

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**TABAKALI ORTOTROPİK SİLİNDİRİK BİR KABUK İLE DİKDÖRTGEN
BİR PLAKANIN BİRLİKTE TİTREŞİM ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Aslı TATAR**

Anabilim Dalı : Uçak ve Uzay Mühendisliği

Programı : Uçak ve Uzay Mühendisliği

Tez Danışmanı: Prof. Dr. M. Orhan KAYA

HAZİRAN 2011

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**TABAKALI ORTOTROPİK SİLİNDİRİK BİR KABUK İLE DİKDÖRTGEN
BİR PLAKANIN BİRLİKTE TİTREŞİM ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Öğrenci Aslı TATAR
(511081101)**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 Mayıs 2011

Tezin Savunulduğu Tarih : 08 Haziran 2011

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin O. KAYA (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL (İTÜ)
Doç. Dr. Erol UZAL (İÜ)**

HAZİRAN 2011

ÖNSÖZ

Bitirme çalışmamda olduğu gibi yüksek lisans tez çalışmamda da öncelikle konuyu bulmamda bana yol gösteren ve desteğini esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. M. Orhan KAYA'ya teşekkürlerimi borç bilirim.

Niyazi YALÇIN'a çalışmamın hazırlanması aşamasında ihtiyaç duyduğum her tür konuda elinden geleni yaptığı için ve gerekli ilgi anlayışı gösterdiği için teşekkür ederim.

Tez boyunca yanımda olan tüm arkadaşlarıma, özellikle değerli arkadaşlarım Gay KADYROV ve Tuğba TAN'a tezime olan katkılarından ve yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

Tez konusuyla ilgililenenlere çalışmamın faydalı olmasını dilerim.

Haziran 2011

Aslı TATAR
(Uzay Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER	v
KISALTMALAR	vii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	xi
ÖZET.....	xiii
SUMMARY	xv
1. GİRİŞ	1
2. KOMPOZİT MALZEMELER.....	3
2.1 Kompozit Malzemeye Giriş	3
2.2 Fiberler	7
2.2.1 Cam fiber.....	7
2.2.2 Karbon fiber	9
2.2.3 Boron fiber	10
2.2.4 Silikon karbür fiber	11
2.2.5 Aramid fiber	11
2.3 Matrisler	13
2.3.1 Termoplastik matris	13
2.3.2 Termoset matris.....	13
3. KOMPOZİT MALZEMELERİN MEKANİĞİ.....	15
3.1 Laminanın Makromekanik Davranışı.....	15
3.2 Anizotropik Malzemelerde Gerilme, Birim Uzama ve Yer Değiştirmeler	15
3.2.1 Gerilme tensörü.....	16
3.2.2 Birim uzama tensörü ve yer değiştirme	17
3.3 Anizotropik Malzeme Çeşitleri	18
3.3.1 Triklirik simetri	18
3.3.2 Monoklinik simetri.....	19
3.3.3 Ortotropik simetri.....	19
3.3.4 Kesitsel izotropik simetri	20
3.3.5 İzotropik simetri.....	21
3.4 Mühendislik Sabitleri	22
3.5 Dönüşüm Kuralları	23
3.6 Tabakalı Kompozit Malzemeler.....	27
3.6.1 Giriş.....	27
3.6.2 Gerilme, birim uzama ve yer değiştirmeler	28
3.6.3 Kuvvet ve momentler denklemleri.....	30
4. KOMPOZİT DİKDÖRTGEN BİR PLAKANIN SERBEST TİTREŞİMİ	35
4.1 Giriş.....	35
4.2 Kinematik Denklemler	36
4.3 Hareket Denklemleri	37

4.3.1 Kuvvet ve moment denklemleri	38
4.3.2 Sınır şartları	39
4.4 Plakanın Serbest Titreşim Analizi	41
5. KOMPOZİT SİLİNDİRİK BİR KABUĞUN SERBEST TİTREŞİMİ	45
5.1 Giriş	45
5.2 Kinematik Denklemler	46
5.3 Hareket Denklemleri	47
5.3.1 Kuvvet ve moment denklemleri	48
5.3.2 Sınır şartları	49
5.4 Kabuğun Serbest Titreşim Analizi	53
6. KOMPOZİT PLAKA İLE KABUĞUN BİRLİKTE TİTREŞİMİ.....	55
6.1 Receptance Metodu	55
6.2 Silindirik Kabuğun Receptance Fonksiyonları.....	57
6.3 Dikdörtgen Plakanın Receptance Fonksiyonları	64
6.4 Birleşik Sistemin Serbest Titreşim Analizi	68
7. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME.....	71
7.1 Giriş	71
7.2 Analiz Sonuçları	71
7.3 Değerlendirme	79
KAYNAKLAR.....	81

KISALTMALAR

ECR	: E Glass Chemically Resistant
CVD	: Chemaical Vapor Deposition
GFRP	: Glass Fiber Reinforced Plastic
CFRP	: Carbon Fiber Reinforced Plastic

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3.1 : Üç boyutlu malzeme simetrisinin özeti.....	22
Çizelge 7.1 : Malzeme özellikleri.....	72
Çizelge 7.2 : CFRP malzeme için analiz sonuçları.	72
Çizelge 7.3 : GFRP malzeme için analiz sonuçları.	73
Çizelge 7.4 : R/h oranının değişmesi sonucu doğal frekans değerleri.....	73
Çizelge 7.5 : L/R oranının değişmesi sonucu doğal frekans değerleri.	74
Çizelge 7.6 : Kalınlığın değişmesi sonucu doğal frekans değerleri.....	74
Çizelge 7.7 : Plakanın yerinin değişmesi sonucu doğal frekans değerleri	75

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 : Uçağın gövdesiyle ortasında yer alan panel.....	1
Şekil 2.1 : Kompozit malzeme.....	3
Şekil 2.2 : Cam fiber.....	8
Şekil 2.3 : Karbon fiber.....	9
Şekil 2.4 : Kevler fiber.....	12
Şekil 3.1 : Bazı malzemelerin mekanik davranışı.....	16
Şekil 3.2 : Kübik eleman üzerindeki gerilmeler.....	17
Şekil 3.3 : Kayma birim uzamaları.....	17
Şekil 3.4 : İki boyutlu düzlemde gerilme ve birim uzama.....	24
Şekil 3.5 : Düzlem rotasyonu.....	24
Şekil 3.6 : Tabakalı kompozit malzeme.....	27
Şekil 3.7 : x-z kesitindeki deformasyon geometrisi.....	28
Şekil 3.8 : Tabakalı kompozitlerde xy düzlemindeki kuvvetler.....	30
Şekil 3.9 : Tabakalı kompozitlerde xy düzlemindeki momentler.....	31
Şekil 3.10 : Tabakalı simetrik plaka.....	32
Şekil 4.1 : Dikdörtgen plakanın geometrisi.....	35
Şekil 4.2 : Ortotropik bir plaka için mod şekilleri.....	42
Şekil 5.1 : Silindirik kabuğun geometrisi.....	45
Şekil 6.1 : Birleşik iki sistemin yer değiştirmesi.....	55
Şekil 7.1 : Tabakalı kompozit plaka için 1.mod.....	75
Şekil 7.2 : Tabakalı kompozit plaka için 2.mod.....	75
Şekil 7.3 : Tabakalı kompozit plaka için 3.mod.....	76
Şekil 7.4 : Tabakalı kompozit plaka için 4.mod.....	76
Şekil 7.5 : Tabakalı kompozit silindirik kabuk için 1.mod.....	76
Şekil 7.6 : Tabakalı kompozit silindirik kabuk için 2.mod.....	77
Şekil 7.7 : Tabakalı kompozit silindirik kabuk için 3.mod.....	77
Şekil 7.8 : Tabakalı kompozit silindirik kabuk için 4.mod.....	77
Şekil 7.9 : Tabakalı kompozit birleşik sistem için 1.mod.....	78
Şekil 7.10 : Tabakalı kompozit birleşik sistem için 2.mod.....	78
Şekil 7.11 : Tabakalı kompozit birleşik sistem için 3.mod.....	78
Şekil 7.12 : Tabakalı kompozit birleşik sistem için 4.mod.....	79

TABAKALI ORTOTROPİK SİLİNDİRİK BİR KABUK İLE DİKDÖRTGEN BİR PLAKANIN BİRLİKTE TİTREŞİM ANALİZİ

ÖZET

Bu tez çalışmasının konusu katmanlı ortotropik dikdörtgen bir plaka ile dairesel silindirik bir kabuğun birlikte serbest titreşim analizinin çözümlenmesidir. Öncelikle genel olarak kompozit yapılardan ve kompozit mekaniğinden bahsedilmiştir. Kompozit malzeme çeşitleri, kompozit malzemenin avantaj ve dezavantajları ilk olarak ele alınmıştır. Kompozit malzeme özelliğinin hem dikdörtgen plaka hem dairesel silindirik kabuk için aynı olduğu görülmüştür. Bu özellikler kullanılarak dört kenarından basit mesnetli dikdörtgen bir plakanın serbest titreşim analizi incelenmiştir. Ayrıca iki uçtan basit mesnetli dairesel silindirik kabuğun serbest titreşim analizi incelenmiştir. Elde edilen doğal frekanslar iki yapının birlikte serbest titreşim analizinde kullanılmıştır.

Tabakalı ortotropik plaka ve silindirin birleşik serbest titreşim analizinde receptance metodu uygulanmıştır. Yine aynı şekilde sınır şartı olarak birleşik yapı basit mesnetli olarak incelenmiştir. Bu metodla birleşik sistemin değişik mod şekilleri için doğal frekans değerleri elde edilmiştir. Tez kapsamında bu değerler elde edilirken kompozit malzemenin katman sayısı, fiber dizilimi, plakanın silindir içindeki yerleşimi ve kompozit malzeme türü değiştirilerek frekansın hangi durumlarda arttığı veya azaldığı incelenmiştir. Böylece değişik durumlarda plaka, kabuk ve birleşik yapının serbest titreşim davranışı gözlemlenmiştir.

Sonuçlar hem analitik olarak hem de paket programla çözülmüştür ve paket program olarak Patran ve Nastran yazılımları kullanılmıştır. Analitik sonuçlarla paket programla elde edilen sonuçlar arasındaki farkın çok fazla olmadığı görülmüştür. Analitik sonuçlar denklemler çözümlenirken matris yapının büyüklüğünden dolayı çözümde zorlanılmıştır. Sonuç olarak elde edilen doğal frekans değerleri karşılaştırılıp hangi durumlarda arttığı veya azaldığı yorumlanmıştır.

FREE VIBRATION OF LAYERED ORTHOTROPIC JOINTED RECTANGULAR PLATE AND CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL

SUMMARY

The subject of this study is to investigate the free vibration analysis of jointed orthotropic layered rectangular plate and circular cylindrical shell. First of all, the general about composite structures is discussed, and then mechanical properties are demonstrated. Different composite material types, and their advantages, disadvantages are mentioned. It is figured out that the characteristics of composite materials are same for different geometries, such as orthotropic layered rectangular plate and circular cylindrical shell. By the means of this specialty, free vibration analysis of a rectangular plate which has been simply supported by its four boundaries is successfully examined. Moreover, a circular cylindrical shell with two simply supported edges is investigated for free vibration analysis. The natural frequencies which have been obtained from all above, have been used for free vibration of jointed structures.

The receptance method has been applied for jointed free vibration calculations of orthotropic layered rectangular plate and circular cylindrical shell. The structure is simply supported as mentioned before. By this method, natural frequencies have been attained for different mode shapes. Number of layers and fiber orientation of composite, the location of plate in the cylinder and the types of composite material have been changed for realizing the effects on natural frequencies. Therefore, the free vibration of plate, shell and jointed structure are achieved for different conditions.

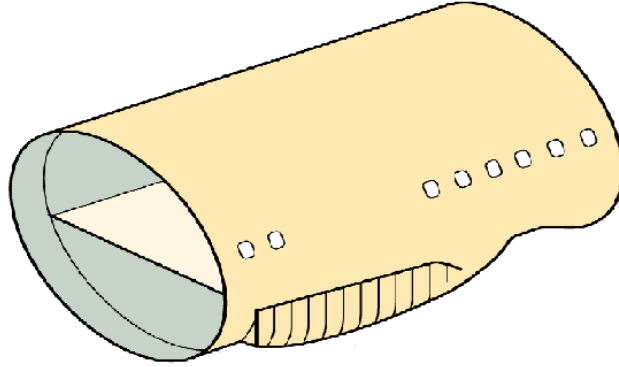
The results are interrogated for both analytic method and package programming method which is named Patran and Nastran. All obtained results from analytical studies have been compared with package programme and it is figured out that the distinction is very small. While analytical results are solved, it is seen that matrix equations are hard to solve enough. As a consequence, obtained results are compared to understand the reason of increase and decrease of natural frequency at different conditions.

1. GİRİŞ

Kompozit teknolojileri insanların ihtiyaçlarını karşılayabilmek için alternatif çözümler üreten en yenilikçi teknolojilerdendir. Günümüzde kompozit malzeme birçok sektörde kullanılmakta ve kullanım alanı giderek yaygınlaşmaktadır.

Kompozit malzemenin günümüzde kullanım alanı oldukça geniştir. Kompozit malzemenin kullanım alanları arasında uçak ve uzay sanayi, inşaat, otomotiv sanayi, denizcilik sanayi, sağlık, spor malzemeleri, müzik aletleri gibi çeşitli alanlar yer almaktadır.

Havacılık sanayide kompozitler gün geçtikçe daha geniş kullanım alanına sahip olmaktadır. Bu çalışmada, Şekil 1.1’de örnek olarak gösterilen uçağın silindirik gövdesiyle ortasında yer alan panelin, değişik durumlarda birlikte serbest titreşim analizi incelenmiştir.



Şekil 1.1 : Uçağın gövdesiyle ortasında yer alan panel

Özellikle referanslarda da belirtilen Lee Y., Choi M. ve Kim J.’ortak çalışması olan “Free vibrations of laminated composite cylindrical shells with an interior rectangular plate” makalesinden yararlanılmıştır.

Öncelikle genel olarak kompozit malzemeyi oluşturan fiber ve matris türlerinden kısaca bahsedilmiştir. Buradaki amaç analizini yapacağımız yapıda ne tür malzemelerin daha çok kullanılacağını ve ne tür fiber dizimlerinin yapılması gerektiğini pekiştirmektir. Yani bu sayede analizini yapacağımız yapıyı daha kolay

şekillendirebiliriz. Doğal frekans uçak gövdesi ve içindeki panel yerleşiminin tasarımı açısından çok büyük önem taşımaktadır. Silindirik kabuk ve dikdörtgen plaka aynı zamanda kompozit ise fiber dizilimi, katman yerleşimi gibi ekstra birçok özellik karşımıza çıkmaktadır. Bunun dışında anizotropik simetri türleri tanımlanmıştır ve yapılan hesaplamalarda ortotropik malzeme kullanılmıştır. Ortotropik malzeme kullanımı günümüzde özellikle havacılık sanayide oldukça yaygınlaşmıştır. Silindirik kabukla dikdörtgen plakanın serbest titreşimi ilk önce ayrı ayrı incelenmiştir, daha sonra ikisi birleştirilerek incelenmiştir. Dairesel silindirik kabukla dikdörtgen plakanın birleşik analizinde receptance metodu kullanılmıştır [14]. İkisinin birleşik serbest titreşim analizinde önceden her ikisi için de ayrı ayrı bulduğumuz doğal frekans değerleri kullanılmıştır. Bu analizde malzeme türü, geometrik özellikler, plakanın silindir içindeki yerleşimi ve fiber dizilimi değiştirilerek birleşik serbest titreşim analizinin daha iyi anlaşılması sağlanmıştır. Bu analizler hem analitik olarak, hem de sonlu elemanlar analiz programı yardımıyla çözülmüştür ve bulunan değerler karşılaştırılmıştır. Paket program olarak Patran(arayüz)-Nastran(analiz) programı kullanılmıştır. Bu doğrultuda elde edilen serbest titreşim karakteristikleri yorumlanacaktır.

2. KOMPOZİT MALZEMELER

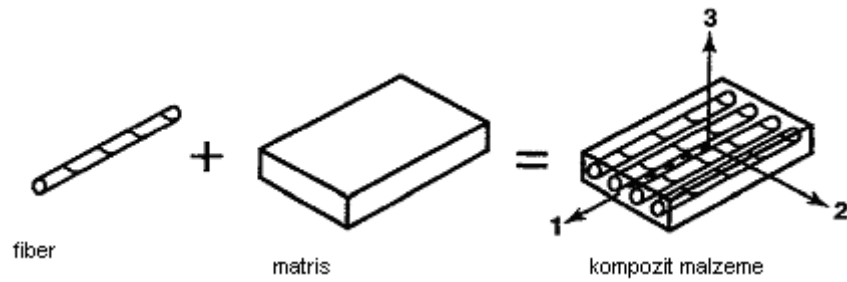
2.1 Kompozit Malzemeye Giriş

İki veya daha fazla farklı malzemenin daha üstün özelliklere sahip bir malzeme oluşturmak amacıyla makro seviyede bir araya gelmesiyle oluşan malzemeye kompozit malzeme denir.

Kompozit malzemenin birçok avantajı vardır bunlar; Hafiflik, düşük yoğunluk, yüksek mukavemet özelliği, kolay şekillendirilebilme, yüksek kimyasal özellikler, yüksek ısı dayanımı, korozyona dayanıklılık ve istenilen elektriksel özelliklerdir. Yine aynı şekilde dezavantajları da vardır. Bunlar;

1. Pahalı olması
2. Kırılgan özelliğe sahip olmaları
3. Sınırlı raf ömürleri

Kompozit malzemenin yapısında matris ve fiber olmak üzere iki temel madde bulunur. Şekil 2.1'de kompozit malzemenin yapısındaki fiber ve matris gösterilmiştir.



Şekil 2.1 : Kompozit malzeme

Kompozit malzemeler doğada da bulunur, buna örnek olarak ahşabı verebiliriz. Ahşabın yapısında fiber olarak selüloz, matris olarak da lignin bulunur. Başlıca fiber ve matris türlerinden ileride daha detaylı olarak bahsedilecektir.

Kompozit malzemeyle ilgili araştırmaların başlatılmasında ve geliştirilmesinde üç önemli faktör vardır, üreticinin talebi doğrultusunda daha az ağırlık, özellikle hava

uzay yapıları için yüksek rijitlik ve yüksek mukavemet özelliğidir. Bu özellikler uçağın performansı açısından uçağın aeroelastik özelliklerini, aerodinamik yapısını, hasar toleransını olumlu yönde etkiler. Uçak gövdesinde birçok farklı malzeme bulunur; Tahta, bambu, alüminyum, diğer metaller ve kompozit gibi. Günümüzde en çok kullanılan malzeme alüminyum ve alaşımları, titanyum ve diğer kompozit malzemelerdir.

Kompozit yapı elde etmek metal yapı üretmekten çok daha karmaşık bir olaydır. Ayrıca işçilik fazla ve karmaşık olduğundan, pahalı üretim makinelerine ihtiyaç duyulduğundan dolayı kompozit malzemenin fiyatı diğer malzemelere oranla daha yüksektir. Mesela alüminyumun üretimi ve onarımı kolaydır. Küçük bir araba kazasında metal yeniden eski şekline döndürülebilir, ama cam fiber bir yapının böyle bir durumda tamamen değiştirilmesi gerekir. Kompozitten yapılmış uçak gövdesinin mekanik özellikleri alüminyumdan yapılmış gövdeye göre daha üstündür. Alüminyum alaşımından yapılmış uçak iskeletinin en önemli dezavantajı korozyona direncinin az olmasıdır. Bu yüzden uçak sürekli kontrol edilmelidir. Bu problem kompozit malzeme kullanılarak ortadan kaldırılabilir. Kompozit malzemenin korozyona karşı direncinin yüksek olması bakım masrafını azaltır. Kompozit malzemenin birim fiyatı alüminyumun yaklaşık 2 ile 5 katı arasındadır.

Kompozitler korozyona karşı alüminyumdan daha dirençlidir. Kompozitler ışıktan oksitlendiği için mutlaka boyanmalıdır. Mekanik özelliklerdeki gelişmeler uçuş boyunca daha yüksek kabin basıncı yaratarak yolcuların rahat uçmasını sağlar. Uçak sanayide kompozit malzeme sadece uçağın ağırlığını azaltmak için kullanılmamıştır, bunun yanı sıra kompozit malzeme korozyona ve yorulmaya karşı dayanıklıdır. Bu yüzden kompozit kullanımının diğer bir avantajı yolcuların uçuş kalitesini artırmasıdır.

İlk olarak kompozit malzeme uçağın küçük kapısı, kontrol yüzeyleri ve uçağın kaplaması gibi ikinci dereceden önem arz eden bölgelerinde kullanılmıştır. Teknoloji ilerledikçe, kompozit malzeme uçağın kanat ve gövde gibi birinci dereceden önem arz eden bölgelerinde kullanılmaya başlanmıştır.

Geçmişte kompozitler birçok havacılık alanında kullanılmıştır, fakat gövdede birincil metal olarak kullanılmamıştır. Kısaca havacılıkta kullanılmış ve hala kullanılmakta olan kompozit malzemelerden bahsedelim.

İlk zamanlar havacılıktaki ilk uçaklarda tahta yapılar kullanılmıştır. Daha sonradan tahta yapıların yerini 1930'larda alüminyum almıştır. Günümüzde çoğu uçakların büyük kısmını hala alüminyum oluşturmaktadır. Kompozit malzemeler ilk olarak 1940'lı yıllarda havacılık sektöründe kullanılmaya başlanmıştır. Cam fiber 1950'li yıllarda ilk olarak Boeing 707 yolcu uçağında yüzde 2 oranında kullanılmıştır. Özellikle lifli yapıların bulunmasından sonra 1960'lı yıllarda daha da gelişmiş kompozit malzemeler uçak yapılarında kullanılmıştır. 1960'larda öncelikli olarak fiber, grafit ve epoksi rezin üzerinde durulmuştur.

