

# İZMİR ÜNİVERSİTESİ



## Sağ Tarafı Bilinmeyen Parabolik Denklemler İçin Sınır ve Bitim Zamanındaki Ölçümlere Dayalı Ters Problemlerin Çözüm Yöntemlerinin Analizi

Pınar BARIŞ ŞAHİN  
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

**Haziran, 2013**

İZMİR ÜNİVERSİTESİ

**Sağ Tarafı Bilinmeyen Parabolik Denklemler İçin  
Sınır ve Bitim Zamanındaki Ölçümlere Dayalı  
Ters Problemlerin Çözüm Yöntemlerinin Analizi**

Pınar BARIŞ ŞAHİN

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU

Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Haziran 2013

# ÖZET

## Sağ Tarafı Bilinmeyen Parabolik Denklemler İçin Sınır ve Bitim Zamanındaki Ölçümlere Dayalı Ters Problemlerin Çözüm Yöntemlerinin Analizi

Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Pınar BARIŞ ŞAHİN

Bu çalışmada değişken ısı iletkenlik katsayısına sahip (2.1) ısı denkleminin uzay değişkenine bağlı  $F(x)$  kaynak fonksiyonunun ve zamana bağlı  $H(t)$  kaynak fonksiyonunun bitim zamanında ( $t = T$ ) ve  $(0, l)$  aralığının sol ucunda ( $x = 0$ ) belirlenmesinin sistematik analizi anlatılmaktadır. Göz önünde bulundurulan ters problemler için hemen hemen çözüm yaklaşımı ve kısmi türevli parabolik denklemler için zayıf çözüm teorisi kullanılmaktadır. Burada ve ileride

$$J_1(F) = \int_0^l [u(x, T; F) - u_T(x)]^2 dx, \quad (1)$$

$$J_2(F) = \int_0^l \left\{ \int_0^T u(x, t; F) dt - U(x) \right\} dx \quad (2)$$

$$J_3(H) = \int_0^T [u(0, t; H) - h(t)]^2 dt \quad (3)$$

değer fonksiyonelleri tanımlanarak bunlara en küçük değer veren eleman hemen hemen çözüm olarak tanımlanacaktır. Bu yaklaşıma dayanarak ilgili eşlenik problemlerin çözümleri üzerinden  $J_1(F)$ ,  $J_3(H)$  fonksiyonelleri için açık bir gradyan formülü elde edilmektedir. Daha sonra Ek Koşulu Final Zamanında Verilmiş Ters Kaynak Problemi (TPF) ve Ek Koşulu Aralığın Sol Ucunda Verilmiş Ters Kaynak Problemi (TPH) problemlerinin sayısal çözümü için Eşlenik Gradyan Yönteminin (EGY) ve İleri Kollokasyon Yönteminin (İKY) algoritmaları uygulanmaktadır. Fourier yönteminden yararlanarak, parabolik denklemin sabit katsayılı olduğu durum için seri çözümleri, Picard tekil değer ayrışımı yardımıyla gösterilmektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Ters Kaynak Problemi, parabolik denklem, zayıf çözüm, iyi tanımlanmamış problem, Fourier yöntemi, Eşlenik Gradyan Algoritması, İleri Kollokasyon Yöntemi, Volterra integral denklemi.

# ABSTRACT

## An Analysis of Methods for Inverse Source Problems With Boundary and Final Time Measured Output Data for Parabolic Equations

Graduate School of Engineering and Sciences  
Department of Mathematics and Computer Science

Pınar BARIŞ ŞAHİN

This study presents a systematic analysis of the inverse source problem of determining the spacewise source term  $F(x)$  and the time-dependent source term  $H(t)$  of the variable thermal conductivity coefficient heat equation, from the measured final and Dirichlet data. We use the quasisolution approach for the considered inverse problems, introducing the cost functionals

$$J_1(F) = \int_0^l [u(x, T; F) - u_T(x)]^2 dx, \quad (4)$$

$$J_2(F) = \int_0^l \left\{ \int_0^T u(x, t; F) dt - U(x) \right\} dx, \quad (5)$$

$$J_3(H) = \int_0^{T_f} [u(0, t; H) - h(t)]^2 dt. \quad (6)$$

and weak solution theory for parabolic PDEs. Based on this approach we derive explicit gradient formulas for the functionals  $J_1(F)$  and  $J_3(F)$  via the solution of appropriate adjoint problems, and then implement the algorithms of Conjugate Gradient Method (CGM) and Forward Collocation Method (FCM) for numerical solutions of the problems inverse source problem with final time measured output data (ISPF) and inverse source problem with boundary measured output data (ISPH). By using standard Fourier analysis, series solutions of parabolic equations with constant coefficients are determined with the help of Picard singular value decomposition method.

**Key Words:** Inverse source problem, parabolic equation, weak solution, ill-posed problem, Fourier method, conjugate gradient algorithm, forward collocation method, Volterra integral equation.

# ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Ters problemler, arka planında doğadaki problemlerin modellenmesi ve simülasyonu olan, günümüzde matematik ve fen alanında en çok araştırılan matematiksel problemlerden biridir. Ters problemlerin içerdiği iki önemli sınıftan biri olan ters kaynak problemleri ise matematik ve mühendislik bilimlerinin ilgilendiği en önemli konulardan biridir.

Bu çalışmada  $u_t = (k(x)u_x)_x + F(x)H(t)$  parabolik denkleminin  $F(x)$  ve  $H(t)$  sağ taraf fonksiyonlarının aranması ile ilgili ters problemler ele alınacaktır. Birinci ters problemde ( $F(x)$  bilinmeyen,  $H(t)$  bilinen) ek koşul,  $T > 0$  bitim zamanında verilmiş  $u_T(x) = u(x, T)$  koşuludur. Bilinmeyen  $H(t)$  fonksiyonunun aranması ile ilgili ikinci ters problemde ise ek koşul,  $h(t) := u(0, t)$  Dirichlet koşuludur. Her iki problemin hem matematiksel analizi, hem de sayısal çözüm yöntemleri bu çalışmada ele alınmaktadır.

Beni bu alanda çalışmaya teşvik eden ve her zaman bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren değerli hocam sayın Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU'na en içten teşekkürlerimi sunarım. Hayatım boyunca yanımda olan, ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan aileme yürekten teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca, çalışmalarımın her aşamasında bilgilerinden faydalandığım, desteklerini esirgemeyen değerli hocalarım sayın Doç. Dr. Burhan PEKTAŞ'a, sayın Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ'ye ve sayın Yrd. Doç. Dr. Arzu ERDEM'e teşekkür ederim.

Burada yapılan araştırmalarda yer alan çalışmalarım, gelecekte konu ile ilgilenen araştırmacılara faydalı olmasını dilerim.

# İçindekiler

Özet	i
Abstract	ii
Önsöz ve Teşekkür	iii
Şekil Listesi	v
Tablo Listesi	vi
Simgeler Dizini ve Kısaltmalar	vii
<b>1 Giriş</b>	<b>1</b>
<b>2 Ek Koşulu Final Zamanında Verilmiş Ters Kaynak Problemi</b>	<b>8</b>
2.1 TPF Problemi, Kesin ve Hemen Hemen Çözümler, Uyum Koşulları . . . . .	8
2.2 Ters Problemin Zayıf Çözüme Dayalı Hemen Hemen Çözümü ve Girdi-Çıktı Operatörlerinin Kompaktlığı . . . . .	11
2.3 Kompakt Operatörle Tanımlanmış Problem Neden İyi Tanımlanmamış ("Ill-Posed") Problemdir . . . . .	18
2.4 TPF1 Problemi için Fourier Yöntemi . . . . .	26
2.5 Eşlenik Problem Yaklaşımı, TPF1 Probleminin Değer Fonksiyonelinin Gradyanının Hesaplanması . . . . .	28
2.6 Eşlenik Gradyan Yöntemi . . . . .	30
<b>3 Ek Koşulu Aralığın Sol Ucunda Verilmiş Ters Kaynak Problemi</b>	<b>33</b>
3.1 Girdi-Çıktı Operatörünün Kompaktlığı . . . . .	34
3.2 TPH Problemi için Fourier Yöntemi, Volterra Denklemi Üzerinden Problemin İfadesi . . . . .	35
3.3 Eşlenik Problem Yaklaşımı, Değer Fonksiyonelinin Gradyanının Hesaplanması . . . . .	38
3.4 Eşlenik Gradyan Yöntemi . . . . .	40
3.5 $L_2[0, l]$ ve $H^1[0, l]$ Sobolev Uzayında Lagrange Baz Fonksiyonları için Hata Değerlendirmesi . . . . .	41
3.6 Kollokasyon Yöntemi ve TPH'nin Duyarlılık Derecesi . . . . .	44
3.7 Sayısal Sonuçlar . . . . .	45

# Şekil Listesi

2.1	$u(x, t) = x^\alpha t^\beta$ iki değişkenli fonksiyonunun, $u_x \in L_2(\Omega_T)$ ve $u_x \notin L_2(0, l)$ koşullarını aynı anda sağlaması durumunda $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ parametrelerinin aldığı değerler . . . . .	14
2.2	$\Phi : U \subset H_1 \mapsto H_2$ bir kompakt operatörü, $H_1$ 'de tanımlanmış $U$ birim yuvarı ve $\Phi$ operatörünün $R(\Phi) := \Phi U \subseteq H_2$ görüntü kümesi . . . . .	23
3.1	Lagrange baz fonksiyonları ve $H(t)$ fonksiyonunun baz fonksiyonları ile ayrışımı . . . . .	42
3.2	Örnek 3.1.: Düz problemin yaklaşık ve gerçek çözümü . . . . .	46
3.3	Örnek 3.2.: Farklı gürültü parametreleri için yakınsaklık ve yakınsama hataları ile $H(t)$ 'nin değişimi . . . . .	47
3.4	Örnek 3.3.: Farklı iterasyon sayıları için $H(t)$ 'nin değişimi . . . . .	47
3.5	Örnek 3.4.: Farklı $M$ değerleri için $H(t)$ 'nin değişimi . . . . .	48
3.6	Örnek 3.5.: Farklı gürültü parametreleri için yakınsaklık ve yakınsama hataları ile $H(t)$ 'nin değişimi . . . . .	49
3.7	Örnek 3.6.: Farklı $M$ değerleri için $H(t)$ 'nin değişimi . . . . .	50
3.8	Örnek 3.7.: Farklı gürültü parametreleri için yakınsaklık ve yakınsama hataları ile $H(t)$ 'nin değişimi . . . . .	51
3.9	Örnek 3.8.: Farklı $M$ değerleri için $H(t)$ 'nin değişimi . . . . .	52
3.10	Örnek 3.9.: Farklı gürültü parametreleri için yakınsaklık ve yakınsama hataları ile $H(t)$ 'nin değişimi . . . . .	53
3.11	Örnek 3.9.: Farklı $M$ değerleri için $H(t)$ 'nin değişimi . . . . .	53
3.12	Örnek 3.9.: Farklı $M$ değerleri için $H(t)$ 'nin değişimi . . . . .	54
3.13	Farklı gürültü parametreleri için yakınsaklık ve yakınsama hataları ile $H(t)$ 'nin değişimi . . . . .	55
3.14	Örnek 3.10.: Farklı $M$ değerleri için $H(t)$ 'nin değişimi . . . . .	55
3.15	Örnek 3.10.: Farklı $M$ değerleri için $H(t)$ 'nin değişimi . . . . .	56
3.16	Örnek 3.11.: Farklı gürültü parametreleri için yakınsaklık ve yakınsama hataları ile $H(t)$ 'nin değişimi . . . . .	57
3.17	Örnek 3.11.: Farklı $M$ değerleri için $H(t)$ 'nin değişimi . . . . .	58
3.18	Farklı $M$ değerleri için $H(t)$ 'nin değişimi . . . . .	59

# Tablo Listesi

3.1	Örnek 3.1.: Farklı şebeke parametreleri için $\varepsilon_u$ hesaplama hataları . . . . .	46
3.2	Örnek 3.4.: Farklı $M$ değerleri (Panel A) ve $M = 26$ optimal değeri (Panel B) için çeşitli gürültü düzeyleri ile verilen $E(n)$ yakınsaklık hataları . . . . .	48
3.3	Örnek 3.5.: $e(n; H; \gamma)$ yakınsama hatasının ve $E(n; H; \gamma)$ yakınsaklık hatasının optimal değerleri ile $n^{opt}$ değerleri . . . . .	49
3.4	Örnek 3.6.: Farklı $M$ değerleri (Panel A) ve $M = 26$ optimal değeri (Panel B) için çeşitli gürültü düzeyleri ile verilen $E(n)$ yakınsaklık hataları . . . . .	49
3.5	Örnek 3.7.: Optimal iterasyon sayıları ve hata değerleri . . . . .	50
3.6	Örnek 3.8.: Farklı $M$ değerleri (Panel A) ve $M = 26$ optimal değeri (Panel B) için çeşitli gürültü düzeyleri ile verilen $E(n)$ yakınsaklık hataları . . . . .	51
3.7	Örnek 3.9.: Optimal hata değerleri ve iterasyon sayıları . . . . .	52
3.8	Örnek 3.9.: Farklı $M$ değerleri (Panel A) ve $M = 26$ optimal değeri (Panel B) için çeşitli gürültü düzeyleri ile verilen $E(n)$ yakınsaklık hataları . . . . .	53
3.9	Örnek 3.9.: Farklı $M$ değerleri (Panel A) ve $M = 26$ optimal değeri (Panel B) için çeşitli gürültü düzeyleri ile verilen $E(n)$ yakınsaklık hataları . . . . .	54
3.10	Örnek 3.10.: Optimal hata değerleri ve iterasyon sayıları . . . . .	54
3.11	Örnek 3.10.: Farklı $M$ değerleri (Panel A) ve $M = 26$ optimal değeri (Panel B) için çeşitli gürültü düzeyleri ile verilen $E(n)$ yakınsaklık hatalar . . . . .	55
3.12	Örnek 3.10.: Farklı $M$ değerleri (Panel A) ve $M = 26$ optimal değeri (Panel B) için çeşitli gürültü düzeyleri ile verilen $E(n)$ yakınsaklık hataları . . . . .	56
3.13	Örnek 3.11.: Optimal hata değerleri ve iterasyon sayıları . . . . .	57
3.14	Örnek 3.11.: Farklı $M$ değerleri (Panel A) ve $M = 26$ optimal değeri (Panel B) için çeşitli gürültü düzeyleri ile verilen $E(n)$ yakınsaklık hataları . . . . .	57
3.15	Örnek 3.11.: Farklı $M$ değerleri (Panel A) ve $M = 26$ optimal değeri (Panel B) için çeşitli gürültü düzeyleri ile verilen $E(n)$ yakınsaklık hataları . . . . .	58



# Simgeler Dizini ve Kısaltmalar

- $\mathcal{F}(x, t)$  : Uygun değer fonksiyonelleri sınıfı  
 $\Phi$  : TPF1 probleminin girdi-çıktı operatörü  
 $\Psi$  : TPF2 probleminin girdi-çıktı operatörü  
 $\Upsilon$  : TPH probleminin girdi-çıktı operatörü  
 $\Omega_T$  :  $\mathbb{R}^n$ 'de sınırlı bölge  
 $\bar{\Omega}_T$  : Bölgenin kapanışı  
kadar türevleri sürekli fonksiyonlar sınıfı

# Bölüm 1

## Giriş

Diferansiyel denklemlerin sağ tarafının bulunması ile ilgili ters problemler, matematiğin hem kendi içinde hem de yaygın uygulamalarında önemli bir yere sahip problemlerdir. Bu çalışmada lineer parabolik denklemlerle ilgili

$$\begin{cases} u_t = (k(x)u_x)_x + F(x)H(t), & (x, t) \in \Omega_T := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}; \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, l); \\ -(k(x)u_x(x, t))_{x=0} = \varphi_0(t), & u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T]. \end{cases} \quad (1.1)$$

problemi için iki çeşit ters problemin incelenmesi hedeflenmektedir.

Bilindiği üzere (1.1) probleminde  $k(x)$ ,  $F(x)$ ,  $H(t)$ ,  $u_0(x)$  ve  $\varphi_0(t)$  fonksiyonları *girdi verileri* ("input data") olarak verildiği zaman, bunun  $u(x, t)$  çözümü klasik veya zayıf çözüm uzayında birebir olarak belirlenir. Yani bu girdi verileri belirli koşulları sağladığı zaman (1.1) probleminin  $u(x, t)$  (klasik veya zayıf) çözümü vardır ve tektir.[29] Fakat bir çok uygulamalarda,  $u(x, t)$ 'nin yanısıra,  $F(x)$  ve/veya  $H(t)$  sağ taraf fonksiyonları da bilinmeyendir ve bulunması gerekir. Böyle bir problem ilk kez A.N.Tikonov tarafından 1935 yılında formüle edilmiştir.[38] Burada,  $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times (0, T)$  sonsuz bölgesinde  $t = T$  bitim zammında, fiziksel ölçüm sonucu verilmiş

$$u_T(x) = u(x, T) \quad (1.2)$$

ek koşulundan yola çıkarak

$$u_t = u_{xx} + F(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T] \quad (1.3)$$

ısı iletimi denkleminin  $F(x)$  sağ taraf fonksiyonunu aranması ile ilgili ters problem formüle edilmiştir.  $F(x)$  fonksiyonu fizikte *ısı kaynağını* ("source") ifade ettiği için, bu problem bilimsel literatüre *ters kaynak problemi* ("inverse source problem") olarak girmiştir. [25]

Buna paralel olarak, geçen yüzyıl, yetmişli yıllarda diferansiyel denklemlerin sağ tarafının aranması ile ilgili çeşitli optimal kontrol problemleri ortaya çıkmıştır.[30][31] Benzer görülmelerine rağmen, sağ tarafın aranması ile ilgili ters problemler ile, optimal kontrol problemleri arasında derin bir farklılık vardır. Bu farkı açıklamak için (1.3) denklemi ile ilgili bir optimal kontrol problemini tanımlayalım.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}; \\ u(x, t) \rightarrow 0, & |x| \rightarrow +\infty \\ \int_0^T u^2(x, t) dt \rightarrow \min \end{cases} \quad (1.4)$$

Burada, herhangi bir, örneğin  $\mathcal{F} := \{F(x) > 0 : F \in L_2(\mathbb{R})\}$  fonksiyonlar sınıfında  $\|u(x, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow 0$  koşulunu sağlayan  $\langle u(x, t), F(x) \rangle$  çiftinin aranması ile ilgili optimal kontrol problemi söz konusudur. Bu problemin yukarıda formüle edilen ters kaynak probleminden temel farkı (1.4) probleminde fiziksel ölçüm sonucunda verilmiş herhangi bir verinin (yani  $u_T(x)$  verisinin) olmamasıdır. Bunun da sonucu olarak, optimal kontrol problemlerinde ölçüm hatası gibi önemli bir etken söz konusu olamaz. Bu etken ileride göreceğimiz üzere, ters problemler teorisinde en önemli etkidir. Bunu açıklayalım.

(1.1) ile ifade edilen başlangıç-sınır değer probleminin klasik çözümünün

$$u(x, t) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T) \quad (1.5)$$

sınıfından olduğu bilinmektedir.[19] Herhangi bir  $F(x) \in C(0, l)$  fonksiyonunu ele alalım. Buna karşılık gelen (1.1)'nin çözümünü  $u(x, t; F)$  olarak tanımlayalım. Eğer optimal kontrol problemi söz konusu ise, bilinmeyen  $F(x) \in C(0, l)$  fonksiyonunu

$$\int_0^T u^2(x, t; F) dt \rightarrow \min \quad (1.6)$$

minimizasyon koşulundan bulmak gerekir. Bu problem, Varyasyon Hesabı'nın bilinen yöntemleriyle çözülebilir.

Şimdi de aynı (1.1) ile ifade edilen ve koşulu (1.2) ile verilen ters problemi ele alalım.

Bu durumda, (1.1)'nin aynı  $u(x, t; F)$  klasik çözümünün

$$u(x, T; F) = u_T(x), \quad F \in C(0, l) \quad (1.7)$$

fonksiyonel denklemini sağlaması gerekir. Bu denklemin sol tarafı, klasik çözümün tanımı uyarınca,  $C^2(0, l) \cap C^1[0, l]$  sınıfındandır. Halbuki sağ taraftaki  $u_T(x)$  fonksiyonu, fiziksel ölçüm sonucu verilen bir fonksiyon olarak,  $C[0, l]$ 'den bile olmayabilir ve genelde yalnızca  $u_T \in L_2(0, l)$  koşulunu sağlar. Böylece, (1.7)'in sol tarafındaki operatörü

$$(\Phi F)(x) := u(x, t; F)|_{t=T} \quad (1.8)$$

olarak tanımlarsak,

$$\Phi F = u_T \quad (1.9)$$

operatör denkleminin değer kümesi  $\mathbf{R}(\Phi) \subset C^2(0, l) \cap C^1[0, l]$  koşulunu, sağ tarafı da  $u_T \in L_2(0, l)$  koşulunu sağlar. Bunun da sonucu olarak,  $L_2(0, l) \setminus (C^2(0, l) \cap C^1[0, l])$  kümesinden olan hiç bir fonksiyonun karşılığı olmaz, zira  $\Phi^{-1}$  ters operatörü yalnızca  $u_T \in C^2(0, l) \cap C^1[0, l]$  elemanları üzerinde tanımlanmıştır. Bu tutarsızlık ilk kez V. Ivanov (bkz,[26]), daha sonra da A. Tikhonov (bkz, [3]) tarafından farkedilmiştir.

