İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# ÖZEL YARI-EINSTEIN MANİFOLDLARI

DOKTORA TEZİ

Sinem GÜLER

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

OCAK 2018

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# ÖZEL YARI-EINSTEIN MANİFOLDLARI

DOKTORA TEZİ

Sinem GÜLER
(509112081)

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Sezgin ALTAY DEMİRBAĞ

OCAK 2018

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509112081 numaralı Doktora Öğrencisi Sinem GÜLER, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "ÖZEL YARI-EINSTEIN MANİFOLDLARI" başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

| | | |
|---|---|---|
| **Tez Danışmanı :** | **Prof. Dr. Sezgin ALTAY DEMİRBAĞ**<br>İstanbul Teknik Üniversitesi | .............................. |
| **Jüri Üyeleri :** | **Prof. Dr. Abdülkadir ÖZDEĞER**<br>Kadir Has Üniversitesi | .............................. |
| | **Prof. Dr. Saniye Aynur UYSAL**<br>Doğuş Üniversitesi | .............................. |
| | **Doç. Dr. Güler GÜRPINAR ARSAN**<br>İstanbul Teknik Üniversitesi | .............................. |
| | **Prof. Dr. Füsun ÖZEN ZENGİN**<br>İstanbul Teknik Üniversitesi | .............................. |

**Teslim Tarihi :** **8 Aralık 2017**
**Savunma Tarihi :** **4 Ocak 2018**

***Anneme ve Babama,***

**ÖNSÖZ**

En başta doktora çalışmamın ilk gününden itibaren beni her konuda destekleyen, teşvik edici fikirleriyle çalışmalarımda bana rehberlik eden ve akademik olarak gelişebilmem için kıymetli bilgilerini daima benimle paylaşan, çok değerli hocam Prof. Dr. Sezgin Altay Demirbağ'a tüm özverisi için teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam boyunca her dönem kıymetli vakitlerini ayırarak beni dinleyen, tez ile ilgili önerilerini esirgemeyen, saygıdeğer tez izleme komitesi üyeleri, hocalarım Prof. Dr. Abdülkadir Özdeğer ve Doç Dr. Güler Gürpınar Arsan'a teşekkür ederim.

Hayatım boyunca bana olan güvenlerini derinden hissettiğim, koşulsuz her daim yanımda olan ve beni cesaretlendiren, varlıklarına şükrettiğim sevgili aileme, her türlü fedakarlıkları için teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Akademik hayata adım attığım günden itibaren, hem aynı ofisi hem de tüm sevinç ve kederlerimizi paylaştığımız, her daim samimiyetlerini hissettiğim dostlarım Dr. Burcu Bektaş Demirci ve Araş. Gör. Tuğba Yıldırım'a teşekkür ederim. İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünde görev yapan tüm değerli öğretim üyesi hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim. Tüm mesafelere rağmen daima yanımda olan Dr. Beyza Aksu Dünya ve Dr. Elif Altınay Özaslan'a, içten dostlukları ile moral bulduğum Meryem Akgül, Şeyma Akkoyun, Ayşe Yazıcı ve Dr. Özlem Yazıcı'ya teşekkür ederim.

Bu tez çalışması İstanbul Teknik Üniversitesi tarafından "Doktora Tezlerini Destekleme Projesi" kapsamında ve TÜBİTAK tarafından "2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı" kapsamında desteklenmiştir. İstanbul Teknik Üniversitesi ve TÜBİTAK'a tüm finansal destekleri için teşekkür ederim.

Son olarak, tez çalışmamın son döneminde, üç ay boyunca çalışma fırsatı bulduğum Prof. Dr. Cornelia-Livia Bejan'a, tüm misafirperverlikleri ve sağladıkları sıcak çalışma ortamından dolayı "Gheorghe Asachi" Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü hocalarına ve bu süreçte "TÜBİTAK 2214-A Doktora Sırası Yurtdışı Araştırma Burs Programı" kapsamında beni destekleyen TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

I would like to express my sincere gratitude and appreciation to Prof. Dr. Cornelia Livia Bejan, for her great support, guidance and encouragement since my first day at "Gheorghe Asachi" Technical University of Iasi, and also to the Mathematical Department of "Gheorghe Asachi" Technical University of Iasi for their warm hospitality in 2017.

