İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL RİEMANN UZAYLARINDA SONSUZ KÜÇÜK DÖNÜŞÜMLER

DOKTORA TEZİ

Esra ŞENGELEN SEVİM

Anabilim Dalı	:	**Matematik**
Programı	:	**Matematik Mühendisliği**

OCAK 2010

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL RİEMANN UZAYLARINDA SONSUZ KÜÇÜK DÖNÜŞÜMLER

DOKTORA TEZİ

Esra ŞENGELEN SEVİM
(509002104)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 25 Kasım 2009
Tezin Savunulduğu Tarih : 21 Ocak 2010

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Füsun ÖZEN ZENGİN (İTÜ)
Eş Danışman : Doç. Dr. Sezgin ALTAY DEMİRBAĞ (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Abdülkadir ÖZDEĞER (KADİR HAS Ü)
Prof. Dr. Aynur UYSAL (DOĞUŞ Ü)
Prof. Dr. Kadri ARSLAN (ULUDAĞ Ü)
Prof. Dr. Uğur DURSUN (İTÜ)
Doç. Dr. Fatma ÖZDEMİR (İTÜ)

OCAK 2010

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda yakın ilgilerini hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocalarım sayın Doç. Dr. Füsun ÖZEN ZENGİN ve sayın Doç. Dr. Sezgin ALTAY DEMİRBAĞ'a sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca tez izleme komitesi üyeleri değerli hocalarım Prof. Dr. Abdülkadir ÖZDEĞER, Prof. Dr. Aynur UYSAL ve Doç. Dr. Uğur DURSUN'a değerli katkılarından dolayı teşekkür ederim.
Ayrıca doktora tez çalışmalarım sırasında bana her zaman anlayış ve sabır gösterip destek olan eşime, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen canım aileme özellikle anneme ve babama sonsuz teşekkür ederim.

Ocak 2010 Esra ŞENGELEN SEVİM

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{\nabla}$	:	Kovaryant türev operatörü
$\boldsymbol{g}_{ij}$	:	Metrik tensörü
$\boldsymbol{R}^{h}_{ijk}$	:	Eğrilik tensörü
$\boldsymbol{C}^{h}_{ijk}$	:	Konformal eğrilik tensörü
$\boldsymbol{P}^{h}_{ijk}$	:	Projektif eğrilik tensörü
$\boldsymbol{R}_{ij}$	:	Ricci eğrilik tensörü
$\boldsymbol{R}$	:	Skaler eğrilik
$[k, ij]$	:	Birinci cins Christoffel sembolü
$\boldsymbol{\Gamma}^{h}_{ij}$	:	İkinci cins Christoffel sembolü
$\mathscr{L}_{\mathbf{v}}$	:	**v** vektör alanı doğrultusunda Lie türevi

BAZI ÖZEL RİEMANN UZAYLARINDA SONSUZ KÜÇÜK DÖNÜŞÜMLER

ÖZET

Bu çalışma, pseudo Ricci simetrik, pseudo projektif Ricci simetrik, pseudo simetrik ve pseudo projektif simetrik Riemann uzaylarına ait sonsuz küçük konformal ve sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşümler ve bu dönüşümleri oluşturan özel vektör alanları ile ilgilidir. İlk olarak, pseudo Ricci simetrik Riemann uzayları ve pseudo simetrik Riemann uzaylarının temel özellikleri hatırlatılmış ve sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşümü üreten bazı özel vektör alanları incelenmiştir. Daha sonra, pseudo projektif Ricci simetrik Riemann uzaylarının ve pseudo projektif simetrik Riemann uzaylarının temel özellikleri incelenmiştir.

Birinci bölümde, bahsedilen Riemann uzaylarını karakterize eden denklemlere ve bu uzaylar ile ilgili daha önceden yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

İkinci bölümde, öncelikle, yukarıda bahsedilen Riemann uzaylarının temel özellikleri hatırlatılmıştır. Daha sonra, bazı sonsuz küçük dönüşümlerle ilişkili temel tanım ve teoeremler hatırlatıldıktan sonra, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşümün ve bazı özel vektör alanlarının tanımlarına da aynı bölüm içerisinde yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak, boyutu ikiden büyük olan pseudo Ricci simetrik Riemann uzaylarının skaler eğriliğinin sabit olması durumunda, bu uzayın skaler eğriliğinin sıfır olmak zorunda olduğu vurgulanmıştır. Daha sonra, sonsuz küçük konformal dönüşümü ve sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşümü üreten $\boldsymbol{v}$ vektör alanı ile bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ eş kovaryant vektörü arasındaki ilişki incelenmiştir. Bu araştırmada, vektör alanları ve Lie türevlerinden faydalanılmıştır.

Dördüncü bölümde, konküran vektör alanı, reküran vektör alanı ve tors oluşturan vektör alanları tarafından üretilen sonsuz küçük konformal dönüşüm ve sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm incelenmiştir.

Beşinci bölümde, ilk olarak, iki boyutlu pseudo simetrik Riemann uzayı üzerinde, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşümün özellikleri incelenmiştir. Daha sonra, iki boyutlu pseudo simetrik Riemann uzaylarında elde edilen sonuçların boyutu ikiden büyük pseudo simetrik Riemann uzaylarında geçerli olup olmadığı araştırılmıştır. Son olarak, konformal düz pseudo simetrik Riemann uzayı üzerinde sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm tanımlanamayacağı gösterilmiştir.

Altıncı bölümde, ilk olarak, pseudo projektif Ricci simetrik Riemann uzayına ait temel tanımlar hatırlatılmış; ve $n=2$ için P_{ij} tensörü sıfır olduğundan, bu bölümde, boyutu üç ve üçten büyük pseudo projektif Ricci simetrik Riemann uzayları üzerinde çalışılmıştır. Daha sonra, bazı özel sonsuz küçük dönüşümleri

oluşturan bazı özel vektör alanlarının mevcut olduğu bu tür uzaylar üzerinde çalışılmıştır.

Son bölümde ise, iki boyutu bir Riemann uzayının projektif eğrilik tensörünün sıfır olmasından dolayı, boyutu ikiden büyük olan pseudo projektif simetrik Riemann uzaylarına ait özel vektör alanları ile üretilen sonsuz küçük dönüşümlerle ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

INFINITESIMAL TRANSFORMATIONS ON SOME SPECIAL RIEMANNIAN SPACES

SUMMARY

This research is on infinitesimal conformal and infinitesimal pseudo homothetic transformations and some special vector fields generating these transformations on pseudo Ricci symmetric, pseudo projective Ricci symmetric, pseudo symmetric and pseudo projective symmetric Riemannian spaces. Firstly, the main characteristics of pseudo Ricci symmetric Riemannian spaces and pseudo symmetric Riemannian spaces are reviewed and some special vector fields generating the infinitesimal pseudo homothetic transformation are examined. Secondly, the main properties of pseudo projective Ricci symmetric Riemannian spaces and pseudo projective symmetric Riemannian spaces are analyzed.

In the first chapter, equations characterizing the Riemannian spaces mentioned above and the work previously done concerning such spaces are given.

In the second chapter, firstly, the main properties of Riemannian spaces mentioned above are reviewed. Secondly, the basic definitions and theorems related to some infinitesimal transformations, the definitions of some special vector fields and the infinitesimal pseudo homothetic transformations are given.

In the third chapter, firstly, it is emphasized that if the scalar curvature of the pseudo Ricci symmetric Riemannian spaces whose dimensions are greater than two is constant, then it must be zero. Secondly, examination of the relation between the vector field generating infinitesimal conformal transformations and infinitesimal pseudo homothetic transformations and the associate covariant vector field $\boldsymbol{\lambda_l}$ are investigated. In this investigation, vector fields and Lie derivatives are used.

In the fourth chapter, infinitesimal conformal transformation and infinitesimal pseudo homothetic transformation generated by concurrent vector fields, recurrent vector fields and torse-forming vector fields are examined.

In the fifth chapter, firstly, the characteristics of infinitesimal pseudo homothetic transformations in two-dimensional pseudo symmetric Riemannian spaces are analyzed. Secondly, there is an investigation to whether the results obtained in two-dimensional pseudo symmetric Riemannian space are valid in higher dimensional pseudo symmetric Riemannian spaces. Finally, it is shown that an infinitesimal pseudo homothetic transformation doesn't exist on conformally flat pseudo symmetric Riemannian space.

In the sixth chapter, firstly, the basic definitions of the pseudo projective Ricci symmetric Riemannian spaces are reviewed; since the tensor of P_{ij} is zero for n=2, then the pseudo projective Ricci symmetric Riemannian spaces with dimension three or above are studied in this chapter. Secondly, on such spaces, some special

vector fields generating some special infinitesimal transformations are defined and studied.

In the last chapter, since the projective curvature tensor of the two dimensional Riemannian is zero, the results related to infinitesimal transformations generated by some special vector field on the pseudo projective symmetric Riemannian space of dimension greater than two are obtained.

1. GİRİŞ

n-boyutlu Riemann uzayı V_n olmak üzere R^h_{ijk} ve $\boldsymbol{\lambda_m} \neq 0$ sırasıyla, Riemann eğrilik tensörü ve kovaryant vektör alanı olsun. $\nabla_m R^h_{ijk} = \lambda_m R^h_{ijk}$ koşulu sağlanırsa, V_n uzayı reküran uzay olarak adlandırılır, [1]. A. G. Walker, reküran Riemann uzaylarını inceleyerek bu uzaylara ait örnek vermiştir, [1]. Burada, ∇_m, Γ^i_{jk} simetrik konneksiyona göre kovaryant türevi göstermektedir. $\boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{b_i}$, $\boldsymbol{c_i}$, $\boldsymbol{d_i}$, $\boldsymbol{e_i}$ kovaryant vektörlerinin hepsi birden sıfır olmamak üzere, düz olmayan bir Riemann uzayının kovaryant eğrilik tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_l R_{hijk} = a_l R_{hijk} + b_h R_{lijk} + c_i R_{hljk} + d_j R_{hilk} + e_k R_{hijl} \tag{1.1}$$

koşulunu sağlıyorsa, bu uzay Tamassy ve Binh tarafından zayıf simetrik uzay olarak adlandırılmıştır, [2]. n-boyutlu zayıf simetrik uzaylar, kısaca $(WS)_n$ ile gösterilmiştir. U. C. De ve S. P. Bandyopadhyay tarafından [3] nolu makalede, $\boldsymbol{d_i}$ ve $\boldsymbol{e_i}$ kovaryant vektör alanlarının sırasıyla, $\boldsymbol{b_i}$ ve $\boldsymbol{c_i}$ kovaryant vektörler alanlarına özdeş olarak eşit olduğu ispat edilmiştir. Buradan hareketle zayıf simetrik uzayı karakterize eden denklemler aşağıdaki şekle dönüşmüştür

$$\nabla_l R_{hijk} = a_l R_{hijk} + b_h R_{lijk} + b_i R_{hljk} + d_j R_{hilk} + d_k R_{hijl}. \tag{1.2}$$

Aynı zamanda [3] no'lu referanstaki yazarlar tarafından zayıf simetrik uzaya örnek verilmiştir. $\boldsymbol{\lambda_l}$ sıfırdan farklı kovaryant vektör alanı olmak üzere, düz olmayan bir Riemann uzayının kovaryant eğrilik tensörünün metrik konneksiyonuna göre kovaryant türevi

$$\nabla_l R_{hijk} = 2\lambda_l R_{hijk} + \lambda_h R_{lijk} + \lambda_i R_{hljk} + \lambda_j R_{hilk} + \lambda_k R_{hijl} \tag{1.3}$$

bağıntısını gerçekliyorsa, bu uzay, M. C. Chaki tarafından pseudo-simetrik Riemann uzayı olarak adlandırılmıştır, [4]. Bu uzaylar, kısaca, $(PS)_n$ ile gösterilmektedir. Eğer (1.3) denkleminde $\boldsymbol{\lambda_l}$'ler sıfır olarak seçilirse, bu uzay Cartan anlamında simetrik uzaya dönüşür. Konformal olarak düz olmayan boyutu üçden büyük Riemann uzayının konformal eğrilik tensörü

$$
\begin{aligned}
C_{ijkh} &= R_{ijkh} - \frac{1}{n-2}(g_{ih}R_{jk} - g_{jh}R_{ik} + g_{jk}R_{ih} - g_{ik}R_{jh}) \\
&+ \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{jk}g_{ih} - g_{jh}g_{ik}).
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

denklemi ile tanımlanmaktadır, [5].

Tamassy ve Binh tarafından tanımlanmış olan zayıf simetriklik kavramı ile benzerlik kurularak, zayıf Ricci simetrik uzaylar tanımlanmıştır, [2]. $\boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{b_i}$ ve $\boldsymbol{d_i}$ sıfırdan farklı kovaryant vektör alanlarının bileşenlerini ve R_{ij} de sıfırdan farklı Ricci tensörünün bileşenlerini temsil etmek üzere, eğer

$$\nabla_k R_{ij} = a_k R_{ij} + b_i R_{kj} + d_j R_{ik} \tag{1.5}$$

koşulu sağlanırsa, uzay zayıf Ricci simetrik uzay ve boyutu ikiden büyük, Ricci olarak düz olmayan n-boyutlu bir Riemann uzayı

$$\nabla_k R_{ij} = 2a_k R_{ij} + b_i R_{kj} + d_j R_{ik} \tag{1.6}$$

koşulunu sağlıyorsa, böyle bir uzay M. C. Chaki ve S. Koley tarafından genelleştirilmiş pseudo Ricci simetrik uzay olarak adlandırılmıştır, [6]. M. C. Chaki düz olmayan bir Riemann uzayının Ricci tensörünün bileşenlerinin

$$\nabla_k R_{ij} = 2\lambda_l R_{ij} + \lambda_i R_{kj} + \lambda_j R_{ik} \tag{1.7}$$

bağıntısını sağlaması halinde, böyle bir uzayı pseudo Ricci simetrik uzay olarak tanımlamıştır, [7].

[5] no'nu referansta, boyutu ikiden büyük bir Riemann uzayının projektif eğrilik tensörünün ifadesi, eğrilik tensörü ve Ricci eğrilik tensörü cinsinden, aşağıdaki şekilde verilmektedir

$$P^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(R_{jk}\delta^h_i - R_{ik}\delta^h_j) \ , P_{ijkh} = g_{hm}P^m_{ijk} \tag{1.8}$$

$$P_{ij} = \frac{n}{n-1}R_{ij} - \frac{R}{n-1}g_{ij}, \quad P_{ij} = g^{hk}P_{ihkj} \ . \tag{1.9}$$

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, ilk olarak, Riemann eğrilik ve Ricci eğrilik tensörünün özellikleri hatırlatılmış ve bu çalışma boyunca kullanılacak olan sonsuz küçük dönüşüm ve Lie türevi ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Sonsuz küçük afin dönüşüm ile ilgili olarak, n-boyutlu bir Riemann uzayına ait her hareketin aynı zamanda bir sonsuz küçük afin dönüşüm olduğu ifade edilmiştir.

[8] no'lu referansta K. Yano, n-boyutlu Riemann uzayına ait sonsuz küçük dönüşümün, sonsuz küçük konformal dönüşümden ibaret olması durumunda, φ skaler bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathscr{L}_v g_{ij} = 2\varphi g_{ij} \tag{1.10}$$

koşulunu sağladığını göstermiştir. Düz olmayan bir Riemann uzayında, uzayın eğrilik tensörü, sonsuz küçük konformal dönüşüm altında Lie invaryant kalıyorsa, bu şekildeki sonsuz küçük dönüşüm, T. Sumitomo tarafından pseudo homotetik dönüşüm olarak adlandırılmıştır, [9].

Eğer (1.10) denkleminde φ skaler fonksiyonu sıfırdan farklı bir sabitten ibaretse, sonsuz küçük dönüşüm, sonsuz küçük has homotetik dönüşüm olarak ve eğer $\varphi = 0$ ise, sonsuz küçük dönüşüm, sadece hareket olarak adlandırılır. Burada, g_{ij}, n-boyutlu Riemann uzayının metrik tensörünü, $\mathscr{L}_v g_{ij}$ ise, $\boldsymbol{v}$ vektör alanına göre metrik tensörünün Lie türevini göstermektedir. Ayrıca, uzayın ikinci cins Christoffel sembollerinin, kovaryant eğrilik tensörünün, Ricci eğrilik tensörünün ve R skaler eğriliğin $\boldsymbol{v}$ vektör alanına göre Lie türevleri ifadeleri verilmiştir , [8].

Bu bölümün sonunda ise, çalışma boyunca kullanılmak üzere özel vektör alanları tanımlanmıştır. n-boyutlu bir Riemann uzayında, tors oluşturan vektör alanı

$$\nabla_i v^h = \phi_i v^h + \rho \delta_i^h \tag{1.11}$$

şeklinde tanımlanmıştır, [10]. [11] no'lu referansta tors oluşturan vektör alanını kabul eden Riemann uzayalrı üzerinde bir çalışma yapılmıştır. (1.11) denkleminde, ρ skaler fonksiyonu, ϕ_i kovaryant vektör alanının bileşenlerini ve v^h ise tors oluşturan $\boldsymbol{v}$ vektör alanının kontravaryant bileşenlerini göstermektedir. Eğer (1.11) denkleminde, $\rho = 0$ olarak alınırsa

$$\nabla_i v^h = \phi_i v^h \tag{1.12}$$

tors oluşturan vektör alanı, reküran vektör alanından ibaret olur, [12]. Ayrıca, ρ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, konküran vektör alanı

$$\nabla_i v^h = \rho \delta_i^h \tag{1.13}$$

denklemi ile karakterize edilmiştir, [10]. Eğer, (1.11) denkleminde ϕ_i'ler gradyent vektör alanının bileşenlerinden ibaret ise, tors oluşturan vektör alanı konsörkılır vektör alanı olarak adlandırılmıştır, [13].

Bir Riemann uzayında $\boldsymbol{T}$ ve $\boldsymbol{v}$ vektör alanları

$$T^{\alpha} R^h_{\alpha j \beta} v^{\beta} = 0 \tag{1.14}$$

koşulunu sağlıyorsa, $\boldsymbol{T}$ ve $\boldsymbol{v}$ vektör alanlarına yarı eşleniktir denir, [14]. Eğer (1.14) denkleminde, v^h vektör alanının kontravaryant bileşenleri kendisi ile yarı eşlenik ise, bu vektör alanı yarı tors oluşturan vektör alanı olarak adlandırılmıştır, [14].

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde, pseudo Ricci simetrik Riemann uzayına ait ait özellikler araştırılmıştır. M. C. Chaki tarafından, pseudo Ricci simetrik Riemann uzayının skaler eğriliğinin sabit olması halinde ancak bu sabitin sıfır olması gerektiği teorem yardımıyla verilmiştir, [7]. Dolayısıyla, $\varphi \neq sbt.$ ve $\varphi \neq 0$ olmak üzere, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşümün tanımlı olduğu, boyutu üç ve üçten büyük Ricci-düz olmayan bir pseudo Ricci simetrik Riemann uzayı göz önüne alınmıştır. Bu uzaya ait sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm ile bu uzayın skaler eğriliği ve $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanı arasındaki ilişkiler incelenerek elde edilen sonuçlar teoremler yardımıyla ifade edilmiştir.

Bu çalışmanın dördüncü bölümünde, boyutu üç ve üçten büyük olan ve Ricci-düz olmayan bir pseudo Ricci simetrik Riemann uzayına ait özel vektör alanları ile üretilen sonsuz küçük konformal dönüşüm ve sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm ile ilgili araştırmalar yapılmıştır. Bu doğrultuda, bir Riemann uzayında $\boldsymbol{v}$ gradyent vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük has homotetik dönüşüm mevcut ise, bu takdirde $\boldsymbol{v}$ vektör alanının konküran vektör alanından ibaret olduğu ve boyutu üç ve üçten büyük olan pseudo Ricci simetrik Riemann uzayında uzunluğu sabit olmayan konküran vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük bir dönüşüm sözkonusu ise, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanı ile $\boldsymbol{v_i}$'nin birbirine dik olmadığı gösterilmiştir. Boyutu ikiden büyük, pseudo Ricci simetrik Riemann uzayında uzunluğu sabit olmayan konküran vektör alanı bir sonsuz küçük dönüşüm üretiyorsa, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının Lie invaryant olduğu ispat edilmiştir. $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanına sahip bir pseudo Ricci simetrik Riemann uzayında, uzunluğu sabit olmayan konküran vektör alanı sonsuz küçük dönüşüm oluşturuyorsa, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının uzunluğunun Lie invaryant olamadığı gösterilmiştir.

Bir Riemann uzayında, uzunluğu sabit olmayan $\boldsymbol{v}$ reküran vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük konformal dönüşüm göz önüne alındığında, bu uzaya ait $\boldsymbol{v_i}$ ve $\boldsymbol{\phi_i}$ vektörlerinin birbirine dik olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, boyutu üç ve üçden büyük olan pseudo Ricci simetrik Riemann uzayı üzerinde, uzunluğu sabit olmayan $\boldsymbol{v}$ reküran vektör alanı gözönüne alındığında, bu uzayın $\boldsymbol{v_i}$ vektörü ile $\boldsymbol{\lambda_i}$ kovektörünün birbirine dik olduğu ispatlanmıştır.

Bir Riemann uzayında, tors oluşturan $\boldsymbol{v_i}$ vektör alanının $\boldsymbol{\phi_i}$ $(\phi \neq 0)$ ve $\boldsymbol{\rho_i}$ ile kolineer olması halinde, bu vektör alanının bir konsörkılır vektör alanından ibaret olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, bir Riemann uzayında, konsörkılır vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük konformal dönüşüm göz önüne alınmış ve bu durumda $\varphi \neq \rho$ olduğu gösterilmiştir.

Boyutu üç ve üçten büyük olan bir pseudo Ricci simetrik Riemann uzayında $\rho \neq 0$ olmak üzere, $\boldsymbol{v_l}$ yarı tors oluşturan vektör alanı ile uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının birbirine dik olmadığı bir başka teorem yardımıyla ispatlanmıştır.

Bu çalışmanın beşinci bölümünde ise, pseudo simetrik Riemann uzayı göz önüne alınmıştır. M. C. Chaki tarafından, pseudo simetrik Riemann uzayının $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının kapalı olduğu ve Ricci tensörü Codazzi tensörü olan bir pseudo simetrik Riemann uzayının konformal olarak düz bir Riemann uzayı olduğu teoremler yardımıyla gösterilmiştir, [4]. M. C. Chaki ve U. C. De tarafından, pseudo simetrik Riemann uzayının, uzunluğu sabit olmayan $\boldsymbol{v_l}$ konküran vektör alanına sahip olması durumunda, $\boldsymbol{v_l}$ vektör alanı ile uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının birbirine dik olmadığı gösterilmiştir. Diğer taraftan, T. Sumitomo, eğrilik tensörü sonsuz küçük dönüşüm altında Lie invaryant olan, iki boyutlu Riemann uzayına ait her sonsuz küçük dönüşümün, bu uzayın skaler eğriliğinin sıfırdan farklı olduğu noktada, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşümden ibaret olduğunu göstermiştir, [9].

Bir Riemann uzayının eğrilik tensörünün kalıtımsal özelliğe sahip olması, α skaler bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathscr{L}_v R^h_{ijk} = 2\alpha R^h_{ijk} \tag{1.15}$$

bağıntısı ile karakterize edilir, [15]. Bahsedilen incelemeler göz önüne alınarak pseudo simetrik Riemann uzayında aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Skaler eğriliği sabitten ve sıfırdan farklı, iki boyutlu bir pseudo simetrik Riemann uzayının aynı $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektörü ile tanımlı bir reküran uzay olduğu gösterilmiştir. İki boyutlu bir Riemann uzayında alınan sonsuz küçük dönüşümün sonsuz küçük konformal dönüşümden ibaret olması için yeter koşul, uzayın eğrilik tensörünün (Ricci eğrilik tensörünün) kalıtımsal özelliğe sahip olmasıdır. Ayrıca, iki boyutlu bir Riemann uzayının Ricci eğrilik tensörünün kalıtımsal özelliğe sahip olması veya Lie invaryant olması halinde, eğrilik tensörünün de aynı özelliklere sahip olduğu gösterilmiştir.

Boyutu ikiden büyük bir pseudo simetrik Riemann uzayına ait sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınmış ve bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektörünün, sonsuz küçük konformal dönüşüm altında Lie invaryant olmadığı bulunmuştur.

Konformal düz bir pseudo simetrik Riemann uzayında, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşümün tanımlanamayacağı gösterilmiştir.

Bu çalışmanın altıncı bölümünde, boyutu üç ve üçten büyük pseudo projektif Ricci simetrik Riemann uzayı ve bu uzaya ait özel vektör alanları ile üretilen sonsuz küçük dönüşüm göz önüne alınarak elde edilen sonuçlar teoremler yardımıyla ifade edilmiştir. M.C. Chaki tarafından, boyutu ikiden büyük olan bir pseudo projektif Ricci simetrik Riemann uzayının skaler eğriliğinin sabit olduğu gösterilmiştir, [16]. Bahsedilen incelemeler doğrultusunda, boyutu ikiden büyük pseudo projektif Ricci simetrik Riemann uzayı üzerinde, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alındığında, uzayın skaler eğriliğinin sıfır olduğu ve bu durumda, uzayın bir pseudo Ricci simetrik Riemann uzayından ibaret olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışmanın son bölümünde ise, boyutu ikiden büyük bir pseudo projektif simetrik Riemann uzayının skaler eğriliğinin sabit olduğu ispat edilmiştir. Pseudo projektif simetrik Riemann uzayında sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alındığında, bu uzayın skaler eğriliğinin sıfır olduğu gösterilmiştir. Boyutu ikiden büyük, Ricci-düz ve Einstein uzayı olmayan bir pseudo projektif simetrik Riemann uzayında, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınırsa uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektörünün Lie invaryant olmadığı ve bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_i}$ vektörü ile φ_i'nin birbirine dik olduğu gösterilmiştir.

Boyutu ikiden büyük ve Einstein uzayı olmayan bir pseudo projektif simetrik Riemann uzayında konküran vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük dönüşüm göz önüne alındığında, bu uzayın skaler eğriliğinin sıfır olduğu ve ayrıca, böyle bir uzayda, uzunluğu sabit olmayan reküran bir vektör alanı varsa, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_i}$ vektör alanı ile $\boldsymbol{v_i}$ vektör alanının birbirine dik olduğu ispat edilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Riemann Uzayı ve Riemann Metriği

Simetrik ve determinantı sıfırdan farklı, pozitif tanımlı g_{ij} metrik tensörüne sahip n-boyutlu V_n uzayına Riemann uzayı denir.

2.1.1 Christoffel sembolleri

n-boyutlu bir Riemann uzayının birinci cins Christoffel sembollerinin ifadesi aşağıdaki şekildedir:

$$[k,ij] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \ . \tag{2.1}$$

Ayrıca, (2.1) denklemi göz önüne alınarak, ikinci cins Christoffel sembolleri

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kh}[h,ij] \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır, [5].

2.1.2 Kovaryant türev

n-boyutlu V_n uzayına ait bir kovaryant $\boldsymbol{v_i}$ vektör alanının kovaryant türevi

$$\nabla_j v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - v_h \Gamma^h_{ji} \tag{2.3}$$

ve bir kontravaryant $\boldsymbol{u^i}$ vektör alanının kovaryant türevi

$$\nabla_k u^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} + u^h \Gamma^i_{kh} \tag{2.4}$$

şeklindedir.

2.1.3 Eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve skaler eğrilik

Bir V_n Riemann uzayında, $\boldsymbol{v}$ vektör alanının kovaryant bileşenleri $\boldsymbol{v_i}$ ile gösterilsin. Bu durumda, (2.3) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\nabla_k \nabla_j v_i &= \frac{\nabla_j v_i}{\partial x^k} - \Gamma^b_{ki} \nabla_j v_b - \Gamma^b_{kj} \nabla_b v_i \\
&= \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma^a_{ji} \frac{\partial v_a}{\partial x^k} - v_a \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma^a_{ji} - \Gamma^b_{ki} \nabla_j v_b - \Gamma^b_{kj} \nabla_b v_i
\end{aligned} \tag{2.5}$$

bulunur. Daha sonra, (2.5) denkleminde j ve k indislerinin yerleri değiştirilerek

$$\nabla_j \nabla_k v_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^k \partial x^j} - \Gamma^a_{ki} \frac{\partial v_a}{\partial x^j} - v_a \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^a_{ki} - \Gamma^b_{ji} \nabla_k v_b - \Gamma^b_{jk} \nabla_b v_i \tag{2.6}$$

elde edilir. Elde edilen (2.5) ve (2.6) denklemleri yardımıyla, $\nabla_k \nabla_j v_i - \nabla_j \nabla_k v_i$ ifadesi

$$\nabla_k \nabla_j v_i - \nabla_j \nabla_k v_i = v_a [\frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^a_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma^a_{ji} + \Gamma^a_{jb} \Gamma^b_{ki} - \Gamma^a_{kb} \Gamma^b_{ji}] \tag{2.7}$$

şeklinde bulunur. Yukarıdaki son denklemdeki

$$R^a_{kji} = \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma^a_{ji} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^a_{ki} + \Gamma^a_{kb} \Gamma^b_{ji} - \Gamma^a_{jb} \Gamma^b_{ki} \tag{2.8}$$

tensörü, V_n Riemann uzayının eğrilik tensörü adını alır.

V_n uzayında, (2.7) ve (2.8) ifadeleri yardımıyla,

$$\nabla_k \nabla_j v_h - \nabla_j \nabla_k v_h = -R^i_{kjh} v_i \tag{2.9}$$

ve

$$\nabla_k \nabla_j v^h - \nabla_j \nabla_k v^h = R^h_{kji} v^i \tag{2.10}$$

bağıntıları bulunur ki, bu ifadeler Ricci Özdeşlikleri olarak adlandırılmaktadır, [5]. Bu uzayda, (2.8) bağıntısı yardımıyla, R^h_{ijk} eğrilik tensörü için

$$R^h_{ijk} = -R^h_{jik} \tag{2.11}$$

$$R^h_{ijk} + R^h_{jki} + R^h_{kij} = 0 \tag{2.12}$$

bağıntıları mevcuttur. Yukarıdaki son denklemdeki özdeşlik I. Bianchi özdeşliği adını alır.

Bu durumda, (2.8) ifadesinden R_{ijkh} kovaryant eğrilik tensörü

$$R_{ijkh} = R^m_{ijk} g_{mh} \tag{2.13}$$

şeklindedir, [5].

Burada, R_{ijkh} kovaryant eğrilik tensörü

$$R_{ijkh} = -R_{jikh} = -R_{ijhk} = R_{khij} \tag{2.14}$$

bağıntılarını sağlamaktadır. Ayrıca,

$$R_{ij} = R^h_{hij} = g^{mh} R_{mijh} = g^{mh} R_{imhj} \tag{2.15}$$

denklemleri ile tanımlı R_{ij} tensörüne, Ricci tensörü denir, [5]. Bu tensör yardımıyla, Riemann uzayının skaler eğriliği

$$R = g^{ij} R_{ij} \tag{2.16}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Ayrıca, (2.12) denklemindeki I. Bianchi özdeşliği (2.13) denklemi yardımıyla aşağıdaki şekle dönüşür:

$$R_{ijkm} + R_{jkim} + R_{kijm} = 0. \tag{2.17}$$

Eğrilik tensörünün Riemann konneksiyonuna göre kovaryant türevlerini içeren, II. Bianchi özdeşliğinin ifadesi aşağıdaki şekildedir:

$$\nabla_l R^h_{ijk} + \nabla_i R^h_{jlk} + \nabla_j R^h_{lik} = 0. \tag{2.18}$$

Metrik tensörünün kovaryant türevinin sıfır olduğu göz önüne alınırsa, II. Bianchi özdeşliği

$$\nabla_l R_{ijkh} + \nabla_i R_{jlkh} + \nabla_j R_{likh} = 0 \tag{2.19}$$

dir.

2.2 Özel Riemann Uzayları

2.2.1 Reküran ve Ricci-reküran Riemann uzayları

Bir V_n Riemann uzayının, kovaryant eğrilik tensörü, $\boldsymbol{\lambda_l}$ sıfırdan farklı bir kovaryant vektör alanı olmak üzere,

$$\nabla_l R^h_{ijk} = \lambda_l R^h_{ijk} \tag{2.20}$$

koşulunu sağlıyorsa, bu uzay reküran Riemann uzayı olarak adlandırılmıştır. Burada $\boldsymbol{\lambda_l}$ reküran vektör alanı olarak adlandırılır. Diğer taraftan, $\boldsymbol{\lambda_l}$ sıfırdan farklı bir kovaryant vektör alanı olmak üzere, V_n Riemann uzayının Ricci eğrilik tensörü

$$\nabla_l R_{hi} = \lambda_l R_{hi} \tag{2.21}$$

koşulunu sağlıyorsa, bu uzay Ricci-reküran Riemann uzayı olarak adlandırılır, [17]. Ayrıca, (2.15) ve (2.20) denklemleri yardımıyla her reküran Riemann uzayının aynı zamanda Ricci reküran olduğu, fakat tersinin her zaman doğru olmadığı açıktır.

Yardımcı Teorem 2.1: Bir V_n Riemann uzayında,

$$\nabla_h R^h_i = \frac{\nabla_i R}{2} \tag{2.22}$$

bağıntısı mevcuttur, [18]. □

2.2.2 Düz uzay, Ricci ve konform düz uzay

V_n, Riemann uzayının eğrilik tensörü

$$R_{hijk} = 0 \tag{2.23}$$

koşulunu sağlıyorsa, bu uzay düz uzay olarak adlandırılır. Bu uzayın Ricci eğrilik tensörü özdeş olarak sıfır ise, yani

$$R_{ij} = 0 \tag{2.24}$$

koşulu sağlanıyorsa, böyle bir uzaya Ricci-düz uzay denir. Benzer şekilde, n-boyutlu V_n Riemann uzayının C_{ijkh} konform eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} C_{ijkh} &= R_{ijkh} - \frac{1}{n-2}(g_{ih}R_{jk} - g_{jh}R_{ik} + g_{jk}R_{ih} - g_{ik}R_{jh}) \\ &+ \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{jk}g_{ih} - g_{jh}g_{ik}) \end{aligned} \tag{2.25}$$

şeklinde tanımlanır, [5]. Eğer, V_n Riemann uzayının C_{ijkh} konform eğrilik tensörü, özdeş olarak sıfır ise, böyle bir uzay konform düz uzay olarak adlandırılır.