$\Phi F = u_T$  eşitliği hiçbir zaman sağlanamayacağı için, doğal olarak

$$J(F) := \|\Phi F - u_T\|_{L_2(0, l)}^2$$

fonksiyoneli tanımlayarak,  $J(F) \rightarrow \inf$  en küçük değer probleminden  $F(x)$ 'in bir şekilde belirlenmesi söz konusu olabilir. Klasik çözüm kavramı, zayıf çözüm kavramına genişletildiği gibi, bu şekilde de (1.9) denkleminin çözümü" kavramı da  $J(F) \rightarrow \inf$  probleminin çözümüne genişletilmiştir. İşte bu çözüm, literatürde zayıf çözüm olarak değil, sadece ters problemlere özgü bir kavram olduğu için, *quasi-çözüm* ("quasi-solution"), yani *hemen hemen çözüm* olarak kabul edilmiştir.

Ters problemlerin hem matematiksel analizi, hem de sayısal çözümü için günümüzde başlıca yöntem, hemen hemen çözüm yaklaşımı/yöntemidir. Bu yönteme dayanarak kısmi türevli denklemlerle ilgili ters kaynak problemlerinin çözümü, eliptik denklemler için [2],[10],[13],[25],[32]'da, parabolik denklemler için [4],[7],[9],[8]-[14],[22], [23],[25], [27],[33]-[37]'te ve hiperbolik denklemler için de [13],[17],[18],[35], [39]'da incelenmiştir.

Basit durumlarda, örneğin  $k(x) = \text{sabit}$  olduğu durumda bu ters problemler integral denklemlere dönüştürülebilir.[6]

Bu çalışmada uzay değişkenine bağlı  $F(x)$  fonksiyonunun ve zaman değişkenine bağlı  $H(t)$  fonksiyonunun belirlenmesi ile ilgili olarak iki tür ters kaynak problemi (sırasıyla TPF ve TPH) aranmaktadır. Birinci problemde ek koşul olarak  $t = T > 0$  bitim zamanında  $u(x, t)$ 'nin deneysel ölçüm sonucu olarak bilindiği ((1.2) koşulu) varsayılmaktadır. İkinci problemde ise, ya aralığın  $x = l$  sağ ucunda

$$\varphi_l(t) := -(k(x)u_x(x, t))|_{x=l} \quad (1.10)$$

koşulunu, ya da aralığın  $x = 0$  sol ucunda

$$h(t) := u(x, t)_{x=0} \quad (1.11)$$

koşulunun verildiği varsayılmaktadır. Bu ek koşulların her üçü fiziksel modelin taleplerinden yola çıkarak, doğal olarak verilmiş ek koşullardır. Şöyle ki,

$$u_t = (k(x)u_x)_x + F(x)H(t)$$

denklemini ısı iletimi ve difüzyon süreçlerinin her ikisinin matematiksel modelidir. Fizik bilimi açısından, ölçümler yalnızca  $(0, l)$  aralığını işgal eden çubuğun ya uçlarında (*sınır ölçümleri*-”boundary data”), ya da süreç bittikten sonra  $t = T$  bitim zamanında (”final overdetermination”) verilebilir. Diğer ek koşulların verilmesi, yalnızca matematiksel açıdan kolaylık sağlamak içindir ve fiziksel bir anlam taşımaz.[27] (1.10)'un sağ tarafı, fizik biliminde tanımlandığı üzere, *telin sağ ucundaki akıdır* (”flux data”),  $\varphi_l(t)$  fonksiyonu,  $x = l$ 'de fiziksel ölçüm sonucu verilmiş akıdır.  $h(t)$  fonksiyonu ise  $x = 0$ 'da fiziksel ölçüm sonucu verilmiş ısıdır. Bu deneysel verilere ek olarak, bir çok durumlarda ısının  $(0, l)$ 'deki toplam değerinin de ölçüm sonucu verilmesi söz konusu olabilir:

$$U(x) := \int_0^T u(x, t)dt. \quad (1.12)$$

Bu tür ters problemlere integral operatörlü ters problemler de denir. [34]

Yukarıda adı geçen ters problemlerin tümünün ortak özelliği, *girdi-çıkıtı* (”input-output”)

operatörleri olarak tanımlanan

$$\Phi F := u(., t; F)|_{t=T},$$

$$\Psi H := u(x, .; H)|_{x=0} \quad (\Psi H := (-k(x)u_x(x, .; H))|_{x=l})$$

operatörlerinin tümünün kompakt operatörler olmasıdır.

Kompakt operatörler tersinir olmadığı için, ters problemlerin de hiç birisi (1.9) operatör denklemini kapsamında çözülemez.

İkinci temel özellik, ters problemlerin ölçüm hatalarına göre aşırı duyarlı olmasıdır ("ill-posed"). Bunu bir örnekle açıklayalım.

Değişkenlere ayırma veya herhangi diğer bir yöntemle yukarıdaki ters problemlerden herhangi birisinin

$$\int_0^l K(x, y)f(y)dy = g(x), \quad x \in (0, l); \quad g(x) \in C(0, l) \quad (1.13)$$

integral denklemine dönüştürüldüğünü varsayalım. Kolaylık için  $K : (0, l) \times (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$  çekirdeğinin sürekli olduğunu varsayalım:  $K \in C((0, l) \times (0, l))$ . Kolaylıkla tüm bu incelemeleri  $L_2(0, l)$ 'de de yapabiliriz. Bu durumda (1.13)'ün sol tarafındaki

$$\mathcal{K}\{f\}(x) := \int_0^l K(x, y)f(y)dy, \quad f \in C(0, l)$$

integral operatörü kompakt operatördür.[40] Bu problemin *duyarlı problem* ("ill-posed problem") olduğunu kanıtlayalım.

Bunun için önce (1.13)'ün

$$f_n(x) := f(x) + \sin nx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in (0, l)$$

çözümler dizisine karşılık gelen  $g_n(x)$  sağ taraf fonksiyonlarını bulalım:

$$g_n(x) := \int_0^l K(x, y)f_n(y)dy = \int_0^l K(x, y)f(y)dy + \int_0^l K(x, y)\sin nxdx.$$

Böylece, eğer  $f(x)$  fonksiyonu (1.13) denkleminin  $g(x)$  sağ taraf fonksiyonuna karşılık gelen çözümü ise,  $f_n(x)$  fonksiyonu da, her bir  $n \in \mathbb{N}$  için,

$$g_n(x) := g(x) + p_n(x), \quad p_n(x) := \int_0^l K(x, y) \sin nxdx$$

olmak üzere

$$\int_0^l K(x, y) f_n(x) dx = g_n(x), \quad x \in (0, l)$$

integral denkleminin çözümüdür. Burada  $p_n(x)$  fonksiyonu ölçüm hatasını yansıtır. Eğer (1.13) *düzgün formüle edilmiş* ("well-posed") problem olsaydı, bilindiği üzere,

$$\|p_n\|_{C(0,l)} := \|g - g_n\|_{C[0,l]} < \delta \Rightarrow \|f - f_n\|_{C[0,l]} < \varepsilon, \quad \delta, \varepsilon > 0$$

olurdu, yani, (1.13)'ün sağ tarafındaki küçük ölçüm hataları,  $f(x)$  çözümüne aynı oranda yakınsardı. Fakat

$$\|p_n\|_C := \max_{[0,l]} \left| \int_0^l K(x, y) \sin nxdx \right| \leq \|K\|_{C([0,l] \times [0,l])} \left| \int_0^l \sin nxdx \right|$$

$$\left| \int_0^l \sin nxdx \right| = \frac{1}{n} [1 - \cos nl] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

olmasına rağmen

$$\|f - f_n\|_{C[0,l]} := \|\sin nx\|_{C[0,l]} \not\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

olduğu görülür.

Böylece,  $n \rightarrow \infty$  durumunda  $\|g - g_n\|_{C[0,l]} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  halbuki, buna karşılık,  $\|f - f_n\|_{C[0,l]} \not\rightarrow 0$  olur.

Yani, (1.13) denkleminin sağ tarafındaki ölçüm hatalarının sifira yaklaşması, bunun  $f(x)$  çözümüne yansımalarının sifira yaklaşması anlamına gelmez.

Bu çalışmada, ikinci bölümde önce ek koşulu final zamanında verilmiş ters kaynak probleminin (TPF) formülasyonu verilecek, bu problem için kesin ve hemen hemen çözüm kavramları açıklanacak, uyum koşulları belirlenecektir. Ters problemin zayıf çözüme dayalı hemen hemen çözümü ve girdi-çıkıti operatörlerinin kompaktlığının neden gömme teoremi ile gösterilemeyeceği ve kompakt operatörle tanımlanmış problemin neden İyi tanımlanmamış ("ill-posed") problem olduğu açıklanacaktır. Daha sonra TPF problemi

için Fourier Yöntemi ile bir seri çözüm bulunacak ve Eşlenik Gradyan Yöntemi (EGY) ile sayısal çözümler elde edilecektir.

Üçüncü bölümde ise önce ek koşulu aralığın sol ucunda verilmiş ters kaynak probleminin (TPH) formülasyonu verilecek, bu problem için kesin ve hemen hemen çözüm kavramları açıklanacak, uyum koşulları ve ters problemin zayıf çözüme dayalı hemen hemen çözümü belirlenecektir. Daha sonra TPH problemi için Fourier Yöntemi ile bir seri çözüm bulunacak, bölüm sonunda Eşlenik Gradyan Yöntemi (EGY), İleri Kollokasyon Yöntemi (İKY) ile elde edilen sayısal çözümler verilecektir.



## Bölüm 2

# Ek Koşulu Final Zamanında Verilmiş Ters Kaynak Problemi

### 2.1 TPF Problemi, Kesin ve Hemen Hemen Çözümler, Uyum Koşulları

Lineer ve değişken katsayılı parabolik denklemin sağ tarafının değişkenlerine ayrılabilir bir fonksiyon olduğunu varsayalım:  $\mathcal{F}(x, t) = F(x)H(t)$ . Bundan yola çıkarak, bir boyutlu ısı iletimi probleminin matematiksel modelini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:[3][1]

$$\begin{cases} u_t = (k(x)u_x)_x + F(x)H(t), & (x, t) \in \Omega_T := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}; \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, l); \\ -k(0)u_x(0, t) = g(t), & u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T]. \end{cases} \quad (2.1)$$

Eğer  $F(x)$  tek değişkenli kaynak fonksiyonu bilinmeyen ve  $H(t)$  de bilinen ise, bu durumda, fiziksel olarak anlamlı ve mümkün kılınabilir bir ek koşul, bitim zamanında  $u(x, T)$  fonksiyonunun değeri olarak verilebilir. (2.1) probleminde  $t = T > 0$  bitim zamanında  $u(x, T)$  fonksiyonunun değerini bir ek koşul olarak verelim:

$$u_T(x) = u(x, T), \quad x \in (0, l] \quad (2.2)$$

Bu koşulun fiziksel anlamı  $t = T > 0$  bitim zamanında ısının ölçüm değerlerinin deneysel olarak verilmesidir. Bu nedenle  $u_T(x)$  fonksiyonuna *deneysel çıktı verisi* ("measured output data") denir. Buna karşılık  $u_0(x)$  ve  $g(t)$  fonksiyonları *girdi verileri* ("input data") olarak tanımlanır. (2.1) parabolik probleminin lineer olduğunu dikkate alarak aşağıda ele alacağımız ters problemlerde, genelliği bozmadan  $g(t) \equiv 0, \forall t \in [0, T]$  olduğunu varsayacağız.

(2.1) ve (2.2) denklemlerinden yola çıkarak bir *ters kaynak problemi* tanımlanabilir; zamana bağlı  $H(t)$  fonksiyonu bilinen, uzay değişkenine bağlı  $F(x)$  fonksiyonu bilinmeyendir ve (2.1)-(2.2) probleminden  $u(x, t)$  fonksiyonu ile birlikte bulunması gerekir. Bu problemi TPF1 olarak tanımlayalım. (2.1) – (2.2) ters problemi kapsamında (2.1) parabolik problemine *düz problem* denir.

(2.1) parabolik probleminin uzay değişkenine bağlı  $F(x)$  kaynak fonksiyonuna karşılık gelen çözümünü  $u = u(x, t; F)$  olarak gösterelim. Eğer bu fonksiyon (2.2) ek koşulunu da sağlıyor ise o halde  $u(x, T; F) = u_T(x)$  lineer olmayan fonksiyonel denkeminin de çözümü olacaktır. Ancak pratik uygulamalarda,  $u_T(x)$  deneysel çıktı verisi  $\|u_T(x)_\delta - u_T(x)\| \leq \delta$  olacak şekilde bir  $\delta$  ölçüm hatası ile verilir. Bunun sonucu olarak yukarıdaki eşitliğin kesin olarak sağlanması söz konusu olamaz. Bu durumda (2.1) – (2.2) ters probleminin kesin çözümü yerine,

$$J_1(F) = \int_0^l [u(x, T; F) - u_T(x)]^2 dx$$

fonksiyoneline en küçük değerini veren  $F(x)$  elemanının aranması problemi anlamlıdır.

**Tanım 2.1.**

$$J_1(F_*) = \inf_{F \in \mathcal{F}} J_1(F) \tag{2.3}$$

en küçük değer probleminin çözümüne TPF1 probleminin *hemen hemen çözümü* denir.[3]

$J_1(F_*) = 0$  durumunda  $F_* \in \mathcal{F}$  elemanı aynı zamanda ters problemin *kesin çözümü* olur.[22]

Kısmi Türevli Denklemler teorisindeki uyum koşulları, buradaki ters problem için de geçerlidir.[19] Önce bu koşulları düz problem için verelim.  $u(x, t)$  fonksiyonunu kendisi ve  $x$ 'e göre birinci türevi  $\bar{\Omega}_T$  kapalı parabolik bölgesinde hemen-hemen süreklidir. O halde  $x = 0$ 'da verilmiş  $u_x(0, t) = 0$  türdeş Neumann koşulundan yola çıkarsak

$u'_0(x)|_{x=0^+} := u_x(x, 0)|_{x=0^+} = u_x(0^+, 0) = 0$  olur. Böylece

$$u'_0(0) = 0, \quad u_0(l) = 0$$

sonucuna varırız. Öte yandan (2.2) ek koşulu ve  $u_x(0, t) = 0$ ,  $u(l, t) = 0$  sınır koşullarından, ters problem için ayrıca  $u_x(0, T) = u'_T(0) = 0$ ,  $u(l, T) = u_T(l) = 0$  uyum koşulları elde edilir. İleride  $u_0(x)$  ve  $u_T(x)$  fonksiyonlarının bu uyum koşullarını sağladığı varsayılmaktadır.

İkinci bir ters problem olarak (2.1) parabolik probleminin,  $F(x)$  uzay değişkenine bağlı kaynak fonksiyonunun integral operatörle verilmiş

$$U(x) = \int_0^T u(x, t) dt \quad (2.4)$$

ek koşulundan aranması problemini ele alalım. Burada da, TPF1 probleminde olduğu gibi,  $H(t)$  fonksiyonunun bilinen olduğu varsayılmaktadır. (2.1), (2.4) problemini TPF2 olarak tanımlayalım. Bu durumda da (2.1), (2.4) ters probleminin kesin çözümü yerine,

$$J_2(F) = \int_0^l \left\{ \int_0^T u(x, t; F) dt - U(x) \right\} dx$$

fonksiyoneli için

$$J_2(F_*) = \inf_{F \in \mathcal{F}} J_2(F) \quad (2.5)$$

en küçük değer probleminin çözümünü arayalım. Bu çözüme TPF2 probleminin hemen hemen çözümü denir.

TPF1 ve TPF2 için girdi çıktı operatörleri olarak bilinen:

$$\begin{aligned} \Phi : F \in L_2(0, l) &\mapsto u(x, t; F)|_{t=T} \in L_2(0, l); \\ \Psi : F \in L_2(0, l) &\mapsto \int_0^T u(x, t; F) dt \in L_2(0, l). \end{aligned}$$

operatörlerini tanımlayalım. O halde TPF1 ve TPF2 problemleri

$$\Phi F = u_T;$$

$$\Psi F = U$$

operatör denklemleri olarak tanımlanabilir.

## 2.2 Ters Problemin Zayıf Çözümüne Dayalı Hemen Hemen Çözümü ve Girdi-Çıktı Operatörlerinin Kompaktlığı

Zayıf çözüm teorisinin koşullarına dayanarak kaynak fonksiyonlarının,  $k(x)$  katsayısının ve ayrıca giriş verilerinin

$$\begin{cases} F(x) \in L_2(0, l), H(t) \in L_2(0, T), u_0(x) \in L_2(0, l) \\ k(x) \in L_\infty(0, l), k^* \geq k(x) \geq k_* > 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

koşullarını sağladığımızı varsayalım. (2.1) düz probleminin  $u \in \mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$  olarak tanımlanan zayıf çözümü  $\forall v(x, t) \in \mathring{H}^{1,1}(\Omega_T)$  ve  $v(l, t) = 0$  olmak üzere, aşağıdaki integral özdeşliği sağlayan fonksiyondur:[29],[35]

$$\int \int_{\Omega_T} (-uv_t + k(x)u_x v_x) dx dt = \int \int_{\Omega_T} F(x)H(t)v(x, t) dx dt + \int_0^l u_0(x)v(x, 0) dx.$$

$\mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$  ve  $\mathring{H}^{1,1}(\Omega_T)$  uzayları ise  $\mathring{V}^{1,0}(\Omega_T) := \{v \in V^{1,0}(\Omega_T) : v(0, t) = 0, \forall t \in (0, T)\}$ ,  $\mathring{H}^{1,1}(\Omega_T) := \{v \in H^{1,1}(\Omega_T) : v(0, t) = 0, \forall t \in (0, T)\}$  olarak tanımlanır.  $H^{1,1}(\Omega_T)$  uzayı Hilbert uzayı olup

$$\|u\|_{H^{1,1}(\Omega_T)} := \left\{ \int \int_{\Omega_T} [u^2 + u_x^2 + u_t^2] dx dt \right\}^{1/2} \quad (2.7)$$

normuna,  $V^{1,0}(\Omega_T)$  uzayı da

$$\|u\|_{V^{1,0}(\Omega_T)} := \max_{t \in [0, T]} \|u\|_{H^0[0, l]} + \|u_x\|_{H^0(\Omega_T)}.$$

normuna sahip birer Sobolev uzaylarıdır.  $\mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$  uzayının en doğal zayıf çözüm uzayı seçilmesinin nedeni aşağıda vereceğimiz enerji özdeşliğinden gözükmektedir. Denklemin her iki tarafını  $u \in L_2(\Omega_T)$ ,  $u_x \in L_2(\Omega_T)$  koşullarını sağlayan  $u(x, t)$  ile çarpalım,  $\Omega_t$  bölgesinde integralleyelim ve kısmi integralleme formülünü uygulayalım:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_0^t [u_\tau u - (k(x)u_x)_x u] dx d\tau = \int \int_{\Omega_t} F(x)H(\tau)u dx d\tau; \\ & \frac{1}{2} \int_0^l [u^2(x, t) - u^2(x, 0)] dx + \int \int_{\Omega_t} k(x)u_x^2 dx d\tau = \int \int_{\Omega_t} F(x)H(\tau)u dx d\tau, \forall t \in (0, T]; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^l u^2(x, t) dx + \underbrace{\int \int_{\Omega_t} k(x) u_x^2 dx d\tau}_{\geq k_* \int \int_{\Omega_t} u_x^2 dx d\tau} = \int \int_{\Omega_t} F(x) H(\tau) u dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^l u_0^2(x) dx, \quad \forall t \in (0, T].$$

Bunun sonucunda

$$\|u(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)}^2 + 2k_* \|u_x\|_{L_2}^2 \leq 2\|F\|_{L_2(0, l)} \|H\|_{L_2(0, T)} \|u\|_{L_2(\Omega_t)} + \|u_0\|_{L_2(0, l)}, \quad \forall t \in (0, T] \quad (2.8)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan  $u(x, t)$  fonksiyonunun ve giriş verilerinin hangi azami koşulları sağlaması gerektiği ortaya çıkıyor:

1) Soldaki 1. terim her bir  $t \in (0, T]$  için tanımlıdır. O halde

- (K1)  $\exists \int_0^l u^2(x, t) dx \in C[0, T]$

koşulunun sağlanması gerekmektedir.

2) Soldaki 2. terimin anlamlı olması için

- (K2)  $u_x \in L_2(\Omega_t), \quad \forall t \in (0, T]$

koşulunun sağlanması gerekmektedir.

(K1) koşulu  $u(x, t)$  iki değişkenli fonksiyonu için

$$u \in C([0, T]; H^0(0, l)), \quad H^0(0, l) \equiv L_2(0, l)$$

olarak, (K2) koşulu da

$$u \in H^0((0, T); H^1(0, l))$$

olarak ifade edilir.