Boron fiberin askeri havacılıktaki ilk önemli uygulaması Navy's F-14 Tomcat intercreator yatay stabilizörü üzerinde olmuştur. US hava kuvvetleri bu malzemeleri kullanarak eleron, rudder gibi uçak kontrol yüzeyleri oluşturmak için araştırmalar yapmıştır. İlk uçuşa elverişli kompozit yapı, F-111 yatay stabilizöründe kullanılmıştır. Daha sonra 1970'lerin başında kompozit stabilizörün F-14'de kullanılması kompozit malzemenin üretimi açısından dönüm noktası olmuştur. Bunu daha sonra sırasıyla F-15 kompozit stabilizörü, F-16 kompozit rudder ve stabilizörü izlemiştir. F15'de kompozit kullanımı yüzde 2 iken daha sonra bu oran F18'de yüzde 19, F22'de yüzde 24 olarak belirgin bir şekilde artmıştır. 1980'lerde hafif jet motorları üretmek için seramikler konusunda yoğunlaşmıştır. Daha sonradan havacılık alanında, malzemenin gevrek olmasından ve üretim zorluğundan dolayı seramiklere olan ilgi 1990'lara doğru azalmıştır. 1980'lerin başında Boeing 767'de yaklaşık iki ton kompozit malzeme kullanılmıştır. Boeing 777'nin yüzde 9'u kompozitten yapılmıştır. Airbus 310-300'lerde tüm kanatçık kutuları kompozitten yapılmıştır. 1981'de British Aerospace-McDonnell Douglas AV-8B Harrier yüzde 25'lik kompozit malzemeyle ilk uçuşunu gerçekleştirmiştir [5].

Karbonla güçlendirilmiş termoplastikler 1980'lerin sonunda keşfedilmiştir ve iniş takımı elevator gibi değişik yapılarda kullanılmıştır. Karbon fiberler birçok malzemeyle kullanabildikleri halde Boeing firması karbon fiberleri polyacrylonitrile ile kullanmıştır. Çünkü polyacrylonitrile karbon fiberler üstün özelliklere sahiptir. Bu karbon fiberler, kompozit malzeme üretmek için daha sonra diğer plastiklerle birleştirilmiştir. Polyacrylonitrile karbon fiberler, karbon fiberler arasında daha yüksek modüle ve çekme dayanımına sahiptir.

1986'da Burt Rutan tarafından dizayn edilmiş tamamen kompozitten yapılmış olan Voyager durmaksızın dünya turu yaparak bir rekora imza atmıştır. Kompozit malzemenin kullanımı böylece diğer alanlara da sıçramıştır.

Kompozit malzemenin ticari nakliye uçaklarındaki ilk önemli kullanımı 1983 yılında Avrupa'da gerçekleşmiştir. Dasa, Airbus A300 ve A310 için tüm rudderlarda kompozit malzeme kullanmıştır. Metal dikey kuyruk yaklaşık 2000 parçaya sahipken kompozit dikey kuyruğun 100'den az parçası bulunmaktaydı. Sonuç olarak sadece ağırlığın az olmasından yararlanılmamıştır, parça sayısının azalması aynı zamanda montajı azaltarak maliyeti de düşürmüştür. A300'deki dikey stabilizörün ve A310'daki elevatörün kompozitten yapılması ağırlık ve maliyeti azaltmıştır. Bu etkileyici sonuçtan sonra Airbus, A320'nin tüm kuyruğunda, gövdesinde, motor kaputunda, eleronda, dikey kuyrukta ve spoilerlarda kompozit malzeme kullanmıştır. A310 birincil kompozit yapıya sahip sertifikalı ilk uçaktır.

Ticari nakliye uçaklarındaki en önemli kompozit malzeme kullanımı Boeing 777'de gerçekleşmiştir. Boeing 777'nin yüzde 10'unu kompozit malzeme oluşturmaktadır. Buradaki amaç yine ağırlığı azaltmak ve yorulma dayanımı arttırmaktır. Günümüzde Boeing 787 Dreamliner'in ağırlığının yarısını kompozit malzeme oluşturduğu tahmin edilmektedir. Yüzde 10'luk kullanımdan sonra yüzde 50'lik kullanıma geçişte hızlı bir artış görülmektedir. Bu sayede uçağın bakım masrafının diğer uçaklara oranla daha az olacağı düşünülmektedir. Tek sorun metalik yüzeylerdeki hasarın kompozitlere oranla daha kolay görülmesidir ve hasarın yorumlanmasıdır.

Havacılık yapılarında genelde plastikle güçlendirilmiş cam fiber, aramid fiber ve karbon fiber kullanılmaktadır. Bunlar genelde kirişlerde, panellerde, spoilerlarda, kanat hücum kenarı panellerinde, iniş takımı kapısında, flap kaplamasında ve flap erişim kapısında, motor kaportasında ve fin kutusunda kullanılır. Cam fiber kompozit 2.Dünya Savaşı'nda kullanılan ilk malzemedir. Cam fiberin kullanımından 20 yıl sonra boron ve karbon fiberler kullanılmaya başlanmıştır. Uçak sanayide cam fiberlerin düşük katılık özelliğinden ve polister rezinin zayıf dayanım ve katılığından dolayı bu malzeme kullanılmaya başlanmıştır. Epoksi gibi daha güçlü ve dayanıklı rezinlerin gelişmesi, cam kompozitlerin uçakta kullanımının artmasına yol açmıştır. 1960'larda E-camdan daha yüksek dayanımına sahip S2-camın bulunmasıyla birçok uçak yapısının ve komponentinin S-camdan oluşmasına neden olmuştur. S-cam yapılar genellikle diğer ticari uçaklarda kanat, gövde kaplamaları, rudder, elevatör,

hücum ve firar kenarı ve kanat panelleri gibi birçok değişik uygulamalarda kullanılmıştır. Cam epoksi paneller aynı zamanda birçok modern askeri uçaklarda örnek olarak B-2 bomber'da firar kenarında kullanılmıştır. E-cam veya kuvars fiberin kompozitlerdeki diğer bir genel uygulaması ticari ve savaç uçaklarındaki radomlarda, süpersonik uçaklarda ve füzelerin kanatlarındaki radomlarda olmuştur. Bunun nedeni camın radar sinyallerine karşı mükemmel bir transparan özelliğine sahip olmasıdır. Cam epoksi yapılar genellikle ana ve kuyruk rotor pala sparları ve gövde panelleri gibi helikopter komponentlerinde kullanılmıştır. Cam fiberler aynı zamanda karbon ve kevlar fiberlerle birlikte hibrid kompozitlerde kanat gövde kaplamaları, motor pilon kaplamaları ve motor kaportası gibi değişik uçak komponentlerinde oldukça fazla kullanılmaktadır.

Kompozit malzemenin sağladığı birçok avantaja rağmen uçak yapılarındaki uygulaması öngörülen süreden daha uzun olmuştur. Bunun sebebi yüksek ücretli sertifika ve yüksek üretim maliyetidir. Önümüzdeki yıllarda geniş gövdeli uçaklardaki kompozit kullanımı daha da fazla artacağı ve üreticilerin kompozit üretim maliyetini daha çok düşürmenin yolunu bulacağı tahmin edilmektedir.

2.2 Fiberler

Fiberler yapının mukavemetini ve yük taşıma özelliğini sağlayan elemanlardır. Fiberler yüksek mukavemet özelliği gösterirler, yoğunlukları düşüktür.

Fiber malzemenin kompozit malzeme içindeki yerleştirilme açısı, uzunluğu ve türü kompozit malzemenin özelliklerini değiştirmektedir.

Fiberlerin genel olarak şimdiye kadar hangi uçak uzay yapılarında kullanıldığından ve fiberlerin temel özelliklerinden bir önceki bölümde bahsedilmiştir.

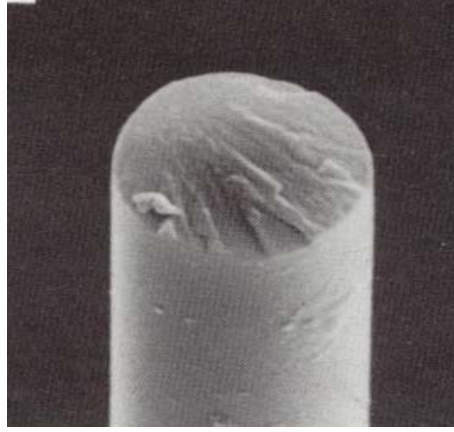
Fiberler genel olarak cam, karbon, boron ve aramid fiber olmak üzere dörde ayrılır. Bu sınıflandırma daha da arttırılabilir.

2.2.1 Cam fiber

Cam yapı çeşitleri uçak ve helikopter parçaları için oldukça uygun yapılardır. 1960'ların başından itibaren yüksek mukavemetli cam fiberler, basınç tankları ve roket korumaları gibi talep gören yapısal uygulamalarda kullanılmaktadır. Cam fiberler yüksek performanslı yapısal uygulamalarda kullanıldığı gibi düşük

performanslı yapısal olmayan uygulamalarda da kullanılmaktadır. Uçaktaki yapısal uygulamalardaki kullanımları sınırlıdır, çünkü cam fiberler nispeten daha düşük katılığa sahiptir. Yine de kaplama gibi ikincil uçak yapılarında düşük maliyet özelliğiyle oldukça fazla kullanılmaktadır.

Cam fiberler, uygun dielektrik özelliğiyle elektromanyetik radyasyona geçirgenlik özelliği sağlayarak radom ve eleron gibi yapılarda geniş bir kullanıma sahiptir. Belirli şartlar altında cam fiberlerin yüzeyi neme karşı hassastır.



Şekil 2.2 : Cam fiber [7]

Yapısal uygulamalarda özellikle iki tip fiber kullanılır, bunlar “E” kalsiyum alumino borosilicate cam ve “S” magnezyum alumino silicate cam. E-cam fiber diğer cam fiberlere oranla daha yüksek elektriksel direnç gösterir ve dielektrik sabiti düşüktür. Ayrıca, E-cam düşük maliyetle çok iyi mekaniksel özelliklere sahiptir. S-cam fiber, E-cam fibere oranla daha yüksek oranda alumina içerir. Bu yüzden mukavemeti, elastisite modülü ve erime noktası E-cam fiberden daha yüksektir. E-cam ve S-cam fiberlere yakın özellikte olan yüksek silica ve quartz fiberler genellikle roket motorlarında ve elektrikli camlarda kullanılır. Yüksek silica fiberleri yüksek çözünürlük özelliğine sahip E-cam fiberden kimyasal olarak özütlenerek elde edilir. Quartz fiberleri ise mineral quartz rodlardan oksijen hidrojen veya lazer ısı kaynakları kullanılarak elde edilir. Quartz fiberler E-cam fiberlerle hemen hemen aynı mekanik özelliklere sahiptir, yalnızca daha yüksek erime noktasına sahiptirler.

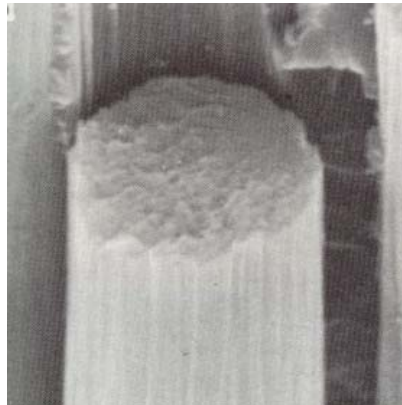
E-cam fiberin modifiye versiyonu olan ECR (E glass chemically resistant) gelişmiş kimyasal özelliklerin gerektiği yerlerde kullanılmaktadır. S-cam fiber ise yüksek mukavemet gerektiren yerlerde kullanılmaktadır. S-cam fiberler E-cam fiberlere göre yüksek sıcaklıklara karşı daha dayanıklıdır. Bu yüzden S-cam fiberler yapısal

uygulamalarda daha çok talep görmektedir. Özetle S-cam fiberin bu kadar popüler kullanıma sahip olmasının nedenleri şu şekildedir; yüksek üretim oranı, yüksek dayanım ve mukavemet, nispeten düşük yoğunluk, kimyasal direnç, ısıya dayanıklılık ve yanıcı olmama özelliğidir. Dezavantajları ise, yüksek maliyete sahip olması, nispeten düşük yorulma dayanımı ve karbon fiberlere oranla yüksek yoğunluktur. Katılık özelliğindeki az bir artış, maliyette yüksek bir artışa neden olur.

Cam fiberler yüzey hasarına karşı çok hassastırlar. Çünkü cam fiberler arasında sürtünme katsayısı bir bütündür. En kolay korunma yöntemi yağlamadır.

2.2.2 Karbon fiber

Karbon fiberler ilk olarak 19.yüzyılda Edison tarafından kullanılmıştır. Daha sonra kullanımı giderek artmıştır. Özellikle ikinci dünya savaşından sonra yapısal uygulamalarda karbon fiber kompozitler kullanılmıştır. Bu dönemde askeri uçak üreticileri var olan metallerin uçak tasarımlarındaki performansı kısıtladığını bulmuşlardır. Bunun üzerine 1950'lilerin başında birçok fiber çeşidi üretilmiştir. Öncelikli olarak karbon fiberlerin yerine cam fiberler kullanılmıştır. Bunun sebebi daha düşük ağırlığa sahip olması, kolay üretim tekniğinin olması ve maliyetinin düşük olmasıdır. Yine de belirli durumlarda cam fiberin kısıtlamalarının olduğu görülmüştür. Bu yüzden sonradan karbon fiberler kullanılmaya başlanmıştır. Günümüzde karbon fiberler daha çok üstün özellikleri sebebiyle uçak uzay uygulamalarında oldukça fazla tercih edilmektedir. Aşağıdaki şekilde karbon fiber gösterilmektedir.



Şekil 2.3 : Karbon fiber [7]

Karbon fiberler uçak gövdesinde, motorunda ve diğer havacılık uygulamalarında geniş bir kullanım alanına sahiptir. Bunun temel sebepleri yüksek modül, yüksek mukavemet ve iyi elektriksel iletkenliğe sahip olmalarıdır. Dezavantaj olarak karbon fiberin üretimi çok pahalıdır. Yine de karbon fiber geçtiğimiz yirmi yılda yapısal mühendisliğin en önemli kompozit malzemesi haline gelmiştir.

Bu fiberler kısa veya sürekli olabilir ve yapıları kristal, amorf veya kısmen kristal olabilir. Tabakalar arasındaki kuvvet Van Der Waals kuvveti, karbon katmanların birbiri üzerinde kaymasına neden olur. Genel yapıları amorf ve izotropik, düşük gerilme mukavemeti, düşük gerilme modülü ve düşük maliyettir. Daha yüksek performans nispeten daha yüksek mukavemet ve modülle sağlanmaktadır. Yüksek modüllü olmaları karbon fiberin yüksek oranda grafit içermesiyle ve anizotropiyle orantılıdır. Ticari karbon fiberler iki şekilde üretilir, bunlar pitch ve polycrylontrile prekürsör yöntemidir.

2.2.3 Boron fiber

Boron fiberler, gelişmiş havacılık yapılarında düşük yoğunluklu ve yüksek mukavemet özelliğine sahip ilk sürekli gelişmiş kompozit malzemedir. Boron fiberlerin tek lifi yaklaşık 125-149 mikrometre çapındayken, karbon fiberin tek lifi yaklaşık 10 mikrometredir. Boron fiber üretimi gevrek malzeme olmasından dolayı zordur, bu yüzden havacılık yapılarında çok daha ucuz olan karbon fiberler boron fiberlerin yerine kullanılmaktadır. Boron fiberin pahalı olması uçak uzay sanayideki kullanımını kısıtlamaktadır. Boron bir elmas kadar serttir. Karbon fiberler düşük maliyete sahip olduklarından ve daha kolay şekillendirilebilmelerinden dolayı havacılık uygulamalarında boron fiberlerin yerini almıştır.

Boron fiberler F-111 yatay stabilizöründe 1960'ların sonunda kullanılmıştır. US uzay mekiği alüminyum borularla güçlendirilmiş 200'den fazla boron fiberden oluşmuştur. Birçok US askeri uçağında özellikle F-14, F-15 ve B-1 uçaklarında önemli sayıda boron yapı kullanılmıştır. Boron fiberler tungsten ip veya karbon lif üzerinde çökerek kimyasal buhar oluşumu (CVD:chemical vapor deposition) ile meydana gelir. Cam reaktörde, atmosfer basıncında, 1000 derecenin üzerinde boron triklorürde hidrojen azalmasıyla tortu oluşur. Cam reaktörün yerine alternatif olarak boron, bromide, iodide veya fluoride kullanılabilir. Bu işlem oldukça yavaştır ve bu

yüzden pahalıdır. Karbon fiber üzerinde çöküntü ile oluşan boron fiberler daha düzdür, bunun sebebi karbon fiberlerin düzgün olmasından kaynaklanmaktadır.

Boron fiberler kimyasal veya ısıl işlemlerle, oksidasyon direncini geliştirmek için yapılan kaplamalarla sık sık iyileştirilir ve bu sayede metal matrislerle daha uyumlu olurlar. Kimyasal iyileştirmenin amacı yüzey kusurlarını ortadan kaldırmaktır, oysaki ısıl iyileştirmenin amacı artık gerilmeleri ortadan kaldırmaktır.

2.2.4 Silikon karbür fiber

Yüksek sıcaklıklarda kullanılan en önemli fiberlerden biri silikon fiberlerdir. Her ne kadar 1200 derece üzerinde çekme mukavemeti ve elastik modül özelliklerinde bozulma gösterebilirler de, yüksek mukavemet ve yüksek elastik modüle sahiptir. Karbon fiberlere oranla bazı alanlarda kullanım avantajları vardır. Yüksek sıcaklıklarda yüksek dirence sahiptirler, ayrıca üstün basma mukavemetine ve yüksek elektrik direncine sahiptirler. Fakat sürekli fiber formunda olmamaları bir dezavantajdır.

Silikon fiberlerin üretim yöntemleri boron fiberlerinkine benzemektedir. Silikon fiberler de boron fiberler gibi CVD yöntemiyle veya başka yöntemlerle üretilirler. En yüksek mukavemet ve kimyasal özelliklere sahip fiberler CVD yöntemiyle elde edilir. Böylece bu fiberler alüminyum ve titanyum alaşımlarını güçlendirmede kullanılır. CVD silikon karbür fiberler aynı zamanda seramikleri güçlendirmede kullanılır.

Alüminyum ve magnezyumla güçlendirilmiş silikon karbür fiberler gövde kanat gibi uçağın yapısal bölgelerinde, motor komponentlerinde ve uzay mekiğinin duvar malzemesinde kullanılmaktadır. Silikon fiberlerle ilgili testler, gelişmeler hala devam etmektedir.

2.2.5 Aramid fiber

Aramid fiberler ilk zamanlar üretim zorluğundan dolayı 1960'ların sonuna kadar ortaya çıkmamıştır. Gövde uygulamalarında yeterli katılık ve mukavemet özelliğiyle aramid fiberler ilk organik fiberlerdir, daha çok kevler olarak bilinmektedir. Kevler aramid fiberler önemli derecede cam fiberlerin dayanım ve katılık özelliğini arttırırlar. Polimer matris yapıları aramid fiberlerin yüksek derecede çekme mukavemet

özellikleri vardır, fakat aynı zamanda düşük basma mukavemet dayanımına sahiptirler. Bu da sanayideki kullanımını önemli ölçüde kısıtlamaktadır.

Aramid fiberlerin en önemli avantajı kırılma süresince önemli ölçüde enerji absorbe etmeleridir. Polimer matris yapıları aramid fiberler özellikle balistik koruma ve motor halkalarında kullanılır. Polimer matris yapıları aramid fiberlerin uçak uzay sanayideki en çok kullanım alanı uçak kaplamasıyla ilgilidir. Aynı zamanda yüzeylerde, yüzey saclarında veya balpeteği panellerinde de kullanılır. Ayrıca radomlarda ve diğer yapısal yeterlilik, uygun dielektrik özellik gerektiren yerlerde de kullanılmaktadır.



Şekil 2.4 : Kevler fiber [7]

Şekil 2.4’de kevler aramid gösterilmektedir. Aramid fiberlerin yüksek derecede nem absorbe etme özelliği vardır. İki tür aramid fiber vardır, bunlar para ve meta aramiddir. Meta aramidlerin yüksek sıcaklık dayanımı vardır. Termal dayanım ve alev dayanıklılık kullanım alanlarını arttırmaktadır. Kevler gibi para aramidler termal dayanımlı giysilerde, koruyucu can yeleklerinde kullanılır. Para aramid fiberler yüksek performanslı uygulamalarda kullanılır. İlk para aramidler 1965’de ortaya çıkmıştır.

Aramid fiberlerin diğer fiberlere oranla üstün özellikleri olduğu gibi dezavantajları da vardır. Para-aramidler mikro yapıda anizotropik özelliğe sahiptirler. Bu anizotropi bir açıdan hem avantaj sağlar, hem de bazı kısıtlamalara neden olur. Yüksek aromatik ve sıralı yapısal özelliklerinden dolayı yüksek termal dayanımları vardır. Para aramidler ayrışmadan önce kesinlikle erimezler ve teknik olarak termoplastik olarak adlandırılırlar. Para aramid fiberlerin uzun süreli kullanımdaki sıcaklık dayanımı 150 ile 750 derece arasındadır.

2.3 Matrisler

Matrisler, fiberlerle beraber kompozit yapıyı oluşturan kompozitin temel yapılarındandır. Bu kompozit yapıda matrislerin bazı görevleri vardır. Bunlar:

- 1-Yapıya gelen yükü homojen bir şekilde dağıtır,
- 2-Fiberlerden birinin hasarlı olması durumunda, fiberleri birbirinden ayırır,
- 3-Fiberleri çevresel etkenlere karşı korur,
- 4-Fiberlerin genel şeklini korur.

Havacılık uygulamaları için uygun gelişmiş kompozit malzemenin üretilmesinde, matrisin fiberle birleşme yöntemi önemli bir konudur, fiberlere hiçbir şekilde zarar vermemeli ve oryantasyonunu değiştirmemelidir. Bu duruma uygun yöntemlerden biri fibere düşük vizkoziteli bir sıvının sızdırılarak, sonrasında kimyasal reaksiyon veya soğuma yöntemiyle istenilen özelliklerde sürekli katı bir matris elde etmektir.

Polimer rezinin esas yapısını oluşturur ve iki çeşit polimer vardır, bunlar: termoplastik ve termoset matrislerdir.

