

İZMİR ÜNİVERSİTESİ



Parabolik Operatörler için Sınır Ölçümlerine Dayalı Ters Akı Problemlerinin Sayısal Analizi

Ege Tamcı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Burhan Pektaş

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

ARALIK, 2014

İZMİR ÜNİVERSİTESİ

**Parabolik Operatörler için Sınır Ölçümlerine
Dayalı Ters Akı Problemlerinin Sayısal Analizi**

Ege Tamcı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Burhan Pektaş

Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Aralık 2014

ÖZET

Parabolik Operatörler için Sınır Ölçümlerine Dayalı Ters Akı Problemlerinin Sayısal Analizi

Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ege TAMCI

Birçok bilim dalında incelenen gerçek dünya problemlerinin hemen hemen hepsinin matematiksel modeli kısmi türevli denklemlerle ifade edilirler. Isı transferi ve difüzyon gibi fiziksel problemler ise parabolik tip denklemlerle gösterilir. Bu problemlerde ise sınırdaki akı değerinin aranması ile ilgili ters problemler güncel matematik problemlerinin başında gelir.

$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$ olmak üzere $Au := \nabla(k(x)\nabla u(x, t))$ operatörüne eliptik operatör, bu operatörle verilen

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = Au(x, t) + F(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0,$$

denklemine ise parabolik tip denklem denir.

Bu çalışmada bir ve iki boyutlu uzayda verilen parabolik problemler ele alınarak sınırdaki ölçümlerden ve matematiksel modelden faydalanarak akının aranmasıyla ilgili ters problemlerin sayısal analizi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ters Akı Problemi, parabolik denklem, zayıf çözüm, iyi tanım lanmamış problem, Fourier yöntemi, Eşlenik Gradyan Algoritması.

ABSTRACT

Numerical Analysis of Inverse Heat Flux Problems Based on Boundary Measurements for Parabolic Operators

Graduate School of Engineering and Sciences
Department of Mathematics and Computer Science

Ege TAMCI

In most discipline, the mathematical model of the real world problems are given by the partial differential equations. The physical problems such as heat conduction and diffusion are modeled by parabolic type equations. Inverse problems like as inverse heat flux problems are most considered ones among these problems.

Let $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$, $Au := \nabla(k(x)\nabla u(x, t))$ is called elliptic operator, and the equation given by this operator

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = Au(x, t) + F(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0,$$

is called parabolic type equation.

In this work, the parabolic problems given in one and two dimensional space are considered. Using mathematical model and measurements at the boundary, numerical analysis of the considered inverse problems are investigated.

Key Words: Inverse flux problem, parabolic equation, weak solution, ill-posed problem, Fourier method, conjugate gradient algorithm.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Ters problemler, arka planında doğadaki problemlerin modellenmesi ve simülasyonu olan, günümüzde matematik ve fen alanında en çok araştırılan matematiksel problemlerden-
dir. Ters problemlerin içerdiği iki önemli sınıftan biri olan ters kaynak problemleri ise
matematik ve mühendislik bilimlerinin ilgilendiği en önemli konulardan biridir.

Bu çalışmada bir ve iki boyutlu lineer ve lineer olmayan (nonlinear) parabolik prob-
lemlerde akı fonksiyonlarının aranması ile ilgili ters problemler ele alınacaktır. Her iki
problemin hem matematiksel analizi, hem de sayısal çözüm yöntemleri bu çalışmada ele
alınmaktadır.

Beni bu alanda çalışmaya teşvik eden ve her zaman bilgi ve deneyimleriyle bana yol
gösteren değerli hocam sayın Doç. Dr. Burhan Pektaş'a en içten teşekkürlerimi sunarım
ve çalışmam boyunca bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren saygıdeğer hocam Prof. Dr.
Alemdar Hasanoğlu'na ve her konuda sabırla yardımcı olan aileme desteklerinden dolayı
çok teşekkür ederim.

Burada yapılan araştırmalarda yer alan çalışmaların, gelecekte konu ile ilgilenen araştır-
macılara faydalı olmasını dilerim.

İçindekiler

Özet	i
Abstract	ii
Önsöz ve Teşekkür	iii
Şekil Listesi	v
Tablo Listesi	viii
1 Giriş	1
2 Ek Koşulu Sınırdaki Verilmiş Bir Boyutlu Lineer ve Lineer Olmayan Parabolik Ters Akı Problemi	3
2.1 LTAP1 Problemi, Kesin ve Hemen Hemen Çözümler, Uyum Koşulları . . .	3
2.2 Ters Problemin Zayıf Çözümüne Dayalı Hemen Hemen Çözümü ve Girdi-Çıktı Operatörlerinin Kompaktlığı	5
2.3 Eşlenik Problem Yaklaşımı ve Quasi Çözümün Varlığı ve Tekliği	9
2.4 LTAP1 Problemi için Fourier Yöntemi	12
2.5 Eşlenik Gradyan Yöntemi	13
2.6 Ek Koşulu Sınırdaki Verilmiş Bir Boyutlu Lineer Olmayan Parabolik Ters Akı Problemi	16
2.7 Lineer ve Lineer Olmayan Düz ve Ters Problemler için Sayısal Örnekler .	17
3 Ek Koşulu Sınırdaki Verilmiş İki Boyutlu Lineer ve Lineer Olmayan Parabolik Ters Akı Problemi	30
3.1 Ek Koşulu Sınırdaki Verilmiş İki Boyutlu Lineer Parabolik Ters Akı Problemi	30
3.2 LTAP2 Problemi için Fourier Yöntemi	32
3.3 Eşlenik Problem Yaklaşımı, LTAPf2 Probleminin Değer Fonksiyonelinin Gradyanının Hesaplanması	33
3.4 Ek Koşulu Sınırdaki Verilmiş İki Boyutlu Lineer Olmayan Parabolik Ters Akı Problemi	39
3.5 Lineer ve Lineer Olmayan Düz ve Ters Problemler için Sayısal Örnekler .	40

Şekil Listesi

2.1	Süreksiz katsayılı lineer ters problemde $\gamma = 2\%$ gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_h(t)_P$,öncesi $f_h(t)$)	20
2.2	Süreksiz katsayılı lineer ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma), E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma), E(n, f; \gamma)$)	20
2.3	Süreksiz katsayılı lineer ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma), E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma), E(n, f; \gamma)$)	21
2.4	Süreksiz katsayılı lineer ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_h(t)_P$,öncesi $f_h(t)$)	22
2.5	Değişken katsayılı lineer ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma), E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma), E(n, f; \gamma)$)	23
2.6	Değişken katsayılı lineer ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.	23
2.7	Değişken katsayılı lineer ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma), E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma), E(n, f; \gamma)$)	24
2.8	Değişken katsayılı lineer ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_h(t)_P$,öncesi $f_h(t)$)	25
2.9	Lineer olmayan ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_h(t)_P$,öncesi $f_h(t)$)	26
2.11	Lineer olmayan ters problemde $\gamma = 5\%$ gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma), E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma), E(n, f; \gamma)$)	27
2.12	Lineer olmayan ters problemde $\gamma = 5\%$ gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_h(t)_P$,öncesi $f_h(t)$)	27

- 2.13 Sabit katsayılı lineer ters problemde $\gamma = 2\%$ gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_h(t)_P$,öncesi $f_h(t)$) 28
- 2.14 Sabit katsayılı lineer ters problemde $\gamma = 5\%$ gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_h(t)_P$,öncesi $f_h(t)$) 29
- 3.1 Süreksiz katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{1h}(y, t)_P$,öncesi $f_{1h}(y, t)$) 43
- 3.2 Süreksiz katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$) 43
- 3.3 Süreksiz katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{1h}(y, t)_P$,öncesi $f_{1h}(y, t)$) 44
- 3.4 Süreksiz katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$) 45
- 3.5 Süreksiz katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{2h}(x, t)_P$,öncesi $f_{2h}(x, t)$) 46
- 3.6 Süreksiz katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$) 46
- 3.7 Süreksiz katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{2h}(x, t)_P$,öncesi $f_{2h}(x, t)$) 47
- 3.8 Süreksiz katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$) 48
- 3.9 Değişken katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{1h}(y, t)_P$,öncesi $f_{1h}(y, t)$) 49
- 3.10 Değişken katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$) 49
- 3.11 Değişken katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{1h}(y, t)_P$,öncesi $f_{1h}(y, t)$) 50
- 3.12 Değişken katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$) 51

- 3.13 Değişken katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{2h}(x, t)_P$, öncesi $f_{2h}(x, t)$) 52
- 3.14 Değişken katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$) 52
- 3.15 Değişken katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{2h}(x, t)_P$, öncesi $f_{2h}(x, t)$) 53
- 3.16 Değişken katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$) 54
- 3.17 Lineer olmayan ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{1h}(y, t)_P$, öncesi $f_{1h}(y, t)$) 55
- 3.18 Lineer olmayan ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$) 55
- 3.19 Lineer olmayan ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{1h}(y, t)_P$, öncesi $f_{1h}(y, t)$) 56
- 3.20 Lineer olmayan ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$) 57
- 3.21 Lineer olmayan ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{2h}(x, t)_P$, öncesi $f_{2h}(x, t)$) 58
- 3.22 Lineer olmayan ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$) 58
- 3.23 Lineer olmayan ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{2h}(x, t)_P$, öncesi $f_{2h}(x, t)$) 59
- 3.24 Lineer olmayan ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$) 60

Tablo Listesi

2.1	Örnek 1 deki Süreksiz katsayılı Düz Problem için Sayısal Sonuçlar	18
2.2	Örnek 2 deki Değişken katsayılı Düz Problem için Sayısal Sonuçlar	18
2.3	Örnek 3 deki Lineer Olmayan Düz Problem için Sayısal Sonuçlar	19
2.4	Süreksiz katsayılı lineer ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f(t))$ Akı fonksiyonuna etkisi	21
2.5	Süreksiz katsayılı lineer ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $f(t)$ Akı fonksiyonuna etkisi	22
2.6	Değişken katsayılı lineer ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f(t))$ Akı fonksiyonuna etkisi	24
2.7	Değişken katsayılı lineer ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $f(t)$ Akı fonksiyonuna etkisi	25
2.8	linner olmayan ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $f(t)$ Akı fonksiyonuna etkisi	26
2.9	Linner olmayan ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $f(t)$ Akı fonksiyonuna etkisi	28
2.10	Sabit katsayılı lineer ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f(t))$ Akı fonksiyonuna etkisi	28
2.11	Sabit katsayılı lineer ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f(t))$ Akı fonksiyonuna etkisi	29
3.1	Örnek 1 deki Süreksiz Katsayılı Düz Problem için Sayısal Sonuçlar	41
3.2	Örnek 2 deki Değişken Katsayılı Düz Problem için Sayısal Sonuçlar	41
3.3	Örnek 3 deki Lineer Olmayan Düz Problem için Sayısal Sonuçlar	42
3.4	Süreksiz katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f_1(y, t))$ Akı fonksiyonuna etkisi.	44
3.5	Süreksiz katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f_1(y, t))$ Akı fonksiyonuna etkisi.	45
3.6	Süreksiz katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f_2(x, t))$ Akı fonksiyonuna etkisi.	47
3.7	Süreksiz katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f_2(x, t))$ Akı fonksiyonuna etkisi.	48

3.8	Değişken katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f_1(y, t))$ Akı fonksiyonuna etkisi.	50
3.9	Değişken katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f_1(y, t))$ Akı fonksiyonuna etkisi.	51
3.10	Değişken katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f_2(x, t))$ Akı fonksiyonuna etkisi.	53
3.11	Değişken katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f_2(x, t))$ Akı fonksiyonuna etkisi.	54
3.12	linner olmayan ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f_1(y, t))$ Akı fonksiyonuna etkisi .	56
3.13	linner olmayan ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f_1(y, t))$ Akı fonksiyonuna etkisi .	57
3.14	Linner olmayan ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f_2(x, t))$ Akı fonksiyonuna etkisi	59
3.15	Linner olmayan ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f_2(x, t))$ Akı fonksiyonuna etkisi.	60

Bölüm 1

Giriş

Ters problemler, günümüzde mühendislik ve fen bilimleri başta olmak üzere, sosyal bilimler, tıp bilimleri gibi bilimin birçok alanında karşılaşılan güncel problemlerin başında gelmektedir[2],[4],[6],[7],[8],[9],[18]. Ters probleme basit bir örnek vermek gerekirse, verilen keyfi iki sayının çarpımının bulunması problemine "Düz Problem (Direct Problem)" olarak bakacak olursak, çarpımları verilen iki sayının bulunması problemi "Ters Problem (Inverse Problem)" olarak kabul edilebilir.

Elbette ters problemlerin en ilginç olanları günlük yaşamımızda karşılaştığımız sorunların çözümü ile ilgili olanlar olacaktır. Bu problemlerden biri de "Isı Transferi (Heat Conduction)" problemidir. Bir çubukdaki(malzemedeki) sıcaklık değerinin zamana göre değişimini $u(x, t)$ fonksiyonu ile gösterdiğimizi kabul edersek bir boyutlu en basit ısı transferi denklemi

$$Au := u_t(x, t) - (k(x)u_x(x, t))_x = F(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T := (0, \ell) \times (0, T) \quad (1.1)$$

parabolik operatörüyle verilir. Burada k fonksiyonu ℓ uzunluklu çubuğun ısı iletim katsayı fonksiyonu, x, t sırasıyla uzay ve zaman değişkenlerini, $T > 0$ final zaman değerini, $F(x, t)$ sağ taraf fonksiyonu ise kaynak fonksiyonu (source function) olarak adlandırılır ve sisteme dışarıdan verilen ısı enerjisini modellemektedir. Bu denkleme fiziksel probleme uygun başlangıç ve sınır koşulları eklendiğinde bir boyutlu çubukdaki ısı transferinin matematiksel modelini ifade eden aşağıdaki problem elde edilir:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = (k(x)u_x(x, t))_x + F(x, t), & (x, t) \in \Omega_T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, \ell), \\ -k(0)u_x(0, t) = f(t), & u(\ell, t) = 0, \quad t \in (0, T). \end{cases} \quad (1.2)$$

Burada $u_0(x)$, başlangıç anında ($t = 0$) cismin sıcaklığını ifade eden başlangıç fonksiyonu, $ku_x(0, t)$ terimi çubuğun sol ucunun "ısı akısını", eksi işareti ise ısının sıcaktan soğuğa doğru iletilmesini ifade eder. Bu durumda $f(t)$ akı fonksiyonudur.

Şimdi (1.2) problemini göz önüne alarak ters ısı akısı problemini tanımlayalım. Buna göre (1.2) probleminde $u(x, t)$ fonksiyonu ile beraber $f(t)$ akı fonksiyonunun da aranan fonksiyon olduğunu kabul edelim. Buna göre aşağıdaki ek koşulların verilmesi uygundur:

$$\begin{aligned} h(t) &= u(0, t), \\ G(t) &= -ku_x(\ell, t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Burada $h(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları sırasıyla cismin sol ucundaki sıcaklığın değerini ve cismin sağ ucundaki ısı akısının değerini göstermektedir ve her iki fonksiyon da deneysel ölçüm sonucu elde edildiği kabul edilir. Bu sebeple bu koşullara "ölçülmüş çıktı verisi (measured output data)" adı verilir. Buna göre (1.2) probleminde $\mathcal{F} := \{f(t) | f(t) \in L_2(0, T)\}$ fonksiyonlar sınıfında (1.3) ek koşullarından birini veya her ikisini birden sağlayan $\langle u; f \rangle$ çiftinin bulunması problemine *ısı transferi probleminde Akının bulunması ile ilgili Ters Problem "(TAP)"* denir. Bu durumda (1.2) probleminde $k(x)$, $F(x, t)$, $u_0(x)$, $f(t)$, "giriş verileri (input data)" verildiğinde $u(x, t)$ çözüm fonksiyonunun bulunması problemine bu ters probleme karşılık gelen "Düz Problem (DP)" denir.

Benzer ters problem lineer olmayan (nonlinear) bir boyutlu durum için de geçerlidir. $k = k(x)$ ısı geçirgenliği katsayısı $u(x, t)$ çözüm fonksiyonuna bağlı olduğu durumda elde edilen

$$\begin{cases} u_t(x, t) = (k(u)u_x(x, t))_x + F(x, t), & (x, t) \in \Omega_T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, \ell), \\ -k(u)u_x(x, t)|_{x=0} = f(t), & u(\ell, t) = 0, \quad t \in (0, T). \end{cases} \quad (1.4)$$

problemine *lineer olmayan ısı transferi problemi* denir. Bu problemde de $\langle u; f \rangle$ çiftini belirlemek için aşağıdaki ek koşulların verilmesi uygun olur.

$$\begin{aligned} h(t) &= u(0, t), \\ g(t) &= -k(u)u_x(x, t)|_{x=\ell}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Buna göre (1.4)-(1.5) problemine *"lineer olmayan ısı transferi problemi için akının bulunması ile ilgili ters probleme "(TAP2)"* denir. (1.4) probleminde giriş verileri verildiğinde $u(x, t)$ çözüm fonksiyonunun bulunması problemine ise bu ters probleme karşılık gelen düz problem denir.

Bu tez çalışmasında yukarıda ifade edilen lineer ve lineer olmayan ısı transferi denklemleri için bir ve iki boyutlu ters ısı akısı problemleri tanımlanarak problemlerin matematiksel analizi yapılacak ve daha sonra çeşitli yöntemler kullanılarak yaklaşık çözümlerinin nasıl elde edilebileceği açıklanacaktır.

Bölüm 2

Ek Koşulu Sınırdaki Verilmiş Bir Boyutlu Lineer ve Lineer Olmayan Parabolik Ters Akı Problemi

2.1 LTAP1 Problemi, Kesin ve Hemen Hemen Çözümler, Uyum Koşulları

Önce aşağıdaki ifadeleri tanımlayalım; $T > 0$ olmak üzere $\Omega_T := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ olsun. Buna göre akı fonksiyonunun arandığı parabolik problemi aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\begin{cases} u_t = (k(x)u_x)_x + F(x, t), & (x, t) \in \Omega_T \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, l] \\ -k(0)u_x(0, t) = f(t), & u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T] \end{cases} \quad (2.1)$$

Eğer f akı vektör fonksiyonu bilinmeyen ise, bu durumda, fiziksel olarak anlamlı ve mümkün kılınabilir ek koşulları, sınırdaki $u(x, t)$ fonksiyonunun değeri olarak verilebilir. (2.1) probleminde $x = 0$ sol sınırında $u(x, t)$ fonksiyonunun değerleri ek koşul olarak verelim:

h fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$h(t) := u(0, t), \quad t \in (0, T]. \quad (2.2)$$

Bu koşulun fiziksel anlamı $x = 0$ sınırlarında ısının ölçüm değerinin deneysel olarak verilmesidir. Bu nedenle h fonksiyonuna *deneysel çıktı verisi* ("measured output data") denir. Buna karşılık $u_0(x)$ ve $F(x, t)$ fonksiyonları *giriş verileri* ("input data") olarak tanımlanır. (2.1) ve (2.2) denklemlerinden yola çıkarak bir *ters akı problemi* tanımlanabilir; zaman değişkenine bağlı f fonksiyonu bilinmemektir ve (2.1) – (2.2) probleminden $u(x, t)$ fonksiyonu ile birlikte bulunması gerekir. Bu problemi "LTAP1" olarak tanımlayalım. Bu durumda (2.1) parabolik problemine (2.1) – (2.2) ters probleme karşılık gelen *düz problem* denir.

(2.1) parabolik probleminin zaman değişkenine bağlı f akı fonksiyonuna karşılık gelen çözümü $u = u(x, t; f)$ olarak gösterelim. Eğer bu fonksiyon (2.2) ek koşulunu da sağlıyor ise o halde $u(0, t; f) = h(t)$ lineer olmayan fonksiyonel denkleminin de çözümü olacaktır. Ancak pratik uygulamalarda, h deneysel çıktı verisi $\|h^\delta - h\| \leq \delta$ olacak şekilde bir δ ölçüm hatalası ile verilir. Bunun sonucu olarak yukarıdaki eşitliğin kesin olarak sağlanması söz konusu olamaz. Bu durumda (2.1) – (2.2) ters probleminin kesin çözümü yerine,

$$J(f) = \int_0^T [u(0, t; f) - h(t)]^2 dt \quad (2.3)$$

fonksiyoneline en küçük değerini veren f akısının aranması problemi anlamlıdır.

Tanım 2.1.

$$J(f^*) = \inf_{f \in \mathcal{F}} J(f) \quad (2.4)$$

en küçük değer probleminin çözümüne *LTAP1* probleminin *hemen hemen çözümü* (Quasi-Çözümü) denir. $J(f^*) = 0$ durumunda $f^* \in \mathcal{F}$ elemanı aynı zamanda ters problemin *kesin çözümü* olur [3],[11],[13].

Kısmi Türevli Denklemler teorisindeki uyum koşulları, buradaki ters problem için de geçerlidir. Önce bu koşulları düz problem için verelim. $u(x, t)$ fonksiyonunu kendisi $\overline{\Omega}_T$ kapalı parabolik bölgesinde hemen-hemen süreklidir. O halde $x = l$ 'de verilmiş $u(l, t) = 0$, türdeş Dirichlet koşulundan yola çıkarsak ve $u_0(l) = u(l, 0)$ başlangıç koşulundan

$$u_0(l) = 0$$

sonucuna varırız. Benzer şekilde (2.2)'de verilen ek koşulu ve başlangıç koşulundan $u_0(0) = h(0)$ uyum koşulu elde edilir. *LTAP1* için girdi çıktı operatörü olarak bilinen:

$$\Phi : f \in L_2(0, T) \mapsto L_2(0, T), (\Phi f)(t) := u(x, t; f)|_{x=0}$$

operatörlerini tanımlayalım. O halde LTAP1 problemi

$$\Phi f = h$$

operatör denklemi olarak tanımlanabilir.

2.2 Ters Problemin Zayıf Çözümüne Dayalı Hemen Hemen Çözümü ve Girdi-Çıktı Operatörlerinin Kompaktlığı

Zayıf çözüm teorisinin koşullarına dayanarak kaynak fonksiyonlarının, $k(x)$ katsayısının ve ayrıca giriş verilerinin

$$\begin{cases} F(x, t) \in L_2(\Omega_T), f(t) \in L_2(0, T), u_0(x) \in L_2(0, l) \\ k(x) \in L_\infty(0, l), k^* \geq k(x) \geq k_* > 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

koşullarını sağladığını varsayalım. (2.1) düz probleminin $u \in \mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$ sınıfından olan zayıf çözümü $\forall v(x, t) \in \mathring{H}^{1,1}(\Omega_T)$ ve $v(x, T) = 0$ olmak üzere, aşağıdaki integral özdeşliği sağlayan fonksiyondur[19],[21],[26].

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega_T} (-uv_t + k(x)u_x v_x) dx dt &= \int \int_{\Omega_T} F(x, t)v(x, t) dx dt + \int_0^l u_0(x)v(x, 0) dx \\ &\quad + \int_0^T f(t)v(0, t) dx \end{aligned}$$

$\mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$ ve $\mathring{H}^{1,1}(\Omega_T)$ uzayları ise $\mathring{V}^{1,0}(\Omega_T) := \{v \in V^{1,0}(\Omega_T) : v(l, t) = 0, \forall t \in (0, T)\}$, $\mathring{H}^{1,1}(\Omega_T) := \{v \in H^{1,1}(\Omega_T) : v(l, t) = 0, \forall t \in (0, T)\}$ olarak tanımlanır. $H^{1,1}(\Omega_T)$ uzayı Hilbert uzayı olup

$$\|u\|_{H^{1,1}(\Omega_T)} := \left\{ \int \int_{\Omega_T} [u^2 + u_x^2 + u_t^2] dx dt \right\}^{1/2} \quad (2.6)$$

normuna, $V^{1,0}(\Omega_T)$ uzayı da

$$\|u\|_{V^{1,0}(\Omega_T)} := \max_{t \in [0, T]} \|u\|_{H^0[0, l]} + \|u_x\|_{H^0(\Omega_T)}.$$

normuna sahip birer Sobolev uzaylarıdır. $\mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$ uzayının en doğal zayıf çözüm uzayı seçilmesinin nedeni aşağıda vereceğimiz enerji özdeşliğinden görülmektedir. Denklemin her iki tarafını $u \in L_2(\Omega_T)$, $u_x \in L_2(\Omega_T)$ koşullarını sağlayan $u(x, t)$ ile çarpalım, Ω_t bölgesinde integralleyelim ve kısmi integralleme formülünü uygulayalım.

olarak ifade edilir.