Ocak 2018 | Sinem GÜLER
(Yüksek Matematikçi)

**İÇİNDEKİLER**

**Sayfa**

## SEMBOLLER

| | |
|---|---|
| $\mathbf{T_pM}$ | : $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı |
| $\chi(\mathbf{M})$ | : $M$ manifoldu üzerindeki düzgün vektör alanlarının uzayı |
| $\mathbf{C^\infty(M;R)}$ | : $M$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı $C^\infty$ sınıfından fonksiyonların uzayı |
| $g$ | : Metrik tensör |
| $\nabla$ | : $g$ metrik tensörüne ait konneksiyon |
| $\mathbf{R}$ | : Riemann eğrilik tensörü |
| $\mathbf{K}$ | : Kesitsel eğrilik |
| **Ric** | : $(0,2)$-tipindeki Ricci tensörü |
| $\mathbf{Q}$ | : Ricci operatörü |
| $\mathbf{r}$ | : Skaler eğrilik |
| $[.,.]$ | : Lie parantezi |
| $\mathbf{P}$ | : Projektif eğrilik tensörü |
| $\bar{\mathbf{P}}$ | : Pseudo-projektif eğrilik tensörü |
| $\mathbf{C}$ | : Konformal (Weyl) eğrilik tensörü |
| $\tilde{\mathbf{C}}$ | : Konsörkılır eğrilik tensörü |
| $\tilde{\mathbf{W}}$ | : Yarı-konformal eğrilik tensörü |
| $\mathbf{d}$ | : diferansiyel operatörü |
| $\mathbf{N(k)}$ | : $k$-null dağılımı kümesi |
| $\wedge$ | : Kulkarni-Nomizu çarpımı |
| $\mathbf{Q(A,T)}$ | : Tachibana tensörü |
| **div** | : Diverjans |
| **grad** | : Gradiyent |
| $\Delta$ | : Laplas operatörü |
| **Hessf** | : $f$ fonksiyonunun Hessian tensörü |
| $\mathbf{D}$ | : $\xi$ vektör alanına dik olan vektörlerin dağılımı |
| $\mathbf{i}$ | : İç çarpım operatörü |
| **Ker** | : Çekirdek kümesi |
| $\sharp$ | : Müzikal izomorfizmalar |
| $\flat$ | : Dual 1-form |
| $\delta$ | : ko-diferansiyel |
| $\mathscr{L}_\xi$ | : $\xi$ vektör alanı doğrultusundaki Lie türevi |
| $\Lambda$ | : Kozmolojik sabit |
| $\kappa$ | : Yerçekimsel sabit |
| $\mathbf{T}$ | : Stres-enerji-momentum tensörü |
| $\sigma$ | : Enerji yoğunluğu |
| $\mathbf{p}$ | : İzotropik basınç |
| $\theta$ | : Genleşme sabiti |
| $\sigma(.,.)$ | : Simetrik kayma tensörü |
| $\omega(.,.)$ | : Ters simetrik dönme tensörü |
| $\mathbf{E}$ | : Weyl tensörünün elektirik kısmı |
| $\mathbf{H}$ | : Weyl tensörünün magnetik kısmı |