2.2.3 Einstein uzayı

V_n Riemann uzayının Ricci tensörü, uzayın metrik tensörünün bir katı ise, böyle bir uzaya Einstein uzayı denir. O halde, bir Einstein uzayı

$$R_{ij} = kg_{ij} \tag{2.26}$$

bağıntısı ile karakterize edilmektedir. Yukarıdaki (2.26) denklemi g^{ij} ile çarpılır ve i ve j üzerinden toplam alınırsa

$$k = \frac{R}{n} \tag{2.27}$$

bulunur. (2.16) ve (2.22) bağıntıları kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla_i R &= \nabla_h(g^{hj}R_{ij}) \\ &= g^{hj}g_{ij}\frac{1}{n}\nabla_h R \\ &= \delta_i^h\frac{1}{n}\nabla_h R \\ &= \frac{1}{n}\nabla_i R \end{aligned}$$

veya

$$(\frac{n-2}{2n})\nabla_i R = 0$$

elde edilir. O halde, $n \geq 3$ için, Einstein uzayının skaler eğriliği sabittir.

2.2.4 Pseudo simetrik Riemann uzayı

$\boldsymbol{\lambda_l}$ sıfırdan farklı bir kovaryant vektör alanı olmak üzere, n-boyutlu bir V_n Riemann uzayının kovaryant eğrilik tensörü

$$\nabla_l R_{ijkh} = 2\lambda_l R_{ijkh} + \lambda_i R_{ljkh} + \lambda_j R_{ilkh} + \lambda_k R_{ijlh} + \lambda_h R_{ijkl} \tag{2.28}$$

koşulunu sağlıyorsa, bu uzaya pseudo simetrik Riemann uzayı denir. Burada, $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovaryant vektör alanı da, uzayın sıfırdan farklı eş vektör alanı adını alır [4]. n-boyutlu pseudo simetrik Riemann uzayı kısaca, $(PS)_n$ ile gösterilir, [4].

2.2.5 Pseudo Ricci simetrik Riemann uzayı

$\boldsymbol{\lambda_l}$ sıfırdan farklı bir kovaryant vektör alanı için, Ricci-düz olmayan bir V_n Riemann uzayının Ricci eğrilik tensörü

$$\nabla_k R_{ij} = 2\lambda_k R_{ij} + \lambda_i R_{jk} + \lambda_j R_{ki} \tag{2.29}$$

koşulunu sağlıyorsa, bu uzay M. C. Chaki tarafından pseudo Ricci simetrik Riemann uzayı olarak adlandırmıştır, [7]. Burada $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovaryant vektör alanı, bu uzayın eş vektör alanı adını alır. (2.29) denklemi $n = 2$ için özdeş olarak sağlandığından, çalışma boyunca n-boyutlu pseudo Ricci simetrik Riemann uzayı, $n \geq 3$ için göz önüne alınmıştır. Bu uzay kısaca, $(PRS)_n$ ile gösterilmektedir.

2.3 Sonsuz Küçük Dönüşüm

V_n, C^∞ sınıfından ve koordinatları x^i olan, n-boyutlu bir Riemann uzayı olsun. V_n uzayının metriği

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j, \quad i,j = 1,...,n \tag{2.30}$$

ile verilsin. Ayrıca,

$$T : \overline{x}^i = f^i(x^j), \qquad det(\partial_j f^i) \neq 0 \tag{2.31}$$

bağıntıları, V_n uzayına ait R ve $\overline{R}$ bölgeleri arasında bire-bir bir nokta dönüşümünü tanımlasın. Bu nokta dönüşümü R deki x^i noktasını $\overline{R}$ deki $\overline{x}^i$ noktasına, R deki $x^i + dx^i$ noktasını $\overline{R}$ deki $\overline{x}^i + d\overline{x}^i$ noktasına dönüştürür. Bununla birlikte, $\overline{x}^i$ ile $\overline{x}^i + d\overline{x}^i$ noktaları arasındaki uzaklığın karesi

$$d\overline{s}^2 = \overline{g}_{ij}(x)d\overline{x}^i d\overline{x}^j \tag{2.32}$$

dir. Ayrıca $\overline{g}_{ij}(x)$ ile $g_{ij}(x)$ arasında

$$\overline{g}_{ij}(x) = (\partial_i f^k)(\partial_j f^l)g_{kl}(\overline{x}) \tag{2.33}$$

bağıntısı vardır, [8].

Tanım 2.1: x^i ve $x^i + dx^i$ noktaları arasındaki uzaklık, $\overline{x}^i$ ve $\overline{x}^i + d\overline{x}^i$ noktaları arasındaki uzaklığa eşit ise, (2.31) ile tanımlanan nokta dönüşümüne, V_n Riemann uzayında bir hareket veya izometri denir. v^i kontravaryant bir vektör alanı olmak üzere, (2.31) ile verilen nokta dönüşümü

$$\overline{x}^i = x^i + v^i dt \tag{2.34}$$

şeklinde bir sonsuz küçük dönüşüm olsun. Bu durumda,

$$\partial_i f^j = \delta_i^j + \partial_i v^j dt \tag{2.35}$$

bağıntısı mevcuttur. Böylece, (2.35) denklemi, (2.33) denkleminde yerine yazılırsa

$$\overline{g}_{ij} = (\delta_i^k + \partial_i v^k dt)(\delta_j^l + \partial_j v^l dt)g_{kl}(x^i + v^i dt) \tag{2.36}$$

denklemi elde edilir. Daha sonra, (2.36)'deki $g_{kl}(x^i + v^i dt)$ ifadesi için, $dx^i = v^i dt$ olmak üzere, Taylor açılımı kullanılırsa ve birinci dereceden sonsuz küçük dönüşüm göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} g_{kl}(x^i+v^idt) &= g_{kl}+\partial_i g_{kl}dx^i \\ &= g_{kl}+\partial_i g_{kl}\frac{dx^i}{dt}dt \\ &= g_{kl}+\partial_i g_{kl}v^idt \end{aligned} \tag{2.37}$$

bağıntısı elde edilir. Böylece, elde edilen bu bağıntı (2.36) denkleminde yerine yazılırsa

$$\overline{g}_{ij}=(\delta_i^k+\partial_i v^k dt)(\delta_j^l+\partial_j v^l dt)(g_{kl}+v^m\partial_m g_{kl}dt) \tag{2.38}$$

bulunur. Buradan da,

$$\overline{g}_{ij}=g_{ij}+(v^m\partial_m g_{ij}+g_{kj}\partial_i v^k+g_{il}\partial_j v^l)dt \tag{2.39}$$

olduğu görülür.

Teorem 2.1: Bir Riemann uzayında, $\overline{x}^i=x^i+v^idt$ sonsuz küçük dönüşümünün bir hareket olması için gerek ve yeter koşul,

$$v^m\partial_m g_{ij}+g_{kj}\partial_i v^k+g_{il}\partial_j v^l=0 \tag{2.40}$$

bağıntısının mevcut olmasıdır, [8]. □

Tanım 2.2: $\overline{g}_{ij}-g_{ij}$ farkına, g_{ij}'nin $\boldsymbol{v}$ vektör alanına göre Lie diferansiyeli denir ve $\mathscr{L}_v g_{ij}dt$ ile gösterilir. $\mathscr{L}_v g_{ij}$'ye ise, g_{ij}'nin $\boldsymbol{v}$ vektör alanına göre Lie türevi denir. Bu durumda, (2.39) bağıntısından

$$\mathscr{L}_v g_{ij}dt=\overline{g}_{ij}-g_{ij}=(v^m\partial_m g_{kl}+g_{lj}\partial_i v^l+g_{il}\partial_j v^l)dt \tag{2.41}$$

bulunur. Diğer taraftan, (2.4) ve (2.41) denklemleri yardımıyla g_{ij} metrik tensörünün Lie türevi

$$\mathscr{L}_v g_{ij}=\nabla_i v_j+\nabla_j v_i \tag{2.42}$$

şeklindedir, [8]. Bu tanımdan yararlanarak, Teorem 2.1 şu şekilde de ifade edilebilir:

Teorem 2.2: n-boyutlu bir V_n Riemann uzayında, $\overline{x}^i=x^i+v^idt$ sonsuz küçük dönüşümünün bir hareket olması için gerek ve yeter koşul,

$$\mathscr{L}_v g_{ij}=0 \tag{2.43}$$

bağıntısının mevcut olmasıdır, [8]. Ayrıca, (2.43) bağıntısı yardımıyla,

$$\mathscr{L}_v \Gamma^h_{ij} = 0 \tag{2.44}$$

ve

$$\mathscr{L}_v R^h_{ijk} = 0 \tag{2.45}$$

bağıntıları da mevcuttur, [8]. □

Önerme 2.1: n-boyutlu bir V_n Riemann uzayında, göz önüne alınan sonsuz küçük dönüşüm, sadece bir hareketten ibaret ise,

$$\mathscr{L}_v g^{ij} = 0, \tag{2.46}$$

$$\mathscr{L}_v R_{ijkh} = 0 \tag{2.47}$$

ve

$$\mathscr{L}_v R_{ij} = 0 \tag{2.48}$$

dır.

İspat: $g^{im} g_{mj} = \delta^i_j$ olup, Kroneker deltanın Lie türevi sıfır olduğundan, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$g_{mj} \mathscr{L}_v g^{im} + g^{im} \mathscr{L}_v g_{mj} = 0. \tag{2.49}$$

Bu ifadede, (2.43) denklemi kullanılırsa

$$g_{mj} \mathscr{L}_v g^{im} = 0 \tag{2.50}$$

denklemi elde edilir. Ayrıca, (2.50) denklemi g^{jl} ile çarpılırsa ve j ve l üzerinden toplam alınırsa

$$\delta^l_m \mathscr{L}_v g^{im} = 0 \tag{2.51}$$

ifadesi elde edilir. Böylece, (2.46) bağıntısı, göz önüne alınan sonsuz küçük dönüşümün sadece bir hareket olması halinde geçerlidir. Ayrıca,

$$\mathscr{L}_v R_{ijkh} = \mathscr{L}_v (R^m_{ijk} g_{hm}) \tag{2.52}$$

olmak üzere, (2.52) denkleminde, (2.43) ve (2.45) denklemleri kullanılarak (2.47) bağıntısına ulaşılır. Ayrıca,

$$\mathscr{L}_v R_{ih} = \mathscr{L}_v (g^{jk} R_{ijkh}) \tag{2.53}$$

denkleminde, (2.46), (2.47) ve (2.53) denklemleri kullanılarak (2.48) denklemi elde edilir.

2.3.1 Burulmasız lineer konneksiyonlu uzaylarda sonsuz küçük dönüşümler

V_n, koordinatları x^i olan, burulmasız lineer bir Γ^i_{jk} konneksiyonuna sahip, n-boyutlu bir Riemann uzayı olsun. Bu uzaya ait bir $\boldsymbol{v}$ vektör alanının kontravaryant bileşenleri $\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{i}}$ ve $\overline{x^i}$ koordinatlarına karşı gelen konneksiyon katsayısı $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ olmak üzere,

$$\overline{x}^i = f^i(x^j) = x^i + v^i dt \tag{2.54}$$

sonsuz küçük dönüşümü altında $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ ile Γ^i_{jk} arasında

$$(\partial_i f^l)\overline{\Gamma}^i_{jk}(x) = (\partial_j f^p)(\partial_k f^s)\Gamma^l_{ps}(x) + \partial_j \partial_k f^l \tag{2.55}$$

bağıntısı vardır, [8].

Tanım 2.3: V_n Riemann uzayına ait konneksiyon katsayıları Γ^i_{jk}'nın $\boldsymbol{v}$ vektör alanına göre Lie diferansiyeli

$$\mathscr{L}_v \Gamma^i_{jk} dt = \overline{\Gamma}^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} \tag{2.56}$$

ile gösterilir. Burada, $\mathscr{L}_v \Gamma^i_{jk}$ ifadesine ise, Γ^i_{jk}'nın v vektör alanına göre Lie türevi denir. Ayrıca, V_n uzayının eğrilik tensörü R^i_{ljk} olmak üzere, Γ^i_{jk} Riemann konneksiyonunun $\boldsymbol{v}$ vektör alanına göre Lie türevi

$$\mathscr{L}_v \Gamma^i_{jk} = \nabla_j \nabla_k v^i + R^i_{ljk} v^l \tag{2.57}$$

şeklinde tanımlanır, [5]. V_n'de

$$\mathscr{L}_v \Gamma^i_{jk} = 0 \tag{2.58}$$

bağıntısı mevcut ise, $\overline{x}^i = x^i + v^i dt$ sonsuz küçük dönüşümüne, sonsuz küçük afin dönüşüm denir. □

2.3.2 Lie türevinin özellikleri

V_n, lineer, burulmasız bir ∇ konneksiyonuna sahip bir Riemann uzayı ve $\boldsymbol{u^i}$, V_n'ye ait kontravaryant bir vektör alanı olsun. V_n'de, $\bar{x}^i = x^i + v^i dt$ sonsuz küçük dönüşümü

$$\mathscr{L}_v u^i = \bar{u}^i(x) - u^i(x) = v^m \nabla_m u^i - u^m \nabla_m v^i \tag{2.59}$$

şeklinde tanımlanır, [8]. $\mathscr{L}_v u^i$'ye , $\boldsymbol{u^i}$ kontravaryant vektör alanının $\boldsymbol{v}$ vektör alanına göre Lie türevi denir.

Benzer şekilde, $\boldsymbol{w_i}$ kovaryant vektör alanının $\boldsymbol{v}$ vektör alanına göre Lie Türevi

$$\mathscr{L}_v w_i = v^m \nabla_m w_i + w_m \nabla_i v^m \tag{2.60}$$

ve P^{ij}_m tensörünün $\boldsymbol{v}$ vektör alanına göre Lie türevi

$$\mathscr{L}_v P^{ij}_m = v^k \nabla_k P^{ij}_m - P^{kj}_m \nabla_k v^i - P^{ik}_m \nabla_k v^j + P^{ij}_k \nabla_m v^k \tag{2.61}$$

şeklinde tanımlanmaktadır, [8], burada ∇, Γ^i_{jk} konneksiyonuna göre kovaryant türevi göstermektedir. Eğrilik tensörünün Lie türevi,

$$\mathscr{L}_v R^h_{kji} = \nabla_k \mathscr{L}_v \Gamma^h_{ji} - \nabla_j \mathscr{L}_v \Gamma^h_{ki} \tag{2.62}$$

şeklindedir. Ayrıca, skaler p fonksiyonun $\boldsymbol{v}$ vektör alanına göre Lie türevi

$$\mathscr{L}_v p = v^k \partial_k p \tag{2.63}$$

olarak tanımlanmaktadır.

A ve B aynı cinsten tensörler olmak üzere, Lie türevi aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\mathscr{L}_v (A+B) = \mathscr{L}_v A + \mathscr{L}_v B \tag{2.64}$$

$$\mathscr{L}_v (AB) = B \mathscr{L}_v A + A \mathscr{L}_v B\ . \tag{2.65}$$

V_n'de Γ^h_{jk} konneksiyonu için

$$\mathscr{L}_v \nabla_m u^i - \nabla_m \mathscr{L}_v u^i = (\mathscr{L}_v \Gamma^i_{mk}) u^k \tag{2.66}$$

$$\mathscr{L}_v \nabla_m w_i - \nabla_m \mathscr{L}_v w_i = -(\mathscr{L}_v \Gamma^k_{mi}) w_k \tag{2.67}$$

bağıntıları geçerlidir. Bu bağıntılar P_m^{ij} tensörüne uygulanırsa,

$$\mathscr{L}_v \nabla_k P_m^{ij} - \nabla_k \mathscr{L}_v P_m^{ij} = (\mathscr{L}_v \Gamma_{kl}^i) P_m^{lj} + (\mathscr{L}_v \Gamma_{kl}^j) P_m^{il} - (\mathscr{L}_v \Gamma_{km}^l) P_l^{ij} \tag{2.68}$$

elde edilir. Özel olarak, V_n bir Riemann uzayı olduğunda, aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 2.3: V_n, n-boyutlu bir Riemann uzayı olsun. V_n' deki her hareket bir sonsuz küçük afin dönüşümdür, [8]. □

2.3.3 Sonsuz küçük konformal dönüşüm

Teorem 2.4: V_n, Riemann uzayına ait $\bar{x}^i = x^i + v^i dt$ sonsuz küçük dönüşümünün konformal dönüşümden ibaret olması için gerek ve yeter koşul, g_{ij}'nin Lie türevinin g_{ij}'nin bir katı olmasıdır. Yani, sonsuz küçük konformal dönüşüm φ skaler fonksiyon olmak üzere, aşağıdaki koşullarla karakterize edilir, [8]:

$$\mathscr{L}_v g_{ij} = 2\varphi g_{ij}. \tag{2.69}$$

Eğer, φ skaler fonksiyonu sıfırdan farklı ise, sonsuz küçük has konformal dönüşüm adını alır. Burada, φ skaler fonksiyonu bir sabitten ibaret ise, sonsuz küçük konformal dönüşüme, sonsuz küçük homotetik dönüşüm denir. Eğer, $\varphi = 0$ ise, sonsuz küçük konformal dönüşüm, sadece hareket adını alır, [8].

Yardımcı Teorem 2.2: Bir V_n Riemann uzayında, sonsuz küçük konformal dönüşüm altında, uzayın g_{ij} metrik tensörünün karşıt tensörü g^{ij}'nin, konneksiyon katsayısının, eğrilik tensörünün, Ricci eğrilik tensörünün ve skaler eğriliğinin Lie türevleri, $\varphi_i = \nabla_i \varphi$, $\varphi^h = \varphi_i g^{ih}$ olmak üzere, aşağıdaki bağıntılarla verilmektedir, [19]:

$$\mathscr{L}_v g^{ij} = -2\varphi g^{ij}, \tag{2.70}$$

$$(\mathscr{L}_v \Gamma_{jk}^h) = \delta_k^h \varphi_j + \delta_j^h \varphi_k - g_{jk} \varphi^h, \tag{2.71}$$

$$\mathscr{L}_v R_{kji}^h = \delta_j^h \nabla_k \varphi_i - \delta_k^h \nabla_j \varphi_i + g_{ki} \nabla_j \varphi^h - g_{ji} \nabla_k \varphi^h, \tag{2.72}$$

$$\mathscr{L}_v R_{jk} = (2-n) \nabla_j \varphi_k - g_{jk} \nabla_h \varphi^h, \tag{2.73}$$

$$\mathscr{L}_v R = -2\varphi R + 2(1-n)\nabla_i \varphi^i \ . \tag{2.74}$$

□

Yardımcı Teorem 2.3: Bir V_n Riemann uzayında, sonsuz küçük konformal dönüşüm için

$$2\varphi g_{ij} = \nabla_i v_j + \nabla_j v_i \tag{2.75}$$

bağıntısı geçerlidir, [8]. □

Uyarı 2.1: Her sonsuz küçük homotetik dönüşüm aynı zamanda sonsuz küçük afin dönüşümdür. □

Uyarı 2.2: Eğer, her sonsuz küçük konformal dönüşüm aynı zamanda sonsuz küçük afin dönüşüm ise, bu sonsuz küçük dönüşüm, sonsuz küçük homotetik dönüşümdür. □

Tanım 2.4: Bir Riemann uzayında, uzayın eğrilik tensörü, sonsuz küçük konformal dönüşüm altında invaryant kalıyorsa, yani

$$\mathscr{L}_v g_{ij} = 2\varphi g_{ij}, \ \mathscr{L}_v R^h_{ijk} = 0 \tag{2.76}$$

koşulu sağlanıyorsa, $\varphi \neq 0$ olmak üzere, böyle bir sonsuz küçük dönüşüm, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm olarak adlandırılır, [9]. □

2.4 Riemann Uzayında Özel Vektör Alanları

2.4.1 Tors oluşturan vektör alanları

Bir V_n Riemann uzayında, $x^i(s)$ eğrisi göz önüne alınsın. Ayrıca, $\boldsymbol{v^i(s)}$, $x^i(s)$ eğrisi boyunca, eğrinin her noktasında tanımlı bir vektör alanı olsun. $x^i(s)$ eğrisi bir $M(s)$ noktasında teğet uzayı üzerine açılsın. Böylece, elde edilen $\boldsymbol{v^i(s)}$ vektör alanının doğrultuları eğrinin teğetlerinden ibaret olursa, yani, $M(s)+\alpha v^i e_i$ noktasının geometrik değişimi eğri boyunca $\boldsymbol{v^i(s)}$ vektör alanı doğrultusunda ise, böyle bir vektör alanına tors oluşturan vektör alanı denir ve

$$d(M+\alpha v^i e_i) = \beta v^i e_i,\ dM = dx^i e_i,\ de_i = \Gamma^h_{ij} dx^j e_h \tag{2.77}$$

dir. Burada, α ve β, s'nin bir fonksiyonu ve e_i'ler teğet uzayın baz vektör alanlarıdır. Yukarıdaki denklem yardımıyla

$$\frac{d}{ds}(M+\alpha v^i e_i) \quad = \quad \beta v^i e_i \tag{2.78}$$

bulunur ve dolayısıyla

$$\frac{dx^i}{ds} + \frac{\delta(\alpha v^i)}{ds} \quad = \quad \beta v^i \tag{2.79}$$

elde edilir. Bu denklemde, $\alpha = 0$ alınırsa, $\boldsymbol{v^i}$ vektör alanı eğrinin teğet vektör alanından ibaret olur. $\alpha \neq 0$ alınırsa,

$$\frac{\delta v^i}{ds} \quad = \quad p\frac{dx^i}{ds} + qv^i, \quad p = (-\frac{1}{\alpha}),\ q = \frac{1}{\alpha}(\beta - \frac{d\alpha}{ds}) \tag{2.80}$$

dir ve dolayısıyla,

$$\nabla_i v^h \frac{dx^i}{ds} \quad = \quad p\frac{dx^h}{ds} + qv^h \tag{2.81}$$

ifadesi elde edilir. Böylece, bir V_n Riemann uzayında, $\boldsymbol{v}$ tors oluşturan vektör alanı

$$\nabla_i v^h = \phi_i v^h + \rho \delta^h_i \tag{2.82}$$

ile tanımlanmaktadır, [10]. Burada, ρ skaler bir fonksiyonu, ϕ_i kovaryant vektör alanını ve $\boldsymbol{v^h}$ ise, $\boldsymbol{v}$ tors oluşturan vektör alanının kontravaryant bileşenlerini göstermektedir.

2.4.2 Reküran vektör alanı

Bir V_n Riemann uzayında, (2.82) bağıntısında ρ skaler fonksiyonu sıfır olarak alınırsa, bu bağıntı aşağıdaki şekle dönüşür

$$\nabla_i v^h = \phi_i v^h. \tag{2.83}$$

Böylece, (2.83) bağıntısını sağlayan $\boldsymbol{v}$ vektör alanına, reküran vektör alanı adı verilir, [12].

2.4.3 Konküran vektör alanı

Bir V_n Riemann uzayında, $x^i(s)$ eğrisi göz önüne alınsın. Ayrıca, $\boldsymbol{v^i(s)}$, $x^i(s)$ eğrisi boyunca, eğrinin her noktasında tanımlı bir vektör alanı olsun. $x^i(s)$ eğrisi bir $M(s)$ noktasında teğet uzayı üzerine açılsın. Böylece, elde edilen $\boldsymbol{v^i(s)}$ vektör alanı doğrultuları, sabit $M(s)+\alpha v^i e_i$ noktasından geçiyorsa, yani, $M(s)+\alpha v^i e_i$ noktasının geometrik değişimi eğri boyunca sıfır ise, böyle bir $\boldsymbol{v^i(s)}$ vektör alanına konküran vektör alanı denir. Burada α, s'nin bir fonksiyonu ve e_i'ler teğet uzayın baz vektör alanlarıdır ve

$$d(M+\alpha v^i e_i) = 0,\ dM = dx^i e_i,\ de_i = \Gamma^h_{ij} dx^j e_h \tag{2.84}$$

dir. Bu durumda, (2.84) denklemi yardımıyla, bir $\boldsymbol{v}$ konküran vektör alanı, ρ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,

$$\nabla_i v^h = \rho \delta^h_i \tag{2.85}$$

denklemi ile karakterize edilmektedir, [10].

2.4.4 Konsörkılır vektör alanı

V_n Riemann uzayının, $\overline{V}_n$ Riemann uzayı üzerine bir konform dönüşüm τ olsun. Bu takdirde, V_n ve $\overline{V}_n$ uzaylarının karşı gelen noktalarında

$$\overline{g}_{ij} = \rho^2 g_{ij} \tag{2.86}$$

dir. Burada, ρ, V_n Riemann uzayı üzerinde tanımlı düzgün, pozitif bir fonksiyondur. V_n Riemann uzayına ait bir C eğrisinin herhangi bir p noktasının koordinatları x^i ve C eğrisinin yay uzunluğu $\boldsymbol{s}$ olsun. p noktasının τ altındaki görüntüsü $\overline{p}$, C eğrisinin görüntüsü ise $\overline{C}$ olsun. C ile $\overline{C}$'nin yay uzunlukları arasında

$$\bar{s} = \rho s \tag{2.87}$$

bağıntısı vardır. V_n'nin konneksiyon katsayıları Γ^k_{ij}, $\overline{V}_n$ Riemann uzayının konneksiyon katsayıları da $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ ile gösterildiğine göre, bunlar arasında

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \delta^k_i \rho_j + \delta^k_j \rho_i - g^{ka} g_{ij} \rho_a \tag{2.88}$$

bağıntısı vardır. Burada,

$$\rho_i = \frac{\partial \ln \rho}{\partial x^i} \tag{2.89}$$

dir. C eğrisinin p noktasındaki birim teğet vektörü $\frac{dx^k}{ds}$, $\overline{C}$'nin $\overline{p}$ noktasındaki birim teğet vektörü $\frac{dx^k}{d\bar{s}}$ dir. Böylece, (2.87) denklemine göre

$$\frac{dx^k}{d\bar{s}} = \frac{1}{\rho}\frac{dx^k}{ds} \tag{2.90}$$

dir. Dolayısıyla, (2.87) denklemi göz önüne alınarak, (2.90) denkleminin $\frac{dx^k}{ds}$ doğrultusunda kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\delta(\frac{dx^k}{ds})}{\delta\bar{s}} &= \frac{dx^i}{d\bar{s}}\overline{\nabla}_i(\frac{dx^k}{d\bar{s}}) \\
&= \frac{1}{\rho}\frac{dx^i}{ds}\overline{\nabla}_i(\frac{1}{\rho}\frac{dx^k}{ds}) \\
&= \frac{1}{\rho}\frac{dx^i}{ds}(\frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{1}{\rho}\frac{dx^k}{ds}) + \frac{1}{\rho}\frac{dx^j}{ds}\overline{\Gamma}^k_{ji})
\end{aligned} \tag{2.91}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (2.87), (2.88) ve (2.89) denklemleri göz önüne alınarak (2.91) denkleminin $\frac{dx}{ds}$ doğrultusunda kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2(\frac{dx^k}{ds})}{\delta\bar{s}^2} &= \frac{dx^j}{d\bar{s}}\overline{\nabla}_j(\frac{dx^i}{d\bar{s}}\overline{\nabla}_i(\frac{dx^k}{d\bar{s}})) \\
&= \frac{1}{\rho^3}(\frac{dx^j}{ds}\nabla_j(\frac{dx^i}{ds}\nabla_i(\frac{dx^k}{ds})) + \nabla_j\rho_i\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} \\
&+ g^{\alpha k}\nabla_j\rho_\alpha\frac{dx^j}{ds} + \rho^k\rho_j\frac{dx^j}{ds} - g^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\frac{dx^k}{ds} \\
&+ 2\rho_i\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^j}{ds}\nabla_j(\frac{dx^i}{ds}))
\end{aligned} \tag{2.92}$$

bulunur. Burada, $\rho^j = g^{jm}\rho_m$ dir. Benzer şekilde, (2.86), (2.90) ve (2.91) bağıntılarından elde edilen denklemde, (2.92) denklemi kullanıldığında ortaya çıkan $\nabla_j\rho_i - \rho_i\rho_j + \frac{1}{2}g^{mn}\rho_m\rho_n g_{ij}$ ifadesi, ρ_{ij} olarak gösterilirse

$$\rho_{ij} = \nabla_j\rho_i - \rho_i\rho_j + \frac{1}{2}g^{mn}\rho_m\rho_n g_{ij} \tag{2.93}$$

ve $\rho_j^k = g^{kh}\rho_{hj}$ olarak yazılırsa, V_n Riemann uzayının çemberlerinin, τ dönüşümü altında, $\overline{V}_n$ Riemann uzayının çemberlerine dönüşmesi için gerek ve yeter koşul,

$$\rho_{mn} = \phi g_{mn} \tag{2.94}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Böylece, (2.93) ve (2.94) yardımıyla

$$\nabla_i\rho_j = \rho_i\rho_j + \psi g_{ij}, \;\; \psi = \phi - \frac{1}{2}g^{mn}\rho_m\rho_n \tag{2.95}$$

bağıntısına ulaşılır. Dolayısıyla, (2.95) bağıntısını sağlayan vektör alanı, konsörkılır vektör alanı olarak adlandırılır, [13]. 1951 yılında, T. Adati, [20], (2.82) denklemi ile verilen ve tors oluşturan vektör alanının konsörkılır vektör alanından ibaret olması için gerek ve yeter koşulun, (2.82) denklemindeki ϕ_i'nin, gradyent vektör alanından ibaret olduğunu ispatlamıştır.

2.4.5 Yarı tors oluşturan vektör alanı

Bir Riemann uzayında, $\boldsymbol{T}$ ve $\boldsymbol{v}$ vektör alanları

$$T^\alpha R^h_{\alpha j\beta}v^\beta = 0 \tag{2.96}$$

bağıntısını sağlarsa, $\boldsymbol{T}$ ve $\boldsymbol{v}$ vektör alanlarına yarı eşlenik vektör alanı denir, [14]. Bu durumda, (2.82) bağıntısı ile verilen, $\boldsymbol{v}$ tors oluşturan vektör alanı kendisi ile yarıeşlenik ise, (2.96) bağıntısı yardımıyla

$$R^h_{\alpha j\beta}v^\alpha v^\beta = 0 \tag{2.97}$$

ifadesi gerçeklenir ve böyle bir vektör alanı, yarı tors oluşturan vektör alanı olarak adlandırılır, [14].

3. PSEUDO RICCI SİMETRİK RIEMANN UZAYLARINDA SONSUZ KÜÇÜK DÖNÜŞÜMLER

3.1 Pseudo Ricci Simetrik Riemann Uzaylarında Sonsuz Küçük Pseudo Homotetik Dönüşüm

1968 yılında, Yamaguchi ve Matsumoto, [21], Ricci Reküran Riemann uzayları üzerinde, sonsuz küçük projektif, sonsuz küçük konformal ve sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşümleri incelenmişlerdir. Ayrıca, boyutu üç ve üçten büyük olan Ricci-reküran Riemann uzayları eğer, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm kabul ediyorsa, bu sonsuz küçük dönüşümün, sonsuz küçük homotetik dönüşümden ibaret olması gerektiğini ispat etmişlerdir. Aynı zamanda, böyle bir uzayda akış çizgileri geodezikler olan sonsuz küçük has homotetik dönüşüm tanımlanamayacağını göstermişlerdir. 1988 yılında Chaki tarafından yapılan diğer bir çalışmada, [7], pseudo Ricci simetrik Riemann uzaylarının yapısı incelenmiş ve bu uzayların skaler eğriliğinin sabit olması halinde, bu sabitin sıfır olması gerektiği ispatlamıştır.

Bu bölümde, yukarıda bahsedilen çalışmalar göz önünde bulundurularak, pseudo Ricci simetrik Riemann uzaylarına ait sonsuz küçük konformal dönüşüm ve sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm incelenerek, bu sonsuz küçük dönüşümler altında pseudo Ricci simetrik Riemann uzayının $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının ve skaler eğriliğinin özellikleri araştırılmıştır.

Öncelikle, daha sonra kullanılmak üzere aşağıdaki teorem verilmiş olsun:

Teorem 3.1: T_{ij}'ler simetrik bir tensörün bileşenleri olmak üzere,

$$e_l T_{ij} + e_i T_{jl} + e_j T_{li} = 0$$

koşulu sağlanıyorsa, bu takdirde, ya her e_j ya da her T_{ij} sıfırdır, [22]. □

Uyarı 3.1: Bu bölümde verilecek olan tüm teoremlerde, Ricci olarak düz olmayan ve boyutu ikiden büyük n-boyutlu bir pseudo Ricci simetrik Riemann uzayı göz önüne alınacaktır. Bu uzay, kısaca $(PRS)_n$ ile gösterilecektir. □

Uyarı 3.2: Bu bölümde ele alınacak tüm teoremlerde, $\varphi \neq sabit$ koşulunu sağlayan sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınacaktır. □

Önerme 3.1: Skaler eğriliği sabit ve sıfırdan farklı $(PRS)_n$ uzayının $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanı bir gradyenttir.

İspat: İlk olarak, (2.29) ile verilen denklemde, i, j, k indisleri devirsel olarak değiştirilirse

$$\nabla_i R_{jk} = 2\lambda_i R_{jk} + \lambda_j R_{ki} + \lambda_k R_{ij} \tag{3.1}$$

ve

$$\nabla_j R_{ki} = 2\lambda_j R_{ki} + \lambda_k R_{ij} + \lambda_i R_{jk} \tag{3.2}$$

bağıntıları elde edilir. Böylece, (2.29) ve son iki denklem toplanırsa,

$$\nabla_k R_{ij} + \nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ki} = 4\lambda_k R_{ij} + 4\lambda_i R_{jk} + 4\lambda_j R_{ki} \tag{3.3}$$

bulunur. Daha sonra, (3.3) bağıntısı g^{ij} ile çarpılırsa ve i ve j indislerine göre toplam alınırsa

$$g^{ij}(\nabla_k R_{ij} + \nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ki}) = g^{ij}(4\lambda_k R_{ij} + 4\lambda_i R_{jk} + 4\lambda_j R_{ki}) \tag{3.4}$$

denklemi elde edilir. Diğer taraftan, (3.4) denklemi, (2.15) kullanılarak düzenlenirse

$$\nabla_k R + 2\nabla_i R^i_k = 4\lambda_k R + 8\lambda^j R_{jk} \tag{3.5}$$

bulunur. Bu durumda, (3.5) denkleminde Yardımcı Teorem 2.1 kullanılırsa

$$\nabla_k R = 2\lambda_k R + 4\lambda^j R_{jk} \tag{3.6}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca, (2.29) bağıntısında j ile k indislerinin yeri değiştirilerek denklem tekrar göz önüne alınırsa

$$\nabla_j R_{ik} = 2\lambda_j R_{ik} + \lambda_i R_{kj} + \lambda_k R_{ji} \tag{3.7}$$

bulunur. Bu takdirde, (2.29) ve (3.7) denklemleri taraf tarafa çıkartılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} &= (2\lambda_k R_{ij} + \lambda_i R_{jk} + \lambda_j R_{ki}) - (2\lambda_j R_{ik} + \lambda_i R_{kj} + \lambda_k R_{ji}) \\ &= \lambda_k R_{ij} - \lambda_j R_{ik} \end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir. Daha sonra, (3.8) denklemi g^{ij} ile çarpılırsa ve i ve j indislerine göre toplam alınırsa

$$g^{ij}\nabla_k R_{ij} - g^{ij}\nabla_j R_{ik} = g^{ij}\lambda_k R_{ij} - g^{ij}\lambda_j R_{ik} \tag{3.9}$$

dir. Eğer, (3.9) denklemi, (2.15) kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\nabla_k R - \nabla_j R^j_k = \lambda_k R - \lambda_j R^j_k \tag{3.10}$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan, (3.10) denkleminde Yardımcı Teorem 2.1 kullanılırsa

$$\nabla_k R = 2\lambda_k R - 2\lambda_j R^j_k \tag{3.11}$$

olduğu görülür. Böylece, (3.6) ve (3.11) bağıntıları yardımıyla

$$\lambda_j R^j_k = 0 \tag{3.12}$$

bulunur. Daha sonra, (3.12) bağıntısı (3.6) denkleminde kullanılırsa

$$\nabla_k R = 2\lambda_k R \tag{3.13}$$

bağıntısı elde edilir. $R \neq 0$ iken, (3.13) denkleminden

$$\lambda_k = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^k}(lnR^2) \tag{3.14}$$

ifadesi mevcut olur. Bu da λ_k'nın bir gradyent olduğunu gösterir. □

Uyarı 3.3: Bir $(PRS)_n$ uzayının skaler eğriliği sabitse, bu uzayın skaler eğriliği sıfır olmak zorundadır. □

Önerme 3.2: Bir V_n Riemann uzayında sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm altında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur, [21]:

i.

$$\mathscr{L}_v R_{ijkm} = 2\varphi R_{ijkm},\ \mathscr{L}_v R_{ij} = 0 \ ve\ \mathscr{L}_v R = -2\varphi R \tag{3.15}$$

ii.

$$\nabla_r \varphi^r = 0,\ \nabla_j \varphi_i = 0\ (n > 2). \tag{3.16}$$

□

Önerme 3.3: Bir $(PRS)_n$ uzayında, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınsın. Bu durumda

$$\mathscr{L}_v \lambda_l = d_l \tag{3.17}$$

olmak üzere

$$d_l = -\varphi_l \tag{3.18}$$

bağıntısı mevcuttur.