Böylece (2.1) parabolik probleminin zayıf çözümü için en doğal uzay

$$V^{1,0}(\Omega_T) = C([0, T]; H^0(0, l)) \cap H^0((0, T); H^1(0, l))$$

Sobolev uzayı olarak tanımlanır. (2.8) eşitsizliğinden de görüldüğü üzere, (2.6) koşulları  $u \in \mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$  olması için yeterlidir.

$H^{1,1}(\Omega_T)$  ve  $V^{1,0}(\Omega_T)$  uzaylarının birbirinden farkını anlamak için aşağıdaki örneği ele alalım.

**Örnek 2.1.**  $u(x, t) = x^\alpha t^\beta$  iki değişkenli fonksiyonunun,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  parametrelerinin hangi değerlerinde  $u_x \in L_2(\Omega_T)$  ve  $u_x \notin L_2(0, l)$  koşullarını aynı anda sağladığını gösterelim:

$$u_x = \alpha x^{\alpha-1} t^\beta, \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T];$$

$$u_x \in L_2(\Omega_T) \Leftrightarrow \exists \int_0^T \int_0^l u_x^2 dx dt = \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} \cdot x^{2\alpha-1} \frac{1}{2\beta+1} t^{2\beta+1}.$$

Sağ tarafın var olması için  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  parametrelerinin

$$\begin{cases} 2\alpha - 1 > 0, \\ 2\beta + 1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1/2, \\ \beta > -1/2. \end{cases} \quad (2.9)$$

koşullarını sağlaması gerekir.

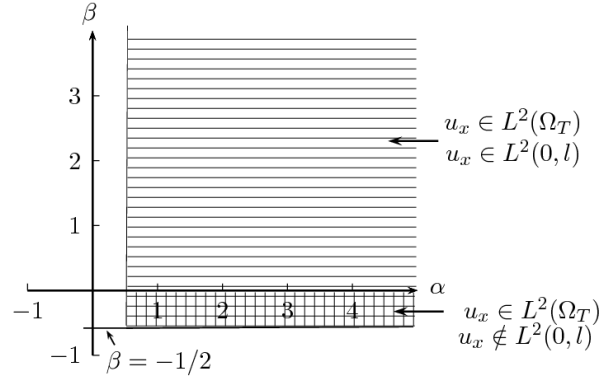
Öte yandan

$$u_x \in L_2(0, l) \Leftrightarrow \exists \int_0^l (\alpha x^{\alpha-1} t^\beta)^2 dx = \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} x^{2\alpha-1} t^{2\beta}$$

$$\begin{cases} 2\alpha - 1 > 0, \\ 2\beta > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1/2, \\ \beta > 0 \end{cases}$$

olması gereklidir. Böylece  $\beta \in (-1/2, 0)$ ,  $\alpha \in (1/2, +\infty)$  durumunda  $u(x, t) = x^\alpha t^\beta$  fonksiyonu için

$u_x \in L_2(\Omega_T)$ ,  $u_x \notin L_2(0, l)$  olduğu ortaya çıkar.  $\square$



ŞEKİL 2.1:  $u(x, t) = x^\alpha t^\beta$  iki değişkenli fonksiyonunun,  $u_x \in L_2(\Omega_T)$  ve  $u_x \notin L_2(0, l)$  koşullarını aynı anda sağlaması durumunda  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  parametrelerinin aldığı değerler

Bu örnekle elde edilen sonuç şudur:  $u \in \mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$  zayıf çözümü  $u_x \in L_2(0, l)$ ,  $\forall t \in (0, T]$ , özelliğine sahip değildir. Eğer böyle olsaydı,  $u_x(x, T; F) \in L_2(0, l)$  ve bunun da sonucu olarak  $u(x, T; F) \in H^1(0, l)$  olurdu.  $H^1(0, l) \hookrightarrow L_2(0, l)$  gömme özelliğinden ise,  $\Phi$  girdi çıktı operatörünün kompaktlığı elde edilmiş olurdu. Fakat Örnek 2.1 bunun böyle olmadığını ve  $\Phi$  operatörünün kompaktlığı için,  $\mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$  zayıf çözümü söz konusu olduğu durumda, gömme teoreminin yetersiz olduğunu gösterir.

Şimdi  $\mathring{H}^{1,1}(\Omega_T)$  uzayını ele alalım.  $\mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$  uzayından farklı olarak bu uzayın tanımı uyarınca,  $u_t \in L_2(\Omega_T)$  ve  $u_x \in L_2(\Omega_T)$  olduğu varsayılmaktadır.

**Örnek 2.2.**  $u(x, t) = x^\alpha t^\beta$ ,  $(x, t) \in (0, l) \times (0, T]$  fonksiyonundan şimdi

- $U(t) := \int_0^l u^2(x, t) dx \in C[0, T]$  yani  $u \in C([0, T]; L_2(0, l))$  talep edelim. Bu durumda

$$\int_0^l u^2(x, t) dx = \int_0^l x^{2\alpha} t^{2\beta} dx = \frac{\alpha^2}{2\alpha + 1} \cdot x^{2\alpha+1} t^{2\beta}$$

Buradan  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinin

$$\begin{cases} 2\alpha + 1 > 0, \\ 2\beta > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > -1/2, \\ \beta > 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

koşullarını sağladığı durumda  $U(t) \in C[0, T]$  olduğu anlaşılır.  $\square$

Böylece  $u(x, t) = x^\alpha t^\beta$  iki değişkenli fonksiyonunun

$\mathring{V}^{1,0}(\Omega_T) := C([0, T]; H^0(0, l)) \cap H^0((0, T); \mathring{H}^1(0, l))$  Banach uzayından olması için (2.9)

ve (2.10) koşullarından

$$\alpha > 1/2, \quad \beta > 0$$

koşulunu elde ederiz. Bu koşulların sağlandığı durumda  $u \in \mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$  olur.

**Örnek 2.3.** *Şimdi de bu fonksiyonun  $H^{1,1}(\Omega_T)$ ' den olması için  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinin değerlerini belirleyelim. Bu durumda  $u(x, t) = x^\alpha t^\beta$ ,  $(x, t) \in (0, l) \times (0, T]$  fonksiyonundan  $u_x \in L_2(\Omega_T)$ ,  $u_t \in L_2(\Omega_T)$  talep edelim.*

$$u_x \in L_2(\Omega_T) \Leftrightarrow \exists \int_0^T \int_0^l u_x^2(t) dx dt = \left( \frac{\alpha^2 x^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} \right)^2 \frac{t^{2\beta+1}}{2\beta+1}$$

Buradan  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinin

$$\begin{cases} 2\alpha - 1 > 0, \\ 2\beta + 1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1/2, \\ \beta > -1/2 \end{cases} \quad (2.11)$$

koşullarını sağladığı durumda  $u_x \in L_2(\Omega_T)$  olduğu anlaşılır.

$$u_t \in L_2(\Omega_T) \Leftrightarrow \exists \int_0^T \int_0^l u_t^2(t) dx dt = \left( \frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} \right)^2 \frac{\beta^2 t^{2\beta-1}}{2\beta-1}$$

Buradan  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinin

$$\begin{cases} 2\alpha + 1 > 0, \\ 2\beta - 1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > -1/2, \\ \beta > 1/2 \end{cases} \quad (2.12)$$

koşullarını sağladığı durumda  $u_t \in L_2(\Omega_T)$  olduğu anlaşılır. Dolayısıyla  $u(x, t) = x^\alpha t^\beta$  iki değişkenli fonksiyonunun  $H^{1,1}(\Omega_T)$  uzayından olması için

$$\alpha > 1/2, \quad \beta > 1/2 \quad (2.13)$$

koşulunu elde ederiz.

(2.11) ve (2.13) koşullarından şu sonuç elde edilir:

$u(x, t) \in \mathring{H}^{1,1}(\Omega_T)$  koşulu  $u(x, t) \in \mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$  koşulunu doğurur. Bu da



$H^{1,1}(\Omega_T) \subset \mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$  olduğu anlamına gelir.

Zayıf çözüm  $\mathring{H}^{1,1}(\Omega_T)$ 'de tanımlanırsa,  $H^{1,1}(\Omega_T) \hookrightarrow H^1(0, l)$  kompakt gömülme özelliğinden  $\Phi$  operatörünün kompaklığı elde edilebilir. Fakat  $u \in H^{1,1}(\Omega_T)$  olması için (2.6) koşullarının güçlendirilmesi gerekir. Bu ise pratik problemlerde mümkün olmayabilir.[5]

**Teorem 2.2.** [22] *Eğer (2.6) koşulları sağlanıyorsa ise (2.1) probleminin  $u \in \mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$  zayıf çözümünü için aşağıdaki önsel değerlendirme sağlanır:*

$$\max_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)}^2 + \|u_x\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \leq C_0 \left[ \|u_0\|_{L_2(0, l)}^2 + \|F\|_{L_2(0, l)}^2 \|H\|_{L_2(0, T)}^2 \right].$$

Zayıf çözümün varlığı ilk kez [33]'de verilmiştir ve halen Kısmi Türevli Denklemlerin zayıf çözüm teorisi olarak yaygın biçimde kullanılmaktadır.[11][15]

Burada aşağıdaki sonuçları kullanacağız:

**Lemma 2.3.** [29]  $\mathring{H}^{1,1}(\Omega_T)$  uzayında her sınırlı küme  $L_2(\Omega_T)$ 'de kompakttır. (Bu lemma Rellich Lemması olarak bilinmektedir.)

**Sonuç 2.4.** [29] Rellich Lemması  $\mathring{H}^{1,1}(\Omega_T)$ 'nin  $L_2(\Omega_T)$  uzayında gömülmesinin kompakt olduğunu gösterir; bu  $\mathring{H}^{1,1}(\Omega_T) \hookrightarrow L_2(\Omega_T)$  şeklinde gösterilir.

(2.1) probleminde  $k(x) \neq \text{sabit}$  durumunda herhangi bir spektral yaklaşım yöntemi, ve bundan dolayı Tekil Değer Ayrışımı yaklaşımı uygulanamaz. En azından Fourier yöntemiyle  $k(x) \neq \text{sabit}$  durumunda özdeğerler açık biçimde bulunamaz.

Bundan dolayı burada  $\Phi$  girdi-çıkı operatörünün kompaklığını yeni bir yaklaşımla; gömme teoremi ve enerji yöntemine dayalı yaklaşımla vereceğiz.

**Teorem 2.5.** [24][40] *Her  $H$  Hilbert Uzayı zayıf kompakttır.*

Bu teorem,  $\|u_n\|_H \leq c_1$ ,  $c_1 > 0$  durumunda  $H$  uzayında  $\{u_n\}$  dizisinin zayıf yakınsak bir  $\{u_m\}$  alt dizisinin var olduğu anlamına gelir.

**Teorem 2.6.** [18]  $\{F_n\} \subset L_2(0, l)$ ,  $\{H_n\} \subset L_2(0, T)$  fonksiyon dizileri sırasıyla  $F(x)$ ,  $H(t)$  fonksiyonlarına  $L_2(0, l)$ 'de zayıf yakınsak diziler olsun:

$F_n(x) \rightharpoonup F(x)$ ,  $H_n(t) \rightharpoonup H(t)$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Eğer  $u_n(x, t) := u(x, t; F_n, H_n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , dizisi de (2.1) düz probleminin ilgili çözüm dizisi ise, o halde her bir  $x \in (0, l)$  ve  $t \in (0, T)$  için  $\{u(x, t; F_n, H_n)\} \subset \mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$  dizisi,  $u(x, t, F, H) \in \mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$  fonksiyonuna göre düzgün yakınsar.

Bu teoremle birlikte Weierstrass teoreminden yararlanacağız.

**Teorem 2.7.** [18] Eğer  $F(x) \in \mathcal{F}$  ve  $\mathcal{F}$  kompakt ve  $J_1(F)$  fonksiyoneli de sürekli ise, o halde (2.5) en küçük değer probleminin en azından bir çözümü vardır.

Bu teoremden yola çıkarak,

$$\Phi : F \in L_2(0, l) \mapsto u(x, T; F) \in L_2(0, l)$$

girdi çıktı operatörünün kompaktlığını kanıtlayalım.

**Teorem 2.8.** [18]  $\Phi : F \in L_2(0, l) \mapsto L_2(0, l)$  girdi-çıkı operatörü kompakt operatördür.

*Kanıt.*  $\{F_n\} \subset L_2(0, l)$  sınırlı bir dizi olsun. O halde Banach-Alaoglu teoremine göre Hilbert uzayında her bir sınırlı küme zayıf kompakttır. Yani tanıma göre

$$\exists F \in L_2(0, l), \exists \{F_m\} \subset \{F_n\}, F_m \rightharpoonup F, m \rightarrow \infty$$

olur. Teorem 2.6'ya göre  $u(x, t; F_m) \rightarrow u(x, t; F), \forall t \in [0, T], m \rightarrow \infty$ . Burada  $t = T$  yazarsak  $u(x, T; F_m) \rightarrow u(x, T; F)$  sonucu elde edilir. Yani  $\Phi$  operatörü sınırlı diziyi yakınsak diziye dönüştürür, dolayısıyla kompakttır.  $\square$

*Uyarı 2.9.* (2.1) ile tanımlanmış parabolik problemin her bir  $F \in L_2(0, l)$  için tek bir  $u \in \dot{V}^{1,0}(\Omega_T)$  çözümü olduğu için, sadece  $u(x, t; F_m)$  alt dizisi değil,  $u(x, t; F_n)$  dizisinin tümü de  $u(x, t; F)$ 'e yakınsar.

Şimdi de TPF2 ile ilgili

$$\Psi : F \in L_2(0, l) \mapsto \int_0^T u(x, t; F) dt \in L_2(0, l)$$

operatörünün kompaktlığını kanıtlayalım.

**Teorem 2.10.** [18]  $\Psi : F \in L_2(0, l) \mapsto \int_0^T u(x, t; F) dt \in L_2(0, l)$  girdi-çıkı operatörü kompakt operatördür.

*Kanıt.* Kanıt aynen Teorem 2.7'deki gibi verilir. Fark sadece  $u(x, t; F_n) \rightarrow u(x, t; F), n \rightarrow \infty$ 'den  $U_n(x) := \int_0^t u(x, t; F_n) dt \rightarrow U(x) := \int_0^t u(x, t; F) dt$  sonucunun elde edilmesidir.  $\square$

## 2.3 Kompakt Operatörle Tanımlanmış Problem Neden İyi Tanımlanmamış ("Ill-Posed") Problemdir

$\mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$  zayıf çözüm uzayının tanımından  $u(x, t)$ 'nin  $t \in [0, T]$  değişkenine göre sürekli olduğu anlaşılır. Yani  $u(x, T)$  tek değişkenli fonksiyonu  $u(x, t)$ 'nin sadece izdüşümü değil,  $t = T$ 'deki değeridir. Buradaki problem şimdi  $u(x, T)$ 'nin hangi sınıftan olduğunu bulma problemidir.

Önce  $\Phi$  girdi-çıkı operatörünün  $L_2$ 'den  $L_2$ 'ye dönüşümünü yapan operatör olduğuna dikkat etmek gerekir:  $\Phi : L_2 \mapsto L_2$ ;  $(\Phi F)(x) := u(x, T; F)$ . Bunun nedenini açıklayalım.  $u(x, T) \in H^1(0, l)$  olsa bile,  $\Phi : L_2 \mapsto H^1 \subset L_2$  tanımından yola çıkarak  $\Phi$ 'nin incelenmesi doğru sonuç vermez. Zira,  $u_T(x) := u(x, T; F)$  ölçülmüş çıkı verisi ölçüm hatası içerir.  $F \in L_2(0, l)$  sağ taraf fonksiyonuna karşılık gelen  $u(x, T; F) \in \mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$  (tek) çözümü  $u(x, T; F) \in H^1(0, l)$ , yani daha güçlü normlu uzaydan olsa bile,  $\Phi F = u_T$  operatör denkleminin sağ tarafı ölçüm hatasından dolayı her zaman  $L_2$ 'den olacaktır:  $u_T \in L_2(0, l)$ .

Sonuç olarak girdi-çıkı operatörünün süreklilik ve kompaktlık özelliklerinin,

$\Phi : L_2 \mapsto L_2$  yapısından yola çıkarak incelenmesi gerekir.

$B_1$  ve  $B_2$  iki Banach uzayı olsun.  $U \subset B_1$  bir açık küme olmak üzere

$$\Phi : U \subset B_1 \mapsto B_2 \quad (2.14)$$

operatörünü tanımlayalım.

Hadamard'ın tanımına göre

$$\Phi u = v, \quad u \in U \quad (2.15)$$

problemine, aşağıdaki koşulların sağlandığı durumda *iyi tanımlanmış problem* ("well-posed problem") denir:

- K.1. Her bir  $v \in B_2$  için (2.15) probleminin  $u = u(v)$  çözümü vardır. ("Çözümün Varlığı").
- K.2. Bu çözüm tektir. ("Çözümün Tekliği")

- K.3.  $u = u(v)$  çözümünün  $v \in B_2$  elemanına bağımlılığı süreklidir. Bir başka deyişle  $\Phi^{-1} : B_2 \mapsto B_1$  ters operatörü süreklidir. ("*Çözümün Giriş Verilerine Göre Sürekliliği*")

Kısmi Türevli Denklemler teorisinde bu koşullara veya hükümlere, sırasıyla, *çözümün varlığı, tekliği ve giriş verilerine göre sürekliliği* denir.

Eğer  $K1 - K3$  koşullarının en azından birisi sağlanmaz ise, bu durumda (2.15) problemine *iyi tanımlanmamış* ("ill-posed") problem denir.[12][3]

Uygulamalar açısından  $K1 - K2$  koşullarının sağlanması vazgeçilmezdir. Aksi durumda fiziksel olarak anlamlı bir problem söz konusu olmaz. Öte yandan,  $K3$  koşulunu sağlamayan, yani giriş verilerinin herhangi birisine veya bir kaçına göre sürekli olmayan problemlerin sayısı gitgide çoğalmaktadır. Dahası, hem matematik biliminin kendisinin gelişimi açısından hem de önemli teknolojik problemlerin çözümü için matematiksel yöntemlerin geliştirilmesi açısından, iyi tanımlanmamış problemlerin önemi, bilimin her dalında artmaktadır.

Somut olarak, bu tezde incelenmesi söz konusu olan

$$\begin{cases} u_t = (k(x)u_x)_x + F(x)H(t), & (x, t) \in \Omega_T := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}; \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, l); \\ -k(0)u_x(0, l)_{x=0} = 0, & u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T] \end{cases}$$

parabolik problemini ele alırsak  $k(x), F(x), H(t)$  ve  $u_0(x)$  giriş verilerinin her birisine göre  $u(x, t) := u(x, t; k, F, H, u_0)$  çözümünün süreklilik derecesi farklıdır. Aşağıdaki teorem bunu açıklar.

**Teorem 2.11.** [36][16] (2.1) probleminin giriş verilerinin (2.6) koşullarını sağladığını varsayalım. Eğer  $L_2$  uzayında

$$\begin{cases} F_n(x) \rightarrow F(x), \\ H_n(t) \rightarrow H(t), \\ \frac{1}{k_n(x)} \rightarrow \frac{1}{k(x)}, \quad n \rightarrow \infty \end{cases}$$

zayıf yakınsama koşulları sağlanıyor ise, o halde her bir  $x \in (0, l)$  ve  $t \in (0, T)$  için

$$u_n(x, t) := u(x, t; k_n, F_n, H_n) \rightarrow u(x, t) := u(x, t; k, F, H), \quad n \rightarrow \infty \quad (2.16)$$

olur.

Bu teoremden,  $u(x, t)$  çözümünün sürekliliğinin giriş verilerinden, en azından  $k(x)$  katsayısı ve  $F_n(x)$  sağ taraf fonksiyonuna göre farklı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla bu teorem, ters katsayı problemleri ile ters kaynak problemleri arasında derin yapısal bir fark olduğunu gösterir.

Ters problemler teorisinde en önemli yere sahip olan kavram, *kompakt operatörlü problemdir*. Zira bu tür problemler düzgün formüle edilmemiş problemler olarak tanımlanır. Fakat bu tanımlamanın nedeni literatürde açık biçimde verilmemektedir.

**Tanım 2.12.** [24]  $B$  Banach uzayının  $U$  kümesinden olan her bir  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$  dizisinin bir Cauchy alt dizisi var ise  $U \subset B$  kümesine *prekompakt* denir. Eğer ayrıca bu alt dizinin limiti  $U$  kümesinin elemanı ise, o halde  $U$  kümesine *kompakt küme* denir.

Bilindiği üzere  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$  dizisinin alt dizisi yakınsak olsa bile, bu,  $\{u_m\} \subset \{u_n\}$  alt dizisinin  $u_0 := \lim_{m \rightarrow \infty} u_m$  limitinin de  $U$  kümesinden olacağı anlamına gelmez. Yalnızca  $u_0 \in \bar{U}$  olduğuna hükmedilebilir.

Bu özellik, prekompaktlık kavramının güçlendirilmesi gereksinimini doğurur.

**Tanım 2.13.** [24] Eğer Tanım 2.12'deki özelliklere sahip  $U$  kümesi kapalı ise, yani  $U = \bar{U}$  ise, buna *kompakt küme* denir. Böylece kompakt küme, her bir  $\{u_n\} \subset U$  dizisinin

- bir yakınsak  $\{u_m\} \subset \{u_n\}$  alt dizisinin olduğu;
- $u_0 := \lim_{m \rightarrow \infty} u_m$  limit elemanının da aynı kümeden olduğu ( $u_0 \in U$ )

bir kümedir.

Kompakt kümenin tanımından yararlanarak, kompakt operatörün tanımını verelim.

**Tanım 2.14.** [24] Eğer (2.14) ile tanımlanmış  $\Phi$  operatörü her sınırlı  $U_1 \subset U$  kümesini  $\Phi U_1 \subset B_2$  kompakt kümesine dönüştürüyor ise, buna *kompakt operatör* denir.

Bazen literatürde kompakt operatör teriminin yerine "completely continuous" terimi kullanılır. Bazen de kompakt operatör tanımı,  $\Phi$ 'nin sürekli olmasından yola çıkarak verilir.

Kompaktlık ve süreklilik ilişkisini irdelemek için Banach- Alaoğlu teoreminden yararlanalım.

**Teorem 2.15.** [24] *Ayrılabilir refleksif Banach uzayında her bir kapalı birim yuvarı zayıf kompakttır:  $U := \{u \in B : \|u\|_B \leq 1\} \ni \{u_n\} \subset U, u_n \rightharpoonup u \in U \subset B$ . Burada  $U$  kümesinin sınırlılığı dışında bunun dış bükeyliğine dikkat etmek gerekir ki bu da kompaktlığın ek bir kaynağıdır.*

Bu teoremden yararlanarak, kompakt operatör tanımında ayrıca operatörünün sürekli olduğu varsayımına (Örneğin [5]'te Tanım (1.1.3.3)'teki gibi) gerek olmadığını göstereyim.

Önce sürekli operatörün

$$\|u_n - u_0\|_{B_1} \rightarrow 0 \Rightarrow \|\Phi u_n - \Phi u_0\|_{B_2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

tanımını hatırlayalım. Eğer  $\Phi : U \subset B_1 \mapsto B_2$  operatörü kompakt ise, o halde

$\forall U_M := \{u \in U : \|u\|_{B_1} \leq M\}$  için  $\Phi U_M \subset B_2$  görüntü kümesi  $B_2$ 'de kompakttır yani,

$$\exists \{u_n\} \subset U_M \exists v_0 \in B_2 \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi u_n - v_0\|_{B_2} = 0$$

olmaktadır.

Burada

$$\mathring{U}_M := \{w := u/\|u\|_{B_1} : u \in U_M\} \tag{2.17}$$

kümesini tanımlarsak,  $\forall w \in \mathring{U}_M$  için  $\|w\| \leq 1$ , yani  $\mathring{U}_M$  kümesi  $B_1$  Banach uzayında birim yuvar olacaktır. O halde Banach-Alaçoğlu teoremine göre  $\mathring{U}_M$  zayıf kompakttır, yani

$$\exists \{w_m\} \subset \mathring{U}_M \exists w_0 \in B_1 w_m \rightharpoonup w_0, m \rightarrow \infty. \tag{2.18}$$

Öte yandan,  $\Phi$  kompakt operatör olduğu için  $\Phi \mathring{U}_M \subset B_2$  bir kompakt kümedir, yani bunun yakınsak bir alt dizisi vardır:

$$\exists \{\Phi w_k\} \subset \Phi \mathring{U}_M, \{\Phi w_k\} \text{ yakınsak.} \tag{2.19}$$

Zayıf limitin tekliğine göre (2.18)'deki  $w_0 \in B_1$  zayıf limiti tektir. Böylece (2.18) ve (2.19)'dan kompakt operatörün  $B_1$  Banach uzayında zayıf yakınsak diziyi,  $B_2$  uzayında güçlü yakınsak diziyeye dönüştürdüğü anlaşılır:

$$w_n \rightharpoonup w_0 \Rightarrow \|\Phi w_n - \Phi w_0\|_{B_2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Buradan kompakt operatörü sürekli operatörden farkedilen önemli bir özellik elde edilir.

Eğer Banach uzayında sürekli  $\Phi : U \subset B_1 \mapsto B_2$  operatörü sadece güçlü yakınsak diziyi, güçlü yakınsak diziyeye dönüştürüyor ise ( $u_n \rightarrow u_0 \Rightarrow \Phi u_n \rightarrow \Phi u_0, \quad n \rightarrow \infty$ ), kompakt operatör zayıf yakınsak diziyi, güçlü yakınsak diziyeye dönüştürür ( $u_n \rightharpoonup u_0 \Rightarrow \Phi u_n \rightarrow \Phi u_0, \quad n \rightarrow \infty$ ). Bu anlamda operatörün kompakthığı, süreklilikten bir üst özelliktir.

Bu özellik geçen yüzyılda, 30'lu yıllarda Sovyet matematikçi L. Sobolev'i *kompakt gömülme* fikrine götürmüştür. Matematiğin yönünü değiştiren en temel sonuçlardan birisinin temeli de bu fikirle atılmıştır. Eğer  $\Phi = I$ , I-birim operatörü,  $B_1 = H^1(0, l)$  ve  $B_2 = L_2(0, l)$  ise o halde

$$\Phi : H^1(0, l) \mapsto L_2(0, l), \quad \Phi := I$$

operatörü kompakt operatördür. Yani  $H^1$  uzayındaki bir elemanı  $L_2$  uzayına götüren bir birim operatörü kompakt operatördür. İşte bu özellik  $H^1 \hookrightarrow L_2$ , yani  $H^1(0, l)$  uzayının  $L_2(0, l)$  uzayına kompakt gömülmesi olarak tanımlanır. Başka bir deyimle,  $H^1(0, l)$ 'de sınırlı her bir küme,  $L_2(0, l)$ 'de kompakttır. Bu sonuç kolayca yorumlanabilir: Normu daha güçlü olan bir uzayda kapalı bir küme, normu daha zayıf olan bir uzaya aynen aktarılırsa, kompakt küme olur.

$$\mathring{H}^1(0, l) := \{u \in H^1(0, l) : u(0) = 0\}$$

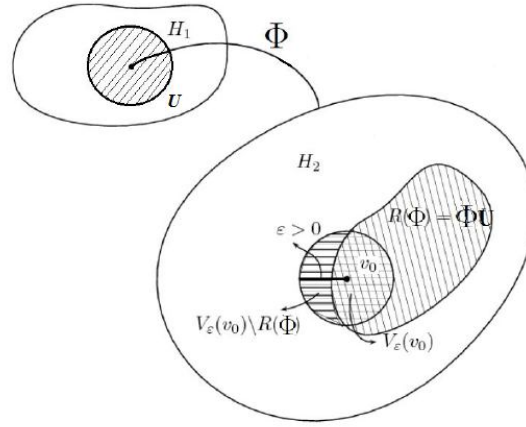
uzayının her bir  $u \in \mathring{H}^1(0, l)$  elemanı için

$$\|u\|_{L_2(0, l)} \leq (l/\sqrt{2})\|u'\|_{L_2(\Omega)}$$

Poincare eşitsizliğinin sonucu olarak elde edilen []

$$\|u\|_{L_2(0, l)} \leq c_0 \|u\|_{\mathring{H}^1(0, l)}$$

eşitsizliğini dikkate alırsak,  $H$ -normunun  $L_2$ -normundan güçlü olduğunu kanıtlamış oluruz. Bu ise  $H^1 \hookrightarrow L_2$  kompakt gömülmesinin başka bir kanıtıdır. Böylece kompakt operatörün (2.14) ile verdiğimiz tanımında, bunun *ayrıca sürekli olduğunu varsaymamamız anlamlıdır*. Lineer ve sınırlı operatörlerle verilmiş denklemler söz konusu olduğu durumda, bunların sürekli olduğu zaten açıktır, zira lineer ve sınırlı operatör sürekli dir.



ŞEKİL 2.2:  $\Phi : U \subset H_1 \mapsto H_2$  bir kompakt operatörü,  $H_1$ 'de tanımlanmış  $U$  birim yuvarı ve  $\Phi$  operatörünün  $R(\Phi) := \Phi U \subseteq H_2$  görüntü kümesi

Şimdi kompakt operatörlü denklemlerle ifade edilmiş problemin neden iyi tanımlanmamış problem olduğu sorusuna dönelim.

(2.15) problemini Hilbert uzayında ele alalım:  $H_1$  ve  $H_2$  Hilbert uzayları olmak üzere

$$\Phi : U \subset H_1 \mapsto H_2, \quad U := \{u \in H_1 : \|u\|_{H_1} \leq 1\}$$

olsun.

Bu operatörün kompakt olduğunu varsayarak, (2.15) probleminin iyi tanımlı problem olmadığını kanıtlayalım.

**Teorem 2.16.** [5]  $H_1$  ve  $H_2$  birer Hilbert uzayı,  $\Phi : U \subset H_1 \mapsto H_2$  bir kompakt operatör,  $U$  kümesi  $H_1$ 'de tanımlanmış birim yuvarı ve  $R(\Phi) := \Phi U \subseteq H_2$  kümesi de  $\Phi$  operatörünün görüntü kümesi olsun. Bu görüntü kümesinden herhangi bir  $v_0 \in R(\Phi)$  elemanının

$$V_\varepsilon(v_0) := \{v \in H_2 : \|v - v_0\|_{H_2} < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.20)$$



$\varepsilon$ -komşuluğunu ele alalım. O halde  $V_\varepsilon(v_0)$  yuvarının elemanı olup, fakat  $\Phi$  operatörünün  $R(\Phi)$  görüntü kümesinden olmayan en azından bir  $\tilde{v} \in H_2$  elemanı vardır:

$$\exists \tilde{v} \in H_2 \quad \tilde{v} \in V_\varepsilon(v_0) \setminus R(\Phi). \quad (2.21)$$

Eğer ayrıca  $\Phi : U \subset H_1 \mapsto H_2$  operatörü bire-bir ("injektif") ise, o halde  $\Phi^{-1} : R(\Phi) \mapsto U$  ters operatörü sürekli değildir. Bunun da sonucu olarak

$$\Phi u = v, \quad u \in U, \quad v \in R(\Phi)$$

problemi K3 koşulunu sağlamaz, yani iyi tanımlanmamış problemdir.

*Kanıt.* Önce (2.21) özelliğine sahip  $\tilde{v} \in H_2$  elemanının varlığını kanıtlayalım. Tersini varsayalım:  $V_\varepsilon(v_0) \subset R(\Phi)$  olsun.  $H_1$  Hilbert Uzayında  $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset H_2$  ortonormal baz elemanını ele alalım:  $(v_n, v_m) = \delta_{nm}$ ,  $n, m \in N$ .  $\{v_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$  dizisinin elemanlarını

$$v_n^\varepsilon := v_0 + \varepsilon v_n / 2, \quad n \in N \quad (2.22)$$

olarak tanımlayalım ve buradaki  $\varepsilon > 0$  parametresinin (2.20) tanımındaki parametre olduğunu varsayalım.  $\|v_n\|_{H_1} = 1$  olduğundan dolayı

$$\|v_n^\varepsilon - v_0\|_{H_2} = \|v_0 + \varepsilon v_n / 2 - v_0\|_{H_2} = \varepsilon \|v_n\| / 2 = \varepsilon / 2$$

olur ve buradan (2.20) tanımını da dikkate alırsak,

$$\forall n \in N \quad \{v_n^\varepsilon\} \subset \{v \in H_2 : \|v - v_0\| = \varepsilon / 2\} \subset V_\varepsilon(v_0)$$

sonucu elde edilir. Yani (2.22) ile tanımlanmış  $\{v_n^\varepsilon\}$  sonsuz serisinin elemanları  $V_\varepsilon(v_0)$  yuvarının içindedir.

$$\forall n, m \in N \quad \|v_n^\varepsilon - v_m^\varepsilon\|_{H_2}$$

farkını değerlendirelim:

$$\|v_n^\varepsilon - v_m^\varepsilon\|_{H_2} = \|v_0 + \varepsilon v_n / 2 - v_0 - \varepsilon v_m / 2\| = \varepsilon \|v_n - v_m\| / 2$$

Burada  $\|v_n - v_m\| = \sqrt{2}$  olduğunu dikkate alırsak

$$\|v_n^\varepsilon - v_m^\varepsilon\| = \varepsilon/\sqrt{2}, \quad \forall n, m \in N$$

sonucunu elde ederiz.  $v_n^\varepsilon, v_m^\varepsilon \in \{v_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$  elemanları keyfi olduğu için bu sonuç,  $\{v_n^\varepsilon\}$  sonsuz sisteminin hiç bir Cauchy dizisinin olmadığı anlamına gelir. Yani (2.20) ile tanımlanmış  $V_\varepsilon(v_0)$  kümesinin bir  $\{v_n^\varepsilon\} \subset V_\varepsilon(v_0)$  sonsuz dizisinin hiçbir yakınsak alt dizisi yoktur. Bu ise, tanıma göre,  $V_\varepsilon(v_0)$  kümesinin  $H_2$ 'de kompakt olmadığı anlamına gelir.

Öte yandan  $\Phi$  kompakt operatör olduğu için  $R(\Phi)$  kompakt kümedir ve varsayıma göre  $V_\varepsilon(v_0) \subset R(\Phi)$ . O halde  $V_\varepsilon(v_0)$ 'ın da en azından prekompakt olması gerekir ki bu da bir önceki hüküm ile çelişki oluşturur.

Böylece (2.21) özelliğine sahip bir  $\tilde{v} \in H_2$  elemanının varlığı kanıtlanmış olur (Şekil 2.2). Şimdi de  $\Phi$ 'nin bire-bir olduğunu varsayarak teoremin ikinci kısmını kanıtlayalım. Yine tersini varsayalım:  $\Phi^{-1} : R(\Phi) \mapsto U$  operatörü sürekli olsun. Bu operatörün tanımına göre  $\Phi^{-1}(R(\Phi)) = U$ .

$R(\Phi)$  kümesi  $H_2$ 'de kompakt küme olduğu için, sürekli operatör de kompakt kümeyi kompakt kümeye dönüştürdüğü için  $U \subset H_1$  kümesinin de kompakt olması gerekir. Halbuki  $U$  birim yuvarı kompakt değildir. Bu çelişki teoremin ikinci kısmını kanıtlar.

□

Bu teorem tezde elde edilen başlıca teorik sonuçtur.

Bu teoremin iyi tanımlanmamış problemlerin yapısını açıklayacak olan bir kaç sonucunu verelim.

(2.20)'deki  $v_0 \in R(\Phi)$  elemanının,  $\Phi$  operatörünün tanım kümesinden olan bir  $u_0 \in U$  elemanının görüntüsü olduğunu varsayalım:

$$v_0 = \Phi u_0 \tag{2.23}$$

Teorem,  $v_0 \in R(\Phi)$  elemanının, her ne kadar  $\varepsilon > 0$  küçük olursa olsun  $V_\varepsilon(v_0)$  komşuluğundan orijini olmayan en azından bir  $\tilde{v} \in V_\varepsilon(v_0) \setminus R(\Phi)$  elemanının var olduğuna hükmediyor. Yani, kompakt operatörün  $R(\Phi)$  değer kümesi her yerde yoğun küme değil:  $u_0 \in U$  orijinde bulunan  $v_0 := \Phi u_0$  elemanının  $\varepsilon > 0$  komşuluğu  $V_\varepsilon(v_0) \subset H_2$  ne kadar küçük olursa olsun, mutlaka burada  $R(\Phi)$  değer kümesinden olmayan ( $U$ 'da

orijini bulunmayan) en azından bir eleman olacaktır. Bu özellik, kompakt operatörün temel yetersizliği sayılabilir.

## 2.4 TPF1 Problemi için Fourier Yöntemi

(2.1) probleminde  $k(x) = k = \text{sabit}$  olduğunu varsayarak ve değişkenlerine ayırma, yani Fourier yöntemini uygulayarak  $\lambda_n = ((2n - 1)\pi/2l)^2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  özdeğerlerini ve bu özdeğerlere karşılık gelen  $\cos \sqrt{\lambda_n}x$  özfonksiyonlarını buluruz.  $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$  ve  $\varphi_n(x) = \sqrt{2/l} \cos \mu_n x$  olarak gösterelim. (2.1) düz probleminin  $u(x, t) \in \dot{V}^{1,0}(\Omega_T)$  zayıf çözümünü, bu özfonksiyonlar üzerinden bir seri şeklinde arayabiliriz:

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(x). \quad (2.24)$$

Bu fonksiyonun aralığın sol ucunda Neumann, sağ ucunda Dirichlet koşullarını sağladığı aşikardır. Serinin ilgili türevlerini hesaplayarak (2.1)'de yerine yazalım:

$$\sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \{u'_n(t) + k\lambda_n u_n(t)\} \varphi_n(x) = F(x)H(t), \quad (x, t) \in \Omega_T.$$

Bu eşitliğin her iki tarafını  $\varphi_n(x)$  ile çarpıp  $(0, l)$  aralığında integrallersek ve

$$\int_0^l \varphi_k(x) \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

formülünden yararlanırsak, her  $n = 1, 2, 3, \dots$  için  $u_n(t)$  bilinmeyenine göre birinci mer-  
tebeden

$$u'_n(t) + k\lambda_n u_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} H(t) \int_0^l F(x) \varphi_n(x) dx \quad (2.25)$$

adi diferansiyel denklemini elde ederiz. Sağ taraftaki integral  $F(x)$ 'in

$$F_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l F(x) \varphi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.26)$$

Fourier katsayılarıdır. Öte yandan (2.24)'de  $t = 0$  yazarak  $u(x, 0) = u_0(x)$  başlangıç koşulunu da dikkate alırsak,

$$\sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \varphi_n(x) = u_0(x)$$

buluruz. Bu ise  $u_{0n} := u_n(0)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  sayılarının  $u_0(x)$  fonksiyonunun Fourier katsayıları olduğu anlamına gelir:

$$u_{0n} := \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u_0(x) \varphi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Böylece (2.1) probleminin  $u(x, t)$  çözümünün (2.24) ayrışımındaki  $u_n(t)$  Fourier katsayıları aşağıdaki Cauchy probleminin çözümüdür:

$$\begin{cases} u_n'(t) + k\lambda_n u_n(t) = F_n H(t), & n = 1, 2, 3, \dots \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases}$$

Bu problemin çözümünün

$$u_n(t) = u_{0n} e^{-k\lambda_n t} + F_n \int_0^t e^{-k\lambda_n(t-\tau)} H(\tau) d\tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

olduğu aşıkardır.

$u_T(x) = u(x, T)$  ek koşulunu kullanarak ve  $u_T(x)$  fonksiyonunun

$$u_{T,n} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u_T(\xi) \varphi_n(x) d\xi$$

şeklinde tanımlanan  $u_{T,n}$  Fourier katsayılarını göz önünde bulundurarak

$$u_{0n} e^{-k\lambda_n T} + F_n \int_0^T e^{-k\lambda_n(T-t)} H(t) dt - u_{T,n} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

sonucuna varırız. Böylece TPF1 probleminin seri çözümü ek koşul yardımıyla

$$\begin{cases} F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \varphi_n(x) \\ F_n = (u_{T,n} - u_{0n} e^{-k\lambda_n T}) \left( \int_0^T e^{-k\lambda_n(T-t)} H(t) dt \right)^{-1} \end{cases} \quad (2.27)$$

biçiminde bulunur.[18][22]

## 2.5 Eşlenik Problem Yaklaşımı, TPF1 Probleminin Değer Fonksiyonelinin Gradyanının Hesaplanması

Önce  $F : L_2[0, l] \mapsto \mathbb{R}$  uzayında tanımlanmış bir fonksiyona bağlı  $J(F)$ ,  $J : F \mapsto \mathbb{R}$  fonksiyonelinin *Fréchet* gradyanını tanımlayalım.