## ÖZEL YARI-EINSTEIN MANİFOLDLARI

## ÖZET


Bu tez çalışmasında, matematiksel literatürde sıkça ele alınan ve önemli geometrik özelliklere sahip olan bazı Riemann ve semi-Riemann manifoldlarının özel sınıfları üzerinde çalışılmaktadır. Tarihsel olarak incelendiğinde, bu konunun en önemli kaynak noktalarından biri, Ricci tensörü ile metrik tensörü orantılı olacak şekilde tanımlanan, Einstein manifoldlarından gelmektedir. Einstein manifoldları, diferansiyel geometride, sabit eğrilikli ve sabit Ricci eğrilikli metriklerin üretilmesinde olduğu gibi, fizikte de Einstein alan denklemlerinin çözümlerinin bulunması ve uzay-zaman modellerinin sınıflandırılmasında oldukça önemli bir araç olmuştur. Genel Görelilik Teorisinin en önemli denklemi olan Einstein alan denklemleri, bir uzayın geometrisinin doğrudan, uzayın madde içeriği ile belirlenebildiğini göstermektedir. Bu nedenle, uzayın global karakterinin anlaşılabilmesi için Ricci eğrilik tensörü üzerinde yapılan bazı genelleştirmeler önem kazanmaktadır.

İlk kez 2000 yılında M. C. Chaki ve R. K. Maity tarafından, Einstein manifoldlarını genelleştiren bir geometrik kavram olarak tanımlanan yarı Einstein manifoldları, aynı zamanda Einstein alan denklemlerinin mükemmel akışkanlı madde içeriğine sahip çözümlerine de bir model oluşturmaktadır. Einstein manifoldlarının bir başka doğal genelleştirmesi de Hamilton tarafından tanımlanan Ricci soliton kavramıdır. Bu kavram, diferansiyel geometrinin, manifoldları eğriliklerine göre sınıflandırma probleminden doğan Ricci akış denkleminin kendi kendine benzer (self-similar) çözümleri olarak ortaya çıkmıştır. Ricci akışı ise, metriğin (yani manifoldun şeklinin) Ricci tensörü ile orantılı olarak, uygun sabit eğrilikli bir metriğe dönüşmesini sağlayan, parabolik tipte bir kısmi diferansiyel denklemdir. O halde, Ricci akışının daha genel çözümlerinin bulunması ve bu çözümlerin davranışlarının incelenmesi, geometrik anlamda oldukça önemli bir problemdir. Dolayısıyla, farklı eğriliklere veya farklı akışkan yoğunluğuna sahip olan uzay-zamanların incelenmesi için, Ricci eğrilik tensörünün daha fazla genelleştirilmesi gerekmektedir. Bu amaçla, 2001 yılında M. C. Chaki tarafından, genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldu kavramı ortaya atılmıştır. Bu yeni kavram tanımlanışı bakımından, geometrik olarak yarı Einstein manifoldlarını genelleştirmekle kalmayıp, fiziksel olarak da, 4-boyutlu ısı akışına izin veren uzay-zamanlara bir model oluşturmaktadır. Bu nedenle tez çalışmasının temel amaçlarından biri, hem geometrik hem de fiziksel açıdan daha ilginç özelliklere sahip olması beklenen genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldlarının özelliklerini araştırmaktır.

Daha sonra, Ricci solitonlar ile yakından ilişkili olması ve Ricci tensörünün doğal bir genellemesi olmasından dolayı Riemann geometrisinde oldukça önemli bir obje olan *m-Bakry-Emery Ricci tensörü* tanımlanmış ve birçok geometrici tarafından $m$-Bakry-Emery Ricci tensörünün metrik tensör ile orantılı olması durumunda, çeşitli özel manifoldların tanımları yapılmıştır. Ricci tensörünün bu tip genelleştirmeleri

baz alınarak ortaya çıkan $(m,\rho)$-yarı Einstein manifoldları tez çalışmasının bir diğer çalışma alanını oluşturmaktadır.

Literatüre bakıldığında, bu iki çalışma alanının, Bishop ve O'Neill tarafından tanımlanan, katlı çarpım manifoldları ile yakından ilişkili olduğu görülmektedir. Örneğin, hem Einstein alan denklemlerinin Robertson-Walker, Schwarzchild, Reissner-Nordström-de Sitter uzay-zamanları gibi çoğu temel çözümünün, hem de birçok Ricci soliton ve gradient Ricci solitonun, katlı çarpım manifoldu yapısına sahip olduğu bilinmektedir. Ayrıca, dönel yüzeyler, küre ve $\mathbb{R}^n - \{0\}$ da lokal olarak katlı çarpım manifoldlarıdır.