İspat: İlk olarak, (2.68) ifadesi Ricci eğrilik tensörüne uygulanırsa

$$\mathscr{L}_v \nabla_l R_{ij} - \nabla_l \mathscr{L}_v R_{ij} = -(\mathscr{L}_v \Gamma^m_{li}) R_{mj} - (\mathscr{L}_v \Gamma^m_{lj}) R_{im} \tag{3.19}$$

dir. Ayrıca, (3.19) denklemi $(3.15)_2$ bağıntısı yardımıyla aşağıdaki forma indirgenir

$$\mathscr{L}_v \nabla_l R_{ij} = -(\mathscr{L}_v \Gamma^m_{li}) R_{mj} - (\mathscr{L}_v \Gamma^m_{lj}) R_{im}\ . \tag{3.20}$$

Daha sonra, (3.20) denkleminde (2.71) bağıntısının kullanılması sonucunda

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_v \nabla_l R_{ij} &= -(\delta^m_i \varphi_l + \delta^m_l \varphi_i - \varphi^m g_{li}) R_{mj} - (\delta^m_j \varphi_l + \delta^m_l \varphi_j - \varphi^m g_{lj}) R_{im} \\ &= -2\varphi_l R_{ij} - \varphi_i R_{jl} - \varphi_j R_{li} + \varphi^m g_{li} R_{mj} + \varphi^m g_{lj} R_{im}\end{aligned} \tag{3.21}$$

bulunur. Bundan başka, (3.21) denkleminde (2.29) kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v (2\lambda_l R_{ij} + \lambda_i R_{jl} + \lambda_j R_{li}) = -2\varphi_l R_{ij} - \varphi_i R_{jl} - \varphi_j R_{li} + \varphi^m g_{li} R_{mj} + \varphi^m g_{lj} R_{im} \tag{3.22}$$

denklemi elde edilir. Son denklemde, Lie türevinin özellikleri kullanıldığı takdirde

$$
\begin{aligned}
&2\lambda_l \mathscr{L}_v R_{ij} + 2R_{ij}\mathscr{L}_v \lambda_l + \lambda_i \mathscr{L}_v R_{jl} + R_{jl}\mathscr{L}_v \lambda_i + \lambda_j \mathscr{L}_v R_{li} + R_{li}\mathscr{L}_v \lambda_j \\
&= -2\varphi_l R_{ij} - \varphi_i R_{jl} - \varphi_j R_{li} + \varphi^m g_{li} R_{mj} + \varphi^m g_{lj} R_{im} \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece, $(3.15)_2$ bağıntısı yardımıyla, (3.23) denklemi

$$
2R_{ij}\mathscr{L}_v \lambda_l + R_{jl}\mathscr{L}_v \lambda_i + R_{li}\mathscr{L}_v \lambda_j = -2\varphi_l R_{ij} - \varphi_i R_{jl} - \varphi_j R_{li} + \varphi^m g_{li} R_{mj} + \varphi^m g_{lj} R_{im} \qquad (3.24)
$$

halini alır ve (3.24) denkleminde (3.17) bağıntısı kullanılırsa,

$$
2d_l R_{ij} + d_i R_{jl} + d_j R_{li} = -2\varphi_l R_{ij} - \varphi_i R_{jl} - \varphi_j R_{li} + \varphi^m g_{li} R_{mj} + \varphi^m g_{lj} R_{im} \qquad (3.25)
$$

eşitliği elde edilir. Bu son denklemde l, i ve j indisleri devirsel olarak değiştirildiği takdirde, elde edilen denklemler

$$
2d_i R_{jl} + d_j R_{li} + d_l R_{ij} = -2\varphi_i R_{jl} - \varphi_j R_{li} - \varphi_l R_{ij} + \varphi^m g_{ij} R_{ml} + \varphi^m g_{il} R_{jm}, \qquad (3.26)
$$

$$
2d_j R_{li} + d_l R_{ij} + d_i R_{jl} = -2\varphi_j R_{li} - \varphi_l R_{ij} - \varphi_i R_{jl} + \varphi^m g_{jl} R_{mi} + \varphi^m g_{ji} R_{lm} \qquad (3.27)
$$

dir. Bu durumda, (3.25), (3.26) ve (3.27) bağıntıları taraf tarafa toplanırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
2(d_l + \varphi_l)R_{ij} + 2(d_i + \varphi_i)R_{jl} + 2(d_j + \varphi_j)R_{li} = \varphi^m g_{li} R_{mj} + \varphi^m g_{lj} R_{im} + \varphi^m g_{ij} R_{lm} \qquad (3.28)
$$

sonucu bulunur. Diğer taraftan, (3.12) eşitliğinin Lie türevi

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathscr{L}_v(\lambda^j R_{jl}) \\
&= R_{jl}\mathscr{L}_v \lambda^j + \lambda^j \mathscr{L}_v R_{jl}, \ \lambda^j = g^{ij}\lambda_i \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Böylece, (3.29) denklemi Lie türevinin özellikleri yardımıyla tekrar göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= R_{jl}\mathscr{L}_v(g^{jm}\lambda_m) + \lambda^j \mathscr{L}_v R_{jl} \\
&= R_{jl}(\lambda_m \mathscr{L}_v g^{jm} + g^{jm}\mathscr{L}_v \lambda_m) + \lambda^j \mathscr{L}_v R_{jl} \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Bu denklem, (2.70) yardımıyla

$$\begin{aligned} 0 &= R_{jl}(\lambda_m(-2\varphi g^{jm}) + g^{jm}\mathscr{L}_v\lambda_m) + \lambda^j\mathscr{L}_v R_{jl} \\ &= -2\varphi\lambda^j R_{jl} + g^{jm}R_{jl}\mathscr{L}_v\lambda_m + \lambda^j\mathscr{L}_v R_{jl} \end{aligned} \tag{3.31}$$

halini alır. Ayrıca, (3.31) denkleminde, (3.12) bağıntısı kullanılırsa

$$g^{jm}R_{jl}\mathscr{L}_v\lambda_m + \lambda^j\mathscr{L}_v R_{jl} = 0 \tag{3.32}$$

bulunur. Daha sonra, (3.32) denklemi, $(3.15)_2$ bağıntısı göz önünde bulundurularak

$$g^{jm}R_{jl}\mathscr{L}_v\lambda_m = 0, \ g^{jm}d_m = d^j \tag{3.33}$$

şekline dönüşür. Bundan başka, (3.33) denkleminde (3.17) kullanılırsa

$$d^j R_{jl} = 0 \tag{3.34}$$

bulunur. Diğer taraftan, (3.28) denklemi g^{ij} ile çarpılır ve i ve j üzerinden toplam alınırsa

$$\begin{aligned} &2g^{ij}(d_l+\varphi_l)R_{ij} + 2g^{ij}(d_i+\varphi_i)R_{jl} + 2g^{ij}(d_j+\varphi_j)R_{li} = \\ &g^{ij}\varphi^m g_{li}R_{mj} + g^{ij}\varphi^m g_{lj}R_{im} + g^{ij}\varphi^m g_{ij}R_{lm}, \ \varphi^j = g^{ij}\varphi_i \end{aligned} \tag{3.35}$$

dir. Bu durumda, (3.35) denklemi yeniden düzenlenerek

$$2(d_l+\varphi_l)R + 4(d^j+\varphi^j)R_{jl} = \varphi^m R_{ml} + \varphi^m R_{lm} + n\varphi^m R_{lm} \tag{3.36}$$

elde edilir. Böylece, (3.36) denkleminde (3.34) bağıntısı kullanılırsa

$$2(d_l+\varphi_l)R + 4\varphi^j R_{jl} = (n+2)\varphi^m R_{lm} \tag{3.37}$$

bulunur. Bu son denklem gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde

$$2(d_l+\varphi_l)R = (n-2)\varphi^m R_{ml} \tag{3.38}$$

şekline gelir. Diğer taraftan, (3.25) denklemi g^{ij} ile çarpılırsa ve i ve j üzerinden toplam alınırsa

$$\begin{aligned} g^{ij}(2d_lR_{ij} + d_iR_{jl} + d_jR_{li}) &= -2g^{ij}\varphi_lR_{ij} - g^{ij}\varphi_iR_{jl} - g^{ij}\varphi_jR_{li} \\ &+ g^{ij}\varphi^m g_{li}R_{mj} + g^{ij}\varphi^m g_{lj}R_{im} \end{aligned} \tag{3.39}$$

dir. Bu durumda, (3.39) denklemi düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} 2d_lR+d^jR_{jl}+d^iR_{li} &= -2\varphi_lR-\varphi^jR_{jl}-\varphi^iR_{li}+\delta_l^j\varphi^mR_{mj}+\delta_l^i\varphi^mR_{im} \\ &= -2\varphi_lR-\varphi^jR_{jl}-\varphi^iR_{li}+\varphi^mR_{ml}+\varphi^mR_{lm} \\ &= -2\varphi_lR \end{aligned} \tag{3.40}$$

olarak elde edilir. Daha sonra, (3.40) bağıntısı, (3.34) kullanılarak

$$(d_l+\varphi_l)R=0 \tag{3.41}$$

şekline gelir. Böylece, ya $d_l+\varphi_l=0$ veya $R=0$ dır.

Şimdi, $d_l+\varphi_l=0$ koşulunun $R=0$ olması durumunda da sağlandığı gösterilsin. Bu uzayın boyutunun ikiden büyük olduğu göz önünde bulundurularak, (3.38) denklemi yardımıyla,

$$\varphi^mR_{lm}=0 \tag{3.42}$$

sonucu elde edilir. Daha sonra, (3.42) bağıntısı (3.28) denkleminde kullanılarak

$$(d_l+\varphi_l)R_{ij}+(d_i+\varphi_i)R_{jl}+(d_j+\varphi_j)R_{li}=0 \tag{3.43}$$

şeklinde elde edilir. Son olarak, (3.43) denkleminde, Teorem 3.1 kullanılırsa ve uzayın Ricci-düz uzay olmadığı göz önüne alınırsa, $d_l=-\varphi_l$ eşitliği bulunur. □

Teorem 3.2: Bir $(PRS)_n$ uzayında, $\nabla_i\varphi^i=0$ koşulunu sağlayan, sonsuz küçük has konformal dönüşüm göz önüne alınsın. Bu takdirde, ya uzayın skaler eğriliği sıfırdır, ya da $\boldsymbol{\lambda_i}$ ile $\boldsymbol{v_i}$ birbirine dik değildir.

İspat: İlk olarak, (2.74) denkleminde $\nabla_i\varphi^i=0$ koşulu kullanılırsa

$$\mathscr{L}_vR=-2\varphi R \tag{3.44}$$

dir. Bununla birlikte, (2.63) denkleminden, $(PRS)_n$ uzayının skaler eğriliği için aşağıdaki bağıntı elde edilir

$$\mathscr{L}_vR=v^k\nabla_kR. \tag{3.45}$$

Bu denklem, (3.44) yardımıyla

$$v^k\nabla_kR = -2\varphi R \tag{3.46}$$

halini alır. Bundan başka, (3.46) denkleminde (3.13) denklemi kullanılırsa

$$v^k\lambda_k R \quad = \quad -\varphi R \tag{3.47}$$

dir ve (3.47) denkleminden

$$(v^k\lambda_k+\varphi)R=0 \tag{3.48}$$

elde edilir. Böylece, (3.48) denkleminden, V_n pseudo Ricci simetrik Riemann uzayının skaler eğriliğinin sıfır veya sonsuz küçük has konformal dönüşümden dolayı, $\boldsymbol{v_i}$ ve $\boldsymbol{\lambda_i}$ vektörlerinin dik olmadığı görülür. □

Bir $(PRS)_n$ uzayı üzerinde sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm alınarak, yukarıda yapılan incelemeler doğrultusunda aşağıdaki teoremler elde edilmiştir:

Teorem 3.3: Üzerinde sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşümün tanımlı olduğu n-boyutlu $(PRS)_n$ uzayı göz önüne alınsın. Bu takdirde, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanı Lie invaryant değildir.

İspat: Bir $(PRS)_n$ uzayına ait, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önünde bulundurularak, (3.18) bağıntısı yardımıyla $d_l \neq 0$ elde edilir. Böylece, (3.17) bağıntısı yardımıyla, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanı Lie invaryant değildir. □

Teorem 3.4: Üzerinde sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşümün tanımlı olduğu n-boyutlu $(PRS)_n$ uzayında, $\boldsymbol{\varphi}_i$ ile bu uzayın $\boldsymbol{\lambda}_i$ kovektörü birbirine diktir.

İspat: Öncelikle, (2.29) denkleminin Lie türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_v\nabla_l R_{ij} &= \mathscr{L}_v(2\lambda_l R_{ij}+\lambda_i R_{jl}+\lambda_j R_{li}) \\ &= 2R_{ij}\mathscr{L}_v\lambda_l+2\lambda_l\mathscr{L}_v R_{ij}+R_{jl}\mathscr{L}_v\lambda_i+\lambda_i\mathscr{L}_v R_{jl}+R_{li}\mathscr{L}_v\lambda_j+\lambda_j\mathscr{L}_v R_{li}\end{aligned}$$

bulunur. Daha sonra, yukarıdaki denklemde, $(3.15)_2$ kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v\nabla_l R_{ij}=2R_{ij}\mathscr{L}_v\lambda_l+R_{jl}\mathscr{L}_v\lambda_i+R_{li}\mathscr{L}_v\lambda_j \tag{3.49}$$

elde edilir. Bundan başka, (3.49) denklemi, (3.17) yardımıyla

$$\mathscr{L}_v\nabla_l R_{ij}=2d_l R_{ij}+d_i R_{jl}+d_j R_{li} \tag{3.50}$$

halini alır. Böylece, (3.50) bağıntısının x^k'ya göre kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\nabla_k\mathscr{L}_v\nabla_l R_{ij} &= \nabla_k(2d_l R_{ij}+d_i R_{jl}+d_j R_{li}) \\ &= 2R_{ij}\nabla_k d_l+2d_l\nabla_k R_{ij}+R_{jl}\nabla_k d_i \\ &\quad +d_i\nabla_k R_{jl}+R_{li}\nabla_k d_j+d_j\nabla_k R_{li}\end{aligned} \tag{3.51}$$

elde edilir. Bu ifadede, Önerme 3.3'ün sonucu olarak elde edilen (3.18) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\nabla_k \mathscr{L}_v \nabla_l R_{ij} &= -2R_{ij}\nabla_k \varphi_l - 2\varphi_l \nabla_k R_{ij} - R_{jl}\nabla_k \varphi_i \\ &\quad -\varphi_i \nabla_k R_{jl} - R_{li}\nabla_k \varphi_j - \varphi_j \nabla_k R_{li} \qquad (3.52)\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, (3.52) denklemi, $(3.16)_2$ yardımıyla

$$\nabla_k \mathscr{L}_v \nabla_l R_{ij} = -2\varphi_l \nabla_k R_{ij} - \varphi_i \nabla_k R_{jl} - \varphi_j \nabla_k R_{li} \qquad (3.53)$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan, (3.20) bağıntısının x^k'ya göre kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\nabla_k \mathscr{L}_v \nabla_l R_{ij} &= -(\mathscr{L}_v \Gamma^m_{li})\nabla_k R_{mj} - R_{mj}\nabla_k(\mathscr{L}_v \Gamma^m_{li}) \\ &\quad -(\mathscr{L}_v \Gamma^m_{lj})\nabla_k R_{im} - R_{im}\nabla_k(\mathscr{L}_v \Gamma^m_{lj}) \qquad (3.54)\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca, (2.71) denkleminin kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\nabla_k(\mathscr{L}_v \Gamma^m_{li}) &= \nabla_k(\delta^m_i \varphi_l + \delta^m_l \varphi_i - \varphi^m g_{li}) \\ &= \delta^m_i \nabla_k \varphi_l + \delta^m_l \nabla_k \varphi_i - g_{li}\nabla_k \varphi^m \qquad (3.55)\end{aligned}$$

dir ve bu denklemde, $(3.16)_2$ bağıntısı kullanılırsa

$$\nabla_k(\mathscr{L}_v \Gamma^m_{li}) = 0 \qquad (3.56)$$

ifadesi elde edilir. Bu takdirde, (3.54) denklemi, (3.56) yardımıyla

$$\nabla_k(\mathscr{L}_v \nabla_l R_{ij}) = -(\mathscr{L}_v \Gamma^m_{li})\nabla_k R_{mj} - (\mathscr{L}_v \Gamma^m_{lj})\nabla_k R_{im} \qquad (3.57)$$

şekline dönüşür. Böylece, (3.53) ve (3.57) denklemleri taraf tarafa eşitlenirse

$$-2\varphi_l \nabla_k R_{ij} - \varphi_i \nabla_k R_{lj} - \varphi_j \nabla_k R_{il} = -(\mathscr{L}_v \Gamma^m_{li})\nabla_k R_{mj} - (\mathscr{L}_v \Gamma^m_{lj})\nabla_k R_{im} \qquad (3.58)$$

ve daha sonra bu denklemde, (2.71) kullanılırsa

$$\begin{aligned}-2\varphi_l \nabla_k R_{ij} - \varphi_i \nabla_k R_{lj} - \varphi_j \nabla_k R_{il} &= -(\delta^m_l \varphi_i + \delta^m_i \varphi_l - \varphi^m g_{il})\nabla_k R_{mj} \\ &\quad -(\delta^m_l \varphi_j + \delta^m_j \varphi_l - \varphi^m g_{lj})\nabla_k R_{im} \qquad (3.59)\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda, (3.59) denklemi

$$\begin{aligned}&-2\varphi_l \nabla_k R_{ij} - \varphi_i \nabla_k R_{lj} - \varphi_j \nabla_k R_{il} = -\delta^m_l \varphi_i \nabla_k R_{mj} - \delta^m_i \varphi_l \nabla_k R_{mj} \\ &+\varphi^m g_{il}\nabla_k R_{mj} - \delta^m_l \varphi_j \nabla_k R_{im} - \delta^m_j \varphi_l \nabla_k R_{im} + \varphi^m g_{lj}\nabla_k R_{im} \qquad (3.60)\end{aligned}$$

şekline gelir. Bu takdirde, (3.60) denklemi gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} -2\varphi_l\nabla_k R_{ij} - \varphi_i\nabla_k R_{lj} - \varphi_j\nabla_k R_{il} &= -\varphi_i\nabla_k R_{lj} - \varphi_l\nabla_k R_{ij} \\ +\varphi^m g_{il}\nabla_k R_{mj} - \varphi_j\nabla_k R_{il} &- \varphi_l\nabla_k R_{ij} + \varphi^m g_{lj}\nabla_k R_{im} \end{aligned} \tag{3.61}$$

ve dolayısıyla,

$$\varphi^m g_{il}\nabla_k R_{mj} + \varphi^m g_{lj}\nabla_k R_{im} = 0 \tag{3.62}$$

olarak elde edilir. Ayrıca, $(3.16)_2$ bağıntısı yardımıyla, φ_i için Ricci özdeşliği kullanılırsa ve $n > 2$ olduğu hatırlanırsa, aşağıdaki bağıntılar elde edilir, [21],

$$\varphi_a R^a_{ijk} = 0, \ \ \varphi_a R^a_i = 0. \tag{3.63}$$

Diğer taraftan, (3.62) denkleminde, (2.29) kullanılırsa

$$0 = \varphi^m g_{il}(2\lambda_k R_{mj} + \lambda_m R_{jk} + \lambda_j R_{km}) + \varphi^m g_{lj}(2\lambda_k R_{im} + \lambda_i R_{mk} + \lambda_m R_{ki}) \tag{3.64}$$

dir ve daha sonra, (3.64) denkleminde, $(3.63)_2$ kullanılırsa

$$0 = g_{il}\varphi^m\lambda_m R_{jk} + g_{lj}\lambda_m\varphi^m R_{ki} \tag{3.65}$$

bulunur. Ayrıca, (3.65) denklemi, g^{il} ile çarpılırsa ve i ve l üzerinden toplam alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= g^{il}(g_{il}\varphi^m\lambda_m R_{jk} + g_{lj}\lambda_m\varphi^m R_{ki}) \\ &= n\varphi^m\lambda_m R_{jk} + \delta^i_j\lambda_m\varphi^m R_{ki} \\ &= (n+1)\varphi^m\lambda_m R_{jk} \end{aligned} \tag{3.66}$$

denklemi elde edilir. Son olarak, (3.66) denklemi yardımıyla

$$\varphi^m\lambda_m = 0 \tag{3.67}$$

olduğu görülür. □

Uyarı 3.4: Bir $(PRS)_n$ $(n \geq 3)$ Einstein uzayı mevcut olamaz. Çünkü $n \geq 3$ olmak üzere, Einstein uzayının skaler eğriliği sabittir. $(PRS)_n$ uzayının skaler eğriliği sabit olursa, Uyarı 3.3'den dolayı, bu uzayın skaler eğriliği sıfır olur. Skaler eğriliği sıfır olan bir pseudo Ricci simetrik Einstein uzayı Ricci-düz uzaydır. □

Teorem 3.5: Üzerinde sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşümün tanımlı olduğu $(PRS)_n$ uzayının $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının uzunluğu, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm bir hareketten ibaret olmadıkça Lie invaryant olamaz.

İspat: $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının uzunluğu, $\boldsymbol{\theta}$ skaler bir fonksiyon olmak üzere,

$$\lambda_l \lambda^l = \theta^2, \;\; \theta \neq 0 \tag{3.68}$$

şeklinde göz önüne alınsın. $d^l = g^{lm} d_m$ olmak üzere, (3.68) denkleminin Lie türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_v \theta^2 &= \mathscr{L}_v(\lambda_l \lambda^l) \\ &= \lambda^l \mathscr{L}_v \lambda_l + \lambda_l \mathscr{L}_v \lambda^l, \;\; \lambda^l = g^{lm} \lambda_m \end{aligned} \tag{3.69}$$

dir ve (3.69) denkleminde, tekrar Lie türevinin özellikleri göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_v \theta^2 &= \lambda^l \mathscr{L}_v \lambda_l + \lambda_l \mathscr{L}_v (g^{lm} \lambda_m) \\ &= \lambda^l \mathscr{L}_v \lambda_l + \lambda_l \lambda_m \mathscr{L}_v g^{lm} + \lambda_l g^{lm} \mathscr{L}_v \lambda_m \end{aligned} \tag{3.70}$$

elde edilir. Bu durumda, (3.70) denklemi, (2.70) yardımıyla

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_v \theta^2 &= \lambda^l \mathscr{L}_v \lambda_l + \lambda_l \lambda_m (-2\varphi g^{lm}) + \lambda_l g^{lm} \mathscr{L}_v \lambda_m \\ &= \lambda^l \mathscr{L}_v \lambda_l - 2\theta^2 \varphi + \lambda^m \mathscr{L}_v \lambda_m, \;\; g^{lm} \lambda_m = \lambda^l \end{aligned} \tag{3.71}$$

haline gelir. Daha sonra, (3.71) denklemi (3.17) yardımıyla

$$\mathscr{L}_v \theta^2 = 2(\lambda^l d_l - \theta^2 \varphi) \tag{3.72}$$

bulunur. Bundan başka, (3.72) denkleminde (3.18) kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v \theta^2 = -2(\lambda^l \varphi_l + \theta^2 \varphi) \tag{3.73}$$

denklemi elde edilir. Bu durumda, (3.73) denklemi Teorem 3.4 yardımıyla

$$\mathscr{L}_v \theta^2 = -2\varphi \theta^2 \tag{3.74}$$

şekline dönüşür.

$\boldsymbol{\lambda_l}$ vektör alanının uzunluğunun Lie invaryant olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, (3.74) bağıntısı yardımıyla

$$\varphi \theta^2 = 0 \tag{3.75}$$

bulunur. θ'nın sıfırdan farklı olduğu göz önüne alınırsa, $\varphi = 0$ bulunur. Bu durum, $(PRS)_n$ uzayına ait, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm için mümkün değildir. Sonuç olarak, $(PRS)_n$ uzayının $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanı Lie invaryant olamaz. □

Teorem 3.6: Bir $(PRS)_n$ uzayında, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınsın. Bu takdirde, ya bu uzayın skaler eğriliği sıfırdır, ya da $\alpha = v^m \lambda_m$ olmak üzere, $\varphi = -\alpha$ dır.

İspat: İlk olarak, (2.63) ve $(3.15)_3$ denklemleri kullanılarak

$$-2\varphi R = v^k \nabla_k R \tag{3.76}$$

bağıntısı elde edilir. Daha sonra, (3.76) denklemi, (3.13) yardımıyla

$$-2\varphi R = 2\lambda_k v^k R \tag{3.77}$$

şekline dönüşecektir. Böylece, $\alpha = \lambda_h v^h$ olduğu dikkate alnırsa, ispat tamamlanmış olur. □

4. PSEUDO RICCI SİMETRİK BİR RIEMANN UZAYINDA ÖZEL VEKTÖR ALANLARI

4.1 Pseudo Ricci Simetrik Bir Riemann Uzayında Özel Vektör Alanlarıyla Üretilen Sonsuz Küçük Konformal ve Sonsuz Küçük Pseudo Homotetik Dönüşümler

1944 yılında, K. Yano, [10], tors oluşturan bir vektör alanını ve konküran bir vektör alanını tanımlayarak, söz konusu vektör alanlarının bazı özelliklerini incelemiştir. 1951 yılında, T. Adati, [20], tors oluşturan bir vektör alanının özel bir koşul altında konsörkılır vektör alanına dönüşeceğini ispatlamıştır. 1956 yılında, T. Sumitomo, [9], bir Riemann uzayına ait bir vektör alanının konküran vektör alanı olması için gerek ve yeter koşulun, bu vektör alanının sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm üretmesi ve onun yörüngesinin geodezikler olmasından ibaret olduğunu ispat etmiştir. Ayrıca, 1968 yılında, Yamaguchi ve Matsumoto, [21], Ricci reküran Riemann uzayları üzerinde, tors oluşturan vektör alanlarını incelemişler ve boyutu üç ve üçten daha büyük olan Ricci reküran Riemann uzayına ait tors oluşturan bir vektör alanının bir reküran vektör alanından veya bir konsörkılır vektör alanından ibaret olacağını ve böyle bir uzay üzerinde has tors oluşturan vektör alanının tanımlanamayacağını göstermişlerdir. Ayrıca, yine aynı makalede, Ricci reküran Riemann uzaylarına ait akış çizgileri geodezikler olan bir sonsuz küçük has homotetik dönüşüm tanımlanamayacağını ispatlamışlardır.

Bu bölümde, yukarıda bahsedilen makalelerde elde edilmiş sonuçlar göz önünde bulundurularak, pseudo Ricci simetrik bir Riemann uzayına ait özel vektör alanları ile üretilen sonsuz küçük konformal dönüşüm ve sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

Öncelikle, daha sonra kullanılmak üzere, aşağıdaki tanım ve teorem göz önüne alınsın:

Uyarı 4.1: Bu bölümde ele alınacak tüm teoremlerde, Ricci-düz olmayan, n-boyutlu ve boyutu ikiden büyük pseudo Ricci simetrik Riemann uzayı $(PRS)_n$ ile gösterilecektir. □

Uyarı 4.2: Bu bölümde ele alınacak tüm teoremlerde, $\varphi \neq sabit$ koşulunu sağlayan sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınacaktır. □

Uyarı 4.3: Bu bölümde ele alınacak tüm teoremlerde, $\varphi \neq sabit$ skaler koşulunu sağlayan sonsuz küçük konformal dönüşüm ile ilgili araştırmalar yapılacaktır. □

Tanım 4.1 : Bir V_n Riemann uzayında, $\boldsymbol{v}(x)$ vektör alanı doğrultusundaki akış çizgileri

$$v^i(x) = \frac{dx^i}{dt} \tag{4.1}$$

diferansiyel denklemi ile tanımlı eğrilerdir. □

Teorem 4.1 : Bir V_n Riemann uzayının akış çizgileri geodezikler olan bir sonsuz küçük has homotetik dönüşüm kabul etmesi için gerek ve yeter koşul, bu Riemann uzayının konküran vektör alanına sahip olmasıdır, [8]. □

Yardımcı Teorem 4.1: Bir V_n Riemann uzayına ait $\boldsymbol{v}$ konküran vektör alanının oluşturduğu sonsuz küçük dönüşüm, sonsuz küçük has homotetik dönüşümdür.

İspat: Öncelikle, (2.85) denklemi yardımıyla

$$\nabla_i v_j + \nabla_j v_i = 2\rho g_{ij}, \ (\rho \equiv sbt. \neq 0) \tag{4.2}$$

bağıntısı elde edilir. Daha sonra, (2.42) denkleminde (4.2) denklemi göz önüne alınırsa

$$\mathscr{L}_v g_{ij} = 2\rho g_{ij} \tag{4.3}$$

bulunur. Böylece, (4.3) yardımıyla, bu vektör alanının bir sonsuz küçük has homotetik dönüşüm ürettiği açıktır. □

Uyarı 4.4: $\boldsymbol{v}$ konküran vektör alanının uzunluğu sabit olamaz. □

Teorem 4.2: Bir V_n Riemann uzayında, $\boldsymbol{v}$ gradyent vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük has homotetik dönüşüm göz önüne alınsın. Bu takdirde, $\boldsymbol{v}$ vektör alanı konküran vektör alanından ibarettir.

İspat: Sonsuz küçük has homotetik dönüşüm üreten $\boldsymbol{v}$ vektör alanı gradyent vektör alanı olarak seçilirse, (2.75) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned}\nabla_i v_j + \nabla_j v_i &= 2\varphi g_{ij},\ \varphi \equiv sbt. \neq 0 \\ 2\nabla_i v_j &= 2\varphi g_{ij} \\ \nabla_i v_j &= \varphi g_{ij} \qquad (4.4)\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca, (2.85) ve (4.4) denklemleri karşılaştırıldığında, $\rho = \varphi = sbt. \neq 0$ olmak üzere, sonsuz küçük has homotetik dönüşümü üreten gradyent vektör alanının, bir konküran vektör alanından ibaret olduğu görülür. □

Sonuç 4.1: Bir V_n Riemann uzayında, $\boldsymbol{v}$ vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük has homotetik dönüşüm göz önüne alınsın. Bu dönüşümün, akış çizgileri geodezikler olan sonsuz küçük has homotetik dönüşümden ibaret olması için gerek ve yeter koşul, $\boldsymbol{v}$ vektör alanının gradyent olmasıdır. □

Yardımcı Teorem 4.2: Bir V_n Riemann uzayında, $\boldsymbol{v}$ konküran vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük dönüşüm göz önüne alınsın. Bu takdirde,

$$v^a R_{aijm} = 0, \qquad (4.5)$$

$$v^a R_{am} = 0 \qquad (4.6)$$

bağıntıları mevcuttur.

İspat: Öncelikle, (2.85) ve (2.42) bağıntıları yardımıyla

$$\mathscr{L}_v g_{ij} = 2\rho g_{ij},\ \rho \equiv sbt. \neq 0 \qquad (4.7)$$

elde edilir. Diğer taraftan, (4.7) denklemi yardımıyla, $\boldsymbol{v}$ vektör alanının bir sonsuz küçük has homotetik dönüşüm ürettiği açıktır. Dolayısıyla,

$$\rho = \varphi \equiv sbt. \qquad (4.8)$$

olacaktır. Daha sonra, (2.57) denklemi, (2.71) denklemi yardımıyla, aşağıdaki şekilde elde edilir

$$(\delta^h_j \varphi_i + \delta^h_i \varphi_j - \varphi^h g_{ij}) = \nabla_i \nabla_j v^h + v^a R^h_{aij}. \qquad (4.9)$$

Bu denklemde (4.8) kullanılırsa

$$0 = \nabla_i \nabla_j v^h + v^a R^h_{aij} \qquad (4.10)$$

bulunur. Elde edilen (4.10) denklemi g_{hm} ile çarpılırsa ve h ve m üzerinden toplam alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= g_{hm}\nabla_i\nabla_j v^h + g_{hm}v^a R^h_{aij} \\ &= \nabla_i\nabla_j v_m + v^a R_{aijm}, \ v_m = g_{hm}v^h \end{aligned} \tag{4.11}$$

bağıntısı elde edilir. Bundan başka, (4.11) denkleminde (2.85) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_i(\rho g_{jm}) + v^a R_{aijm} \\ &= g_{jm}\nabla_i\rho + v^a R_{aijm} \end{aligned} \tag{4.12}$$

dir. Böylece, (4.12) denkleminde (4.8) kullanılarak, (4.5) bağıntısı elde edilir. Ayrıca, (4.5) denklemi, g^{ij} ile çarpılırsa ve i ve j üzerinden toplam alınırsa, (4.6) bağıntısı elde edilir. □

Aşağıda göz önüne alınacak teoremlerde, $(PRS)_n$ uzayının skaler eğriliğinin sabit olmadığı kabul edilecektir.