Böylece (2.1) parabolik probleminin zayıf çözümü için en doğal uzay

$$V^{1,0}(\Omega_T) = L_\infty([0, T]; L_2(0, l)) \cap L_2((0, T); H^1(0, l))$$

Sobolev uzayı olarak tanımlanır. (2.8) eşitsizliğinden de görüldüğü üzere, (2.5) koşulları $u \in \mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$ olması için yeterlidir.

Teorem 2.2. [5] *Eğer (2.5) koşulları sağlanıyor ise (2.1) probleminin $u \in \mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$ zayıf çözümü için aşağıdaki önsel değerlendirme sağlanır:*

$$\max_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)}^2 + \|u_x\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \leq C_0 \left[\|u_0\|_{L_2(0, l)}^2 + \|F\|_{L_2(\Omega_T)}^2 + \|f\|_{L_2(0, T)}^2 \right]. \quad (2.8)$$

Zayıf çözümün varlığı ilk kez [25]'de verilmiştir ve halen Kısmi Türevli Denklemlerin zayıf çözüm teorisi olarak yaygın biçimde kullanılmaktadır.[9][10]

Burada aşağıdaki sonuçları kullanacağız:

Lemma 2.3. [22] $\mathring{H}^{1,1}(\Omega_T)$ uzayında her sınırlı küme $L_2(\Omega_T)$ 'de kompaktır. (Bu lemma Rellich Lemması olarak bilinmektedir.)

Sonuç 2.4. [23] Rellich Lemması $\mathring{H}^{1,1}(\Omega_T)$ 'nin $L_2(\Omega_T)$ uzayında gömülmesinin kompakt olduğunu gösterir; bu $\mathring{H}^{1,1}(\Omega_T) \hookrightarrow L_2(\Omega_T)$ şeklinde gösterilir.

(2.1) probleminde $k(x) \neq \text{sabit}$ durumunda herhangi bir spektral yaklaşım yöntemi, ve bundan dolayı Tekil Değer Ayrışımı yaklaşımı uygulanamaz. En azından Fourier yöntemiyle $k(x) \neq \text{sabit}$ durumunda özdeğerler açık biçimde bulunamaz.

Bundan dolayı burada Φ girdi-çıkı operatörünün kompaktlığını enerji yöntemine dayalı bir yaklaşımla vereceğiz.

Teorem 2.5. [17][26] *Her H Hilbert Uzayı zayıf kompaktır.*

Bu teorem, $\|u_n\|_H \leq c_1$, $c_1 > 0$ durumunda H uzayında $\{u_n\}$ dizisinin zayıf yakınsak bir $\{u_m\}$ alt dizisinin var olduğu anlamına gelir.

Teorem 2.6. $\{f_n\} \subset L_2(0, T)$ fonksiyon dizisi $f(t)$, fonksiyonuna $L_2(0, T)$ 'de zayıf yakınsak dizi olsun:

$f_n(t) \rightharpoonup f(t)$, $n \rightarrow \infty$. Eğer $u_n(x, t) := u(x, t; f_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, dizisi de (2.1) düz probleminin ilgili çözüm dizisi ise, o halde her bir $x \in (0, l)$ ve $t \in (0, T]$ için $\{u(x, t; f_n)\}$ dizisi, $\mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$ uzayında $u(x, t, f)$ fonksiyonuna güçlü yakınsar.

Kanat. $v_n(x, t) := u(x, t) - u_n(x, t)$ olmak üzere aşağıdaki problemin çözümü olsun.

$$\begin{cases} (v_n)_t = (k(x)(v_n)_x)_x, & (x, t) \in \Omega_T \\ v_n(x, 0) = 0, & x \in [0, l] \\ -k(0)(v_n)_x(0, t) = f(t) - f_n(t), & v_n(l, t) = 0, \quad t \in (0, T] \end{cases} \quad (2.9)$$

Denklemin her iki tarafını $v_n(x, t)$ ile çarpalım, Ω_t bölgesinde integralleyelim ve kısmi integralleme formülünü uygulayalım.

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_0^t [(v_n)_\tau v_n - (k(x)(v_n)_x)_x v_n] dx d\tau &= 0 \\ \frac{1}{2} \int_0^l v_n^2(x, t) dx + \underbrace{\int \int_{\Omega_t} k(x)(v_n)_x^2 dx d\tau}_{\geq k_* \int \int_{\Omega_t} (v_n)_x^2 dx d\tau} &= \int_0^t (f(t) - f_n(t))(v_n)(0, t) dt \end{aligned}$$

$\forall v_n \in \mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$ için $M_n := \sup_{t \in (0, T)} [|v_n(0, t)|]$ olarak tanımlansın.

$$\frac{1}{2} \int_0^l v_n^2(x, t) dx + k_* \int \int_{\Omega_t} (v_n)_x^2 dx d\tau \leq M_n \int_0^t (f(t) - f_n(t)) dt \quad (2.10)$$

Yukarıdaki (2.7) eşitsizliğinden görüldüğü üzere $f_n(t) \rightarrow f(t)$, $n \rightarrow \infty$. her bir $x \in (0, l)$ ve $t \in (0, T]$ için $\{u(x, t; f_n)\}$ dizisi, $\mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$ uzayında $u(x, t, f)$ fonksiyonuna güçlü yakınsar.

Teorem 2.7. [12] $\Phi : f \in L_2(0, T) \mapsto L_2(0, T)$ girdi-çıktı operatörü kompakt operatördür.

$\exists f \in L_2(0, T)$, $\exists \{f_m\} \subset \{f_n\}$, $f_m \rightarrow f$, $m \rightarrow \infty$

Kanat. Teorem (2.5)'ya göre $u(x, t; f_m) \rightarrow u(x, t; f)$, $\forall t \in [0, T]$, $m \rightarrow \infty$. Burada $x = 0$ yazarsak $u(0, t; f_m) \rightarrow u(0, t; f)$ sonucu elde edilir. Yani Υ operatörü sınırlı diziyi yakınsak diziye dönüştürdüğünden dolayı operatör kompakttır. \square

Uyarı 2.8. 3.Bölümde anlatılacak iki boyutlu ters problemin kompaklığı da aynı şekilde kolayca gösterilebilir.

2.3 Eşlenik Problem Yaklaşımı ve Quasi Çözümün Varlığı ve Tekliği

$L_2(0, T)$ uzayında tanımlı f bir fonksiyonuna bağlı $J(f)$, $J : L_2(0, T) \mapsto \mathbb{R}$ fonksiyonelinin *Fréchet* gradyanını tanımlayalım[26].

Tanım 2.9. $\forall f, f + \Delta f \in L_2(0, T)$ için

$$J(f + \Delta f) - J(f) = (A(f), \Delta f) + o(\|\Delta f\|_{L_2(0, T)}^2)$$

olacak şekilde bir $A : L_2 \rightarrow L_2$ operatörü var ise bu operatöre $J(f)$ fonksiyonelinin *Fréchet* gradyanı denir ve $J'(f)$ olarak gösterilir:

$$J(f + \Delta f) - J(f) = (J'(f), \Delta f)_{L_2(0, T)} + o(\|\Delta f\|_{L_2(0, T)}^2)$$

$f, f + \Delta f \in \mathcal{F}$ olmak üzere $J(f)$ değer fonksiyoneli için gradyan formülünü elde etmek amacıyla, bu değer fonksiyonelinin birinci varyasyonunu $\Delta J(f) := J(f + \Delta f) - J(f)$ şeklinde gösterelim. Bu durumda $\Delta u(x, t; \Delta f) = u(x, t; f + \Delta f) - u(x, t; f)$ fonksiyonu hesaplayalım. Buna göre

$$\begin{cases} \Delta u_t = (k(x)\Delta u_x)_x, & (x, t) \in \Omega_T, \\ \Delta u(x, 0) = 0, & x \in [0, l] \\ -k(0)\Delta u_x(0, t) = \Delta f(t), & \Delta u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T]. \end{cases} \quad (2.11)$$

parabolik probleminin çözümü olmak üzere

$$\Delta J(f) = 2 \int_0^T [\Delta u(0, t; \Delta f) - h(t)] \Delta u(0, t; \Delta f) dt + \int_0^T [\Delta u(0, t; \Delta f)]^2 dt \quad (2.12)$$

eşitliğini elde ederiz. $\varphi(x, t; f)$ fonksiyonu

$$\begin{cases} \varphi_t = -(k(x)\varphi_x)_x & (x, t) \in \Omega_T, \\ \varphi(x, T) = 0, & x \in [0, l], \\ -k(0)\varphi_x(0, t; f) = 2[u(0, T; f) - h(t)], & \varphi(l, t) = 0, \quad t \in (0, T], \end{cases} \quad (2.13)$$

parabolik probleminin çözümü olan bir fonksiyon olsun.

(2.11) eşitliğinin sol tarafındaki integrali (2.13) problemi yardımıyla aşağıdaki gibi yeniden düzenleyelim:

$$\int_0^T \int_0^l [\Delta u_t(x, t; f) \varphi(x, t) = \int_0^T \int_0^l (k(x)\Delta u_x(x, t; \Delta f))_x \varphi(x, t) dx dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^l [\Delta u(x, t; f) \varphi(x, t; f)]_0^T dx - \int_0^l \int_0^T \varphi_t(x, t; f) \Delta u(x, t; f) \\
&= \int_0^T [k(x) \Delta u_x(x, t; f) \varphi(x, t; f)]_0^l - \int_0^l k(x) \varphi_x(x, t; f) \Delta u_x(x, t; f) dx dt \\
&= \int_0^T \Delta f(t) \varphi(0, t; f) - \int_0^T [k(x) \varphi_x(x, t; f) \Delta u(x, t; f)]_0^l \\
&- \int_0^l (k(x) \varphi_x(x, t; f))_x \Delta u(x, t; f) dx dt
\end{aligned}$$

(2.11) ve (2.13) problemlerindeki sınır koşullarını dikkate alarak aşağıdaki integral özdeşliği elde ederiz:

$$2 \int_0^T [u(0, t; f) - h(t)] \Delta u(0, t; \Delta f) dt = \int_0^T \varphi(0, t; f) \Delta f(t) dt, \quad \forall f \in \mathcal{F}. \quad (2.14)$$

(2.14) eşitliği yardımıyla $\forall \Delta f \in \mathcal{F}$ olmak üzere $J(f)$ değer fonksiyonelinin birinci varyasyonu için

$$\Delta J(f) = \int_0^T \varphi(0, t; f) \Delta f(t) dt + o(\|\Delta u(x, t; \Delta f)\|_{L_2(\Omega_T)}^2) \quad (2.15)$$

$$o\left(\|\Delta u(x, t; \Delta f)\|_{L_2(\Omega_T)}^2\right) =: \int_0^{T_f} \varphi(0, t; f) \Delta f(t) dt$$

formülüne ulaşırız.

Lemma 2.10. $\varepsilon > l/(2k_*) > 0$, $k_* = \min_{[0, l]} k(x) > 0$ olsun. (2.11) parabolik probleminin $\Delta u \in \mathring{V}^{1,0}(\Omega_T)$ çözümü için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
\|\Delta u(0, t; f)\|_{L_2(0, T)}^2 &\leq \frac{\varepsilon l}{2\sigma_\varepsilon} \|\Delta f\|_{L_2(0, l)}^2 \Rightarrow \|\Delta u(0, \cdot; f)\|^2 = O(\|\Delta f\|^2). \\
\sigma_\varepsilon &= [k_* - \frac{l}{2\varepsilon}]^{1/2}
\end{aligned}$$

Kanıt. (2.11)'probleminin her iki tarafını da Δu ile çarpıp Ω_T bölgesinde integralleyip ve problemin başlangıç ve sınır koşullarını dikkate aldığımızda elimizde aşağıdaki enerji eşitliğini elde ederiz.

$$\int_0^T \int_0^l k(x) [\Delta u_x(x, t; f)]^2 dx dt + \int_0^l [\Delta u(x, t; f)]^2 dx = \int_0^T \Delta f(t) \Delta u(0, t; f) dt$$

Daha sonraki adımda eşitliğin sağ tarafına cauchy- ε eşitsizliğini ve Poincare eşitsizliğini uyguladıktan sonra sonraki adıma geçeriz.

$$[2\varepsilon k_* - l] \int_0^T \int_0^l [\Delta u_x(x, t; f)]^2 dx dt \leq \int_0^l \Delta f(t)^2 dt$$

En son olarakta ε 'u $\varepsilon > l/(2k_*) > 0$, $k_* = \min_{[0,l]} k(x) > 0$ olacak şekilde seçersek (2.10)'ü kanıtlamış oluruz. \square

Bu lemma ile (2.15)eşitliğindeki son integralin $o(\|\Delta f\|)_{L_2(\Omega_T)}$ ile sınırlandığını göstermiş olduk.

Tanım 2.11. (2.13) parabolik problemine (2.18) – (2.2) LTAP1 probleminin *eşlenik problemi* ("adjoint problem") denir.[1]

Böylece tanıma göre $J(f)$ değer fonksiyonelinin $J'(f)$ Fréchet gradyanını

$$J'(f)(x) = \varphi(0, t; f)$$

şeklinde buluruz.

Bu formül $J(f)$ değer fonksiyonelinin $J'(f)$ Frechet gradyanının iyi tanımlı ters yönlü parabolik eşlenik probleminin $\varphi(0, t; f)$ sınırdaki değerinin olduğunu gösterir. Bunu $J'(f(t)) = \varphi(0, .; f)$ biçiminde gösteririz.

Lemma 2.12. (2.5) koşulu sağlandığı zaman, $J(f)$ C^1 Hölder sınıfındadır ve

$$\|J(f + \Delta f) - J(f)\|_{H^0(0,T)} := L\|\Delta\varphi(0, t, f)\|_{H^0(0,T)}$$

olacak şekilde

$$\|J(f + \Delta f) - J(f)\|_{H^0(0,T)} < L\|\Delta f\|_{H^0(0,T)}, \forall f + \Delta f \in \mathcal{F}$$

ve $L > 0$ Lipschitz sabiti $L = 1/\sqrt{2k_*\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0, 2k_*/l^2)$

Kanıt. $\Delta\varphi$, $\Delta\varphi(x, t, f) := \varphi(x, t, f + \Delta f) - \varphi(x, t, f)$ ve $\varphi \in V^{1,0}(\Omega_T)$ aşağıdaki problemin çözümü olacak şekilde:

$$\begin{cases} \Delta\varphi_t = -(k(x)\Delta\varphi_x)_x & (x, t) \in \Omega_T, \\ \Delta\varphi(x, T) = 0, & x \in [0, l], \\ -k(0)\Delta\varphi_x(0, t; f) = 2u(0, T; f), \Delta\varphi(l, t) = 0, & t \in (0, T), \end{cases} \quad (2.16)$$

(2.16) probleminin her iki tarafını $\Delta\varphi(x, t, f)$ çarpıp Ω_T bölgesinde integrallediğimiz zaman aşağıdaki enerji özdeşliğini elde ederiz.

$$\int_0^T \int_0^l k(x) [\Delta \varphi_x(x, t, f)]^2 dx dt + \int_0^l [\Delta \varphi(x, 0; f)]^2 dx = 2 \int_0^T \Delta u(0, t; f) \varphi(0, t; f) dt$$

Enerji Özdeşliği yardımıyla

$$k_* \int_0^T \int_0^l [\Delta \varphi_x]^2(x, t, f) dx dt \leq 2 \int_0^T \Delta u(0, t; f) \varphi(0, t; f) dt$$

Yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafında *Poinkare eşitsizliğini* ve *Lemma 2.3*'ü kullanarak teoremin kanıtını elde ederiz. \square

Teorem 2.13. (2.5)'i koşulu sağlandığında $f^0 \in \mathcal{F}$ olacak şekilde seçilecek herhangi bir başlangıç aşağıdaki süreç şeklinde verilir.

İterasyon $H^0(\Omega_T)$ normunda *quasiçözüm* olan $f^* \in \mathcal{F}$, f^{*l} e yakınsar. Bununla beraber $J(f^n)$ fonksiyonel dizisi aşağıdaki eşitsizliğe göre monoton azalan ve yakınsaktır.

$$0 < J(f^n) - J(f^*) \leq 2Ld^2n^{-1}, d > 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

Burada $L > 0$ Lipschitz katsayısıdır.

2.4 LTAP1 Problemi için Fourier Yöntemi

(2.1) probleminde $k(x) = k > 0$ şeklinde sabit olduğunu varsayalım. Bu durumda bu problemin çözümünü $v(x, t), w(x, t)$ fonksiyonlarının toplamı şeklinde varsayalım: $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$. Burada $v(x, t)$ fonksiyonu

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}, & (x, t) \in \Omega_T \\ v(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, l] \\ v(l, t) = h(t), & v(l, t) = 0, \quad t \in (0, T] \end{cases} \quad (2.17)$$

probleminin, $w(x, t)$ fonksiyonu ise

$$\begin{cases} w_t = kw_{xx} + F(x, t), & (x, t) \in \Omega_T \\ w(x, 0) = 0, & x \in [0, l] \\ w(0, t) = 0, & w(l, t) = 0, \quad t \in (0, T] \end{cases} \quad (2.18)$$

probleminin çözümleridir. Genel kısmi türevli denklemler teorisinden de bilindiği gibi (2.14) probleminin çözümü olan $v(x, t)$ fonksiyonu

$$v(x, t) = \int_0^\ell G(x, y; \xi) \varphi(\tilde{\xi}) d\xi + \int_0^T \int_0^\ell G(x, y; \xi, \tau) f(\xi, \tilde{\tau}) d\tau + \frac{\ell - x}{\ell} h(t)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde (2.15) probleminin çözümü olan $w(x, t)$ fonksiyonu ise

$$\int_0^T \int_0^\ell G(x, y; \xi, \tau) F(\xi, \tau) d\tau$$

olarak bulunur. Burada $G(x, y; \xi, \tau)$, ve $G(x, y; \xi)$ Green fonksiyonları ile \tilde{f} ve $\tilde{\varphi}$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} G(x, y; \xi) &= \frac{2}{\ell} \sum \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 k(t)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} \xi\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \\ G(x, y; \xi, \tau) &= \frac{2}{\ell} \sum \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 k(t-\tau)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} \xi\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \\ \tilde{f} &= -\frac{\ell - x}{\ell} h'(t) \\ \tilde{\varphi} &= u_0(x) - \frac{\ell - x}{\ell} h(t) \end{aligned}$$

Sonuç olarak aradığımız $f(t)$ fonksiyonunu da seri toplamı üzerinden türev alarak aşağıdaki gibi buluruz.[16]

$$\begin{aligned} f(t) &= kv_x(0, t) + kw_x(0, t) \\ &= k \int_0^T \int_0^\ell G_x(0, t; \xi, \tau) [\tilde{f}(\xi, \tau) + F(\xi, \tau)] d\tau + \int_0^\ell G_x(0, t; \xi) \tilde{\varphi}(\xi, \tau) d\xi + \frac{1}{\ell} h(t) \end{aligned}$$

Uyarı 2.14. (2.20) Fourier yöntemi ile elde ettiğimiz $f(t)$ Akı fonksiyonunun seri açılımının yakınsaklığı Analiz'den bildiğimiz serilerin yakınsaklığı için kullanılan "M testi" ile kolayca gösterilebilir.

2.5 Eşlenik Gradyan Yöntemi

t zaman değişkenine bağlı $f(t)$ akı fonksiyonunun belirlenmesi probleminde, uygun durdurma adımını seçerek Eşlenik Gradyan Yöntemini (EGY) kullanalım. M. R. Hestenes ve E. Stiefel tarafından geliştirilen bu yöntem, katsayı matrisi simetrik ve pozitif tanımlı olan lineer denklem sistemlerinin sayısal çözümü için kullanılan iteratif bir algoritmadır.[10][15][14][20]

Öncelikle unutmamalıyız ki $A, m \times n$ (m, n) boyutlu bir matris olmak üzere $Ax = b$ lineer denklemler sisteminin "en küçük kareler çözümü" için kullanılan yöntemlerin başında "Eşlenik Gradyan Yöntemi" gelmektedir. Genellikle böyle sistemlerin kesin çözümü yoktur bu sebeple

$$J_1(x) := \|Ax - b\|^2, x \in R^n$$

fonksiyonunun minimumunu bulmak bir yaklaşık çözüm yaklaşımıdır, burada $\|\cdot\|$, Euclid normunu göstermektedir. En küçük kareler yöntemini çözmek için standart yaklaşımlar QR-algoritması ve Eşlenik Gradyan Yöntemidir. Biz ikincisinin lineer sistemler için bilindiğini göz önüne alarak, bu yöntemi $\phi f = h$ operatör denklemleri için formüle edeceğiz, burada $\phi : L_2 \rightarrow L_2$ lineer, sınırlı operatör, ϕ^* ise onun eşleniğidir.

Aşağıdaki fonksiyoneli tanımlayalım.

$$J(f) := \|\phi f - h\|_{L_2}^2 = (\phi f - h, \phi f - h), f \in \mathcal{F}$$

Bu durumda yöntemin algoritması aşağıdaki akış şeması ile verilir;

1. Adım

$n = 0$ al, $f^{(n)}(t)$ başlangıç iterasyonunu seç, (2.1) probleminin $u(x, t; f^n)$ çözümünde kullanılacak

$$r^{(n)}(t) := (\Phi f^{(n)})(t) - h(t)^\gamma.$$

rezidü değerini hesapla.

2. Adım

$J'[f^{(n)}]$ gradyanını hesapla. $p^{(n)}(t)$ iniş yönünü

$$p^{(n)}(t) := \begin{cases} J'_\alpha(f^{(n)})(t), & n = 0 \\ J'_\alpha(f^{(n)})(t) + \frac{\|J'_\alpha(f^{(n)})\|_{L_2(0,t)}^2}{\|J'_\alpha(f^{(n-1)})\|_{L_2(0,t)}^2} p^{(n-1)}(t), & n \geq 1. \end{cases}$$

kuralına göre bul.

3. Basamak

$\beta^{(n)} > 0$ iniş parametresini

$$J_\alpha(f^{(n)} - \beta^{(n)} p^{(n)}) = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}} J_\alpha(f^{(n)} - \beta p^{(n)}),$$

$$\beta^{(n)} = \frac{\langle \Phi f^{(n)} - h(t)^\gamma, \Phi p^{(n)} \rangle + \alpha \langle f^{(n)}, p^{(n)} \rangle}{\|\Phi p^{(n)}\|_{L_2(0,t)}^2 + \alpha \|p^{(n)}\|_{L_2(0,t)}^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\langle J'_\alpha(f^{(n)}), p^{(n)} \rangle}{\|\Phi p^{(n)}\|_{L_2(0,t)}^2 + \alpha \|p^{(n)}\|_{L_2(0,t)}^2},$$

formülüne göre hesapla.

4. Basamak

$f^{(n+1)}(t) = f^{(n)}(t) - \beta^{(n)} p^{(n)}(x)$ formülünü kullanarak $f^{(n+1)}(t)$ fonksiyonunun $n + 1$.

iterasyonu hesapla.

5. Basamak

ε_J durdurma parametresi olmak üzere;

$$\|r^{(n+1)}\|_{L_2(0,l)} < \varepsilon_J,$$

sağlanıyor ise 6. adıma git; Aksi durumda $n := n + 1$ seçerek 2.adıma dön.

6. Basamak

İterasyonu durdur ve $f^{(n+1)}(t)$ fonksiyonunu quasi çözüm olarak belirle.