Yukarıda bahsedilen temel çalışma alanlarının her ikisinin de, hem geometrik olarak formülize edilebilmeleri, hem de fiziksel olarak önemli modellerle bağlantılarının bulunmasından dolayı, tez çalışması Riemann ve Lorentz geometrisinin araçları kullanılarak iki farklı koldan yürütülmektedir.

Birinci bölümde, ele alınan problemlerin tanıtımı ile önemi üzerinde durulmuş ve gerekli literatür taramasına yer verilmiştir.

İkinci bölümde, öncelikle tez çalışması boyunca kullanılacak olan temel kavramlar ve notasyonlar verilmiştir. Ardından, tez çalışmasının ilk yarısını oluşturan Einstein manifoldlarının çeşitli genelleştirmeleri ile ilgili tanımlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak Ricci-pseudosimetrik ve Ricci semisimetrik genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldlarının karakterizasyonu yapılmış, daha sonra da bu tip simetri koşulları, konformal, konsörkılır, yarı-konformal, $W_2$, projektif ve pseudo-projektif eğrilik tensörlerine genelleştirilerek, bazı sınıflandırma teoremleri elde edilmiştir. Bahsedilen bu eğrilik tensörlerinin Ricci semisimetrik ve Ricci pseudosimetrik olmaları durumunda, genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun, bir $N(k)$-yarı Einstein yada yarı Einstein manifolduna indirgendiği ispatlanmıştır. Ardından, Ricci reküran, genelleştirilmiş Ricci reküran gibi, Ricci tensörünün kovaryant türevlerinin özel koşulları sağlaması durumunda, manifoldun üreteç vektör alanının bir paralel vektör alanı olduğu ve böylece söz konusu manifoldun bir yarı Einstein manifolduna indirgendiği ispatlanmıştır. Ayrıca bu bölümde, bir genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun varlığı, trivial olmayan, somut bir Riemann metriği inşaa edilerek kanıtlamıştır.

Dördüncü bölümde, ilk olarak genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun bir katlı çarpım manifoldu yapısına sahip olması için bazı gerekli koşullar araştırılmıştır. Bu kapsamda, konformal düzlük koşulu yardımıyla, $n$-boyutlu Ricci semisimetrik genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun üreteç vektör alanının, konsörkılır vektör alanı olduğu gösterilmiş ve bunun bir sonucu olarak da manifoldun bir reel aralık ile $(n-1)$-boyutlu bir Einstein manifoldunun katlı çarpımı olduğu sonucu elde edilmiştir. Ardından farklı eğrilik tensörlerinin de (örneğin pseudo-projektif eğrilik tensörü gibi) özdeş olarak sıfır olması veya korunumlu (yani diverjanssız) olması durumunda, genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun çarpım manifoldları ile ilişkisi incelenmiştir. Daha sonra, önceki durumun tersine, katlı çarpım manifoldu yapısına sahip olan bir genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun, üreteçleri yardımıyla, taban ve lifleri üzerinde sınıflandırmalar yapılmış ve Einstein-benzeri manifoldlar ile bağlantıları kurulmuştur.