Teorem 4.3: Bir $(PRS)_n$ uzayına ait, $\boldsymbol{v}$ konküran vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük dönüşüm göz önüne alınsın. Bu takdirde, $\boldsymbol{v_i}$ ile $\boldsymbol{\lambda_i}$ birbirine dik değildir.

İspat: Öncelikle, (4.6) denkleminin kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_k(v^a R_{am}) \\ &= R_{am}\nabla_k v^a + v^a\nabla_k R_{am}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

ve daha sonra, (4.13) denkleminde (2.29) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= R_{am}\nabla_k v^a + v^a(2\lambda_k R_{am} + \lambda_a R_{mk} + \lambda_m R_{ka}) \\ &= R_{am}\nabla_k v^a + 2\lambda_k v^a R_{am} + v^a\lambda_a R_{mk} + \lambda_m v^a R_{ka} \end{aligned} \tag{4.14}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca, (4.14) denkleminde (2.85) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= R_{am}(\rho\delta^a_k) + 2\lambda_k v^a R_{am} + v^a\lambda_a R_{mk} + \lambda_m v^a R_{ka} \\ &= \rho R_{km} + 2\lambda_k v^a R_{am} + v^a\lambda_a R_{mk} + \lambda_m v^a R_{ka} \end{aligned} \tag{4.15}$$

dir ve (4.15) denkleminde (4.6) kullanılırsa

$$(\rho + v^a\lambda_a)R_{mk} = 0 \tag{4.16}$$

elde edilir. Yukarıdaki son denklemden, $v^a\lambda_a = -\rho$ bulunur. Böylece, $\boldsymbol{\lambda_i}$ ve $\boldsymbol{v_i}$'nin birbirine dik olmadığı açıktır. □

Teorem 4.1 ve Teorem 4.3 yardımıyla, aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.2: Bir $(PRS)_n$ uzayında, akış çizgileri geodezikler olan sonsuz küçük has homotetik dönüşüm göz önüne alınsın. Bu takdirde, $\boldsymbol{v_i}$ ile $\boldsymbol{\lambda_i}$ birbirine dik değildir. □

Teorem 4.4: Bir $(PRS)_n$ uzayında, $\boldsymbol{v}$ konküran vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük dönüşüm göz önüne alınsın. Bu takdirde, bu uzayın

i. $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanı Lie invaryanttır ve

ii. $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının uzunluğu Lie invaryant olamaz.

İspat:

i. Konküran vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük dönüşümün bir sonsuz küçük has homotetik dönüşümden ibaret olduğu Yardımcı Teorem 4.1'den açıktır. Böylece, sonsuz küçük has homotetik dönüşüm altında, bir Riemann uzayının konneksiyon katsayısı, eğrilik tensörü, Ricci eğrilik tensörü ve skaler eğriliğinin Lie türevleri, sırasıyla, (2.71)-(2.74) ve (4.8) denklemleri yardımıyla

$$\mathscr{L}_v\Gamma^h_{ij} = 0,\ \mathscr{L}_v R^h_{ijk} = 0,\ \mathscr{L}_v R_{ij} = 0 \ ve\ \mathscr{L}_v R = -2\varphi R \tag{4.17}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, (2.68) denklemi, $(PRS)_n$ uzayının Ricci eğrilik tensörü için kullanılırsa ve bu denklemde, öncelikle, $(4.17)_1$ kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v \nabla_l R_{ij} - \nabla_l \mathscr{L}_v R_{ij} = 0 \tag{4.18}$$

bulunur. Daha sonra, (4.18) denkleminde $(4.17)_3$ kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v \nabla_l R_{ij} = 0 \tag{4.19}$$

denklemi elde edilir. Ayrıca, (4.19) denkleminde (2.29) kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v(2\lambda_l R_{ij} + \lambda_i R_{jl} + \lambda_j R_{li}) = 0 \tag{4.20}$$

olduğu görülür. Daha sonra, (4.20) denklemi ve (2.64) ve (2.65) ile verilen Lie türevinin özellikleri kullanılarak, aşağıdaki şekilde düzenlenir

$$2R_{ij}\mathscr{L}_v\lambda_l + 2\lambda_l\mathscr{L}_vR_{ij} + R_{jl}\mathscr{L}_v\lambda_i + \lambda_i\mathscr{L}_vR_{jl} + R_{li}\mathscr{L}_v\lambda_j + \lambda_j\mathscr{L}_vR_{li} = 0. \tag{4.21}$$

Bundan başka, (4.21) ve $(4.17)_3$ denklemleri yardımıyla

$$2R_{ij}\mathscr{L}_v\lambda_l + R_{jl}\mathscr{L}_v\lambda_i + R_{li}\mathscr{L}_v\lambda_j = 0 \tag{4.22}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $(PRS)_n$ uzayının $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının, sonsuz küçük has homotetik dönüşüm altında Lie türevi

$$\mathscr{L}_v\lambda_l = d_l \tag{4.23}$$

olarak göz önüne alınsın. Böylece, (4.23) bağıntısı (4.22) denkleminde kullanılarak

$$2d_lR_{ij} + d_iR_{jl} + d_jR_{li} = 0 \tag{4.24}$$

denklemine ulaşılır. Böylece, (4.24) denkleminde l, i ve j indisleri devirsel olarak değiştirilirse

$$2d_iR_{jl} + d_jR_{li} + d_lR_{ij} = 0 \tag{4.25}$$

ve

$$2d_jR_{li} + d_lR_{ij} + d_iR_{jl} = 0 \tag{4.26}$$

denklemleri elde edilir. Yukarıdaki son üç denklem taraf tarafa toplanırsa

$$d_lR_{ij} + d_iR_{jl} + d_jR_{li} = 0 \tag{4.27}$$

sonucu elde edilir. Daha sonra, (4.27) denkleminde, Teorem 3.1 kullanılırsa ve bu uzayın Ricci olarak düz uzay olmadığı göz önünde bulundurulursa,

$$d_l = 0 \tag{4.28}$$

dır. Böylece, (4.23) ve (4.28) yardımıyla, bir $(PRS)_n$ uzayının $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının Lie invaryant olduğu görülür.

ii. $\boldsymbol{v}$ konküran vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük dönüşümün bir sonsuz küçük has homotetik dönüşümden ibaret olduğu Yardımcı Teorem 4.1 de ispat edilmiştir. Bu takdirde, (3.74) denkleminden yararlanarak, $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının uzunluğunun Lie invaryant olamayacağı görülür.

Uyarı 4.5: Bir V_n Riemann uzayına ait, $\boldsymbol{v}$ reküran vektör alanının uzunluğu sabit değildir. □

Yardımcı Teorem 4.3: Bir V_n Riemann uzayına ait, $\boldsymbol{v}$ reküran vektör alanı göz önüne alınsın. Bu takdirde,

$$v^a R_{jiam} = 0 \tag{4.29}$$

ve

$$v^a R_{ia} = 0 \tag{4.30}$$

bağıntıları mevcuttur, [23]. □

Teorem 4.5: Bir $(PRS)_n$ uzayına ait, bir $\boldsymbol{v}$ reküran vektör alanı göz önüne alınsın. Bu takdirde, $\boldsymbol{v_i}$ ile $\boldsymbol{\lambda_i}$ birbirine diktir.

İspat: Bir $(PRS)_n$ uzayına ait, bir $\boldsymbol{v}$ reküran vektör alanı göz önüne alınsın. Öncelikle, (4.30) denkleminin x^k' ya göre kovaryant türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_k (v^a R_{am}) \\ &= R_{am} \nabla_k v^a + v^a \nabla_k R_{am} \end{aligned} \tag{4.31}$$

bulunur. Yukarıdaki son denklemde (2.29) kullanılırsa

$$0 = R_{am} \nabla_k v^a + 2 v^a \lambda_k R_{am} + v^a \lambda_a R_{mk} + v^a \lambda_m R_{ka} \tag{4.32}$$

elde edilir. Daha sonra, (2.83) denklemi yardımıyla, (4.32) denklemi

$$R_{am} v^a \phi_k + 2 v^a \lambda_k R_{am} + v^a \lambda_a R_{mk} + v^a \lambda_m R_{ka} = 0 \tag{4.33}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca, (4.33) denkleminde (4.30) kullanılırsa

$$v^a \lambda_a R_{mk} = 0 \tag{4.34}$$

bağıntısı elde edilir. Bu uzayın Ricci olarak düz uzay olmadığı hatırlanırsa, $\boldsymbol{v_i}$ ile $\boldsymbol{\lambda_i}$'nin birbirine dik olduğu ortaya çıkar. □

Teorem 4.6: Bir V_n Riemann uzayına ait, tors oluşturan $\boldsymbol{v}$ vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük konformal dönüşüm göz önüne alınsın. Bu takdirde, $\boldsymbol{v_i}$ ve $\boldsymbol{\phi_i}$'nin dik olması için gerek ve yeter koşul, $\varphi = \rho$ olmasıdır.

İspat: Öncelikle, (2.75) denklemi, (2.82) yardımıyla

$$(\rho g_{ij} + \phi_i v_j) + (\rho g_{ji} + \phi_j v_i) = 2\varphi g_{ij} \tag{4.35}$$

şeklinde bulunur. Daha sonra, bu denklem g^{ij} ile çarpılırsa ve i ve j üzerinden toplam alınırsa

$$\begin{aligned} 2g^{ij}\rho g_{ij} + g^{ij}\phi_i v_j + g^{ij}\phi_j v_i &= g^{ij}(2\varphi g_{ij}) \\ 2n\rho + \phi_i v^i + \phi_j v^j &= 2n\varphi \end{aligned} \tag{4.36}$$

haline gelir ve bu denklem düzenlenirse

$$n(\varphi - \rho) = \phi_i v^i \tag{4.37}$$

denklemi elde edilir. Böylece, $\boldsymbol{v_i}$ ile $\boldsymbol{\phi_i}$'nin dik olması için gerek ve yeter koşul, $\varphi = \rho$ olmasıdır. □

Teorem 4.7 : Bir V_n Riemann uzayında, $\boldsymbol{v}$ tors oluşturan vektör alanı olmak üzere,

$$v^a R^h_{jia} = \phi_{ji} v^h + (\rho_j - \rho\phi_j)\delta^h_i + (\rho\phi_i - \rho_i)\delta^h_j \tag{4.38}$$

$$v^m R_{im} = \phi_{ji} v^j + (1-n)(\rho_i - \rho\phi_i) \tag{4.39}$$

bağıntıları mevcuttur, [21]. Burada, $\phi_{ji} = \nabla_j\phi_i - \nabla_i\phi_j$ ve $\rho_j = \partial_j\rho$ dır ve ρ skaler bir fonksiyon, ϕ_i kovaryant vektördür. □

Teorem 4.8: Bir V_n Riemann uzayına ait, $\boldsymbol{v}$ tors oluşturan vektör alanı göz önüne alınsın. $\boldsymbol{v_i}$ kovaryant vektörü, $\boldsymbol{\phi_i}$ ve $\boldsymbol{\rho_i}$ ile kolineer ise, bu durumda, $\boldsymbol{v}$ vektör alanı konsörkılır vektör alanıdır.

İspat: Öncelikle, (4.38) denklemi g_{hm} ile çarpılırsa ve h ve m üzerinden toplam alınırsa

$$\begin{aligned} g_{hm}(v^a R^h_{jia}) &= g_{hm}(\phi_{ji} v^h + (\rho_j - \rho\phi_j)\delta^h_i + (\rho\phi_i - \rho_i)\delta^h_j) \\ v^a R_{jiam} &= g_{hm}\phi_{ji} v^h + g_{hm}(\rho_j - \rho\phi_j)\delta^h_i + g_{hm}(\rho\phi_i - \rho_i)\delta^h_j \end{aligned} \tag{4.40}$$

dir. Böylece, (4.40) denklemi düzenlenirse

$$v^a R_{jiam} = (\nabla_j \phi_i - \nabla_i \phi_j) v_m + g_{im}(\rho_j - \rho\phi_j) + g_{jm}(\rho\phi_i - \rho_i), \; v_m = g_{hm} v^h \quad (4.41)$$

elde edilir. Daha sonra, (4.41) denklemi v^m ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= v^m v_m(\nabla_j \phi_i - \nabla_i \phi_j) + v^m g_{im}(\rho_j - \rho\phi_j) + v^m g_{jm}(\rho\phi_i - \rho_i) \\ &= v^m v_m(\nabla_j \phi_i - \nabla_i \phi_j) + v_i(\rho_j - \rho\phi_j) + v_j(\rho\phi_i - \rho_i) \\ &= v^m v_m(\nabla_j \phi_i - \nabla_i \phi_j) + (\rho_j v_i - \rho_i v_j) + \rho(\phi_i v_j - \phi_j v_i) \end{aligned} \quad (4.42)$$

bulunur. Ayrıca, $\boldsymbol{v_i}$ kovaryant vektörünün $\boldsymbol{\phi_i}$ ve $\boldsymbol{\rho_i}$ ile kolineer olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, (4.42) denklemi yardımıyla

$$v^m v_m(\nabla_j \phi_i - \nabla_i \phi_j) = 0 \quad (4.43)$$

bulunur. Böylece, (4.43) denklemi yardımıyla, $\boldsymbol{\phi_i}$'nin gradyent olduğu ve $\boldsymbol{v_i}$ tors oluşturan vektör alanının aynı zamanda konsörkılır vektör alanı olduğu açıktır. □

Teorem 4.9: Bir V_n Riemann uzayına ait, $\boldsymbol{v}$ konsörkılır vektör alanı göz önüne alınsın. $\boldsymbol{\rho_i}$ ve $\boldsymbol{v_i}$'nin birbiriyle kolineer olması için gerek ve yeter koşul, $\boldsymbol{\phi_i}$ ve $\boldsymbol{v_i}$'nin birbiriyle kolineer olmasıdır, $(\rho \neq 0)$.

İspat: Konsörkılır vektör alanı için, (4.38) ifadesi aşağıdaki denkleme dönüşür

$$v^a R^h_{jia} = (\rho_j - \rho\phi_j)\delta^h_i + (\rho\phi_i - \rho_i)\delta^h_j. \quad (4.44)$$

Böylece, (4.44) denklemi, g_{hm} ile çarpılırsa ve h ve m üzerinden toplam alınırsa ve daha sonra (2.13) denklemi kullanılırsa

$$v^a R_{jiam} = g_{im}(\rho_j - \rho\phi_j) + g_{jm}(\rho\phi_i - \rho_i) \quad (4.45)$$

bulunur. Elde edilen bu denklem v^m ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= v_i(\rho_j - \rho\phi_j) + v_j(\rho\phi_i - \rho_i), \; g_{im} v^m = v_i \\ &= (\rho_i v_j - \rho_j v_i) + \rho(\phi_j v_i - \phi_i v_j), \; g_{im} v^m = v_i \end{aligned} \quad (4.46)$$

denklemine indirgenir. Buradan da, $\boldsymbol{\rho_i}$ ve $\boldsymbol{v_i}$'nin birbiriyle kolineer olması için gerek ve yeter koşul, $\boldsymbol{\phi_i}$ ve $\boldsymbol{v_i}$'nin birbiriyle kolineer olmasıdır. Böylece, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.10: Bir V_n Riemann uzayına ait, $\boldsymbol{v}$ konsörkılır vektör alanı ile sonsuz küçük konformal dönüşüm üretilsin. Bu takdirde, $\rho \neq \varphi$, $(\boldsymbol{\phi_i} \neq 0)$ dir.

İspat: Bir V_n Riemann uzayına ait, $\boldsymbol{v}$ konsörkılır vektör alanına göre sonsuz küçük konformal dönüşüm göz önüne alınsın. $\rho = \varphi$ olduğu kabul edilsin. Böylece, $\rho = \varphi$ koşulu (4.37) denkleminde kullanılırsa

$$\phi_i v^i = 0 \tag{4.47}$$

bulunur. Diğer taraftan, (2.82) denklemi aşağıdaki gibi göz önüne alındığında

$$\nabla_j v_h = \varphi g_{jh} + \phi_j v_h, \; v_h = g_{ih} v^i \tag{4.48}$$

dir. Bu durumda, (4.48) denkleminin x^i'ye göre kovaryant türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j v_h &= g_{jh} \nabla_i \varphi + \nabla_i(\phi_j v_h) \\ &= g_{jh} \nabla_i \varphi + v_h \nabla_i \phi_j + \phi_j \nabla_i v_h \\ &= \varphi_i g_{jh} + v_h \nabla_i \phi_j + \phi_j \nabla_i v_h, \; \nabla_i \varphi = \varphi_i \end{aligned} \tag{4.49}$$

elde edilir. Daha sonra, (4.49) denkleminde (4.48) bağıntısı kullanılırsa,

$$\nabla_i \nabla_j v_h = \varphi_i g_{jh} + v_h \nabla_i \phi_j + \varphi \phi_j g_{ih} + \phi_j \phi_i v_h \tag{4.50}$$

olduğu görülür. Ayrıca, (4.50) bağıntısında, i ve j indislerinin yeri değiştirilirse

$$\nabla_j \nabla_i v_h = \varphi_j g_{ih} + v_h \nabla_j \phi_i + \phi_i \varphi g_{jh} + \phi_i \phi_j v_h \tag{4.51}$$

denklemi elde edilir. Daha sonra, (4.50) ve (4.51) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j v_h - \nabla_j \nabla_i v_h &= \varphi_i g_{jh} + v_h \nabla_i \phi_j + \varphi \phi_j g_{ih} + \phi_j \phi_i v_h \\ &- (\varphi_j g_{ih} + v_h \nabla_j \phi_i + \varphi \phi_i g_{jh} + \phi_i \phi_j v_h) \\ &= \varphi_i g_{jh} + \varphi \phi_j g_{ih} - \varphi_j g_{ih} - \varphi \phi_i g_{jh} \end{aligned} \tag{4.52}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca, (4.52) denkleminde Ricci özdeşliği kullanılırsa,

$$-v_r R^r_{ijh} = \varphi_i g_{jh} + \varphi \phi_j g_{ih} - \varphi_j g_{ih} - \varphi \phi_i g_{jh} \tag{4.53}$$

bağıntısı bulunur. Böylece, (4.53) denklemi gerekli düzenlemeler yapılarak

$$v^r R_{ijhr} = -\varphi_i g_{jh} - \varphi \phi_j g_{ih} + \varphi_j g_{ih} + \varphi \phi_i g_{jh} \tag{4.54}$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan, (4.50) denklemi, g^{ha} ile çarpılırsa ve h ve a üzerinden toplam alınırsa,

$$\begin{aligned} g^{ha}(\nabla_i\nabla_j v_h) &= g^{ha}(\varphi_i g_{jh} + v_h\nabla_i\phi_j + \varphi\phi_j g_{ih} + \phi_j\phi_i v_h) \\ &= (\varphi_i\delta^a_j + v^a\nabla_i\phi_j + \varphi\phi_j\delta^a_i + \phi_j\phi_i v^a),\ g^{ha}v_h = v^a \end{aligned} \tag{4.55}$$

bağıntısı elde edilir. Ayrıca, (2.57) denkleminde, öncelikle, (2.71) göz önüne alınırsa

$$\delta^a_j\varphi_i + \delta^a_i\varphi_j - \varphi^a g_{ij} = \nabla_i\nabla_j v^a + v^m R^a_{mij} \tag{4.56}$$

dir ve daha sonra, (4.56) denkleminde (4.55) kullanılırsa

$$\delta^a_j\varphi_i + \delta^a_i\varphi_j - \varphi^a g_{ij} = (\varphi_i\delta^a_j + v^a\nabla_i\phi_j + \varphi\phi_j\delta^a_i + \phi_j\phi_i v^a) + v^m R^a_{mij} \tag{4.57}$$

bağıntısı elde edilir. Ayrıca, bu ifade g_{ah} ile çarpılırsa ve a ve h üzerinden toplam alınırsa

$$\begin{aligned} g_{ah}(\delta^a_j\varphi_i + \delta^a_i\varphi_j - \varphi^a g_{ij}) &= g_{ah}((\varphi_i\delta^a_j + v^a\nabla_i\phi_j + \varphi\phi_j\delta^a_i + \phi_j\phi_i v^a) + v^m R^a_{mij}) \\ &= (\varphi_i g_{jh} + v_h\nabla_i\phi_j + \varphi\phi_j g_{ih} + \phi_j\phi_i v_h) + v^m R_{mijh} \end{aligned} \tag{4.58}$$

denklemi elde edilir, burada $v_h = g_{ah}v^a$ dır. Diğer taraftan, $v^m R_{mijh} = v^m R_{hjim}$ olmak üzere, (4.54) yardımıyla

$$v^m R_{mijh} = -\varphi_h g_{ji} - \phi_j\varphi g_{hi} + \varphi_j g_{hi} + \phi_h\varphi g_{ji} \tag{4.59}$$

bağıntısı göz önüne alınsın. Böylece, (4.59) bağıntısı (4.58)'de kullanılarak

$$\begin{aligned} \varphi_i g_{jh} + \varphi_j g_{ih} - \varphi_h g_{ij} &= (\varphi_i g_{jh} + v_h\nabla_i\phi_j + \varphi\phi_j g_{ih} + \phi_j\phi_i v_h) \\ &\quad -\varphi_h g_{ji} - \phi_j\varphi g_{hi} + \varphi_j g_{hi} + \phi_h\varphi g_{ji},\ \varphi_h = g_{ah}\varphi^a \end{aligned} \tag{4.60}$$

denklemi bulunur. Bu takdirde, (4.60) düzenlenirse

$$-\phi_h\varphi g_{ij} = v_h(\nabla_i\phi_j + \phi_j\phi_i) \tag{4.61}$$

bulunur. Ayrıca, (4.61) denklemi g^{ij} ile çarpılır ve i ve j üzerinden toplam alınırsa,

$$\begin{aligned} g^{ij}(-\phi_h\varphi g_{ij}) &= g^{ij}v_h(\nabla_i\phi_j + \phi_j\phi_i) \\ &= v_h(\nabla_i\phi^i + \phi^i\phi_i),\ g^{ij}\phi_j = \phi^i \end{aligned} \tag{4.62}$$

bulunur. Diğer taraftan, (4.62) denklemi v^h ile çarpılırsa

$$-nv^h\phi_h\varphi = v^h v_h(\nabla_i\phi^i + \phi^i\phi_i) \tag{4.63}$$

dir ve elde edilen (4.63) denkleminde (4.47) bağıntısı kullanılırsa

$$0 = v^h v_h(\nabla_i\phi^i + \phi^i\phi_i) \tag{4.64}$$

denklemi bulunur. Böylece, (4.64) denkleminden

$$(\nabla_i\phi^i + \phi^i\phi_i) = 0 \tag{4.65}$$

elde edilir. Son olarak, bu ifade (4.62) denkleminde kullanılırsa

$$\phi_h\varphi = 0 \tag{4.66}$$

dir. Teoremin hipotezinden dolayı, $\varphi = 0$ bulunur. Ancak, sonsuz küçük konformal dönüşüm göz önüne alındığından, $\varphi \neq 0$ olmak zorundadır. Dolayısıyla, $\varphi \neq \rho$ olmalıdır. □

Teorem 4.11: Bir V_n Riemann uzayına ait, $\boldsymbol{v}$ yarı tors oluşturan vektör alanı göz önüne alınsın. $\boldsymbol{\rho_i}$ ile $\boldsymbol{v_i}$'nin birbirine dik olması için gerek ve yeter koşul $\boldsymbol{\phi_i}$ ve $\boldsymbol{v_i}$'nin birbirine dik olmasıdır.

İspat: Öncelikle, (2.97) denklemi aşağıdaki şekilde tekrar göz önüne alınsın

$$R_{ijkm}v^i v^k = 0\ . \tag{4.67}$$

Daha sonra, (4.67) bağıntısı g^{jm} ile çarpılırsa ve j ve m üzerinden toplam alınırsa aşağıdaki bağıntı elde edilir

$$v^i v^k R_{ik} = 0. \tag{4.68}$$

Böylece, (4.39) bağıntısı (4.68) denkleminde kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &= v^i(v^k R_{ik}) \\ &= \phi_{ji}v^j v^i + (1-n)(\rho_i - \rho\phi_i)v^i \end{aligned} \tag{4.69}$$

bulunur. Sonuç olarak, $v^i v^j \phi_{ji} = 0$ olduğu hatırlanırsa, (4.69) denklemi

$$v^i\rho_i - \rho v^i\phi_i = 0 \tag{4.70}$$

şekline indirgenir. Bu durumda, $\boldsymbol{\rho_i}$ ile $\boldsymbol{v_i}$'nin birbirine dik olması için gerek ve yeter koşul $\boldsymbol{\phi_i}$ ve $\boldsymbol{v_i}$'nin birbirine dik olmasıdır. □

Teorem 4.12: Bir $(PRS)_n$ uzayına ait, $\boldsymbol{v}$ yarı tors oluşturan vektör alanı göz önüne alınsın. Bu takdirde, $\boldsymbol{\lambda_i}$ ve $\boldsymbol{v_i}$ birbirine dik değildir, $(\rho \neq 0)$.

İspat: Öncelikle, (4.68) denkleminin kovaryant türevi alınırsa

$$0 = v^k R_{ik} \nabla_l v^i + v^i R_{ik} \nabla_l v^k + v^i v^k \nabla_l R_{ik} \tag{4.71}$$

dir ve (4.71) denkleminde (2.29) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= v^k R_{ik} \nabla_l v^i + v^i R_{ik} \nabla_l v^k + v^i v^k (2\lambda_l R_{ki} + \lambda_i R_{lk} + \lambda_k R_{il}) \\ &= v^k R_{ik} \nabla_l v^i + v^i R_{ik} \nabla_l v^k + 2\lambda_l v^i v^k R_{ik} + \lambda_i v^i v^k R_{lk} + \lambda_k v^k v^i R_{il} \end{aligned} \tag{4.72}$$

elde edilir. Daha sonra, (4.72) denkleminde (2.82) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= v^k R_{ik} (\rho \delta_l^i + \phi_l v^i) + v^i R_{ik} (\rho \delta_l^k + \phi_l v^k) \\ &\quad + 2\lambda_l v^i v^k R_{ik} + \lambda_i v^i v^k R_{lk} + \lambda_k v^k v^i R_{il} \end{aligned} \tag{4.73}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda, (4.73) denklemi düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= (\rho v^k R_{lk} + \phi_l v^i v^k R_{ik}) + (\rho v^i R_{il} + \phi_l v^i v^k R_{ik}) \\ &\quad + 2\lambda_l v^i v^k R_{ik} + \lambda_i v^i v^k R_{lk} + \lambda_k v^k v^i R_{il} \end{aligned} \tag{4.74}$$

dir. Ayrıca, (4.74) denkleminde (4.68) kullanılırsa

$$(\rho + \lambda_i v^i) v^k R_{lk} = 0 \tag{4.75}$$

elde edilir. Sonuç olarak, (4.75) denkleminden iki durum sözkonusudur:

I. Durum

$$\rho + v^i \lambda_i = 0 \tag{4.76}$$

II. Durum

$$v^k R_{kl} = 0 \tag{4.77}$$

İlk olarak, (4.77) koşulunun sağlandığı kabul edilsin, bu takdirde, (4.77) denkleminin kovaryant türevi alınırsa

$$0 = R_{kl} \nabla_m v^k + v^k \nabla_m R_{kl} \tag{4.78}$$

dir. Daha sonra, (4.78) denkleminde (2.29) kullanılırsa

$$0 = R_{kl}\nabla_m v^k + 2\lambda_m v^k R_{kl} + v^k \lambda_k R_{lm} + \lambda_l v^k R_{mk} \tag{4.79}$$

bulunur. Ayrıca, (4.79) denkleminde (2.82) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= R_{kl}(\rho\delta_m^k + \phi_m v^k) + 2\lambda_m v^k R_{kl} + v^k \lambda_k R_{lm} + \lambda_l v^k R_{mk} \\ &= \rho R_{ml} + \phi_m v^k R_{kl} + 2\lambda_m v^k R_{kl} + v^k \lambda_k R_{lm} + \lambda_l v^k R_{mk} \end{aligned} \tag{4.80}$$

elde edilir. Böylece, (4.80) ve (4.77) denklemleri yardımıyla

$$0 = (\rho + v^k \lambda_k) R_{lm} \tag{4.81}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, (4.81) denkleminde, $R_{lm} \neq 0$ olduğu hatırlanırsa,

$$\rho = -v^i \lambda_i \tag{4.82}$$

elde edilir. Buradan, (4.76) ve (4.82) denklemlerinin aynı olduğu görülür. Dolayısıyla, her iki durumda da, $\rho = -v^i \lambda_i$ elde edilir. □

Uyarı 4.6: Teorem 4.6 ve Teorem 4.10'de bahsedilen özel vektör alanları ile üretilen sonsuz küçük konformal dönüşüm yerine, bu vektör alanları ile üretilen sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alındığında, yukarıda verilmiş olan teoremlerin aynı şekilde geçerli olacağı açıktır.

5. PSEUDO SİMETRİK BİR RIEMANN UZAYINDA SONSUZ KÜÇÜK DÖNÜŞÜM

5.1 İki Boyutlu Pseudo Simetrik Bir Riemann Uzayında Sonsuz Küçük Dönüşüm

1987 yılında, M. C. Chaki, [4], pseudo simetrik Riemann uzaylarını tanımlamış ve bu tür uzayların özelliklerini incelemiştir. 1989'da, M. C. Chaki ve U. C. De, [23], pseudo simetrik bir Riemann uzayına ait özel vektör alanlarını ve bu vektör alanlarının uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanı ile ilişkilerini belirlemişlerdir. 1992 yılında, K. L. Duggal, [15], bir Riemann uzayında, sonsuz küçük dönüşüm altında, uzayın eğrilik ve Ricci eğrilik tensörlerinin kalıtımsal olma koşullarını araştırmışlardır. Daha sonra, 1995 yılında, M. Tarafdar, [24], konformal düz pseudo simetrik Riemann uzayını bir denklemle karakterize etmiş ve bu denklemin $\boldsymbol{v_l}$ eş vektör alanının, bir tors oluşturan vektör alanı olduğunu göstermiştir. Ayrıca, 2000 yılında, U. C. De ve S. K. Ghosh, [25], konformal düz, pseudo simetrik bir Riemann uzayını karakterize eden denklemde, göz önüne alınan $\boldsymbol{v_l}$ eş vektörünün gradyent olması durumunda, bu vektör alanının bir konsörkılır vektör alanınından ibaret olacağını göstermişlerdir.

Bahsedilen çalışmalar göz önünde bulundurulduğunda, ilk olarak, Ricci-düz olmayan ve skaler eğriliği sabit ve sıfır olmayan, iki boyutlu pseudo simetrik Riemann uzayında, sonsuz küçük dönüşüm incelenmiş, daha sonra, boyutu ikiden büyük, pseudo simetrik bir Riemann uzayına ait, sonsuz küçük dönüşüm ve bu uzayın özel vektör alanları ile üretilen sonsuz küçük dönüşüm ile ilişkileri araştırılmıştır. Son olarak, konformal düz pseudo simetrik bir Riemann uzayında, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşümün tanımlanamayacağı gösterilmiştir.

İki boyutlu bir Riemann uzayının kesitsel eğriliği, eğrilik tensörü, Ricci eğrilik tensörü ve skaler eğriliği, sırasıyla,

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{12}^2 - g_{11}g_{22}}, \tag{5.1}$$

$$R^h_{ijk} = K(\delta^h_i g_{jk} - \delta^h_j g_{ki}), \tag{5.2}$$

$$R_{ij} = \frac{R}{2} g_{ij} \tag{5.3}$$

ve

$$R = 2K \tag{5.4}$$

bağıntıları ile verilmektedir.

Uyarı 5.1: Aşağıdaki teoremlerde, iki boyutlu ve skaler eğriliği sabit olmayan pseudo simetrik Riemann uzayı $(PS)_2$ ile gösterilecektir. □

Uyarı 5.2: Bu bölümde ele alınacak tüm teoremlerde, $\varphi \neq sabit$ koşulunu sağlayan sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınacaktır. □

Teorem 5.1: Skaler eğriliği sabit ve sıfır olmayan bir $(PS)_2$ uzayı, aynı $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanı ile tanımlı bir reküran uzaydır.

İspat: Öncelikle, (2.28) denklemi g^{ih} ile çarpılırsa ve i ve h üzerinden toplam alınırsa

$$\nabla_l R_{jk} = 2\lambda_l R_{jk} + \lambda^h R_{ljkh} + \lambda_j R_{lk} + \lambda_k R_{jl} + \lambda^h R_{hjkl}, \; g^{ih}\lambda_i = \lambda^h \tag{5.5}$$

formuna indirgenir. Daha sonra, (5.5) denklemi g^{jk} ile çarpılırsa ve j ve k üzerinden toplam alınırsa

$$\nabla_l R = 2\lambda_l R + 4\lambda^h R_{hl} \tag{5.6}$$

bağıntısı bulunur. Bundan başka, (5.6) denkleminde (5.3) denklemi kullanılırsa

$$\nabla_l R = 4\lambda_l R, \; g_{hl}\lambda^h = \lambda_l \tag{5.7}$$

olduğu görülür. Ayrıca, (5.2) denkleminin bir başka formu

$$R_{hijk} = K(g_{kh}g_{ij} - g_{ki}g_{jh}) \tag{5.8}$$

şeklindedir. Bu son denklemin x^l' ye göre kovaryant türevini alınırsa

$$\nabla_l R_{hijk} = (\nabla_l K)(g_{kh}g_{ij} - g_{ki}g_{jh}), \tag{5.9}$$

dir ve (5.9) denkleminde (5.4) kullanılırsa

$$\nabla_l R_{hijk} = \frac{1}{2}\nabla_l R(g_{kh}g_{ij} - g_{ki}g_{jh}) \tag{5.10}$$

bulunur. Dolayısıyla, (5.10) denkleminde (5.7) kullanılırsa

$$\nabla_l R_{hijk} = 2\lambda_l R(g_{kh}g_{ij} - g_{ki}g_{jh}) \tag{5.11}$$

bağıntısı elde edilir. Daha sonra, (5.11) denklemi, (5.4) yardımıyla

$$\nabla_l R_{hijk} = 4\lambda_l K(g_{kh}g_{ij} - g_{ki}g_{jh}) \tag{5.12}$$

şeklinde bulunur. Böylece, (5.12) denklemi ve (5.8) bağıntısı kullanılarak

$$\nabla_l R_{hijk} = 4\lambda_l R_{hijk} \tag{5.13}$$

dir. Bu ifadeden, $(PS)_2$ uzayının bir reküran uzay olduğu görülür. □

Teorem 5.2: $(PS)_2$ uzayının $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanı gradyent vektör alanıdır, [4]. □

Uyarı 5.3: Bu bölümde ele alınacak tüm teoremlerde $(PS)_2$ uzayının skaler eğriliğinin sıfırdan ve sabitten farklı olduğu kabul edilecektir. Aksi takdirde, uzay düz uzay olacaktır. □

Tanım 5.1: V_n, bir Riemann uzayı olsun. V_n uzayı üzerinde, $\overline{x^a} = x^a + v^a dt$ sonsuz küçük dönüşüm altında, α skaler bir fonksiyon olmak üzere, $\alpha = \alpha(x^a)$

$$\mathscr{L}_v R^h_{ijk} = 2\alpha R^h_{ijk} \tag{5.14}$$

bağıntısı geçerli ise, böyle bir uzaya eğrilik tensörü kalıtımsal özelliğe (curvature inheritence) sahip bir uzay denir, [15]. Eğrilik tensörünün kalıtımsal özelliği, kısaca, CI ile gösterilir.