Lemma 2.15. $p^{(n)}$ iniş yönü, $J(f^{(n+1)})$ fonksiyonelinin gradyanına ortogondur;
 $\langle J'_\alpha(f^{(n+1)}), p^{(n)} \rangle = 0.$

Kanıt. $f^{(n+1)} := f^{(n)} - \beta^{(n)}p^{(n)}$ olduğundan kanıtı doğrudan aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$\begin{aligned} \langle J'(f^{(n+1)}), p^{(n)} \rangle &= \langle 2\Phi^*(\Phi f^{(n+1)} - h(t)^\gamma), p^{(n)} \rangle \\ &= \langle 2\Phi^*(\Phi f^{(n)} - \beta^{(n)}\Phi p^{(n)}) - h(t)^\gamma, p^{(n)} \rangle + 2\alpha \langle f^{(n)} - \beta^{(n)}p^{(n)}, p^{(n)} \rangle \\ &= \langle 2\Phi^*(\Phi f^{(n)} - h(t)^\gamma), p^{(n)} \rangle - 2\beta^{(n)} \langle \Phi^* \Phi p^{(n)}, p^{(n)} \rangle \\ &= \langle J'(f^{(n)}), p^{(n)} \rangle - 2\beta^{(n)} (\|\Phi p^{(n)}\|^2 + \alpha \|p^{(n)}\|^2) = 0. \end{aligned}$$

□

Bu algoritmada (2.1) düz probleminin ve (2.6) eşlenik probleminin sayısal çözümleri söz konusudur. Her iki problemin sayısal çözümünü için kullanılacak sonlu fark şeması aşağıdaki gibidir. Bu şemanın yaklaşım hatası $o(\tau^2 + h^2)$ 'dir [Samarskii, 2001].

Düz Problemlerde Kullanılacak Sonlu Fark Şeması

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{2h} \left\{ [k_{i+1/2} \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}}{h} - k_{i-1/2} \frac{y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}}{h}] + [k_{i+1/2} \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h} - k_{i-1/2} \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h}] \right\} \\ + \frac{1}{2} [F_i^{j+1} + F_i^j] \quad i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{0, N_t - 1}, \tau = T_f/N_t, h = l/N_x \\ \frac{y_0^{j+1} - y_0^j}{\tau} = \frac{1}{h} \left\{ [k_{1/2} \frac{y_1^{j+1} - y_0^{j+1}}{h} + f(j+1)] + [k_{1/2} \frac{y_1^j - y_0^j}{h} + f(j)] \right\} + \frac{1}{2} [(F_0^{j+1} + F_0^j)] \\ j = \overline{0, N_t - 1}, y_{N_x}^j = 0, j = \overline{0, N_t - 1} \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Burada $y_i^j := u(x_i, y_j)$ ve $k_{i+1/2} := k(x_{i+1/2})$ anlamındadır.

Problemlerde kullanılacak şebeke ise;

$$\Omega_T^h := \{(x_i, t_j) | h_x = l/(N_x - 1); h_t = T/(N_t - 1); x_i = x_{i-1} + h_x, t_j = t_{j-1} + h_t, \overline{0, N_x}, \overline{0, N_t}\}$$

2.6 Ek Koşulu Sınırdan Verilmiş Bir Boyutlu Lineer Olmayan Parabolik Ters Akı Problemi

(2.18) probleminde $k(x)$ ısı geçirgenliği katsayısı $u(x, t)$ çözüm fonksiyonuna bağlı olduğundan elde edilen probleme Bir Boyutlu Nonlineer Parabolik Problemi denir. Buna göre ters problem aşağıdaki gibi tanımlanır: $\langle u; f \rangle$ fonksiyon çiftini

$$\begin{cases} u_t = (k(u)u_x)_x + F(x, t), & (x, t) \in \Omega_T \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, l], \\ -k(u)u_x|_{(x=0)} = f(t), & u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T]. \end{cases} \quad (2.20)$$

problemi ve $u(0, t) = h(t)$ eşitlikleri sağlayacak şekilde buluruz. Bu ters problemi NTAP1 şeklinde gösterelim. Nonlineer ters parabolik problemin conjugate Gradient Yöntemi ile çözümünü için ,önce Nonlineer ters problemi aşağıdaki gibi lineerleştiriz. Böylece ters problem her bir iterasyon için aşağıda tanımlanan f olmak üzere $\langle u^{(n)}, f \rangle$ fonksiyon çiftinin arandığı lineer ters parabolik probleme dönüşür.[24]

$$\begin{cases} u_t^{(n)} = (k(u^{(n-1)})u_x^{(n)})_x + F(x, t), & (x, t) \in \Omega_T \\ u^{(n)}(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, l] \\ -k(u^{(n-1)})u_x^{(n)}|_{(x=0)} = f(t), & u^{(n)}(l, t) = 0, \quad t \in (0, T] \end{cases} \quad (2.21)$$

$u^{(n-1)}$ bilinen olmak üzere $\tilde{k}(x, t) := k(u^{(n-1)}(x, t))$, $\tilde{u} := u^{(n)}(x, t)$; olarak tanımlarsak (2.21) problemi her iterasyon için ;

$$\begin{cases} u_t = (\tilde{k}u_x)_x + F(x, t), & (x, t) \in \Omega_T \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, l] \\ -\tilde{k}(x, t)u_x|_{(x=0)} = f(t), & u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T] \end{cases} \quad (2.22)$$

2.22 problemine dönüşür.

Böylece Lineer olmayan ters problemin çözümü her iterasyonda Lineer ters problemine dönüşür ve $\|u^{(n)} - u^{(n-1)}\|_\infty \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ eşitsizliği sağlanacak şekilde iterasyonlar devam ettirilir.

Uyarı 2.16. (2.20) Lineer olmayan problemin yakınsaması $k(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağlaması koşulu ile gerçekleşir.

$$c_1 > k(\xi) > c_0 > 0 \quad (2.23)$$

$$k(\xi) + 2\xi k'(\xi) \geq \gamma_0 > 0, \quad \xi \in [0, \xi^*] \quad (2.24)$$

2.7 Lineer ve Lineer Olmayan Düz ve Ters Problemler için Sayısal Örnekler

Ters problemlerde kullanılacak herhangi bir method için, herşeyden önce ilgili düz problemin optimal şebeke parametrelerinin seçimi çok önemlidir. Diğer bir yandan ters problemde kullanılacak iterativ methodu en etkili bir biçimde kullanılmasını sağlar.

Düz Problem için Sayısal Değerlendirmeler

Örnek 1: Süreksiz Katsayılı Düz Problem: (2.18) probleminde giriş verilerini aşağıdaki gibi seçerek optimal şebeke parametrelerini belirleyelim. Bunun için, öncelikle Ω_T için şebeke oluşturalım. Buna göre $(0, l_x)$ aralığını $(N_x > 0)N_x - 1$ parçaya, $(0, T)$ aralığını ise $(N_t > 0)N_t - 1$ parçaya bölelim. Ele alınacak tüm örnek problemler için $l_x = 1$ ve $T = 1$ dir.

$$k(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \text{ ise} \\ 2, & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x, t) = 0.5e^{-t}(x - 1)\cos(2\pi t), & (x, t) \in \Omega_T \\ u_0(x) = 0.5(x - 1) \in [0, l] \\ -k(0)u_x(0, t) = 0.5e^{-t}\cos(2\pi t), \quad u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T] \end{cases} \quad (2.25)$$

TABLO 2.1: Örnek 1 deki Süreksiz katsayılı Düz Problem için Sayısal Sonuçlar

N_x	N_t	hx	ht	$\frac{\ u-u_h\ _\infty}{\ u\ _\infty}$
21	51	0.05	0.02	0.24×10^{-1}
21	101	0.05	0.01	0.24×10^{-1}
21	151	0.05	0.0067	0.24×10^{-1}

Tablo 2.1'den de görüleceği gibi optimal şebek parametreleri $(N_x \times N_t) = (21 \times 151)$ olarak belirlenir.

Örnek 2: Değişken Katsayılı Düz Problem:

$$\begin{cases} u(x, t) = 0.5e^{-t}(x-1)\cos(2\pi t);, & (x, t) \in \Omega_T \\ k(x) = x^2 + 1 & u_0(x) = 0.5(x-1), x \in [0, l] \\ f(t) = 0.5t^2e^{-t}\cos(2\pi t), & u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T] \end{cases} \quad (2.26)$$

TABLO 2.2: Örnek 2 deki Değişken katsayılı Düz Problem için Sayısal Sonuçlar

N_x	N_t	hx	ht	$\frac{\ u-u_h\ _\infty}{\ u\ _\infty}$
21	51	0.05	0.02	0.16×10^{-2}
21	101	0.05	0.01	0.8751×10^{-3}
21	151	0.05	0.0067	0.6012×10^{-3}

Tablo 2.2'den de görüleceği gibi optimal şebek parametreleri $(N_x \times N_t) = (21 \times 151)$ olarak belirlenir.

Örnek 3: Lineer Olmayan Düz Problem:

(2.20) probleminde giriş verileri olarak aşağıdaki değerleri alalım.

$\|u^{(n)} - u^{(n-1)}\| \leq \varepsilon$ için $\varepsilon = e - 4$ seçelim.

$$\begin{cases} u(x, t) = 0.5e^{-t}(x-1)\cos(2\pi t);, & (x, t) \in \Omega_T \\ k(\xi) = 1/(1+\xi), \quad \xi = u_x^2(x, t), & u_0(x) = 0.5(x-1), x \in [0, l] \\ -k(u)u_x|_{x=0} = f1(t), & u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T] \end{cases} \quad (2.27)$$

TABLO 2.3: Örnek 3 deki Lineer Olmayan Düz Problem için Sayısal Sonuçlar

N_x	N_t	hx	ht	$\frac{\ u-u_h\ _\infty}{\ u\ _\infty}$
21	51	0.05	0.02	0.16×10^{-2}
21	101	0.05	0.01	0.8914×10^{-3}
21	151	0.05	0.0067	0.613×10^{-3}

Tablo 2.3'den de görüleceği gibi optimal şebek parametreleri $(N_x \times N_t) = (21 \times 151)$ olarak belirlenir.

EGY'inin ve Fourier Yönteminin Ters Problem Üzerindeki Performansı

Bu bölümde (2.3) bölümünde tanımlanmış EGY algoritmasının ve Fourier yönteminin LTAP1, LTAP2 problemleri üzerindeki sayısal sonuçları incelenmiştir.

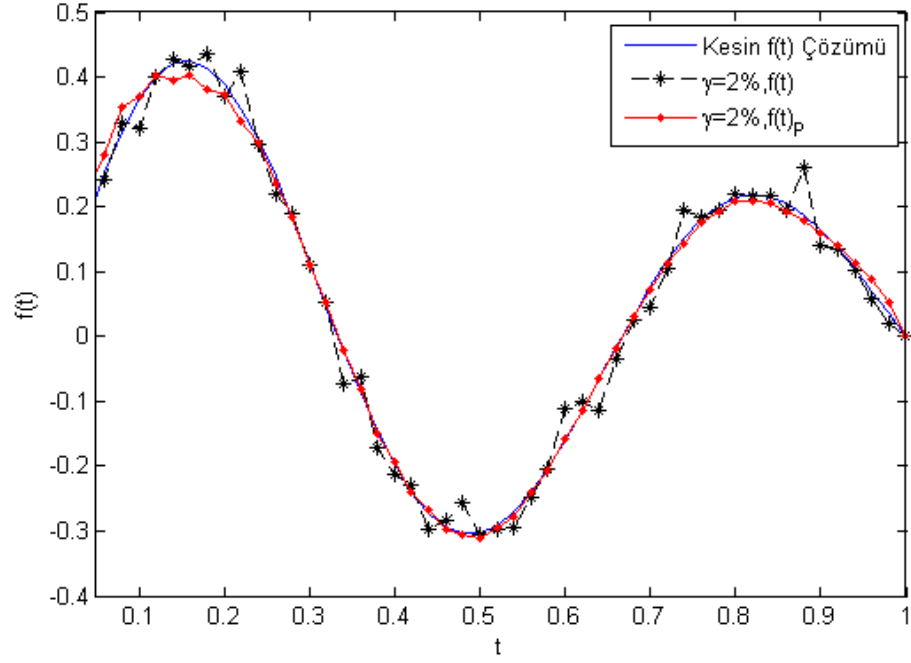
Verilen bütün örneklerde (2.1) düz probleminin $u_h(x, t; f)$ sayısal çözümünden üretilen $h(t)$ ek verisi gürültüsüz olarak verilmiştir. Gürültüsüz $h(t)$ ek verisi gerçek hayatta mümkün olamayacağından dolayı $h(t)$ ek verisine, büyüklüğünün rastgele bir " γ " hata seviyesi eklenir $h_\gamma(t) = h(t) + \gamma \text{rand}(h) \|h\|_\infty$. Bu hata payının $h(t)$ ek verisine etkisini azaltmak içinse Matlab'da "*smooth*" komutu ile uygulanan "gürültülü veri pürüzsüzleştirme tekniği" kullanılacaktır. Bu teknik her veri noktasını komşu veri noktalarının ortalama değerleri ile değiştirerek verileri düzeltir.

Burada gözlenmesi gereken grafiklerden ve tablolardan çeşitli " γ " hata seviyelerine göre iterasyon sayısının değişimi, $e(n, f; \gamma)$ yaklaşım hatası ($e(n, f; \gamma) := \|u_h(0, \cdot) - h(\cdot)\|_{L_2[[0, T]]}$) ve $E(n, f; \gamma)$ yakınsaklık hatasının ($E(n, f; \gamma) := \|f - f_h\|_{L_2[[0, T]]}$) davranışının incelenmesi ve optimum iterasyon sayısı için rastgele ölçüm hatası değerinin ters problemin çözümüne yansımalarının değerini belirlenmesidir.

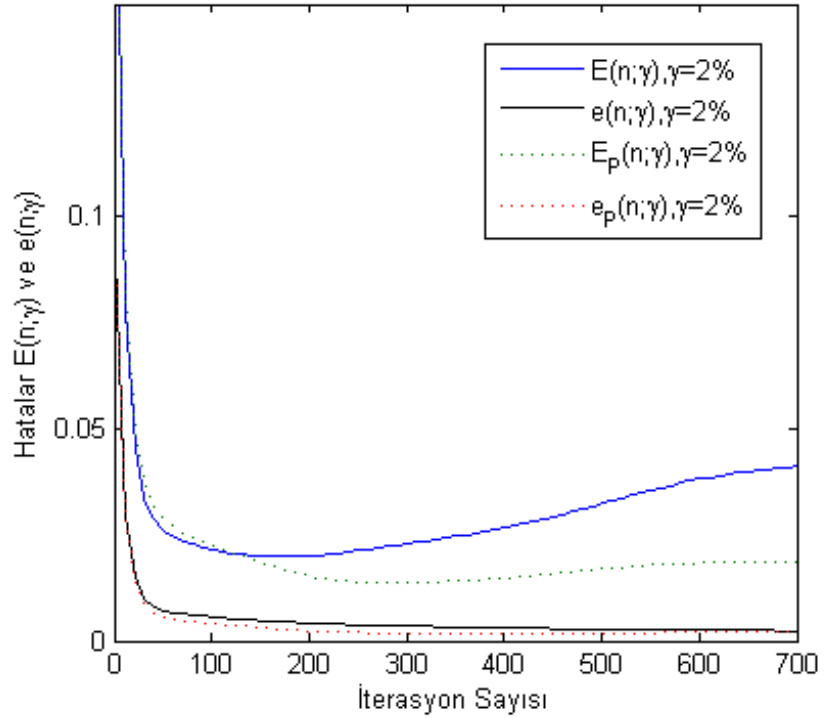
Örnek 1: Süreksiz katsayılı lineer ters problemin EGY ile bulunması

Bu örnekte $h(t) := u(0, t)$ ek verisi, (2.18) düz probleminin $u_h(x, t; f)$ sayısal çözümünden üretilmiştir. (2.1) – (2.2) ters probleminde $F(x, t) = 3 \sin(3\pi x)$, $f(t) = 0.5e^t \cos(2\pi t)$, $u_0(t) = 0$ ve $u(l_x, t) = 0$ gibi olsun ve Difüzyon katsayısını ise aşağıdaki gibi seçelim.

$$k(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \text{ ise} \\ 2, & x < 0 \end{cases}$$



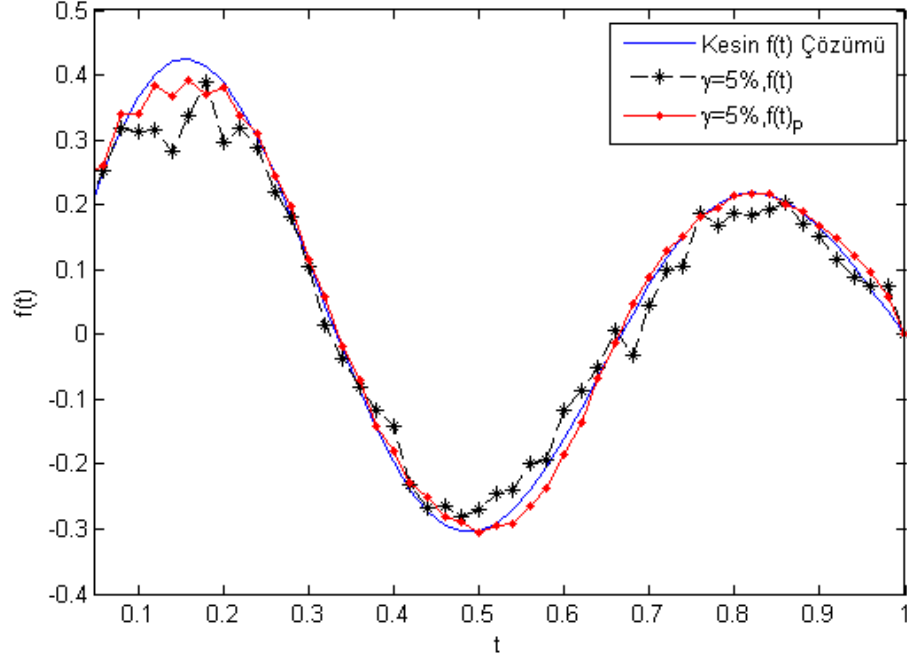
ŞEKİL 2.1: Süreksiz katsayılı lineer ters problemde $\gamma = 2\%$ gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_h(t)_P$, öncesi $f_h(t)$)



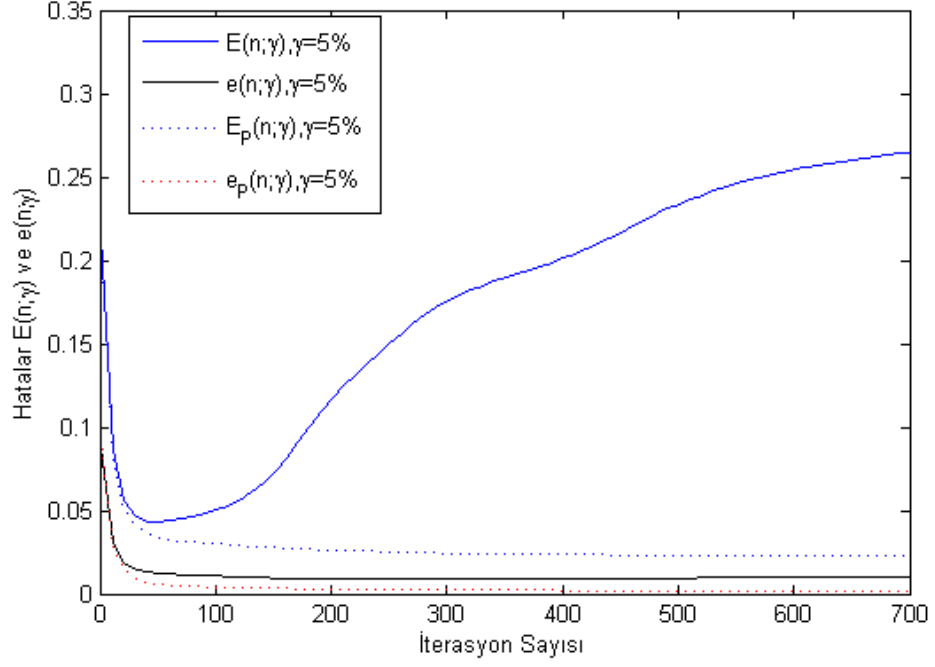
ŞEKİL 2.2: Süreksiz katsayılı lineer ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$)

Hata Oranları	$\frac{\ f-f_h\ _\infty}{\ f\ _\infty}$	$\frac{\ f-f_{1h}\ _{L_2}}{\ f\ _{L_2}}$
$\gamma = 0\%$	0.2×10^{-1}	0.57×10^{-1}
$\gamma = 2\%$,Pürüzsüzleştirilmesiz	0.1676×10^{-1}	0.2518×10^0
$\gamma = 2\%$,Pürüzsüzleştirmeli	0.1286×10^{-1}	0.1535×10^0

TABLO 2.4: Süreksiz katsayılı lineer ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun ($f(t)$) Akı fonksiyonuna etkisi



ŞEKİL 2.3: Süreksiz katsayılı lineer ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma), E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma), E(n, f; \gamma)$)



ŞEKİL 2.4: Süreksiz katsayılı lineer ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_h(t)_P$, öncesi $f_h(t)$)

Hata Oranı=5%	$\frac{\ f-f_h\ _\infty}{\ f\ _\infty}$	$\frac{\ f-f_{1h}\ _{L_2}}{\ f\ _{L_2}}$
Pürüzsüzleştirmesiz	0.17×10^0	0.1×10^0
Pürüzsüzleştirmeli	0.16×10^0	0.9×10^{-1}

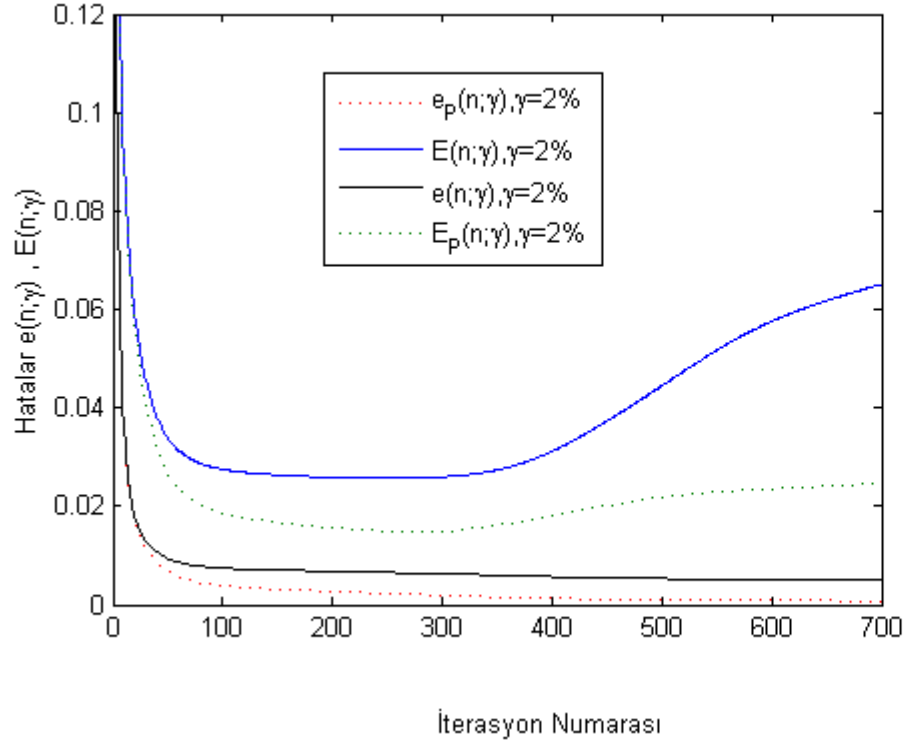
TABLO 2.5: Süreksiz katsayılı lineer ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $f(t)$ Akı fonksiyonuna etkisi