2.3.1 Termoplastik matris

Termoplastikler genel olarak tercih edilmezler, üretim zorluğu ve yüksek maliyete esas nedenlerdir. Gene de termoplastik matris çeşitleri oldukça fazladır.

Termoplastik matrisleri termosetlerden ayıran en önemli özellik kristallilik derecesidir, oysaki termosetler amorfudur. Termoplastik matrislerin bazı avantajları, kısa işlem süresi, yeniden kullanılabilirlik, sonradan biçimlendirilebilme, sınırsız raf ömrü ve yüksek katlara ayrılma direncidir. Dezavantajları çözücülere karşı düşük direnç, (300-400 derece) yüksek sıcaklık ve işlem için basınç gerekliliği, düşük sürünme dayanımıdır. Termoplastik matrisler genel itibariyle reaktif olmayan, yüksek gerilme dayanımlı, yüksek kırılma enerjili, yüksek vizkoziteli, ters işlenebilirlik özelliğine ve nemi az absorbe edebilme özelliğine sahip, organik çözücülere karşı sınırlı dirençli matrislerdir.

2.3.2 Termoset matris

Termoset matrislerin avantajları nispeten düşük işlem sıcaklığı, karışık şekillere girebilme, sıvı rezin üretimine uygunluk ve sürünmeye dayanıklılıktır.

Dezavantajları ise uzun işlem süresi ve sınırlı raf ömrüdür. Genel özellikleri, kimyasal değişime uğramaları, düşük gerilme dayanımı, düşük kırılma enerjisi, tersinir işlem, düşük vizkozite özelliği, nemi absorbe edebilme ve çözücülere karşı yüksek dayanımdır.

Termosetlerin en büyük avantajı kompozit malzemelerin fabrikasyonunun nispeten düşük sıcaklık ve basınçlarda gerçekleşmesidir, çünkü düşük vizkozite aşamasına çapraz bağlantıdan önce geçerler. Termoset matrislerde uçak yapılarında en çok epoksi kullanılır. Epoksilerin düşük büzüşme ve fiberlere iyi yapışma özelliği gibi çok iyi kimyasal ve mekanik özellikleri vardır.

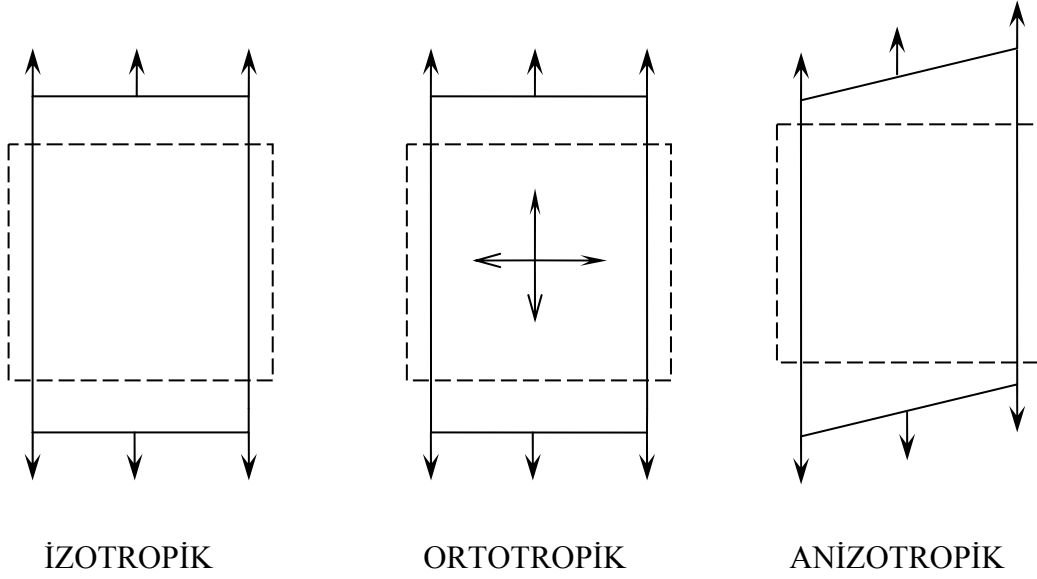
3. KOMPOZİT MALZEMELERİN MEKANİĞİ

3.1 Laminanın Makromekanik Davranışı

Lamina birçok fiberle matris malzemenin oluşumundan meydana gelen tek tabakalı kompozit malzeme anlamına gelir. Fiberler sürekli veya süreksiz olabilir. Süreksiz fiberlerle güçlendirilmiş laminalar daha düşük dayanıma ve modüle sahiptir. Bu bölümde laminanın makromekanik davranışı incelenecektir. Lamina sürekli ve lineer elastik bir malzeme gibi davrandığı kabulleri yapılır ve Hooke yasası uygulanır [15].

3.2 Anizotropik Malzemelerde Gerilme, Birim Uzama ve Yer Değiştirmeler

Eğer bir malzeme herhangi bir simetrik özellik içermiyorsa buna anizotropik malzeme denir. Anizotropik cisimlerin davranışı Hooke yasası ile açıklanır. Hooke yasasının izotropik cisimlerde tanımlanması anizotropik cisimlere göre daha basittir. Çünkü izotropik cisimlerde elastik özellikler yöne bağlı değildir. Örneğin anizotropik bir cisimde x eksenine yönünde yükleme olduğunda y ve z yönlerinde de deformasyon meydana gelir. Anizotropik malzemelerde simetri olmamasına rağmen bazı özel durumlarda simetriden dolayı katsayıların sayısı azalır. Kompozit malzeme genel olarak homojen değildir, izotropik malzeme gibi davranmaz. Kompozit malzemelerin çoğunluğu anizotropik davranış gösterir. Şekil 3.1'de bazı malzemelerin çekme durumundaki davranışı gösterilmektedir:



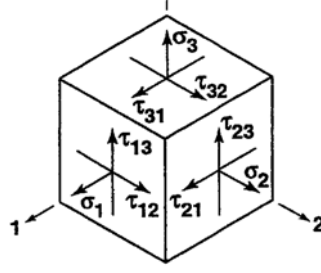
Şekil 3.1 : Bazı malzemelerin mekanik davranışı

3.2.1 Gerilme tensörü

Günümüzde birçok kompozit malzeme düzlem içi gerilmeye göre modellenir. İnce plaka ve kabuk için gerilme tanımlamalarında düzlem içi gerilme kullanılmıştır. Düzlem içi gerilmeye göre genellikle x-y düzlemi gerilme düzlemi olarak belirlenir. Bu yüzden z boyunca yükleme olduğunda eksen dışı yükleme olarak adlandırılır ve z eksenini boyunca dönme hareketi meydana gelir.

Elastik bir cisme etki eden kuvvetlerin dengede olduğunu düşünelim. Bu cisimde oluşan gerilmeleri tanımlamak için Şekil 3.2'deki gibi son derece küçük kübik bir hacim ele alırız ve kartezyan koordinat sistemine göre tanımlarız. Cismin belirli bir yüzeyindeki gerilmenin normal gerilme ve kayma gerilmesi olmak üzere iki bileşeni vardır. Gerilme tensörünü üç boyutlu olarak şu şekilde gösterebiliriz:

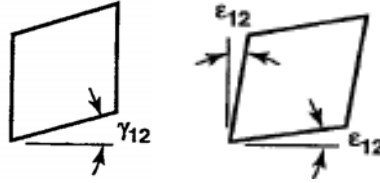
$$T_s = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{xy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.1)$$



Şekil 3.2: Kübik eleman üzerindeki gerilmeler

Burada σ_x , σ_y ve σ_z gerilmeleri x, y ve z eksenlerindeki normal gerilmeleri göstermektedir. τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} ve τ_{zy} ise kayma gerilmelerini göstermektedir. Gerilme tensörü simetriktir, bu yüzden:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{xz} = \tau_{zx} ; \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (3.2)$$



Şekil 3.3 : Kayma birim uzamaları

Kayma gerilmesi kayma boyunca oluşan toplam açığı göstermektedir. Açıdan kaynaklanan kayma birim uzamaları Şekil 3.3'te gösterilmiştir.

Gerilme tensörünü iki boyutlu olarak inceleyeceğiz, kabuk ve plakada z yönündeki yani kalınlığın olduğu eksenindeki gerilmeler çok küçük olduğundan ihmal edilir. Buna göre gerilme tensörünün iki boyutlu olarak gösterilişi şu şekildedir:

$$T_s = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

3.2.2 Birim uzama tensörü ve yer değiştirme

Elastik cisim belirli bir yükleme altında deformasyona uğrar, küçük çapta birim uzamalar meydana gelir. Birim uzama x, y ve z yönlerinde u, v ve w yer değiştirmeleriyle gösterilmiştir. ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z birim uzamaları lineerdir. yz, zx ve xy düzlemlerindeki γ_{yz} , γ_{zx} ve γ_{xy} açısal değişmeden kaynaklanan kayma birim uzamaları göstermektedir.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Birim uzama tensörünün herhangi bir noktadaki birim uzamayı tanımlamak için altı bağımsız bileşeni vardır.

$$T_D = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Birim uzama tensörü de gerilme tensörü gibi simetriktir.

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \tag{3.6}$$

3.3 Anizotropik Malzeme Çeşitleri

3.3.1 Triklirik simetri

Daha önceden de bahsedildiği gibi anizotropik cisimlerde simetri yoktur. Bu yüzden Hooke yasasına göre malzeme özelliğini belirten katılık ve esneklik matrisinde 21 adet bağımsız elastik sabit vardır. Triklirik cisimdeki gerilme birim uzama arasındaki ilişki şu şekilde verilebilir:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Katılık ve esneklik matrisleri C_{ij} ve S_{ij} , 36 sabit değere sahiptir. Katılık ve esneklik matrisi simetri özelliğinden dolayı sadece 21 adet bağımsız sabit içermektedir.

$$C_{ij} = C_{ji} \quad S_{ij} = S_{ji} \quad (3.9)$$

3.3.2 Monoklinik simetri

Elastik bir cisimde simetri olması durumunda katılık ve esneklik matrisinin sabitlerinin sayısı azalır. Herhangi bir düzlemde simetri olması durumunda katılık ve esneklik matrisi aşağıdaki gibi yazılır. Örneğin z yi simetri düzlemi olarak kabul edersek:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0 \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Katılık ve esneklik matrisleri 21 adet sabit içermektedir, bunların 13'ü bağımsız elastik sabittir.

3.3.3 Ortotropik simetri

Ortotropik simetri yüksek performansa sahip fiberlerle güçlendirilmiş lamina anlamına gelmektedir. Ortotropik malzemede birbirine dik olan üç simetri düzlemi

vardır. Simetri artıka katılık ve esneklik matrisindeki bağımsız sabit sayısı azalmaktadır.

Katılık ve esneklik matrisi 9 adet bağımsız sabit içerir. Katılık matrisinin yardımıyla gerilme birim uzama ilişkisi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Katılık matrisinde olduğu gibi esneklik matrisi, gerilme birim uzama ilişkisi denkleminde aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

3.3.4 Kesitsel izotropik simetri

Kesitsel olarak izotropi, kesit alanda elastik özelliklerin tüm yönlerde aynı olması anlamına gelmektedir. Buna göre katılık ve esneklik matrislerinin gerilme birim uzama denklemlerindeki yazılımı şu şekilde olacaktır:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Diğer simetrilere göre kesitsel izotropik simetride bağımsız elastik sabit sayısı simetriden dolayı daha da azalmaktadır. Bu tür malzemelerde 5 adet bağımsız elastik sabit vardır.

$$\begin{aligned} C_{22} &= C_{33}, & C_{12} &= C_{13} \\ C_{44} &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}), & C_{55} &= C_{66} \\ S_{22} &= S_{33}, & S_{12} &= S_{13} \\ S_{44} &= 2(S_{22} - S_{23}), & S_{55} &= S_{66} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Kesitsel izotropik simetri durumu oldukça önemlidir. Bu durum anizotropik fiberlerin ve tek yönde pekiştirilmiş kompozit malzemelerin elastik sabitlerini tanımlamada kullanılır. Bahsedilen malzeme türleri için izotropik düzlem fiberlerin eksenine dik olan düzlemdir.

3.3.5 İzotropik simetri

İzotropik malzemede sınırsız sayıda simetri düzlemi vardır. Malzeme özelliği sadece iki bağımsız sabite bağlıdır. Katılık ve esneklik matrisindeki bazı bileşenler birbirine eşittir.

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22} = C_{33} & C_{12} &= C_{13} = C_{23} \\ C_{44} &= C_{55} = C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \\ S_{11} &= S_{22} = S_{33} & S_{12} &= S_{13} = S_{23} \\ S_{44} &= S_{55} = S_{66} = 2(S_{11} - S_{12}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Katılık ve esneklik matrislerinin elemanları arasındaki ilişki denklem (3.17)'de verilmiştir.

İzotropik malzemenin birim uzama gerilme ilişkisi katılık ve esneklik matrislerinin yardımıyla aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Aynı şekilde gerilme-birim uzama ilişkisi esneklik matrisinin yardımıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Özetle, anizotropik simetri durumlarındaki katılık ve esneklik matrislerinin sabit sayıları Çizelge 3.1’de gösterilmiştir.

Çizelge 1.1 : Üç boyutlu malzeme simetrisinin özeti

Simetri durumu	Bağımsız sabitler	Eksende sıfır olmayan değerler	Eksen dışı sıfır olmayan değerler	Sıfır olmayan değerler
Triklinik	21	36	36	36
Monoklinik	13	20	36	36
Ortotropik	9	12	20	36
Kesit İzotropik	5	12	20	36
İzotropik	2	12	12	12

3.4 Mühendislik Sabitleri

Mühendislik sabiti olan elastik Young modülü E_{ij} , Poisson oranı ν_{ij} ve kayma modülü G_{ij} , tek eksenli çekme ve basma testi gibi basit testler sonucu ölçülmektedir. Mühendislik sabitleri genellikle gerilme birim uzama eğrisinin eğiminden çıkartılır.

$$E_1, E_2, E_3 = \text{Young modülü} \quad \nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31} = \text{Poisson oranı}$$

$$G_{12}, G_{23}, G_{31} = \text{Kayma modülü}$$

Denklem (3.20)'de üç yönde simetri eksenine sahip ortotropik bir malzeme için esneklik matrisi mühendislik sabitleriyle matris formunda gösterilmiştir.

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

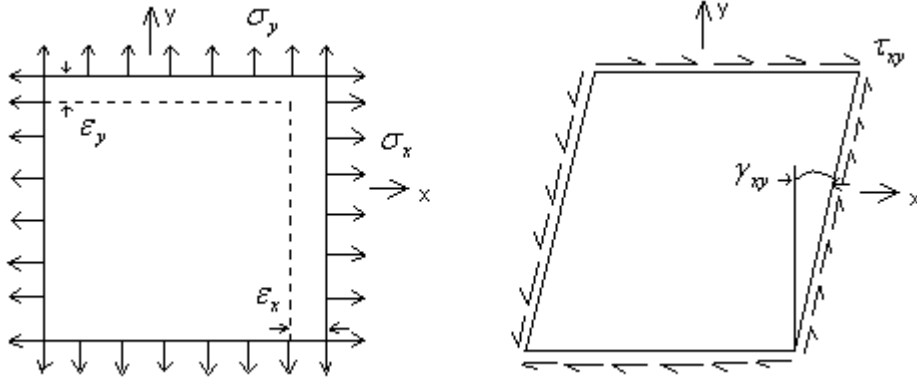
Diğer bölümlerde ortotropik plaka ve kabuğun titreşim analizini inceleyeceğimiz için sadece ortotropik simetrideki iki boyutlu gerilme durumu verilmiştir. Ortotropik bir malzemenin xy düzlemindeki gerilme-birim uzama ilişkisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

3.5 Dönüşüm Kuralları

Kompozit malzemenin oryantasyonu her zaman koordinat düzlemiyle çakışmayabilir. Koordinat düzlemiyle belirli bir açı yapabilir ve birden fazla değişik oryantasyon olabilir. x, y, z koordinat düzlemimiz olsun, x', y' ve z' yeni koordinat düzlemimiz olsun. y ile y' arasındaki dönme $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ olarak tanımlanır. İki koordinat arasında açı yardımıyla bir ilişki kurulur, böylece malzemenin koordinat düzlemindeki gerilme ve birim uzama değerleri esas koordinat düzlemine göre yeniden tanımlanır. Kısaca, bir koordinat düzlemindeki gerilme ve birim uzama değerlerinin diğer bir koordinat sistemine göre tanımlanmasına dönüşüm kuralı denir. Daha önceki bölümde üç boyuttaki gerilme birim uzama ilişkisini incelemiştik.

z yönünde kalınlık az olduğu için bu yöndeki deformasyonlar ihmal edilir. Şekil 3.4'te malzemenin xy düzlemindeki gerilme ve birim uzama davranışı gösterilmiştir.

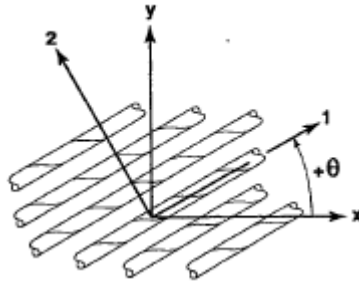


Şekil 3.4 : İki boyutlu düzlemde gerilme ve birim uzama

Buna göre ortotropik bir malzeme için x-y düzlemindeki gerilme ve birim uzama arasındaki ilişki şu şekilde yazılır.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Q_{ij} matrisi indirgenmiş katılık matrisi olarak tanımlanır.



Şekil 3.5 : Düzlem rotasyonu [4]

Dönüşüm kuralına göre iki boyutlu düzlemdeki gerilme ve birim uzama için J matrisi denklem (3.23)'de tanımlanmıştır. Bu matrisin tersi, transpozesi ve transpozесinin tersi aşağıdaki denklemlerle gösterilmiştir. Matrisler gerilme, birim uzama ve indirgenmiş katılık matrisinin yeni koordinat düzleminde dönüşümünde kullanılacaktır.

$$[J] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$[J^{-1}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$[J^T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$[J^T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Yeni koordinat sistemine J matrisiyle dönüştürülmüş gerilme, birim uzama ve indirgenmiş direnlik matrislerinde “ ‘ ” sembolü kullanılmıştır. Bu değerleri dönüşmemiş koordinat sistemi türünden ifade etmemiz gerekir. Buna göre dönüşmemiş gerilme bileşeni dönüşmüş gerilme bileşeni tarafından şu şekilde ifade edilir.

$$[\sigma'] = [J][\sigma] \quad (3.27)$$

$$[\sigma] = [J^{-1}][\sigma']$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \tau'_{12} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Aynı şekilde dönüşmemiş birim uzama bileşeni dönüşmüş birim uzama bileşeniyle denklem (3.30)'daki gibi ifade edilir.

$$[\varepsilon'] = [J^T]^{-1} \cdot [\varepsilon] \quad (3.29)$$

$$[\varepsilon] = [J^T][\varepsilon']$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \gamma'_{12} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Daha sonra indirgenmiş katılık matrisinin yeni koordinat düzlemindeki değerini ifade ederken yukarıdaki denklemlerden yararlanır. Buna göre;

$$[\sigma] = [Q][\varepsilon] \quad (3.31)$$

Denklem (3.31)'in her iki tarafını J matrisiyle çarpıyoruz.

$$(3.32)$$

Daha sonra denklem (3.32)'nin sol tarafını $[\sigma']$ matrisine eşitliyoruz.

$$[\sigma'] = [J][Q][\varepsilon] \quad (3.33)$$

Denklem (3.33)'ün sağ tarafındaki $[\varepsilon]$ matrisini aşağıdaki gibi yazıyoruz.

$$[\sigma'] = [J][Q][J^T][\varepsilon'] \quad (3.34)$$

$$[\sigma'] = [Q'][\varepsilon']$$

Sonuç olarak indirgenmiş katılık matrisi $[Q]$, dönüşmüş koordinat sisteminde $[Q']$ matrisi olarak ifade edilir.

$$[Q'] = [J][Q][J^T] \quad (3.35)$$

$$[Q'] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Yeni koordinat sisteminde ortotropik simetri olmadığından dönüşmüş indirgenmiş katılık matrisinde toplam 9 bileşen vardır.

$$[Q'] = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

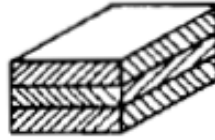
Yeni koordinat düzlemindeki indirgenmiş katılık matrisinin bileşenleri aşağıda yer almaktadır.

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (2Q_{66} + Q_{12} - Q_{22}) \cos \theta \sin^3 \theta \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta + (2Q_{66} + Q_{12} - Q_{22}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

3.6 Tabakalı Kompozit Malzemeler

3.6.1 Giriş

Tabakalı kompozit malzeme birden fazla laminanın değişik oryantasyonlarda üst üste gelmesiyle oluşur. Bu bölümde laminanın gerilme birim uzama denklemlerinden yararlanılarak tabakalı kompozitler için gerilme, birim uzama, deformasyon ilişkisi ve kuvvet moment denklemleri incelenmiştir. Tabakalı kompozit malzemeler yine aynı şekilde iki boyutta incelenecektir. Laminaların mükemmel bir şekilde birleştiği, bir laminanın bir diğer bir lamina üzerinde kaymadığı kabul edilir. Bu yüzden tabakalı kompozitler mekanik olarak lamina gibi davranırlar.



Şekil 3.6 : Tabakalı kompozit malzeme[8]

Tabakalı kompozit malzeme ince olması durumunda, cisim deforme olduğunda orta yüzeydeki düz ve orta yüzeye dik olan çizginin deformasyondan sonra yine kaldığı kabul edilir. Bu kabul orta yüzeye dik düzlem içi kayma gerilmesinin ihmal edilmesi anlamına gelir. Bu yüzden

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \tag{3.39}$$

z orta yüzeye dik olan kalınlığın değiştiği koordinattır. Ayrıca orta yüzeye dik olan birim uzama da ihmal edilir.

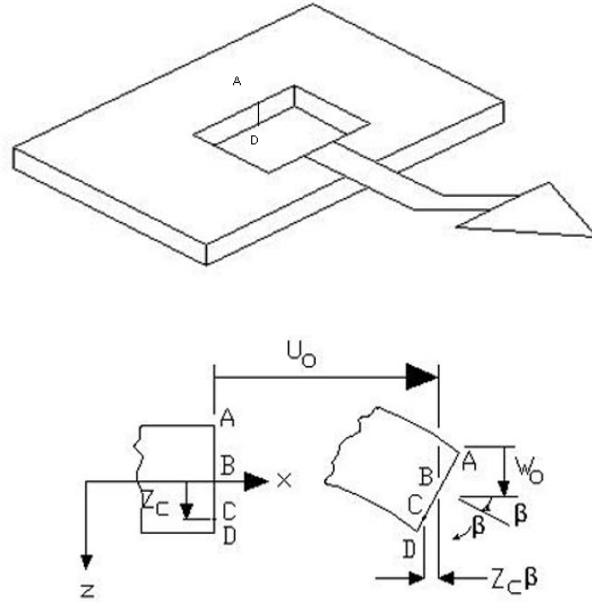
$$\varepsilon_z = 0 \tag{3.40}$$

3.6.2 Gerilme, birim uzama ve yer değiştirmeler

Tabakalı kompozitlerde x, y, z yönlerindeki yer değiştirmeler u, v ve w ile gösterilmiştir. Lamina için gerilme ve birim uzama arasındaki ilişki daha önceden verilmişti.

Tabakalı kompozitlerde k^{th} lamina için gerilme ve birim uzama ilişkisi incelenirken lamina denklemlerinden yararlanılır.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_k \quad (3.41)$$



şekil 3.7 : x-z kesitindeki deformatsyon geometrisi [5]

şekil 3.7'de x-z kesitinin deformatsyondan önceki sonraki hali gösterilmiştir. Buna göre B noktasının, deforme olmamiş orta yüzeyden deforme olmuş orta yüzeye olan x yönündeki yer değişimi u^0 ile gösterilmiştir. Üst indis "0" ifadesinin referans düzlemine göre olduğunu gösterir. ABCD çizgisi deformatsyon altında düz kalmaktadır. C noktasının deformatsyonu aşağıdaki gibi olur:

$$u_c = u_0 - z_c \beta \quad (3.42)$$

ABCD çizgisi orta yüzeye dik kalmaktadır ve β orta yüzeyin x yönündeki eğimidir:

$$\beta = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3.43)$$

Tabakalı kompozit bir malzemenin kalınlığı boyunca herhangi noktadaki u yer değiştirmesi denklem (3.44)'de gösterilmiştir:

$$u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3.44)$$

Aynı şekilde y yönündeki v yer değiştirmesi aşağıdaki gibi gösterilir.

$$v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3.45)$$

Denklem (3.4)'de lamina için birim uzama-yer değiştirme denklemleri verilmişti. u_0 , v_0 , w_0 tabakalı kompozitlerde orta düzlemdaki yer değiştirmeleri göstermektedir. Yukarıda yazılan yer değiştirmelerin tabakalı kompozitler için birim uzamayla olan ilişkisini yazacak olursak:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.46)$$

xz ve yz düzlemlerinde orta yüzey eğrilikleri aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad \text{ve} \quad \kappa_{xy} = -\frac{2\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (3.47)$$

Denklem (3.46) matris formunda denklem (3.48)'deki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Buna göre gerilme birim uzama arasındaki ilişki şu şekilde yazılır:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_k \quad (3.49)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix}_k \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \right\}$$

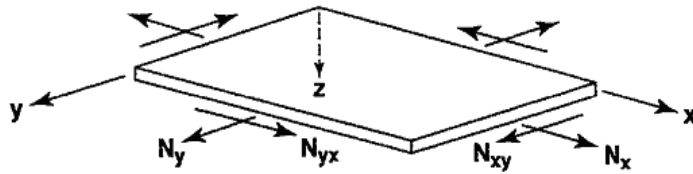
3.6.3 Kuvvet ve momentler denklemleri

Tabakalı kompozitlerin elastik davranışını tanımlamak için bunun üzerine etki eden kuvvet ve moment bileşenlerini tanımlamak gerekir. Tabakalı kompozitlere etkiyen kuvvet ve moment bileşenleri laminadaki gerilmenin kalınlık boyunca integrasyonun alınmasıyla bulunur.

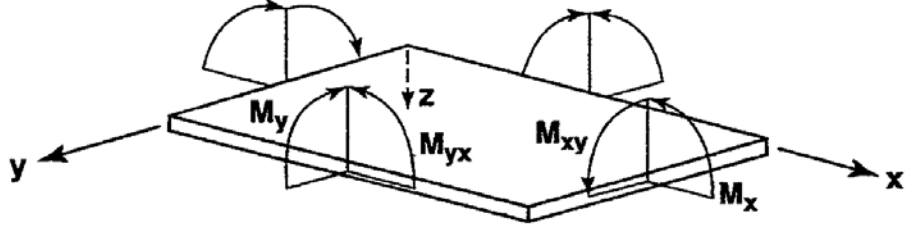
$h/2$ ve $-h/2$ orta düzleme göre ölçülen kalınlıklardır. Kalınlık boyunca laminaya etkiyen iç kuvvetler ve momentler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz & N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz & N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \\ M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz & M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \end{aligned} \quad (3.50)$$

Şekil 3.8 ve 3.9'da görüldüğü üzere N terimi, xy düzleminde birim uzunluktaki iç kuvvetleri, M ise xy düzleminde birim uzunluktaki momentleri temsil etmektedir.



Şekil 3.8 : Tabakalı kompozitlerde xy düzlemindeki kuvvetler



Şekil 3.9 : Tabakalı kompozitlerde xy düzlemindeki momentler

Tabakalı kompozitler için kuvvet ve moment denklemlerini matris şeklinde yazacak olursak:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (3.51)$$

Denklem (3.49)'un, denklem (3.51)'de yerine konmasıyla kuvvet ve moment ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \cdot z \right\} dz \quad (3.52)$$

Buradan kuvvet denklemini aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \cdot z dz \right\} \quad (3.53)$$

Sonuç olarak kuvvet denkleminin gerilmeyle olan ilişkisi denklem (3.54)'deki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

A_{ij} ve B_{ij} matrisleri malzeme özelliğinden kaynaklanan ifadelerdir. A_{ij} uzama katılık matrisini, B_{ij} burulma katılık matrisini göstermektedir. Kısaltma yapmak ve işlemleri kolaylaştırmak için bu şekilde yazılmıştır.

Yine aynı şekilde kuvvet denkleminde yapılan açılımları moment denklemi için de yapacak olursak moment denkleminde malzeme özelliğinden B_{ij} ve D_{ij} matrisleri gelir. D_{ij} eğilme katılık matrisini göstermektedir.

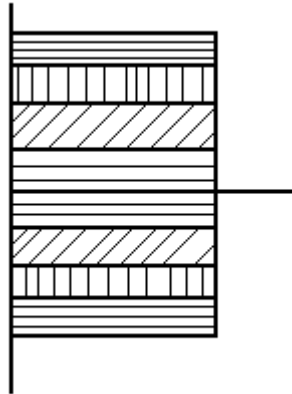
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \right\} z \cdot dz \\ \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \cdot z \cdot dz + \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \cdot z^2 \cdot dz \right\} \\ \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Yukarıda bulunan A, B ve D katılık matrislerinin dönüşmüş indirgenmiş katılık matrisleri cinsinden ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$i=j=1,2,3$$

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\overline{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\overline{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\overline{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Simetrik tabakalı kompozit plakalarda orta yüzeye göre geometri ve malzeme özellikleri simetriktir. Örnek olarak Şekil 3.10 gösterilebilir.



Şekil 3.10 : Tabakalı simetrik plaka

Simetri özelliğinden dolayı genel olarak bulduğumuz katılık matrisinde bazı elemanlar sıfır olacaktır.

$$A_{16} = A_{26} = 0 \quad (3.57)$$

Laminalar orta düzleme göre simetrik olarak yerleştirilmişse burulma matrisi yani B_{ij} matrisi sıfır olacaktır.

$$B_{ij} = 0 \quad i=j=1,2,6 \quad (3.58)$$

Simetrik kompozit malzemelerde kuvvet ve moment eşitlikleri aşağıdaki gibi ifade edilir. Bu ifadeler ortotropik dikdörtgen plaka ve silindirik kabuk hareket denklemlerinde kullanılacaktır.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

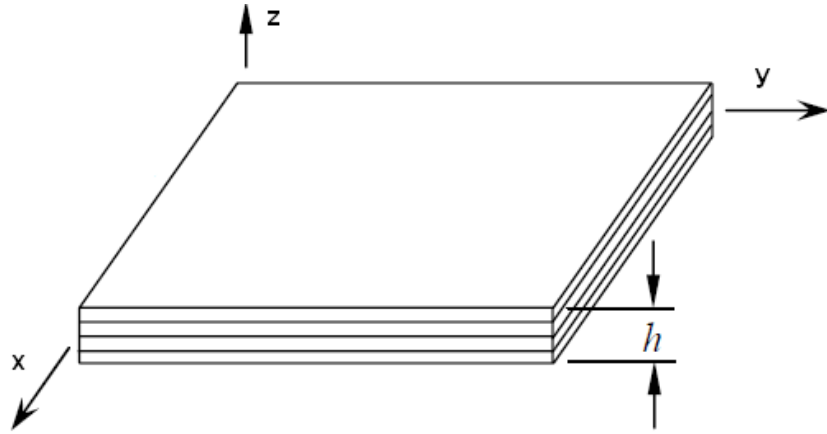
4. KOMPOZİT DİKDÖRTGEN BİR PLAKANIN SERBEST TİTREŞİMİ

4.1 Giriş

Plaka sıfır eğriliğe sahip bir kabuk gibi düşünülebilir. Bu bölümde dikdörtgen bir plakanın serbest titreşiminin analitik çözümü gösterilmiştir. Elde edilen doğal frekans değerleri daha sonra silindirik kabukla birlikte olan serbest titreşim analizinde kullanılacaktır.

Öncelikle plakanın ince olduğu kabulü yapılmıştır. Yani plakanın kalınlığı plakanın enine ve boyuna oranla çok daha azdır. Buna göre kayma deformasyonu ve dönme ataleti ihmal edilir. Plakanın geometrisine en uygun olan koordinat düzlemi kartezyen koordinat düzlemidir.

Şekil 4.1’de tabakalı dikdörtgen bir plakanın geometrisi kartezyen koordinat düzleminde gösterilmiştir. x yönünde uzunluk, y yönünde genişlik ve z yönünde kalınlık yer almaktadır.



Şekil 4.1 : Dikdörtgen plakanın geometrisi

Koordinat düzlemi seçiminde fiber oryantasyonu ve ortotropi de önemlidir. Fiberler plakada düz yerleştirilirse dikdörtgen ortotropi ortaya çıkar. Dikdörtgen ortotropi, kompozit malzemeler arasında üretim kolaylığından dolayı en yaygın kullanılan malzeme türlerinden biridir.

4.2 Kinematik Denklemler

Kinematik denklemlerde plaka ince kabul edildiği için kayma deformasyonu ihmal edilir.

$$\varepsilon_z = 0 \quad (4.1)$$

Düzlem içi yer değiştirmeler plakanın kalınlığı boyunca lineer olarak değişir. Buna göre birim uzamaya ilgili denklemler (4.2)'de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + h\kappa_x \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + h\kappa_y \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + h\kappa_{xy} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Orta düzlem boyunca birim uzamalar, eğrilik bileşenleri ve burulmaları yer değiştirme terimleriyle aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{v_0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial y} \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{u_0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{u_0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{v_0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \\ \kappa_x &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\psi_y}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial y} \\ \kappa_y &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\psi_x}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \\ \kappa_{xy} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\psi_x}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\psi_y}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \\ \psi_x &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \psi_y &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Burada A_1 ve A_2 Lamé parametreleri olarak tanımlanır. Bu parametreler plakanın kare, dikdörtgen veya başka bir geometriye sahip olması durumuna göre değişir.

Burada dikdörtgen bir plakayı inceleyeceğimiz için kartezyen koordinat sisteminde Lamé parametreleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$A_1 = A_2 = 1 \quad (4.4)$$

Lame parametreleri yukarıdaki (4.3) denklemlerinde yerine yazılır ve plaka için düzlem içi birim uzamalar ve eğrilikler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} & \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} & \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} & \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} & \kappa_{xy} &= -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (4.5)$$

4.3 Hareket Denklemleri

Plakada yükleme durumunda, gerilme değerleri genellikle bir noktadan bir noktaya değişir. Bu durum statik eşitlik denklemleriyle sağlanır. Plaka için hareket denklemleri kabaca şu şekilde yazılır.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y = I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \quad (4.7)$$

M_x ve M_y terimleri eğilme momentlerini, M_{xy} terimi ise burulma momentini göstermektedir.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p_z = I_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (4.8)$$

Burada p_x , p_y ve p_z plakaya etki eden yükü ifade eder. Serbest titreşim analizinde plakanın yüzeyine dışarıdan etkiyen bir kuvvet olmadığı için p_x , p_y ve p_z sifıra eşittir.

$$p_x = p_y = p_z = 0 \quad (4.9)$$

Denklem (4.6), (4.7) ve (4.8)'in sağ tarafında yer alan I_1 orta düzlemdeki birim alan başına düşen ortalama kütle yoğunluğunu ifade eder. $\rho^{(k)}$ terimi, k. laminanın birim hacim başına olan yoğunluğu ifade eder. Eğer lamina kalınlıkları birbirine eşitse, laminaların orta düzlemdeki birim alan başına düşen toplam ortalama kütle yoğunluğu denklem (4.10)'daki gibi yazılır.

$$I_1 = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} \cdot (h_k - h_{k-1}) \quad (4.10)$$

$$I_1 = \rho \cdot h$$

Daha sonra denklem (4.10), denklem (4.6), (4.7) ve (4.8)'de yerine yazılır.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\
\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \\
\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} &= \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

4.3.1 Kuvvet ve moment denklemleri

Kuvvet ve moment eşitliklerinde daha önce elde edilen birim uzamalar ve eğrilikler yerine yazılır. Kartezyen koordinatlardaki kuvvet ve moment bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
N_x &= A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} \\
N_y &= A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} \\
N_{xy} &= A_{66} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \\
M_x &= -D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
M_y &= -D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
M_{xy} &= -2D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Denklem (4.12), denklem (4.6), (4.7) ve (4.8)'de yerine konur. Ortotropik dikdörtgen bir plakanın hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$\begin{aligned}
A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) &= \rho h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\
A_{66} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} &= \rho h \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \\
-D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 2D_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{66} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} &= \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

4.3.2 Sınır şartları

Simetrik lamina dizilimine sahip ince dikdörtgen bir plaka için basit mesnetli, ankastre ve serbest olmak üzere değişik sınır şartları vardır. Biz bu bölümde dört kenarından basit mesnetli dikdörtgen bir plaka için sınır şartlarını inceleyeceğiz. Dört kenarından basit mesnetli olması analitik olarak hesaplamaları kolaylaştırmaktadır.

$$\begin{aligned} x=0, L_p \text{ için } v_0 = w_0 = M_x = N_x = 0 \\ y=0, a \text{ için } u_0 = w_0 = M_y = N_y = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Burada L_p terimi plakanın uzunluğunu, a terimi ise genişliğini göstermektedir. Bu eşitlikleri sağlayacak x , y , ve z yönlerindeki yer değiştirme fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$u_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \quad (4.15)$$

$$v_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \quad (4.16)$$

$$w_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \quad (4.17)$$

Sınır şartı çözümü sağlandıktan sonra, bu eşitlikler hareket denkleminde aşağıdaki gibi yerine konur.

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{m\pi}{L_p}\right)^2 A_{11} U_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \\ & -\frac{mn\pi^2}{a.L_p} A_{12} V_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \\ & -\frac{mn\pi^2}{a.L_p} A_{66} V_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 A_{66} U_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \\ & = -\rho.h\omega_{mn}^2 U_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \\ & -\left(\frac{m\pi}{L_p}\right)^2 A_{66} V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \\ & -\frac{mn\pi^2}{a.L_p} A_{66} U_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \\ & -\frac{mn\pi^2}{a.L_p} A_{12} U_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 A_{22} V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \\
& = -\rho h \omega_{mn}^2 V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \\
& -\left(\frac{m\pi}{L_p}\right)^4 D_{11} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \\
& -\frac{2mn\pi^2}{a.L_p} D_{12} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \\
& -4\frac{mn\pi^2}{a.L_p} D_{66} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \\
& -\frac{2mn\pi^2}{a.L_p} D_{12} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \\
& -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 D_{22} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \\
& = -\rho h \omega_{mn}^2 W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\cos\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \right) \left\{ -\left(\frac{m\pi}{L_p}\right)^2 A_{11} U_{mn} - \frac{mn\pi^2}{a.L_p} A_{12} V_{mn} \right. \\
& \left. - \frac{mn\pi^2}{a.L_p} A_{66} V_{mn} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 A_{66} U_{mn} + \rho.h\omega_{mn}^2 U_{mn} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \right) \left\{ -\left(\frac{m\pi}{L_p}\right)^2 A_{66} V_{mn} - \frac{mn\pi^2}{a.L_p} A_{66} U_{mn} \right. \\
& \left. - \frac{mn\pi^2}{a.L_p} A_{12} U_{mn} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 A_{22} V_{mn} + \rho.h\omega_{mn}^2 V_{mn} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \right) \left\{ -\left(\frac{m\pi}{L_p}\right)^4 D_{11} W_{mn} - \frac{2mn\pi^2}{a.L_p} D_{12} W_{mn} \right. \\
& \left. - 4\frac{mn\pi^2}{a.L_p} D_{66} W_{mn} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 D_{22} W_{mn} + \rho h \omega_{mn}^2 W_{mn} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Denklemlerin sağ tarafında yer alan sinus ve cosinus ifadeleri ortak paranteze alınır. Böylece denklemin sol tarafı sıfıra eşitlenir. Sinus ve cosinuslu ifadeler aşağıdaki durumda sıfıra eşit olamaz. Mod şeklini belirleyen değerler sıfırdan farklı olmalıdır.

$$n \neq 0$$

$$m \neq 0$$

$$\cos\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \neq 0 \tag{4.24}$$

$$\sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \neq 0 \quad (4.25)$$

$$\sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \neq 0 \quad (4.26)$$

Bu yüzden hareket denklemlerinde doğal frekansın da bulunduğu parantezler aşağıdaki gibi sifıra eşitlenir.

$$U_{mn} \left\{ -\left(\frac{m\pi}{L_p}\right)^2 A_{11} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 A_{66} + \rho h \omega_{mn}^2 \right\} + V_{mn} \left\{ -\frac{mn\pi^2}{a \cdot L_p} (A_{12} + A_{66}) \right\} = 0 \quad (4.27)$$

$$U_{mn} \left\{ -\frac{mn\pi^2}{a \cdot L_p} (A_{12} + A_{66}) \right\} + V_{mn} \left\{ -\left(\frac{m\pi}{L_p}\right)^2 A_{66} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 A_{22} + \rho h \omega_{mn}^2 \right\} = 0 \quad (4.28)$$

$$W_{mn} \left\{ -\left(\frac{m\pi}{L_p}\right)^4 D_{11} - \frac{2mn\pi^2}{a \cdot L_p} (D_{12} + 2D_{66}) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 D_{22} + \rho h \omega_{mn}^2 \right\} = 0 \quad (4.29)$$

Kısaltma yapacak olursak;

$$\alpha_p = \frac{m\pi}{L_p} \quad \beta_p = \frac{n\pi}{a} \quad (4.30)$$

4.4 Plakanın Serbest Titreşim Analizi

Hareket denklemlerindeki sadeleştirmelerden sonra aşağıdaki denklemler elde edilmiştir. Bu denklemlerde C_{ij} katsayıları aşağıdaki gibi yazılmıştır.

$$\begin{aligned} C_{11} &= -A_{11}\alpha_p^2 - A_{66}\beta_p^2 \\ C_{12} = C_{21} &= -A_{12}\alpha_p\beta_p - A_{66}\alpha_p\beta_p \\ C_{13} = C_{31} &= 0 \\ C_{22} &= -A_{66}\alpha_p^2 - A_{22}\beta_p^2 \\ C_{23} = C_{32} &= 0 \\ C_{33} &= -A_{11}\alpha_p^2 - A_{66}\beta_p^2 - D_{11}\alpha_p^4 - 2(D_{12} + 2D_{66})(\alpha_p\beta_p)^2 - D_{22}\beta_p^4 \\ \Delta &= \rho h \omega^2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

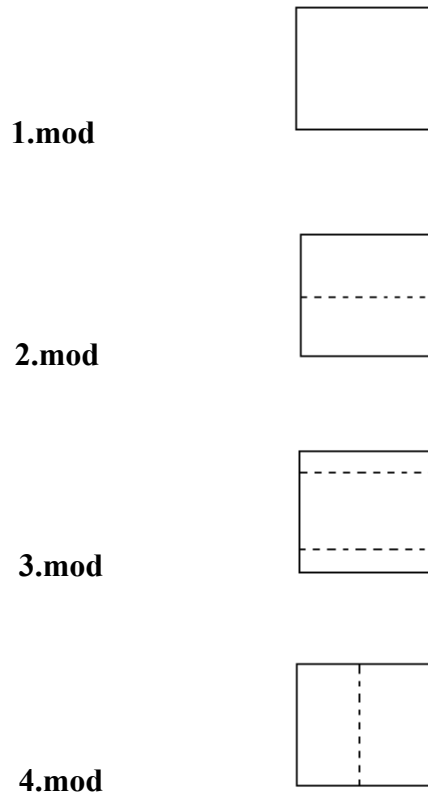
Hareket denklemleri son olarak aşağıdaki matris formuna getirilir. Serbest titreşim problemi için aşağıdaki matris elde edilir.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Problemi özdeğer özvektör problemine dönüştürmek için her taraf -1 ile çarpılır. Matrisin determinantını sıfır yapacak özdeğer ve özvektörleri bulunur ve değişik mod şekilleri için doğal frekans sonucu elde edilir.

$$\begin{bmatrix} C_{11} - \Delta & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} - \Delta & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} - \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Tabakalı ortotropik simetriye sahip dikdörtgen bir plakanın serbest titreşim probleminde $C_{13} = C_{32} = 0$ olduğu için matrisin son satırı sıfıra eşitlenerek denklem (4.35)'de direk olarak doğal frekans elde edilir.