$\mathscr{L}_v R^h_{ijk} = 0$ koşulunu sağlayan $\boldsymbol{v}$ vektör alanı ile tanımlı simetri özelliği, eğrilik collineation olarak Katzin tarafından tanımlanmıştır, [26]. Bu tür uzaylar kısaca, CC ile gösterilir.

(5.14) bağıntısında, $\alpha = 0$ olarak alınırsa, CI, CC'ye dönüşür. □

Sonuç 5.1: Bir V_n Riemann uzayının eğrilik tensörü kalıtımsal özelliğe sahip ise, Ricci eğrilik tensörü de kalıtımsal özelliğe sahiptir, [26]. □

Teorem 5.3: Skaler eğriliği sabit olmayan, iki boyutlu bir Riemann uzayına ait her dönüşümün bir sonsuz küçük konformal dönüşümden ibaret olması için yeter koşul, uzayın kovaryant eğrilik (veya Ricci eğrilik) tensörünün kalıtımsal özelliğe sahip olmasıdır.

İspat: İki boyutlu bir Riemann uzayı V_2 olsun. Bu uzayın kovaryant eğrilik tensörünün kalıtımsal özelliğe sahip olduğu kabul edilsin. Sonuç 5.1'den dolayı, bu uzayın Ricci eğrilik tensörünün de kalıtımsal özelliğe sahip olacağı açıktır, yani

$$\mathscr{L}_v R_{ij} = 2\alpha R_{ij} \tag{5.15}$$

dir. Öncelikle, (5.15) denkleminde (5.3) kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v(\frac{R}{2} g_{ij}) = 2\alpha R_{ij} \tag{5.16}$$

bulunur. Daha sonra, (5.16) denklemi (2.65) bağıntısı kullanılarak

$$\frac{1}{2}\mathscr{L}_v(R) g_{ij} + \frac{R}{2}\mathscr{L}_v(g_{ij}) = 2\alpha R_{ij} \tag{5.17}$$

şekline dönüşür. Ayrıca, (5.17) denklemi (5.3) yardımıyla

$$2\alpha R g_{ij} = \mathscr{L}_v(R) g_{ij} + R\mathscr{L}_v(g_{ij}) \tag{5.18}$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki son denklem, aşağıdaki gibi düzenlensin

$$\mathscr{L}_v(g_{ij}) = (2\alpha - \frac{\mathscr{L}_v(R)}{R}) g_{ij}, \; R \neq 0. \tag{5.19}$$

Son olarak, (5.19) denklemi yardımıyla, iki boyutlu V_2 Riemann uzayında

$$\mathscr{L}_v(g_{ij}) = 2\varphi g_{ij}, \qquad 2\varphi = (2\alpha - \frac{\mathscr{L}_v(R)}{R}), \; R \neq 0 \tag{5.20}$$

olduğundan, her sonsuz küçük dönüşümün bir sonsuz küçük konformal dönüşümden ibaret olduğu görülür. □

Teorem 5.3'de, eğer, $\alpha = 0$ olarak alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 5.2: Skaler eğriliği sabit olmayan, iki boyutlu bir Riemann uzayına ait her sonsuz küçük dönüşümün, sonsuz küçük konformal dönüşümden ibaret olması için yeter koşul, uzayın kovaryant (veya Ricci eğrilik) tensörünün Lie invaryant olmasıdır. □

Teorem 5.4: İki boyutlu bir Riemann uzayının Ricci eğrilik tensörü kalıtımsal özelliğe sahip ise, eğrilik tensörü de kalıtımsal özelliğe sahiptir. Ayrıca, uzayın Ricci eğrilik tensörü sonsuz küçük dönüşüm altında Lie invaryant ise, eğrilik tensörü de Lie invaryanttır.

İspat: İki boyutlu bir Riemann uzayının Ricci eğrilik tensörü sonsuz küçük dönüşüm altında kalıtımsal özelliğe sahip olsun. Bu takdirde, (5.2) denklemi, (2.65) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_v R^m_{ijk} &= \mathscr{L}_v(K(\delta^m_i g_{jk} - \delta^m_j g_{ki})) \\
&= \delta^m_i \mathscr{L}_v(K g_{jk}) - \delta^m_j \mathscr{L}_v(K g_{ki}) \\
&= \delta^m_i g_{jk} \mathscr{L}_v K + \delta^m_i K \mathscr{L}_v g_{jk} - \delta^m_j g_{ki} \mathscr{L}_v K - \delta^m_j K \mathscr{L}_v g_{ki} \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Daha sonra, (5.21) denkleminde (5.4) kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v R^m_{ijk} = \delta^m_i g_{jk} \mathscr{L}_v(\frac{R}{2}) + \delta^m_i K \mathscr{L}_v g_{jk} - \delta^m_j g_{ki} \mathscr{L}_v(\frac{R}{2}) - \delta^m_j K \mathscr{L}_v g_{ki}, \; R \neq 0 \quad (5.22)$$

ve (5.22) denkleminde, Teorem 5.3 yardımıyla bulunan $(5.20)_1$ ifadesi kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v R^m_{ijk} = \delta^m_i g_{jk} \mathscr{L}_v(\frac{R}{2}) + \delta^m_i K(2\varphi g_{jk}) - \delta^m_j g_{ki} \mathscr{L}_v(\frac{R}{2}) - \delta^m_j K(2\varphi g_{ki}) \; R \neq 0 \quad (5.23)$$

elde edilir. Ayrıca, (5.23) denkleminde $(5.20)_2$ kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v R^m_{ijk} = \frac{1}{2}(2\alpha - 2\varphi) R \delta^m_i g_{jk} + 2K\varphi \delta^m_i g_{jk} - \frac{1}{2}(2\alpha - 2\varphi) R \delta^m_j g_{ki} - 2K\varphi \delta^m_j g_{ki} \quad (5.24)$$

dir. Daha sonra, (5.24) denklemi, (5.4) yardımıyla

$$\mathscr{L}_v R^m_{ijk} = (2\alpha - 2\varphi) K \delta^m_i g_{jk} + 2K\varphi \delta^m_i g_{jk} - (2\alpha - 2\varphi) K \delta^m_j g_{ki} - 2K\varphi \delta^m_j g_{ki} \quad (5.25)$$

olarak bulunur. Böylece, (5.25) denklemi, gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\mathscr{L}_v R^m_{ijk} = 2\alpha K(\delta^m_i g_{jk} - \delta^m_j g_{ki}) \quad (5.26)$$

şeklinde elde edilir ki, buradan (5.2) yardımıyla

$$\mathscr{L}_v R^m_{ijk} = 2\alpha R^m_{ijk} \quad (5.27)$$

sonucu ortaya çıkar. Böylece, V_2 Riemann uzayının Ricci eğrilik tensörü sonsuz küçük dönüşüm altında kalıtımsal özelliğe sahip ise, eğrilik tensörünün de sonsuz küçük dönüşüm altında kalıtımsal özelliğe sahip olduğu ispatlanmış olur.

V_2 Riemann uzayının Ricci eğrilik tensörü, sonsuz küçük dönüşüm altında Lie invaryant olsun. Bu takdirde, $\mathscr{L}_v R_{ij} = 0$ koşulu sağlanır. Öncelikle, (5.4) denklemi (5.3)'de kullanılarak

$$R_{ij} = K g_{ij} \quad (5.28)$$

elde edilir. Daha sonra, $\mathscr{L}_v R_{ij} = 0$ denkleminde (5.28) ifadesi kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v(Kg_{ij}) = 0 \tag{5.29}$$

bulunur. Bundan başka, (5.29) denklemi Lie türevinin özellikleri yardımıyla

$$g_{ij}\mathscr{L}_v K + K\mathscr{L}_v g_{ij} = 0 \tag{5.30}$$

şeklinde elde edilir. Böylece, (5.30) denklemi düzenlenirse

$$g_{ij}\mathscr{L}_v K = -K\mathscr{L}_v g_{ij} \tag{5.31}$$

dir. Diğer taraftan, (5.2) denkleminin Lie türevi

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_v R^h_{ijk} &= \mathscr{L}_v(K(\delta^h_i g_{jk} - \delta^h_j g_{ki})) \\
&= (\delta^h_i g_{jk} - \delta^h_j g_{ki})\mathscr{L}_v K + K\mathscr{L}_v(\delta^h_i g_{jk} - \delta^h_j g_{ki}) \\
&= (\delta^h_i g_{jk} - \delta^h_j g_{ki})\mathscr{L}_v K + \delta^h_i K\mathscr{L}_v g_{jk} - \delta^h_j K\mathscr{L} g_{ki}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

dir. Daha sonra, (5.32) denkleminde (5.31) kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v R^h_{ijk} = 0 \tag{5.33}$$

bulunur ki, buradan, V_2 Riemann uzayının eğrilik tensörünün sonsuz küçük dönüşüm altında Lie invaryant olduğu görülür. □

Teorem 5.3' den dolayı, aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 5.3: Kovaryant eğrilik (veya Ricci eğrilik) tensörü kalıtımsal özelliğe sahip V_2 Riemann uzayının skaler eğriliğinin, sonsuz küçük dönüşüm altında Lie invaryant olması için gerek ve yeter koşul, $\alpha = \varphi$ olmasıdır. □

Önerme 5.1: Skaler eğriliği sabit olmayan $(PS)_2$ uzayının eğrilik tensörü (veya Ricci eğrilik tensörü) kalıtımsal özelliğe sahip olsun. Bu takdirde,

$$\alpha = 2v^m\lambda_m + \varphi \tag{5.34}$$

ve

$$\nabla_m\varphi^m = -\alpha R \tag{5.35}$$

bağıntıları mevcuttur.

İspat: Öncelikle, (2.63) denklemi, $(PS)_2$ uzayının skaler eğriliği için kullanılırsa, aşağıdaki denklem elde edilir

$$\mathscr{L}_v R = v^k\nabla_k R, \; R \neq 0. \tag{5.36}$$

Daha sonra, (5.36) denkleminde (5.7) kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v R = 4v^m \lambda_m R, \; R \neq 0 \tag{5.37}$$

bağıntısı elde edilir. Teorem 5.3'den dolayı, göz önüne alınan sonsuz küçük dönüşüm, bir sonsuz küçük konformal dönüşümden ibaret olacağından, V_2 Riemann uzayında (2.74) bağıntısı geçerlidir ve

$$\mathscr{L}_v R = -2\varphi R - 2\nabla_i \varphi^i, \; R \neq 0. \tag{5.38}$$

dir. Dolayısıyla, (5.37) ve (5.38) denklemlerinin eşitliğinden

$$4v^m \lambda_m R = -2\varphi R - 2\nabla_i \varphi^i \tag{5.39}$$

elde edilir. Böylece, (5.39) denklemi düzenlenirse

$$\nabla_m \varphi^m = -(\varphi + 2v^m \lambda_m) R \tag{5.40}$$

bulunur. Diğer taraftan, (5.37) denklemi, $(5.20)_2$ denkleminde kullanılırsa

$$2\varphi = (2\alpha - 4v^m \lambda_m) \tag{5.41}$$

dir ve (5.41) denklemi, yeniden düzenlenirse

$$\alpha = 2v^m \lambda_m + \varphi \tag{5.42}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca, (5.40) denkleminde, (5.34) göz önüne alınırsa

$$\nabla_m \varphi^m = -\alpha R \tag{5.43}$$

bulunur. □

Öncelikle, daha sonra kullanılmak üzere aşağıdaki teorem göz önüne alınsın:

Teorem 5.5 : Kovaryant eğrilik tensörü Lie invaryant olan, iki boyutlu bir Riemann uzayına ait her sonsuz küçük dönüşüm, bu uzayın R skaler eğriliğinin sıfırdan farklı olduğu noktada, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşümden ibarettir, [9]. □

Teorem 5.6: $(PS)_2$ uzayının Ricci eğrilik tensörü, sonsuz küçük dönüşüm altında Lie invaryant ise, bu takdirde, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_i}$ ile $\boldsymbol{v_i}$ kovaryant vektör alanları birbirine dik olamaz.

İspat: Teorem 5.4'den dolayı, skaler eğriliği sabit olmayan bir V_2 Riemann uzayının eğrilik tensörü de sonsuz küçük dönüşüm altında Lie invaryanttır. Böylece, Teorem 5.5'den dolayı, bu uzayda ele alınan sonsuz küçük dönüşüm, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşümden ibaret olur. Dolayısıyla, $(3.15)_3$ bağıntısı (5.37) denkleminde kullanılarak

$$-2\varphi R = 4v^m \lambda_m R \tag{5.44}$$

ifadesi elde edilir. Uzayın skaler eğriliğinin sabitten ve sıfırdan farklı olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\varphi = -2v^m \lambda_m \tag{5.45}$$

denklemi bulunur. Böylece, (5.45) denkleminden, $\boldsymbol{\lambda_i}$ ile $\boldsymbol{v_i}$'nin birbirine dik olmadığı görülür. □

Teorem 5.7: Eğrilik (veya Ricci eğrilik) tensörü sonsuz küçük dönüşüm altında Lie invaryant olan bir $(PS)_2$ uzayı göz önüne alınsın. Bu takdirde, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanı Lie invaryant değildir.

İspat: Bir V_2 Riemann uzayının eğrilik tensörü (veya Ricci eğrilik tensörü) sonsuz küçük dönüşüm altında Lie invaryant ise, Teorem 5.5'den dolayı, bu sonsuz küçük dönüşüm, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşümden ibaret olur. Böylece, (2.68) denklemi ve $\mathscr{L}_v R_{ij} = 0$ bağıntısı kullanılarak

$$\mathscr{L}_v(\nabla_l R_{ij}) = -R_{mj}\mathscr{L}_v\Gamma^m_{li} - R_{im}\mathscr{L}_v\Gamma^m_{lj} \tag{5.46}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca, (5.46) denkleminde (2.71) denklemi kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v(\nabla_l R_{ij}) = -R_{mj}(\delta^m_i\varphi_l + \delta^m_l\varphi_i - g_{li}\varphi^m) - R_{im}(\delta^m_j\varphi_l + \delta^m_l\varphi_j - g_{lj}\varphi^m) \tag{5.47}$$

bağıntısı elde edilir. Dolayısıyla, elde edilen bu denklem düzenlenirse

$$\mathscr{L}_v(\nabla_l R_{ij}) = -2\varphi_l R_{ij} - \varphi_j R_{il} - \varphi_i R_{lj} + \varphi^m g_{il} R_{mj} + \varphi^m g_{lj} R_{im} \tag{5.48}$$

ifadesine ulaşılır. Böylece, (5.48) denkleminde (5.3) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_v(\nabla_l(\frac{R}{2}g_{ij})) &= -2\varphi_l\frac{R}{2}g_{ij} - \varphi_j\frac{R}{2}g_{il} - \varphi_i\frac{R}{2}g_{lj} + \varphi^m g_{li}\frac{R}{2}g_{mj} + \varphi^m g_{lj}\frac{R}{2}g_{im} \\
&= -2\varphi_l\frac{R}{2}g_{ij} - \varphi_j\frac{R}{2}g_{il} - \varphi_i\frac{R}{2}g_{lj} + g_{li}\frac{R}{2}\varphi_j + g_{lj}\frac{R}{2}\varphi_i,\ g_{mj}\varphi^m = \varphi_j
\end{aligned} \tag{5.49}$$

olmak üzere, (5.49) denklemi düzenlenirse

$$\mathscr{L}_v(g_{ij}\nabla_l R) = -2\varphi_l g_{ij} R \tag{5.50}$$

dir. Ayrıca, (5.50) denkleminde (5.7) kullanılırsa

$$2\mathscr{L}_v(\lambda_l g_{ij} R) = -\varphi_l g_{ij} R \tag{5.51}$$

elde edilir. Daha sonra, (5.51) denklemi, (5.3) denklemi yardımıyla, tekrar göz önüne alınırsa

$$2\mathscr{L}_v(\lambda_l R_{ij}) = -\varphi_l R_{ij} \tag{5.52}$$

şeklindedir. Bundan başka, (5.52) ve (2.64)'den

$$2(R_{ij}\mathscr{L}_v\lambda_l + \lambda_l \mathscr{L}_v R_{ij}) = -\varphi_l R_{ij} \tag{5.53}$$

bulunur. Bu son denklemde, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşümden dolayı geçerli olan $(3.15)_2$ denklemi kullanılırsa

$$2R_{ij}\mathscr{L}_v\lambda_l = -\varphi_l R_{ij} \tag{5.54}$$

ifadesi bulunur. Ayrıca, $(PS)_2$ uzayının $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm altında Lie türevi

$$\mathscr{L}_v\lambda_l = d_l \tag{5.55}$$

olmak üzere, (5.54) denkleminde (5.55) kullanılırsa

$$(2d_l + \varphi_l)R_{ij} = 0, \ R_{ij} \neq 0 \tag{5.56}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\varphi_l = -2d_l \tag{5.57}$$

dir. Dolayısıyla, (5.57) yardımıyla, bir $(PS)_2$ uzayının $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının Lie invaryant olmadığı görülür. □

5.2 Pseudo simetrik Bir Riemann Uzayında Sonsuz Küçük Pseudo Homotetik Dönüşüm($n > 2$)

Bu bölümde, boyutu ikiden büyük, Ricci-düz olmayan pseudo simetrik bir Riemann uzayına ait sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınarak, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanı ile alınan bu sonsuz küçük dönüşüm arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Uyarı 5.4: Bu bölümde, ele alınacak teoremlerde, boyutu ikiden büyük, n-boyutlu pseudo simetrik Riemann uzayı $(PS)_n$ ile gösterilecektir. □

Uyarı 5.5: Bu bölümde ele alınacak teoremlerde, $\varphi \neq sabit$ koşulunu sağlayan sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınacaktır. □

Önerme 5.2: Boyutu ikiden büyük ve Ricci-düz olmayan bir $(PS)_n$ uzayına ait, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınsın. Bu takdirde, bu uzayda

$$\mathscr{L}_v \lambda_l = d_l \tag{5.58}$$

olmak üzere

$$d_l = -\varphi_l \tag{5.59}$$

bağıntısı mevcuttur.

İspat: Öncelikle, (2.28) denklemi g^{ih} ile çarpılırsa ve h ve i üzerinden toplam alınır ve (2.15) denklemi kullanılırsa

$$\nabla_l R_{jk} = 2\lambda_l R_{jk} + \lambda^h R_{ljkh} + \lambda_j R_{lk} + \lambda_k R_{jl} + \lambda^h R_{hjkl} \tag{5.60}$$

dir. Diğer taraftan, (2.68), (2.71) ve $(3.15)_2$ denklemleri yardımıyla

$$\mathscr{L}_v(\nabla_l R_{jk}) = -2\varphi_l R_{jk} - \varphi_j R_{kl} - \varphi_k R_{lj} + \varphi^m g_{lj} R_{mk} + \varphi^m g_{kl} R_{jm} \tag{5.61}$$

bağıntısı mevcuttur. Dolayısıyla, diğer taraftan, (5.61) bağıntısında (5.60) kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}_v(2\lambda_l R_{jk} + \lambda^h R_{ljkh} + \lambda_j R_{lk} + \lambda_k R_{jl} + \lambda^h R_{hjkl}) = \\ &-2\varphi_l R_{jk} - \varphi_j R_{kl} - \varphi_k R_{lj} + \varphi^m g_{lj} R_{mk} + \varphi^m g_{kl} R_{jm} \end{aligned} \tag{5.62}$$

elde edilir. Ayrıca, (5.62) bağıntısı, (2.65) ve (2.66) yardımıyla

$$\begin{aligned}&2R_{jk}\mathscr{L}_v\lambda_l+2\lambda_l\mathscr{L}_vR_{jk}+\mathscr{L}_v(\lambda^hR_{ljkh})+R_{lk}\mathscr{L}_v\lambda_j+\lambda_j\mathscr{L}_vR_{lk}+R_{jl}\mathscr{L}_v\lambda_k\\&+\lambda_k\mathscr{L}_vR_{jl}+\mathscr{L}_v(\lambda^hR_{hjkl})=-2\varphi_lR_{jk}-\varphi_jR_{kl}-\varphi_kR_{lj}+\varphi^mg_{lj}R_{mk}+\varphi^mg_{kl}R_{jm}\end{aligned} \tag{5.63}$$

halini alır. Diğer taraftan, Lie türevi yardımıyla

$$\mathscr{L}_v(\lambda^hR_{ljkh})=R_{ljkh}\mathscr{L}_v\lambda^h+\lambda^h\mathscr{L}_vR_{ljkh} \tag{5.64}$$

veya

$$\mathscr{L}_v(\lambda^hR_{ljkh})=R_{ljkh}\mathscr{L}_v(g^{hm}\lambda_m)+\lambda^h\mathscr{L}_vR_{ljkh},\ \lambda^h=g^{hm}\lambda_m \tag{5.65}$$

dır. Ayrıca, (5.65) denklemi, Lie türevinin özellikleri yardımıyla

$$\mathscr{L}_v(\lambda^hR_{ljkh})=R_{ljkh}(\lambda_m\mathscr{L}_vg^{hm}+g^{hm}\mathscr{L}_v\lambda_m)+\lambda^h\mathscr{L}_vR_{ljkh} \tag{5.66}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, (5.66) denkleminde, (2.70) bağıntısı kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v(\lambda^hR_{ljkh})=R_{ljkh}(\lambda_m(-2\varphi g^{hm})+g^{hm}\mathscr{L}_v\lambda_m)+\lambda^h\mathscr{L}_vR_{ljkh} \tag{5.67}$$

bulunur. Böylece, (5.58) bağıntısı, (5.67) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_v(\lambda^hR_{ljkh}) &= R_{ljkh}(-2\varphi\lambda^h+g^{hm}d_m)+\lambda^h\mathscr{L}_vR_{ljkh}\\ &= R_{ljkh}(-2\varphi\lambda^h+d^h)+\lambda^h\mathscr{L}_vR_{ljkh},\ g^{hm}\lambda_m=\lambda^h,\ g^{hm}d_m=d^h\end{aligned} \tag{5.68}$$

elde edilir. Son olarak, (5.68) denkleminde $(3.15)_1$ kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v(\lambda^hR_{ljkh})=R_{ljkh}(-2\varphi\lambda^h+d^h)+\lambda^h(2\varphi R_{ljkh}) \tag{5.69}$$

veya

$$\mathscr{L}_v(\lambda^hR_{ljkh})=d^hR_{ljkh} \tag{5.70}$$

bağıntısı elde edilir. Dolayısıyla, (5.63) denkleminde, öncelikle, $(3.15)_2$ kullanılırsa

$$\begin{aligned}&2R_{jk}\mathscr{L}_v\lambda_l+\mathscr{L}_v(\lambda^hR_{ljkh})+R_{lk}\mathscr{L}_v\lambda_j+R_{jl}\mathscr{L}_v\lambda_k+\mathscr{L}_v(\lambda^hR_{hjkl})=\\&-2\varphi_lR_{jk}-\varphi_jR_{kl}-\varphi_kR_{lj}+\varphi^mg_{lj}R_{mk}+\varphi^mg_{kl}R_{jm}\end{aligned} \tag{5.71}$$

dir. Bu durumda, (5.71) denkleminde (5.58) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&(2d_lR_{jk}+\mathscr{L}_v(\lambda^hR_{ljkh})+d_jR_{lk}+d_kR_{jl}+\mathscr{L}_v(\lambda^hR_{hjkl}))= \\
&-2\varphi_lR_{jk}-\varphi_jR_{kl}-\varphi_kR_{lj}+\varphi^mg_{lj}R_{mk}+\varphi^mg_{kl}R_{jm}
\end{aligned}
\tag{5.72}
$$

bulunur. Son olarak, (5.72) denkleminde (5.70) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&2d_lR_{jk}+d^hR_{ljkh}+d_jR_{kl}+d_kR_{lj}+d^hR_{hjkl}= \\
&-2\varphi_lR_{jk}-\varphi_jR_{kl}-\varphi_kR_{lj}+\varphi^mg_{lj}R_{mk}+\varphi^mg_{kl}R_{jm},\ g^{hm}d_m=d^h
\end{aligned}
\tag{5.73}
$$

denklemi bulunur. Ayrıca, (5.73) denkleminde, j, k ve l devirsel olarak değiştirilirse

$$
\begin{aligned}
&2d_jR_{kl}+d^hR_{jklh}+d_kR_{lj}+d_lR_{jk}+d^hR_{hklj}= \\
&-2\varphi_jR_{kl}-\varphi_kR_{lj}-\varphi_lR_{jk}+\varphi^mg_{jk}R_{ml}+\varphi^mg_{lj}R_{km}
\end{aligned}
\tag{5.74}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&2d_kR_{lj}+d^hR_{kljh}+d_lR_{kj}+d_jR_{lk}+d^hR_{hljk}= \\
&-2\varphi_kR_{lj}-\varphi_lR_{jk}-\varphi_jR_{kl}+\varphi^mg_{kl}R_{mj}+\varphi^mg_{jk}R_{lm}
\end{aligned}
\tag{5.75}
$$

denklemleri elde edilir. Böylece, (5.73)-(5.75) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$
\begin{aligned}
2d_lR_{jk}+2d_jR_{kl}+2d_kR_{lj} &= -2\varphi_lR_{jk}-2\varphi_jR_{kl}-2\varphi_kR_{lj} \\
&+ \varphi^mg_{lj}R_{mk}+\varphi^mg_{lk}R_{jm}+\varphi^mg_{jk}R_{ml}
\end{aligned}
\tag{5.76}
$$

elde edilir. Daha sonra, (5.76) denklemi g^{jk} ile çarpılırsa ve j ve k üzerinden toplam alınırsa

$$
\begin{aligned}
(2d_lR+2d^kR_{lk}+2d^jR_{jl}) &= (-2\varphi_lR-2\varphi^kR_{lk}-2\varphi^jR_{lj} \\
&+\varphi^m\delta_l^kR_{mk}+\varphi^m\delta_l^jR_{jm}+n\varphi^mR_{ml})
\end{aligned}
\tag{5.77}
$$

bulunur. Böylece, (5.77) denklemi aşağıdaki gibi düzenlenebilir

$$
(2d_lR+4d^kR_{lk}) = -2\varphi_lR-4\varphi^kR_{lk}+\varphi^mR_{ml}+\varphi^mR_{lm}+n\varphi^mR_{ml}. \tag{5.78}
$$

Bu durumda, (5.78) denklemi gerekli işlemler yapılırsa

$$
2(d_l+\varphi_l)R+4d^kR_{lk}=(n-2)\varphi^kR_{lk} \tag{5.79}
$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan, (5.73) denklemi, g^{jk} ile çarpılırsa ve j ve k üzerinden toplam alınırsa

$$\begin{aligned}&(2d_lR+d^hR_{lh}+d^kR_{lk}+d^jR_{jl}+d^hR_{hl})=\\&(-2\varphi_lR-\varphi^kR_{lk}-\varphi^jR_{jl}+\varphi^mR_{ml}+\varphi^mR_{lm})\end{aligned} \tag{5.80}$$

elde edilir, (5.80) denklemi yeniden düzenlendiği takdirde

$$d_lR+2d^hR_{hl}=-\varphi_lR \tag{5.81}$$

bağıntısı ortaya çıkar. Böylece, (5.81) denklemi, (5.79) denkleminde kullanılırsa ve uzayın boyutunun ikiden büyük olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\varphi^mR_{ml}=0 \tag{5.82}$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda, (5.82) bağıntısı, (5.76) denkleminde kullanıldığı takdirde

$$(d_l+\varphi_l)R_{kj}+(d_j+\varphi_j)R_{kl}+(d_k+\varphi_k)R_{lj}=0 \tag{5.83}$$

bulunur. Sonuç olarak, (5.83) denkleminde, Teorem 3.1 kullanılırsa ve uzayın Ricci-düz uzay olmadığı göz önüne alınırsa, $d_l=-\varphi_l$ bağıntısı elde edilir. □

Teorem 5.8: Sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm kabul eden bir $(PS)_n$ uzayında, $\boldsymbol{\varphi_i}$ ile $\boldsymbol{\lambda_i}$ birbirine diktir.

İspat: Genel olarak, bir V_n Riemann uzayında, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınırsa, $(3.16)_2$ bağıntısının geçerli olduğu daha önce gösterilmiştir. Dolayısıyla, $(3.16)_2$ denkleminde, Ricci özdeşliği kullanılarak, aşağıdaki bağıntıların mevcut olduğu bilinmektedir

$$\varphi^hR_{ijkh}=0,\ \varphi^hR_{hi}=0\ . \tag{5.84}$$

Öncelikle, $(5.84)_1$ bağıntısının x^l' ya göre kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned}0&=\nabla_l(\varphi^hR_{ijkh})\\&=(\nabla_l\varphi^h)R_{ijkh}+\varphi^h\nabla_lR_{ijkh}\end{aligned} \tag{5.85}$$

bulunur. Daha sonra, (5.85) denkleminde $(3.16)_2$ kullanılırsa

$$\varphi^h\nabla_lR_{ijkh}=0 \tag{5.86}$$

bağıntısı elde edilir. Bundan başka, (5.86) denkleminde, (2.28) kullanılırsa

$$= 2\varphi^h \lambda_l R_{ijkh} + \varphi^h \lambda_i R_{ljkh} + \varphi^h \lambda_j R_{ilkh} + \varphi^h \lambda_k R_{ijlh} + \varphi^h \lambda_h R_{ijkl} \tag{5.87}$$

dir ve ayrıca, (5.87) denkleminde, $(5.84)_1$ bağıntısı kullanılırsa

$$\varphi^h \lambda_h = 0 \tag{5.88}$$

olduğu görülür. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

5.3 Pseudo Simetrik Riemann Uzayında Özel Vektör Alanları

Bu bölümde, Ricci-düz olmayan ve boyutu ikiden büyük bir $(PS)_n$ uzayına ait, özel vektör alanları ve bu özel vektör alanları ile üretilen sonsuz küçük dönüşüm incelenerek, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanı ile bu vektör alanlarının, bu uzaya ait bazı sonsuz küçük dönüşümlerle ilişkileri incelenmiştir.

Öncelikle, daha sonra kullanılmak üzere, aşağıdaki teorem göz önüne alınsın:

Teorem 5.9: Bir $(PS)_n$ uzayında, konküran vektör alanı göz önüne alınsın. Bu takdirde, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_i}$ kovaryant vektörü ile $\boldsymbol{v_i}$ birbirine dik değildir, [23]. □

Teorem 4.1 ve Teorem 5.10 yardımıyla, aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 5.4: Bir $(PS)_n$ uzayına ait, akış çizgileri geodezikler olan, sonsuz küçük has homotetik dönüşüm göz önüne alınsın. Bu takdirde, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_i}$ kovaryant vektör alanı ile $\boldsymbol{v_i}$ birbirine dik değildir. □

Aşağıdaki teoremlerde, uzunluğu sabitten farklı, konküran vektör alanı göz önüne alınmıştır.

Teorem 5.10: Bir $(PS)_n$ uzayına ait, konküran vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük dönüşüm göz önüne alınsın. Bu takdirde, $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının uzunluğu Lie invaryant değildir.

İspat: İlk olarak, $\lambda_l \lambda^l = \theta^2$ eşitliğinin her iki tarafının Lie türevi alınırsa ve bazı düzenlemeler yapılırsa

$$\mathscr{L}_v(\theta^2) = -2\varphi\theta^2 \tag{5.89}$$

elde edilir. $\boldsymbol{v}$ vektör alanının bir sonsuz küçük has homotetik dönüşüm ürettiği göz önünde bulundurularak, (5.89) denklemi yardımıyla, $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının uzunluğunun Lie invaryant olmadığı görülür. □

5.4 Konformal Düz Pseudo Simetrik Bir Riemann Uzayında Sonsuz Küçük Pseudo Homotetik Dönüşüm

Bir V_n Riemann uzayının konformal eğrilik tensörü $C_{ijkh} = 0$ ise, bu uzay konformal düz uzay olarak adlandırılır. Bu takdirde, (2.25) denklemi aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\begin{aligned} R_{ijkh} &= \frac{1}{n-2}(g_{ih}R_{jk} - g_{jh}R_{ik} + g_{jk}R_{ih} - g_{ik}R_{jh}) \\ &- \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{jk}g_{ih} - g_{jh}g_{ik}). \end{aligned} \tag{5.90}$$

Teorem 5.11 : Konformal düz pseudo simetrik V_n bir Riemann uzayı

$$R_{jk} = \frac{R-t}{n-1}g_{jk} + \frac{nt-R}{(n-1)\lambda_i\lambda^i}\lambda_k\lambda_j \tag{5.91}$$

veya

$$R_{jk} = \alpha g_{jk} + \beta v_k v_j \tag{5.92}$$

denklemleri ile karakterize edilmektedir, [24],

$$\alpha = \frac{R-t}{n-1}, \ \beta = \frac{nt-R}{n-1}, \ v_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i\lambda^i}}. \tag{5.93}$$

Burada t,

$$\lambda^h R_{hk} = t\lambda_k \tag{5.94}$$

bağıntısını sağlayan skaler bir fonksiyondur, [4]. □

Önerme 5.3: Konformal düz bir $(PS)_n$ uzayında

$$\nabla_m t = 4t\lambda_m \tag{5.95}$$

bağıntısı mevcuttur.