**Tanım 2.17.**  $\forall F, F + \Delta F \in L_2[0, l]$  için

$$J(F + \Delta F) - J(F) = (A_j(F), \Delta F) + o(\|\Delta F\|_{L_2(0,l)}^2)$$

olacak şekilde bir  $A_j : L_2 \rightarrow L_2$  operatörü var ise bu operatöre  $J(F)$  fonksiyonelinin *Fréchet* gradyanı denir ve  $J'(F)$  olarak gösterilir:[24]

$$J(F + \Delta F) - J(F) = (J'(F), \Delta F)_{L_2(0,l)} + o(\|\Delta F\|_{L_2(0,l)}^2)$$

$F, F + \Delta F \in \mathcal{F}$  olmak üzere  $J_1(F)$  değer fonksiyoneli için gradyan formülünü elde etmek amacıyla, bu değer fonksiyonelinin birinci varyasyonunu  $\Delta J_1(F) := J_1(F + \Delta F) - J_1(F)$  şeklinde gösterelim. Bu durumda  $\Delta u(x, t; \Delta F) = u(x, t; F + \Delta F) - u(x, t; F)$  fonksiyonu

$$\begin{cases} \Delta u_t = (k(x)\Delta u_x)_x + \Delta F(x) H(t), & (x, t) \in \Omega_T, \\ \Delta u(x, 0) = 0, & x \in (0, l), \\ \Delta u_x(0, t) = 0, \Delta u(l, t) = 0, & t \in (0, T]. \end{cases} \quad (2.28)$$

parabolik probleminin çözümü olmak üzere

$$\Delta J_1(F) = 2 \int_0^l [\Delta u(x, T; \Delta F) - u_T(x)] \Delta u(x, T; \Delta F) dx + \int_0^l [\Delta u(x, T; \Delta F)]^2 dx \quad (2.29)$$

eşitliğini elde ederiz.  $\varphi(x, t; F)$  fonksiyonu

$$\begin{cases} \varphi_t = -(k(x)\varphi_x)_x, & (x, t) \in \Omega_T, \\ \varphi(x, T; F) = 2[u(x, T; F) - u_T(x)], & x \in (0, l), \\ \varphi_x(0, t) = 0, \varphi(l, t) = 0, & t \in (0, T]. \end{cases} \quad (2.30)$$

parabolik probleminin çözümü olan keyfi bir fonksiyon olsun.

**Tanım 2.18.** [17] (2.30) parabolik problemine (2.1)-(2.2) TPF1 probleminin *eşlenik problemi* ("adjoint problem") denir.

(2.29) eşitliğinin sol tarafındaki integrali (2.28) ve (2.30) problemleri yardımıyla aşağıdaki gibi yeniden düzenleyelim:

$$\begin{aligned}
2 \int_0^l [\Delta u(x, T; \Delta F) - u_T(x)] \Delta u(x, T; \Delta F) dx &= \int_0^l \varphi(x, T; F) \Delta u(x, T; \Delta F) dx \\
&= \int_0^l \left\{ \int_0^T (\varphi(x, t; F) \Delta u(x, t; \Delta F))_t dt \right\} dx \\
&= \int \int_{\Omega_T} \{ \varphi_t(x, t; F) \Delta u(x, t; \Delta F) + \varphi(x, t; F) \Delta u_t(x, t; \Delta F) \} dx dt \\
&= \int \int_{\Omega_T} \{ -(k(x) \varphi_x)_x \Delta u(x, t; \Delta F) + \varphi(x, t; F) (k(x) \Delta u_x)_x \} dx dt \\
&\quad + \int \int_{\Omega_T} \varphi(x, t; F) \Delta F(x) H(t) dx dt \\
&= \int_0^T \{ -(k(x) \varphi_x) \Delta u(x, t; \Delta F) + \varphi(x, t; F) (k(x) \Delta u_x) \}_{x=0}^{x=l} dt \\
&\quad + \int \int_{\Omega_T} \varphi(x, t; F) \Delta F(x) H(t) dx dt
\end{aligned}$$

(2.28) ve (2.30) problemlerindeki sınır koşullarını dikkate alarak aşağıdaki integral özdeşliği elde ederiz:

$$2 \int_0^l [\Delta u(x, T; \Delta F) - u_T(x)] \Delta u(x, T; \Delta F) dx = \int \int_{\Omega_T} \varphi(x, t; F) \Delta F(x) H(t) dx dt, \forall F \in \mathcal{F}$$

(2.29) eşitliği yardımıyla  $\forall \Delta F \in \mathcal{F}$  olmak üzere  $J_1(F)$  değer fonksiyonelinin birinci varyasyonu için

$$\begin{aligned}
\Delta J_1(F) &= \int_0^l \left( \int_0^T \varphi(x, t; F) H(t) dt \right) \Delta F(x) dx + o(\|\Delta u(x, T; \Delta F)\|^2), \\
o(\|\Delta u(x, T; \Delta F)\|^2) &=: \int_0^l [\Delta u(x, T; \Delta F)]^2 dx
\end{aligned}$$

formülüne ulaşırız.

**Lemma 2.19.** [17]  $\varepsilon_0 \in (0, 4k_*/l^2)$ ,  $k_* = \min_{[0,l]} k(x) > 0$  olsun. (2.29) parabolik probleminin  $\Delta u \in \dot{V}^{1,0}(\Omega_T)$  çözümü için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\|\Delta u(x, T; F)\|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon_0} \|\Delta F\|_{L_2(0,l)}^2 \cdot \|H\|_{L_2(0,T)}^2 \Rightarrow \|\Delta u(\cdot, T; F)\|^2 = O(\|\Delta F\|^2).$$

Böylece tanıma göre  $J_1(F)$  değer fonksiyonelinin  $J'_1(F)$  Fréchet gradyanını

$$J'_1(F)(x) = \int_0^T \varphi(x, t; F) H(t) dt$$

şeklinde buluruz.

Bu formül  $J_1(F)$  değer fonksiyonelinin  $J'_1(F)$  Frechet gradyanının bilinen  $H(t)$  kaynak fonksiyonu ile iyi tanımlı ters yönlü parabolik eşlenik probleminin  $\varphi(x, t; F)$  çözümünün  $L_2$  iç çarpımı olduğunu gösterir. Bunu  $J'_1(F(x)) = (\varphi(x, \cdot; F), H)_{L_2[0,l]}$  biçiminde gösteririz.

## 2.6 Eşlenik Gradyan Yöntemi

$F(x)$  uzay değişkenine bağlı ters kaynak fonksiyonunun belirlenmesi probleminde, uygun durdurma adımını seçerek Eşlenik Gradyan Yöntemini (EGY) kullanalım. M. R. Hestenes and E. Stiefel tarafından geliştirilen bu yöntem, katsayı matrisi simetrik ve pozitif tanımlı olan lineer denklem sistemlerinin sayısal çözümü için kullanılan iteratif bir algoritmadır. Yöntemin iterasyon şeması aşağıdaki şekilde verilir.[18],[21],[28]

### 1. Basamak

$n = 0$  olsun,  $F^{(n)}(x)$  başlangıç iterasyonunu, (2.1) probleminin çözümünü  $F(x) = F^{(n)}(x)$  ile birlikte bulmak için ve

$$r^{(n)}(x) := (\Phi F^{(n)})(x) - u_T^\gamma(x).$$

rezidüsünü belirlemek için seçelim.

### 2. Basamak

$J'[F^{(n)}]$  gradyanının  $J'_\alpha(F^{(n)})$  ayrık analogunu hesaplayalım.  $p^{(n)}(x)$  iniş yönünü

$$p^{(n)}(x) := \begin{cases} J'_\alpha(F^{(n)})(x), & n = 0 \\ J'_\alpha(F^{(n)})(x) + \frac{\|J'_\alpha(F^{(n)})\|_{L_2(0,l)}^2}{\|J'_\alpha(F^{(n-1)})\|_{L_2(0,l)}^2} p^{(n-1)}(x), & n \geq 1. \end{cases}$$

kuralına göre bulalım.

### 3. Basamak

$\beta^{(n)} > 0$  iniş parametresini

$$J_\alpha(F^{(n)} - \beta^{(n)}p^{(n)}) = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}} J_\alpha(F^{(n)} - \beta p^{(n)}), \quad (\text{EGA-1})$$

$$\beta^{(n)} = \frac{\langle \Phi F^{(n)} - u_T^\gamma, \Phi p^{(n)} \rangle + \alpha \langle F^{(n)}, p^{(n)} \rangle}{\|\Phi p^{(n)}\|_{L_2(0,l)}^2 + \alpha \|p^{(n)}\|_{L_2(0,l)}^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\langle J'_\alpha(F^{(n)}), p^{(n)} \rangle}{\|\Phi p^{(n)}\|_{L_2(0,l)}^2 + \alpha \|p^{(n)}\|_{L_2(0,l)}^2}, \quad (\text{EGA-2})$$

formülünden elde edelim.

#### 4. Basamak

$F^{(n+1)}(x) = F^{(n)}(x) - \beta^{(n)}p^{(n)}(x)$  ve  $r^{(n+1)}(x)$  formüllerinden  $n+1$ . iterasyonu hesaplayalım.

#### 5. Basamak

Eğer algoritmayı durdurma koşulu

$$\|r^{(n+1)}\|_{L_2(0,l)} < \varepsilon_J,$$

sağlanıyor ise 6. basamağa gidelim; koşul sağlanmıyor ise  $n = n + 1$  yazalım ve 2. basamağa geri dönelim.

#### 6. Basamak

İterasyon işlemini durduralım ve  $F^{(n)}(x)$  fonksiyonunun grafiğini çizdirelim.

Yukarıdaki algoritmadan görüldüğü üzere, EGY algoritmalarının arasındaki temel fark (2.31) formülleridir. Aşağıdaki lemma  $\beta^{(n)}$  için bu formüllerin denk olduğunu gösterir.

**Lemma 2.20.** [21]  $\Phi$  girdi-çıkı operatorü bir lineer operator ise (2.31) formülleri denktir.

*Kanıt.*  $\psi(\beta)$  fonksiyonunu:

$$\begin{aligned} \psi(\beta) &:= J_\alpha(F^{(n)} - \beta p^{(n)}) \\ &= \|\Phi F^{(n)} - \beta \Phi p^{(n)} - u_T^\gamma\|_{L_2(0,l)}^2 + \alpha \|F^{(n)} - \beta p^{(n)}\|_{L_2(0,l)}^2 \\ &= J_\alpha(F^{(n)}) - 2\beta (\langle \Phi F^{(n)} - u_T^\gamma, \Phi p^{(n)} \rangle + \alpha \langle F^{(n)}, p^{(n)} \rangle) \\ &\quad + \beta^2 (\|\Phi p^{(n)}\|_{L_2(0,l)}^2 + \alpha \|p^{(n)}\|_{L_2(0,l)}^2). \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım.

$\beta^{(n)}$  iniş parametresi  $\psi(\beta)$  fonksiyonunun bir ekstremumudur ve  $\psi'(\beta^{(n)}) = 0$  koşulundan elde edilir. Bu durumda  $\beta^{(n)}$  parametresini:

$$\begin{aligned} 0 = \psi'(\beta^{(n)}) &= -2 (\langle \Phi F^{(n)} - u_T^\gamma, \Phi p^{(n)} \rangle + \alpha \langle F^{(n)}, p^{(n)} \rangle) \\ &\quad + 2\beta^{(n)} (\|\Phi p^{(n)}\|_{L_2(0,l)}^2 + \alpha \|p^{(n)}\|_{L_2(0,l)}^2). \end{aligned}$$



biçiminde buluruz ve

$$\beta^{(n)} = \frac{\langle \Phi F^{(n)} - u_T^\gamma, \Phi p^{(n)} \rangle + \alpha \langle F^{(n)}, p^{(n)} \rangle}{\|\Phi p^{(n)}\|_{L_2(0,l)}^2 + \alpha \|p^{(n)}\|_{L_2(0,l)}^2} = \frac{\langle J'_\alpha(F^{(n)}), p^{(n)} \rangle / 2}{\|\Phi p^{(n)}\|_{L_2(0,l)}^2 + \alpha \|p^{(n)}\|_{L_2(0,l)}^2}.$$

eşitliğini elde ederiz. □

**Lemma 2.21.** [21]  $p^{(n)}$  iniş yönü,  $J_\alpha(F^{(n+1)})$  fonksiyonelinin gradyanına ortogondur;  $\langle J'_\alpha(F^{(n+1)}), p^{(n)} \rangle = 0$ .

*Kanıt.*  $F^{(n+1)} := F^{(n)} - \beta^{(n)} p^{(n)}$  olduğundan kanıtı doğrudan aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$\begin{aligned} \langle J'_\alpha(F^{(n+1)}), p^{(n)} \rangle &= \langle 2\Phi^*(\Phi F^{(n+1)} - u_T^\gamma), p^{(n)} \rangle + 2\alpha \langle F^{(n+1)}, p^{(n)} \rangle \\ &= \langle 2\Phi^*(\Phi F^{(n)} - \beta^{(n)}\Phi p^{(n)}) - u_T^\gamma, p^{(n)} \rangle + 2\alpha \langle F^{(n)} - \beta^{(n)}p^{(n)}, p^{(n)} \rangle \\ &= \langle 2\Phi^*(\Phi F^{(n)} - u_T^\gamma), p^{(n)} \rangle - 2\beta^{(n)} \langle \Phi^*\Phi p^{(n)}, p^{(n)} \rangle + 2\alpha \langle F^{(n)}, p^{(n)} \rangle - 2\alpha\beta^{(n)} \|p^{(n)}\|^2 \\ &= \langle J'_\alpha(F^{(n)}), p^{(n)} \rangle - 2\beta^{(n)} (\|\Phi p^{(n)}\|^2 + \alpha \|p^{(n)}\|^2) = 0. \end{aligned}$$

□

## Bölüm 3

# Ek Koşulu Aralığın Sol Ucunda Verilmiş Ters Kaynak Problemi

(2.1) parabolik probleminde eğer  $H(t)$  tek değişkenli kaynak fonksiyonu bilinmeyen ve  $F(x)$  de bilinen ise, bu durumda, fiziksel olarak anlamlı ve mümkün kılınabilir bir ek koşul, aralığın sol ucunda ısı akısına ( $g(t) := -k(0)u_x(0, t)$ ) ek olarak  $u(0, t)$  fonksiyonunun değeri olarak verilebilir. (2.1) probleminde  $u(0, t)$  fonksiyonunun değerini bir ek koşul olarak verelim:

$$h(t) = u(0, t), \quad t \in (0, T] \quad (3.1)$$

Bunun fiziksel anlamı aralığın sol ucunda ısının ölçüm değerlerinin deneysel olarak verilmesidir. (2.1) ve (3.1) denklemlerinden yola çıkarak *ters kaynak problemi* tanımlanabilir; uzay değişkenine bağlı  $F(x)$  fonksiyonu bilinen, zamana bağlı  $H(t)$  fonksiyonu bilinmeyendir ve (2.1), (3.1) probleminden  $u(x, t)$  fonksiyonu ile birlikte bulunması gerekir. Bu problemi TPH olarak tanımlayalım.

(2.1) parabolik probleminin zamana bağlı  $H(t)$  kaynak fonksiyonuna karşılık gelen çözümünü  $u = u(x, t; H)$  olarak gösterelim. Eğer bu fonksiyon (3.1) ek koşulunu da sağlıyor ise o halde  $u(0, t; H) = h(t)$  lineer olmayan fonksiyonel denkeminin de çözümü olacaktır. Ancak pratik uygulamalarda  $h(t)$  deneysel çıktı verisi  $\|h(t)_\delta - h(t)\| \leq \delta$  olacak şekilde bir  $\delta$  ölçüm hatası ile verilir. Bunun sonucu olarak yukarıdaki eşitliğin kesin olarak sağlanması söz konusu olamaz. Bu durumda (2.1), (3.1)

ters probleminin kesin çözümü yerine,

$$J_3(H) = \int_0^T [u(0, t; H) - h(t)]^2 dt$$

fonksiyoneline en küçük değerini veren  $H(t)$  elemanının aranması problemi anlamlıdır.

**Tanım 3.1.**

$$J_3(H_*) = \inf_{H \in \mathcal{H}} J_3(H) \quad (3.2)$$

en küçük değer probleminin çözümüne TPH probleminin *hemen hemen çözümü* denir. [3]  $J_3(H_*) = 0$  durumunda  $H_* \in \mathcal{H}$  elemanı aynı zamanda ters problemin *kesin* çözümü olur.[22]

TPH için girdi çıktı operatörü olarak bilinen:

$$\Upsilon : H \in L_2(0, l) \mapsto h(t) := u(x, t; H)|_{x=0} \in L_2(0, l)$$

operatörünü tanımlayalım. O halde TPH problemi

$$\Upsilon H = h$$

operatör denklemi olarak tanımlanabilir. Kısmi Türevli Denklemler teorisindeki uyum koşulları, buradaki ters problem için de geçerlidir. [19] Bu koşulları, düz problem için ikinci bölümde vermiştik. Öte yandan (3.1) ek koşulu ve  $u(x, 0) = u_0(x)$  başlangıç koşulundan, TPH ters problemi için ayrıca

$$u_0(0) = h(0)$$

uyum koşulu elde edilir. İleride  $u_0(x)$  ve  $h(t)$  fonksiyonlarının bu uyum koşulunu sağladığı varsayılmaktadır.

### 3.1 Girdi-Çıktı Operatörünün Kompaktlığı

**Teorem 3.2.** [18] *Eğer  $\mathcal{H}$  bir kompakt uzay,  $H(t) \in \mathcal{H}$  ve  $J(H)$  fonksiyoneli de sürekli ise, o halde (3.2) en küçük değer probleminin en azından bir çözümü vardır.*

Bu teoremden yola çıkarak,

$$\Upsilon : H \in L_2(0, l) \mapsto u(0, t; H) \in L_2(0, l)$$

girdi çıktı operatörünün kompaklığını kanıtlayalım.

**Teorem 3.3.** [18]  $\Upsilon : H \in L_2(0, T) \mapsto u(0, t; H) \in L_2(0, T)$  girdi- çıktı operatörü kompakt operatördür.

*Kanıt.*  $\{H_n\} \subset L_2(0, T)$  sınırlı bir dizi olsun. O halde Banach-Alaoglu teoremine göre Hilbert uzayında her bir sınırlı küme zayıf kompakttır:

$$\exists H \in L_2(0, T), \exists \{H_m\} \subset \{H_n\}, H_m \rightharpoonup H, m \rightarrow \infty$$

Teorem 2.6'ya göre  $u(x, t; H_m) \rightarrow u(x, t; H), \forall x \in [0, l], m \rightarrow \infty$ . Burada  $x = 0$  yazarsak  $u(0, t; H_m) \rightarrow u(0, t; H)$  sonucu elde edilir. Yani  $\Upsilon$  operatörü sınırlı diziyi yakınsak diziye dönüştürür, dolayısıyla kompakttır.  $\square$

*Uyarı 3.4.* (2.1) ile tanımlanmış parabolik problemin her bir  $H \in L_2(0, T)$  için tek bir  $u \in \mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$  çözümü olduğu için, sadece  $u(x, t; H_m)$  alt dizisi değil,  $u(x, t; H_n)$  dizisinin tümü de  $u(x, t; H)$ 'e yakınsar.

## 3.2 TPH Problemi için Fourier Yöntemi, Volterra Denklemi Üzerinden Problemin İfadesi

Fourier yöntemi ile ikinci bölümde bulunan

$$u_n(t) = u_{0n}e^{-k\lambda_n t} + F_n \int_0^t e^{-k\lambda_n(t-\tau)} H(\tau) d\tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

çözümünü ve  $h(t) = u(0, t)$  ek koşulunu dikkate alırsak (2.24)'ten

$$h(t) = u(0, t) = \sqrt{\frac{l}{2}} \varphi_n(0) \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$$

sonucunu elde ederiz.[18],[22] TPH probleminin çözümünün aranması durumunda her bir  $n$  için

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{0n} e^{-k\lambda_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \int_0^t e^{-k\lambda_n(t-\tau)} H(\tau) d\tau = h(t) \quad , n = 1, 2, 3, \dots, t \in (0, T] \quad (3.3)$$

denklem sisteminden  $H(t)$  fonksiyonunun bulunması gerekir.[18],[22]

Buradan

$$\tilde{h}(t) = h(t) - \sum_{n=0}^{\infty} u_{0,n} e^{-k\lambda_n t}, \quad K(t - \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-k\lambda_n(t-\tau)}$$

olmak üzere

$$\int_0^t K(t - \tau) H(\tau) d\tau = \tilde{h}(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots, t \in (0, T] \quad (3.4)$$

birinci tür Volterra integral denklemi elde edilir.

Bu integral denklemi, ters problemler açısından incelemek için, birinci tür Volterra integral denklemini önce genel durum için inceleyelim:

$$\int_0^t \hat{K}(t, \tau) H(\tau) d\tau = h(t) \quad t \in (0, T] \quad (3.5)$$

**Teorem 3.5.** [40] Eğer  $\hat{K} : \Pi := \{(t, \tau) \in (0, T] \times (0, t)\} \mapsto \mathbb{R}$  çekirdek fonksiyonu ve  $h : (0, T) \mapsto \mathbb{R}$  sağ taraf fonksiyonu

$$\hat{K} \in L_2(\Pi), \quad h \in L_2(0, T)$$

koşullarını sağlıyor ise o halde (3.5)'in sağ tarafının tanımlandığı

$$(\mathcal{K}H)(t) := \int_0^t \hat{K}(t, \tau) H(\tau) d\tau$$

operatörü kompakt operatördür.

Bu teoremin kanıtı, Arzelo Teoreminden yararlanarak elde edilir.

Bu teoremin sonucu olarak, TPH probleminin, (3.4)'ün sol tarafı ile belirlenen girdi-çıkı operatörü, kompakt operatördür. Bölüm 2.3'te de açıklandığı üzere, TPH problemi iyi tanımlanmamış problemdir.

*Uyarı 3.6.*  $F \in L_2(0, l)$  olduğundan dolayı, (3.4) denklemi için Teorem 3.4'ün koşulları sağlanır.

Volterra integral denklemlerle ilgili varlık ve teklik teoremleri klasik literatürde geniş bir biçimde ele alınmıştır. Burada biz, (3.4) denkleminin sayısal çözümü için bir ardışık yaklaşım yöntemi önereceğiz.

$$\overline{W_h} := \{W_\tau := \{t_i \in (0, T], x_i = \tau_i, \tau = T/N_t, i = \overline{1, N_t}\}, t_0 = 0$$

düzgün zaman şebekesini ele alalım.  $\tilde{h}_i := h(t_i)$  olarak gösterelim.  $t_i$  düğüm noktalarına ek olarak  $t_{i-1/2} = t_i - \tau/2$ ,  $i = \overline{1, N_t}$  ara düğüm noktalarını tanımlayalım. O halde ortalama değer teoreminden yararlanarak, adımları aşağıdaki biçimde belirleyebiliriz:

**1.**  $t = t_1$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} K(t_1 - \tau)H(\tau)d\tau &= \tilde{h}(t_1); \\ \int_{t_0}^{t_1} K(t_1 - \tau)H(\tau)d\tau &\approx K(t_1 - t_{1/2})H(t_{1/2})\tau; \\ K(t_1 - t_{1/2})H(t_{1/2}) &\approx \tilde{h}(t_1)/\tau \\ H_\tau(t_{1/2}) &= \frac{\tilde{h}_1}{\tau K(t_1 - t_{1/2})}, H_\tau(t_{1/2}) \approx H(t_{1/2}). \end{aligned}$$

**2.**  $t = t_2$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_2} K(t_2 - \tau)H(\tau)d\tau &= \tilde{h}(t_2) \\ \int_{t_0}^{t_1} K(t_2 - \tau)H(\tau)d\tau + \int_{t_1}^{t_2} K(t_2 - \tau)H(\tau)d\tau &= \tilde{h}_2; \\ K(t_2 - t_{3/2})H_\tau(t_{3/2})\tau &= \tilde{h}_2 - K(t_1 - t_{1/2})H_\tau(t_{1/2})\tau; \\ K(\tau/2)H_\tau(t_{3/2})\tau &= \tilde{h}_2/\tau - K(\tau/2)H_\tau(t_{1/2}); \\ H(t_{3/2}) &= \frac{\tilde{h}_2}{\tau K(\tau/2)} - H_\tau(t_{1/2}). \end{aligned}$$

**N.**

$$H(t_{(2N-1)/2}) = \frac{\tilde{h}_N}{(\tau)K(\tau/2)} - \sum_{j=1}^{N-1} H_\tau(t_{(N-j)-1/2}).$$

### 3.3 Eşlenik Problem Yaklaşımı, Değer Fonksiyonelinin Gradyanının Hesaplanması

TPH problemi için ikinci bölümdeki işlemlere benzer şekilde  $J_3(H)$  değer fonksiyonelinin  $J'(H)$  gradyanını elde edelim.

(2.1) parabolik probleminin  $H(t)$  zamana bağlı kaynak fonksiyonuna karşılık gelen çözümü

$u = u(x, t; H)$  ve  $H, H + \Delta H \in \mathcal{H}$  olmak üzere  $J_3(H)$  değer fonksiyoneli için gradyan formülünü elde etmek amacıyla, bu değer fonksiyonelinin birinci varyasyonunu  $\Delta J_3(H) := J_3(H + \Delta H) - J_3(H)$  şeklinde göstereyim. Bu durumda.  $\Delta u(x, t; \Delta H) = u(x, t; H + \Delta H) - u(x, t; H)$  fonksiyonu

$$\begin{cases} \Delta u_t = (k(x)\Delta u_x)_x + F(x) \Delta H(t), & (x, t) \in \Omega_T, \\ \Delta u(x, 0) = 0, & x \in (0, l), \\ \Delta u_x(0, t) = 0, \Delta u(l, t) = 0, & t \in (0, T]. \end{cases} \quad (3.6)$$

parabolik probleminin çözümü olmak üzere

$$\Delta J_3(H) = 2 \int_0^T [\Delta u(0, t; \Delta H) - h(t)] \Delta h(t) dx + \int_0^T [\Delta u(0, t; \Delta H)]^2 dx, \quad (3.7)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada  $\psi(x, t; H)$  fonksiyonu,

$$\begin{cases} \psi_t = -(k(x)\psi_x)_x, & (x, t) \in \Omega_T, \\ \psi(x, T; H) = 0, & x \in (0, l), \\ -k(0)\psi_x(0, t) = 2[u(0, t; H) - h(t)], \psi(l, t) = 0, & t \in (0, T]. \end{cases} \quad (3.8)$$

parabolik probleminin zayıf çözümüdür.

Bu parabolik problem (2.1), (3.1) ile belirlenmiş olan TPH problemine karşılık gelen *eşlenik problem*dir. (3.7) formülü yardımıyla  $\forall \Delta H \in L_2(0, T)$  olmak üzere  $J_3(H)$  değer fonksiyonelinin birinci varyasyonu için

$$\begin{aligned} \Delta J_3(H) &= \int_0^T \left( \int_0^l \psi(x, t; H) F(x) dx \right) \Delta H(t) dt + o(\|\Delta u(0, \cdot; \Delta H)\|^2), \\ o(\|\Delta u(0, \cdot; \Delta H)\|^2) &=: \int_0^T [\Delta u(0, \cdot; \Delta H)]^2 dx \end{aligned}$$

formülüne ulaşırız.

**Lemma 3.7.** [17] *Eğer 2.6 koşulları sağlanıyor ise, o halde*

$$\int_0^T [\Delta u(0, t; \Delta H)]^2 dt \leq M_0 \|\Delta H\|_{L_2(0, T)}^2, \quad M_0 = lc_\Omega/k_* > 0.$$

*Kanıt.* (2.8) eşitsizliğini (3.5) problemine uygulayalım ( $\Delta u(x, 0) = 0$ ):

$$\begin{aligned} & \|\Delta u(\cdot, t; \Delta H)\|_{L_2(0, l)} + 2k_* \|\Delta u_x(\cdot, \cdot; \Delta H)\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \\ & \leq 2\|F\|_{L_2(0, l)} \cdot \|\Delta H\|_{L_2(0, T)} \cdot \|\Delta u(\cdot, \cdot; \Delta H)\|_{L_2(\Omega_T)}. \end{aligned}$$

Buradan,  $\forall v \in \dot{H}^1$  için  $\|u\| \leq c_\Omega \|u_x\|$ ,  $c_\Omega > 0$  poicare eşitsizliğini de dikkate alarak, önce

$$k_* \|\Delta u_x(\cdot, \cdot; \Delta H)\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \leq \|F\|_{L_2(0, l)} \cdot \|\Delta H\|_{L_2(0, T)} \cdot \|\Delta u(\cdot, \cdot; \Delta H)\|_{L_2(\Omega_T)},$$

daha sonra da

$$\|\Delta u_x(\cdot, \cdot; \Delta H)\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \leq (c_\Omega/k_*) \|F\|_{L_2(0, l)} \cdot \|\Delta H\|_{L_2(0, T)} \quad (3.9)$$

Öte yandan, (3.6)'teki sınır koşullarından

$$\Delta u(0, t; \Delta H) = - \int_0^l \Delta u_x(x, t; \Delta H) dx$$

$$(\Delta u(0, t; \Delta H))^2 \leq \left( \int_0^l 1^2 dx \right) \left( \int_0^l (\Delta u_x(x, t; \Delta H))^2 dx \right)$$

sonucunu elde ederiz. Bunun her iki tarafını  $[0, T]$  aralığında integrallersek

$$\int_0^T (\Delta u(0, t; \Delta H))^2 dt \leq l \int_0^T (\Delta u_x(x, t; \Delta H))^2 dx$$

olur.

(3.9) ile birlikte buradan kanıt elde edilir.  $\square$

Bu yüzden  $J_3(H)$  değer fonksiyonelinin  $J'_3(H)$  Frechet gradyanını

$$J'_3(H)(t) = \int_0^l \psi(x, t; H) F(x) dx$$



şeklinde buluruz.

Bu formül  $J_3(H)$  değer fonksiyonelinin  $J'_3(H)$  Frechet gradyanının bilinen  $F(x)$  kaynak fonksiyonu ile iyi tanımlı ters yönlü parabolik eşlenik probleminin  $\psi(x, t; H)$  çözümünün  $L_2$ - iç çarpımı olduğunu gösterir. Bunu  $J'_3(H(t)) = (\psi(x, \cdot; H), F)_{L_2[0, T]}$  biçiminde gösteririz.

### 3.4 Eşlenik Gradyan Yöntemi

İkinci bölüme benzer şekilde  $H(t)$  zamana bağlı ters kaynak fonksiyonunun belirlenmesi probleminde, uygun durdurma adımını seçerek Eşlenik Gradyan Yöntemini (EGY) kullanalım. Yöntemin iterasyon şeması aşağıdaki şekilde verilir.[18],[21],[28]

#### 1. Basamak

$n = 0$  olsun,  $H^{(n)}(t)$  başlangıç iterasyonunu (2.1) probleminin çözümünü  $H(t) = H^{(n)}(t)$  ile birlikte bulmak için ve

$$r^{(n)}(t) := (\Upsilon H^{(n)})(t) - h^\gamma(t).$$

rezidüsünü belirlemek için seçelim.

#### 2. Basamak

$J'[H^{(n)}]$  gradyanının  $J'_\alpha(H^{(n)})$  ayrık analogunu hesaplayalım.  $p^{(n)}(t)$  iniş yönünü

$$p^{(n)}(t) := \begin{cases} J'_\alpha(H^{(n)})(t), & n = 0 \\ J'_\alpha(H^{(n)})(t) + \frac{\|J'_\alpha(H^{(n)})\|_{L_2(0, T)}^2}{\|J'_\alpha(H^{(n-1)})\|_{L_2(0, T)}^2} p^{(n-1)}(t), & n \geq 1. \end{cases}$$

kuralına göre bulalım.

#### 3. Basamak

$\beta^{(n)} > 0$  iniş parametresini

$$J_\alpha(H^{(n)} - \beta^{(n)} p^{(n)}) = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}} J_\alpha(H^{(n)} - \beta p^{(n)}), \text{ (EGA ("Eşlenik Gradyan Yöntemi Algoritması"))}$$

$$\beta^{(n)} = \frac{\langle \Upsilon H^{(n)} - u_T^\gamma, \Upsilon p^{(n)} \rangle + \alpha \langle H^{(n)}, p^{(n)} \rangle}{\|\Upsilon p^{(n)}\|_{L_2(0, T)}^2 + \alpha \|p^{(n)}\|_{L_2(0, T)}^2} = \frac{1}{2} \frac{\langle J'_\alpha(H^{(n)}), p^{(n)} \rangle}{\|\Upsilon p^{(n)}\|_{L_2(0, T)}^2 + \alpha \|p^{(n)}\|_{L_2(0, T)}^2},$$

formülünden elde edelim.

#### 4. Basamak

$H^{(n+1)}(t) = H^{(n)}(t) - \beta^{(n)}p^{(n)}(t)$  ve  $r^{(n+1)}(t)$  formüllerinden  $n+1$ . iterasyonu hesaplayalım.

### 5. Basamak

Eğer algoritmayı durdurma koşulu

$$\|r^{(n+1)}\|_{L_2(0,T)} < \varepsilon_J,$$

sağlanıyor ise 6. basamağa gidelim; koşul sağlanmıyor ise  $n = n + 1$  yazalım ve 2. basamağa geri dönelim.

### 6. Basamak

İterasyon işlemini durduralım ve  $H^{(n)}(t)$  fonksiyonunun grafiğini çizdirelim.

$\beta^{(n)}$  için (3.10) formüllerinin denk olduğu Lemma 2.20'nin kanıtındaki işlemler yapılarak, benzer şekilde görülür.

## 3.5 $L_2[0, l]$ ve $H^1[0, l]$ Sobolev Uzayında Lagrange Baz Fonksiyonları için Hata Değerlendirmesi

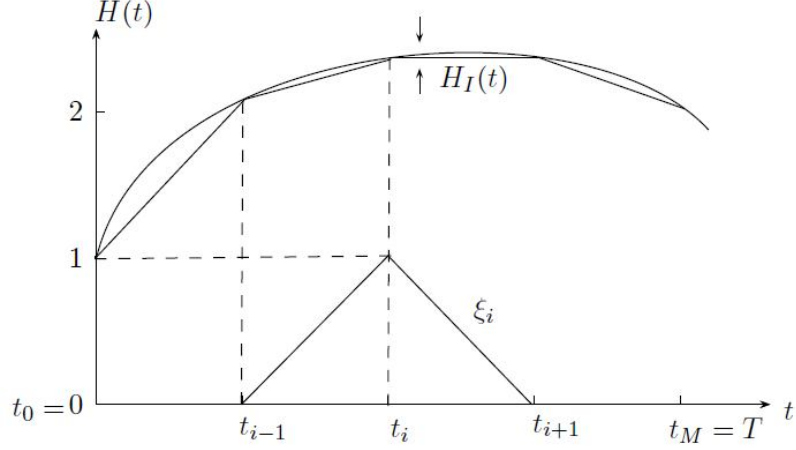
Fourier Yöntemi ile TPH problemini (3.3) integral denkleme dönüştürdük. Bu integral denklemin sayısal çözümü için önce  $\xi_m(t)$  Lagrange türü parçalı lineer sürekli baz fonksiyonlarını kullanalım. Bunun için önce  $[0, T]$  aralığında

$$\overline{W}_\tau := \{t_i \in [0, T] : t_0 = 0, t_i = t_{i-1} + i\tau, \tau = l/N_t, i = \overline{1, M}\}, W_\tau := \overline{W}_\tau \setminus \{t_0; t_{N_t}\}$$

düzgün şebekesini tanımlayarak Lagrange baz fonksiyonlarının  $L_2[0, l]$  ve  $H^1[0, l]$  uzaylarında hata değerlendirmesini verelim.[20]

$$\xi_i(t) = \begin{cases} (t - t_{i-1})/\tau, & t \in (t_{i-1}, t_i], \\ -(t - t_{i+1})/\tau, & t \in (t_i, t_{i+1}] \\ 0, & t \in [0, T] \setminus (t_{i-1}, t_{i+1}) \end{cases}$$

sürekli parçalı diferansiyellenebilir 1. dereceden Lagrange baz fonksiyonunu göz önünde bulunduralım. (Şekil 3.1)



ŞEKİL 3.1: Lagrange baz fonksiyonları ve  $H(t)$  fonksiyonunun baz fonksiyonları ile ayrışımı

Herhangi bir  $H(t) \in H^1[0, T]$  fonksiyonunun  $\xi_m(t)$  baz fonksiyonları ile

$$H_I(t) = \sum_{m=1}^M H_m \xi_m(t), \quad t \in [0, T] \quad (3.11)$$

ayrışımını ele alalım.  $H_I(t)$  parçalı lineer fonksiyonunun  $H_I(t_i) = H(t_i)$ ,  $\forall t_i \in W_\tau$  özelliğini sağladığı açıkça görülmektedir.

**Teorem 3.8.**  $H(t) \in H^2(0, T)$  ise  $\tau > 0$  adımlı düzgün  $\overline{W}_h$  şebekesinde  $H(t)$  fonksiyonuyla bunun  $H_I(t)$  lineer interpolantı arasındaki fark  $L_2(0, l)$  ve  $H^1(0, l)$  uzaylarının normunda aşağıdaki gibi değerlendirilir:

$$\|H - H_I\|_{L_2(0, l)} \leq M_0 \tau^2.$$

$$\|H - H_I\|_{H^1(0, l)} \leq M_1 \tau.$$

*Kanıt.*  $\delta(t) = H(t) - H_I(t)$  olsun;  $t \in [0, T]$ . O halde integralin toplanabilirlik özelliğine göre

$$\|\delta\|_{L_2[0, T]}^2 := \int_0^T \delta^2(t) dt = \sum_{i=1}^{N_t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \delta^2(t) dt \quad (3.12)$$

olduğu görülür.

$\|\delta\|_0$  normunu her bir  $e_i = [t_{i-1}, t_i]$  sonlu elemanında değerlendirmek için

$t \in [t_{i-1}, t_i]$  değişkenini  $s = t - t_{i-1}/\tau$  biçiminde değiştirelim. Bu durumda  $s \in [0, T]$  olmak üzere

$$\int_0^T \delta^2(t) dt = \tau \int_0^T \tilde{\delta}^2(s) ds \quad (3.13)$$

olur. Burada  $\tilde{\delta}(s)$  fonksiyonu  $\tilde{\delta}(s) = \delta(t - t_{i-1}/\tau)$  biçiminde tanımlanmıştır. Eşitliğin sağ tarafında

$$\|v\|_0 \leq c_0 \|v'\|_0 \leq c_1 \|v''\|_0$$

eşitsizliklerini göz önünde bulunduralım ve  $H_I(t)$  bir lineer polinom olduğundan

$\tilde{\delta}(s) = \tilde{H}(s)$ ,  $t \in [0, T]$  olduğunu hesaba katarak

$$\int_0^T \tilde{\delta}^2(s) ds \leq c_0^2 \int_0^T (\tilde{\delta}'(s))^2 ds \leq c_1^2 \int_0^T (\tilde{H}''(s))^2 ds \quad (3.14)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(3.12)'da bunu göz önünde bulunduralım.

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \delta^2(t) dt \leq c_1^2 \tau \int_0^T (\tilde{H}''(s))^2 ds \quad (3.15)$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafında  $t \in [t_{i-1}, t_i]$  değişkenine geri dönersek

$(H(t) = H(t_{i-1} + \tau s) = \tilde{H}(s)$ ,  $H''(t) = \tau^2 \tilde{H}''(s)$ ,  $ds = \frac{1}{\tau} dt$ )

$$\int_0^T (\tilde{H}''(s))^2 ds = \tau^3 \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\tilde{H}''(t))^2 dt \quad (3.16)$$

olur. Buradan her bir  $e_i = [t_{i-1}, t_i]$  aralığında

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \delta^2(t) dt \leq c_1^2 \tau^4 \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\tilde{H}''(t))^2 dt \quad (3.17)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$M_i := c_1 \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\tilde{H}''(t))^2 dt, \quad M_0 := \max_{i=1, N_t} M_i > 0 \quad (3.18)$$

olmak üzere (3.17) eşitsizliğini (3.12)'de göz önünde bulundurursak teoremin birinci kısmını kanıtlamış oluruz.

Teoremin ikinci kısmını kanıtlamak için benzer şekilde

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\delta'(t))^2 dt = \frac{1}{\tau} \int_0^T (\tilde{\delta}'(s))^2 ds \quad (3.19)$$

eşitliğinden ve (3.14) eşitsizliğinden yararlanırsak

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\delta'(t))^2 dt = \frac{c_1^2}{c_0^2 \tau} \int_0^T (\tilde{H}''(s))^2 ds \quad (3.20)$$

eşitsizliğine ulaşırız. Sağ tarafa (3.16) eşitliğini göz önünde bulundurursak

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\delta'(t))^2 dt = \frac{c_1}{c_0} \tau^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\tilde{H}''(t))^2 dt \quad (3.21)$$

buluruz ve bu eşitsizlikleri  $e_i$  sonlu elemanları üzerinde toplarsak teoremin ikinci kısmını da kanıtlamış oluruz.[20] □

### 3.6 Kollokasyon Yöntemi ve TPH'nin Duyarlılık Derecesi

(3.11) yaklaşımını (3.3) denkleminde yerine koyarak

$$a_{nm} = \int_0^T \exp(-\lambda_n k(T-t)) \xi_m(t) dt, \quad b_n = \frac{u_{T,n} - u_{0,n} \exp(-\lambda_n kT)}{F_n}$$

olmak üzere, bilinmeyen  $\mathcal{H} = (H_1, H_2, H_3, \dots, H_M)^T$  vektörüne göre aşağıdaki lineer cebirsel denklem sistemini elde ederiz:

$$\sum_{m=1}^M a_{nm} H_m = b_n, \quad n = \overline{1, M}. \quad (3.22)$$

$\mathcal{A}$  katsayı matrisinin  $a_{nm}$  katsayılarını ve  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_M)^T$  kaynak vektörünü belirlemek için  $h(t)$  ölçülmüş çıktı verisi ile düz problemde verilen  $u_0(x)$  ve  $F(x)$  fonksiyonlarını kullanırız.  $\mathcal{A}$  katsayı matrisini ve  $\mathcal{B}$  kaynak vektörünü belirledikten sonra  $\mathcal{A}\mathcal{H} = \mathcal{B}$  denklem sistemini çözeriz. Böylece bilinmeyen zamana bağlı  $H(t)$  kaynak fonksiyonunu (3.11) formülü yardımıyla yeniden kurmuş oluruz.[18][28]

### 3.7 Sayısal Sonuçlar

Aşağıdaki örneklerde Eşlenik Gradyan Yöntemiyle (EGY)  $H(t)$  fonksiyonunun aranması ile ilgili TPH probleminin sayısal çözümü incelenmiştir. Buradaki temel sorular, iterasyonun durdurulması parametresinin doğru belirlenmesi, yaklaşım hatası ("convergence error") ile yakınsaklık hatasının ("accuracy error") davranışının incelenmesi ve rastgele ölçüm hatası değerinin ("random noise level") ters problemin çözümüne yansımalarının değerini belirlemektir.