Şekil 4.2 : Ortotropik bir plaka için mod şekilleri

Şekil 4.2'de dört kenarından basit mesnetli dikdörtgen plaka için ilk 4 mod şekilleri gösterilmiştir. Dikdörtgen plaka serbest titreşim analizinde harmonik hareket yapar. Mod şekilleri sınır şartına göre değişir.

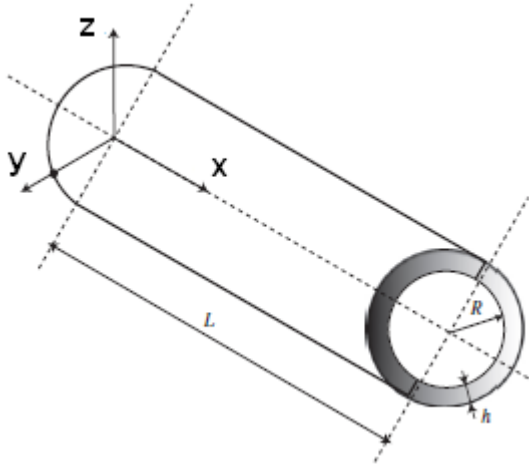
$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho h} \left(\left(\frac{m\pi}{L_p} \right)^4 D_{11} + \frac{2mn\pi^2}{a.L_p} (D_{12} + 2D_{66}) + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 D_{22} \right) \quad (4.34)$$

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{1}{\rho h} \left(\left(\frac{m\pi}{L_p} \right)^4 D_{11} + \frac{2mn\pi^2}{a.L_p} (D_{12} + 2D_{66}) + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 D_{22} \right)} \quad (4.35)$$

5. KOMPOZİT SİLİNDİRİK BİR KABUĞUN SERBEST TİTREŞİMİ

5.1 Giriş

Üç boyutlu birbirine yakın iki kıvrımlı yüzeyle sınırlandırılmış yapılara kabuk denir. Kabuklarda üç boyutlu elastisite denklemleri karmaşık denklemlerdir, bu yüzden özel uygulamalar için yapılan varsayımlardan yola çıkılarak denklemlerde bazı basitleştirmeler yapılmıştır. Hemen hemen tüm kabuk teorilerinde üç boyutlu elastisite problemi iki boyutlu probleme indirgenir. Genellikle kabuk yüzeyine normal yöndeki koordinat hesaplamalarda kullanılmaz. Şekil 5.1'de silindirik kabuğun geometrisi gösterilmiştir.



Şekil 5.1 : Silindirik kabuğun geometrisi

Silindirik kabuk için gerekli denklemleri çıkarmak için öncelikle kartezyen koordinat sistemindeki denklemleri silindirik koordinat sistemine göre yazmak gerekir.

x , θ ve z yönünde pozitif yöndeki u , v ve w yer değiştirmeleri yer alır. Kabuk yapıları arasındaki en basit geometri dairesel silindirik kabuktur.

İnce kabukların küçük çapta yer değiştirmeleriyle ilgili klasik teoride Love tarafından bazı kabuller yapılır. Yapılan kabullerle üç boyutlu elastisite denklemleri iki boyutlu denklemlere indirgenir.

1-Kabuğun kalınlığı, kabuğun diğer geometrik ölçülerine göre çok küçüktür. Bu yüzden kabuk ince olarak kabul edilir.

2- Kabukta gerilme ve yer değiştirmeler oldukça küçüktür. İkinci ve daha yüksek dereceden gerilme yer değiştirme denklemleri büyüklük olarak birinci dereceden olan denklemlere kıyasla daha küçüktür, bu yüzden ihmal edilebilir.

3-Kabuğun orta yüzeyine normal yöndeki gerilmeler ihmal edilebilir. Enine normal gerilmeler diğer normal gerilme bileşenlerine kıyasla daha küçüktür ve ihmal edilebilir.

4-Deformasyona uğramamış orta yüzeye dik olan bileşenler deformasyondan sonra da orta düzeye düz ve normal olarak kalır.

Love yaklaşımına göre enine kesme deformasyonu aşağıdaki durumda ihmal edilir.

$$\frac{h}{R} \ll 1$$

Aslında, kabuklarda doğru analiz sonuçları elde edebilmek için mutlaka enine kayma deformasyonu hesaba katılmalıdır. Bunun sebebi fiber yönündeki elastik modül fibere dayalı bir özellikken, enine kayma modülü matrise dayalı bir özelliktir. Sonuçları basitleştirmek için enine kayma deformasyonu ihmal edilebilir.

5.2 Kinematik Denklemler

Silindirik kabukta, kalınlığın yarıçapa ve uzunluğa oranla çok küçük olması denklemlerde bazı ihmallerin yapılabileceğini gösterir. Ayrıca denklemlerdeki kayma deformasyonu da ihmal edilir. Bu kabuller sonucu düzlem içi yer değiştirmeler kabuk kalınlığı boyunca aşağıdaki gibi lineer olarak değişir.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + h\kappa_x \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^0 + h\kappa_\theta \\ \gamma_{x\theta} &= \gamma_{x\theta}^0 + h\kappa_{x\theta}\end{aligned}\tag{5.1}$$

Orta düzlem boyunca birim uzamalar, eğrilik bileşenleri ve burulmaları yer değiştirme terimleriyle aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\varepsilon_x^0 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{v_0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{R \partial \theta} + \frac{w_0}{R_x}\tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta}^0 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial v_0}{R \partial \theta} + \frac{u_0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{w_0}{R_{\theta}} \\
\gamma_{x\theta}^0 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{u_0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{R \partial \theta} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_0}{R \partial \theta} - \frac{v_0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} + 2 \frac{w_0}{R_{x\theta}} \\
\kappa_x &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\psi_{\theta}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{R \partial \theta} \\
\kappa_{\theta} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_{\theta}}{R \partial \theta} + \frac{\psi_x}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \\
\kappa_{x\theta} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_{\theta}}{\partial x} - \frac{\psi_x}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{R \partial \theta} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_x}{R \partial \theta} - \frac{\psi_{\theta}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \\
\psi_x &= \frac{u_0}{R_x} + \frac{v_0}{R_{x\theta}} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
\psi_{\theta} &= \frac{u_0}{R_{\alpha\theta}} + \frac{v_0}{R_{\theta}} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{R \partial \theta}
\end{aligned}$$

Dairesel silindir tek sabit bir yarıçapa sahip olduğundan dolayı A_1 ve A_2 Lamé parametreleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
A_1 &= 1 \\
A_2 &= 1
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Lamé parametreleri denklem (5.2)'de yerine yazılır ve ortam düzlem için birim uzamalar ve eğrilikler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} & \varepsilon_{\theta}^0 &= \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{w_0}{R} & \gamma_{x\theta}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \\
\kappa_x &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} & \kappa_{\theta} &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} & \kappa_{x\theta} &= -\frac{2}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial x}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

5.3 Hareket Denklemleri

Dairesel silindirik kabuk için hareket denklemleri şu şekilde yazılır.

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \varepsilon_{\theta}^0 = \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{w_0}{R} \quad \gamma_{x\theta}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \tag{5.5}$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad \kappa_{\theta} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \quad \kappa_{x\theta} = -\frac{2}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + p_x = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{Q_{\theta}}{R} + p_{\theta} = I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{N_{\theta}}{R} + p_z = I_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_\theta &= 0\end{aligned}$$

Dikdörtgen plakada olduğu gibi silindirin serbest titreşim analizinde dışarıdan etkiyen bir kuvvet olmadığı için p_x , p_θ ve p_z sifıra eşittir.

$$p_x = p_\theta = p_z = 0 \quad (5.7)$$

Yine aynı şekilde eğer lamina kalınlıkları birbirine eşitse orta düzlemdeki birim alan başına düşen ortalama kütle yoğunluğu denklem (4.2)'deki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} &= \rho h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \right) &= \rho h \frac{\partial v_0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{N_\theta}{R} &= \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}\end{aligned} \quad (5.8)$$

5.3.1 Kuvvet ve moment denklemleri

Kuvvet ve momentin gerilmeyle olan ilişkisini silindirik kabuk için yazacak olursak:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{bmatrix} dz \quad \begin{bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{bmatrix} z dz \quad (5.9)$$

Daha önceden dikdörtgen plakada belirtildiği gibi kuvvet ve moment bileşenlerinin silindirik koordinatlarda gerilmeyle ve birim uzamayla olan ilişkisi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Kompozit malzeme özellikleri hem dikdörtgen plaka için hem dairesel silindirik kabuk için aynıdır.

Silindirik koordinatlardaki kuvvet ve moment bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur. Kuvvet ve moment eşitliklerinde birim uzamalar ve eğrilikler yerine yazılır.

$$\begin{aligned}
N_x &= A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + A_{12} \frac{w_0}{R} \\
N_\theta &= A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{A_{22}}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + A_{22} \frac{w_0}{R} \\
N_{x\theta} &= A_{66} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \\
M_x &= -D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{D_{12}}{R^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{D_{12}}{R^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \\
M_\theta &= -D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{D_{22}}{R^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{D_{22}}{R^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \\
M_{x\theta} &= \frac{D_{66}}{R} \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{2D_{66}}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Daha sonra moment ve kuvvet denklemleri hareket denklemlerinde yerine konur.

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{A_{66}}{R} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{A_{66}}{R^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} = \rho h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{A_{66}}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{A_{22}}{R^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} + \frac{A_{22}}{R^2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \frac{D_{66}}{R^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\
- \frac{2D_{66}}{R^2} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{D_{12}}{R^2} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{D_{22}}{R^4} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} - \frac{D_{22}}{R^4} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \theta^3} = \rho h \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
- D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{D_{12}}{R^2} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{2D_{12}}{R^2} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{2D_{66}}{R^2} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{4D_{66}}{R^2} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial \theta^2} \\
+ \frac{D_{22}}{R^4} \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta^3} - \frac{D_{22}}{R^4} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^4} - \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{A_{22}}{R^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - A_{22} \frac{w_0}{R^2} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

5.3.2 Sınır şartları

Eksenel yönde her iki ucundan basit mesnetli dairesel silindirik kabuk için sınır şartları şu şekildedir:

$$x=0, L_s \text{ için } v_0 = w_0 = M_x = N_x = 0 \tag{5.15}$$

L_s silindirik kabuğun uzunluğunu, R ifadesi ise yarıçapını göstermektedir. Bu eşitlikleri sağlayacak x , θ ve z yönündeki yer değiştirme fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. U_{mn} , V_{mn} ve W_{mn} mod şekillerini göstermektedir.

$$\begin{aligned}
u_0(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cdot \cos(n\theta) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \\
v_0(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cdot \sin(n\theta) \cdot \sin(\omega_{mn} t) \\
w_0(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cdot \cos(n\theta) \cdot \sin(\omega_{mn} t)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Silindirik kabuğun sınır şartı çözümü sağlandıktan sonra, yer değiştirme fonksiyonları denklem (5.12), (5.13) ve (5.14)'de yerine konur.

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{m\pi}{L_s}\right)^2 A_{11} U_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& + \frac{mn\pi}{RL_s} A_{12} V_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& + \frac{m\pi}{R.L_s} A_{12} W_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& + \frac{mn\pi}{R.L_s} A_{66} V_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& - \frac{n^2}{R^2} A_{66} U_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn} t)
\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
& = -\rho h \omega_{mn}^2 U_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& - \left(\frac{m\pi}{L_s}\right)^2 A_{66} V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \sin(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& + \frac{mn\pi}{RL_s} A_{66} U_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \sin(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& + \frac{mn\pi}{RL_s} A_{12} U_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \sin(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& - \frac{n^2}{R^2} A_{22} V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \sin(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& - \frac{n}{R^2} A_{22} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \sin(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& - \left(\frac{m\pi}{RL_s}\right)^2 D_{66} V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \sin(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& - 2\left(\frac{m\pi}{RL_s}\right)^2 n D_{66} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \sin(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& - \left(\frac{m\pi}{RL_s}\right)^2 n D_{12} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \sin(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& - \frac{n^2}{R^4} D_{22} V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \sin(n\theta) \sin(\omega_{mn} t)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{n^3}{R^4} D_{22} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \sin(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& = -\rho h \omega_{mn}^2 V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \sin(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& - D_{11} W_{mn} \left(\frac{m\pi}{L_s}\right)^4 \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) - \\
& - D_{12} V_{mn} \left(\frac{m\pi}{RL_s}\right)^2 n \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& - 2D_{12} W_{mn} \left(\frac{mn\pi}{RL_s}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& - 2D_{66} V_{mn} \left(\frac{m\pi}{RL_s}\right)^2 n \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& - 4D_{66} W_{mn} \left(\frac{mn\pi}{RL_s}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& - D_{22} \frac{n^3}{R^4} V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& - D_{22} \frac{n^4}{R^4} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& + A_{12} U_{mn} \frac{m\pi}{R.L_s} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& - \frac{n}{R^2} A_{22} V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& - \frac{A_{22}}{R^2} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \\
& = -\rho h \omega_{mn}^2 W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn} t)
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Denklemlerin sağ tarafında yer alan sinus ve cosinus ifadeleri ortak paranteze alınır. Böylece denklemin sol tarafı sıfıra eşitlenir.

$$\begin{aligned}
& \left(\sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \sin(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \right) \\
& \left\{ -A_{66} V_{mn} \left(\frac{m\pi}{L_s}\right)^2 + A_{66} U_{mn} \frac{mn\pi}{RL_s} + A_{12} U_{mn} \frac{mn\pi}{RL_s} - \frac{A_{22}}{R^2} V_{mn} n^2 \right. \\
& - A_{22} \frac{n}{R^2} W_{mn} - D_{66} V_{mn} \left(\frac{m\pi}{R.L_s}\right)^2 - 2D_{66} W_{mn} \left(\frac{m\pi}{R.L_s}\right)^2 n - D_{12} W_{mn} \left(\frac{m\pi}{RL_s}\right)^2 n \\
& \left. - D_{22} V_{mn} \frac{n^2}{R^4} - D_{22} W_{mn} \frac{n^3}{R^4} - \rho h \omega_{mn}^2 V_{mn} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\left(\sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn} t) \right) \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ -D_{11}W_{mn} \left(\frac{m\pi}{L_s}\right)^4 - \frac{D_{12}}{R^2}V_{mn} \left(\frac{m\pi}{L_s}\right)^2 n - 2D_{12}W_{mn} \left(\frac{mn\pi}{RL_s}\right)^2 \right. \\
& - 2D_{66}V_{mn} \left(\frac{m\pi}{RL_s}\right)^2 n - 4D_{66}W_{mn} \left(\frac{mn\pi}{RL_s}\right)^2 - \frac{n^3}{R^4}D_{22}V_{mn} \\
& - \frac{n^4}{R^4}D_{22}W_{mn} + A_{12}U_{mn} \frac{m\pi}{RL_s} - \frac{n}{R^2}A_{22}V_{mn} \\
& \left. - \frac{A_{22}}{R^2}W_{mn} - \rho h \omega_{mn}^2 W_{mn} \right\} = 0 \\
u_0(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{L_s}x\right) \cdot \cos(n\theta) \cdot \sin(\omega_{mn}t) \\
v_0(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s}x\right) \cdot \sin(n\theta) \cdot \sin(\omega_{mn}t) \\
w_0(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s}x\right) \cdot \cos(n\theta) \cdot \sin(\omega_{mn}t)
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Sinus ve cosinuslu ifadeler aşağıdaki durumda sıfıra eşit olamaz. Mod şeklini belirleyen değerler sıfırdan farklı olmalıdır.

$$\begin{aligned}
n &\neq 0 \\
m &\neq 0 \\
\cos\left(\frac{m\pi}{L_s}x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn}t) &\neq 0 \\
\sin\left(\frac{m\pi}{L_s}x\right) \sin(n\theta) \sin(\omega_{mn}t) &\neq 0 \\
\sin\left(\frac{m\pi}{L_s}x\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn}t) &\neq 0
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Dolayısıyla denklemde doğal frekansın da yer aldığı parantezler aşağıdaki gibi sıfıra eşitlenir.

$$\begin{aligned}
U_{mn} & \left\{ -A_{11} \left(\frac{m\pi}{L_s}\right)^2 - \frac{n^2}{R^2} A_{66} + \rho h \omega_{mn}^2 \right\} + V_{mn} \left\{ A_{12} \frac{mn\pi}{RL_s} + A_{66} \frac{mn\pi}{RL_s} \right\} \\
& + W_{mn} \left\{ A_{12} \frac{m\pi}{RL_s} \right\} = 0 \\
U_{mn} & \left\{ A_{66} \frac{mn\pi}{RL_s} + A_{12} \frac{mn\pi}{RL_s} \right\} \\
& + V_{mn} \left\{ -A_{66} \left(\frac{m\pi}{L_s}\right)^2 - \frac{n^2}{R^2} A_{22} - D_{66} \left(\frac{m\pi}{RL_s}\right)^2 - D_{22} \frac{n^2}{R^4} + \rho h \omega_{mn}^2 \right\} \\
& + W_{mn} \left\{ -\frac{n}{R^2} A_{22} - 2D_{66} \left(\frac{m\pi}{RL_s}\right)^2 n - D_{12} \left(\frac{m\pi}{RL_s}\right)^2 n - \frac{n^3}{R^4} D_{22} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
& U_{mn} \left\{ A_{12} \frac{m\pi}{RL_s} \right\} + \\
& V_{mn} \left\{ -D_{12} \left(\frac{m\pi}{RL_s} \right)^2 n - 2D_{66} \left(\frac{m\pi}{RL_s} \right)^2 n - \frac{n^3}{R^4} D_{22} - \frac{n}{R^2} A_{22} \right\} + \\
& W_{mn} \left\{ -D_{11} \left(\frac{m\pi}{L_s} \right)^4 - 2D_{12} \left(\frac{mn\pi}{RL_s} \right)^2 - 4D_{66} \left(\frac{mn\pi}{RL_s} \right)^2 - \frac{n^4}{R^4} D_{22} - \frac{A_{22}}{R^2} + \rho h \omega_{mn}^2 \right\} \\
& = 0
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Kısaltma yapacak olursak;

$$\begin{aligned}
\frac{m\pi}{L_s} &= \alpha_s & \frac{n}{R} &= \beta_s \\
\Delta &= \rho h \omega_{mn}^2
\end{aligned} \tag{5.27}$$

5.4 Kabuğun Serbest Titreşim Analizi

Dikdörtgen plakada olduğu gibi hareket denklemlerindeki sadeleştirmelerden sonra son olarak aşağıdaki denklemler elde edilmiştir. Bu denklemlerde C_{ij} katsayıları aşağıdaki gibi yazılmıştır.

$$\begin{aligned}
C_{11} &= -A_{11} \alpha_s^2 - A_{66} \beta_s^2 \\
C_{12} &= C_{21} = A_{12} \alpha_s \beta_s + A_{66} \alpha_s \beta_s \\
C_{13} &= \frac{A_{12}}{R} \alpha_s \\
C_{22} &= -A_{66} \alpha_s^2 - A_{22} \beta_s^2 - \frac{D_{66}}{R^2} \alpha_s^2 - \frac{D_{22}}{R^2} \beta_s^2 \\
C_{23} &= C_{32} = -\frac{A_{22}}{R} \beta_s - \frac{2D_{66}}{R} \alpha_s^2 \beta_s - \frac{D_{12}}{R} \alpha_s^2 \beta_s - \frac{D_{22}}{R} \beta_s^3 \\
C_{33} &= -D_{11} \alpha_s^4 - 2D_{12} (\alpha_s \beta_s)^2 - 4D_{66} (\alpha_s \beta_s)^2 - D_{22} \beta_s^4 - \frac{A_{22}}{R^2}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Hareket denklemleri son olarak aşağıdaki matris formuna getirilir. Serbest titreşim problemi için aşağıdaki matris elde edilir.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

Aşağıdaki matrisin determinantını sıfır yapacak özdeğer ve özvektörleri bulunur ve değişik mod şekilleri için doğal frekans sonucu elde edilir. Bunun için matrisin her tarafı -1 ile çarpılır.

$$\begin{bmatrix} C_{11} - \Delta & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} - \Delta & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} - \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

C_{ij} katsayılarından hiçbiri sıfıra eşit değildir. Bu yüzden dikdörtgen plaka olduğu gibi tek bir denklemden doğal frekans değerini elde edemeyiz. Doğal frekans değerini bulabilmek için matrisin determinantı sıfıra eşit olmalıdır, yani şu şekilde de gösterilebilir.

$$\Delta^3 - c_1 \Delta^2 + c_2 \Delta - c_3 = 0 \quad (5.31)$$

Denklemden yer alan c_1, c_2 ve c_3 katsayıları C_{ij} terimlerini içerir. Kısaltma amacıyla yazılmıştır.

6. KOMPOZİT PLAKA İLE KABUĞUN BİRLİKTE TİTREŞİMİ

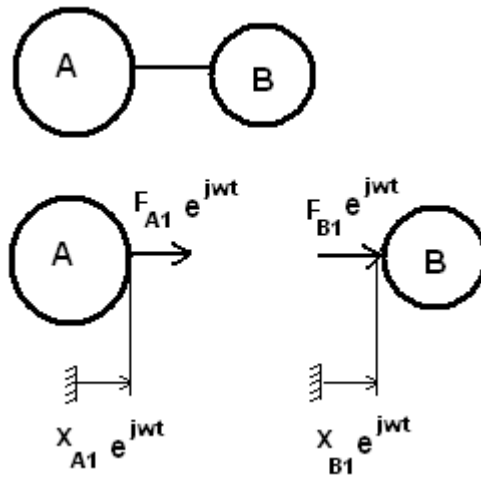
6.1 Receptance Metodu

Tabakalı ortotropik silindirik kabuk ile dikdörtgenel plakanın birlikte titreşim analizi analitik olarak receptance metodu yöntemiyle çözümlenmiştir. Birleşik sistemin özdeğerleri receptance metoduyla elde edilmiştir.

Öncelikle basitçe receptance, belirli bir noktadaki defleksiyon yanıtının aynı veya farklı bir noktadaki harmonik kuvvete veya momente oranına denir. Receptance metodunun avantajı bazı ifadeleri daha da basitleştirmesidir. Yani alt sistemlerin receptance değeri analitik veya numerik metolla sistemin birleşmesinden önce hesaplanabilmektedir. Çizgi receptance, bir doğru boyunca uygulanan sinüzoidal olarak dağılmış harmonik kuvvetin yanıtı olarak tanımlanır.

Örnek olarak A ve B yapılarını ele alalım. Bağlantı noktasındaki A sisteminin receptance değeri α_{11} olarak hesaplanır. Burada harmonik kuvvet aşağıdaki gibi yazılır. f_{A1} kuvvet değerini, F_{A1} ise kuvvetin genliğini gösterir.

$$f_{A1} = F_{A1} e^{j\omega t} \quad (6.1)$$



Şekil 6.1 : Birleşik iki sistemin yer değiştirmesi

Sönümsüz sistemin defleksiyon yanıtı yani yer değiştirmesi aşağıdaki gibidir. x_{A1} defleksiyon yanıtını, X_{A1} ise defleksiyon yanıtının genliğini gösterir.

$$x_{A1} = X_{A1} e^{j\omega t} \quad (6.2)$$

Sonuç olarak A sisteminin receptance ifadesi o noktadaki yer değiştirmenin kuvvete oranı şeklinde yazılır.

$$\alpha_{11} = \frac{x_{A1}}{f_{A1}} = \frac{X_{A1}}{F_{A1}} \quad (6.3)$$

B sisteminin receptance ifadesi de yine aynı şekilde denklem (6.4)'de gösterilmiştir.

$$\beta_{11} = \frac{x_{B1}}{f_{B1}} = \frac{X_{B1}}{F_{B1}} \quad (6.4)$$

A ve B sistemini birleştirdiğimizde, sisteme etkiyen kuvvetlerin toplamı sıfıra eşittir.

$$F_{A1} + F_{B1} = 0 \quad (6.5)$$

Buradan yola çıkarak A ve B sistemi birleştikten sonra sistemin doğal frekanslarının hesaplanmasında receptance ifadelerinin toplamı sıfıra eşittir.

$$\alpha_{11} + \beta_{11} = 0 \quad (6.6)$$

Bu eşitliği sağlayan frekans değerleri birleşik sistemin doğal frekanslarıdır. Sistemin yerdeğiştirme denklemleri yukarıda bahsedilen çizgi receptance metodu uygulanarak elde edilmiştir. Yer değiştirmeye denklemlerini elde ederken öncelikle kuvvet ve momentlerin hesaplanması gerekmektedir. Kuvvet ve momentleri hesaplamadan önce Love hareket denklemlerini yeniden kısaltılmış bir şekilde yazalım. Burada, q_i 1, 2, 3 yönünde uygulanan kuvvet fonksiyonunu göstermektedir.

$$\begin{aligned} L_1 \{u, v, w\} + q_1 &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ L_2 \{u, v, w\} + q_2 &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ L_3 \{u, v, w\} + q_3 &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Burada, q_i uygulanan kuvveti göstermektedir. Elastik sistem her noktada harmonik hareket yaptığından dolayı hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılır, böylece zamanı ayırmış oluruz.

$$u_i\{x, y, t\} = U_i(x, y)e^{j\omega t} \quad i=1,2,3 \quad (6.8)$$

6.2 Silindirik Kabuğun Receptance Fonksiyonları

Silindirik kabuk gibi sürekli sistemlerde serbestlik derecesi sonsuz sayıdadır. Bu yüzden kabuk yapılarındaki yer değiştirmenin sonsuz serilerdeki genel çözümü şu şekildedir.

$$\begin{aligned} u(x, \theta, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k U_k^s(x, \theta) \\ v(x, \theta, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k V_k^s(x, \theta) \\ w(x, \theta, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k W_k^s(x, \theta) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Denklemlerdeki η_k çarpanı modal paylaşım faktörü adı verilen bir katsayıyı gösterir. Modal titreşim sistemlerinde belirli bir mod direkt olarak modal paylaşım faktörüne dayanır. Denklem (6.9)'u denklem (6.7)'de yerine koyacak olursak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k L_1 \{U_k^s, V_k^s, W_k^s\} - \ddot{\eta}_k \rho h U_k^s &= q_1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k L_2 \{U_k^s, V_k^s, W_k^s\} - \ddot{\eta}_k \rho h V_k^s &= q_2 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k L_3 \{U_k^s, V_k^s, W_k^s\} - \ddot{\eta}_k \rho h W_k^s &= q_3 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Love denklemlerinin yükleme olmaması durumundaki ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} L_1 \{U_k^s, V_k^s, W_k^s\} &= -\rho h \omega_k^2 U_k \\ L_2 \{U_k^s, V_k^s, W_k^s\} &= -\rho h \omega_k^2 V_k \\ L_3 \{U_k^s, V_k^s, W_k^s\} &= -\rho h \omega_k^2 W_k \end{aligned} \quad (6.11)$$

Burada kuvvet fonksiyonları sıfıra eşit değildir. U_k^s , V_k^s ve W_k^s mod şekilleri ortogondur, sinus ve cosinus fonksiyonlarının ortaganellik özelliğinden yararlanır.

Bu yüzden denklem (6.10)'un her iki tarafını sırasıyla U_p^s , V_p^s ve W_p^s ile çarpalım.

Yer değiştirmeler iki değişik titreşim moduyla ifade edilir.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \rho h U_k^s U_p^s + \eta_k \rho h \omega_k^2 U_k^s U_p^s &= q_1 U_p^s \\ \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \rho h V_k^s V_p^s + \eta_k \rho h \omega_k^2 V_k^s V_p^s &= q_2 V_p^s \\ \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \rho h W_k^s W_p^s + \eta_k \rho h \omega_k^2 W_k^s W_p^s &= q_3 W_p^s \end{aligned} \quad (6.12)$$

$p=k$ olması durumunda denklem (6.10) ile denklem (6.12)'yi toplayıp, her iki tarafın silindirik alanına göre integralini alalım.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (\eta_k \rho h + \eta_k \rho h \omega_k^2) \int \int_{2\pi L_s} (U_k^s U_p^s + V_k^s V_p^s + W_k^s W_p^s) R dx d\theta \\ = \int \int_{2\pi L_s} (q_1 U_p^s + q_2 V_p^s + q_3 W_p^s) R dx d\theta \end{aligned} \quad (6.13)$$

Her tarafı ρh ifadesine bölersek:

$$\eta_k + \eta_k \omega_k^2 = \frac{1}{\rho h ((U_k^s)^2 + (V_k^s)^2 + (W_k^s)^2)} \int \int_{2\pi L_s} (q_1 U_p^s + q_2 V_p^s + q_3 W_p^s) R dx d\theta \quad (6.14)$$

Yukarıdaki denklemin sağ tarafındaki ifade kabuğa etkiyen kuvvet F_{mn}^s olarak tanımlanır. F_{mn}^s , birim uzunluk başına düşen kuvvet veya kuvvet genliği olarak da ifade edilebilir. Denklem çözümü için birim uzunluk başına düşen kuvvet, mod şekilleri ve doğal frekans değerleri bilinmelidir.

$$F_{mn}^s = \frac{1}{\rho h N_{mn}} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_s} (q_1 U_{mn}^s + q_2 V_{mn}^s + q_3 W_{mn}^s) R dx d\theta \quad (6.15)$$

Yine aynı şekilde N_{mn}^s nin açılımı şu şekilde yazılır.

$$N_{mn}^s = \int_0^{2\pi} \int_0^{L_s} ((U_{mn}^s)^2 + (V_{mn}^s)^2 + (W_{mn}^s)^2) R dx d\theta \quad (6.16)$$

Silindirik kabuk için öncelikle dairesel ve aksel yöndeki bileşenler ihmal edilerek W_{mn}^s mod şekli ele alınır. W_{mn}^s mod şekli daha önce belirtilmişti. Buna göre silindirik kabuk için denklemde W_{mn}^s mod şeklini yerine koyacak olursak:

$$N_{mn}^s = \int_0^{2\pi} \int_0^{L_s} \sin^2\left(\frac{m\pi}{L_s}x\right) \cos^2(n\theta) R dx d\theta$$

$$\sin^2\left(\frac{m\pi}{L_s}x\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2m\pi}{L_s}x\right)\right)$$

$$\cos^2(n\theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2n\theta))$$

$$N_{mn}^s = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_s} \left(1 - \cos\left(\frac{2m\pi}{L_s}x\right)\right) (1 + \cos(2n\theta)) R dx d\theta \quad (6.17)$$

$$N_{mn}^s = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_s} \left(1 + \cos(2n\theta) - \cos\left(\frac{2m\pi}{L_s}x\right) - \cos\left(\frac{2m\pi}{L_s}x\right) \cos(2n\theta)\right) R dx d\theta$$

$$N_{mn}^s = \frac{R}{4} \int_0^{2\pi} L_s d\theta + \frac{R}{4} \int_0^{2\pi} L_s \cos(2n\theta) d\theta - \frac{R}{4} \frac{L_s}{2m\pi} \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{2m\pi}{L_s}x\right) d\theta$$

$$- \frac{R}{4} \frac{L_s}{2m\pi} \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{2m\pi}{L_s}x\right) \cos(2n\theta) d\theta$$

$$N_{mn}^s = \frac{RL_s}{4} \theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{RL_s}{8n} \sin(2n\theta) \Big|_0^{2\pi} - \frac{RL_s}{8m\pi} \sin\left(\frac{2m\pi}{L_s}x\right) \theta \Big|_0^{2\pi}$$

$$- \frac{RL_s}{16mn\pi} \sin\left(\frac{2m\pi}{L_s}x\right) \sin(2n\theta) \Big|_0^{2\pi} \quad (6.18)$$

Silindirik kabuk için N_{mn}^s katsayısı aşağıdaki gibidir.

$$N_{mn}^s = \frac{\pi RL_s}{2} \quad (6.19)$$

Basit mesnetlenmiş silindirik kabuğun plakayla birleştiği θ_1 ve θ_2 noktalarındaki birim uzunluk başına düşen harmonik kuvvet F_i^s aşağıdaki gibi yazılır. Denklem sinüzoidaldir ve dirac delta fonksiyonunu içermektedir. q_3^s ifadesi, silindirik kabuğa bir doğru boyunca sinüzoidal olarak etki eden kuvvet fonksiyonunu gösterir.

$$q_3^s(x, \theta, t) = \frac{F_i^s}{R} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s}x\right) \delta(\theta - \theta_i) e^{j\omega t} \quad i=1,2 \quad (6.20)$$

Kuvvet genliği denklemindeki kuvvet fonksiyonu q_3^s , W_{mn}^s mod şekliyle beraber denkleminde yerine yazılır.

$$F_{mn}^s = \frac{1}{\rho h N_{mn}^s} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_s} \left(\frac{F_i^s}{R} \sin\left(\frac{m\pi}{L_s}x\right)\right)^2 \cos(n\theta) \delta(\theta - \theta_i) e^{j\omega t} R dx d\theta$$

$$F_{mn}^s = \frac{1}{2\rho h N_{mn}^s} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_s} \left(\frac{F_i^s}{R} \left(1 - \cos\left(\frac{2m\pi}{L_s}x\right)\right)\right) \cos(n\theta) \delta(\theta - \theta_i) e^{j\omega t} R dx d\theta \quad (6.21)$$

$$F_{mn}^s = \frac{1}{2\rho h N_{mn}^s} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_s} \left(\frac{F_i^s}{R} \left(\cos(n\theta) \delta(\theta - \theta_i^*) - \cos\left(\frac{2m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \delta(\theta - \theta_i^*) \right) \right) e^{j\omega t} R dx d\theta$$

$$F_{mn}^s = \frac{R L_s}{2\rho h N_{mn}^s} \int_0^{2\pi} \frac{F_i^s}{R} \cos(n\theta) \delta(\theta - \theta_i^*) e^{j\omega t} d\theta$$

$$F_{mn}^s = \frac{F_i^s L_s}{2\rho h N_{mn}^s} \cos(n\theta_i^*) \quad i=1,2 \quad (6.22)$$

Silindirik kabuğun plakayla birleştiği her iki tarafa da kuvvet etki etmektedir. Bu yüzden silindirik kabuğa etki eden kuvvet değerleri denklem (6.23)'de gösterilmiştir.

$$F_{mn}^s = \frac{F_1^s L_s}{2\rho h N_{mn}^s} \cos(n\theta_1^*) + \frac{F_2^s L_s}{2\rho h N_{mn}^s} \cos(n\theta_2^*) \quad (6.23)$$

Önceden elde edilen eşitliğin sağ tarafındaki ifade kısaltılmış bir şekilde yazılır. Daha sonra diferansiyel denklem çözümü yapılır ve kararlı durum için modal paylaşım faktörünün genel çözümü elde edilir.

$$\ddot{\eta}_{mn} + \eta_{mn} \omega_{mn}^2 = F_k e^{j\omega t}$$

$$\eta_{mn} = A e^{j\omega t}$$

$$\ddot{\eta}_{mn} = -\omega^2 A e^{j\omega t} \quad (6.24)$$

$$A = \frac{F_{mn} e^{j\omega t}}{\omega_{mn}^2 - \omega^2}$$

$$\eta_{mn} = \frac{F_{mn}}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} e^{j\omega t}$$

ω ifadesi birleşik sistemin doğal frekansını gösterir. Silindirik kabuk için sonsuz serilerdeki yer değiştirme denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$w^s(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{mn} W_{mn}^s(x, \theta) e^{j\omega t} \quad (6.25)$$

$$w^s(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{mn}}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} W_{mn}^s(x, \theta) e^{j\omega t}$$

Daha sonra F_{mn}^s birim uzunluk başına düşen kuvvet yukarıdaki denklemde yerine yazılır ve yer değiştirme denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$w^s(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \left(\frac{F_1^s L_s}{2\rho h N_{mn}^s} \cos(n\theta_1^*) + \frac{F_2^s L_s}{2\rho h N_{mn}^s} \cos(n\theta_2^*) \right) \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) e^{j\omega t} \quad (6.26)$$

Kabuğun dairesel yöndeki eğimi ψ_θ^s , yer değiştirme denkleminin açığa göre türevinin alınmasıyla bulunur.

$$\begin{aligned}\psi_\theta^s(x, \theta, t) &= \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \psi_\theta^s(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \left(\frac{F_1^s L_s}{2\rho h N_{mn}^s} \cos(n\theta_1^*) + \frac{F_2^s L_s}{2\rho h N_{mn}^s} \cos(n\theta_2^*) \right) \\ &\sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \sin(n\theta) e^{j\omega t}\end{aligned}\quad (6.27)$$

Silindirik kabuğun plakayla birleştiği yerlerde momentten kaynaklanan yer değiştirmeler de meydana gelir. Dinamik kuvvet fonksiyonu burada birim alan başına düşen T_θ^s momentini veya moment genliğini içermektedir.

$$F_{mn}^s = \frac{1}{\rho h N_{mn}^s} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_s} W_{mn} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial T_\theta^s}{\partial \theta} \right) R dx d\theta \quad (6.28)$$

Moment zamana bağlı olarak $\theta = \theta_1^*$ ve $\theta = \theta_2^*$ boyunca sinüzoidal olarak değişir.

$$T_\theta = m_i^*(x, \theta, t) = M_i^s \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \delta(\theta - \theta_i^*) e^{j\omega t} \quad (6.29)$$

Moment genliğini, momentten kaynaklanan kuvvet fonksiyonunda W_{mn}^s mod şekliyle beraber yerine koyarız.

$$\begin{aligned}F_{mn}^s &= \frac{1}{\rho h N_{mn}^s} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_s} M_i^s \sin^2\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \left(\frac{\partial(\delta(\theta - \theta_i^*))}{\partial \theta} \right) e^{j\omega t} dx d\theta \\ F_{mn}^s &= \frac{1}{2\rho h N_{mn}^s} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_s} M_i^s \left(1 - \cos\left(\frac{2m\pi}{L_s} x\right) \right) \cos(n\theta) \left(\frac{\partial(\delta(\theta - \theta_i^*))}{\partial \theta} \right) e^{j\omega t} dx d\theta \\ F_{mn}^s &= \frac{L_s}{2\rho h N_{mn}^s} \\ &\int_0^{2\pi} \left(M_i^s \cos(n\theta) \left(\frac{\partial(\delta(\theta - \theta_i^*))}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{2m\pi} \sin\left(\frac{2m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) \left(\frac{\partial(\delta(\theta - \theta_i^*))}{\partial \theta} \right) \right) \\ &e^{j\omega t} d\theta \\ F_{mn}^s &= \frac{1}{2\rho h N_{mn}^s} \int_0^{2\pi} L_s M_i^s \cos(n\theta) \left(\frac{\partial(\delta(\theta - \theta_i^*))}{\partial \theta} \right) e^{j\omega t} d\theta\end{aligned}\quad (6.30)$$

Dirac deltanın türevinin, aynı değişkene bağlı bir fonksiyonla çarpımının integrali denklem (6.31)'de özetle gösterilmiştir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \cdot f(t) \frac{d\delta(t-a)}{dt} = -\frac{df}{dt} \Big|_{t=a} \quad (6.31)$$

Buna göre kuvvet değeri denklem (6.32)'de aşağıdaki gibi yazılır.

$$F_{mn}^s = \frac{nL_s M_i^s \sin(n\theta_i^*)}{2\rho h N_{mn}^s} \quad i=1,2 \quad (6.32)$$

Önceki bağıntıda silindirik kabuğun plakayla birleştiği noktalarda sinüzoidal olarak oluşan moment fonksiyonu gösterilmiştir.

$$F_{mn}^s = \frac{nL_s M_1^s \sin(n\theta_1^*)}{2\rho h N_{mn}^s} + \frac{nL_s M_2^s \sin(n\theta_2^*)}{2\rho h N_{mn}^s} \quad (6.33)$$

Daha sonra F_{mn}^s kuvvet fonksiyonu yer değiştirme denkleminde yerine konur ve yer değiştirme denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$w^s(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{((\omega_{mn}^s)^2 - \omega^2)} \left(\frac{M_1^s L_s}{2\rho h N_{mn}^s} \sin(n\theta_1^*) + \frac{M_2^s L_s}{2\rho h N_{mn}^s} \sin(n\theta_2^*) \right) \quad (6.34)$$

$$\sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos(n\theta) e^{j\omega t}$$

Kabuğun dairesel yöndeki eğimi ψ^s , yer değiştirme denkleminin tetaya göre türevinin alınmasıyla bulunur.

$$\psi^s(x, \theta, t) = \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (6.35)$$

$$\psi^s(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2}{((\omega_{mn}^s)^2 - \omega^2)} \left(\frac{M_1^s L_s}{2\rho h N_{mn}^s} \sin(n\theta_1^*) + \frac{M_2^s L_s}{2\rho h N_{mn}^s} \sin(n\theta_2^*) \right)$$

$$\sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \sin(n\theta) e^{j\omega t}$$

Silindirik kabuğun plakayla birleştiği yerlerdeki silindirin defleksiyon yanıtı özetle aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\alpha_{(2i-1)(2j-1)} &= \frac{u_{3i}^s(x, \theta_i, t) \big|_{F_j}}{f_i^s} & \alpha_{(2i)(2j-1)} &= \frac{\psi_i^s(x, \theta_i, t) \big|_{F_j}}{f_i^s} \\
\alpha_{(2i-1)(2j)} &= \frac{u_{3i}^s(x, \theta_i, t) \big|_{M_j}}{m_i^s} & \alpha_{(2i)(2j)} &= \frac{\psi_i^s(x, \theta_i, t) \big|_{M_j}}{f_i^s} \quad i, j=1, 2
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Buna göre bağlantı noktasındaki dairesel silindirik kabuğun receptance ifadelerini tek tek yazacak olursak aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \frac{1}{R\pi\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta_1) \cos(n\theta_1)}{\left(\left(\omega_{mn}^s\right)^2 - \omega^2\right)} \\
\alpha_{13} &= \frac{1}{R\pi\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta_1) \cos(n\theta_2)}{\left(\left(\omega_{mn}^s\right)^2 - \omega^2\right)} \\
\alpha_{31} &= \frac{1}{R\pi\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta_1) \cos(n\theta_2)}{\left(\left(\omega_{mn}^s\right)^2 - \omega^2\right)} \\
\alpha_{33} &= \frac{1}{R\pi\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta_2) \cos(n\theta_2)}{\left(\left(\omega_{mn}^s\right)^2 - \omega^2\right)} \\
\alpha_{21} &= -\frac{n}{R\pi\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta_1) \sin(n\theta_1)}{\left(\left(\omega_{mn}^s\right)^2 - \omega^2\right)} \\
\alpha_{41} &= -\frac{n}{R\pi\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta_1) \sin(n\theta_2)}{\left(\left(\omega_{mn}^s\right)^2 - \omega^2\right)} \\
\alpha_{23} &= -\frac{n}{R\pi\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta_2) \sin(n\theta_1)}{\left(\left(\omega_{mn}^s\right)^2 - \omega^2\right)} \\
\alpha_{43} &= -\frac{n}{R\pi\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta_2) \sin(n\theta_2)}{\left(\left(\omega_{mn}^s\right)^2 - \omega^2\right)} \\
\alpha_{12} &= \frac{n}{R\pi\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta_1) \cos(n\theta_1)}{\left(\left(\omega_{mn}^s\right)^2 - \omega^2\right)} \\
\alpha_{32} &= \frac{n}{R\pi\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta_1) \cos(n\theta_2)}{\left(\left(\omega_{mn}^s\right)^2 - \omega^2\right)} \\
\alpha_{14} &= \frac{n}{R\pi\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta_2) \cos(n\theta_1)}{\left(\left(\omega_{mn}^s\right)^2 - \omega^2\right)} \\
\alpha_{34} &= \frac{n}{R\pi\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta_2) \cos(n\theta_2)}{\left(\left(\omega_{mn}^s\right)^2 - \omega^2\right)} \\
\alpha_{22} &= -\frac{n^2}{R\pi\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta_1) \sin(n\theta_1)}{\left(\left(\omega_{mn}^s\right)^2 - \omega^2\right)}
\end{aligned} \tag{6.37}$$

$$\alpha_{42} = -\frac{n^2}{R\pi\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta_1^*) \sin(n\theta_2^*)}{\left(\omega_{mn}^s\right)^2 - \omega^2}$$

$$\alpha_{11} = -\frac{n^2}{R\pi\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta_2^*) \sin(n\theta_1^*)}{\left(\omega_{mn}^s\right)^2 - \omega^2}$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{R\pi\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta_1^*) \cos(n\theta_1^*)}{\left(\omega_{mn}^s\right)^2 - \omega^2}$$