İspat: Öncelikle, (5.90) denklemi $\lambda^j\lambda^h$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \lambda^j\lambda^h R_{ijkh} &= \frac{1}{n-2}\lambda_i\lambda^j R_{jk} - \frac{1}{n-2}\lambda_j\lambda^j R_{ik} + \frac{1}{n-2}\lambda_k\lambda^h R_{ih} \\ &- \frac{1}{n-2}g_{ik}\lambda^j\lambda^h R_{jh} - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\lambda_k\lambda_i - g_{ik}\lambda^h\lambda_h), \ g_{ih}\lambda^h = \lambda_i \end{aligned} \tag{5.96}$$

denklemi elde edilir. Daha sonra, (5.96) denklemi, (5.91) yardımıyla

$$\begin{aligned} \lambda^j\lambda^h R_{ijkh} &= \frac{1}{n-2}\lambda_i\lambda^j R_{jk} - \frac{1}{n-2}\lambda_j\lambda^j\left(\frac{R-t}{n-1}g_{ik} + \frac{nt-R}{(n-1)\lambda_m\lambda^m}\lambda_i\lambda_k\right) \\ &+ \frac{1}{n-2}\lambda_k\lambda^h R_{ih} - \frac{1}{n-2}g_{ik}\lambda^j\lambda^h R_{jh} - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\lambda_k\lambda_i - g_{ik}\lambda^h\lambda_h) \end{aligned} \tag{5.97}$$

halini alır. Bundan başka, (5.97) denkleminde, (5.94) kullanılarak

$$\lambda^j\lambda^h R_{ijkh} = \frac{1}{n-2}t\lambda_i\lambda_k - \frac{R-t}{(n-2)(n-1)}\lambda_j\lambda^j g_{ik} - \lambda_j\lambda^j\frac{nt-R}{(n-1)(n-2)\lambda_m\lambda^m}\lambda_i\lambda_k$$
$$+\frac{1}{n-2}t\lambda_i\lambda_k - \frac{1}{n-2}t\lambda_j\lambda^j g_{ik} - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\lambda_i\lambda_k - g_{ik}\lambda^j\lambda_j) \tag{5.98}$$

bulunur. Elde edilen (5.98) denklemi gerekli işlemler yapılarak düzenlendiği takdirde

$$\lambda^j\lambda^h R_{ijkh} = \frac{(n-1)t}{(n-2)(n-1)}\lambda_i\lambda_k - \frac{R-t}{(n-2)(n-1)}\lambda_j\lambda^j g_{ik} - \frac{nt-R}{(n-1)(n-2)}\lambda_i\lambda_k$$
$$+\frac{(n-1)t}{(n-2)(n-1)}\lambda_i\lambda_k - \frac{(n-1)t}{(n-2)(n-1)}\lambda_j\lambda^j g_{ik} - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\lambda_i\lambda_k - g_{ik}\lambda^j\lambda_j) \tag{5.99}$$

şeklinde bulunur. Daha sonra, (5.99) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\lambda^j\lambda^h R_{ijkh} = \frac{2(n-1)t-(nt-R)-R}{(n-2)(n-1)}\lambda_i\lambda_k + \frac{-(R-t)-(n-1)t+R}{(n-2)(n-1)}\lambda_j\lambda^j g_{ik} \tag{5.100}$$

elde edilir. Aynı zamanda, (5.100) denklemi bazı işlemlerden sonra

$$\lambda^j\lambda^h R_{ijkh} = \frac{t}{n-1}\lambda_i\lambda_k - \frac{t}{n-1}g_{ik}\lambda_j\lambda^j \tag{5.101}$$

formuna indirgenir. Diğer taraftan, (5.60) bağıntısı, λ^j ile çarpılırsa

$$\lambda^j\nabla_l R_{jk} = 2\lambda^j\lambda_l R_{jk} + \lambda^j\lambda_k R_{jl} + \lambda^j\lambda_j R_{lk} + \lambda^h\lambda^j R_{ljkh} \tag{5.102}$$

elde edilir. Böylece, (5.102)'de öncelikle, (5.94) denklemi kullanılırsa

$$\lambda^j\nabla_l R_{jk} = 3t\lambda_k\lambda_l + \lambda^j\lambda_j R_{lk} + \lambda^h\lambda^j R_{ljkh} \tag{5.103}$$

ve daha sonra (5.103) denkleminde (5.101) göz önüne alınırsa

$$\lambda^j\nabla_l R_{jk} = 3t\lambda_k\lambda_l + \lambda^j\lambda_j R_{lk} + (\frac{t}{n-1}\lambda_l\lambda_k - \frac{t}{n-1}g_{lk}\lambda_j\lambda^j) \tag{5.104}$$

elde edilir. Bu durumda, (5.104) denklemi düzenlendiğinde

$$\lambda^j\nabla_l R_{jk} = \lambda^j\lambda_j R_{lk} + \frac{(3n-2)t}{n-1}\lambda_l\lambda_k - \frac{t}{n-1}g_{lk}\lambda^j\lambda_j \tag{5.105}$$

dir. Diğer taraftan, (5.94) denkleminin x^m'ye göre kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\nabla_m(\lambda^h R_{hk}) &= \nabla_m(t\lambda_k)\\ R_{hk}\nabla_m\lambda^h + \lambda^h\nabla_m R_{hk} &= \lambda_k\nabla_m t + t\nabla_m\lambda_k\end{aligned} \tag{5.106}$$

bulunur. Ayrıca, (5.106) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$\lambda^h \nabla_m R_{hk} = \lambda_k \nabla_m t + t \nabla_m \lambda_k - R_{hk} \nabla_m \lambda^h \tag{5.107}$$

denklemi elde edilir. Bu takdirde, (5.107) eşitliğinin sol tarafında, (5.105) denklemi kullanılırsa

$$\lambda^h \lambda_h R_{km} + \frac{(3n-2)t}{n-1} \lambda_m \lambda_k - \frac{t}{n-1} g_{km} \lambda^h \lambda_h = \lambda_k \nabla_m t + t \nabla_m \lambda_k - R_{hk} \nabla_m \lambda^h \tag{5.108}$$

dir. Böylece, (5.108) denkleminde, (5.91) denklemi kullanıldığı takdirde

$$\begin{aligned} &\lambda_h \lambda^h \left(\frac{R-t}{n-1} g_{km} + \frac{nt-R}{(n-1)\lambda_i \lambda^i} \lambda_k \lambda_m\right) + \frac{(3n-2)t}{n-1} \lambda_m \lambda_k - \frac{t}{n-1} g_{km} \lambda^h \lambda_h \\ &= \lambda_k \nabla_m t + t \nabla_m \lambda_k - \nabla_m \lambda^h \left(\frac{R-t}{n-1} g_{kh} + \frac{nt-R}{(n-1)\lambda_l \lambda^l} \lambda_h \lambda_k\right) \end{aligned} \tag{5.109}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, (5.109) denklemi yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} &\frac{R-t}{n-1} g_{km} \lambda^h \lambda_h + \frac{nt-R}{n-1} \lambda_k \lambda_m + \frac{(3n-2)t}{n-1} \lambda_k \lambda_m - \frac{t}{n-1} g_{km} \lambda^h \lambda_h \\ &= \lambda_k \nabla_m t + t \nabla_m \lambda_k - \frac{R-t}{n-1} g_{kh} \nabla_m \lambda^h - \frac{nt-R}{(n-1)\lambda^i \lambda_i} \lambda_h \lambda_k \nabla_m \lambda^h \end{aligned} \tag{5.110}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca, (5.110) bağıntısı, λ^k ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} &\frac{R-t}{n-1} \lambda^k g_{km} \lambda^h \lambda_h + \frac{nt-R}{n-1} \lambda^k \lambda_k \lambda_m + \frac{(3n-2)t}{n-1} \lambda^k \lambda_k \lambda_m - \frac{t}{n-1} \lambda^k g_{km} \lambda^h \lambda_h \\ = \; &\lambda^k \lambda_k \nabla_m t + t \lambda^k \nabla_m \lambda_k - \frac{R-t}{n-1} \lambda^k g_{kh} \nabla_m \lambda^h - \frac{nt-R}{(n-1)\lambda^i \lambda_i} \lambda^k \lambda_h \lambda_k \nabla_m \lambda^h \end{aligned} \tag{5.111}$$

bulunur ve (5.111) denklemi düzenlenirse

$$\begin{aligned} &\frac{R-t}{n-1} \lambda_m \lambda^h \lambda_h + \frac{nt-R}{n-1} \lambda^k \lambda_k \lambda_m + \frac{(3n-2)t}{n-1} \lambda^k \lambda_k \lambda_m - \frac{t}{n-1} \lambda_m \lambda^h \lambda_h \\ &= \lambda^k \lambda_k \nabla_m t + t \lambda^k \nabla_m \lambda_k - \frac{R-t}{n-1} \lambda_h \nabla_m \lambda^h - \frac{nt-R}{n-1} \lambda_h \nabla_m \lambda^h \end{aligned} \tag{5.112}$$

ifadesi elde edilir. Böylece, (5.112) denklemi, bazı işlemlerden sonra

$$\begin{aligned} &\frac{(R-t)+(nt-R)+(3n-2)t-t}{n-1} \lambda_m \lambda^h \lambda_h = \lambda^k \lambda_k \nabla_m t \\ &+ \frac{t(n-1)-(R-t)-(nt-R)}{n-1} \lambda_h \nabla_m \lambda^h \end{aligned} \tag{5.113}$$

olarak bulunur. Bu durumda, (5.113) denklemi yardımıyla

$$4t \lambda_m \lambda^h \lambda_h = \lambda^k \lambda_k \nabla_m t \tag{5.114}$$

dir. Sonuç olarak, $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının uzunluğu sıfır olamayacağından, son denklemden, (5.95) denklemi elde edilir. □

Teorem 5.12: Konformal düz bir $(PS)_n$ uzayı üzerinde, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm tanımlanamaz.

İspat: Konformal düz, $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanına sahip bir $(PS)_n$ uzayı ve bu uzay üzerinde, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınsın. Öncelikle, (5.90)'den eğrilik tensörünün kontravaryant bileşeni

$$\begin{aligned} R^m_{ijk} &= \frac{1}{n-2}(\delta^m_i R_{jk} - \delta^m_j R_{ik} + g_{jk}R^m_i - g_{ik}R^m_j) \\ &- \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^m_i g_{jk} - \delta^m_j g_{ik}) \end{aligned} \tag{5.115}$$

dir. Bu durumda, (5.115) denkleminin x^m'ye göre kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \nabla_m R^m_{ijk} &= \frac{1}{n-2}(\delta^m_i \nabla_m R_{jk} - \delta^m_j \nabla_m R_{ik} + g_{jk}\nabla_m R^m_i - g_{ik}\nabla_m R^m_j) \\ &- \frac{\nabla_m R}{(n-1)(n-2)}(\delta^m_i g_{jk} - \delta^m_j g_{ik}) \\ &= \frac{1}{n-2}(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} + g_{jk}\nabla_m R^m_i - g_{ik}\nabla_m R^m_j) \\ &- \frac{1}{(n-1)(n-2)}(g_{jk}\nabla_i R - g_{ik}\nabla_j R) \end{aligned} \tag{5.116}$$

bağıntısı elde edilir. Bundan başka, (5.116) denkleminde, Yardımcı Teorem 2.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_m R^m_{ijk} &= \frac{1}{n-2}(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} + \frac{1}{2}g_{jk}\nabla_i R - \frac{1}{2}g_{ik}\nabla_j R) \\ &- \frac{1}{(n-1)(n-2)}(g_{jk}\nabla_i R - g_{ik}\nabla_j R) \end{aligned} \tag{5.117}$$

denklemi elde edilir. Ayrıca, (2.18) denkleminde, h ve l üzerine daraltma yapıldığında, [5],

$$\nabla_m R^m_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} \tag{5.118}$$

ifadesi bulunur. $(PS)_n$ uzayının boyutunun ikiden büyük olduğu göz önünde bulundurulduğunda, (5.117) ve (5.118) denklemlerinin eşitliğinden

$$\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} = \frac{1}{2(n-1)}(g_{jk}\nabla_i R - g_{ik}\nabla_j R) \tag{5.119}$$

bağıntısı elde edilir. Dolayısıyla, (5.60) ile verilen denklem g^{jk} ile çarpılırsa ve j ve k üzerinden toplam alınırsa ve çıkan ifadede (2.15) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_l R &= 2g^{jk}\lambda_l R_{jk} + g^{jk}\lambda^h R_{ljkh} + g^{jk}\lambda_j R_{lk} + g^{jk}\lambda_k R_{jl} + g^{jk}\lambda^h R_{hjkl} \\ &= 2\lambda_l R + 4\lambda^h R_{lh}, \; g^{jk}\lambda_j = \lambda_k \end{aligned} \tag{5.120}$$

elde edilir. Ayrıca, (5.60) bağıntısı kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} &= 2\lambda_i R_{jk} + \lambda^h R_{ijkh} + \lambda_j R_{ik} + \lambda_k R_{ji} + \lambda^h R_{hjki} \\
&- (2\lambda_j R_{ik} + \lambda^h R_{jikh} + \lambda_i R_{jk} + \lambda_k R_{ji} + \lambda^h R_{hikj}) \\
&= \lambda_i R_{jk} - \lambda_j R_{ik} + \lambda^h R_{ijkh} + \lambda^h R_{hjki} - \lambda^h R_{jikh} - \lambda^h R_{hikj}
\end{aligned}
\tag{5.121}
$$

denklemi bulunur. Daha sonra, (5.121) denkleminde (2.14) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} &= \lambda_i R_{jk} - \lambda_j R_{ik} + 2\lambda^h R_{ijkh} + \lambda^h R_{hjki} - \lambda^h R_{hikj} \\
&= \lambda_i R_{jk} - \lambda_j R_{ik} + 2\lambda^h R_{ijkh} - (\lambda^h R_{kijh} + \lambda^h R_{jkih})
\end{aligned}
\tag{5.122}
$$

dir. Bundan başka, (5.122) denkleminde (2.19) bağıntısı kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} &= \lambda_i R_{jk} - \lambda_j R_{ik} + 2\lambda^h R_{ijkh} + \lambda^h R_{ijkh} \\
&= \lambda_i R_{jk} - \lambda_j R_{ik} + 3\lambda^h R_{ijkh}
\end{aligned}
\tag{5.123}
$$

bağıntısı bulunur. Böylece, (5.123) denklemi, (5.119) denkleminde kullanılırsa

$$
\lambda_i R_{jk} - \lambda_j R_{ik} + \frac{1}{2(n-1)}(g_{ik}\nabla_j R - g_{jk}\nabla_i R) + 3\lambda^h R_{ijkh} = 0 \tag{5.124}
$$

ifadesi elde edilir. Sabitten ve sıfırdan farklı φ skaler fonksiyonu için, (5.124) bağıntısı, φ^i ile çarpılırsa

$$
\varphi^i \lambda_i R_{jk} - \varphi^i \lambda_j R_{ik} + \frac{1}{2(n-1)}(\varphi^i g_{ik}\nabla_j R - \varphi^i g_{jk}\nabla_i R) + 3\varphi^i \lambda^h R_{ijkh} = 0 \tag{5.125}
$$

ve daha sonra, (5.125) denkleminde (5.84) kullanılırsa

$$
\varphi^i \lambda_i R_{jk} + \frac{1}{2(n-1)}(\varphi_k \nabla_j R - g_{jk}\varphi^i \nabla_i R) = 0, \; g_{ih}\varphi^i = \varphi_k \tag{5.126}
$$

bulunur. Bundan başka, (5.126) denkleminde, öncelikle, (5.120) kullanılırsa

$$
\varphi^i \lambda_i R_{jk} + \frac{1}{2(n-1)}(\varphi_k \nabla_j R - g_{jk}\varphi^i (2\lambda_i R + 4\lambda^h R_{ih})) = 0 \tag{5.127}
$$

elde edilir. Diğer taraftan, (5.127) denkleminde, $(5.84)_2$ kullanılırsa

$$
\varphi^i \lambda_i R_{jk} + \frac{1}{2(n-1)}(\varphi_k \nabla_j R - 2g_{jk}\varphi^i \lambda_i R) = 0 \tag{5.128}
$$

dir. Son olarak, (5.128) denkleminde, Teorem 5.10 kullanılırsa

$$
\varphi_k \nabla_j R = 0 \tag{5.129}
$$

bulunur. $\varphi \neq sbt.$ kabulü altında, (5.129) denkleminden

$$\nabla_j R = 0 \tag{5.130}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece, (5.130) ifadesi, (5.120) denkleminde kullanılırsa

$$2\lambda_j R + 4\lambda^h R_{jh} = 0 \tag{5.131}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde, (5.94) kullanıldığı takdirde,

$$2\lambda_j R + 4t\lambda_j = 0 \tag{5.132}$$

bulunur. Böylece, (5.132) bağıntısından

$$t = -\frac{R}{2},\ \lambda_j \neq 0 \tag{5.133}$$

elde edilir. Ayrıca, (5.133) denkleminin kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla_m t = -\frac{1}{2}\nabla_m R \tag{5.134}$$

ve (5.134) denkleminde (5.130) kullanılırsa

$$\nabla_m t = 0 \tag{5.135}$$

bağıntısı elde edilir. Bu durumda, (5.95) denkleminde (5.135) kullanılarak, $t = 0$ ve dolayısıyla, (5.133) denkleminden $R = 0$ elde edilir. Buradan, (5.93) ve dolayısıyla, (5.92) yardımıyla, $R_{ij} = 0$ olduğu açıktır. Bu sonuç, konformal düz pseudo simetrik bir Riemann uzayı tanımına aykırıdır. Dolayısıyla, konformal düz pseudo simetrik bir Riemann uzayı üzerinde, $\varphi \neq sabit$ koşulunu sağlayan sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm tanımlanamaz.

6. PSEUDO PROJEKTİF RICCI SİMETRİK RIEMANN UZAYINDA SONSUZ KÜÇÜK DÖNÜŞÜM VE ÖZEL VEKTÖR ALANLARI

6.1 Pseudo Projektif Ricci Simetrik Riemann Uzayında Sonsuz Küçük Dönüşüm Ve Özel Vektör Alanları

1994 yılında, M. C. Chaki and S. K. Saha tarafından yapılan bir çalışmada, boyutu ikiden büyük, pseudo projektif Ricci simetrik Riemann uzaylarının skaler eğriliğinin sabit olduğu gösterilmiştir. Söz konusu uzayların bu özelliği göz önünde bulundurularak, Ricci olarak düz olmayan ve boyutu ikiden büyük olan bir Pseudo projektif Ricci simetrik Riemann uzayına ait, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm ve konküran, reküran, tors ve yarı tors oluşturan vektör alanları ile üretilen özel dönüşümlerin özellikleri incelenmiştir.

Bir Riemann uzayına ait projektif eğrilik tensörü, bu uzayın eğrilik tensörü ve Ricci eğrilik tensörü cinsinden ifadesi

$$P^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(R_{jk}\delta^h_i - R_{ik}\delta^h_j) \tag{6.1}$$

şeklindedir, [5]. Diğer taraftan, n-boyutlu bir Riemann uzayının projektif eğrilik tensörünün daraltılması ile elde edilen P_{ij} tensörünün, Ricci eğrilik tensörü ve skaler eğrilik cinsinden ifadesi

$$P_{ij} = \frac{n}{n-1}R_{ij} - \frac{R}{n-1}g_{ij}, \quad P_{ij} = g^{hk}P_{ihkj} \tag{6.2}$$

ile verilmiştir. Eğer, P_{ij} tensörü aşağıdaki koşulu sağlıyorsa, bu uzay pseudo projektif Ricci simetrik uzay olarak tanımlanmıştır

$$\nabla_k P_{ij} = 2\lambda_k P_{ij} + \lambda_i P_{kj} + \lambda_j P_{ik} \ . \tag{6.3}$$

Uyarı 6.1: $n=2$ olması halinde, $P_{ij}=0$ dir. □

Uyarı 6.2: Bu bölümde verilecek olan tüm teoremlerde, boyutu ikiden büyük n-boyutlu bir pseudo projektif Ricci simetrik Riemann uzay kısaca, $(PPRS)_n$ ile gösterilecektir. □

Uyarı 6.3: Bu bölümde boyutu ikiden büyük $(PPRS)_n$ uzayına ait, $\varphi \neq$ *sabit* koşulunu sağlayan sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınacaktır. □

Öncelikle, çalışma boyunca kullanılacak olan, aşağıdaki teorem verilsin:

Teorem 6.1 : Bir $(PPRS)_n$ uzayının skaler eğriliği sabittir, [16]. □

Uyarı 6.4 : Bir V_n n-boyutlu Riemann uzayının bir Einstein uzayı olması için gerek yeter koşul $P_{ij} = 0$ olmasıdır. □

Aşağıdaki teoremlerde, Einstein uzayı olmayan bir $(PPRS)_n$ uzayı göz önüne alınacaktır.

Sonuç 6.1: Bir $(PPRS)_n$ uzayının skaler eğriliği sıfırsa, uzay pseudo Ricci simetrik bir Riemann uzayıdır. □

Sonuç 6.2: Bir $(PPRS)_n$ uzayına ait, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınsın. Bu takdirde, $R = 0$ dır.

İspat: Teorem 6.1 den, bu uzayın skaler eğriliğinin sabit olduğu hatırlanırsa, $(3.15)_3$ yardımıyla

$$-2\varphi R = 0 \tag{6.4}$$

bulunur. Böylece (6.4)'den, pseudo projektif Ricci simetrik Riemann uzayının sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm altında skaler eğriliği sıfırdır. □

Teorem 6.1, Uyarı 6.3 ve $(3.15)_3$ denkleminden, aşağıdaki sonuç açıktır:

Sonuç 6.3: Skaler eğriliği sıfırdan farklı bir $(PPRS)_n$ uzayında, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm tanımlanamaz. □

Teorem 6.2: Bir $(PPRS)_n$ uzayı üzerinde, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınsın. Bu takdirde,

i. bu uzayın $\boldsymbol{\lambda}_l$ kovektör alanı Lie invaryant değildir ve

ii. $\boldsymbol{\lambda}_i$ kovaryant vektörü ile $\boldsymbol{\varphi}_i$ birbirine diktir.

İspat: ***i.*** Öncelikle, Sonuç 6.2'den, uzayın skaler eğriliğinin sıfır ve Sonuç 6.1'den, uzayın boyutu ikiden büyük bir $(PRS)_n$ uzayından ibaret olduğu görülür. Böylece, Teorem 3.3 yardımıyla, uzayın $\boldsymbol{\lambda}$ kovektör alanının Lie invaryant olmadığı görülür.

ii. İlk olarak, Sonuç 6.1'den dolayı, boyutu ikiden büyük bir $(PPRS)_n$ uzayının skaler eğriliğinin sıfır ve Sonuç 6.2 yardımıyla, bu uzayın $(PRS)_n$ uzayından ibaret olduğu açıktır. Dolayısıyla, Teorem 3.4 yardımıyla, $\boldsymbol{\lambda_i}$ ile $\boldsymbol{\varphi_i}$ birbirine diktir. □

Teorem 6.3: Skaler eğriliği sıfırdan farklı bir $(PPRS)_n$ uzayında bir hareket göz önüne alınsın. Bu takdirde, $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanı Lie invaryanttır.

İspat: İlk olarak, (2.68) denklemi kullanıldığında

$$\mathscr{L}_v(\nabla_k P_{ij}) - \nabla_k(\mathscr{L}_v P_{ij}) = -P_{mj}\mathscr{L}_v\Gamma^m_{ki} - P_{im}\mathscr{L}_v\Gamma^m_{kj} \tag{6.5}$$

dir. Daha sonra, (2.44) denklemi, (6.5) denkleminde kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v(\nabla_k P_{ij}) - \nabla_k(\mathscr{L}_v P_{ij}) = 0. \tag{6.6}$$

bulunur. Diğer taraftan, (6.2) denkleminin Lie türevi

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_v P_{ij} &= \mathscr{L}_v\left(\frac{n}{n-1}R_{ij} - \frac{R}{n-1}g_{ij}\right) \\ &= \frac{n}{n-1}\mathscr{L}_v R_{ij} - \frac{1}{n-1}(g_{ij}\mathscr{L}_v R + R\mathscr{L}_v g_{ij}) \end{aligned} \tag{6.7}$$

şeklindedir. Bu ifadede, (2.43) kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v P_{ij} = \frac{n}{n-1}\mathscr{L}_v R_{ij} - \frac{1}{n-1}g_{ij}\mathscr{L}_v R \tag{6.8}$$

dir. Böylece, (2.48) denklemi, (6.8) denkleminde kullanılarak

$$\mathscr{L}_v P_{ij} = -\frac{1}{n-1}(g_{ij}\mathscr{L}_v R) \tag{6.9}$$

elde edilir. Ayrıca, Teorem 6.1'den, $(PPRS)_n$ uzayının skaler eğriliğinin sabit olduğu göz önünde bulundurulursa, (6.9) denklemi aşağıdaki forma indirgenir

$$\mathscr{L}_v P_{ij} = 0. \tag{6.10}$$

Böylece, (6.6) denklemi, (6.10) yardımıyla

$$\mathscr{L}_v(\nabla_k P_{ij}) = 0 \tag{6.11}$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemde (6.3) kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v(2\lambda_k P_{ij} + \lambda_i P_{kj} + \lambda_j P_{ik}) = 0 \tag{6.12}$$

dir ve böylece, (6.12) denklemi, (2.64) ve (2.65) yardımıyla

$$2P_{ij}\mathscr{L}_v\lambda_k + 2\lambda_k\mathscr{L}_v P_{ij} + P_{kj}\mathscr{L}_v\lambda_i + \lambda_i\mathscr{L}_v P_{kj} + P_{ik}\mathscr{L}_v\lambda_j + \lambda_j\mathscr{L}_v P_{ik} = 0 \tag{6.13}$$

haline gelir. Ayrıca, uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının hareket altında Lie türevi

$$\mathscr{L}_v \lambda_i = d_i \tag{6.14}$$

olarak alınırsa, (6.13) denklemi, (6.14) yardımıyla

$$2P_{ij}d_k + 2\lambda_k \mathscr{L}_v P_{ij} + P_{kj}d_i + \lambda_i \mathscr{L}_v P_{kj} + P_{ik}d_j + \lambda_j \mathscr{L}_v P_{ik} = 0 \tag{6.15}$$

bulunur. Daha sonra, (6.15) denkleminde, (6.10) denklemi kullanılırsa

$$2d_k P_{ij} + d_i P_{jk} + d_j P_{ki} = 0 \tag{6.16}$$

sonucu elde edilir. Böylece, (6.16) denkleminde, k, i ve j indisleri devirsel olarak değiştirilirse

$$2d_i P_{jk} + d_j P_{ki} + d_k P_{ij} = 0 \tag{6.17}$$

ve

$$2d_j P_{ki} + d_k P_{ij} + d_i P_{jk} = 0 \tag{6.18}$$

denklemleri elde edilir. Bu durumda, (6.16), (6.17) ve (6.18) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$d_k P_{ij} + d_i P_{jk} + d_j P_{ki} = 0 \tag{6.19}$$

dir. Bundan başka, (6.19) denkleminde, Teorem 3.1 kullanılırsa

$$d_k = 0 \tag{6.20}$$

bulunur ki, buradan, (6.20) denklemi yardımıyla, uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının Lie invaryant olduğu görülür. □

Aşağıdaki teoremlerde, uzunluğu sabit olmayan konküran vektör alanı göz önüne alınacaktır.

Teorem 6.4: Bir $(PPRS)_n$ uzayında, konküran vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük dönüşüm göz önüne alınsın. Bu takdirde, uzayın skaler eğriliği sıfırdır.

İspat: Yardımcı Teorem 4.1 yardımıyla, $\boldsymbol{v}$ konküran vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük dönüşümün bir sonsuz küçük has homotetik dönüşümden ibaret olduğu açıktır. Diğer taraftan, (2.75) ve (2.85) denklemleri yardımıyla, $\rho = \varphi = sbt. \neq 0$ olduğu gösterilmiştir. O halde, (2.74) denkleminden

$$\mathscr{L}_v R = -2\varphi R \tag{6.21}$$

bulunur. Aynı zamanda, Teorem 6.1'den, bu uzayın skaler eğriliğinin sabit olduğu kullanılırsa, (6.21) denklemi

$$0 = -2\varphi R \ . \tag{6.22}$$

formuna indirgenir. Buradan da, bu uzayın skaler eğriliğinin sıfır olduğu açıktır. □

Teorem 4.3 ve Teorem 6.4 den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 6.4: Bir $(PPRS)_n$ uzayında, $\boldsymbol{v}$ konküran vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük dönüşüm göz önüne alınsın. Bu taktirde, $(PPRS)_n$ uzayı bir $(PRS)_n$ uzayından ibaret olup, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_i}$ kovaryant vektörü ile $\boldsymbol{v_i}$ birbirine dik değildir. □

Teorem 6.5: Skaler eğriliği sıfırdan farklı bir $(PPRS)_n$ uzayı üzerinde, $\boldsymbol{v}$ yarı tors oluşturan bir vektör alanı göz önüne alınsın. Bu takdirde, $\boldsymbol{\lambda_i}$ ile $\boldsymbol{v}_i$ birbirine diktir.

İspat: Öncelikle, (2.97) denkleminde aşağıdaki denklem elde edilir

$$v^i v^k R_{ik} = 0 \ . \tag{6.23}$$

Yukarıdaki son denklemin kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_m (v^i v^k R_{ik}) \\ &= v^k R_{ik} \nabla_m v^i + v^i R_{ik} \nabla_m v^k + v^i v^k \nabla_m R_{ik} \end{aligned} \tag{6.24}$$

dir ve daha sonra, (6.24) denkleminde, (2.82) kullanılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= v^k R_{ik}(\rho \delta^i_m + \phi_m v^i) + v^i R_{ik}(\rho \delta^k_m + \phi_m v^k) + v^i v^k \nabla_m R_{ik} \\ &= \rho v^k R_{mk} + \phi_m v^i v^k R_{ik} + \rho v^i R_{im} + \phi_m v^k v^i R_{ik} + v^i v^k \nabla_m R_{ik} \\ &= 2\rho v^k R_{mk} + 2\phi_m v^i v^k R_{ik} + v^i v^k \nabla_m R_{ik} \end{aligned} \tag{6.25}$$

bulunur. Bu denklemde, (6.23) kullanılırsa

$$2\rho v^k R_{mk} + v^i v^k \nabla_m R_{ik} = 0 \tag{6.26}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (6.2) denkleminin kovaryant türevi alınırsa ve elde edilen denklemde, Teorem 6.1 kullanılırsa

$$\nabla_l P_{im} = \frac{n}{n-1} \nabla_l R_{im} \tag{6.27}$$

bağıntısı elde edilir. Böylece, (6.27) denklemi, sırasıyla, v^i ve v^m ile çarpılırsa

$$v^m v^i \nabla_l P_{im} = \frac{n}{n-1} v^m v^i \nabla_l R_{im} \tag{6.28}$$

dir. Daha sonra, (6.26) denklemi, $\frac{n}{n-1}$ ile çarpılırsa

$$\frac{2n}{n-1} \rho v^k R_{mk} + \frac{n}{n-1} v^i v^k \nabla_m R_{ik} = 0 \tag{6.29}$$

ve (6.29) denkleminde, (6.28) ifadesi göz önünde bulundurulursa

$$\frac{2n}{n-1} \rho v^k R_{km} + v^i v^k \nabla_m P_{ik} = 0 \tag{6.30}$$

elde edilir. Bundan başka, (6.30) denkleminde, (6.3) denklemi kullanılırsa

$$\frac{2n}{n-1} \rho v^k R_{km} + v^i v^k (2\lambda_m P_{ik} + \lambda_i P_{mk} + \lambda_k P_{im}) = 0 \tag{6.31}$$

dir. Ayrıca, (6.31) denkleminde, (6.2) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2n}{n-1} \rho v^k R_{km} + 2 v^i v^k \lambda_m \left(\frac{n}{n-1} R_{ik} - \frac{R}{n-1} g_{ik}\right) \\ &\quad + v^i v^k \lambda_i \left(\frac{n}{n-1} R_{mk} - \frac{R}{n-1} g_{mk}\right) + v^i v^k \lambda_k \left(\frac{n}{n-1} R_{im} - \frac{R}{n-1} g_{im}\right) \end{aligned} \tag{6.32}$$

bulunur. Böylece, (6.32) denklemi düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2n}{n-1} \rho v^k R_{km} + 2 \frac{n}{n-1} \lambda_m v^i v^k R_{ik} - 2 \frac{R}{n-1} \lambda_m v^i v^k g_{ik} \\ &\quad + \frac{n}{n-1} \lambda_i v^i v^k R_{mk} - \frac{R}{n-1} \lambda_i v^i v^k g_{mk} + \frac{n}{n-1} \lambda_k v^i v^k R_{im} - \frac{R}{n-1} \lambda_k v^i v^k g_{im} \end{aligned} \tag{6.33}$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda, (6.33) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2n}{n-1} \rho v^k R_{km} + 2 \frac{n}{n-1} \lambda_m v^i v^k R_{ik} - 2 \frac{R}{n-1} \lambda_m v^i v_i \\ &\quad + \frac{n}{n-1} \lambda_i v^i v^k R_{mk} - \frac{R}{n-1} \lambda_i v^i v_m + \frac{n}{n-1} \lambda_k v^i v^k R_{im} - \frac{R}{n-1} \lambda_k v_m v^k, \; g_{im} v^k = v_i \end{aligned} \tag{6.34}$$

sonucu bulunur. Bu takdirde, (6.34) denklemi

$$= \frac{2n}{n-1} \rho v^k R_{km} + 2 \frac{n}{n-1} \lambda_m v^i v^k R_{ik} - 2 \frac{R}{n-1} \lambda_m v^i v_i + \frac{2n}{n-1} \lambda_i v^i v^k R_{mk} - \frac{2R}{n-1} \lambda_k v_m v^k \tag{6.35}$$

formuna indirgenir. Ayrıca, (6.35) denkleminde, (6.23) göz önünde bulundurulursa

$$\frac{2n}{n-1}\rho v^k R_{km} - 2\frac{R}{n-1}\lambda_m v^i v_i + 2\frac{n}{n-1}\lambda_i v^i v^k R_{mk} - 2\frac{R}{n-1}\lambda_i v^i v_m = 0 \qquad (6.36)$$

elde edilir. Böylece, (6.36) denklemi düzenlenirse

$$n\rho v^k R_{km} - \lambda_m v^i v_i R + n\lambda_i v^i v^k R_{mk} - \lambda_i v^i v_m R = 0 \qquad (6.37)$$

ifadesi bulunur. Daha sonra, (6.37), v^m ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= v^m(n\rho v^k R_{km} - \lambda_m v^i v_i R + n\lambda_i v^i v^k R_{mk} - \lambda_i v^i v_m R) \\ &= n\rho v^k v^m R_{km} - v^m \lambda_m v^i v_i R + n\lambda_i v^i v^k v^m R_{mk} - \lambda_i v^i v_m v^m R \qquad (6.38) \end{aligned}$$

dir. Bu takdirde, (6.38) denklemi, (6.23) yardımıyla

$$\begin{aligned} 0 &= -v^m \lambda_m v^i v_i R - \lambda_i v^i v_m v^m R \\ &= -2v^m \lambda_m v^i v_i R \qquad (6.39) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan, uzayın skaler eğriliğinin sıfırdan farklı olduğu göz önünde bulundurularak

$$\lambda_m v^m = 0 \qquad (6.40)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (6.40) denkleminden, $\boldsymbol{\lambda_m}$ kovaryant vektörü ile $\boldsymbol{v_m}$ vektörünün birbirine dik olduğu görülür. Böylece, ispat tamamlanmış olur. □

7. PSEUDO PROJEKTİF SİMETRİK RIEMANN UZAYINDA SONSUZ KÜÇÜK PSEUDO HOMOTETİK DÖNÜŞÜM

7.1 Pseudo Projektif Simetrik Riemann Uzayında Sonsuz Küçük Pseudo Homotetik Dönüşüm

V_n, n-boyutlu bir Riemann uzayı olmak üzere, bu uzaya ait projektif eğrilik tensörünün, eğrilik tensörü ve Ricci eğrilik tensörü cinsinden ifadesi aşağıdaki bağıntı ile verilmektedir, [5]

$$P^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(R_{jk}\delta^h_i - R_{ik}\delta^h_j), \; P_{ijkh} = g_{lh}P^l_{ijk} \tag{7.1}$$

$$P_{ij} = \frac{n}{n-1}R_{ij} - \frac{R}{n-1}g_{ij}, \; P_{ij} = g^{hk}P_{ihkj}. \tag{7.2}$$

Ayrıca, (5.2), (5.3) ve (5.4) denklemlerinden, iki boyutlu Riemann uzayının projektif eğrilik tensörünün özdeş olarak sıfır olduğu görülür. Yani,

$$P^h_{ijk} = 0 \tag{7.3}$$

dır. Dolayısıyla, çalışma boyunca, boyutu ikiden büyük olan bir pseudo projektif simetrik Riemann uzayı göz önüne alınacaktır.
n-boyutlu bir Riemann uzayının projektif eğrilik tensörü

$$\nabla_l P_{ijkh} = 2\lambda_l P_{ijkh} + \lambda_i P_{ljkh} + \lambda_j P_{ilkh} + \lambda_k P_{ijlh} + \lambda_h P_{ijkl} \tag{7.4}$$

koşulunu sağlıyorsa, bu uzay, pseudo projektif simetrik Riemann uzayı olarak adlandırılır, [16]. Bu bölümde, boyutu ikiden büyük, pseudo projektif simetrik Riemann uzayına ait, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm ve bu dönüşümü oluşturan özel vektör alanları ile ilgili araştırmalar yapılmış ve elde edilen sonuçlar teoremlerle ifade edilmiştir.