Dördüncü bölümün devamında, katlı çarpım metrik yapısından daha genel bir kavram olan ve $D$-homotetik deformasyonlar yardımı ile tanımlanan $D$-çarpım manifoldlarına geçiş yapılmıştır. Bu yeni çarpım metriği, en genel anlamda $\xi$ birim vektörü ve onun $g$ metriğine göre duali olan $\eta$ 1-formuna sahip olan $(M,g,\xi,\eta)$ Riemann manifoldları üzerine genelleştirilerek, $D$-genel çarpım manifoldu kavramı tanımlanmıştır. Ardında, böylesi bir $D$-genel çarpım manifoldunun, Levi-Civita konneksiyonu, Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörü, kesitsel ve skaler eğrilikleri hesaplanarak, bileşenlerinin Einstein-benzeri manifoldlar ile ilişkileri araştırılmıştır. Ayrıca $g$ metriğinin Laplasyeni hesaplanarak, bir $D$-genel çarpım manifoldu üzerinde fonksiyonların ve formların harmonikliği ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, genelleştirilmiş yarı Einstein uzay-zamanlarına geçiş yapılarak, önceki bölümlerde elde edilen sonuçların, Lorentz metrik yapısı altında geçerliliği araştırılmıştır. İlk olarak Ricci-pseudosimetrik, Ricci semisimetrik, Ricci reküran gibi çeşitli simetri koşulları altında genelleştirilmiş yarı Einstein uzay-zamanlarının karakterizasyonu ve sınıflandırması yapılmıştır. Daha sonra, elde edilen sonuçlar Genel Görelilik Teorisindeki önemli sonuçlarla karşılaştırılarak, fiziksel uygulamalara yer verilmiştir.

Einstein alan denklemlerini sağlayan, 4-boyutlu, Ricci simetrik, genelleştirilmiş yarı Einstein uzay-zamanının, sabit enerji yoğunluğuna ve izotropik basınca sahip olduğu, genleşme sabiti ve ivme vektörü sıfır olan, hız vektör alanı manifoldun üreteci olan mükemmel akışkanlı modellere örnek olduğu kanıtlanmıştır. Böylece, bu tip bir uzay-zamanın $I$, $D$ veya $O$ Petrov tipinde bir kozmolojik yapıya sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca, 4-boyutlu Lorentz metriğine sahip bir genelleştirilmiş yarı Einstein uzay-zamanının varlığını kanıtlayan, somut bir örnek de inşaa edilmiştir.

Tezin altıncı bölümünde ise, önceki bölümlerden farklı olarak, Ricci soliton kavramına giriş yapılmıştır. Öncelikle bu konunun tarihsel gelişimi ile ilgili ayrıntılı literatür bilgisine yer verilmiştir. Ardından $(m,\rho)$-yarı Einstein manifoldları üzerinde çalışmalar yapılmış ve çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. İlk olarak, $(m,\rho)$-yarı Einstein manifoldlarının sınıflandırma ve karakterizasyonu üzerinde çalışılmış ve katlı çarpım manifoldları ile ilişkileri incelenmiştir. Kapalı konformal yada paralel vektör alanına sahip olan bir $(m,\rho)$-yarı Einstein manifoldunun, potansiyel fonksiyonunun gradiyenti ve Hessian'ı ile igili yardımcı teoremler ispatlanmıştır. Ardından, kapalı konformal vektör alanına sahip olan bir $(m,\rho)$-yarı Einstein manifoldunun, $I\times_{\varphi}M^{*}$ biçiminde bir katlı çarpım manifoldu olduğu ispatlanmıştır. Daha sonra bu durum paralel vektör alanlarına doğrudan indirgenerek, Ricci tensörünün klasik yarı Einstein manifoldu yapısına sahip olduğu gösterilmiş ve benzer rijit durumların elde edildiği kanıtlanmıştır. Bölümün sonunda ise, bir $(m,\rho)$-yarı Einstein manifoldunun varlığını kanıtlayan ve elde edilen sonuçları gerçekleyen somut bir örnek inşaa edilmiştir.

# SPECIAL QUASI EINSTEIN MANIFOLDS

## SUMMARY


In this thesis, we focus on a special class of Riemannian and semi-Riemannian manifolds, which in the mathematical literature, provides several interesting results and relations with many other geometrical structures on manifolds. From historical point of view, the origin of this topic comes from the Einstein manifolds, in which the Ricci tensor and the metric tensor are proportional. The topic of Einstein manifolds and its well-known generalizations, such as quasi-Einstein and $\eta$-Einstein, were intensively studied in literature. In differential geometry, Einstein manifolds represent the metrics of constant Ricci curvature, as well as in physics they have been used to find the exact solutions of Einstein field equations and they are very useful tools to classify the space-times. Einstein field equations, which is the most important equation of the theory of General Relativity, show that the geometry of the manifold can be directly determined by its matter content. For this reason, some generalizations on the Ricci tensor become crucial in order to understand the global character of the manifold.