Örnek 2: Değişken katsayılı lineer ters problemin EGY ile bulunması

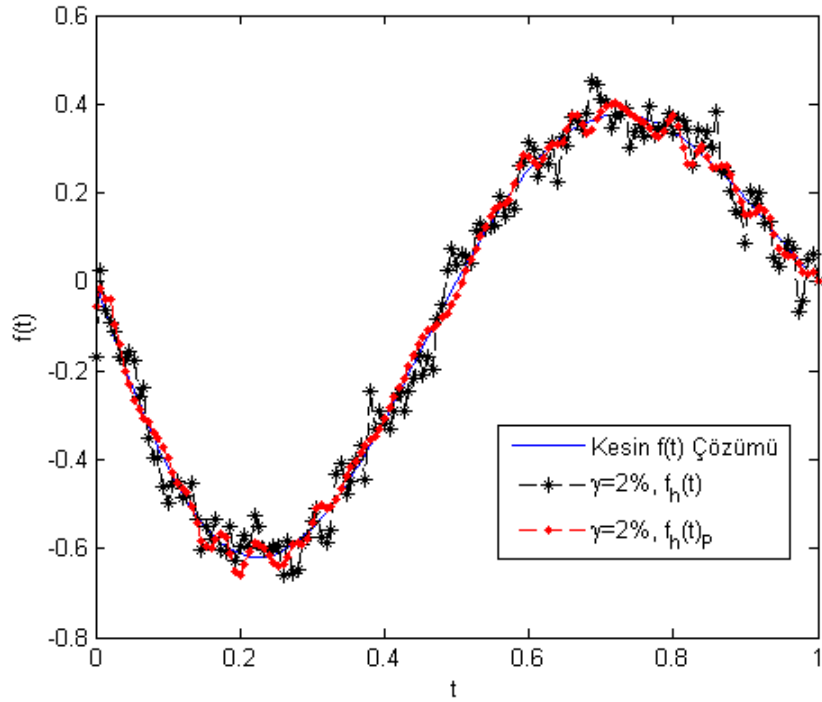
Bu örnekte de $h(t) := u(0, t)$ ek verisi analitik çözümden üretilmiştir. Problemin sağ tarafı olan $F(x, t)$ ise (2.1) denkleminde yazılarak hesaplanmıştır.

$$\begin{cases} u(x, t) = 0.5e^{-t}(x-1)\cos(2\pi t);, & (x, t) \in \Omega_T \\ k(x) = x^2 + 1 & u_0(x) = 0.5(x-1), x \in [0, l] \\ f(t) = 0.5t^2e^{-t}\cos(2\pi t), & u(l_x, t) = 0, \quad t \in (0, T] \end{cases} \quad (2.28)$$

Buradaki $u(x, t)$ fonksiyonu (2.18) probleminin çözümüdür



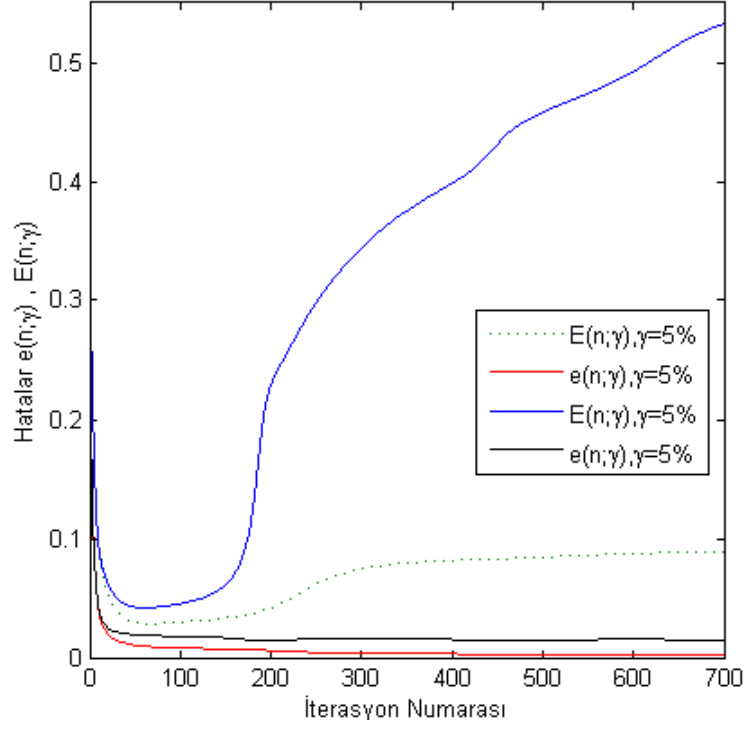
ŞEKİL 2.5: Değişken katsayılı lineer ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma), E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma), E(n, f; \gamma)$)



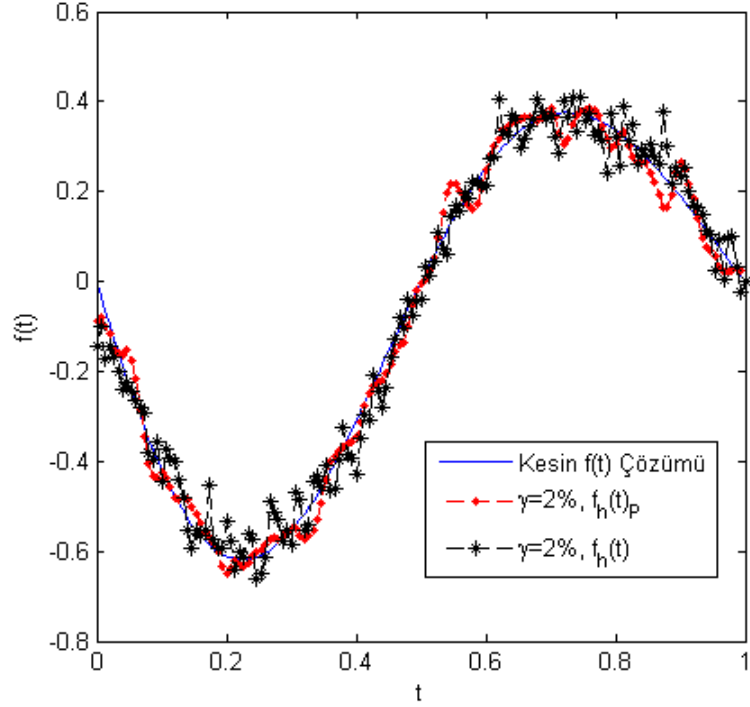
ŞEKİL 2.6: Değişken katsayılı lineer ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.

Hata Oranları	$\frac{\ f-f_h\ _\infty}{\ f\ _\infty}$	$\frac{\ f-f_{1h}\ _{L_2}}{\ f\ _{L_2}}$
$\gamma = 0\%$	0.85×10^{-2}	0.3×10^{-1}
$\gamma = 2\%$,Pürüzsüzleştirilmesiz	0.12×10^0	0.2×10^0
$\gamma = 2\%$,Pürüzsüzleştirilmeli	0.56×10^{-1}	0.927×10^{-1}

TABLO 2.6: Değişken katsayılı lineer ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun ($f(t)$) Akı fonksiyonuna etkisi



ŞEKİL 2.7: Değişken katsayılı lineer ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$)



ŞEKİL 2.8: Değişken katsayılı lineer ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_h(t)_P$, öncesi $f_h(t)$)

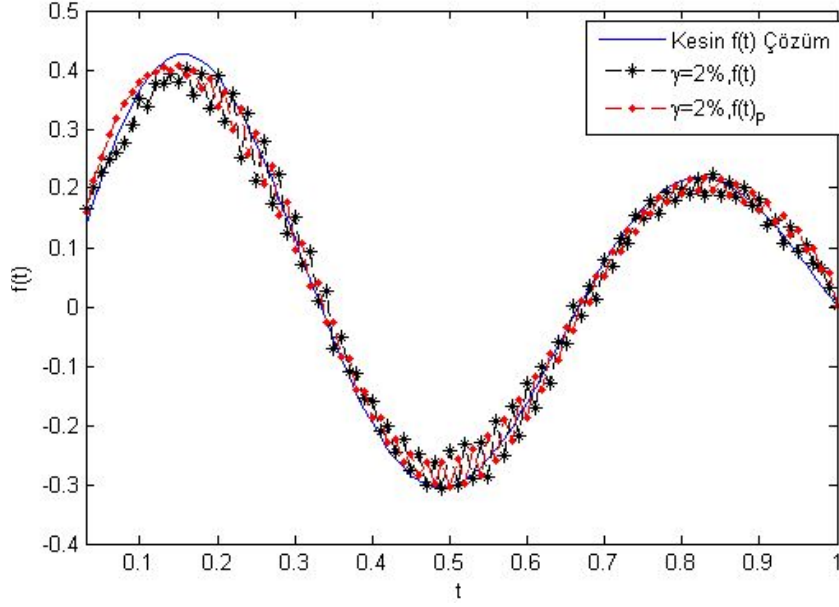
Hata Oranı=5%	$\frac{\ f-f_h\ _\infty}{\ f\ _\infty}$	$\frac{\ f-f_h\ _{L_2}}{\ f\ _{L_2}}$
Pürüzsüzleştirme-siz	0.1288×10^0	0.23×10^0
Pürüzsüzleştirmeli	0.91×10^{-1}	0.1416×10^0

TABLO 2.7: Değişken katsayılı lineer ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $f(t)$ Akı fonksiyonuna etkisi

Örnek 3: Lineer olmayan ters problemin EGY ile bulunması

Bu örnekte ise $h(t) := u(0, t)$ ek verisi, (2.18) düz probleminin $u_h(x, t; f)$ sayısal çözümünden üretilmiştir. (2.1) – (2.2) ters probleminde $F(x, t) = 3\sin(3\pi x)$, $f(t) = 0.5e^t \cos(2\pi t)$, $u_0(t) = 0$ ve $u(l_x, t) = 0$ gibi olsun ve Difüzyon katsayısını ise aşağıdaki gibi seçelim.

$$k(\xi) = 1/(1 + \xi), \quad \xi = u_x^2(x, t), \quad \|u^{(n)} - u^{(n-1)}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = e - 4.$$

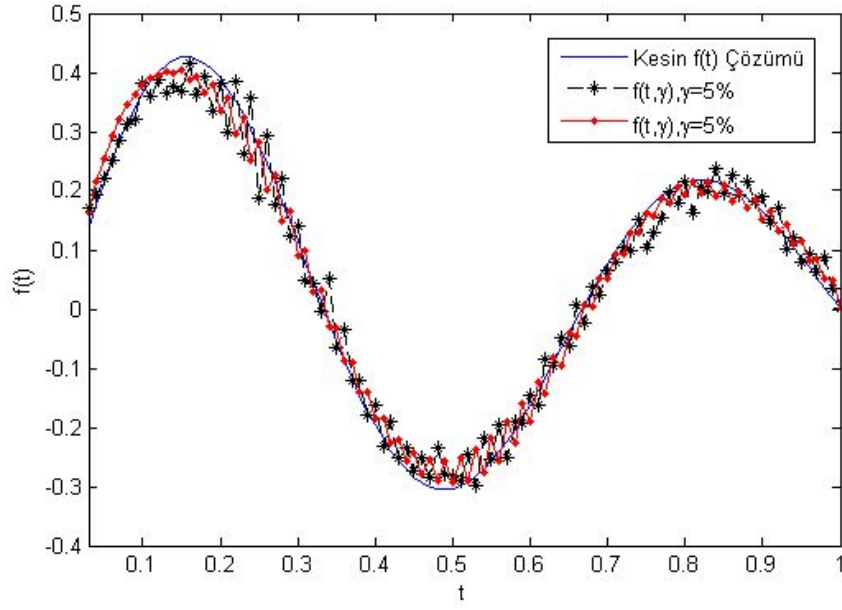


ŞEKİL 2.9: Lineer olmayan ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_h(t)_P$, öncesi $f_h(t)$)

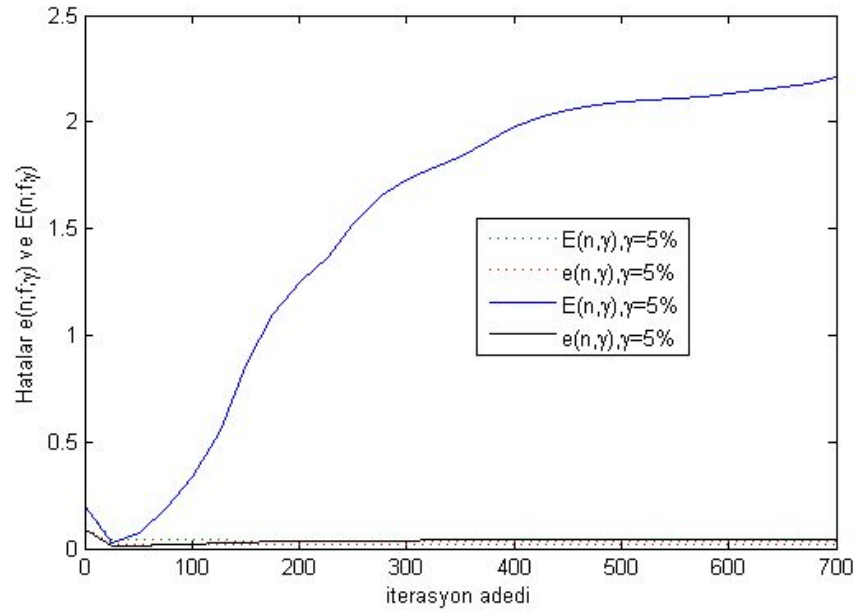
s

Hata Oranları	$\frac{\ f-f_h\ _\infty}{\ f\ _\infty}$	$\frac{\ f-f_{ih}\ _{L_2}}{\ f\ _{L_2}}$
$\gamma = 0\%$,	0.25×10^{-1}	0.6×10^{-1}
$\gamma = 2\%$,Pürüzsüzleştirme-siz	0.51×10^{-1}	0.12×10^0
$\gamma = 2\%$,Pürüzsüzleştirmeli	0.17×10^{-1}	0.4×10^{-1}

TABLO 2.8: linner olmayan ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $f(t)$ Akı fonksiyonuna etkisi



ŞEKİL 2.11: Lineer olmayan ters problemde $\gamma = 5\%$ gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$)



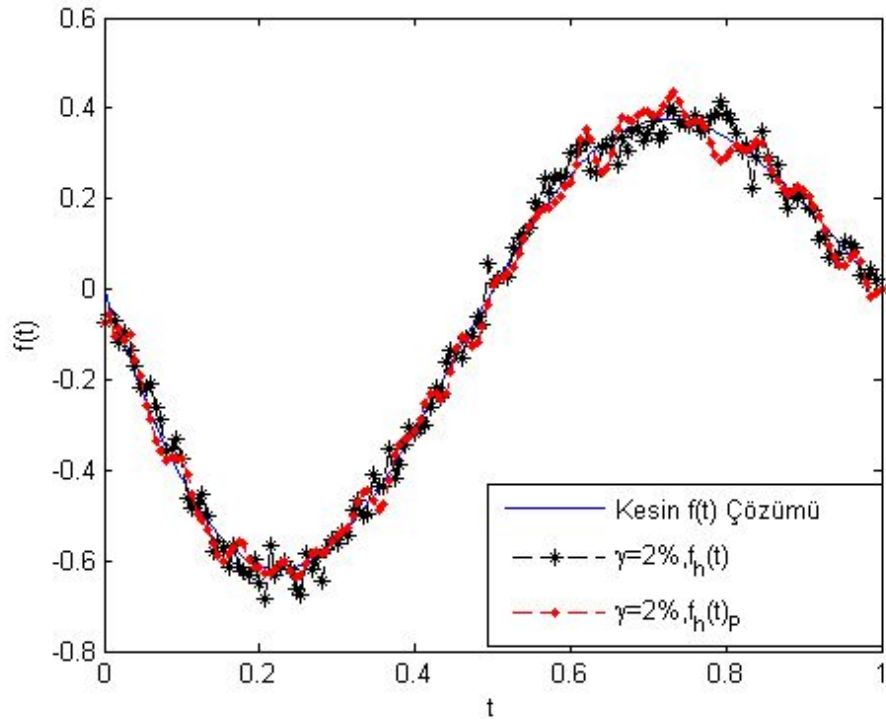
ŞEKİL 2.12: Lineer olmayan ters problemde $\gamma = 5\%$ gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_h(t)_P$, öncesi $f_h(t)$)

Hata Oranı=5%	$\frac{\ f-f_h\ _\infty}{\ f\ _\infty}$	$\frac{\ f-f_{1h}\ _{L_2}}{\ f\ _{L_2}}$
Pürüzsüzleştirilmemiş	0.9×10^{-1}	0.22×10^0
Pürüzsüzleştirmeli	0.61×10^{-1}	0.15×10^0

TABLO 2.9: Linner olmayan ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $f(t)$ Akı fonksiyonuna etkisi

Örnek 4: Sabit katsayılı ters problemin Fourier Yöntemi ile bulunması

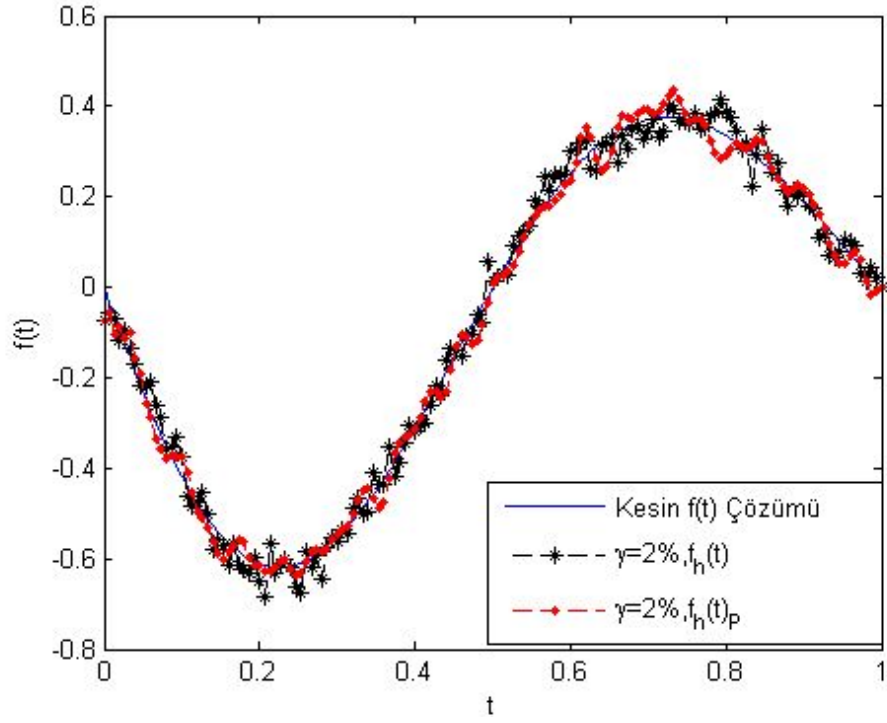
Bu örnekte giriş verilerini fonksiyonlarını birinci örnekteki gibi alalım. $h(t) := u(0, t)$ ek verisi, (2.1) düz probleminin analitik çözümünden üretilmiştir.



ŞEKİL 2.13: Sabit katsayılı lineer ters problemde $\gamma = 2\%$ gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_h(t)_P$, öncesi $f_h(t)$)

Hata Oranı:2%	$\ f - f_h\ _\infty$	$\frac{\ f-f_h\ _\infty}{\ f\ _\infty}$	$\frac{\ f-f_{1h}\ _{L_2}}{\ f\ _{L_2}}$
Pürüzsüzleştirilmemiş	0.6708×10^0	0.2707×10^0	0.33×10^0
Pürüzsüzleştirmeli	0.2922×10^0	0.1179×10^0	0.1603×10^0

TABLO 2.10: Sabit katsayılı lineer ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f(t))$ Akı fonksiyonuna etkisi



ŞEKİL 2.14: Sabit katsayılı lineer ters problemde $\gamma = 5\%$ gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_h(t)_P$,öncesi $f_h(t)$)

Hata Oranı:5%	$\ f - f_h\ _\infty$	$\frac{\ f - f_h\ _\infty}{\ f\ _\infty}$	$\frac{\ f - f_h\ _{L_2}}{\ f\ _{L_2}}$
Pürüzsüzleştirmesiz	0.15244×10^1	0.6153×10^0	0.7046×10^0
Pürüzsüzleştirmeli	0.9582×10^0	0.3868×10^0	0.457×10^0

TABLO 2.11: Sabit katsayılı lineer ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h(t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun ($f(t)$) Akı fonksiyonuna etkisi

Bölüm 3

Ek Koşulu Sınırdaki Verilmiş İki Boyutlu Lineer ve Lineer Olmayan Parabolik Ters Akı Problemi

3.1 Ek Koşulu Sınırdaki Verilmiş İki Boyutlu Lineer Parabolik Ters Akı Problemi

LTAPf2 Problemi, Kesin ve Hemen Hemen Çözümler, Uyum Koşulları

Önce aşağıdaki ifadeleri tanımlayalım; $T > 0$ olmak üzere

Sınırlar $x \in (0, l_x)$ ve $y \in (0, l_y)$ olacak şekilde

$$S_{1x} := \{(x, 0, t) | 0 < x < l_x, 0 < t < T\}, S_{2x} := \{(x, l_y, t) | 0 < x < l_x, 0 < t < T\},$$

$$S_{1y} := \{(0, y, t) | 0 < y < l_y, 0 < t < T\}, S_{2y} := \{(l_x, y, t) | 0 < y < l_y, 0 < t < T\},$$

$\Omega := \{(x, y) | 0 < x < l_x, 0 < y < l_y\}, \Omega_T := \Omega \times (0, T]$, olsun. Buna göre aşağıdaki parabolik problemi ele alalım.

$$\begin{cases} u_t = (k(x, y)u_x)_x + (k(x, y)u_y)_y + F(x, y, t), & (x, y, t) \in \Omega_T \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ -k(0, y)u_x(0, y, t) = f_1(y, t), & (y, t) \in S_{1y}, \quad u(x, y, t) = 0, \quad (y, t) \in S_{2y} \\ -k(x, 0)u_y(x, 0, t) = f_2(x, t), & (x, t) \in S_{1x}, \quad u(x, y, t) = 0, \quad (x, t) \in S_{2x} \end{cases} \quad (3.1)$$

Eğer $f := (f_1, f_2)$ akı vektör fonksiyonu bilinmeyen ise, bu durumda, fiziksel olarak anlamlı ve mümkün kılınabilir ek koşulları, sınırdaki $u(0, y, t)$ ve $u(x, 0, t)$ fonksiyonlarının değeri olarak verilebilir. (3.1) probleminde S_{1y} sınırında $u(0, y, t)$ ve S_{1x} sınırında $u(x, 0, t)$ fonksiyonlarının değerlerini verelim:

$h = (h_1, h_2)$ olacak şekilde

$$\begin{cases} h_1(y, t) = u(0, y, t), & (y, t) \in S_{1y}; \\ h_2(x, t) = u(x, 0, t), & (x, t) \in S_{1x}; \end{cases} \quad (3.2)$$

(3.2)'de verilen koşullar fiziksel olarak $x = 0$ ve $y = 0$ düzlemlerinde ısınnın $(u(x, y, t))$ fonksiyonu deneysel olarak ölçülmüş değerleridir. Bu durumda $\langle u, f \rangle$ çiftinin (3.1), (3.2)'deki denklemlerden bulunması problemine 2 boyutlu parabolik problem için ters akı problemi denir ve kısaca "LTAP2" şeklinde gösterilir. (3.1) probleminde ise buna karşılık gelen düz problem denir. Bu nedenle h fonksiyonuna *deneysel çıktı verisi* ("measured output data") denir. Buna karşılık $u_0(x, y)$ ve $F(x, y, t)$ fonksiyonları *giriş verileri* ("input data") olarak tanımlanır. (3.1) parabolik probleminin lineer olduğunu dikkate alarak aşağıda ele alacağımız ters problemlerde, genelliği bozmadan $u_0(x, y) \equiv 0, \forall (x, y) \in \Omega$ olduğunu varsayacağız. Ancak pratik uygulamalarda, h deneysel çıktı verisi $\|h^s - h\| \leq \delta$ bir $\delta := (\delta_1, \delta_2)$ ölçüm hatası ile verilir. Bunun sonucu olarak yukarıdaki eşitliğin kesin olarak sağlanması söz konusu olamaz. Bu durumda (3.1) – (3.2) ters probleminin kesin çözümü yerine,

$$J(f) = \int_{S_{1y}} [u(0, y, t; f) - h_1(y, t)]^2 dy dt + \int_{S_{1x}} [u(x, 0, t; f) - h_2(x, t)]^2 dx dt \quad (3.3)$$

fonksiyoneline en küçük değerini veren f_1 ve f_2 elemanlarının aranması problemi anlamlıdır.

Problemin uyum koşulları için, Kısmi Türevli Denklemler teorisindeki uyum koşulları, buradaki ters problem için de geçerlidir. Önce bu koşulları düz problem için verelim. $u(x, y, t)$ fonksiyonunu kendisi $\bar{\Omega}_T$ kapalı parabolik bölgesinde hemen-hemen süreklidir. O halde $x = l_x$ ve $y = l_y$ 'da verilmiş $u(x, l_y, t) = 0, u(l_x, y, t) = 0$ türdeş Dirichlet koşullarından yola çıkarsak

$u_0|_{x=l_x} = u(l_x, y, t)$ ve $u_0|_{y=l_y} = u(x, l_y, 0)$ olur. Böylece

$$u_0(x, l_y) = 0, \quad u_0(l_x, y) = 0$$

sonucuna varırız. Öte yandan (3.2)'de verilen ek koşulları ve $u(l_x, y, t) = 0$, $u(x, l_y, t) = 0$ sınır koşullarından, ters problem için ayrıca $h_1(l_y, t) = u(0, l_x, t) = 0$, $h_2(l_x, t) = u(l_x, 0, t) = 0$ uyum koşulları elde edilir. $u_0(x, y)$, $h_1(y, t)$ ve $h_2(x, t)$ fonksiyonlarının bu uyum koşullarını sağladığı varsayacağız.

3.2 LTAP2 Problemi için Fourier Yöntemi

(3.1) problemine fourier yöntemini uygulayabilmemiz için önce $u(x, y, t)$ fonksiyonunu $u(x, y, t) = v_1(x, y, t) + v_2(x, y, t) + w(x, y, t)$ fonksiyonlarının toplamı şeklinde arayalım. Sırasıyla fonksiyonlar aşağıdaki problemlerin çözümü olsun;

$$\begin{cases} v_{1t} = (k(x, y)u_x)_x + (k(x, y)u_y)_y + F(x, y, t), & (x, y, t) \in \Omega_T \\ v_1(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ v_1(0, y, t) = h_1(y, t), (y, t) \in S_{1y}, & v_1(x, y, t) = 0, (y, t) \in S_{2y} \\ v_1(x, 0, t) = 0, (x, t) \in S_{1x}, & v_1(x, y, t) = 0, (x, t) \in S_{2x} \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} v_{2t} = kv_{2xx} + kv_{2yy}, & (x, y, t) \in \Omega_T \\ v_2(x, y, 0) = 0, & (x, y) \in \Omega \\ v_2(0, y, t) = 0, (y, t) \in S_{1y}, & v_2(x, y, t) = 0, (y, t) \in S_{2y} \\ v_2(x, 0, t) = h_2(x, t), (x, t) \in S_{1x}, & v_2(x, y, t) = 0, (x, t) \in S_{2x} \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} w_t = kv_{2xx} + kv_{2yy} + F(x, y, t), & (x, y, t) \in \Omega_T \\ w(x, y, 0) = 0, & (x, y) \in \Omega \\ w(0, y, t) = 0, (y, t) \in S_{1y}, & w(x, y, t) = 0, (y, t) \in S_{2y} \\ w(x, 0, t) = 0, (x, t) \in S_{1x}, & w(x, y, t) = 0, (x, t) \in S_{2x} \end{cases} \quad (3.6)$$

ve v_1 ve v_2 fonksiyonlarına aşağıdaki dönüşümü uygulayalım.

$$\begin{aligned} v_1(x, y, t) &= \varphi_1(x, y, t) + \frac{l_x - x}{l_x} h_1(y, t) \\ v_2(x, y, t) &= \varphi_2(x, y, t) + \frac{l_y - y}{l_y} h_2(x, t) \end{aligned}$$

$h_2(l_x, t) = 0$, $h_1(l_y, t) = 0$ uyum koşullarından φ_1 ve φ_2 fonksiyonlarının sınır koşullarının türdeş olduğu görülür.

Böylece; $G(x, y; \xi, \tau), G(x, y; \xi), \tilde{f}_1, \tilde{f}_1,$

$$\begin{aligned}
G(x, y; \xi, \eta) &= \frac{2}{\ell} \sum \exp^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 k(t)} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} \xi\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell_y} \eta\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell_y} y\right) \\
G(x, y, t; \xi, \eta, \tau) &= \frac{2}{\ell} \sum \exp^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 k(t-\tau)} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} \xi\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell_y} \eta\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell_y} y\right) \\
\tilde{F}_1 &= k(h_{1yy}(y, t) - h_{1t}(y, t)) \\
\tilde{F}_2 &= k(h_{2xx}(x, t) - h_{2t}(x, t)) \\
\tilde{\varphi}_1(x, y, 0) &= kh_1(y, 0) - u_0(x, y) \\
\tilde{\varphi}_2(x, y, 0) &= kh_1(y, 0)
\end{aligned}$$

$v_1(x, y, t), v_2(x, y, t)$ ve $w(x, y, t)$ 'nin çözümlerini.

$$\begin{aligned}
v_1(x, y, t) &= \int_{\Omega} G(x, y; \xi) \tilde{\varphi}_1(\xi) d\xi + \int_{\Omega_T} G(x, y, t; \xi, \eta, \tau) \tilde{F}_1(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau + \frac{\ell_x - x}{\ell_x} h_1(y, t) \\
v_2(x, y, t) &= \int_{\Omega} G(x, y; \xi) \tilde{\varphi}_1(\xi) d\xi + \int_{\Omega_T} G(x, y, t; \xi, \eta, \tau) \tilde{F}_2(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau + \frac{\ell_y - y}{\ell_y} h_2(y, t) \\
w(x, y, t) &= \int_{\Omega_T} G(x, y, t; \xi, \eta, \tau) F(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau
\end{aligned}$$

olarak bulabiliriz. O halde problemin çözümü iki fonksiyonun toplamı olacaktır. Aradığımız $f_1(y, t)$ ve $f_2(x, t)$ fonksiyonları da aşağıda gösterildiği üzere seri toplamı üzerinden türev olarak buluruz.

$$\begin{aligned}
f_1(x, t) &= kv_{1x}(0, y, t) + kv_{2x}(0, y, t) + kw_x(0, y, t) \\
f_2(x, t) &= kv_{1y}(x, 0, t) + kv_{2y}(x, 0, t) + kw_y(x, 0, t)
\end{aligned}$$

3.3 Eşlenik Problem Yaklaşımı, LTAPf2 Probleminin Değer Fonksiyonelinin Gradyanının Hesaplanması

$F := f = (f_1, f_2 | f_1 \in L_2(S_{1y}), f_2 \in L_2(S_{1x})$ olmak üzere (3.3) ile verilen $J(f)$ fonksiyonelinin ele alacak aşağıdaki minimum problemi tanımlayalım.

$$J(f^*) = \inf J(f), f \in F$$

Eğer $J(f_*) = 0$ olacak şekilde bir $f_* \in F$ varsa. Minimizasyon probleminin quasiçözümü olan f_* probleminin aynı zaman da kesin çözümüdür.

Şimdi fonksiyonelin birinci varyasyonunu $f, f + \Delta f \in F$ için aşağıdaki gibi hesaplarız.

$$\Delta J(f) = J(f + \Delta f) - J(f) =$$

$$2 \int_{S_{1y}} [\Delta u(0, y, t; \Delta f) - h_1(y, t)] \Delta u(0, y, t; \Delta f) dt dy + \int_{S_{1y}} [\Delta u(0, y, t; \Delta f)]^2 dy dt$$

$$+ 2 \int_{S_{1x}} [\Delta u(x, 0, t; \Delta f) - h_2(x, t)] \Delta u(x, 0, t; \Delta f) dx dt + \int_{S_{1x}} [\Delta u(x, 0, t; \Delta f)]^2 dx dt$$

$\Delta u := u(x, y, t; f + \Delta f) - u(x, y, t; f)$ için Δu aşağıdaki problemin çözümü olmak üzere $J(f)$ 'in birinci varyasyonunu elde ederiz

$$\begin{cases} \Delta u_t = (k(x, y) \Delta u_x)_x + (k(x, y) \Delta u_y)_y, & (x, y, t) \in \Omega_T, \\ \Delta u(x, y, 0) = 0, & (x, y) \in \Omega \\ k(x, y) \Delta u_x(x, y, t) = \Delta f_1, & (x, y, t) \in S_{1y} \quad \Delta u(x, y, t) = 0, & (y, t) \in S_{2y}, \\ k(x, y) \Delta u_y(x, y, t) = \Delta f_2, & (x, y, t) \in S_{1x} \quad \Delta u(x, y, t) = 0, & (x, t) \in S_{2x}. \end{cases} \quad (3.7)$$

(3.7) probleminin her iki tarafını $\varphi(x, y, t)$ fonksiyonunu ile çarpıp eşitliğin sol tarafına kısmi integrasyon formülünü uygularsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\int_{\Omega_T} \Delta u_t(x, y, t; f) \varphi(x, y, t) dx dy dt = \int_{\Omega_T} (k(x, y) \Delta u_x(x, y, t; \Delta f))_x dx dy dt$$

$$+ \int_{\Omega_T} (k(x, y) \Delta u_y(x, y, t; \Delta f))_y \varphi(x, y, t) dx dy dt$$

$$= \int_{\Omega_T} (k(x, y) \varphi_x(x, t; f))_x \Delta u(x, t; f) dx dy dt - \int_{S_{1y}} k(x, y) \varphi_x(x, t; f) \Delta u_x(x, t; f) \Big|_0^x dy dt$$

$$+ \int_{S_{1x}} [k(x, y) \Delta u_y(x, y, t; f) \varphi(x, y, t; f)] \Big|_0^y dx dt$$

$$- \int_{S_{1x}} [k(x, y) \varphi_y(x, t; f) \Delta u_x(x, t; f)] \Big|_0^y dx dt + \int_{\Omega_T} (k(x, y) \varphi_y(x, t; f))_y \Delta u(x, t; f) dx dy dt$$

Şimdi yukarıdaki integral denklemde $\varphi(x, y, t)$ fonksiyonun aşağıdaki denklemi sağladığını iddaa edip, (3.7) probleminin sınır koşullarını uygulatarsak

$$\begin{cases} \varphi_t = -(k(x, y) \varphi_x)_x - (k(x, y) \varphi_y)_y & (x, y, t) \in \Omega_T, \\ \varphi(x, y, T) = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ k(x, y) \varphi_x(x, y, t; f) = 2[u(x, y, T; f) - h_1(y, t)] \Big|_{S_{1y}}, & \varphi(x, y, t) \Big|_{S_{1y}} = 0, \\ k(x, y) \varphi_y(x, y, t; f) = 2[u(x, y, T; f) - h_2(x, t)] \Big|_{S_{1x}}, & \varphi(x, y, t) \Big|_{S_{1x}} = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Tekrar (3.8) ve (3.7) problemlerindeki sınır koşullarını dikkate alarak aşağıdaki integral özdeşliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{S_{1y}} [u(0, y, t; f) - h_1(y, t)] \Delta u(0, y, t; \Delta f) dy dt \\
& + 2 \int_{S_{1x}} [u(x, 0, t; f) - h_2(x, t)] \Delta u(x, 0, t; \Delta f) dx dt \\
& = \int_{S_{1y}} \psi(0, y, t; f) \Delta f(t) dy dt + \int_{S_{1x}} \psi(x, 0, t; f) \Delta f(t) dy dt, \quad \forall f \in \mathcal{F}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlik yardımıyla $\forall \Delta f \in F$ olmak üzere $J(f)$ değer fonksiyonelinin birinci varyasyonu için

$$\begin{aligned}
\Delta J(f) &= \int_{S_{1y}} \varphi(0, y; f) \Delta f_1(y, t) dy dt + \int_{S_{1x}} \varphi(x, 0; f) \Delta f_2(x, t) dx dt + o(\|\Delta u(x, y, t; \Delta f)\|^2) \\
& \quad o(\|\Delta u(x, y, t; \Delta f)\|^2) =: \int_{S_{1y}} [\Delta u(0, y, t)]^2 dy dt + \int_{S_{1x}} [\Delta u(x, 0, t)]^2 dx dt
\end{aligned}$$

formülüne ulaşırız. $\varepsilon > \max[l_y/(2k_*), l_x/(2k_*)] > 0$ ve $k_* = \min_{[\Omega]} k(x, y) > 0$ olsun. (3.7) parabolik probleminin Δu çözümü için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
\|\Delta u(0, y, t; f)\|^2 + \|\Delta u(x, 0, t; f)\|^2 &\leq L_* [\|\Delta f_1\|_{L_2(\Omega_x)}^2 + \|\Delta f_2\|_{L_2(\Omega_y)}^2] \\
\Rightarrow \|\Delta u(0, \cdot, \cdot; f)\|^2 + \|\Delta u(\cdot, 0, \cdot; f)\|^2 &= O(\|\Delta f_1\|^2) + O(\|\Delta f_2\|^2). \\
L_* &> \max\left[\frac{\varepsilon l_x}{2\sigma_{\varepsilon_x}}, \frac{\varepsilon l_y}{2\sigma_{\varepsilon_y}}\right], \quad \sigma_{\varepsilon_x} = [k_* - \frac{l_x}{2\varepsilon}]^{1/2}, \sigma_{\varepsilon_y} = [k_* - \frac{l_y}{2\varepsilon}]^{1/2}
\end{aligned}$$

Böylece tanıma göre $J(f)$ değer fonksiyonelinin $J'(f)$ Fréchet gradyanını $J(f + \Delta f) - J(f) = (A_j(f), \Delta f) + o(\|\Delta f_1\|_{L_2[\Omega_x]}^2) + o(\|\Delta f_2\|_{L_2[\Omega_y]}^2)$ özdeşliği için

$$J'(f(t)) := \begin{pmatrix} \varphi(0, y, t; f) \\ \varphi(x, 0, t; f) \end{pmatrix}$$

şeklinde buluruz.

Kanıt. (3.7)'in her iki tarafını da Δu ile çarpıp Ω_T bölgesinde integralleyip ve başlangıç ve sınır koşullarını dikkate aldığımızda elimizde aşağıdaki enerji eşitliğini elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u^2(x, y, T; f) dy dx + \int_{\Omega_T} k(x, y) ([\Delta u_x(x, t, f)]^2 + [\Delta u_y(x, t, f)]^2) dx dy dt \\ &= \int_{S_{1y}} \Delta f_1(y, t) \Delta u(0, y, t; f) dy dt + \int_{S_{1x}} \Delta f_2(x, t) \Delta u(x, 0, t; f) dx dt \end{aligned}$$

Daha sonraki adımda eşitliğin sağ tarafına cauchy- ε eşitsizliğini ve Poincare eşitsizliğini uyguladıktan sonra sonraki adıma geçeriz.

$$\begin{aligned} & [2\varepsilon k_* - l_x] \int_{\Omega_T} [\Delta u_x(x, y, t; f)]^2 dx dt + [2\varepsilon k_* - l_y] \int_{\Omega_T} [\Delta u_y(x, y, t; f)]^2 dx dt \\ & \leq \int_{S_{1y}} [\Delta f_1(y, t)]^2 dt + \int_{S_{1x}} [\Delta f_2(x, t)]^2 dt \end{aligned}$$

En son olarakta ε 'u $\varepsilon > \max[l_x/(2k_*), l_y/(2k_*)] > 0$, $k_* = \min_{[0, l]} k(x) > 0$ olacak şekilde seçersek (3.2)'yi kanıtlamış oluruz. \square

Bu lemma ile (2.12) eşitliğindeki son integralin $o(\|\Delta f\|)$ ile sınırlandığını göstermiş olduk.

Tanım 3.1. (3.8) parabolik problemine (3.1 – 3.2) LTAP2 probleminin *eşlenik problemi* ("adjoint problem") denir.

Böylece tanıma göre $J(f)$ değer fonksiyonelinin $J'(f)$ Fréchet gradyanını

$$J'(f)(x) = (\varphi(0, y, t; f), \varphi(x, 0, t; f))$$

şeklinde buluruz.

Bu formül $J(f)$ değer fonksiyonelinin $J'(f)$ Frechet gradyanının iyi tanımlı ters yönlü parabolik eşlenik probleminin $\varphi(0, y, t; f)$ ve $\varphi(x, 0, t; f)$ sınırdaki değerlerinin olduğunu gösterir. Bunu $J'(f(t)) = (\varphi(0, \cdot; f), \varphi(\cdot, y; f))$ biçiminde gösteririz.

Lemma 3.2. (2.5) koşulu sağlansın. O zaman $J(f)$ C^1 Hölder sınıfındadır.

$$\|J(f + \Delta f) - J(f)\|_{H^0(0, T)} := L[\|\Delta \varphi(0, y, t, f)\|_{H^0(\Omega_y)} + \|\Delta \varphi(x, 0, t, f)\|_{H^0(\Omega_x)}]$$

olacak şekilde

$$\|J(f + \Delta f) - J(f)\|_{H^0(0, T)} < L[\|\Delta f_1\|_{H^0(\Omega_y)} + \|\Delta f_2\|_{H^0(\Omega_x)}], \forall f + \Delta f \in \mathcal{F}$$

eşitsizlik sağlanır.

$L > 0$ Lipschits sabiti $L = 1/\sqrt{2k_*\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0, 2k_*/l^2)$

Kanat. $\Delta\varphi$, $\Delta\varphi(x, t, f) := \varphi(x, t, f + \Delta f) - \varphi(x, t, f)$ ve $\varphi \in V^{1,0}(\Omega_T)$ aşığıdaki problemin çözüümü olacak şekilde:

$$\begin{cases} \Delta\varphi_t = -(k(x, t)\Delta\varphi_x)_x - (k(x, t)\Delta\varphi_y)_y & (x, y, t) \in \Omega_T, \\ \Delta\varphi(x, y, T) = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ k(x, y)\Delta\varphi_x(x, y, t; f) = 2\Delta u(x, y, T; f), & (x, y, t) \in S_{1y}, \varphi(x, y, t) = 0, (y, t) \in S_{2y}, \\ k(x, y)\Delta\varphi_x(x, y, t; f) = 2\Delta u(x, y, T; f), & (x, y, t) \in S_{1x}, \varphi(x, y, t) = 0, (x, t) \in S_{2x}. \end{cases} \quad (3.9)$$

(3.9) probleminin her iki tarafını $\Delta\varphi(x, t, f)$ çarpıp Ω_T bölgesinde integrallediğimiz zaman aşığıdaki enerji özdeşliğini elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T} k(x, y)[\Delta\varphi_x(x, t, f)]^2 + \Delta\varphi_y(x, t, f)]^2 dx dy dt + \int_{\Omega} [\Delta\varphi(x, y, 0; f)]^2 dx \\ &= 2 \int_{S_{1y}} \Delta u(0, y, t; f)\varphi(0, y, t; f) dt dy + 2 \int_{S_{1x}} \Delta u(x, 0, t; f)\varphi(x, 0, t; f) dt dx \end{aligned}$$

Enerji Özdeşliği yardımıyla

$$\begin{aligned} k_* \int_{\Omega_T} [\Delta\varphi_x(x, t, f)]^2 + [\Delta\varphi_y(x, t, f)]^2 dx dy dt &\leq 2 \int_{S_{1y}} \Delta u(0, y, t; f)\varphi(0, y, t; f) dy dt \\ &+ 2 \int_{S_{1x}} \Delta u(x, 0, t; f)\varphi(x, 0, t; f) dx dt \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafında Poinkare eşitsizliğini ve (3.2) lemmasını kullanarak teoremin kanıtını elde ederiz. \square

Teorem 3.3. (2.5)koşulu sağlansın. O zaman $f^0 := (f_1^0, f_2^0) \in F$ olacak şekilde seçilecek herhangi bir başlangıç aşığıdaki proses şeklinde verilir.

İterasyon $H^0(\Omega_T)$ normunda quasiçözüm olan $f^* \in F$, $f^{*'}e$ yakınsar. Bununla beraber $J(f^n)$ fonksiyonel dizisi aşığıdaki eşitsizliğe göre monoton azalan ve yakınsaktır.

$$0 < J(f^n) - J(f^*) \leq 2Ld^2n^{-1}, d > 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

Burada $L > 0$ Lipschits katsayısıdır.

Şimdi Problemin sayısal sayısal çözüümünde kullanılacak Eşlenik Gradyan Yönteminin Algoritmasını verelim.

Yöntemin iterasyon şeması aşağıdaki şekilde gibidir.

1. Adım

$n = 0$ al, $f^{(n)}$ başlangıç iterasyonunu seç , (2.1) probleminin $u(x, y, t; f^n)$ çözümünde kullanılacak

$$r^{(n)}(x, y, t) := \begin{cases} u(0, y, t; f^{(n)}) - h_1^\gamma \\ u(x, 0, t; f^{(n)}) - h_2(t)^\gamma \end{cases}$$

rezidü değerini hesapla.

2. Adım

$J'[f^{(n)}]$ gradyanını hesapla. $p^{(n)}$ iniş yönünü

$$p^{(n)} := \begin{cases} p_1^{(n)}(y, t) \\ p_2^{(n)}(x, t) \end{cases}$$

$\|J'_\alpha(f^{(n)})\|_{L_2(\Omega_x) \times L_2(\Omega_y)}^2 := \|\varphi(0, y, t; f)\|_{L_2(\Omega_x)}^2 + \|\varphi(x, 0, t; f)\|_{L_2(\Omega_y)}^2$ olmak üzere;

$$p^{(n)} = \begin{cases} J'_\alpha(f^{(n)})(x), & n = 0 \\ J'_\alpha(f^{(n)})(x) + \frac{\|J'_\alpha(f^{(n)})\|_{L_2(0,t)}^2}{\|J'_\alpha(f^{(n-1)})\|_{L_2(0,t)}^2} p^{(n-1)}(x), & n \geq 1. \end{cases}$$

kuralına göre bul.

3. Basamak

$\beta^{(n)} > 0$ iniş parametresini

$$J_\alpha(f^{(n)} - \beta^{(n)}p^{(n)}) = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}} J_\alpha(f^{(n)} - \beta p^{(n)}), \quad (\text{EGA})$$

$$\beta^{(n)} = \frac{\langle \Phi f^{(n)} - h(t)^\gamma, \Phi p^{(n)} \rangle + \alpha \langle f^{(n)}, p^{(n)} \rangle}{\|\Phi p^{(n)}\|_{L_2(0,t)}^2 + \alpha \|p^{(n)}\|_{L_2(0,t)}^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\langle J'_\alpha(f^{(n)}), p^{(n)} \rangle}{\|\Phi p^{(n)}\|_{L_2(0,t)}^2 + \alpha \|p^{(n)}\|_{L_2(0,t)}^2},$$

formülünden elde edelim.

4. Basamak

$f^{(n+1)} = f^{(n)} - \beta^{(n)}p^{(n)}$ ve $r^{(n+1)}$ formüllerinden $n+1$. iterasyonu hesaplayalım.

5. Basamak

Eğer algoritmayı durdurma koşulu

$$\|r^{(n+1)}\|_{L_2(\Omega_x) \times L_2(\Omega_y)}^2 := \|r_1^{(n+1)}\|_{L_2(\Omega_x)}^2 + \|r_2^{(n+1)}\|_{L_2(\Omega_y)}^2 \text{ için ;}$$

$$\|r^{(n+1)}\|_{L_2(\Omega_x) \times L_2(\Omega_y)} < \varepsilon_J,$$

sağlanıyor ise 6. basamağa gidelim; koşul sağlanmıyor ise $n = n + 1$ yazalım ve 2. basamağa geri dönelim.

6. Basamak

İterasyon işlemini durduralım ve $f^{(n)}$ fonksiyonunun grafiğini çizdirelim.

Lineer düz problemin sayısal sayısal çözümünde kullanılacak sonlu fark şeması aşağıda verilmiştir.

Düz Problemlerde Kullanılacak Sonlu Fark Şeması

$$\left\{ \begin{array}{l} hx = l/N_x, hy = l/N_y, \tau = \overline{0, N_t - 1} \\ u_{\bar{x}i\bar{j}} = \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h_x}, u_{ij} = u(x_i, y_j) \\ L_1 u = (ku_{\bar{x}})_x, \quad L_2 u = (ku_{\bar{y}})_y \\ \frac{u^{k+1/2} - u^k}{0.5\tau} = L_1 u^{k+1/2} + L_2 u^k + F_{ij}^k, i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1}, k = \overline{0, N_t - 1} \\ \frac{u^{k+1} - u^{k+1/2}}{0.5\tau} = L_1 u^{k+1/2} + L_2 u^{k+1} + F_{ij}^k, i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1}, k = \overline{0, N_t - 1} \\ u_{ij}^0 = h_{ij}, i = \overline{1, N_x}, j = \overline{1, N_y}, \\ k_{i,0}^k \frac{u_{i,0}^{k+1} - u_{i,0}^k}{\tau} = f_2^k, u_{i,N_y}^k = 0, k = \overline{0, N_t - 1}, i = \overline{0, N_x - 1} \\ k_{0,i}^k \frac{u_{0,j}^{k+1} - u_{0,j}^k}{\tau} = f_1^k, u_{N_y,j}^k = 0, k = \overline{0, N_t - 1}, j = \overline{0, N_y - 1} \end{array} \right.$$

3.4 Ek Koşulu Sınırdan Verilmiş İki Boyutlu Lineer Olmayan Parabolik Ters Akı Problemi

İki boyutlu lineer olmayan parabolik ters akı problemi aşağıdaki gibi tanımlarsak;
 $u := u(x, y, t)$ için;

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = (k(u)u_x)_x + k(u)u_y)_y + F(x, y, t), (x, y, t) \in \Omega_T \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), (x, y) \in \Omega \\ -k(u)u_x(x, y, t) = f_1(y, t), (x, y, t) \in S_{1y} \quad u(x, y, t) = 0, (x, y, t) \in S_{2y} \\ -k(u)u_y(x, y, t) = f_2(x, t), (x, y, t) \in S_{1x} \quad u(x, y, t) = 0, (x, y, t) \in S_{2x} \end{array} \right.$$

Bu problemde $f(t)$ akı fonksiyonunun aranan olduğunu varsayalım. Bunun için aşağıdaki ek ölçümün verildiğini varsayalım. (3.9) probleminde $x = 0$ sol sınırında $u(0, y, t)$ ve $y = 0$ sol sınırında $u(x, 0, t)$ fonksiyonlarının değerlerini verelim:

$h := (h_1, h_2)$ olacak şekilde

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1(y, t) = u(x, y, t), (x, y, t) \in S_{1y} \\ h_2(x, t) = u(x, y, t), (x, y, t) \in S_{1x} \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Böylece (3.9) ve (3.8) koşullarını sağlayan $\langle u(x, y, t), f \rangle$ fonksiyon çiftinin bulunması problemine *Lineer Olmayan Ters Akı Problemi* denir.

Lineer olmayan problemin çözümü için problem lineerleştirilir ve problem her adım için aşağıdaki lineer probleme indirgenir.

İlk iterasyon için $u^{(0)} = 0$ verilir. $\tilde{u} := u^{(n)}$ ve $\tilde{k}(x, y, t) := k(u^{(n)})$ için; $n=0,1,2,\dots$

$$\begin{cases} u_t = (\tilde{k}(x, y, t)u_x)_x + \tilde{k}(x, y, t)u_y + F(x, y, t), & (x, y, t) \in \Omega_T \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ -\tilde{k}(x, y, t)u_x(x, y, t) = f_1(y, t), \in S_{1y} & u(x, y, t) = 0, & (x, y, t) \in S_{2y} \\ -\tilde{k}(x, y, t)u_y(x, y, t) = f_2(x, t), \in S_{1x} & u(x, y, t) = 0, & (x, y, t) \in S_{2x} \end{cases} \quad (3.9)$$

Böylece lineer olmayan ters problemin çözümü her iterasyonda lineer ters problemine dönüşür ve iterasyon yakınsayana kadar devam ettirilir.

Uyarı 3.4. İki boyutlu lineer olmayan problemde de yakınsama ancak $k(x, y)$ fonksiyonunun (2.6) ve (2.7) koşullarını sağladığı zaman gerçekleşir.

3.5 Lineer ve Lineer Olmayan Düz ve Ters Problemler için Sayısal Örnekler

Ters problemlerde kullanılacak herhangi bir method için, herşeyden önce ilgili düz problem'in optimal mesh'in seçimi çok önemlidir. Diğer bir yandan ters problemde kullanılacak iterativ methodu en etkili bir biçimde kullanılmasını sağlar.

Düz Problem için Sayısal Değerlendirmeler

Problemlerde kullanılacak sınırlar için $l_x = 1$, $l_y = 1$ ve $T = 1$ dir.

Örnek 1: Süreksiz Katsayılı Düz Problem

$$k(x, y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \text{ ise} \\ 2, & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = e^t \sin(\pi x) \sin(\pi y), & (x, y, t) \in \Omega_T \\ u_0(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y), & (x, y) \in \Omega \\ -ku_x(x, y, t) = \pi e^{-t} \sin(2\pi y), & (x, y, t) \in S_{1y} & u(l_x, y, t) = 0, & (x, y, t) \in S_{2y} \\ -ku_y(x, y, t) = \pi e^{-t} \sin(\pi x), & (x, y, t) \in S_{1x} & u(x, l_y, t) = 0, & (x, y, t) \in S_{2x} \end{cases}$$

N_x	N_y	N_t	hx	hy	ht	$\frac{\ u-u_h\ _\infty}{\ u\ _\infty}$
21	21	51	0.05	0.05	0.02	0.1×10^{-1}
21	21	101	0.05	0.05	0.01	0.61×10^{-2}
21	21	151	0.05	0.05	0.01	0.47×10^{-2}

TABLO 3.1: Örnek 1 deki Süreksiz Katsayılı Düz Problem için Sayısal Sonuçlar

Tablo 3.1'den de görüleceği gibi optimal şebek parametreleri

$(N_x \times N_y \times N_t) = (21 \times 21 \times 151)$ olarak belirlenir.

Örnek 2: Değişken Katsayılı Düz Problem

$$\left\{ \begin{array}{l} u = e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y), (x, y, t) \in \Omega_T \\ k(x, y) = x^2 + y^2 \quad u_0(x, y) = \sin(\pi y) \sin(\pi x), (x, y) \in \Omega \\ -ku_x(x, y, t) = \pi e^{-t} \sin(\pi y), (x, y, t) \in S_{1y} \quad u(l_x, y, t) = 0, (x, y, t) \in S_{2y} \\ -ku_y(x, y, t) = \pi e^{-t} \sin(\pi x), (x, y, t) \in S_{1x} \quad u(x, l_y, t) = 0, (x, y, t) \in S_{2x} \end{array} \right.$$

N_x	N_y	N_t	hx	hy	ht	$\frac{\ u-u_h\ _\infty}{\ u\ _\infty}$
21	21	51	0.05	0.05	0.02	0.59×10^{-2}
21	21	101	0.05	0.05	0.01	0.44×10^{-2}
21	21	151	0.05	0.05	0.0067	0.43×10^{-2}

TABLO 3.2: Örnek 2 deki Değişken Katsayılı Düz Problem için Sayısal Sonuçlar

Tablo 3.2'den de görüleceği gibi optimal şebek parametreleri

$(N_x \times N_y \times N_t) = (21 \times 21 \times 151)$ olarak belirlenir.

Örnek 3: Linear Olmayan Düz Problem

Problemin sayısal çözümünde iterasyon $\|u_{(n)}^h - u_{(n-1)}^h\| < 10^{-4}$ olana kadar devam ettirildi.

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, t) = e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad (x, y, t) \in \Omega_T \\ k(\xi) = 1/(1 + \xi), \quad \xi = \|\nabla u\|^2, \\ u_0(x, y) = \sin(\pi y) \sin(\pi x), \quad (x, y) \in \Omega \\ -ku_x(x, y, t) = f_1(y, t), \quad (x, y, t) \in S_{1y} \quad u(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in S_{2y} \\ -ku_y(x, y, t) = f_2(x, t), \quad (x, y, t) \in S_{1x} \quad u(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in S_{2x} \end{array} \right.$$

N_x	N_y	N_t	hx	hy	ht	$\frac{\ u-u_h\ _\infty}{\ u\ _\infty}$
21	21	51	0.05	0.05	0.02	0.386×10^{-1}
21	21	101	0.05	0.05	0.01	0.294×10^{-1}
21	21	151	0.05	0.05	0.0067	0.269×10^{-1}

TABLE 3.3: Örnek 3 deki Lineer Olmayan Düz Problem için Sayısal Sonuçlar

Tablo 3.3'den de görüleceği gibi optimal şebek parametreleri

$(N_x \times N_y \times N_t) = (21 \times 21 \times 151)$ olarak belirlenir.

EGY'inin Ters Problem Üzerindeki Performansı

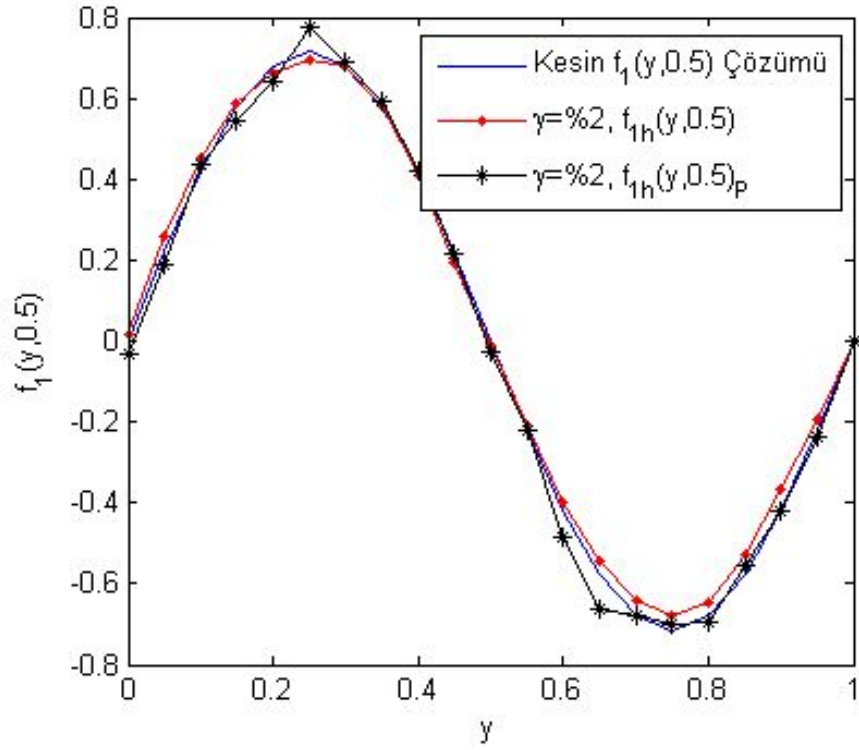
Bu bölümde (5).bölümde tanımlanmış EGY algoritmasının Ters Problem üzerindeki sayısal sonuçları verilecektir. Örneklerde $h := (u_h(0, y, t), u_h(x, 0, t))$ ek verisi, düz problemin çözümünden üretilmiştir

$$\begin{aligned} e_x(n_x, f; \gamma) &:= \|u_h(0, \cdot, \cdot) - h_1(\cdot, \cdot)\|_{L_2[\Omega_x]} & E_x(n_x, f; \gamma) &:= \|f_1 - f_{1h}\|_{L_2[\Omega_x]} \\ e_y(n_y, f; \gamma) &:= \|u_h(0, \cdot, \cdot) - h_2(\cdot, \cdot)\|_{L_2[\Omega_x]} & E_Y(n_y, f; \gamma) &:= \|f_2 - f_{2h}\|_{L_2[\Omega_x]} \end{aligned}$$

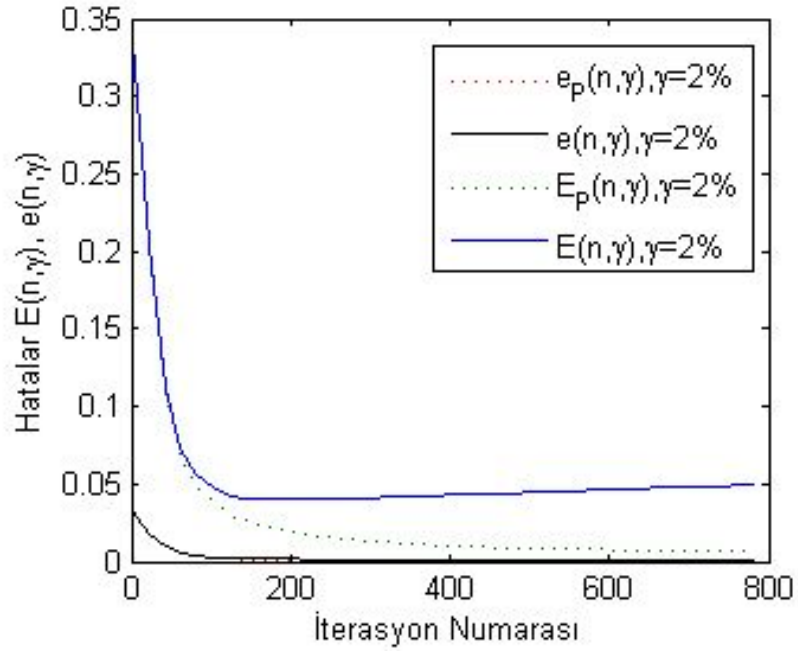
Örnek 1: Süreksiz katsayılı lineer ters problemin EGY ile bulunması

Bu ve bundan sonraki örneklerde $(h_1(y, t), h_2(x, t)) := (u(0, y, t), u(x, y, t))$ ek verisi, (3.1) düz probleminin $u_h(x, t; f)$ sayısal çözümünden üretilmiştir. (3.1) – (3.2) ters probleminde $F(x, t) = 3\sin(3\pi x)$, $f_1 = 1.5\pi e^{-t} \sin(3\pi y)(t - t^2)$, $f_2 = 1.5\pi e^{-t} \sin(2\pi x)(t - t^2)$, $u_0(x, y) = 0$ ve $u(l_x, t) = 0$ gibi olsun. Difüzyon katsayısını ise aşağıdaki gibi seçelim.

$$k(x, y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \text{ ise} \\ 2, & x < 0 \end{cases}$$



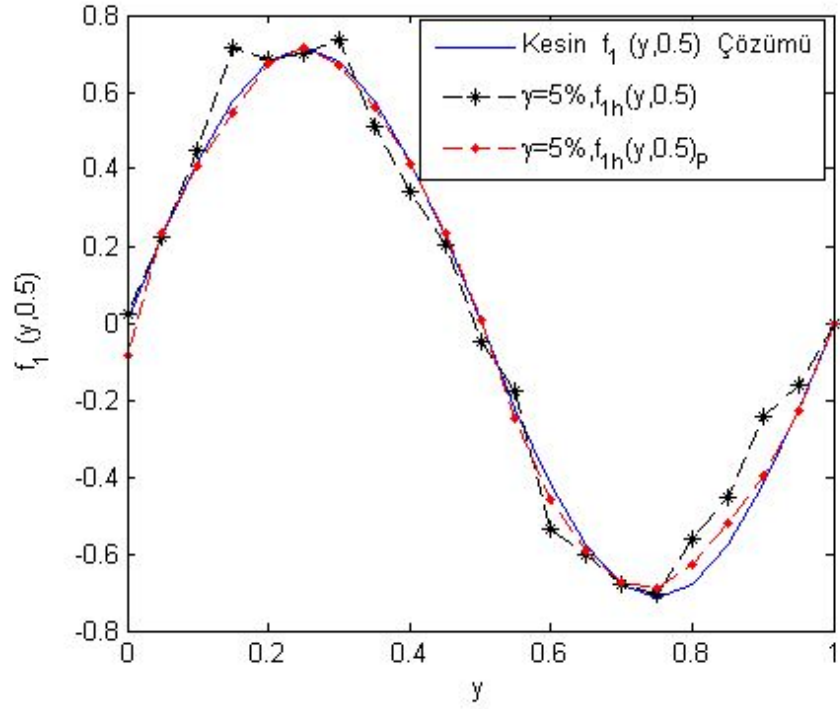
ŞEKİL 3.1: Süreksiz katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{1h}(y, t)_P$, öncesi $f_{1h}(y, t)$)



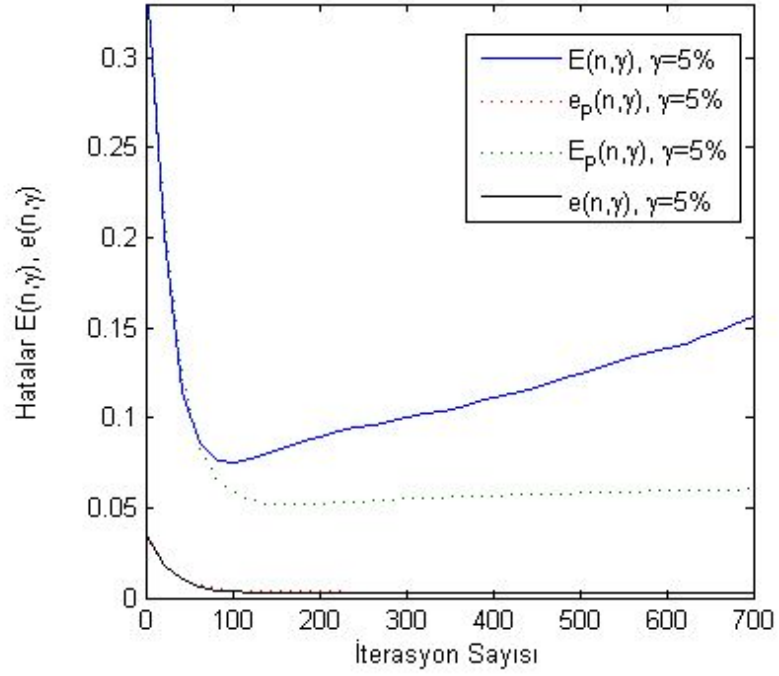
ŞEKİL 3.2: Süreksiz katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_p(n, f; \gamma)$, $E_p(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$)

Hata Oranları	$\ f_1 - f_{1h}\ _\infty$	$\frac{\ f_1 - f_{1h}\ _\infty}{\ f_1\ _\infty}$	$\ f_1 - f_{1h}\ _{L_2}$	$\frac{\ f_1 - f_{1h}\ _{L_2}}{\ f_1\ _{L_2}}$
$\gamma = 0\%$	0.29×10^{-2}	0.182×10^{-1}	0.7×10^{-3}	0.88×10^{-2}
$\gamma = 2\%$,Pürüzsüzleştirme	0.28×10^{-1}	0.17×10^0	0.9×10^{-2}	0.11×10^0
$\gamma = 2\%$,Pürüzsüzleştirmeli	0.28×10^{-1}	0.1789×10^0	0.7×10^{-2}	0.85×10^{-1}

TABLO 3.4: Süreksiz katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun ($f_1(y, t)$) Akı fonksiyonuna etkisi.



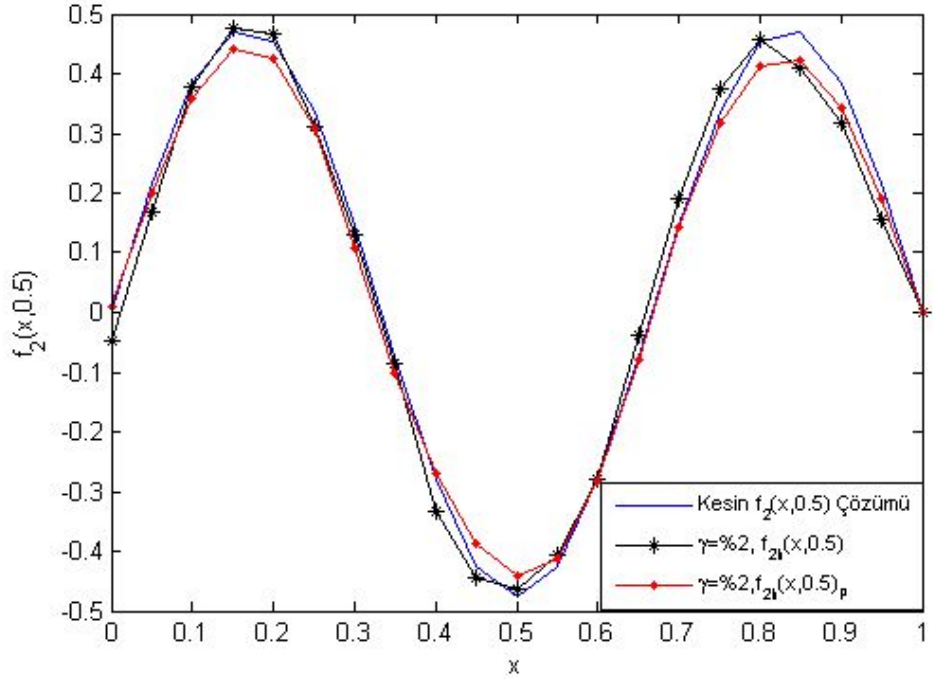
ŞEKİL 3.3: Süreksiz katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{1h}(y, t)_P$,öncesi $f_{1h}(y, t)$)



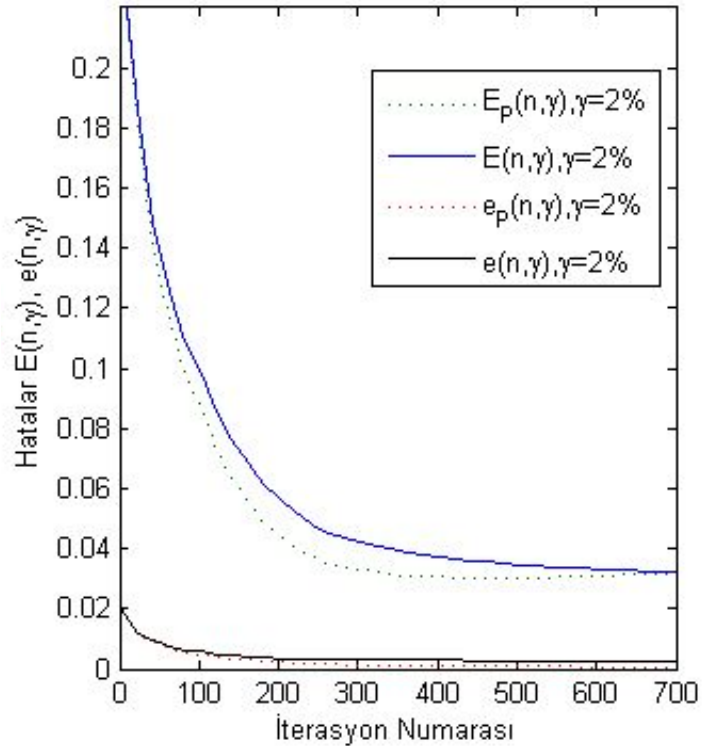
ŞEKİL 3.4: Süreksiz katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_p(n, f; \gamma)$, $E_p(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$)

Hata Oranı=5%	$\ f_1 - f_{1h}\ _\infty$	$\frac{\ f_1 - f_{1h}\ _\infty}{\ f_1\ _\infty}$	$\ f_1 - f_{1h}\ _{L_2}$	$\frac{\ f_1 - f_{1h}\ _{L_2}}{\ f_1\ _{L_2}}$
Pürüzsüzleştirilmesiz	0.1832×10^0	0.2413×10^0	0.283×10^{-1}	0.741×10^{-1}
Pürüzsüzleştirmeli	0.2795×10^0	0.3681×10^0	0.537×10^{-1}	0.1404×10^0

TABLO 3.5: Süreksiz katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f_1(y, t))$ Akı fonksiyonuna etkisi.



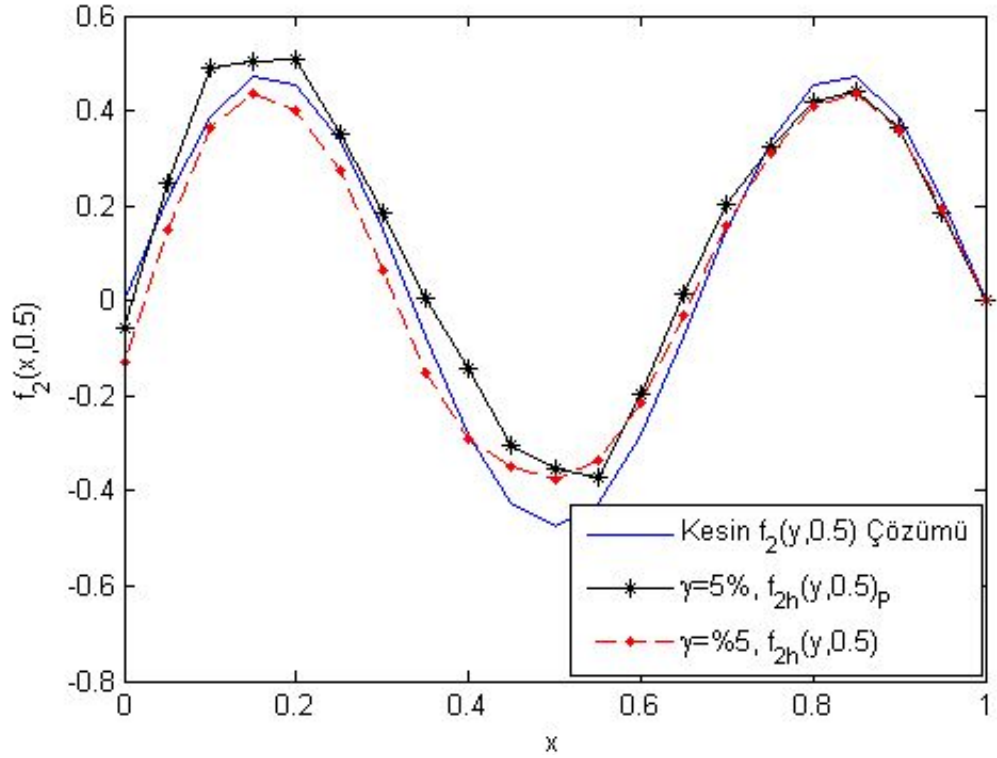
ŞEKİL 3.5: Süreksiz katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{2h}(x, t)_P$, öncesi $f_{2h}(x, t)$)



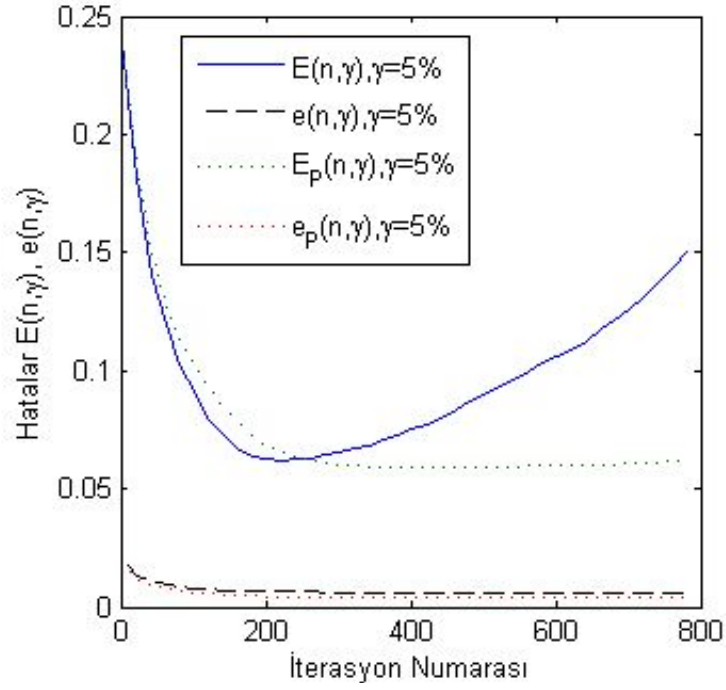
ŞEKİL 3.6: Süreksiz katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$)

Hata Oranları	$\ f_2 - f_{2h}\ _\infty$	$\frac{\ f_2 - f_{2h}\ _\infty}{\ f_2\ _\infty}$	$\ f_2 - f_{2h}\ _{L_2}$	$\frac{\ f_2 - f_{2h}\ _{L_2}}{\ f_2\ _{L_2}}$
$\gamma = 0\%$	0.35×10^0	0.22×10^0	0.138×10^{-1}	0.17×10^{-1}
$\gamma = 2\%$,Pürüzsüzleştirme	0.446×10^{-1}	0.2766×10^0	0.12×10^{-1}	0.14×10^{-1}
$\gamma = 2\%$,Pürüzsüzleştirmeli	0.45×10^0	0.27×10^0	0.12×10^{-1}	0.1496×10^0

TABLO 3.6: Süreksiz katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun ($f_2(x, t)$) Akı fonksiyonuna etkisi.



ŞEKİL 3.7: Süreksiz katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{2h}(x, t)_P$,öncesi $f_{2h}(x, t)$)



ŞEKİL 3.8: Süreksiz katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_p(n, f; \gamma)$, $E_p(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$)

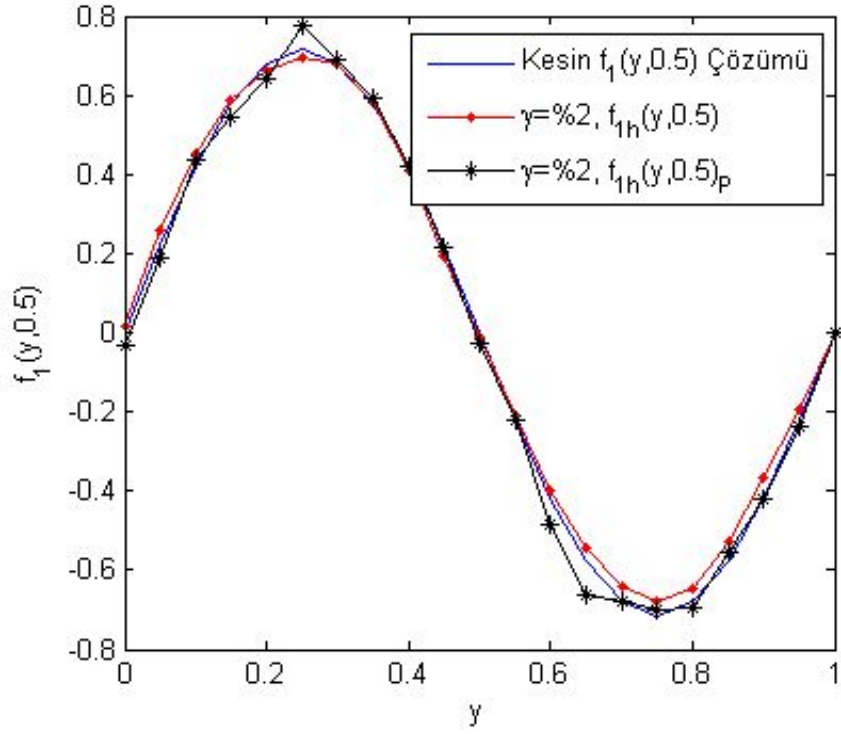
Hata Oranı= 5%	$\ f_2 - f_{2h}\ _\infty$	$\frac{\ f_2 - f_{2h}\ _\infty}{\ f_2\ _\infty}$	$\ f_2 - f_{2h}\ _{L_2}$	$\frac{\ f_2 - f_{2h}\ _{L_2}}{\ f_2\ _{L_2}}$
Pürüzsüzleştirilmemiş	0.637×10^{-1}	0.3955×10^0	0.16×10^{-1}	0.2×10^0
Pürüzsüzleştirmeli	0.54×10^{-1}	0.3363×10^0	0.164×10^{-1}	0.2×10^0

TABLO 3.7: Süreksiz katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun ($f_2(x, t)$) Akı fonksiyonuna etkisi.

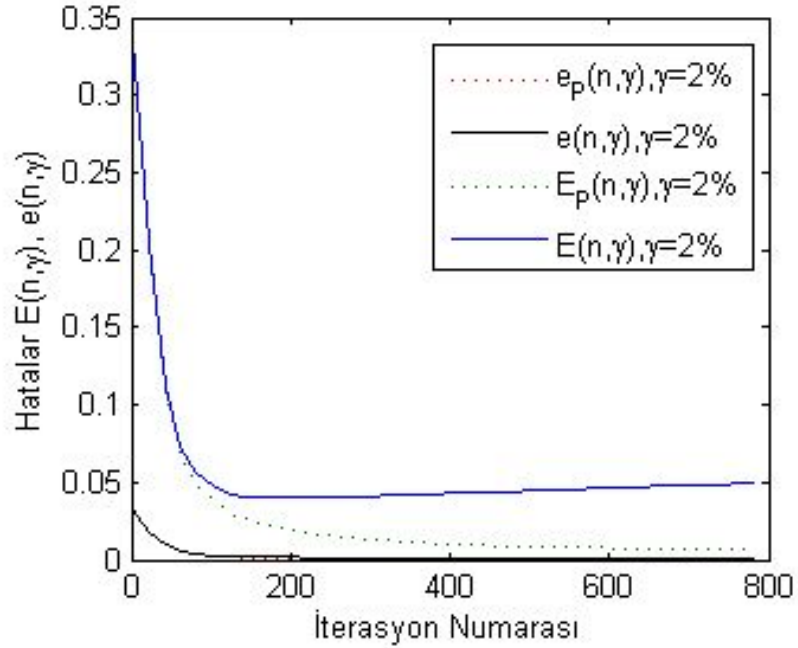
Örnek 2: Değişken katsayılı lineer ters problemin EGY ile bulunması

$(h_1(y, t), h_2(x, t)) := (u_h(0, y, t), u_h(x, 0, t))$ için ters problemin giriş verileri aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{cases} u_0(x, y) = 0, (x, y) \in \Omega \\ k(x, y) = x^2 + y^2 + 1, F(x, y, t) = \sin(3\pi x), (x, y, t) \in \Omega_T \\ f_1 = 1.5\pi e^{-t} \sin(3\pi y)(t - t^2), (x, y, t) \in S_{1y} \\ f_2 = 1.5\pi e^{-t} \sin(2\pi x)(t - t^2), (x, y, t) \in S_{1x} \end{cases}$$



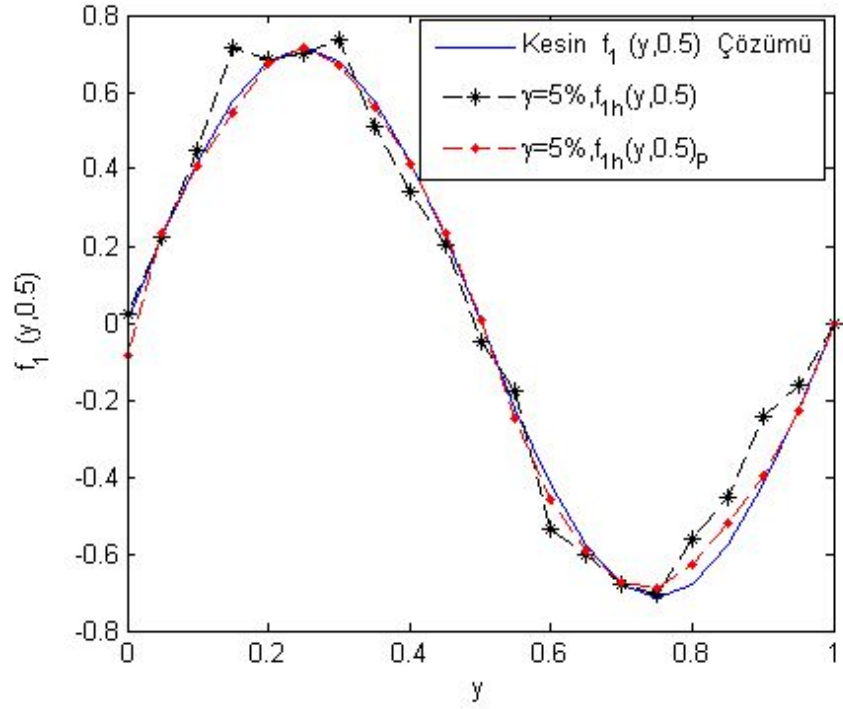
ŞEKİL 3.9: Değişken katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{1h}(y, t)_P$, öncesi $f_{1h}(y, t)$)



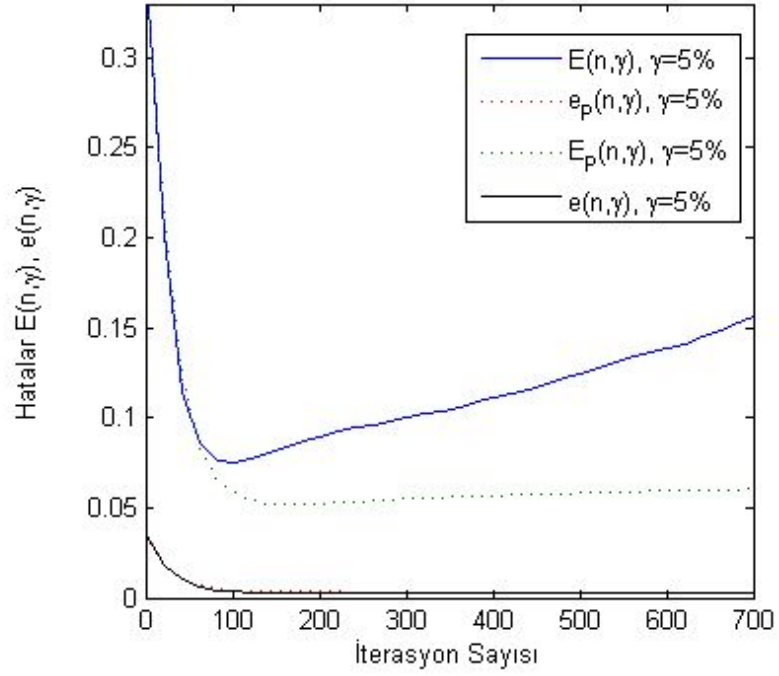
ŞEKİL 3.10: Değişken katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$)

Hata Oranları	$\ f_1 - f_{1h}\ _\infty$	$\frac{\ f_1 - f_{1h}\ _\infty}{\ f_1\ _\infty}$	$\ f_1 - f_{1h}\ _{L_2}$	$\frac{\ f_1 - f_{1h}\ _{L_2}}{\ f_1\ _{L_2}}$
$\gamma = 0\%$	0.21×10^{-1}	0.27×10^{-1}	0.6×10^{-2}	0.16×10^{-1}
$\gamma = 2\%$,Pürüzsüzleştirmeli	0.1017×10^0	0.1339×10^0	0.226×10^{-1}	0.703×10^{-1}
$\gamma = 2\%$,Pürüzsüzleştirmesiz	0.2795×10^0	0.3681×10^0	0.402×10^{-1}	0.1064×10^0

TABLO 3.8: Değişken katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun ($f_1(y, t)$) Akı fonksiyonuna etkisi.



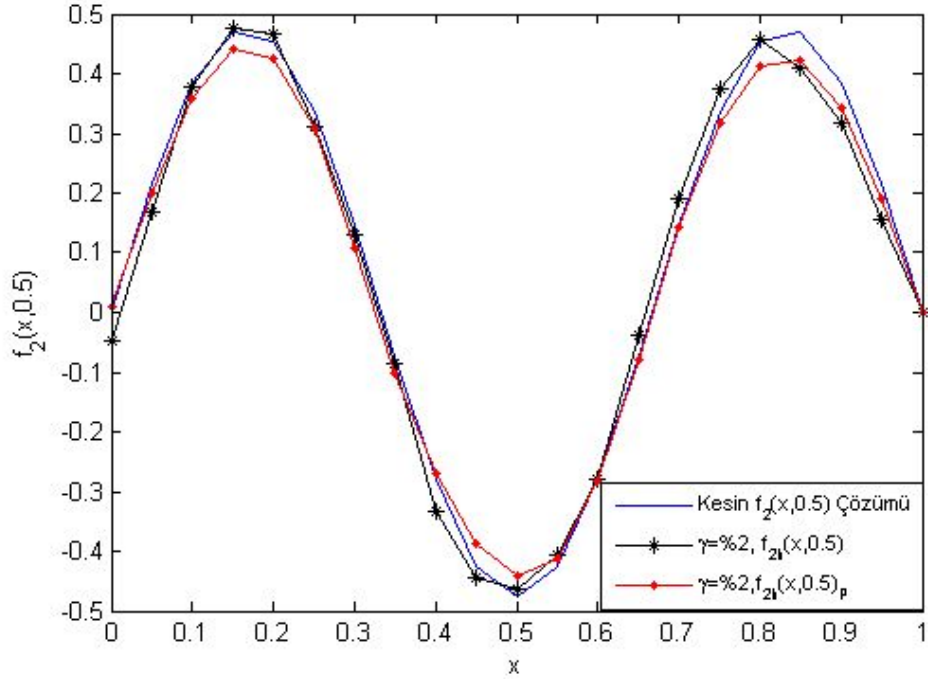
ŞEKİL 3.11: Değişken katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{1h}(y, t)_P$,öncesi $f_{1h}(y, t)$)



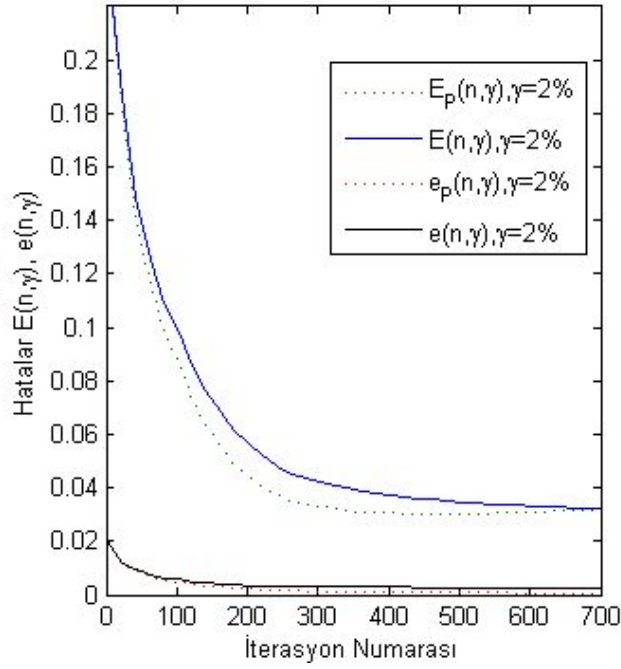
ŞEKİL 3.12: Değişken katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_p(n, f; \gamma)$, $E_p(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$)

Hata Oranı=5%	$\ f_1 - f_{1h}\ _\infty$	$\frac{\ f_1 - f_{1h}\ _\infty}{\ f_1\ _\infty}$	$\ f_1 - f_{1h}\ _{L_2}$	$\frac{\ f_1 - f_{1h}\ _{L_2}}{\ f_1\ _{L_2}}$
Pürüzsüzleştirmeli	0.2082×10^0	0.2742×10^0	0.52×10^{-1}	0.1376×10^0
Pürüzsüzleştirmesiz	0.2914×10^0	0.3838×10^0	0.753×10^{-1}	0.1994×10^0

TABLO 3.9: Değişken katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f_1(y, t))$ Akı fonksiyonuna etkisi.



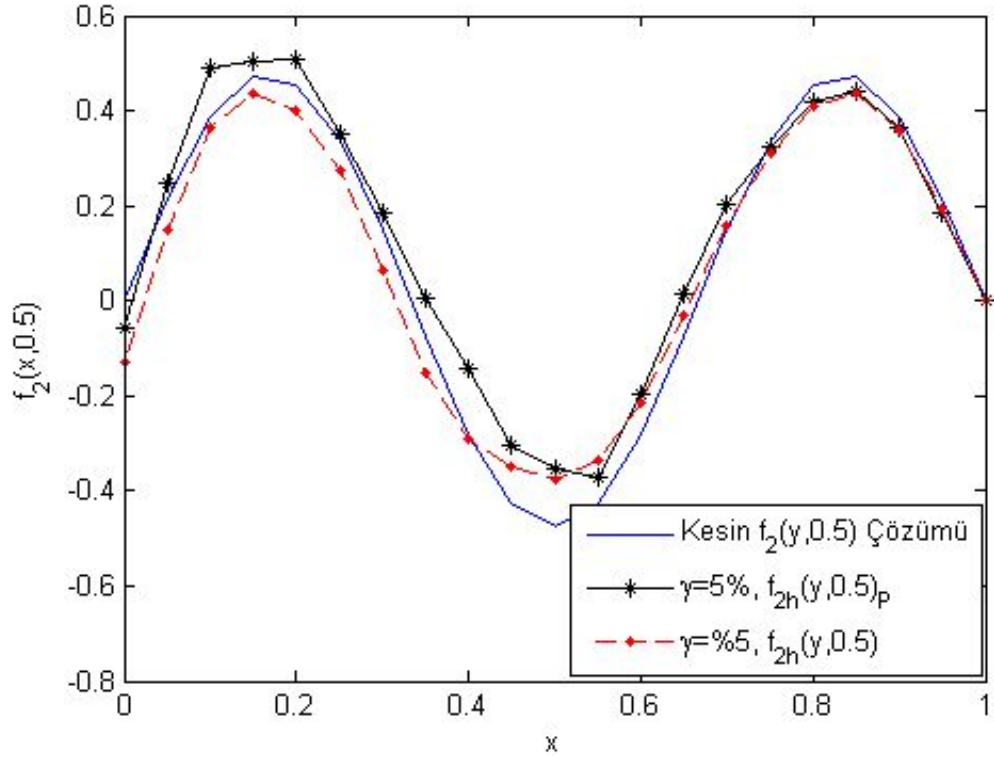
ŞEKİL 3.13: Değişken katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{2h}(x, t)_P$, öncesi $f_{2h}(x, t)$)



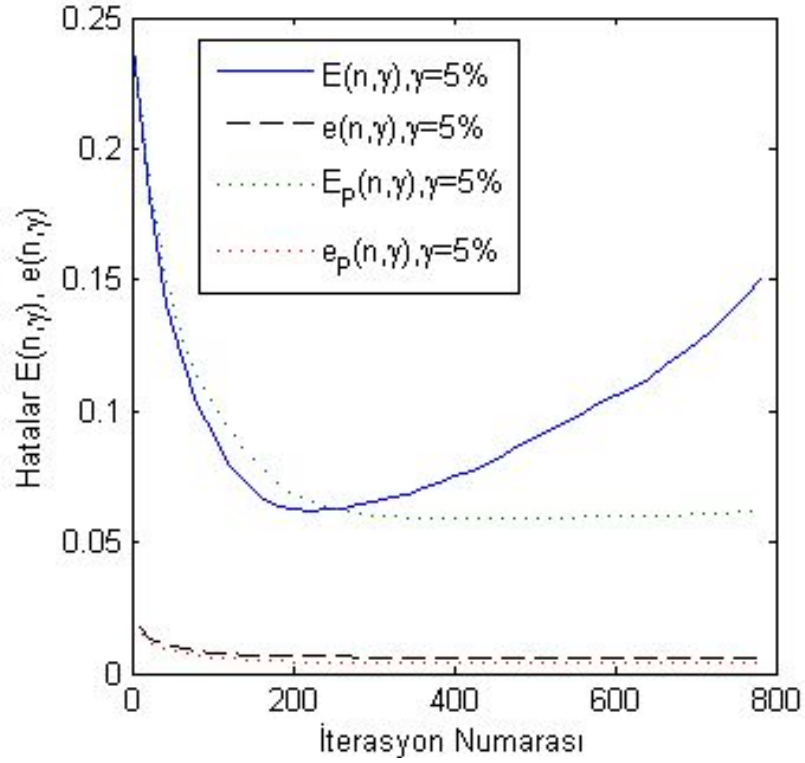
ŞEKİL 3.14: Değişken katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$)

Hata Oranları	$\ f_2 - f_{2h}\ _\infty$	$\frac{\ f_2 - f_{2h}\ _\infty}{\ f_2\ _\infty}$	$\ f_2 - f_{2h}\ _{L_2}$	$\frac{\ f_2 - f_{2h}\ _{L_2}}{\ f_2\ _{L_2}}$
$\gamma = 0\%$	0.1018×10^0	0.2021×10^0	0.27×10^{-1}	0.1124×10^0
$\gamma = 2\%$ Pürüzsüzleştirme	0.1018×10^0	0.2021×10^0	0.27×10^{-1}	0.1124×10^0
$\gamma = 2\%$ Pürüzsüzleştirmeli	0.972×10^0	0.1927×10^0	0.3×10^{-1}	0.12×10^0

TABLO 3.10: Değişken katsayılı ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun ($f_2(x, t)$) Akı fonksiyonuna etkisi.