Uyarı 7.1: Bu çalışmada göz önüne alınacak olan n-boyutlu bir pseudo projektif simetrik uzayı $(PPS)_n$ ile gösterilecektir. □

Uyarı 7.2: Bu bölümde ele alınacak tüm teoremlerde, $(PPS)_n$ Riemann uzayının boyutunun ikiden büyük olduğu kabul edilecektir. □

Uyarı 7.3: Bu bölümde ele alınacak teoremlerde, Einstein uzayı olmayan ve Ricci-düz olmayan $(PPS)_n$ uzayı göz önüne alınacaktır. □

Uyarı 7.4: Bu bölümde ele alınacak teoremlerde, $\varphi \neq sabit$ koşulunu sağlayan sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınacaktır. □

Teorem 7.1: Bir $(PPS)_n$ uzayının skaler eğriliği sabittir.

İspat: Öncelikle, (7.4) denklemi g^{jk} ile çarpılırsa ve j ve k indisleri üzerinden toplam alınırsa ve $(7.2)_2$ bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} g^{jk}\nabla_l P_{ijkh} &= 2g^{jk}\lambda_l P_{ijkh} + g^{jk}\lambda_i P_{ljkh} + g^{jk}\lambda_j P_{ilkh} + g^{jk}\lambda_k P_{ijlh} + g^{jk}\lambda_h P_{ijkl} \\ \nabla_l P_{ih} &= 2\lambda_l P_{ih} + \lambda_i P_{lh} + \lambda^k P_{ilkh} + \lambda^j P_{ijlh} + \lambda_h P_{il},\ g^{jk}\lambda_j = \lambda^k \end{aligned} \tag{7.5}$$

şeklinde bulunur. Daha sonra, (7.1)-(7.2) denklemleri, (7.5) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\frac{n}{n-1}\nabla_l R_{ih} - \frac{1}{n-1}g_{ih}\nabla_l R = 2\lambda_l(\frac{n}{n-1}R_{ih} - \frac{R}{n-1}g_{ih}) + \lambda_i(\frac{n}{n-1}R_{lh} - \frac{R}{n-1}g_{lh}) \\ &+\lambda_h(\frac{n}{n-1}R_{il} - \frac{R}{n-1}g_{il}) + \lambda^k(R_{ilkh} - \frac{1}{n-1}R_{lk}g_{ih} + \frac{1}{n-1}R_{ik}g_{lh}) \\ &+\lambda^k(R_{iklh} - \frac{1}{n-1}R_{lk}g_{ih} + \frac{1}{n-1}R_{il}g_{kh}) \end{aligned} \tag{7.6}$$

ifadesi bulunur. Ayrıca, (7.6) denklemi g^{hi} ile çarpılırsa, h ve i indisleri üzerinden toplam alınırsa

$$\begin{aligned} &g^{ih}(\frac{n}{n-1}\nabla_l R_{ih} - \frac{1}{n-1}g_{ih}\nabla_l R) = 2g^{ih}\lambda_l(\frac{n}{n-1}R_{ih} - \frac{R}{n-1}g_{ih}) \\ &+g^{ih}\lambda_i(\frac{n}{n-1}R_{lh} - \frac{R}{n-1}g_{lh}) + g^{ih}\lambda_h(\frac{n}{n-1}R_{il} - \frac{R}{n-1}g_{il}) \\ &+g^{ih}\lambda^k(R_{ilkh} - \frac{1}{n-1}R_{lk}g_{ih} + \frac{1}{n-1}R_{ik}g_{lh}) \\ &+g^{ih}\lambda^k(R_{iklh} - \frac{1}{n-1}R_{lk}g_{ih} + \frac{1}{n-1}R_{il}g_{kh}) \end{aligned} \tag{7.7}$$

dir ve (7.7) denkleminde (2.16) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^h(\frac{n}{n-1}R_{lh} - \frac{R}{n-1}g_{lh}) + \lambda^i(\frac{n}{n-1}R_{il} - \frac{R}{n-1}g_{il}) \\ &+ \lambda^k(R_{lk} - \frac{n}{n-1}R_{lk} + \frac{1}{n-1}R_{ik}\delta^i_l) \\ &+ \lambda^k(R_{kl} - \frac{n}{n-1}R_{lk} + \frac{1}{n-1}R_{kl}),\ g^{ih}\lambda_i = \lambda^h \end{aligned} \tag{7.8}$$

bulunur. Eğeri (7.8) denklemi düzenlenirse

$$0 = \lambda^h(\frac{n}{n-1}R_{lh} - \frac{R}{n-1}g_{lh}) + \lambda^i(\frac{n}{n-1}R_{il} - \frac{R}{n-1}g_{il}) \tag{7.9}$$

bulunur.Böylece, (7.9) denkleminden, aşağıdaki denklem elde edilir

$$\lambda^h(\frac{n}{n-1}R_{lh}-\frac{R}{n-1}g_{lh})=0\ . \tag{7.10}$$

Dolayısıyla, (7.10) aşağıdaki denkleme eşittir

$$n\lambda^k R_{kh}=\lambda_h R,\ g_{ih}\lambda^h=\lambda_l\ . \tag{7.11}$$

Diğer taraftan, (7.6) denklemi, g^{il} ile çarpılırsa ve i ve l indisleri üzerinden toplam alınırsa

$$\begin{aligned}
&g^{il}(\frac{n}{n-1}\nabla_l R_{ih}-\frac{1}{n-1}g_{ih}\nabla_l R)=2g^{il}\lambda_l(\frac{n}{n-1}R_{ih}-\frac{R}{n-1}g_{ih})\\
&+g^{il}\lambda_i(\frac{n}{n-1}R_{lh}-\frac{R}{n-1}g_{lh})+g^{il}\lambda_h(\frac{n}{n-1}R_{il}-\frac{R}{n-1}g_{il})\\
&+g^{il}\lambda^k(R_{ilkh}-\frac{1}{n-1}R_{lk}g_{ih}+\frac{1}{n-1}R_{ik}g_{lh})\\
&+g^{il}\lambda^k(R_{iklh}-\frac{1}{n-1}R_{lk}g_{ih}+\frac{1}{n-1}R_{il}g_{kh})
\end{aligned} \tag{7.12}$$

bulunur. Ayrıca, (7.12) denkleminde (2.15) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&(\frac{n}{n-1}\nabla_l R^l_h-\frac{1}{n-1}\delta^l_h\nabla_l R)=2\lambda^i(\frac{n}{n-1}R_{ih}-\frac{R}{n-1}g_{ih})\\
&+\lambda^l(\frac{n}{n-1}R_{lh}-\frac{R}{n-1}g_{lh})+\lambda_h(\frac{n}{n-1}R-\frac{nR}{n-1})\\
&+\lambda^k(-\frac{1}{n-1}R_{lk}\delta^l_h+\frac{1}{n-1}R_{ik}\delta^i_h)\\
&+\lambda^k(-R_{kh}-\frac{1}{n-1}R_{lk}\delta^l_h+\frac{1}{n-1}Rg_{kh}),\ g^{il}\lambda_l=\lambda^i
\end{aligned} \tag{7.13}$$

bağıntısı elde edilir. Böylece, (7.13) denklemi, bazı ara işlemlerden sonra, aşağıdaki şekle dönüşür

$$\begin{aligned}
(\frac{n}{n-1}\nabla_l R^l_h-\frac{1}{n-1}\nabla_h R) &= 2(\frac{n}{n-1}\lambda^i R_{ih}-\frac{R}{n-1}\lambda_h)+(\frac{n}{n-1}\lambda^l R_{lh}-\frac{R}{n-1}\lambda_h)\\
&+ (-\lambda^k R_{kh}-\frac{1}{n-1}\lambda^k R_{hk}+\frac{1}{n-1}R\lambda_h)\ .
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Ayrıca, (7.14) denkleminde, Yardımcı Teorem 2.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&(\frac{n}{2(n-1)}\nabla_h R-\frac{1}{n-1}\nabla_h R)=3(\frac{n}{n-1}\lambda^i R_{ih}-\frac{R}{n-1}\lambda_h)\\
&-\frac{n}{n-1}\lambda^k R_{hk}+\frac{1}{n-1}R\lambda_h
\end{aligned} \tag{7.15}$$

bulunur. Daha sonra, (7.15) denkleminde, (7.11) kullanılırsa

$$\frac{(n-2)}{2(n-1)}\nabla_h R=0 \tag{7.16}$$

ifadesi elde edilir. $(PPS)_n$ uzayının boyutunun ikiden büyük olduğu göz önünde bulundurulduğunda, (7.16) denkleminden

$$\nabla_h R = 0 \tag{7.17}$$

dir. Böylece, (7.17) denkleminden

$$R = sbt. \tag{7.18}$$

olduğu görülür. □

Teorem 7.2: Bir $(PPS)_n$ uzayına ait, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınsın. Bu takdirde, bu uzayın skaler eğriliği sıfırdır.

İspat: Öncelikle, (2.63) ve $(3.15)_3$ denklemleri kullanılırsa

$$v^k \nabla_k R = -2\varphi R \tag{7.19}$$

dir. Daha sonra, Teorem 7.1'in sonucu olarak elde edilen (7.17), (7.19) bağıntısında kullanıldığı takdirde

$$-2\varphi R = 0, \;\; \varphi \neq 0 \tag{7.20}$$

bulunur. Böylece, (7.20) denkleminden, boyutu ikiden büyük bir $(PPS)_n$, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alındığında, uzayın skaler eğriliğinin sıfır olduğu görülür. □

Sonuç 7.1: Skaler eğriliği sıfırdan farklı bir $(PPS)_n$ uzayında, sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm tanımlanamaz. □

Teorem 7.3: $(PPS)_n$ uzayına ait bir hareket göz önüne alınsın. Bu takdirde, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda}_l$ kovektör alanı Lie invaryantır.

İspat: Einstein uzayı için $P_{ij} = 0$ dir. Hipotez olarak $P_{ij} \neq 0$ olduğundan, bu uzay Einstein uzayı olamaz. Öncelikle, (2.68) denkleminden aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\mathscr{L}_v(\nabla_k P_{ij}) - \nabla_k(\mathscr{L}_v P_{ij}) = -P_{hj}\mathscr{L}_v\Gamma^h_{ki} - P_{ih}\mathscr{L}_v\Gamma^h_{kj}. \tag{7.21}$$

Daha sonra, (2.44) denklemi, (7.21) denkleminde kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v(\nabla_k P_{ij}) - \nabla_k(\mathscr{L}_v P_{ij}) \;\; = \;\; 0 \tag{7.22}$$

bulunur. Diğer taraftan, (7.2) denkleminin Lie türevi alınırsa, (2.43) ve (2.48) denklemleri kullanılırsa ve Teorem 7.1'den uzayın skaler eğriliğin sabit olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\mathscr{L}_v P_{ij} = 0 \tag{7.23}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (7.1) denklemi g_{hm} ile çarpılırsa ve h ve m üzerinden toplam alınırsa

$$\begin{aligned} g_{hm}P^h_{ijk} &= g_{hm}(R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(R_{jk}\delta^h_i - R_{ik}\delta^h_j)) \\ P_{ijkm} &= R_{ijkm} - \frac{1}{n-1}(R_{jk}g_{mi} - R_{ik}g_{mj}) \end{aligned} \tag{7.24}$$

bağıntısı mevcut olur. Daha sonra, Lie türevinin özellikleri yardımıyla,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_v(\lambda^l P_{iklj}) &= P_{iklj}\mathscr{L}_v\lambda^l + \lambda^l \mathscr{L}_v P_{iklj} \\ &= P_{iklj}\mathscr{L}_v(g^{ml}\lambda_m) + \lambda^l \mathscr{L}_v P_{iklj},\ g^{ml}\lambda_m = \lambda^l \\ &= P_{iklj}(\lambda_m \mathscr{L}_v g^{ml} + g^{ml}\mathscr{L}_v\lambda_m) + \lambda^l \mathscr{L}_v P_{iklj} \end{aligned} \tag{7.25}$$

denklemi göz önüne alınırsa ve bu denklemde (7.24) kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v(\lambda^l P_{iklj}) = P_{iklj}(\lambda_m \mathscr{L}_v g^{ml} + g^{ml}\mathscr{L}_v\lambda_m) + \lambda^l \mathscr{L}_v(R_{iklj} - \frac{1}{n-1}(R_{kl}g_{ji} - R_{il}g_{kj})) \tag{7.26}$$

bulunur. Bundan başka, (7.26) denklemi, Lie türevinin özellikleri yardımıyla aşağıdaki şekildedir

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_v(\lambda^l P_{iklj}) &= P_{iklj}(\lambda_m \mathscr{L}_v g^{ml} + g^{ml}\mathscr{L}_v\lambda_m) \\ &\quad +\lambda^l(\mathscr{L}_v R_{iklj} - \frac{1}{n-1}\mathscr{L}_v(R_{kl}g_{ji} - R_{il}g_{kj})) \\ &= P_{iklj}(\lambda_m \mathscr{L}_v g^{ml} + g^{ml}\mathscr{L}_v\lambda_m) \\ &\quad +\lambda^l(\mathscr{L}_v R_{iklj} - \frac{1}{n-1}(R_{kl}\mathscr{L}_v g_{ji} + g_{ji}\mathscr{L}_v R_{kl} - R_{il}\mathscr{L}_v g_{kj} - g_{kj}\mathscr{L}_v R_{il})) \ . \end{aligned} \tag{7.27}$$

Ayrıca, (7.27) denkleminde, sırasıyla, (2.43), (2.46), (2.47) ve (2.48) bağıntıları kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v(\lambda^l P_{iklj}) = P_{iklj}g^{ml}\mathscr{L}_v\lambda_m \tag{7.28}$$

ifadesine ulaşılır. Diğer taraftan, hareket altında, boyutu ikiden büyük bir $(PPS)_n$ uzayının $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının Lie türevi, aşağıdaki şekilde gösterilsin

$$\mathscr{L}_v \lambda_l = d_l \ . \tag{7.29}$$

Böylece, (7.28) denkleminde, (7.29) eşitliği kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v(\lambda^l P_{iklj}) = d^l P_{iklj}, \ d^l = g^{lm} d_m \tag{7.30}$$

bulunur. Daha önce elde edilen (7.22) denkleminde, (7.23) denklemi kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v(\nabla_k P_{ij}) = 0 \tag{7.31}$$

sonucu bulunur. Böylece, (7.31) ve (7.5) denklemlerinden

$$\mathscr{L}_v(2\lambda_k P_{ij} + \lambda_i P_{kj} + \lambda^l P_{iklj} + \lambda^l P_{ilkj} + \lambda_j P_{ik}) = 0 \tag{7.32}$$

dir. Ayrıca, (7.32) denkleminde, Lie türevi özellikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} 0 &= 2\lambda_k \mathscr{L}_v P_{ij} + 2P_{ij}\mathscr{L}_v\lambda_k + \lambda_i \mathscr{L}_v P_{kj} + P_{kj}\mathscr{L}_v \lambda_i \\ &+ \mathscr{L}_v(\lambda^l P_{iklj}) + \mathscr{L}_v(\lambda^l P_{ilkj}) + \lambda_j \mathscr{L}_v P_{ik} + P_{ik}\mathscr{L}_v\lambda_j \end{aligned} \tag{7.33}$$

bulunur. Yukarıdaki son denklem ve (7.23) denklemi yardımıyla

$$2P_{ij}\mathscr{L}_v\lambda_k + P_{kj}\mathscr{L}_v\lambda_i + \mathscr{L}_v(\lambda^l P_{iklj}) + \mathscr{L}_v(\lambda^l P_{ilkj}) + P_{ik}\mathscr{L}_v\lambda_j = 0 \tag{7.34}$$

elde edilir. Daha sonra, (7.34) denkleminde, (7.29) eşitliği kullanılırsa

$$2P_{ij}d_k + P_{kj}d_i + \mathscr{L}_v(\lambda^l P_{iklj}) + \mathscr{L}_v(\lambda^l P_{ilkj}) + P_{ik}d_j = 0 \tag{7.35}$$

bulunur. Eğer, (7.35) denkleminde (7.30) kullanılırsa

$$2d_k P_{ij} + d_i P_{kj} + d^l P_{iklj} + d^l P_{ilkj} + d_j P_{ik} = 0 \tag{7.36}$$

elde edilir.

$(PPS)_n$ uzayının skaler eğriliğinin sıfır ve sıfırdan farklı olması durumu göz önüne alınsın:

I. Durum: Sıfırdan farklı bir $(PPS)_n$ uzayı göz önüne alınsın.

(7.36) denkleminde, (7.1)-(7.2) denklemleri kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} &2d_k(\frac{n}{n-1}R_{ij} - \frac{R}{n-1}g_{ij}) + d_i(\frac{n}{n-1}R_{kj} - \frac{R}{n-1}g_{kj}) + d_j(\frac{n}{n-1}R_{ik} - \frac{R}{n-1}g_{ik}) \\ &+d^l(R_{iklj} - \frac{1}{n-1}(R_{kl}g_{ij} - R_{il}g_{kj})) + d^l(R_{ilkj} - \frac{1}{n-1}(R_{lk}g_{ij} - R_{ik}g_{lj})) = 0 \ . \end{aligned} \tag{7.37}$$

Bu denklem bazı ara işlemlerden sonra aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\frac{n}{n-1}(2d_kR_{ij}+d_iR_{kj}+d_jR_{ik})-\frac{R}{n-1}(2d_kg_{ij}+d_ig_{kj}+d_jg_{ik})$$
$$+d^l(R_{iklj}+R_{ilkj})+\frac{d^l}{n-1}(R_{il}g_{kj}-R_{kl}g_{ij}+R_{ik}g_{lj}-R_{lk}g_{ij})=0\ . \quad (7.38)$$

Böylece, (7.38) denkleminin k, i ve j indisleri devirsel olarak değiştirilirse

$$\frac{n}{n-1}(2d_iR_{jk}+d_jR_{ik}+d_kR_{ji})-\frac{R}{n-1}(2d_ig_{jk}+d_jg_{ik}+d_kg_{ji})$$
$$+d^l(R_{jilk}+R_{jlik})+\frac{d^l}{n-1}(R_{jl}g_{ik}-R_{il}g_{jk}+R_{ji}g_{lk}-R_{li}g_{jk})=0 \quad (7.39)$$

ve

$$\frac{n}{n-1}(2d_jR_{ki}+d_kR_{ji}+d_iR_{kj})-\frac{R}{n-1}(2d_jg_{ki}+d_kg_{ji}+d_ig_{kj})$$
$$+d^l(R_{kjli}+R_{klji})+\frac{d^l}{n-1}(R_{kl}g_{ji}-R_{jl}g_{ki}+R_{kj}g_{li}-R_{lj}g_{ki})=0 \quad (7.40)$$

denklemleri elde edilir. (7.38)-(7.40) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{4n}{n-1}(d_kR_{ij}+d_iR_{kj}+d_jR_{ik})-\frac{4R}{n-1}(d_kg_{ij}+d_ig_{kj}+d_jg_{ik})$$
$$+\frac{d^l}{n-1}(-R_{kl}g_{ij}+R_{ik}g_{lj}+R_{ji}g_{lk}-R_{li}g_{jk}+R_{kj}g_{li}-R_{lj}g_{ki})=0 \quad (7.41)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan, (7.11) denkleminin Lie türevi alınırsa

$$\begin{aligned} R\mathscr{L}_v(\lambda_k)+\lambda_k\mathscr{L}_v(R) &= n(R_{lk}\mathscr{L}_v\lambda^l+\lambda^l\mathscr{L}_vR_{lk}) \\ &= n(R_{lk}\mathscr{L}_v(g^{lm}\lambda_m)+\lambda^l\mathscr{L}_vR_{lk}),\ \lambda^l=g^{lm}\lambda_m \\ &= nR_{lk}(\lambda_m\mathscr{L}_vg^{lm}+g^{lm}\mathscr{L}_v\lambda_m)+n\lambda^l\mathscr{L}_vR_{lk} \quad (7.42)\end{aligned}$$

bağıntısı mevcuttur. Yukarıdaki, son (2.46) ve (2.48) bağıntıları kullanılarak

$$R\mathscr{L}_v(\lambda_k)+\lambda_k\mathscr{L}_v(R)=nR_{lk}g^{lm}\mathscr{L}_v\lambda_m \quad (7.43)$$

ifadesine ulaşılır. Ayrıca, (7.43) denkleminde, Teorem 7.1 kullanılırsa

$$R\mathscr{L}_v(\lambda_k)=nR_{lk}g^{lm}\mathscr{L}_v\lambda_m \quad (7.44)$$

bağıntısı bulunur. Böylece, (7.44) denkleminde, (7.29) kullanılarak

$$d^lR_{lk}=\frac{1}{n}d_kR,\ g^{lm}d_m=d^l \quad (7.45)$$

bulunur. Bu takdirde, (7.45) denklemi, (7.41) denkleminde kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= 4n(d_kR_{ij}+d_iR_{kj}+d_jR_{ik})-4R(d_kg_{ij}+d_ig_{kj}+d_jg_{ik}) \\
&+(-\frac{1}{n}d_kRg_{ij}+d_jR_{ik}+d_kR_{ji}-\frac{1}{n}d_iRg_{jk}+d_iR_{kj}-\frac{1}{n}d_jRg_{ki})
\end{aligned} \tag{7.46}
$$

elde edilir. Ayrıca, (7.46) düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
0 &= 4n(d_kR_{ij}+d_iR_{kj}+d_jR_{ik})-4R(d_kg_{ij}+d_ig_{kj}+d_jg_{ik}) \\
&-\frac{R}{n}(d_kg_{ij}+d_ig_{jk}+d_jg_{ki})+(d_jR_{ik}+d_kR_{ji}+d_iR_{kj})
\end{aligned} \tag{7.47}
$$

dir ve (7.47) denklemi, bazı işlemlerden sonra aşağıdaki ifadeye dönüşür

$$
0 = (4n+1)(d_jR_{ik}+d_kR_{ji}+d_iR_{kj})-\frac{(4n+1)}{n}R(d_kg_{ij}+d_ig_{jk}+d_jg_{ki}) \ . \tag{7.48}
$$

Sonuç olarak, (7.48) denklemi düzenlendiğinde

$$
0 = (d_jR_{ik}+d_kR_{ji}+d_iR_{kj})-\frac{R}{n}(d_kg_{ij}+d_ig_{jk}+d_jg_{ki}) \tag{7.49}
$$

bulunur. Diğer taraftan, (7.49) denklemi, aşağıdaki gibi de yazılabilir

$$
d_j(R_{ik}-\frac{R}{n}g_{ki})+d_i(R_{kj}-\frac{R}{n}g_{kj})+d_k(R_{ij}-\frac{R}{n}g_{ij})=0 \ . \tag{7.50}
$$

Böylece, (7.50) denkleminde, Teorem 3.1 kullanılırsa ve $(PPS)_n$ uzayının bir Einstein uzayı olmadığı göz önünde bulundurulursa

$$
d_k = 0 \tag{7.51}
$$

elde edilir. Dolayısıyla, (7.51) denklemi yardımıyla, istenen sonuç elde edilmiş olur.

II. Durum: Skaler eğriliği sıfır olan bir $(PPS)_n$ uzayı göz önüne alınsın.
Bu takdirde, (7.49) denkleminde, $(PPS)_n$ uzayının skaler eğriliğinin sıfır olduğu göz önünde bulundurulursa

$$
d_jR_{ik}+d_kR_{ji}+d_iR_{kj}=0 \tag{7.52}
$$

elde edilir. Böylece, son denklemde, Teorem 3.1 kullanılırsa, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının hareket altında Lie invaryant olduğu görülür. □

Teorem 7.4: $(PPS)_n$ uzayında sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınsın. Bu takdirde, $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanı Lie invaryant olamaz.

İspat: Hipotezden dolayı $P_{ij} \neq 0$ olduğundan, $(PPS)_n$ uzayı Einstein uzayı olamaz. Öncelikle, (7.2) denkleminin Lie türevi alınırsa

$$\mathscr{L}_v P_{ij} = \frac{n}{n-1}\mathscr{L}_v R_{ij} - \frac{1}{n-1} g_{ij}\mathscr{L}_v R - \frac{R}{n-1}\mathscr{L}_v g_{ij} \tag{7.53}$$

denklemi elde edilir. Daha sonra, (7.53) denkleminde $(3.15)_2$ denklemi ve Teorem 7.2 nin sonucu olarak elde edilen $R = 0$ kullanılırsa

$$\mathscr{L}_v P_{ij} = 0 \tag{7.54}$$

sonucu bulunur. Bundan başka, (2.68) denklemi ve (7.54) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_v(\nabla_k P_{ij}) &= -\delta_k^m \varphi_i P_{mj} - \delta_i^m \varphi_k P_{mj} + \varphi^m g_{ki} P_{mj} - \delta_k^m \varphi_j P_{im} - \delta_j^m \varphi_k P_{im} + \varphi^m g_{kj} P_{im} \\
&= -\varphi_i P_{kj} - \varphi_k P_{ij} + \varphi^m g_{ki} P_{mj} - \varphi_j P_{ik} - \varphi_k P_{ij} + \varphi^m g_{kj} P_{im} \\
&= -2\varphi_k P_{ij} - \varphi_i P_{kj} - \varphi_j P_{ik} + \varphi^m g_{ki} P_{mj} + \varphi^m g_{kj} P_{im} \qquad (7.55)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca, (7.55) denkleminde (7.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_v(2\lambda_k P_{ij} + \lambda_i P_{kj} + \lambda^l P_{iklj} + \lambda^l P_{ilkj} + \lambda_j P_{ik}) = \\
&-2\varphi_k P_{ij} - \varphi_i P_{kj} - \varphi_j P_{ik} + \varphi^m g_{ki} P_{mj} + \varphi^m g_{kj} P_{im} \qquad (7.56)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (7.56) denkleminde, Lie türevinin özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&2\lambda_k \mathscr{L}_v P_{ij} + 2P_{ij}\mathscr{L}_v \lambda_k + \lambda_i \mathscr{L}_v P_{kj} + P_{kj}\mathscr{L}_v \lambda_i + \mathscr{L}_v(\lambda^l P_{iklj}) + \mathscr{L}_v(\lambda^l P_{ilkj}) \\
&+\lambda_j \mathscr{L}_v P_{ik} + P_{ik}\mathscr{L}_v \lambda_j = -2\varphi_k P_{ij} - \varphi_i P_{kj} - \varphi_j P_{ik} + \varphi^m g_{ki} P_{mj} + \varphi^m g_{kj} P_{im}
\end{aligned} \tag{7.57}$$

denklemine ulaşılır. Ayrıca, (7.57) denkleminde (7.54) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&2P_{ij}\mathscr{L}_v \lambda_k + P_{kj}\mathscr{L}_v \lambda_i + \mathscr{L}_v(\lambda^l P_{iklj}) + \mathscr{L}_v(\lambda^l P_{ilkj}) + P_{ik}\mathscr{L}_v \lambda_j = \\
&\qquad -2\varphi_k P_{ij} - \varphi_i P_{kj} - \varphi_j P_{ik} + \varphi^m g_{ki} P_{mj} + \varphi^m g_{kj} P_{im} \qquad (7.58)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca, Ricci düz olmayan, Einstein uzayı olmayan ve boyutu ikiden büyük bir $(PPS)_n$ uzayının $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm altında Lie türevi,

$$\mathscr{L}_v \lambda_l = d_l \tag{7.59}$$

olduğundan, (7.58) denklemi, aşağıdaki şekilde de yazılabilir

$$
\begin{aligned}
&2d_kP_{ij}+d_iP_{kj}+\mathscr{L}_v(\lambda^lP_{iklj})+\mathscr{L}_v(\lambda^lP_{ilkj})+d_jP_{ik}= \\
&\quad -2\varphi_kP_{ij}-\varphi_iP_{kj}-\varphi_jP_{ik}+\varphi^mg_{ki}P_{mj}+\varphi^mg_{kj}P_{im}\ . \qquad (7.60)
\end{aligned}
$$

Diğer taraftan,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_v(\lambda^lP_{iklj}) &= P_{iklj}\mathscr{L}_v\lambda^l+\lambda^l\mathscr{L}_vP_{iklj} \\
&= P_{iklj}\mathscr{L}_v(g^{ml}\lambda_m)+\lambda^l\mathscr{L}_vP_{iklj},\ g^{ml}\lambda_m=\lambda^l \\
&= P_{iklj}(\lambda_m\mathscr{L}_vg^{ml}+g^{ml}\mathscr{L}_v\lambda_m)+\lambda^l\mathscr{L}_vP_{iklj} \qquad (7.61)
\end{aligned}
$$

dir. Elde edilen bu son denklemde, (7.1) denklemi kullanılırsa

$$
\mathscr{L}_v(\lambda^lP_{iklj}) = P_{iklj}(\lambda_m\mathscr{L}_vg^{ml}+g^{ml}\mathscr{L}_v\lambda_m)+\lambda^l\mathscr{L}_v(R_{iklj}-\frac{1}{n-1}(R_{kl}g_{ji}-R_{il}g_{kj})) \qquad (7.62)
$$

bulunur. Bundan başka, (7.62) ve (2.65) denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_v(\lambda^lP_{iklj}) &= P_{iklj}(\lambda_m\mathscr{L}_vg^{ml}+g^{ml}\mathscr{L}_v\lambda_m) \\
&\quad +\lambda^l(\mathscr{L}_vR_{iklj}-\frac{1}{n-1}(R_{kl}\mathscr{L}_vg_{ji}+g_{ji}\mathscr{L}_vR_{kl}-R_{il}\mathscr{L}_vg_{kj}-g_{kj}\mathscr{L}_vR_{il})) \qquad (7.63)
\end{aligned}
$$

dir. Böylece, (7.63) denkleminde $(2.76)_1$ kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_v(\lambda^lP_{iklj}) &= P_{iklj}(\lambda_m\mathscr{L}_vg^{ml}+g^{ml}\mathscr{L}_v\lambda_m) \\
&\quad +\lambda^l(\mathscr{L}_vR_{iklj}-\frac{1}{n-1}(R_{kl}(2\varphi g_{ji})+g_{ji}\mathscr{L}_vR_{kl}-R_{il}(2\varphi g_{kj})-g_{kj}\mathscr{L}_vR_{il})) \qquad (7.64)
\end{aligned}
$$

denklemi elde edilir. Daha sonra, (7.64) denkleminde (2.70) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_v(\lambda^lP_{iklj}) &= P_{iklj}(-2\varphi g^{ml}\lambda_m+g^{ml}\mathscr{L}_v\lambda_m) \\
&\quad +\lambda^l(\mathscr{L}_vR_{iklj}-\frac{1}{n-1}(2\varphi g_{ji}R_{kl}+g_{ji}\mathscr{L}_vR_{kl}-2\varphi g_{kj}R_{il}-g_{kj}\mathscr{L}_vR_{il})) \qquad (7.65)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bundan başka, (7.65) denkleminde $(3.15)_2$ kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_v(\lambda^lP_{iklj}) &= P_{iklj}(-2\varphi g^{ml}\lambda_m+g^{ml}\mathscr{L}_v\lambda_m) \\
&\quad +\lambda^l(\mathscr{L}_vR_{iklj}-\frac{1}{n-1}(2\varphi g_{ji}R_{kl}-2\varphi g_{kj}R_{il})) \qquad (7.66)
\end{aligned}
$$

bağıntısı bulunur. Ayrıca, (7.66) ifadesinde $(3.15)_1$ kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_v(\lambda^l P_{iklj}) &= P_{iklj}(-2\varphi g^{ml}\lambda_m + g^{ml}\mathscr{L}_v\lambda_m)\\ &\quad +\lambda^l(2\varphi R_{iklj} - \frac{1}{n-1}(2\varphi g_{ji}R_{kl} - 2\varphi g_{kj}R_{il}))\end{aligned} \tag{7.67}$$

dir. Son olarak, (7.67) denkleminde (7.59) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_v(\lambda^l P_{iklj}) &= P_{iklj}(-2\varphi g^{ml}\lambda_m + g^{ml}d_m)\\ &\quad +\lambda^l(2\varphi R_{iklj} - \frac{1}{n-1}(2\varphi g_{ji}R_{kl} - 2\varphi g_{kj}R_{il}))\end{aligned} \tag{7.68}$$

denklemine ulaşılır. Böylece, (7.68) denklemi düzenlenerek

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_v(\lambda^l P_{iklj}) &= P_{iklj}(-2\varphi\lambda^l + d^l) + 2\varphi\lambda^l(R_{iklj} - \frac{1}{n-1}(R_{kl}g_{ji}) - R_{il}g_{kj})\\ &= P_{iklj}(-2\varphi\lambda^l + d^l) + 2\varphi\lambda^l P_{iklj},\ \lambda^l = g^{lm}\lambda_m,\ g^{ml}d_m = d^l\\ &= d^l P_{iklj}\end{aligned} \tag{7.69}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, elde edilen (7.69) denklemi yardımıyla, (7.60) denklemi

$$\begin{aligned}2d_kP_{ij} + d_iP_{kj} + d_jP_{ik} + d^lP_{iklj} + d^lP_{ilkj} &= -2\varphi_kP_{ij} - \varphi_iP_{kj} - \varphi_jP_{ik}\\ &+ \varphi^m g_{ki}P_{mj} + \varphi^m g_{kj}P_{im}\end{aligned} \tag{7.70}$$

olarak elde edilir. Daha sonra, (7.70) denkleminde, (7.1)-(7.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}&2d_k(\frac{n}{n-1}R_{ij} - \frac{R}{n-1}g_{ij}) + d_i(\frac{n}{n-1}R_{kj} - \frac{R}{n-1}g_{kj}) + d_j(\frac{n}{n-1}R_{ik} - \frac{R}{n-1}g_{ik})\\ &+d^l(R_{iklj} - \frac{1}{n-1}R_{kl}g_{ij} + \frac{1}{n-1}R_{il}g_{kj}) + d^l(R_{ilkj} - \frac{1}{n-1}R_{lk}g_{ij} + \frac{1}{n-1}R_{ik}g_{lj})\\ &= -2\varphi_k(\frac{n}{n-1}R_{ij} - \frac{R}{n-1}g_{ij}) - \varphi_i(\frac{n}{n-1}R_{kj} - \frac{R}{n-1}g_{kj}) - \varphi_j(\frac{n}{n-1}R_{ik} - \frac{R}{n-1}g_{ik})\\ &+\varphi^m g_{ki}(\frac{n}{n-1}R_{mj} - \frac{R}{n-1}g_{mj}) + \varphi^m g_{kj}(\frac{n}{n-1}R_{im} - \frac{R}{n-1}g_{im})\end{aligned} \tag{7.71}$$

elde edilir. Bu ifadede, Teorem 7.2' nin sonucu olarak elde edilen, $R = 0$ kullanıldığında

$$\begin{aligned}&2d_k\frac{n}{n-1}R_{ij} + d_i\frac{n}{n-1}R_{kj} + d_j\frac{n}{n-1}R_{ik}\\ &+d^l(R_{iklj} - \frac{1}{n-1}R_{kl}g_{ij} + \frac{1}{n-1}R_{il}g_{kj}) + d^l(R_{ilkj} - \frac{1}{n-1}R_{lk}g_{ij} + \frac{1}{n-1}R_{ik}g_{lj})\\ &= -2\varphi_k\frac{n}{n-1}R_{ij} - \varphi_i\frac{n}{n-1}R_{kj} - \varphi_j\frac{n}{n-1}R_{ik} + \varphi^m g_{ki}\frac{n}{n-1}R_{mj} + \varphi^m g_{kj}\frac{n}{n-1}R_{im}\end{aligned} \tag{7.72}$$

bulunur. Yukarıdaki denklem, aşağıdaki şekilde düzenlensin

$$
\begin{aligned}
&2(d_k+\varphi_k)\frac{n}{n-1}R_{ij}+(d_i+\varphi_i)\frac{n}{n-1}R_{kj}+(d_j+\varphi_j)\frac{n}{n-1}R_{ik}\\
&+d^l(R_{iklj}-\frac{1}{n-1}(R_{kl}g_{ij}-R_{il}g_{kj}))+d^l(R_{ilkj}-\frac{1}{n-1}(R_{lk}g_{ij}-R_{ik}g_{lj}))\\
&=\frac{n}{n-1}\varphi^m g_{ki}R_{mj}+\frac{n}{n-1}\varphi^m g_{kj}R_{im}\ . \qquad (7.73)
\end{aligned}
$$