**Örnek 3.1.** *Bu ve ilerideki örneklerde  $h(t) := u(0, t)$  ek verisi, analitik çözümden üretilmiştir.  $\Omega_T := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, l), t \in (0, T_f], T_f > 0\}$ ,  $l = 1, T_f = 1$  olmak üzere*

$$\begin{cases} u(x, t) = 10\exp(-t)x^2(1-x)^3, (x, t) \in \Omega_T \\ F(x) = 31x^5 - 63x^4 + 59x^3 - 43x^2 + 18x - 2, H(t) = 10\exp(-t) \\ k(x) = 1 + x^2, \end{cases} \quad (3.23)$$

*fonksiyonlarını ele alalım. Buradaki  $u(x, t)$  fonksiyonu aşağıdaki düz problemin çözümüdür.*

$$\begin{cases} u_t = (k(x)u_x)_x + F(x)H(t), (x, t) \in \Omega_T \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in (0, l), \\ u_x(0, t) = 0, u(l, t) = 0, t \in (0, T_f], \end{cases} \quad (3.24)$$

*$u(0, t) = x^2(1-x^3)$  ve bu nedenle bu fonksiyonu  $h(t)$  olarak kabul ederek*

$$h(t) := u(0, t), \quad t \in [0, T_f], \quad (3.25)$$

*ek koşulunu da (3.24)'e ekleyerek (3.24) – (3.25) ile ifade edilmiş TPH ters probleminin analitik çözümünün  $H(t) = 10\exp(-t)$ ,  $t \in (0, 1)$  olduğuna hükmedebiliriz.*

- 1) Düz problemin sayısal çözümü: Sayısal Hata
- 2) EGY'nin algoritması
- 3) Sayısal Analiz

Sürekli ısı iletkenliği katsayısı  $k(x)$

$N_x \times N_t$	$h$	$\tau$	$\varepsilon_u$
$101 \times 51$	0.01	0.02	$0.41 \times 10^{-3}$
$151 \times 51$	0.0067	0.02	$0.65 \times 10^{-4}$
$201 \times 51$	0.005	0.02	$0.16 \times 10^{-3}$
$201 \times 101$	0.005	0.01	$0.39 \times 10^{-4}$
$401 \times 101$	0.0025	0.01	$0.12 \times 10^{-3}$

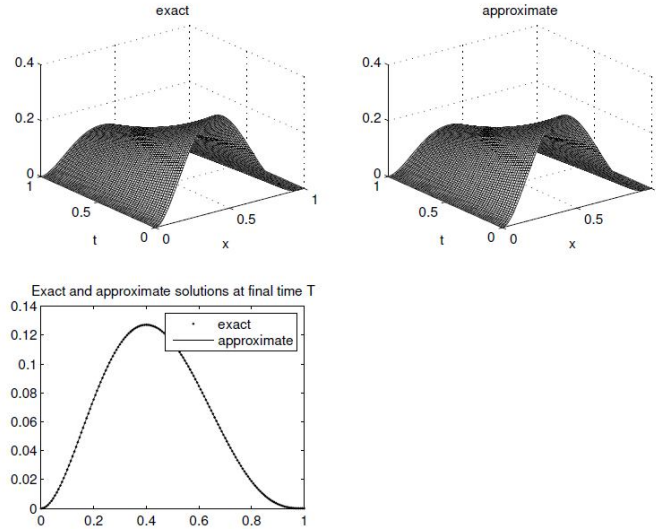
Sürekli olmayan ısı iletkenliği katsayısı  $k(x)$

$N_x \times N_t$	$h$	$\tau$	$\varepsilon_u$
$101 \times 51$	0.01	0.02	$0.10 \times 10^{-1}$
$151 \times 51$	0.0067	0.02	$0.97 \times 10^{-2}$
$201 \times 51$	0.005	0.02	$0.96 \times 10^{-2}$
$201 \times 201$	0.005	0.005	$0.10 \times 10^{-1}$
$401 \times 101$	0.0025	0.01	$0.99 \times 10^{-2}$

TABLO 3.1: Örnek 3.1.: Farklı şebeke parametreleri için  $\varepsilon_u$  hesaplama hataları

hepsi bu örnekte verilecektir. Diğer örnekler daha kısa anlatılacaktır.

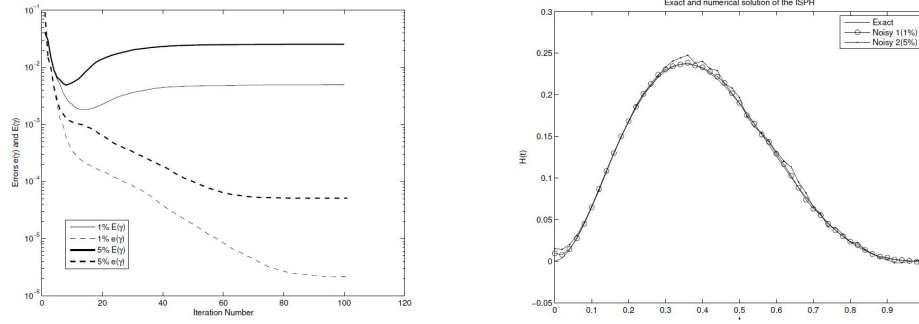
Tablo 3.1'de farklı şebeke parametreleri için hesaplama hataları verilmiştir.



ŞEKİL 3.2: Örnek 3.1.: Düz problemin yaklaşık ve gerçek çözümü

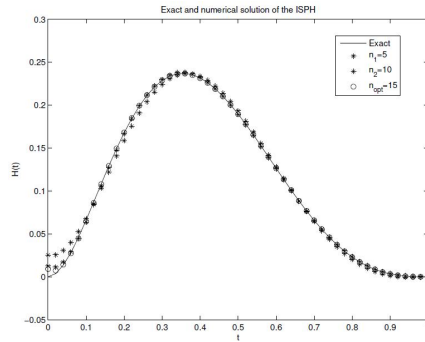
**Örnek 3.2.** İkinci bir örnek olarak düzgün konveks  $H(t) = 10\exp(-t)t^2(1-t)^3$  zamana bağlı kaynak fonksiyonunu EGA kullanarak kuralım. Sentetik gürültüsüz  $h(t) := u_h(0, t; H)$  çıktı verisi (3.24) düz probleminin  $u_h(x, t; H)$  sayısal çözümünden üretilmiştir. Isı iletkenliği katsayısı ve uzay değişkenine bağlı kaynak fonksiyonu sırasıyla  $k(x) = 1 + x^2$  ve  $F(x) = 5\exp(-3x)$  olarak verilmiştir. Rastgele

gürültülü  $h_\gamma(t) = h(t) + \gamma \text{rand}(h) \|h\|_\infty$  çıktı verisi 1% ve 5% gürültü seviyeleri ile ve gürültüsüz olarak üretilmiştir. Bu gürültü seviyelerine karşılık gelen yakınsaklık hataları sırasıyla  $E(n; H; \gamma) = 0.19 \times 10^{-2}$ ,  $E(n; H; \gamma) = 0.49 \times 10^{-2}$  ve  $E(n; H; \gamma) = 0.1 \times 10^{-2}$  olarak elde edilmiştir. Bu hatalar sırasıyla  $n = 14$ ,  $n = 8$ ,  $n = 15$  iterasyonlarına karşılık gelen hatalardır. Şekil 3.3 EGA ile elde edilen sayısal sonuçları göstermektedir.



ŞEKİL 3.3: Örnek 3.2.: Farklı gürültü parametreleri için yakınsaklık ve yakınsama hataları ile  $H(t)$ 'nin değişimi

**Örnek 3.3.** (EGA'nın iterasyon sayısına bağlı olarak yakınsaklık hatasının değişimi) Düzgün, zamana bağlı  $H(t) = 10 \exp(-t)t^2(1-t)^3$  kaynak fonksiyonunun farklı iterasyon sayıları için EGA ile bulunması problemini ele alalım. Isı iletkenliği katsayısı ve uzay değişkenine bağlı kaynak fonksiyonu sırasıyla  $k(x) = 1 + x^2$  ve  $F(x) = 5 \exp(-3x)$  olarak verilmiştir. Şekil düzgün, zamana bağlı kaynak fonksiyonunu ve  $n = 5$ ,  $n = 10$ ,  $n_{opt} = 15$  iterasyonlarına göre davranışını göstermektedir.



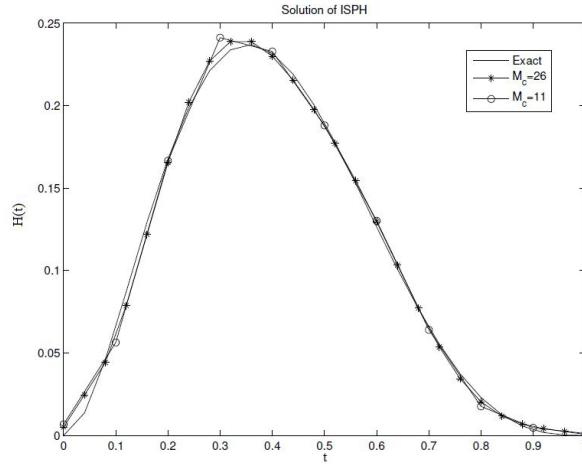
ŞEKİL 3.4: Örnek 3.3.: Farklı iterasyon sayıları için  $H(t)$ 'nin değişimi



**Örnek 3.4.** (Düzcün zamana bağlı kaynak fonksiyonunun İKY ("İleri Kollokasyon Yöntemi") ile bulunması) Zamana bağlı  $H(t) = 10\exp(-t)t^2(1-t)^3$  kaynak fonksiyonunu,  $F(x) = 5\exp(-3x)$  olmak üzere ve diğer tüm veriler ikinci örnekten alınmak üzere İKY ile  $M = 11$  ve  $M = 26$  kaba şebeke değerleri için bulalım. Burada sentetik  $h(t) := u_h(0, t; H)$  çıktı verisi (3.24) düz probleminin  $u_h(x, t; H)$  sayısal çözümünden üretilmiştir.

<i>PanelA</i>		
$M$	11	26
$E(n)$	$0.62 \times 10^{-2}$	$0.43 \times 10^{-2}$
<i>PanelB</i>		
$\gamma$	1%	5%
$E(n)$	$0.44 \times 10^{-2}$	$0.59 \times 10^{-2}$

TABLO 3.2: Örnek 3.4.: Farklı  $M$  değerleri (Panel A) ve  $M = 26$  optimal değer (Panel B) için çeşitli gürültü düzeyleri ile verilen  $E(n)$  yakınsaklık hataları



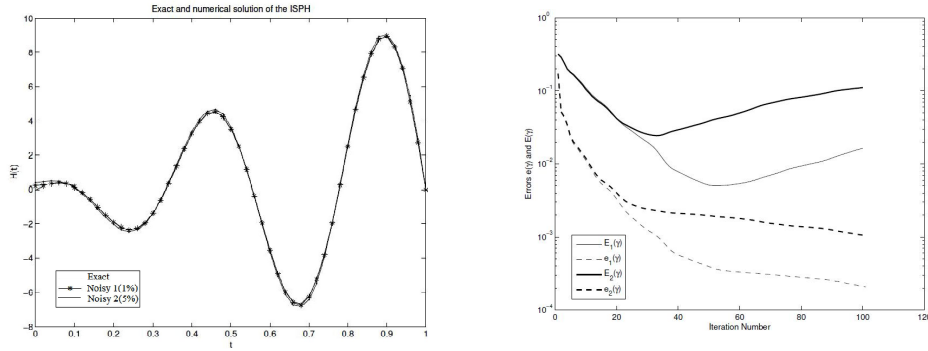
ŞEKİL 3.5: Örnek 3.4.: Farklı  $M$  değerleri için  $H(t)$ 'nin değişimi

**Örnek 3.5.** Zamana bağlı salınımlı  $H(t) = 10t\cos(9t\pi/2)$  kaynak fonksiyonunu bulmak için yukarıdaki adımları tekrarlayalım. Diğer tüm veriler önceki örneklerdeki gibi alınmıştır. Soldaki şekil  $\gamma = 0\%$ ,  $\gamma = 1\%$  ve  $\gamma = 5\%$  gürültü düzeyleri ile bulunan kaynak fonksiyonunu, sağdaki şekil ise  $e(n; H; \gamma)$  yakınsama hatasının ve  $E(n; H; \gamma)$  yakınsaklık

hatasının  $n$  iterasyon sayısına bağılı olarak değişimini göstermektedir. Bu hataların optimal değerlerinin yanısıra  $n^{opt}$  değerleri Tablo 3.3'te verilmiştir.

NoiseLevels(%)	$e(n^{opt}; H; \gamma)$	$n^{opt}$	$E(n^{opt}; H; \gamma)$
$\gamma = 0$	$0.9 \times 10^{-4}$	40	$0.15 \times 10^{-1}$
$\gamma = 1$	$0.9 \times 10^{-3}$	22	$0.56 \times 10^{-1}$
$\gamma = 5$	$0.8 \times 10^{-2}$	11	$0.14 \times 10^0$

TABLO 3.3: Örnek 3.5.:  $e(n; H; \gamma)$  yakınsama hatasının ve  $E(n; H; \gamma)$  yakınsaklık hatasının optimal değerleri ile  $n^{opt}$  değerleri

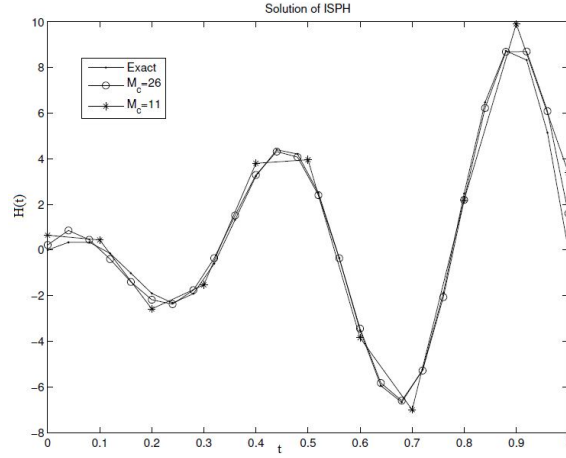


ŞEKİL 3.6: Örnek 3.5.: Farklı gürültü parametreleri için yakınsaklık ve yakınsama hataları ile  $H(t)$ 'nin değişimi

**Örnek 3.6.** (Zamana bağılı salınımlı kaynak fonksiyonunun İKY ("İleri Kollokasyon Yöntemi") ile bulunması) Zamana bağılı  $H(t) = 10t \cos(9t\pi/2)$  kaynak fonksiyonunu,  $F(x) = 5 \exp(-3x)$  olmak üzere ve diğer tüm veriler önceki örnekten alınmak üzere İKY ile  $M = 11$  ve  $M = 26$  kaba şebeke değerleri için bulalım.

Panel A		
$M$	11	26
$E(n)$	$0.85 \times 10^0$	$0.28 \times 10^0$
Panel B		
$\gamma$	1%	5%
$E(n)$	$0.29 \times 10^0$	$0.32 \times 10^0$

TABLO 3.4: Örnek 3.6.: Farklı  $M$  değerleri (Panel A) ve  $M = 26$  optimal değeri (Panel B) için çeşitli gürültü düzeyleri ile verilen  $E(n)$  yakınsaklık hataları



ŞEKİL 3.7: Örnek 3.6.: Farklı  $M$  değerleri için  $H(t)$ 'nin değişimi

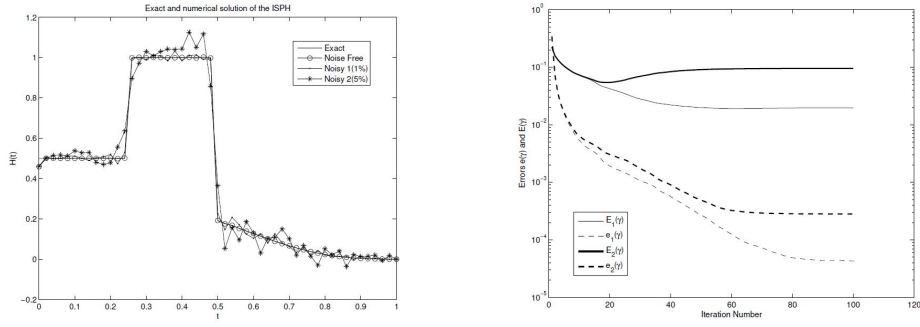
**Örnek 3.7.** (Zamana bağlı süreksiz kaynak fonksiyonunun bulunması.) (3.24) probleminde  $F(x) = 5\exp(-3x)$ ,  $u_0(x) = 0$  olsun. Zamana bağlı süreksiz

$$H(t) = \begin{cases} 0.5, & 0 \leq t < 0.25; \\ 1, & 0.25 \leq t < 0.5 \\ H(t) = 10\exp(-t)t^2(1-t)^3, & 0.5 \leq t < 1 \end{cases} \quad (3.26)$$

kaynak fonksiyonunun %1, %5 gürültü düzeyleri ile ve gürültüsüz olarak bulunması için EGA uygulanmıştır ve bu Şekil 3.8'de gösterilmiştir.

NoiseLevels(%)	$e(n^{opt}; H; \gamma)$	$n^{opt}$	$E(n^{opt}; H; \gamma)$
$\gamma = 0$	$0.45 \times 10^{-4}$	72	$0.15 \times 10^{-2}$
$\gamma = 1$	$0.19 \times 10^{-3}$	54	$0.16 \times 10^{-1}$
$\gamma = 5$	$0.27 \times 10^{-2}$	22	$0.56 \times 10^{-1}$

TABLO 3.5: Örnek 3.7.: Optimal iterasyon sayıları ve hata değerleri



ŞEKİL 3.8: Örnek 3.7.: Farklı gürültü parametreleri için yakınsaklık ve yakınsama hataları ile  $H(t)$ 'nin değişimi

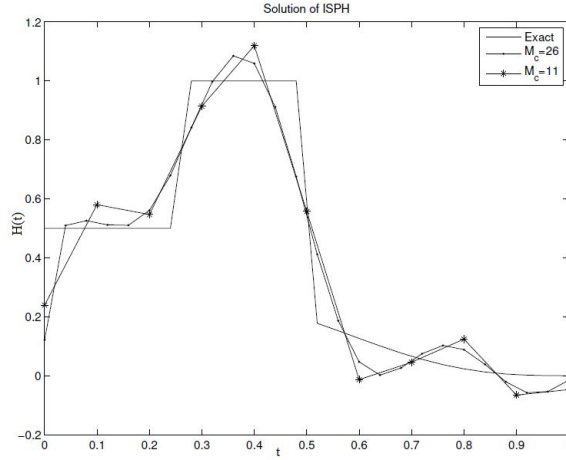
**Örnek 3.8.** (Zamana bağlı kaynak fonksiyonunun İKY ile bulunması.)  $F(x) = 5exp(-3x)$  olmak üzere  $M = 11$  ve  $M = 26$  için, zamana bağlı süreksiz

$$H(t) = \begin{cases} 0.5, & 0 \leq t < 0.25; \\ 1, & 0.25 \leq t < 0.5 \\ H(t) = 10exp(-t)t^2(1-t)^3, & 0.5 \leq t < 1 \end{cases}$$

kaynak fonksiyonunun bulunması amacıyla İKY algoritmasını uygulayalım.

<i>Panel A</i>		
$M$	11	26
$E(n)$	$0.16 \times 10^0$	$0.11 \times 10^0$
<i>Panel B</i>		
$\gamma$	1%	5%
$E(n)$	$0.1110 \times 10^0$	$0.1131 \times 10^0$

TABLO 3.6: Örnek 3.8.: Farklı  $M$  değerleri (Panel A) ve  $M = 26$  optimal değeri (Panel B) için çeşitli gürültü düzeyleri ile verilen  $E(n)$  yakınsaklık hataları



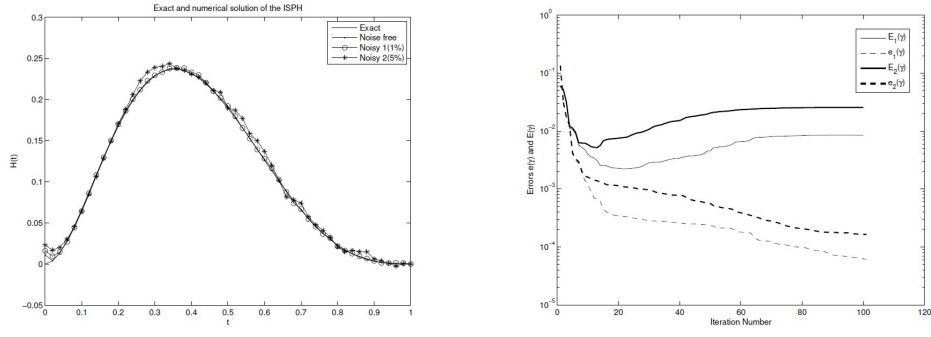
ŞEKİL 3.9: Örnek 3.8.: Farklı  $M$  değerleri için  $H(t)$ 'nin değişimi

**Örnek 3.9.**  $k(x) = 1$  ve  $l = 9\pi$  olduğunu göz önünde bulundurarak ve diğer tüm verileri Örnek 3.2'den alarak zamana bağlı kaynak fonksiyonunu EGA, İKY ve ÖDA ("Özdeğer Algoritması") kullanarak kuralım. Rastgele gürültülü  $h_\gamma(t) = h(t) + \gamma \text{rand}(h) \|h\|_\infty$  çıktı verisi 1% ve 5% gürültü seviyeleri ile ve gürültüsüz olarak üretilmiştir.