ŞEKİL 3.15: Değişken katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{2h}(x, t)_P$, öncesi $f_{2h}(x, t)$)



ŞEKİL 3.16: Değişken katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$)

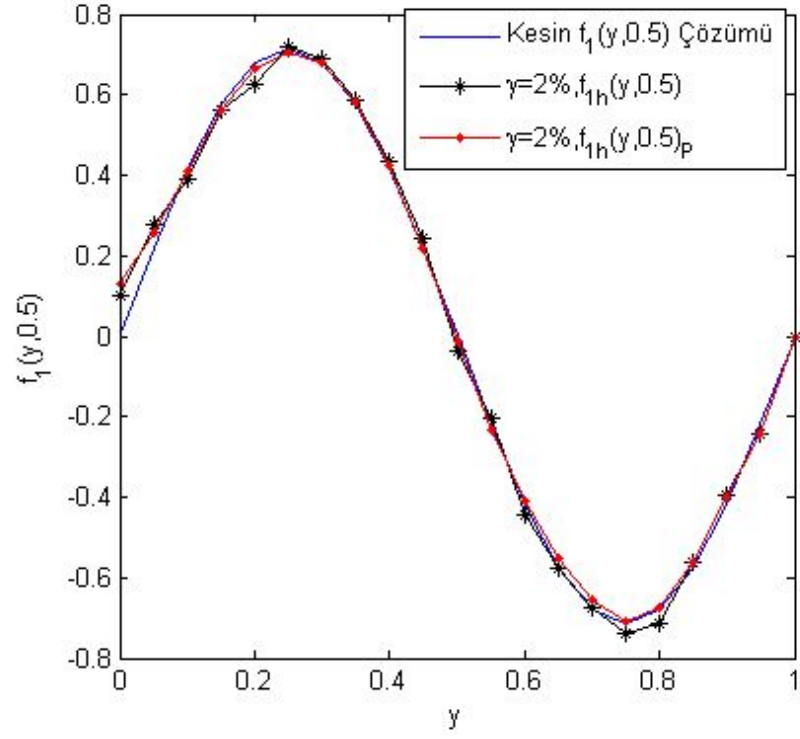
Hata Oranı=5%	$\ f_2 - f_{2h}\ _\infty$	$\frac{\ f_2 - f_{2h}\ _\infty}{\ f_2\ _\infty}$	$\ f_2 - f_{2h}\ _{L_2}$	$\frac{\ f_2 - f_{2h}\ _{L_2}}{\ f_2\ _{L_2}}$
Pürüzsüzleştirilmesiz	0.22×10^0	0.4355×10^0	0.592×10^{-1}	0.2383×10^0
Pürüzsüzleştirmeli	0.1789×10^0	0.3534×10^0	0.562×10^{-1}	0.2260×10^0

TABLO 3.11: Değişken katsayılı ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f_2(x, t))$ Akı fonksiyonuna etkisi.

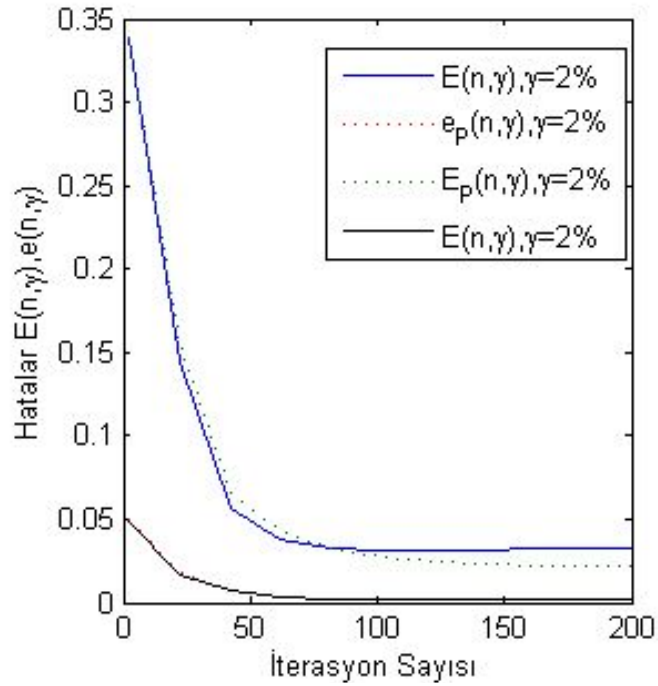
Örnek 2: Lineer olmayan ters problemin EGY ile bulunması

$(h_1(y, t), h_2(x, t)) := (u_h(0, y, t), u_h(x, 0, t))$ için ters probleminin giriş verileri aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{cases} k(\xi) = 1/(1 + \xi), & \xi = \|\nabla u\|^2 \\ u_0(x, y) = 0, & F(x, y, t) = \sin(3\pi x) \\ f_1 = 1.5\pi e^{-t} \sin(3\pi y)(t - t^2), & (x, y, t) \in S_{1y} \\ f_2 = 1.5\pi e^{-t} \sin(3\pi x)(t - t^2), & (x, y, t) \in S_{1x} \end{cases}$$



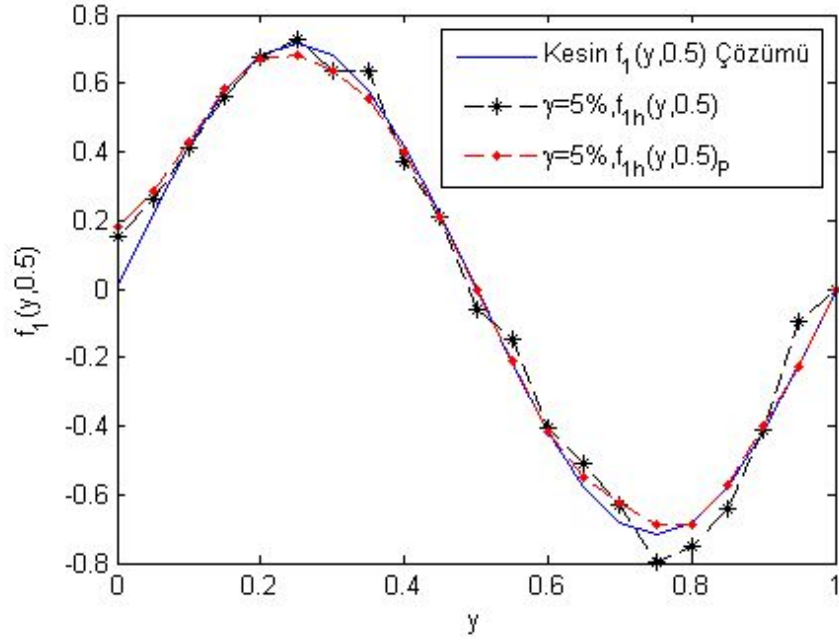
ŞEKİL 3.17: Lineer olmayan ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan Pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{1h}(y, t)_P$, öncesi $f_{1h}(y, t)$)



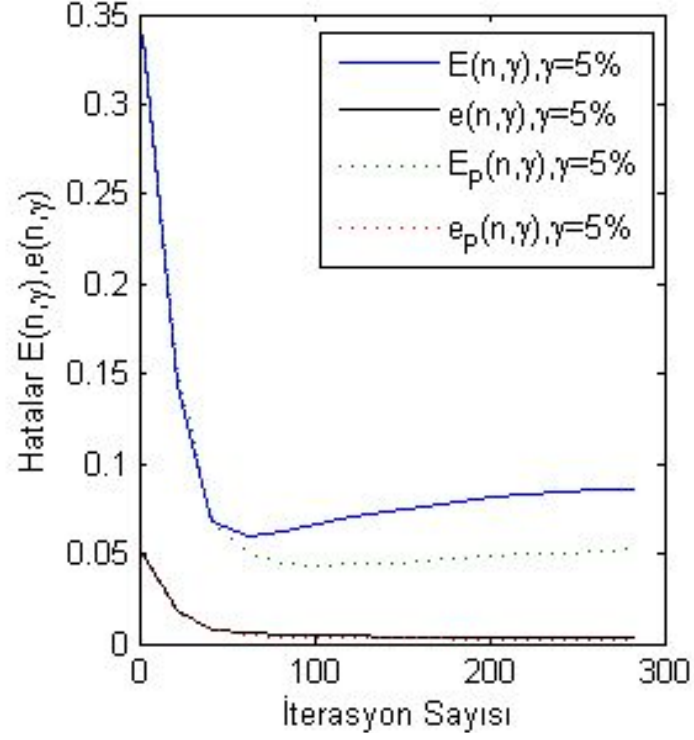
ŞEKİL 3.18: Lineer olmayan ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$)

Hata Oranları	$\ f_1 - f_{1h}\ _\infty$	$\frac{\ f_1 - f_{1h}\ _\infty}{\ f_1\ _\infty}$	$\ f_1 - f_{1h}\ _{L_2}$	$\frac{\ f_1 - f_{1h}\ _{L_2}}{\ f_1\ _{L_2}}$
$\gamma = 0\%$	0.1268×10^0	0.2506×10^0	0.237×10^{-1}	0.93×10^{-1}
$\gamma = 2\%$,Pürüzsüzleştirilmesiz	0.875×10^{-1}	0.1152×10^0	0.285×10^{-1}	0.754×10^{-1}
$\gamma = 2\%$ Pürüzsüzleştirmeli	0.675×10^{-1}	0.890×10^{-1}	0.201×10^{-1}	0.548×10^{-1}

TABLO 3.12: linner olmayan ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun ($f_1(y, t)$) Akı fonksiyonuna etkisi



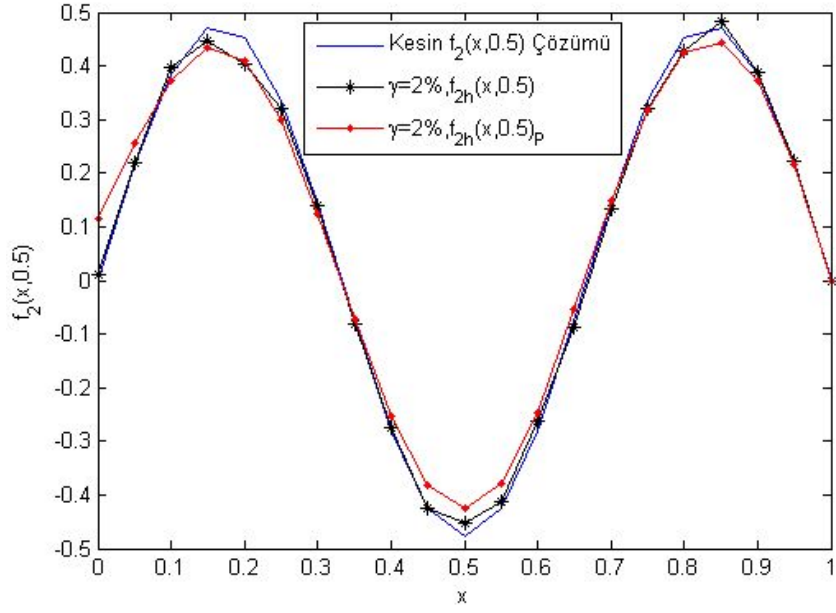
ŞEKİL 3.19: Linear olmayan ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{1h}(y, t)_P$, öncesi $f_{1h}(y, t)$)



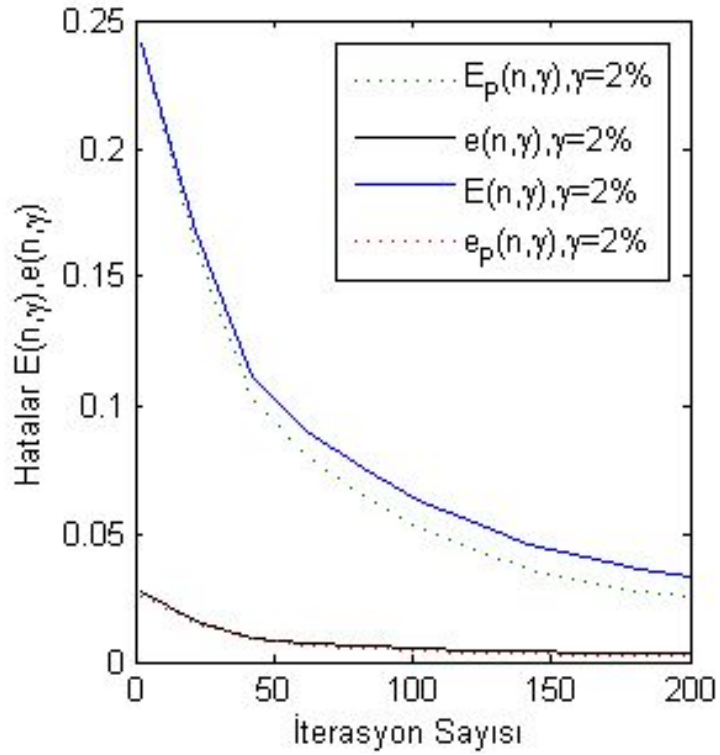
ŞEKİL 3.20: Lineer olmayan ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$)

Hata Oranı=5%	$\ f_1 - f_{1h}\ _\infty$	$\frac{\ f_1 - f_{1h}\ _\infty}{\ f_1\ _\infty}$	$\ f_1 - f_{1h}\ _{L_2}$	$\frac{\ f_1 - f_{1h}\ _{L_2}}{\ f_1\ _{L_2}}$
Pürüzsüzleştirilmemiş	0.2310×10^0	0.3043×10^0	0.63×10^{-1}	0.1669×10^0
Pürüzsüzleştirmeli	0.1941×10^0	0.2557×10^0	0.477×10^{-1}	0.1175×10^0

TABLO 3.13: lineer olmayan ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_1(y, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun $(f_1(y, t))$ Akı fonksiyonuna etkisi



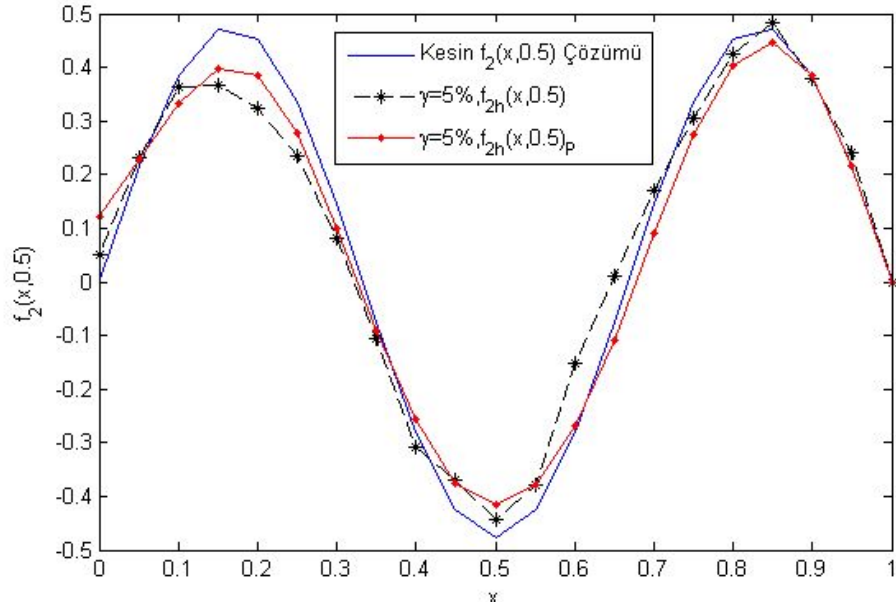
ŞEKİL 3.21: Linear olmayan ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{2h}(x, t)_P$, öncesi $f_{2h}(x, t)$)



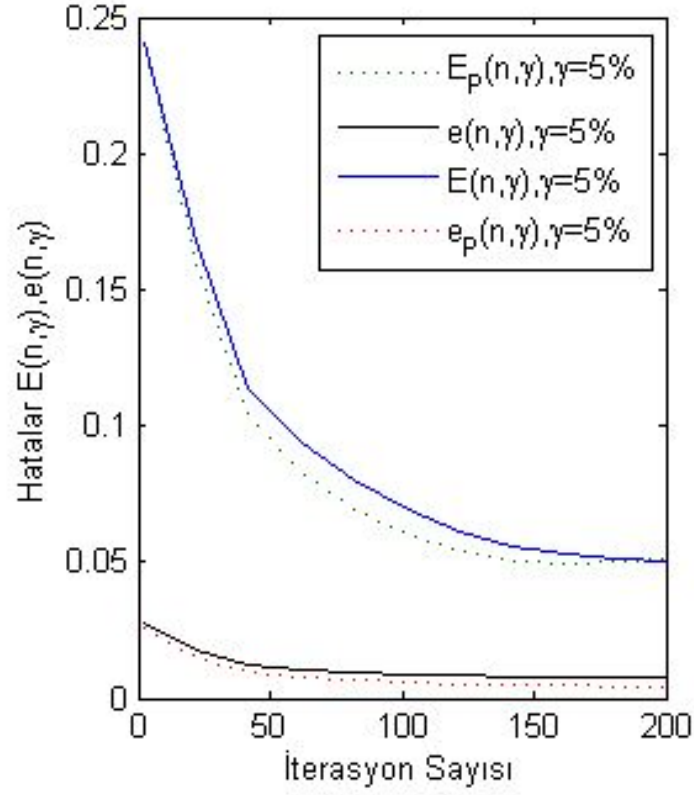
ŞEKİL 3.22: Linear olmayan ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$)

Hata Oranları	$\ f_2 - f_{2h}\ _\infty$	$\frac{\ f_2 - f_{2h}\ _\infty}{\ f_2\ _\infty}$	$\ f_2 - f_{2h}\ _{L_2}$	$\frac{\ f_2 - f_{2h}\ _{L_2}}{\ f_2\ _{L_2}}$
$\gamma = 0\%$	0.264×10^{-1}	0.463×10^{-1}	0.91×10^{-2}	0.366×10^{-1}
$\gamma = 2\%$,Pürüzsüzleştirilmemiş	0.796×10^{-1}	0.1572×10^0	0.214×10^{-1}	0.861×10^{-1}
$\gamma = 2\%$,Pürüzsüzleştirmeli	0.867×10^{-1}	0.1713×10^0	0.267×10^{-1}	0.1075×10^0

TABLO 3.14: Linner olmayan ters problemde 2% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun ($f_2(x, t)$)Akı fonksiyonuna etkisi



ŞEKİL 3.23: Lineer olmayan ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucu Akı fonksiyonlarının grafikleri.(Pürüzsüzleştirme sonrası $f_{2h}(x, t)_P$,öncesi $f_{2h}(x, t)$)



ŞEKİL 3.24: Lineer olmayan ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonuna yapılan pürüzsüzleştirme sonucunda yakınsama ve yakınsaklık grafikleri. (Pürüzsüzleştirme sonrası $e_P(n, f; \gamma)$, $E_P(n, f; \gamma)$, öncesi $e(n, f; \gamma)$, $E(n, f; \gamma)$)

Hata Oranı=5%	$\ f_2 - f_{2h}\ _\infty$	$\frac{\ f_2 - f_{2h}\ _\infty}{\ f_2\ _\infty}$	$\ f_2 - f_{2h}\ _{L_2}$	$\frac{\ f_2 - f_{2h}\ _{L_2}}{\ f_2\ _{L_2}}$
Pürüzsüzleştirme-siz	0.1769×10^0	0.3494×10^0	0.451×10^{-1}	0.1817×10^0
Pürüzsüzleştirmeli	0.1951×10^0	0.3854×10^0	0.477×10^{-1}	0.1902×10^0

TABLO 3.15: Linner olmayan ters problemde 5% gürültü seviyesi ile verilen $h_2(x, t)$ fonksiyonunun pürüzsüzleştirme sonucunun ($f_2(x, t)$) Akı fonksiyonuna etkisi.

Sonuçlar

- 1) Bir ve 2 boyutlu uzayda lineer ve lineer olmayan ters akı problemleri tanımlanarak, sayısal analizi yapılmıştır.
- 2) Girdi-Çıktı operatörünün kompaktlığı, enerji yöntemine dayalı bir yaklaşımla ispatlanmıştır.
- 3) Bir ve iki boyutlu problemlerde difüzyon katsayısının sabit olduğu durumda Fourier yöntemi ile ters problemlerin analitik çözümü tanımlanmıştır.
- 4) Ters problemlerin sayısal çözümü için Eşlenik-Gradyen Yöntemi kullanılmıştır.

Kaynakça

- [1] B. Pektas A. Hasanoglu and A. Erdem. Comparative analysis of inverse coefficient problems for parabolic equations. part i. adjoint problem approach. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 19:599615, 2011.
- [2] S.S. Adavani and G. Biros. Fast algorithms for source identification problems with elliptic pde constraints. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 3:791–808, 2010.
- [3] A.N.Tikhonov and V.Arsenin. *Solution of Ill-Posed Problems*. Wiley, New York, 1977.
- [4] A.E. Badia, T.H. Duong, and A. Hamdi. Identification of a point source in a linear advection dispersion reaction: application to a pollution source problem. *Inverse Problems*, 21:1121–1136, 2005.
- [5] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2012.
- [6] J.R. Cannon. Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15:470–84, 1990.
- [7] J.R. Cannon and P. DuChateau. Structural identification of an unknown source term in a heat equation. *Inverse Problems*, 14:535–51, 1998.
- [8] J.R. Cannon and D. Zachmann. Parameter identification in parabolic partial differential equations from overspecified boundary data. *Int. J. Engineering*, 20(6): 779–788, 1982.
- [9] J.P. Chancelier, M. Cohen de Lara, and F. Pacard. Existence of a solution in an age-dependent transport-diffusion pde: A model of settler. *Math. Models. Methods Appl. Sci.*, 5(3):267–278, 1995.
- [10] D.N. Háo. *Methods for Inverse Heat Conduction Problems*. Pater Lang, Berlin, 1998.
- [11] A. Hasanov. Coefficient stability and existence of a quasisolution of an inverse parabolic problem. *Applicable Analysis*, 67:1–9, 1997.

- [12] A. Hasanov. Identification of an unknown source term in a vibrating cantilevered beam from finoverdetermination. *Inverse Problems*, 25:19, 2009.
- [13] A. Hasanov. *Kısmi Türevli Denklemler*. Literatür, İstanbul, 2010.
- [14] A. Hasanov and B. Pektaş. Comparative analysis of inverse coefficient problems for parabolic equations. part iii. conjugate gradient method and coarse-fine grid algorithm. *Inverse Problems*, 19:633657, 2010.
- [15] A. Hasanov and B. Pektaş. Identification of an unknown time-dependent heat source term from overspecified dirichlet boundary data by conjugate gradient method. *Computers and Mathematics with Applications*, 65:42–57, 2013.
- [16] A. Hasanov, M. Otelbaev, and B. Akpayev. Inverse heat conduction problems with boundary and final time measured output data. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 19:895–1006, 2011.
- [17] V.C.L. Hutson and J.S. Pym. *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*. Academic Press, New York, 1980.
- [18] V. Isakov. *Inverse Source Problems*. Providence: American Mathematical Society, 1990.
- [19] V.K. Ivanov, V.V. Vasin, and V.P.Tanana. *Theory of Linear Ill-Posed Problems and Its Applications*. VSP, Utrecht, 2002.
- [20] T. Johansson and D. Lesnic. Determination of a spacewise dependent heat source. *J. Comput. Appl. Math.*, 209:66–80, 2007.
- [21] O.A. Ladyzhenskaya. *Boundary Value Problems in Mathematical Physics*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [22] Vladimir G Maz'ja. *Sobolev Spaces*. Springer-Verlag, BerlinHeidelbergNew York, 1985.
- [23] I. M. Glazman N.I. Akhiezer. *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*. Dover Publications, New York, 1993.
- [24] B. Pektaş. Comparative numerical analysis of identification problems related to nonlinear transport-diffusion model of a settler. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2015.
- [25] V.I. Plotnikov. Uniqueness and existence theorems and a priori properties of generalized solutions. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 165:1405–1407, 1965.
- [26] E. Zeidler. *Applied Functional Analysis: Main Principles and Their Applications Zeidler*. Springer Verlag, New York, 1995.