Diğer taraftan, (7.11) denklemi ve Teorem 7.2'den

$$\lambda^k R_{kh}=0 \qquad (7.74)$$

olduğu görülür. Bu bağıntının Lie türevi alınır ve (2.65) denklemi kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathscr{L}_v(\lambda^k R_{kh})\\
&= R_{kh}\mathscr{L}_v\lambda^k+\lambda^k\mathscr{L}_vR_{kh}\\
&= R_{kh}\mathscr{L}_v(g^{km}\lambda_m)+\lambda^k\mathscr{L}_vR_{kh}\\
&= R_{kh}(\lambda_m\mathscr{L}_vg^{km}+g^{km}\mathscr{L}_v\lambda_m)+\lambda^k\mathscr{L}_vR_{kh} \qquad (7.75)
\end{aligned}
$$

bulunur. Eğer, (7.75) denkleminde (2.70) denklemi kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= R_{kh}(\lambda_m(-2\varphi g^{km})+g^{km}\mathscr{L}_v\lambda_m)+\lambda^k\mathscr{L}_vR_{kh}\\
&= R_{kh}(-2\varphi\lambda^k+g^{km}\mathscr{L}_v\lambda_m)+\lambda^k\mathscr{L}_vR_{kh},\ g^{km}\lambda_m=\lambda^h \qquad (7.76)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca, (7.76) denkleminde $(3.15)_2$ kullanılırsa

$$0=R_{kh}(-2\varphi\lambda^k+g^{km}\mathscr{L}_v\lambda_m) \qquad (7.77)$$

dir ve (7.77) denkleminde (7.59) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= R_{kh}(-2\varphi\lambda^k+g^{km}d_m)\\
&= -2\varphi\lambda^kR_{kh}+d^kR_{kh},\ g^{km}d_m=d^k \qquad (7.78)
\end{aligned}
$$

bağıntısı elde edilir. Son olarak, (7.78) denkleminde (7.74) kullanılırsa

$$d^kR_{kh}=0 \qquad (7.79)$$

ifadesi bulunur. Ayrıca, (7.73) denklemi g^{jk} ile çarpılırsa ve j ve k üzerinden toplam alınırsa, aşağıdaki denklem elde edilir

$$
\begin{aligned}
&2g^{jk}(d_k+\varphi_k)\frac{n}{n-1}R_{ij}+g^{jk}(d_i+\varphi_i)\frac{n}{n-1}R_{kj}+g^{jk}(d_j+\varphi_j)\frac{n}{n-1}R_{ik}\\
&+d^l(g^{jk}R_{iklj}-\frac{1}{n-1}(g^{jk}R_{kl}g_{ij}-g^{jk}R_{il}g_{kj}))+d^l(g^{jk}R_{ilkj}-\frac{1}{n-1}(g^{jk}R_{lk}g_{ij}-g^{jk}R_{ik}g_{lj})))\\
&=(\frac{n}{n-1}g^{jk}\varphi^m g_{ki}R_{mj}+\frac{n}{n-1}g^{jk}\varphi^m g_{kj}R_{im})\ . \qquad (7.80)
\end{aligned}
$$

Eğer, elde edilen bu denklem düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
&2(d^j+\varphi^j)\frac{n}{n-1}R_{ij}+(d_i+\varphi_i)\frac{n}{n-1}R+(d^k+\varphi^k)\frac{n}{n-1}R_{ik} \\
&+d^l(-R_{il}-\frac{1}{n-1}(R_{il}-nR_{il}))+d^l(-\frac{1}{n-1}(R_{li}-R_{il})) \\
&=(\frac{n}{n-1}\varphi^m R_{mi}+\frac{n}{n-1}n\varphi^m R_{im}),\ g^{jk}d_k=d^j,\ g^{jk}\varphi_k=\varphi^j
\end{aligned}
\tag{7.81}
$$

bulunur. Diğer taraftan, (7.81) denklemi, (7.79) bağıntısı yardımıyla, aşağıdaki gibi düzenlensin

$$
3(d^j+\varphi^j)\frac{n}{n-1}R_{ij}+(d_i+\varphi_i)\frac{n}{n-1}R=\frac{(n+1)n}{n-1}\varphi^m R_{mi}\ . \tag{7.82}
$$

Böylece, (7.82) denkleminde, Teorem 7.2 den elde edilen $R=0$ sonucu kullanılırsa

$$
3(d^j+\varphi^j)\frac{n}{n-1}R_{ij}=\frac{(n+1)n}{n-1}\varphi^m R_{mi} \tag{7.83}
$$

dir. Ayrıca, (7.83) denkleminde (7.79) kullanılırsa

$$
3\varphi^j R_{ij}=(n+1)\varphi^m R_{im} \tag{7.84}
$$

bulunur. Elde edilen bu denklem düzenlenirse aşağıdaki bağıntı bulunur

$$
(n-2)\varphi^j R_{ij}=0. \tag{7.85}
$$

Bu bağıntıda, $(PPS)_n$ uzayının boyutunun ikiden büyük olduğu göz önünde bulundurulursa

$$
\varphi^m R_{mi}=0 \tag{7.86}
$$

elde edilir. Ayrıca, (7.86) bağıntısı, (7.73) denkleminde kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&2(d_k+\varphi_k)\frac{n}{n-1}R_{ji}+(d_i+\varphi_i)\frac{n}{n-1}R_{kj}+(d_j+\varphi_j)\frac{n}{n-1}R_{ik} \\
&+d^l(R_{iklj}-\frac{1}{n-1}(R_{kl}g_{ij}-R_{il}g_{kj}))+d^l(R_{ilkj}-\frac{1}{n-1}(R_{lk}g_{ij}-R_{ik}g_{lj}))=0
\end{aligned}
\tag{7.87}
$$

sonucuna ulaşılır. Bu denklemde, k, i ve j indislerinin devirsel permutasyonundan

$$
\begin{aligned}
&2(d_i+\varphi_i)\frac{n}{n-1}R_{kj}+(d_j+\varphi_j)\frac{n}{n-1}R_{ik}+(d_k+\varphi_k)\frac{n}{n-1}R_{ji} \\
&+d^l(R_{jilk}-\frac{1}{n-1}(R_{il}g_{jk}-R_{jl}g_{ik}))+d^l(R_{jlik}-\frac{1}{n-1}(R_{li}g_{jk}-R_{ji}g_{lk}))=0
\end{aligned}
\tag{7.88}
$$

ve

$$2(d_j+\varphi_j)\frac{n}{n-1}R_{ik}+(d_k+\varphi_k)\frac{n}{n-1}R_{ji}+(d_i+\varphi_i)\frac{n}{n-1}R_{kj}$$
$$+d^l(R_{kjli}-\frac{1}{n-1}(R_{jl}g_{ki}-R_{kl}g_{ji}))+d^l(R_{klji}-\frac{1}{n-1}(R_{lj}g_{ki}-R_{kj}g_{li}))=0 \tag{7.89}$$

denklemleri elde edilir. Böylece, (7.87)-(7.89) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{4n}{n-1}((d_k+\varphi_k)R_{ij}+(d_i+\varphi_i)R_{kj}+(d_j+\varphi_j)R_{ik})$$
$$+\frac{d^l}{n-1}(-R_{kl}g_{ij}+R_{ik}g_{lj}+R_{ji}g_{lk}-R_{li}g_{jk}+R_{kj}g_{li}-R_{lj}g_{ki})=0 \tag{7.90}$$

bulunur. Dolayısıyla, (7.79) denklemi, (7.90) denkleminde kullanılırsa

$$4n((d_k+\varphi_k)R_{ij}+(d_i+\varphi_i)R_{kj}+(d_j+\varphi_j)R_{ik})+(d_jR_{ik}+d_kR_{ji}+d_iR_{kj})=0,\ g_{lh}d^l=d_k \tag{7.91}$$

olmak üzere, bu denklem düzenlenirse

$$((4n+1)d_k+4n\varphi_k)R_{ij}+((4n+1)d_i+4n\varphi_i)R_{kj}+((4n+1)d_j+4n\varphi_j)R_{ik}=0 \tag{7.92}$$

olduğu görülür. Böylece, (7.92) denkleminde, Teorem 3.1 kullanılırsa

$$((4n+1)d_k+4n\varphi_k)=0 \tag{7.93}$$

bulunur. Sonuç olarak, (7.93) denkleminden yararlanarak

$$d_k=-\frac{4n}{4n+1}\varphi_k \tag{7.94}$$

elde edilir. Bu son denklemden, $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının Lie invaryant olmadığı görülür. □

Teorem 7.5: $(PPS)_n$ uzayında sonsuz küçük pseudo homotetik dönüşüm göz önüne alınsın. Bu takdirde, $\boldsymbol{\lambda_i}$ ve $\boldsymbol{\varphi_i}$ birbirine diktir.

İspat: Öncelikle, (7.86) denkleminin kovaryant türevi alınırsa

$$\varphi^j\nabla_mR_{kj}+R_{kj}\nabla_m\varphi^j=0 \tag{7.95}$$

bulunur. Bu denklemde $(3.16)_2$ denklemi kullanılırsa

$$\varphi^j\nabla_mR_{kj}=0 \tag{7.96}$$

dir. Diğer taraftan, (7.6) denklemi φ^h ile çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
&(\frac{n}{n-1}\varphi^h\nabla_l R_{ih} - \frac{1}{n-1}\varphi^h g_{ih}\nabla_l R) = 2\lambda_l(\frac{n}{n-1}\varphi^h R_{ih} - \frac{R}{n-1}\varphi^h g_{ih}) \\
&+\lambda_i(\frac{n}{n-1}\varphi^h R_{lh} - \frac{R}{n-1}\varphi^h g_{lh}) + \lambda_h\varphi^h(\frac{n}{n-1}R_{il} - \frac{R}{n-1}g_{il}) \\
&+\lambda^k(\varphi^h R_{ilkh} - \frac{1}{n-1}R_{lk}\varphi^h g_{ih} + \frac{1}{n-1}R_{ik}\varphi^h g_{lh}) \\
&+\lambda^k(\varphi^h R_{iklh} - \frac{1}{n-1}R_{lk}\varphi^h g_{ih} + \frac{1}{n-1}R_{il}\varphi^h g_{kh}),\ g_{ih}\varphi^h ? \varphi_i \qquad (7.97)
\end{aligned}
$$

bulunur. Yukarıdaki son denklem düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
&(\frac{n}{n-1}\varphi^h\nabla_l R_{ih} - \frac{1}{n-1}\varphi_i\nabla_l R) = 2\lambda_l(\frac{n}{n-1}\varphi^h R_{ih} - \frac{R}{n-1}\varphi_i) \\
&+\lambda_i(\frac{n}{n-1}\varphi^h R_{lh} - \frac{R}{n-1}\varphi_l) + \lambda_h\varphi^h(\frac{n}{n-1}R_{il} - \frac{R}{n-1}g_{il}) \\
&+\lambda^k(\varphi^h R_{ilkh} - \frac{1}{n-1}R_{lk}\varphi_i + \frac{1}{n-1}R_{ik}\varphi_l) \\
&+\lambda^k(\varphi^h R_{iklh} - \frac{1}{n-1}R_{lk}\varphi_i + \frac{1}{n-1}R_{il}\varphi_k),\ g_{ih}\varphi^h = \varphi_i \qquad (7.98)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca, (7.98) denkleminde öncelikle, Teorem 7.2'nin sonucu olarak $R = 0$ kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{n}{n-1}\varphi^h\nabla_l R_{ih} = \lambda_l\frac{2n}{n-1}\varphi^h R_{ih} + \lambda_i\frac{n}{n-1}\varphi^h R_{lh} + \lambda_h\varphi^h\frac{n}{n-1}R_{il} \\
&+\lambda^k(\varphi^h R_{ilkh} - \frac{1}{n-1}R_{lk}\varphi_i + \frac{1}{n-1}R_{ik}\varphi_l) + \lambda^k(\varphi^h R_{iklh} - \frac{1}{n-1}R_{lk}\varphi_i + \frac{1}{n-1}R_{il}\varphi_k) \\
&\qquad (7.99)
\end{aligned}
$$

dir. Diğer taraftan, $(3.16)_2$ ve Ricci özdeşliği yardımıyla

$$
\varphi^h R_{ilkh} = 0 \qquad (7.100)
$$

olduğu açıktır. Böylece, (7.99) denkleminde (7.86) ve (7.100) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{n-1}\varphi^h\nabla_l R_{ih} &= \lambda_h\varphi^h\frac{n}{n-1}R_{il} + \lambda^k(-\frac{1}{n-1}R_{lk}\varphi_i + \frac{1}{n-1}R_{ik}\varphi_l) \\
&\quad +\lambda^k(-\frac{1}{n-1}R_{lk}\varphi_i + \frac{1}{n-1}R_{il}\varphi_k) \qquad (7.101)
\end{aligned}
$$

bulunur. Ayrıca, (7.101) denkleminde (7.74) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{n-1}\varphi^h\nabla_l R_{ih} &= \lambda_h\varphi^h\frac{n}{n-1}R_{il} + \frac{1}{n-1}\lambda^k\varphi_k R_{il} \\
&= \frac{n+1}{n-1}\lambda_h\varphi^h R_{il} \qquad (7.102)
\end{aligned}
$$

dir. Böylece, (7.102) denkleminde (7.96) kullanılırsa

$$R_{il}\lambda_h\varphi^h = 0 \tag{7.103}$$

bulunur. Böylece, (7.103) denkleminden

$$\lambda_h\varphi^h = 0 \tag{7.104}$$

elde edilir. Böylece teoerem ispat edilmiş olur. □

Aşağıdaki teoremlerde, uzunluğu sabit olmayan bir konküran vektör alanı göz önüne alınmıştır.

Teorem 7.6: Bir $(PPS)_n$ uzayında, konküran vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük dönüşüm göz önüne alınsın. Bu takdirde, bu uzayın skaler eğriliği sıfırdır.

İspat: Yardımcı Teorem 4.1'den dolayı, konküran vektör alanının bir sonsuz küçük has homotetik dönüşüm ürettiği açıktır. Dolayısıyla, (2.74) ve Teorem 7.1 göz önüne alınarak

$$-2\varphi R = 0 \tag{7.105}$$

bulunur. Buradan, uzayın skaler eğriliğinin sıfır olması gerektiği görülür. □

Teorem 7.7: Skaler eğriliği sıfırdan farklı bir $(PPS)_n$ uzayında, uzunluğu sabit olmayan bir reküran vektör alanı ele alınsın. Bu takdirde, $\boldsymbol{\lambda_i}$ ile $\boldsymbol{v_i}$ birbirine dik olur.

İspat: Bir Riemann uzayına ait reküran vektör alanı için Yardımcı Teorem 4.3'den

$$v^a R_{jiam} = 0,\ v^a R_{ia} = 0 \tag{7.106}$$

bağıntıları mevcuttur. Dolayısıyla, $(7.106)_2$ bağıntısının kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_l(v^a R_{am}) \\ &= R_{am}\nabla_l v^a + v^a \nabla_l R_{am} \end{aligned} \tag{7.107}$$

dir. Daha sonra, (7.107) denkleminde (2.83) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= R_{am}(\phi_l v^a) + v^a \nabla_l R_{am} \\ &= \phi_l v^a R_{am} + v^a \nabla_l R_{am} \end{aligned} \tag{7.108}$$

ve (7.108) denkleminde $(7.106)_2$ kullanılırsa

$$v^a \nabla_l R_{am} = 0 \tag{7.109}$$

bulunur. Diğer taraftan, Teorem 7.1 ve (7.2) denklemi yardımıyla

$$\nabla_l P_{am} = \frac{n}{n-1} \nabla_l R_{am} \tag{7.110}$$

dir. Böylece, (7.110) denklemi, v^a ile çarpılırsa

$$v^a \nabla_l P_{am} = \frac{n}{n-1} v^a \nabla_l R_{am} \tag{7.111}$$

bulunur. Son iki denklemden

$$v^m \nabla_l P_{am} = 0 \tag{7.112}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca, (7.112) denkleminde (7.4) kullanılırsa

$$v^a (2\lambda_l P_{am} + \lambda_a P_{lm} + \lambda_m P_{al} + \lambda^k P_{alkm} + \lambda^k P_{aklm}) \quad = \quad 0 \tag{7.113}$$

elde edilir. Böylece, (7.113) denkleminde, (7.1)-(7.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} & 2\lambda_l (\frac{n}{n-1} v^a R_{am} - \frac{R}{n-1} v^a g_{am}) + \lambda_a v^a (\frac{n}{n-1} R_{lm} - \frac{R}{n-1} g_{lm}) \\ & + \lambda_m (\frac{n}{n-1} v^a R_{al} - \frac{R}{n-1} v^a g_{al}) + \lambda^k (v^a R_{alkm} - \frac{1}{n-1} (R_{lk} v^a g_{am} - v^a R_{ak} g_{lm})) \\ & + \lambda^k (v^a R_{aklm} - \frac{1}{n-1} (R_{kl} v^a g_{am} - v^a R_{al} g_{km})) = 0 \end{aligned} \tag{7.114}$$

bulunur ve elde edilen (7.114) denkleminde, (7.106) ile verilen bağıntılar kullanılarak, gerekli düzenlemeler yapılırsa, yukarıdaki son denklem, aşağıdaki şekle dönüşür

$$\begin{aligned} & -2\lambda_l \frac{R}{n-1} v_m + \lambda_a v^a (\frac{n}{n-1} R_{lm} - \frac{R}{n-1} g_{lm}) \\ & -\lambda_m \frac{R}{n-1} v_l - \lambda^k \frac{1}{n-1} R_{lk} v_m - \lambda^k \frac{1}{n-1} R_{kl} v_m = 0, \; g_{am} v^a = v_m \; . \end{aligned} \tag{7.115}$$

Dolayısıyla, (7.115) denklemi, aşağıdaki denkleme denktir

$$-2\lambda_l v_m R + n v_a \lambda^a R_{lm} - v_a \lambda^a g_{ml} R - v_l \lambda_m R - 2 v_m \lambda^k R_{kl} = 0 \; . \tag{7.116}$$

dir. Eğer, (7.116) denklemi g^{ml} ile çarpılırsa ve m ve l üzerinden toplam alınırsa,

$$3\lambda^m v_m R + 2 R_{kl} \lambda^k v^l = 0 \tag{7.117}$$

bulunur. Bu denklemde, (7.106) denklemi tekrar kullanılırsa

$$\lambda^m v_m R = 0 \tag{7.118}$$

sonucuna ulaşılır. Eğer, (7.118) denkleminde, boyutu ikiden büyük $(PPS)_n$ uzayının skaler eğriliğinin sıfırdan farklı olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\lambda_m v^m = 0 \tag{7.119}$$

bulunur. Böylece, $\boldsymbol{\lambda_i}$ ile $\boldsymbol{v_i}$'nin birbirine dik olduğu gösterilmiş olur. □

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde, boyutu ikiden büyük olan ve Ricci düz olmayan bir pseudo Ricci simetrik Riemann uzayı üzerinde, sonsuz küçük pseudo homotetik hareket tanımlanmış ve bu sonsuz küçük hareket altında, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının ve bu vektör alanının uzunluğunun Lie invaryant olmadığı ispatlanmıştır. Aynı zamanda, sonsuz küçük pseudo homotetik hareket kabul eden bir pseudo Ricci simetrik Riemann uzayında, $\boldsymbol{v_i}$ ile $\boldsymbol{\varphi_i}$ vektörlerinin birbirine dik olduğu teorem yardımıyla ifade edilmiştir. Skaler eğriliği sabit ve sıfır olmayan, pseudo Ricci simetrik Riemann uzayı üzerinde tanımlanmış olan sonsuz küçük pseudo homotetik hareket altında uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanı ile hareketi üreten $\boldsymbol{v}$ vektör alanının birbirine dik olmadığı gösterilmiştir.

Bu çalışmanın dördüncü bölümünde, n-boyutlu Riemann uzayı üzerinde tanımlı, sonsuz küçük has homotetik hareket üreten gradyent vektör alanının konküran olacağı ifade edilmiştir. Ayrıca, uzunluğu sabit olmayan $\boldsymbol{v}$ konküran vektör alanı kabul eden ve boyutu ikiden büyük bir pseudo Ricci simetrik Riemann uzayının $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının Lie invaryant olduğu ve uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanı ile bu uzaya ait $\boldsymbol{v_l}$ konküran vektör alanının birbirine dik olmadığı gösterilmiştir. Diğer taraftan, $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanına sahip ve boyutu ikiden büyük pseudo Ricci simetrik Riemann uzayına ait, uzunluğu sabit olmayan konküran vektör alanı mevcut ise, bu takdirde $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının uzunluğunun Lie invaryant olmadığı ispatlanmıştır. Ayrıca, bir Riemann uzayına ait ve uzunluğu sabit olmayan $\boldsymbol{v}$ reküran vektör alanının ürettiği sonsuz küçük konformal hareket mevcut ise, bu takdirde, $\boldsymbol{v_i}$ ile $\boldsymbol{\phi_i}$ vektörlerinin birbirine dik olmadığı gösterilmiştir. Daha sonra, bir Riemann uzayında, tors oluşturan vektör alanı göz önüne alınmış ve $\boldsymbol{v_i}$ kovaryant vektörünün hem $\boldsymbol{\phi_i}$ ve hem $\boldsymbol{\rho_i}$ ile kolieneer olması halinde, bu vektör alanının bir konsörkılır vektör alanından ibaret olduğu ifade edilmiştir. İlave olarak, boyutu ikiden büyük bir pseudo Ricci simetrik Riemann uzayında, $\rho \neq 0$ olmak üzere, yarı tors oluşturan $\boldsymbol{v_l}$ vektör alanı göz önüne alındığında, uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$

kovektör alanı ile $\boldsymbol{v_l}$ vektör alanının birbirine dik olmadığı gösterilmiştir.

Bu çalışmanın beşinci bölümünde ise, boyutu iki olan ve skaler eğriliği sabit ve sıfır olmayan pseudo simetrik Riemann uzayı ile ilgili aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Pseudo simetrik Riemann uzayının $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının gradyent olduğu, ayrıca bu uzayın aynı $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanı ile tanımlı bir reküran uzay olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, bir pseudo simetrik Riemann uzayına ait her sonsuz küçük hareketin bir sonsuz küçük konformal hareketten ibaret olması için gerek ve yeter koşul, bu uzayın kovaryant (veya Ricci) eğrilik tensörünün kalıtımsal özelliğe sahip olmasıdır. Daha sonra, pseudo simetrik Riemann uzayının Ricci eğrilik tensörünün kalıtımsal özelliğe sahip olması veya Lie invaryant olması halinde, aynı özelliklerin uzayın kovaryant eğrilik tensörü için de geçerli olduğu ispatlanmıştır. Buna ilaveten, eğrilik veya Ricci eğrilik tensörü, sonsuz küçük hareket altında Lie invaryant olan ve skaler eğriliği sabit ve sıfır olmayan bir pseudo simetrik Riemann uzayının $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının Lie invaryant olmadığı ifade edilmiştir.

Boyutu ikiden büyük bir pseudo simetrik Riemann uzayı üzerinde tanımlanan sonsuz küçük pseudo homotetik hareket altında, $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının Lie invaryant olmadığı ve bu uzayda sonsuz küçük hareketi üreten $\boldsymbol{\varphi_i}$ vektörü ile uzayın $\boldsymbol{\lambda_i}$ kovektör alanının birbirine dik olduğu ispat edilmiştir. Ayrıca, uzunluğu sabit olmayan konküran vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük hareket göz önüne alınmış ve bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının uzunluğunun Lie invaryant olmadığı gösterilmiştir. Diğer taraftan, konformal olarak düz bir pseudo simetrik Riemann uzayında, sonsuz küçük pseudo homotetik hareketin tanımlanamayacağı ispat edilmiştir.

Çalışmanın altıncı bölümünde ise, boyutu ikiden büyük bir pseudo projektif Ricci simetrik Riemann uzayı üzerinde, sonsuz küçük pseudo homotetik hareket tanımlanmış ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Pseudo projektif Ricci simetrik Riemann uzayı üzerinde, sonsuz küçük pseudo homotetik hareket tanımlanması halinde, bu uzayın skaler eğriliğinin sıfır olduğu ve pseudo projektif Ricci simetrik Riemann uzayının bir pseudo Ricci simetrik Riemann uzayından ibaret olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, pseudo projektif Ricci simetrik Riemann uzayında, sonsuz küçük pseudo homotetik hareket göz önüne alınarak, ya bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının Lie invaryant olmadığı ya da $\boldsymbol{\lambda_i}$ kovektörü ile $\boldsymbol{\varphi_i}$'nin birbirine dik olacağı gösterilmiştir. Daha sonra, skaler eğriliği sıfırdan farklı bir pseudo projektif Ricci simetrik Riemann uzayında sadece bir hareket göz önüne alınarak, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının Lie invaryant olduğu gösterilmiştir. Bundan başka, pseudo projektif Ricci simetrik Riemann uzayında, konküran vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük hareket göz önüne alınarak, bu uzayın pseudo Ricci simetrik Riemann uzayına dönüştüğü gösterilmiştir.

Çalışmanın son bölümünde, bir pseudo projektif simetrik Riemann uzayının skaler eğriliğinin sabit olduğu ispatlanmıştır. Diğer taraftan, eğer, bu uzaya ait sonsuz küçük pseudo homotetik hareket mevcut ise, bu uzayın skaler eğriliğinin sıfır olmak zorunda olduğu ispat edilmiştir. Ayrıca, Ricci olarak düz olmayan ve Einstein uzayı olmayan bir pseudo projektif simetrik Riemann uzayında, sadece hareket göz önüne alındığında, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının Lie invaryant ve aynı uzayda, sonsuz küçük pseudo homotetik hareket göz önüne alındığında, $\boldsymbol{\lambda_l}$ kovektör alanının Lie invaryant olmadığı ve bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_i}$ kovektörü ile $\boldsymbol{\varphi_i}$ vektörünün birbirine dik olduğu ispatlanmıştır. Bundan başka, pseudo projektif simetrik Riemann uzayında, konküran vektör alanı ile üretilen sonsuz küçük hareket göz önüne alındığında, bu uzayın skaler eğriliğinin sıfır olduğu ispatlanmıştır. İlave olarak, skaler eğriliği sıfırdan farklı ve Ricci düz olmayan ve Einstein uzayı olmayan bir pseudo projektif simetrik Riemann uzayında, reküran vektör alanı göz önüne alındığında, bu uzayın $\boldsymbol{\lambda_i}$ kovektörü ile $\boldsymbol{\nu_i}$ vektörünün birbirine dik olduğu gösterilmiştir.

Elde edilen bağıntılar ve teoremler yardımıyla, bundan sonraki çalışmalarda, pseudo Ricci simetrik Riemann uzayında tanımlı, sonsuz küçük pseudo homotetik hareket göz önüne alınarak elde edilmiş olan sonuçların, genelleştirilmiş pseudo Ricci simetrik ve zayıf Ricci simetrik Riemann uzaylarında da geçerli olup olmayacağı araştırılabilir. Aynı şekilde, pseudo simetrik Riemann uzayında tanımlı, sonsuz küçük pseudo homotetik hareket için verilmiş sonuçların, zayıf simetrik ve zayıf pseudo projektif simetrik Riemann uzaylarında geçerli olup olmayacağı araştırılabilir. Genelleştirilmiş pseudo Ricci simetrik, zayıf Ricci simetrik, zayıf simetrik ve zayıf pseudo projektif simetrik Riemann uzayları üzerindeki sonsuz küçük pseudo homotetik hareketi üretecek özel vektör alanları ile bu uzayların kovektör alanları arasındaki ilişkiler incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Walker, A. G.**, 1950. On Ruse's spaces of recurrent curvature, *Proc. London Math. Soc.*, **(2)52**, 36–64.

[2] **Tamassy, L. and Binh, T. Q.**, 1989. On weakly symmetric and weakly projective symmetric Riemannian manifolds, *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, **56**, 663–670.

[3] **De, U. C. and Bandyopadhyay, S.** , 1999. On weakly symmetric Riemannian spaces, *Publ. Math. Debrecen*, **54**, no. 3–4, 377–381.

[4] **Chaki, M. C.**, 1987. On pseudo symmetric manifolds, *An. Ştiint. Univ. Al. I. Cuza Iaşi Sect. I a Mat.*, **33**, no.1, 53–58.

[5] **Yano, K.**, 1965. *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces*, Pergamon Press, New York.

[6] **Chaki, M. C. and Koley, S.**, 1994. On generalized pseudo Ricci symmetric manifolds, *Period. Math. Hungar.*, **28**, no.2, 123–129.

[7] **Chaki, M. C.**, 1988. On pseudo Ricci symmetric manifolds, *Bulgar. J. Phys.*, **15**, no.6, 526–531.

[8] **Yano, K.**, 1957. *The Theory of Lie Derivatives and Its Applications*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

[9] **Sumitomo, T.**, 1956. On some transformations of Riemannian spaces, *Tensor (N. S.)*, **6**, 136–140.

[10] **Yano, K.**, 1944. On the torse-forming directions in Riemannian spaces, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **20**, 340–345.

[11] **Kowolik, J.**, 1985. On some Riemannian manifolds admitting torse-forming vector fields, *Demonstratio. Math.*, **18**, no.3, 885–891.

[12] **Schouten, J. A.**, 1954. *Ricci Calculus (2nd edition)*, Springer-Verlag, Berlin.

[13] **Yano, K.**, 1940. Concircular geometry I-IV, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16**, 195–200, 354–360, 442–448, 505–511.

[14] **Rachunek, L. and Mikes, J.**, 2004. On semitorse-forming vector fields, *3rd International Conference APLIMAT* , 835–840.

[15] **Duggal, K. L.**, 1992. Curvature inheritance symmetry in Riemannian spaces with applications to fluid space times, *J. Math. Phys.*, **33**, no.9, 2989–2997.

[16] **Chaki, M. C. and Saha, S. K.**, 1994. On pseudo-projective Ricci symmetric manifolds, *Bulgar. J. Phys.*, **21**, no.1–2, 1–7.

[17] **Roter, W.**, 1974. On conformally symmetric Ricci-recurrent spaces, *Colloq. Math.*, **31**, 87–96.

[18] **Weatherburn, C. E.**, 1966. *Riemannian Geometry and The Tensor Calculus*, Cambridge.

[19] **Yano, K.**, 1969. Riemannian manifolds admitting a conformal transformation group, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **62**, 314–319.

[20] **Adati, T.**, 1951. On subprojective spaces, I, *Tohoku Math. J.*, **(2)3**, 159–173.

[21] **Yamaguchi, S. and Matsumoto, M.**, 1968. On Ricci-recurrent spaces, *Tensor (N. S.)*, **19**, 64–68.

[22] **Roter, W.**, 1982. On conformally related conformally recurrent metrics. I. Some general results, *Colloq. Math.*, **47**, no.1, 39–46.

[23] **Chaki, M. C. and De, U. C.**, 1989. On pseudo symmetric spaces, *Acta. Math. Hungar.*, **54**, no.3–4, 185–190.

[24] **Tarafdar, M.**, 1995. On conformally flat pseudo symmetric manifolds, *An. Ştiint. Univ. Al. I. Cuza Iaşi Sect. I a Mat.*, **41**, no.2, 237–241.

[25] **De, U. C. and Ghosh, S. K.**, 2000. On conformally flat pseudosymmetric spaces, *Balkan J. Geom. Appl.*, **5**, no.2, 61–64.

[26] **Katzin, G. H. and Levine, J. and Davis, W. R.**, 1969. Curvature collineations: A fundamental symmetry property of the space-times of general relativity defined by the vanishing Lie derivative of the Riemann curvature tensor, *J. Mathematical Phys.*, **10**, 617–629.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Esra Şengelen Sevim

Doğum Yeri ve Tarihi: İstanbul, 16.12.1971

Adres: Yenidoğan Mah. Atilay Sok. No:2 D:6 Bayrampaşa-İstanbul

Lisans Üniversite: İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü