.

Diğer taraftan semi-simetrik metrik konneksiyonlu Einstein uzayının burulma tensörünün özel bir koşulu sağlaması durumunda, bu uzayın Levi-Civita konneksiyonuna göre de Einstein uzayı olacağı ve bu teoremin tersinin de doğru olacağı gösterilmiştir.

Son olarak semi-simetrik metrik konneksiyona sahip genelleştirilmiş 3-reküran uzaylarla ilgili bir araştırma yapılmış ve çalışma sonlandırılmıştır.

Bundan sonra hangi koşullar altında semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann uzayının kesitsel eğriliğinin seçilen oryantasyondan bağımsız olacağı incelenebilir ve bu tür uzaylara ait metrik örneği araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] **Weatherburn, C.E.** 1966. An Introduction to Riemannian Geometry and the Tensor Calculus, *Cambridge Univ. Press*, Cambridge.

[2] **Eisenhart, L.P.** 1927. Non-Riemannian Geometry, *American Mathematical Society, Colloquium Publications*, **VIII**, New York.

[3] **Yano, K., Kon, M.**, 1984. Structures on Manifolds, *World Scientific Press*, Singapore.

[4] **Carmo, M.P. do**, 1992. Riemannian Geometry, *Mathematics, Theory and Applications*, Boston,Mass.

[5] **Schouten, J. A.** 1954. Ricci-calculus, *Springer*, Berlin.

[6] **Yano, K.**, 1965. Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces, *Pergamon Press*, New York.

[7] **Vranceanu, G.** 1964. Lecons de Geometrie Differentielle 1,2,3, *Gauthler Villars*, Paris.

[8] **Eisenhart, L.P.** 1926. Riemannian Geometry, *Princeton University Press*, Princeton.

[9] **Yano, K.** 1940. Concircular Geometry I., *Concircular transformations, Proc. Imp. Acad.* Tokyo, **16**, 195-200.

[10] **Prvanovich M.** 1999. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, **1**, 440.

[11] **Ruse H.S.** 1946. On Simply Harmonic SPaces, *J. London Math. Soc.,* **21**, 243-247.

[12] **Thompson, A.H.** 1970. On Riemannian spaces on second order recurrent curvature, *Bull Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astr. Phys.* **18**, 335-340.

[13] **Pak, E.** 1969. On the Pseudo-Riemannian spaces, *Journal of Korean Math. Soc.*, **6**, 23-31.

[14] **Biaswas,H.A., De U.C.** On generalized 3-recurrent spaces, *Ganit, J.Bangladesh Math. Soc.*, **14**, 85.

[15] **Yano, K.** 1970. On semi-symmetric metric connection, *Rev. Roum. Math. Pures Et Appl. Tome XV*, No.9, 1579-1589, Bucarest.

[16] **De, U.C., De B.K.** 1995. Some Properties of a Semi-Symmetric Metric Connection On a Riemannian Manifold, *Istanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Der.,* **54**, 111-117.

[17] **Yano, K.** 1955. The Theory of Lie Derivatives and its Applications, *North-Holland Publishing Co. P.,* **3**, Amsterdam.

[18] **Gebarowski, A.** 1992. Nearly conformally symmetric warped product manifolds, *Bulletin of the Institue of Mathematics, Academia Sinica*, **20**, 359-371.

[19] **De, U.C.** 1990. On a type of semi-symmetric connection on a Rieamannian manifold, *Indian J. Pure appl. Math.*, **21**, 334-338.

ÖZGEÇMİŞ

31 Mart 1985'de İstanbul'da doğdu. 2003 yılında Davutpaşa YDA lisesinden mezun olduktan sonra, Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Lisans Bölümüne başlayıp 2007 yılında mezun oldu. 2007'de İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü'nde Yüksek Lisans Programına başladı. Aynı yılda Matematik Bölümünde araştırma görevliliğine atanarak halen görevine devam etmektedir.