Şekil 3.10-3.11-3.12-3.13 sırasıyla EGA, İKY ve ÖDA ile elde edilen sayısal sonuçları göstermektedir. Her bir yöntem için hataların optimal değerleri ile  $n^{opt}$  optimal iterasyon sayıları Tablo 3.7,3.8,3.9 tablolarında verilmiştir.

NoiseLevels(%)	$e(n^{opt}; H; \gamma)$	$n^{opt}$	$E(n^{opt}; H; \gamma)$
$\gamma = 0$	$0.49 \times 10^{-5}$	52	$0.89 \times 10^{-3}$
$\gamma = 1$	$0.34 \times 10^{-3}$	19	$0.22 \times 10^{-2}$
$\gamma = 5$	$0.18 \times 10^{-2}$	12	$0.67 \times 10^{-2}$

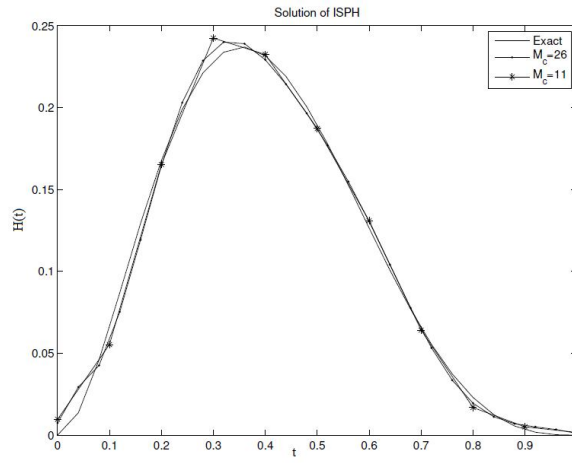
TABLO 3.7: Örnek 3.9.: Optimal hata değerleri ve iterasyon sayıları



ŞEKİL 3.10: Örnek 3.9.: Farklı gürültü parametreleri için yakınsaklık ve yakınsama hataları ile  $H(t)$ 'nin değişimi

<i>Panel A</i>		
$M$	11	26
$E(n)$	$0.7 \times 10^{-2}$	$0.6 \times 10^{-2}$
<i>Panel B</i>		
$\gamma$	1%	5%
$E(n)$	$0.6 \times 10^{-2}$	$0.7 \times 10^{-2}$

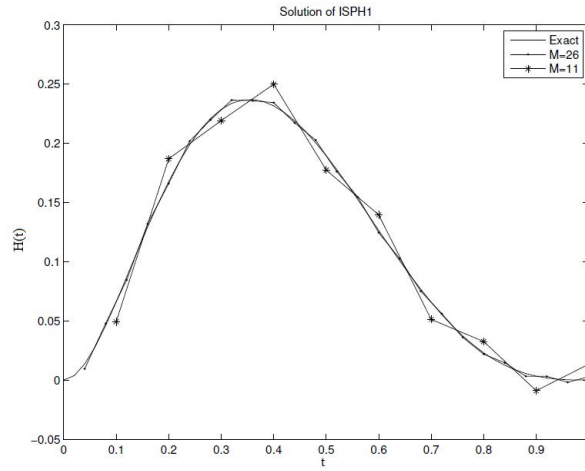
TABLO 3.8: Örnek 3.9.: Farklı  $M$  değerleri (Panel A) ve  $M = 26$  optimal değeri (Panel B) için çeşitli gürültü düzeyleri ile verilen  $E(n)$  yakınsaklık hataları



ŞEKİL 3.11: Örnek 3.9.: Farklı  $M$  değerleri için  $H(t)$ 'nin değişimi

<i>PanelA</i>		
$M$	11	26
$E(n)$	$0.7 \times 10^{-2}$	$0.6 \times 10^{-2}$
<i>PanelB</i>		
$\gamma$	1%	5%
$E(n)$	$0.6 \times 10^{-2}$	$0.7 \times 10^{-2}$

TABLO 3.9: Örnek 3.9.: Farklı  $M$  değerleri (Panel A) ve  $M = 26$  optimal değeri (Panel B) için çeşitli gürültü düzeyleri ile verilen  $E(n)$  yakınsaklık hataları

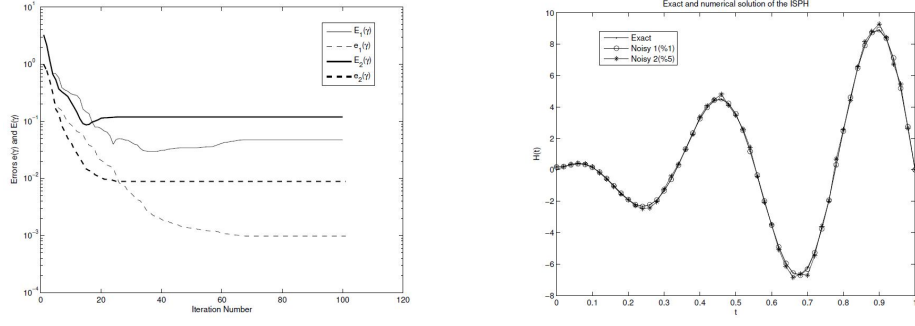


ŞEKİL 3.12: Örnek 3.9.: Farklı  $M$  değerleri için  $H(t)$ 'nin değişimi

**Örnek 3.10.** Zamana bağlı salınımlı  $H(t) = 10t\cos(9t\pi/2)$  kaynak fonksiyonunu bulmak için yukarıdaki adımları tekrarlayalım. Diğer tüm veriler önceki örnekteki gibi alınmıştır. Şekil 3.14-3.15 sırasıyla EGA, İKY ve ÖDA ile elde edilen sayısal sonuçları göstermektedir. Her bir yöntem için hataların optimal değerleri ile  $n^{opt}$  optimal iterasyon sayıları Tablo 3.10,3.11,3.12 tablolarında verilmiştir.

NoiseLevels(%)	$e(n^{opt}; H; \gamma)$	$n^{opt}$	$E(n^{opt}; H; \gamma)$
$\gamma = 0$	$0.49 \times 10^{-5}$	72	$0.14 \times 10^{-1}$
$\gamma = 1$	$0.26 \times 10^{-3}$	38	$0.31 \times 10^{-1}$
$\gamma = 5$	$0.18 \times 10^{-2}$	12	$0.67 \times 10^{-2}$

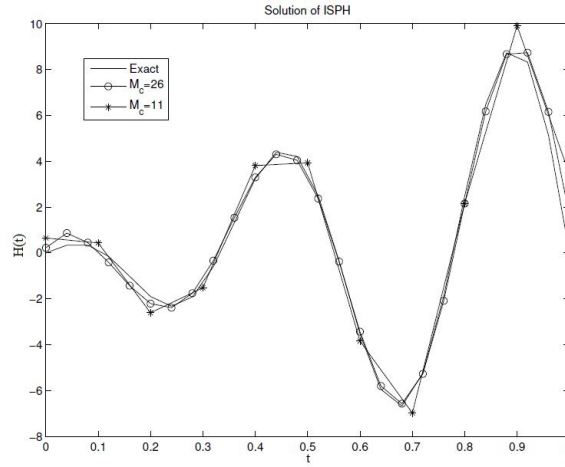
TABLO 3.10: Örnek 3.10.: Optimal hata değerleri ve iterasyon sayıları



ŞEKİL 3.13: Farklı gürültü parametreleri için yakınsaklık ve yakınsama hataları ile  $H(t)$ 'nin değişimi

<i>Panel A</i>		
$M$	11	26
$E(n)$	$0.85 \times 10^0$	$0.30 \times 10^0$
<i>Panel B</i>		
$\gamma$	1%	5%
$E(n)$	$0.31 \times 10^0$	$0.32 \times 10^0$

TABLO 3.11: Örnek 3.10.: Farklı  $M$  değerleri (Panel A) ve  $M = 26$  optimal değeri (Panel B) için çeşitli gürültü düzeyleri ile verilen  $E(n)$  yakınsaklık hatalar

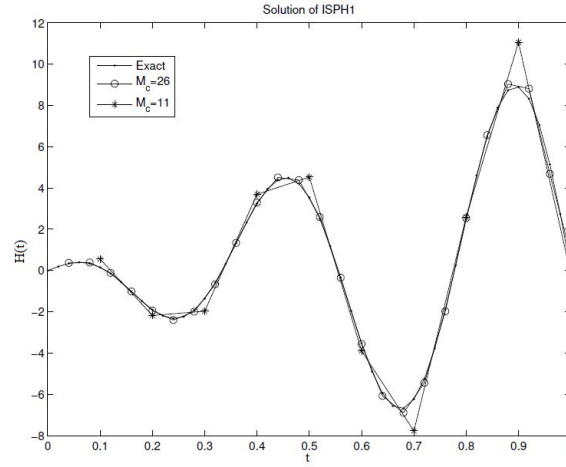


ŞEKİL 3.14: Örnek 3.10.: Farklı  $M$  değerleri için  $H(t)$ 'nin değişimi



<i>Panel A</i>		
$M$	11	26
$E(n)$	$0.56 \times 10^0$	$0.2 \times 10^0$
<i>Panel B</i>		
$\gamma$	1%	5%
$E(n)$	$0.28 \times 10^0$	$0.84 \times 10^0$

TABLO 3.12: Örnek 3.10.: Farklı  $M$  değerleri (Panel A) ve  $M = 26$  optimal değeri (Panel B) için çeşitli gürültü düzeyleri ile verilen  $E(n)$  yakınsaklık hataları



ŞEKİL 3.15: Örnek 3.10.: Farklı  $M$  değerleri için  $H(t)$ 'nin değişimi

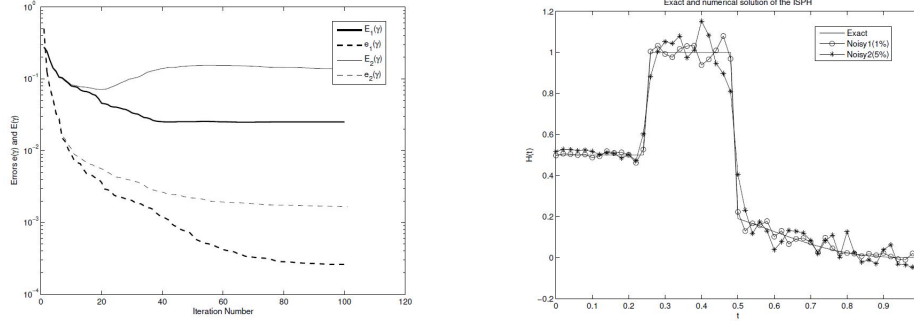
**Örnek 3.11.** Süreksiz

$$H(t) = \begin{cases} 0.5, & 0 \leq t < 0.25; \\ 1, & 0.25 \leq t < 0.5 \\ 10 \exp(-t)t^2(1-t)^3, & 0.5 \leq t < 1 \end{cases}$$

kaynak fonksiyonunu bulmak için yukarıdaki adımları tekrarlayalım. Diğer tüm veriler önceki örnekteki gibi alınmıştır.

NoiseLevels(%)	$e(n^{opt}; H; \gamma)$	$n^{opt}$	$E(n^{opt}; H; \gamma)$
$\gamma = 0$	$0.3 \times 10^{-3}$	62	$0.35 \times 10^{-2}$
$\gamma = 1$	$0.11 \times 10^{-2}$	42	$0.25 \times 10^{-1}$
$\gamma = 5$	$0.56 \times 10^{-2}$	20	$0.71 \times 10^{-1}$

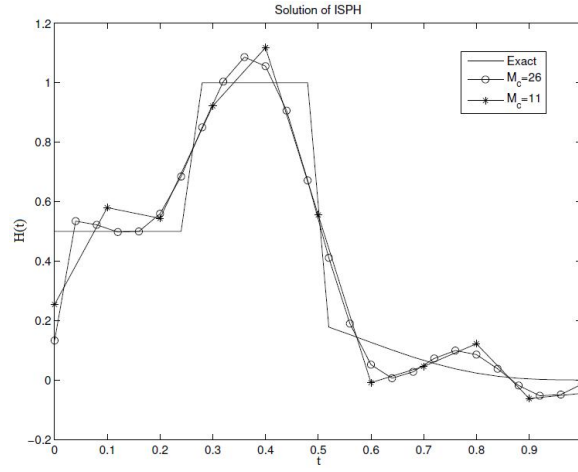
TABLO 3.13: Örnek 3.11.: Optimal hata değerleri ve iterasyon sayıları



ŞEKİL 3.16: Örnek 3.11.: Farklı gürültü parametreleri için yakınsaklık ve yakınsama hataları ile  $H(t)$ 'nin değişimi

PanelA		
$M$	11	26
$E(n)$	$0.16 \times 10^0$	$0.11 \times 10^0$
PanelB		
$\gamma$	1%	5%
$E(n)$	$0.11 \times 10^0$	$0.12 \times 10^0$

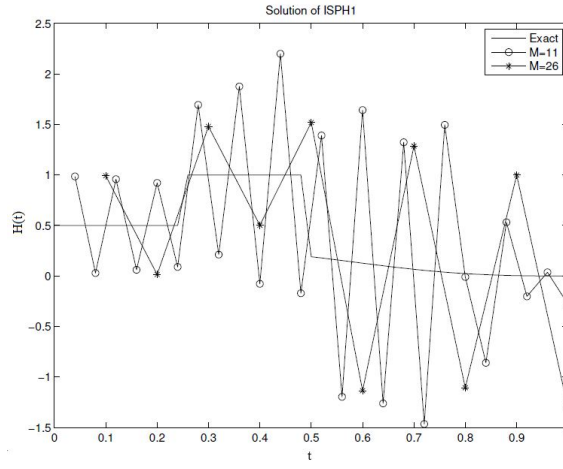
TABLO 3.14: Örnek 3.11.: Farklı  $M$  değerleri (Panel A) ve  $M = 26$  optimal değeri (Panel B) için çeşitli gürültü düzeyleri ile verilen  $E(n)$  yakınsaklık hataları



ŞEKİL 3.17: Örnek 3.11.: Farklı  $M$  değerleri için  $H(t)$ 'nin değişimi

<i>PanelA</i>		
$M$	11	26
$E(n)$	$0.92 \times 10^0$	$0.86 \times 10^0$
<i>PanelB</i>		
$\gamma$	1%	5%
$E(n)$	$0.89 \times 10^0$	$0.92 \times 10^0$

TABLO 3.15: Örnek 3.11.: Farklı  $M$  değerleri (Panel A) ve  $M = 26$  optimal değeri (Panel B) için çeşitli gürültü düzeyleri ile verilen  $E(n)$  yakınsaklık hataları



ŞEKİL 3.18: Farklı  $M$  değerleri için  $H(t)$ 'nin değişimi

# Kaynakça

- [1] R.A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic, New York, 1975.
- [2] S.S. Adavani and G. Biros. Fast algorithms for source identification problems with elliptic pde constraints. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 3:791–808, 2010.
- [3] A.N.Tikhonov and V.Arsenin. *Solution of Ill-Posed Problems*. Wiley, New York, 1977.
- [4] A.E. Badia, T.H. Duong, and A. Hamdi. Identification of a point source in a linear advection dispersion reaction: application to a pollution source problem. *Inverse Problems*, 21:1121–1136, 2005.
- [5] L. Beilina and M.V. Klibanov. *Approximate Global Convergence and Adaptivity for Inverse Coefficient Problems*. Springer, New York, 2012.
- [6] T. A. Burton. *Volterra Integral and Differential Equations*, volume 202. Mathematics in Science and Engineering, Elsevier Science, 2005.
- [7] I. Bushuyev. Global uniqueness for inverse parabolic problems with final observation. *Inverse Problems*, 11:L11–L16, 1995.
- [8] J.R. Cannon. Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15:470–84, 1990.
- [9] J.R. Cannon and P. DuChateau. Structural identification of an unknown source term in a heat equation. *Inverse Problems*, 14:535–51, 1998.
- [10] J.R. Cannon and D. Zachmann. Parameter identification in parabolic partial differential equations from overspecified boundary data. *Int. J. Engineering*, 20(6): 779–788, 1982.

- [11] J.P. Chancelier, M. Cohen de Lara, and F. Pacard. Existence of a solution in an age-dependent transport-diffusion pde: A model of settler. *Math. Models. Methods Appl. Sci.*, 5(3):267–278, 1995.
- [12] M. Choulli and M. Yamamoto. Genetic well-posedness of an inverse parabolic problem - the hölder space approach. *Inverse Problems*, 12:195–205, 1996.
- [13] H.W. Engl, O. Scherzer, and M. Yamamoto. Uniqueness and stable determination of forcing terms in linear partial differential equations with overspecified boundary data. *Inverse Problems*, 10:1253–1276, 1994.
- [14] A. Farcas and D. Lesnic. The boundary-element method for the determination of a heat source dependent on one variable. *Journal of Engineering Mathematics*, 54:375–388, 2006.
- [15] D.N. Háo. *Methods for Inverse Heat Conduction Problems*. Pater Lang, Berlin, 1998.
- [16] A. Hasanov. Coefficient stability and existence of a quasisolution of an inverse parabolic problem. *Applicable Analysis*, 67:1–9, 1997.
- [17] A. Hasanov. Simultaneous determination of source terms in linear parabolic problem from the final data overdetermination: weak solution approach. *J. Math. Anal. Appl.*, 330:766–779, 2007.
- [18] A. Hasanov. Identification of an unknown source term in a vibrating cantilevered beam from finoverdetermination. *Inverse Problems*, 25:19, 2009.
- [19] A. Hasanov. *Kısmi Türevli Denklemler*. Literatür, İstanbul, 2010.
- [20] A. Hasanov. *Varyasyonel Problemler ve Sonlu Elemanlar Yöntemi*. Literatür, İstanbul, 2011.
- [21] A. Hasanov and B. Pektaş. Identification of an unknown time-dependent heat source term from overspecified dirichlet boundary data by conjugate gradient method. *Computers and Mathematics with Applications*, 65:42–57, 2013.
- [22] A. Hasanov, M. Otelbaev, and B. Akpayev. Inverse heat conduction problems with boundary and final time measured output data. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 19(7):895–1006, 2011.

- [23] F. Hettlich and W.A. Rundell. Identification of a discontinuous source in the heat equation. *Inverse Problems*, 17:1465–82, 2001.
- [24] V.C.L. Hutson and J.S. Pym. *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*. Academic Press, New York, 1980.
- [25] V. Isakov. *Inverse Source Problems*. Providence: American Mathematical Society, 1990.
- [26] V.K. Ivanov, V.V. Vasin, and V.P. Tanana. *Theory of Linear Ill-Posed Problems and Its Applications*. VSP, Utrecht, 2002.
- [27] T. Johansson and D. Lesnic. Determination of a spacewise dependent heat source. *J. Comput. Appl. Math.*, 209:66–80, 2007.
- [28] A. Kirsch. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer-Verlag, New York, 2011.
- [29] O.A. Ladyzhenskaya. *Boundary Value Problems in Mathematical Physics*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [30] J. L. Lions, R. Conti, E. De Giorgi, and F. Giannessi. Distributed systems with uncomplete data and lagrange multipliers, in *optimization and related fields*. Springer-Verlag, pages 273–305, 1986.
- [31] J.L. Lions. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [32] B. Mukanova. Numerical reconstruction of unknown boundary data in the cauchy problem for laplace’s equation. *Inverse Problems in Science and Engineering*, DOI:10.1080/17415977.2012.744405:pp.1–13, 2012.
- [33] V.I. Plotnikov. Uniqueness and existence theorems and a priori properties of generalized solutions. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 165:1405–1407, 1965.
- [34] A.I. Prilepko and A.B. Kostin. On some inverse problems for parabolic equations with final and integral overdetermination. *Math. Sb.*, 183(4):pp. 49–68, 1992.
- [35] M. Renardy, W.J. Hursa, and J.A. Nohel. *Mathematical Problems in Viscoelasticity*. Wiley, New York, 1987.

- [36] A. I. Senatorov. Solvability of the inverse problem of a source, using overdetermination on the upper case for a parabolic equation. *Differential Equations*, 25: 1114–1119, 1990.
- [37] V.V. Solov'ev. Solvability of the inverse problem of a source, using overdetermination on the upper case for a parabolic equation. *Differential Equations*, 25: 1114–1119, 1990.
- [38] A.N. Tikhonov. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur. *Mat. Sborn.*, 42: 199–216, 1935.
- [39] M. Yamamoto. Conditional stability in determination of force terms of heat equations in a rectangle. *Math. Comput. Model.*, 18:79–88, 1993.
- [40] E. Zeidler. *Applied Functional Analysis: Main Principles and Their Applications Zeidler*. Springer Verlag, New York, 1995.