6.3 Dikdörtgen Plakanın Receptance Fonksiyonları

Silindirik kabuk için moment ve kuvvetten dolayı oluşan yer değiştirme ve eğim denklemlerini yukarıda çıkarmıştık. Aynı denklemler dikdörtgen plaka için de geçerlidir. Burada tek fark geometriden kaynaklanmaktadır. Dinamik kuvvet fonksiyonu yine aynı şekilde F_{mn}^p olarak tanımlandı.

$$F_{mn}^p = \frac{1}{\rho h N_{mn}} \int_0^a \int_0^{L_p} (q_1 U_{mn}^p + q_2 V_{mn}^p + q_3 W_{mn}^p). dx. dy \quad (6.38)$$

Dinamik kuvvet fonksiyonunda yer alan N_{mn} ifadesinin açılımı kartezyen koordinat düzlemi için şu şekilde yazılır.

$$N_{mn}^p = \int_0^a \int_0^{L_p} ((U_{mn}^p)^2 + (V_{mn}^p)^2 + (W_{mn}^p)^2). dx. dy \quad (6.39)$$

Buna göre plaka için N_{mn}^p denkleminde daha önceden bulunan V_{mn}^p mod şeklini yerine koyarız.

$$N_{mn}^p = \int_0^a \int_0^{L_p} \sin^2\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cdot \cos^2\left(\frac{n\pi}{a} y\right). dx. dy$$

$$\sin^2\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2m\pi}{L_p} x\right)\right) \quad (6.40)$$

$$\cos^2\left(\frac{n\pi}{a} y\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2n\pi}{a} y\right)\right)$$

$$N_{mn}^p = \frac{1}{4} \int_0^a \int_0^{L_p} \left(1 - \cos\left(\frac{2m\pi}{L_p} x\right)\right) \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{2n\pi}{a} y\right)\right). dx. dy$$

$$N_{mn}^p = \frac{1}{4} \int_0^a \int_0^{L_p} \left(1 + \cos\left(\frac{2n\pi}{a} y\right) - \cos\left(\frac{2m\pi}{L_p} x\right) - \cos\left(\frac{2m\pi}{L_p} x\right) \cos\left(\frac{2n\pi}{a} y\right)\right). dx. dy \quad (6.41)$$

$$N_{mn}^p = \frac{1}{4} \int_0^a L_p. dy + \frac{1}{4} \int_0^a L_p. \cos\left(\frac{2n\pi}{a} y\right) dy - \frac{L_p}{8m\pi} \int_0^a \sin\left(\frac{2m\pi}{L_p} x\right) dy$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{L_p}{8m\pi} \int_0^a \sin\left(\frac{2m\pi}{L_p}x\right) \cos\left(\frac{2n\pi}{a}y\right) dy \\
N_{mn}^p &= \frac{L_p}{4} y \Big|_0^a + \frac{aL_p}{8n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi}{a}y\right) \Big|_0^a - \frac{L_p}{8m\pi} \sin\left(\frac{2m\pi}{L_p}x\right) y \Big|_0^a \\
& - \frac{aL_p}{16mn\pi^2} \sin\left(\frac{2m\pi}{L_p}x\right) \sin\left(\frac{2n\pi}{a}y\right) \Big|_0^a \\
N_{mn}^p &= \frac{aL_p}{4} \tag{6.42}
\end{aligned}$$

Basit mesnetlenmiş silindirik kabuğun plakayla birleştiği y_1 ve y_2 noktalarındaki birim uzunluk başına düşen kuvvet aşağıdaki gibi yazılır. Denklem sinüzoidaldir ve dirac delta fonksiyonu yer almaktadır.

$$q_3^p(x, y, t) = \frac{F_i^p}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{L_p}x\right) \delta(y - y_i) e^{j\omega t} \quad i=1,2 \tag{6.43}$$

Kuvvet fonksiyonu denkleminde F_{mn}^p ifadesinin açılımında V_{mn}^p mod şekli yerine yazılır.

$$\begin{aligned}
F_{mn}^p &= \frac{1}{\rho h N_{mn}^p} \int_0^a \int_0^{L_p} \left(\frac{F_i^p}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{L_p}x\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \delta(y - y_i) e^{j\omega t} \right) dx dy \tag{6.44} \\
F_{mn}^p &= \frac{1}{2\rho h N_{mn}^p} \int_0^a \int_0^{L_p} \left(\frac{F_i^p}{a} \left(1 - \cos\left(\frac{2m\pi}{L_p}x\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \delta(y - y_i) e^{j\omega t} \right) dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{mn}^p &= \frac{1}{2\rho h N_{mn}^p} \\
& \int_0^a \int_0^{L_p} \left(\frac{F_i^p}{a} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \delta(y - y_i) - \cos\left(\frac{2m\pi}{L_p}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \delta(y - y_i) \right) \right) e^{j\omega t} dx dy \tag{6.45} \\
F_{mn}^p &= \frac{aL_p}{2\rho h N_{mn}^p} \int_0^{2\pi} \frac{F_i^p}{a} \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \delta(y - y_i) e^{j\omega t} dy
\end{aligned}$$

$$F_{mn}^p = \frac{F_i^p L_p}{2\rho h N_{mn}^p} \cos\left(\frac{n\pi}{a}y_i\right) \quad i=1,2$$

Plakanın silindirik kabukla birleştiği her iki tarafa da kuvvet etki etmektedir.

$$F_{mn}^p = \frac{F_1^s L_p}{2\rho h N_{mn}^p} \cos\left(\frac{n\pi}{a}y_1\right) - \frac{F_2^s L_p}{2\rho h N_{mn}^p} \cos\left(\frac{n\pi}{a}y_2\right) \tag{6.46}$$

Önceden modal paylaşım faktörünün genel çözümü elde edilmişti. Bulduğumuz sonucu aşağıdaki sonsuz serilerdeki enlemesine yer değiştirme denkleminde yerine koyarız.

$$v(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{mn} V_{mn}^p(x, y) e^{j\omega t} \quad (6.47)$$

Sonuç olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$v(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{mn}^p}{((\omega_{mn}^p)^2 - \omega^2)} V_{mn}^p(x, y) e^{j\omega t} \quad (6.48)$$

Daha sonra birim alan başına düşen kuvvet fonksiyonu F_{mn}^p yukardaki denklemde yazılır ve yer değiştirme denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$v(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((\omega_{mn}^p)^2 - \omega^2)} \left(\frac{F_1^p L_p}{2\rho h N_{mn}^p} \cos\left(\frac{n\pi}{a} y_1\right) - \frac{F_2^p L_p}{2\rho h N_{mn}^p} \cos\left(\frac{n\pi}{a} y_2\right) \right) \sin\left(\frac{m\pi}{L_s} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} y\right) e^{j\omega t} \quad (6.49)$$

ω_{mn}^p daha önceden dikdörtgenel plak için elde edilmiş doğal frekans değerini gösterir.

Plakanın enine yöndeki eğimi ψ_{θ}^p , yer değiştirme denkleminin türevinin alınmasıyla bulunur. Burada plakanın enine yöndeki kuvvetten kaynaklanan yer değiştirmenin eğimi ihmal edilebilir.

Plakanın silindirik kabukla birleştiği yerlerde momentten kaynaklanan yer değiştirmeler de meydana gelir. Dinamik kuvvet fonksiyonu burada birim alan başına düşen T_{θ}^p momentini veya moment genliğini içermektedir.

$$F_{mn}^p = \frac{1}{\rho h N_{mn}^p} \int_0^a \int_0^{L_p} V_{mn} \left(\frac{\partial T_{\theta}^p}{\partial \theta} \right) dx dy \quad (6.50)$$

Moment zamana bağlı olarak $y = y^*$ doğrusu boyunca sinüzoidal olarak değişir.

$$T_{\theta} = m_i^*(x, y, t) = M_i^p \sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \delta(y - y_i^*) e^{j\omega t} \quad (6.51)$$

Moment genliğini, momentten kaynaklanan kuvvet fonksiyonunda W_{mn}^p mod şekliyle beraber yerine koyarız.

$$\begin{aligned}
F_{mn}^p &= \frac{1}{\rho h N_{mn}^p} \int_0^a \int_0^{L_p} M_i^p \sin^2\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \left(\frac{\partial(\delta(y-y_i^*))}{\partial y}\right) e^{j\omega t} dx dy \\
F_{mn}^p &= \frac{1}{2\rho h N_{mn}^p} \int_0^a \int_0^{L_p} M_i^p \left(1 - \cos\left(\frac{2m\pi}{L_p} x\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \left(\frac{\partial(\delta(y-y_i^*))}{\partial y}\right) e^{j\omega t} dx dy \\
F_{mn}^p &= \frac{L_p}{2\rho h N_{mn}^p} \\
&\int_0^a \left(M_i^p \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \left(\frac{\partial(\delta(\theta-\theta_i^*))}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{2m\pi} \sin\left(\frac{2m\pi}{L_p} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \left(\frac{\partial(\delta(y-y_i^*))}{\partial y}\right) \right) \\
&e^{j\omega t} dy \\
F_{mn}^p &= \frac{n\pi L_p M_i^p}{2a\rho h N_{mn}^p} \cos\left(\frac{n\pi}{a} y_i^*\right) \quad i=1,2
\end{aligned} \tag{6.52}$$

Önceden silindirik kabuğun plakayla birleştiği noktalarda bir doğru boyunca sinüzoidal olarak oluşan moment fonksiyonu gösterilmiştir.

$$F_{mn}^p = \frac{n\pi L_p M_1^p}{2a\rho h N_{mn}^p} \cos\left(\frac{n\pi}{a} y_1^*\right) - \frac{n\pi L_p M_2^p}{2a\rho h N_{mn}^p} \cos\left(\frac{n\pi}{a} y_2^*\right) \tag{6.53}$$

Daha sonra F_{mn}^s kuvvet fonksiyonu yer değiştirme denkleminde yerine konur ve yer değiştirme denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
w^p(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((\omega_{mn}^p)^2 - \omega^2)} \left(\frac{n\pi L_p M_1^p}{2a\rho h N_{mn}^p} \cos\left(\frac{n\pi}{a} y_1^*\right) - \frac{n\pi L_p M_2^p}{2a\rho h N_{mn}^p} \cos\left(\frac{n\pi}{a} y_2^*\right) \right) \\
&\sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) e^{j\omega t}
\end{aligned} \tag{6.54}$$

Plakanın momentten kaynaklanan yer değiştirmenin eğimi ψ^p , yukardaki denklemin y 'ye göre türevinin alınmasıyla bulunur.

$$\psi^p(x, y, t) = \frac{\partial w}{\partial y} \tag{6.55}$$

$$\begin{aligned}
\psi^p(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2 \pi^2 L_p}{((\omega_{mn}^p)^2 - \omega^2)} \left(\frac{M_1^p}{2a^2 \rho h N_{mn}^p} \cos\left(\frac{n\pi}{a} y_1^*\right) - \frac{M_2^p}{2a^2 \rho h N_{mn}^p} \cos\left(\frac{n\pi}{a} y_2^*\right) \right) \\
&\sin\left(\frac{m\pi}{L_p} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} y\right) e^{j\omega t}
\end{aligned} \tag{6.56}$$

Silindirik kabuğun plakayla birleştiği yerlerdeki silindirin defleksiyon yanıtı özetle aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\beta_{(2i-1)(2j-1)} = \frac{u_{3i}^p(x, \theta_i, t) \big|_{F_j}}{f_i^p} \quad \beta_{(2i)(2j-1)} = \frac{\psi_i^p(x, \theta_i, t) \big|_{F_j}}{f_i^p} \quad (6.57)$$

$$\beta_{(2i-1)(2j)} = \frac{u_{3i}^p(x, \theta_i, t) \big|_{M_j}}{m_i^p} \quad \beta_{(2i)(2j)} = \frac{\psi_i^p(x, \theta_i, t) \big|_{M_j}}{f_i^p} \quad i, j=1,2$$

Buna göre plakanın receptance değerlerini tek tek yazacak olursak:

$$\beta_{11} = -\frac{2}{a\pi\rho h\omega^2}$$

$$\beta_{31} = \frac{2}{a\pi\rho h\omega^2}$$

$$\beta_{13} = -\frac{2}{a\pi\rho h\omega^2}$$

$$\beta_{33} = \frac{2}{a\pi\rho h\omega^2}$$

$$\beta_{22} = -\frac{2n^2\omega^2\pi}{b^3\rho h\left((\omega_{mn}^p)^2 - \omega^2\right)} \quad (6.58)$$

$$\beta_{42} = \frac{2n^2\omega^2\pi}{b^3\rho h\left((\omega_{mn}^p)^2 - \omega^2\right)}$$

$$\beta_{24} = -\frac{2n^2\omega^2\pi}{b^3\rho h\left((\omega_{mn}^p)^2 - \omega^2\right)}$$

$$\beta_{44} = \frac{2n^2\omega^2\pi}{b^3\rho h\left((\omega_{mn}^p)^2 - \omega^2\right)}$$

6.4 Birleşik Sistemin Serbest Titreşim Analizi

Önceki bölümde dikdörtgen plakayla silindirik kabağın receptance ifadeleri ayrı ayrı hesaplandı. Plakayla silindirin birleşmiş hali için receptance fonksiyonu aşağıdaki gibi matris şeklinde yazılır.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \alpha_{13} + \beta_{13} & \alpha_{14} + \beta_{14} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \alpha_{23} + \beta_{23} & \alpha_{24} + \beta_{24} \\ \alpha_{31} + \beta_{31} & \alpha_{32} + \beta_{32} & \alpha_{33} + \beta_{33} & \alpha_{34} + \beta_{34} \\ \alpha_{41} + \beta_{41} & \alpha_{42} + \beta_{42} & \alpha_{43} + \beta_{43} & \alpha_{44} + \beta_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (6.59)$$

Dikdörtgen plakada momentten kaynaklanan düzlemiçi yer değiştirmeler ihmal edilir.

$$\beta_{12} = \beta_{14} = \beta_{32} = \beta_{34} = 0$$

$$\beta_{21} = \beta_{41} = \beta_{23} = \beta_{43} = 0 \quad (6.60)$$

Son olarak aşağıdaki matris elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} + \beta_{13} & \alpha_{14} + \beta_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} + \beta_{24} \\ \alpha_{31} + \beta_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} + \beta_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} + \beta_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} + \beta_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (6.61)$$

Bu matriste önceden plaka ve silindir için elde edilen doğal frekans değerleri yerine konur ve birleşik halin doğal frekansı elde edilir.

7. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

7.1 Giriş

Bu bölümde dikdörtgen bir plakayla silindirik bir kabuğun serbest titreşim problemi sonlu elemanlar analizi Patran ve Nastran yazılımları ile çözümlenmiştir.

Patran bir arayüz programıdır, bu yazılımda model oluşturulup sonrasında analizi Nastranla gerçekleştirilmiştir. Patrandan öncelikle geometri tanımlanmıştır. Geometri tanımlandıktan sonra quad elemanlarla her iki geometriye de mesh atılmıştır. Silindir ve plaka sınır şartı olarak basit mesnetlenmiştir. Malzeme tanımlandıktan sonra son olarak Laminate Modeller kısmından kompozit malzeme dizilimi ve oryantasyonu tanımlanmıştır.

Analitik çözümlerle sonlu elemanlar analiz programının çözümü birbirine çok yakındır. Dikdörtgen plakanın serbest titreşim analiz sonuçları Nastran yazılımından elde edilen sonuçlarla bire bir uyum sağlamaktadır. Bu durum birleşik analiz ve silindirik kabuğun analizinde tam olarak geçerli değildir. İki analiz arasındaki fark maksimum yüzde 9'dur. Silindirik kabuğun karmaşık bir geometriye sahip olduğu düşünülürse bu oran oldukça iyi kabul edilebilir. Her ne kadar malzemenin simetrik ve dengeli seçilmesi gibi basitleştirmeler yapılsa da iki yapı biraraya geldiğinde sonuçlarda bazı farklılıklar ortaya çıkmıştır.

7.2 Analiz Sonuçları

Serbest titreşim probleminde kompozit malzemenin fiber dizilimi, kalınlığı, geometrik özellikleri sürekli olarak değiştirilmiştir. Hangi durumlarda doğal frekansın arttığı hangi durumlarda azaldığı analiz sonuçlarına göre yorumlanmıştır. Ayrıca plakanın silindirik kabuktaki yerleşimi de değiştirilmiştir ve farklı malzeme de kullanılmıştır. Bu da birleşik serbest titreşim problemine farklı açılardan bakmamızı sağlamıştır.

Öncelikle analizde iki tip malzeme kullanılmıştır. Malzemelerin özellikleri aşağıdaki tabloda yer almıştır.

Çizelge 7.1: Malzeme özellikleri

Malzeme Özellikleri	Birim	GFRP(Cam fiberle güçlendirilmiş plastik)	CFRP(Karbon fiberle güçlendirilmiş plastik)
E11	MPa	38600	181000
E22	MPa	8270	10300
G12	MPa	4140	7170
yoğunluk		1800	1600
Poisson oranı		0.45	0.26

CFRP ve GFRP malzemeleri aynı tipteki yapılar için kullanılmıştır. Bu malzemeler kullanılarak başka hiçbir özellik değiştirilmeden serbest titreşim analizi yapılmıştır. Sonuçlar Çizelge 7.2 ve 7.3’de gösterilmiştir.

Çizelge 7.2: CFRP malzeme için analiz sonuçları

Geometrik özellikler	L/R=15	R/h=40	h=2	
Malzeme	CFRP			
		Plaka	Silindir	Birleşik Sistem
Fiber oryantasyonu	Kalınlık(mm)	Doğal frekans (Hz)		
0-90-0	0.66	115	306	191
0-90-90-0	0.5	159	312	256
0-90-0-90-0	0.4	191	342	301
0-90-0-0-90-0	0.33	206	358	322
90-0-90	0.66	367	463	435
90-0-0-90	0.5	355	465	430
90-0-90-0-90	0.4	339	443	417
90-0-90-90-0-90	0.33	339	432	412

Çizelge 7.3: GFRP malzeme için analiz sonuçları

Geometrik özellikler	L/R=15	R/h=40	h=2	
Malzeme	GFRP			
		Plaka	Silindir	Birleşik Sistem
Fiber oryantasyonu	Kalınlık(mm)	Doğal frekans (Hz)		
0-90-0	0.66	83	176	135
0-90-90-0	0.5	95	180	152
0-90-0-90-0	0.4	104	185	166
0-90-0-0-90-0	0.33	108	191	173
90-0-90	0.66	164	223	221
90-0-0-90	0.5	160	219	200
90-0-90-0-90	0.4	154	214	198
90-0-90-90-0-90	0.33	149	212	190

Karbon fiberle yapılan analiz sonuçlarından elde edilen doğal frekans değerlerinin her üç yapı için de cam fiberlerden daha fazla olduğu görülmüştür. Daha sonra yarıçap kalınlık oranı değiştirilmiştir. Yarıçap arttığında doğal frekans değerinin düştüğü gözlenmiştir. Malzeme olarak bundan sonraki tüm analizlerde CFRP kullanılmıştır.

Çizelge 7.4: R/h oranının değişmesi sonucu doğal frekans değerleri

Malzeme:CFRP	Kalınlık	Plaka		Silindir		Birleşik	
		L/R=15	h=2	L/R=15	h=2	L/R=15	h=2
		R/h=40	R/h=80	R/h=40	R/h=80	R/h=40	R/h=80
0-90-0	0.66	115	28.865	306	111.91	191	50.502
0-90-90-0	0.5	159	39.859	312	126.23	256	67.595
0-90-0-90-0	0.4	191	47.809	342	139.67	301	80.353
0-90-0-0-90-0	0.33	206	51.595	358	146.42	322	86.419
90-0-90	0.66	367	91.942	463	154.7	417	143.15
90-0-0-90	0.5	355	88.805	465	147.28	430	140.5
90-0-90-0-90	0.4	339	84.791	443	146.42	417	134.39
90-0-90-90-0-90	0.33	325	81.391	424	139.67	405	129.21

Çizelge 7.5’de uzunluk yarıçap oranı değiştirilmiştir. Uzunluk azaldığında her üç durum için doğal frekans değerinin arttığı gözlenmiştir.

Çizelge 7.5: L/R oranının değişmesi sonucu doğal frekans değerleri

Malzeme:CFRP	Kalınlık	Plaka		Silindir		Birleşik	
		R/h=80	h=2	R/h=80	h=2	R/h=80	h=2
		L/R=15	L/R=5	L/R=15	L/R=5	L/R=15	L/R=5
0-90-0	0.66	28.865	35.703	111.91	319.3	50.502	60.497
0-90-90-0	0.5	39.859	44.947	126.23	349.62	67.595	80.191
0-90-0-90-0	0.4	47.809	51.953	139.67	387.95	80.353	94.505
0-90-0-0-90-0	0.33	51.595	55.284	146.42	407.24	86.419	101.26
90-0-90	0.66	91.942	93.253	154.7	456.72	143.15	169.21
90-0-0-90	0.5	88.805	90.299	147.28	448.63	140.5	164.81
90-0-90-0-90	0.4	84.791	86.46	146.42	441.84	134.39	157.8
90-0-90-90-0-90	0.33	81.391	83.161	139.67	428.93	129.21	149.8

Çizelge 7.6’da toplam kalınlık oranı değiştirilmiştir. Toplam kalınlık azaldığında her üç durum için doğal frekans değerinin arttığı gözlenmiştir.

Çizelge 7.6: Kalınlığın değişmesi sonucu doğal frekans değerleri

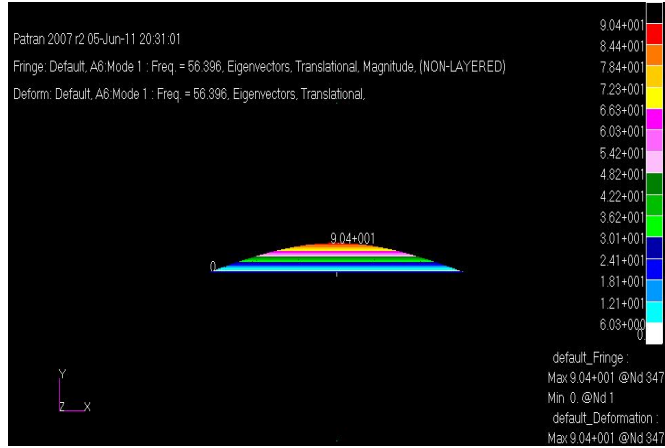
Malzeme:CFRP	Kalınlık	Plaka		Silindir		Birleşik	
		L/R=5	R/h=80	L/R=5	R/h=80	L/R=5	R/h=80
		h=6	h=2	h=6	h=2	h=6	h=2
0-90-0	0.66	12	35.703	88.113	319.3	20.317	60.497
0-90-90-0	0.5	14.696	44.947	97.626	349.62	26	80.191
0-90-0-90-0	0.4	17.305	51.953	106.26	387.95	30	94.505
0-90-0-0-90-0	0.33	18.602	55.284	110.7	407.24	33.996	101.26
90-0-90	0.66	31.385	93.253	138.05	456.72	56.733	169.21
90-0-0-90	0.5	30	90.299	137.77	448.63	54	164.81
90-0-90-0-90	0.4	28.807	86.46	133.4	441.84	52.3	157.8
90-0-90-90-0-90	0.33	27.987	83.161	130.25	428.93	50.9	149.8

Çizelge 7.7’de plakanın silindir içindeki yeri değiştirilmiştir. Plakanın silindir içindeki konumu 90⁰’den 120⁰’ye değiştirilmiştir. 90⁰ değeri silindirin tam ortasını göstermektedir. Yani 120⁰’de plaka silindirin ortasından daha aşağıdaki bir konuma yerleştirilmiştir.

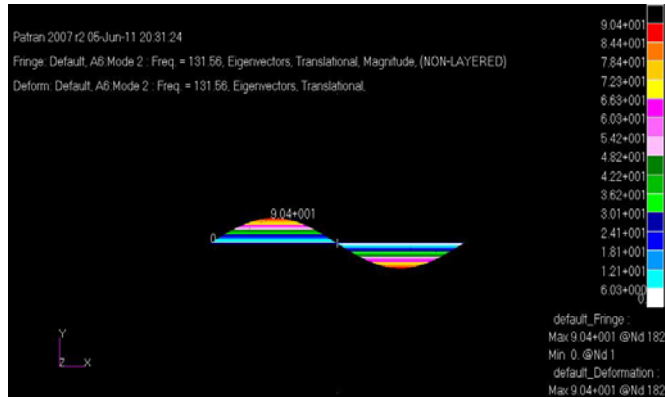
Çizelge 7.7: Plakanın yerinin değişmesi sonucu doğal frekans değerleri

Malzeme:CFRP	h=2	Birleşik	
		L/R=3	R/h=80
	Kalınlık		
0-90-0	0.66	76.021	91.2
0-90-90-0	0.5	86	112.3
0-90-0-90-0	0.4	100	128.7
0-90-0-0-90-0	0.33	111.72	141.3
90-0-90	0.66	179.36	230.89
90-0-0-90	0.5	173	219.2
90-0-90-0-90	0.4	169	215.3
90-0-90-90-0-90	0.33	161.56	207.1

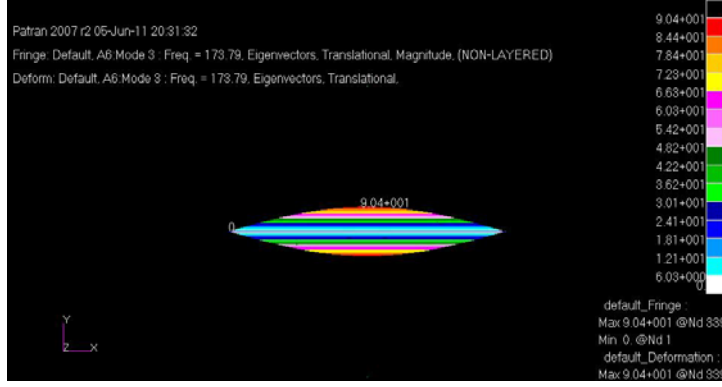
Tabakalı dikdörtgen plakanın serbest titreşim problemindeki ilk dört mod şekli Şekil 7.1, 7.2, 7.3 ve 7.4'de gösterilmiştir. İlk dört modda plaka burulma hareketini gerçekleştirmektedir.



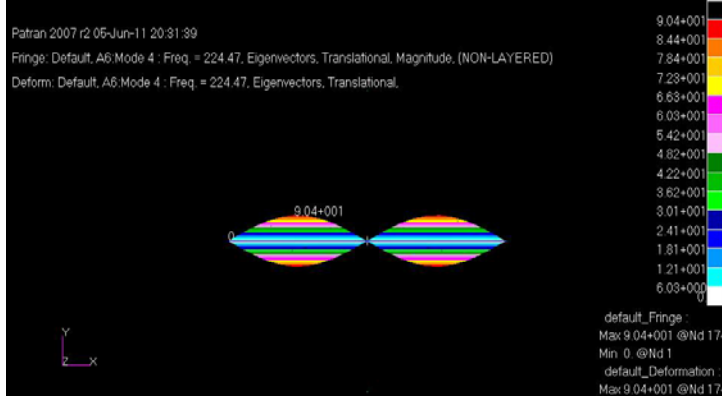
Şekil 7.1 : Tabakalı kompozit plaka için 1.mod



Şekil 7.2 : Tabakalı kompozit plaka için 2.mod

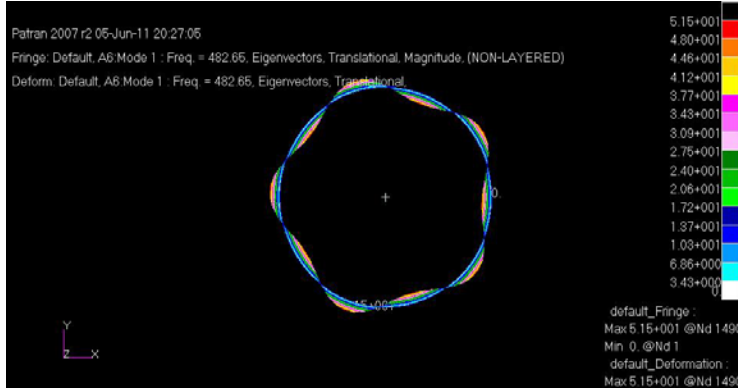


Şekil 7.3 : Tabakalı kompozit plaka için 3.mod

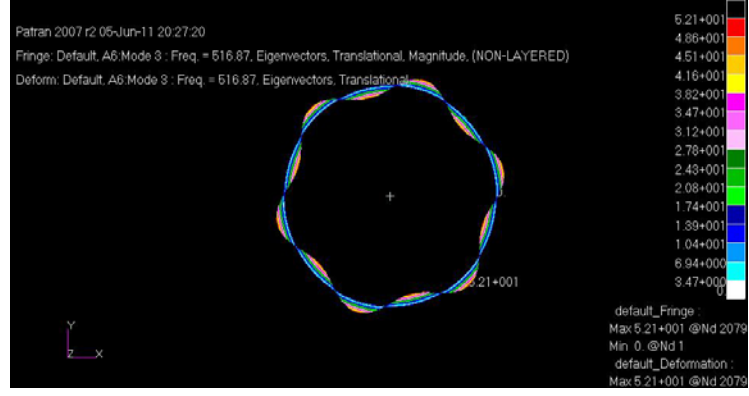


Şekil 7.4 : Tabakalı kompozit plaka için 4.mod

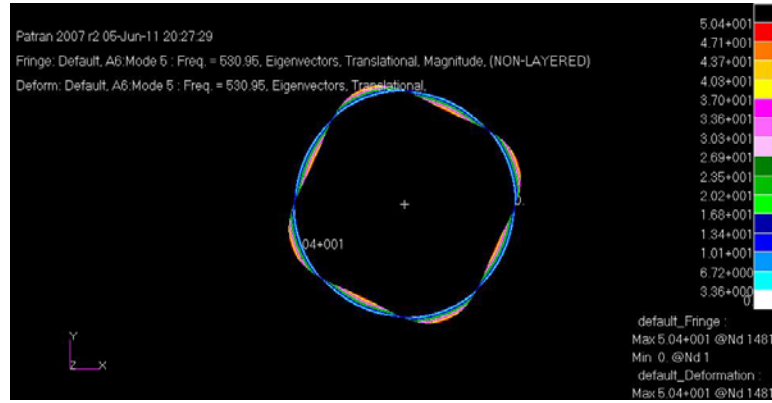
Aynı şekilde dairesel silindirik kabuk için serbest titreşim problemindeki ilk dört mod şekli Şekil 7.5, 7.6, 7.7 ve 7.8’de aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.



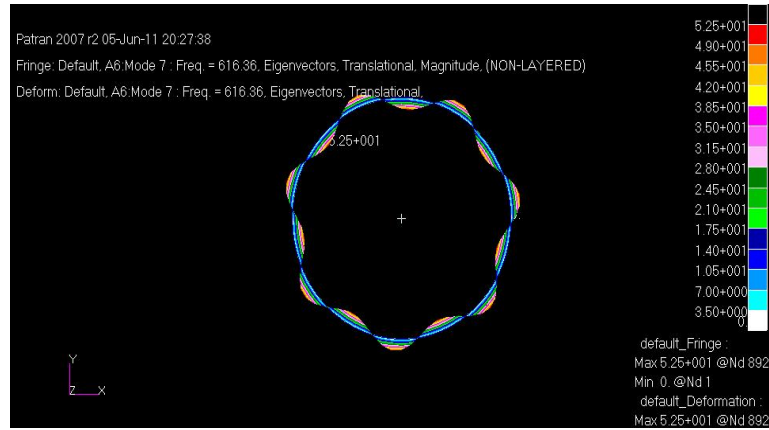
Şekil 7.5 : Tabakalı kompozit silindirik kabuk için 1.mod



Şekil 7.6 : Tabakalı kompozit silindirik kabuk için 2.mod

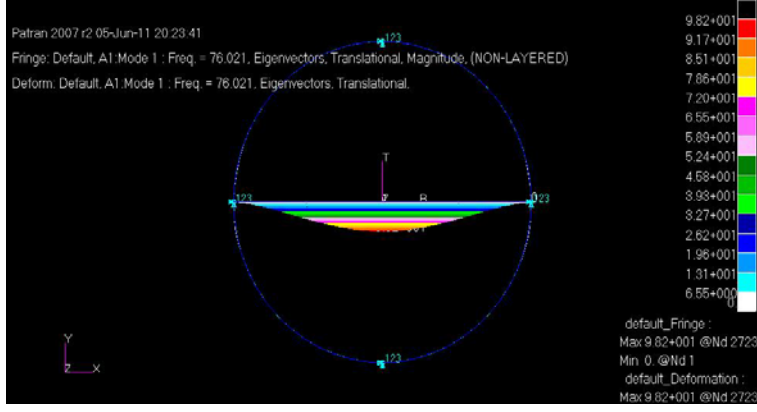


Şekil 7.7 : Tabakalı kompozit silindirik kabuk için 3.mod

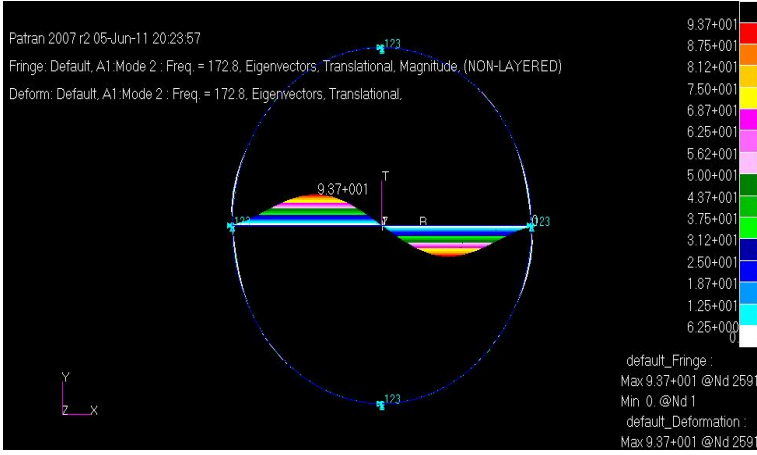


Şekil 7.8 : Tabakalı kompozit silindirik kabuk için 4.mod

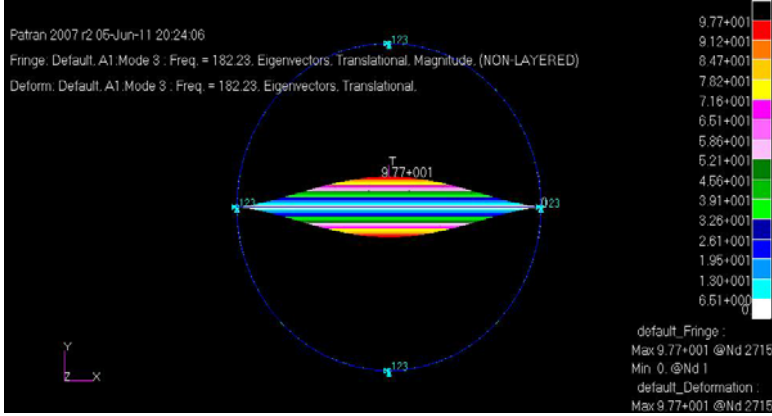
Tabakalı kompozit dikdörtgen plaka ile dairesel silindirik kabuğun birlikte titreşim analizinin ilk dört mod şekli Şekil 7.9, 7.10, 7.11 ve 7.11'de gösterilmiştir.



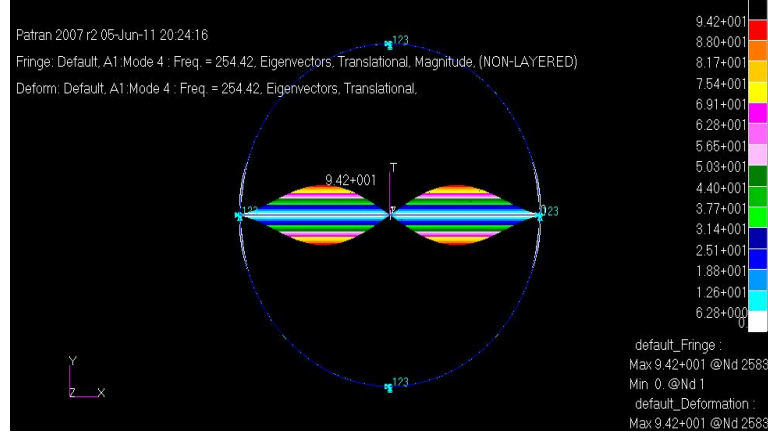
Şekil 7.9 : Tabakalı kompozit birleşik sistem için 1.mod



Şekil 7.10 : Tabakalı kompozit birleşik sistem için 2.mod



Şekil 7.11 : Tabakalı kompozit birleşik sistem için 3.mod



Şekil 7.12 : Tabakalı kompozit birleşik sistem için 4.mod

7.3 Değerlendirme

Yapılan analizler sonucu doğal frekansın hangi durumlarda arttığı veya azaldığı tespit edilmiştir. Öncelikle tabakalı kompozit plaka ve dairesel silindirik kabuğun serbest titreşimi ayrı ayrı incelenmiştir. Daha sonra plaka silindirin içine yerleştirilmiştir. Silindirle plakanın malzeme özelliği tüm analizlerde aynıdır. Aynı ayrı incelendiğinde de basit mesnetli olarak incelenmiştir. Dikdörtgen plakanın serbest titreşim analiz sonuçları Nastrandan elde edilen sonuçlarla bire bir uyum sağlamaktadır. Bu durum birleşik analiz ve silindirik kabuğun analizinde tam olarak geçerli değildir. İki analiz arasındaki fark maksimum yüzde 9'dur. Silindirik kabuğun karmaşık bir geometriye sahip olduğu düşünülürse bu oran oldukça iyi kabul edilebilir. Her ne kadar malzemenin simetrik ve dengeli seçilmesi gibi basitleştirmeler yapılsa da iki yapı biraraya geldiğinde sonuçlarda bazı farklılıklar ortaya çıkmıştır. Tüm değerler sabitken silindirin uzunluğu arttırılırsa doğal frekans değeri düşer. Tüm değerler sabitken silindirin yarıçap değeri arttırılırsa birleşik sistemin doğal frekans değeri düşer. Bunun sebebi ağırlığın katılık matrisine göre çok daha fazla artmasıdır.

Dikdörtgen plakanın silindirik kabuktaki yeri merkezden uzaklaştıkça doğal frekans değeri artar. Çünkü dikdörtgen plaka silindirin merkezinden uzağa yerleştirildikçe dikdörtgen plakanın uzunluğu sabit, eni azalmaktadır. Enin en fazla olduğu değer silindirin tam ortasına yerleştirildiği zamandır. Doğal frekansta, kütleyle katılık matrisi ters orantılıdır. Dikdörtgen plakanın eninin azalması sonucu kütle azalır ve sonuç olarak doğal frekans değeri artar.

Yüksek elastik özelliklere sahip malzemenin serbest titreşim doğal frekans değerleri, düşük elastik özelliklere sahip malzemedenden daha yüksektir. Bunun sebebi katılık matrisinin doğal frekansla doğru, kütleyle ters orantılı olmasıdır. Yine aynı şekilde tüm değerler sabitken toplam kalınlık arttırıldığı zaman doğal frekans değeri azalır.

Birleşik yapının davranışı ilk dört mod için daha çok plakaninkine benzemektedir. Bunun sebebi dikdörtgen plakanın dairesel silindirik kabuğun davranışını kısıtlamasıdır. Kısıtlama sonucu birleşik yapı en başta dikdörtgen plaka gibi davranır. Mod sayısı arttıkça davranışı dikdörtgen plakaninkinden uzaklaşır. Aynı şekilde birleşik yapının doğal frekans değerleri de dikdörtgen plakaninkilere daha yakındır.

Doğal frekansın bu şekilde artması veya azalması bize nasıl bir modelleme yapacağımız hakkında genel bir fikir oluşturur. Analitik çözümle sonlu elemanlar analiz programının birbirine yakın sonuçlar vermesi receptance metodunun etkili bir yöntem olduğunu gösterir.

KAYNAKLAR

- [1] **Mussaoui J., Cheng L. ve Richard M. J.**, 1996. *Free and Forced Vibration of A Cylindrical Shell With A Floor Partition*, Journal of Sound and Vibration **190(1)**, s:21-40
- [2] **Nosier A., ve Reddy J. N.**, 1992. *Vibration and Stability Analyses of Cross - Ply Laminated Circular Cylindrical Shells*, Journal of Sound and Vibration **157(1)**, s:139-159
- [3] **Zhang X. M.**, 2001. *Vibration Analysis of Cross - Ply Laminated Composite Cylindrical Shells Using the Wave Propagation Approach*, Applied Acoustics **62**, s:1221-1228
- [4] **Chung H.**, 1992. *Free Vibration Analysis of Circular Cylindrical Shells*, Journal of Sound and Vibration **74(1)**, s:331-350
- [5] **Altenbach H., Altenbach J. ve Kissing W.**, 2004. *Mechanics of Composite Structural Elements*, New York, s:205-298
- [6] **Lee Y. S., ve Kim Y. W.**, 1998. *Vibration Analysis of Rotating Composite Cylindrical Shells with Stiffeners*, Computers and Structures **69**, s:271-281
- [7] **Tsai S. W.**, 1992. *Theory of Composite Design*, Stanford University
- [8] **Yadav D. ve Verma N.**, 2001. *Free Vibration of Composite Circular Cylindrical Shells with Random Material Properties*, Composite Structures **51**, s:371-380
- [9] **Ip K. H., Chan W. K., Tse P. C. ve Lai T. C.**, 1996. *Vibration Analysis of Orthotropic Thin Cylindrical Shells with Free End by the Rayleigh - Ritz Method*, Journal of Sound and Vibration **195(1)**, s:117-135
- [10] **Ashton F. E.**, 1985. *Theory of Laminated Plates*, Boston
- [11] **Azimi S., Hamilton S. ve Soedel W.**, 1984. *The Receptance Method Applied to the Free Vibration of Continuous Rectangular Plates*, Journal of Sound and Vibration **93**, s:9-29
- [12] **Vinson J. R.**, 2005. *Plate and Panel Structures of Isotropic, Composite and Piezoelectric Materials, Including Sandwich Construction*, USA
- [13] **Qatu M.**, 2004. *Vibration of Laminated Shells and Plates*, Elsevier Academic Press
- [14] **Soedel W.**, 2005. *Vibration of Shells and Plates*, Marcel Deccer, Inc., New York
- [15] **Jones R. M.**, 1999. *Mechanics of Composite Materials*, Virginia

- [16] Lee J. H., Chung J. H., ve Chung T. Y., 1997. *Free Vibration Analysis of Symmetrically Laminated Composite Rectangular Plates*, Journal of Sound and Vibration **199**, s:71-85
- [17] Haung D. T. ve Ting E. C., 2004. *Vibration of Plates with Sub-Structural Deduction: A Reverse Receptance Approach*, Journal of Sound and Vibration **271**, s:177-201
- [18] Vailiev V. V. ve Morozov E. V., 2001. *Mechanics and Analysis of Composite Materials*, Berlin, s: 225-248
- [19] Mustafa B. A. J. ve Ali R., 1989. *An Energy Method for Free Vibration Analysis of Stiffened Circular Cylindrical Shells*, Computers & Structures **Vol. 32**, No. 2, s:355-363
- [20] Lee Y. S., Choi M. H. ve Kim J. H., 2003. *Free Vibration of Laminated Composite Cylindrical Shells with an Interior Rectangular Plate*, Journal of Sound and Vibration **265**, s:795-817

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Aslı Tatar
Doğum Yeri ve Tarihi: 23.06.1984 Fatih
Adres: Beykent/İSTANBUL
Lisans Üniversitesi:
2003 – 2008 İstanbul Teknik Üniversitesi,
İstanbul, TÜRKİYE
Uzay Mühendisi