The notion of quasi Einstein manifolds, was first introduced by M. C. Chaki and R. K. Maity in 2000 as a geometric concept that generalizes the Einstein manifolds. On the other hand, they form a model for the solutions of Einstein field equations with perfect fluid matter content. Another natural generalization of the Einstein manifolds is the concept of Ricci soliton, which was introduced by Hamilton. This new concept emerge as a self-similar solution of the Ricci flow equation, arising from the classification problem of manifolds according to their curvatures. The Ricci flow is a parabolic type of partial differential equation that allows the metric (i.e. the shape of manifold) to be transformed into a suitable metric of constant curvature in proportion to the Ricci tensor. Thus, finding more general solutions of the Ricci flow and examining the behavior of these solutions are very important frameworks in the sense of geometry. Therefore, for the analysis of space-times having different curvatures or different matter contents, the Ricci curvature tensor should be more generalized. For this purpose, the notion of generalized quasi Einstein manifolds was introduced by M. C. Chaki in 2001, geometrically. This new concept, in terms of its definition, not only generalizes the quasi Einstein manifolds geometrically, but also forms a model of 4-dimensional space-time that allows heat flux, physically. Due to these reasons, one of the main objectives of this thesis is to investigate some properties of the generalized quasi Einstein manifolds, which are expected to have more interesting properties in both geometric and physical aspects.

Later, $m$-Bakry-Emery Ricci tensor, which is closely related to the Ricci solitons and is a natural generalization of Ricci tensor, was introduced and many geometers have described various special manifolds, in which the $m$-Bakry-Emery Ricci tensor is proportional to the metric tensor. One of these special manifolds is the $(m,\rho)$-quasi Einstein manifold, that constitute the other part of this thesis.

From historical point of view, these two fields of the study are closely related to the warped product manifolds, which were introduced by Bishop and O'Neill. For example, it is known that Ricci solitons and gradient Ricci solitons under certain conditions, as well as many basic solutions of Einstein field equations, such as Robertson-Walker, Schwarzchild, Reissner-Nordström-de Sitter space-times have warped product structures. Also, surface of revolutions, sphere and $\mathbb{R}^n - \{0\}$ are locally warped product manifolds.

Since both of the above mentioned basic fields are both geometrically formulated and physically linked to some important relativistic models, this thesis study is carried out in two different aspects using the tools of the Riemannian and Lorentzian geometries.

In the first chapter, the main topics to be covered in the thesis are introduced and the importance of them are emphasised. A brief review of literature on certain Riemannian and semi-Riemannian manifolds is also given.

The second chapter contains the basic notions to be used during the thesis study and the definitions of the various generalizations of the Einstein manifolds, that constitute the first half of the thesis.

In the third chapter, some problems related to the characterization of generalized quasi Einstein manifolds under certain symmetry conditions are discussed. First, Ricci-pseudosymmetric and Ricci semisymmetric generalized quasi Einstein manifolds are considered and then such symmetry conditions are extended to the different curvature tensors, such as conformal, concircular, quasi-conformal, $W_2$, projective and pseudo-projective curvature tensors. Then, some classification theorems related to the generalized quasi Einstein manifolds satisfying the above mentioned symmetry conditions have been proved. Later, it is proved that if the covariant derivatives of the Ricci tensor provide certain conditions (e.g. Ricci recurrent, generalized Ricci recurrent), the manifold has the parallel generator vector field and thus the manifold reduces to a quasi Einstein manifold. In the last section of this chapter, the existence of a generalized quasi Einstein manifold is proved by constructing a concrete non-trivial Riemannian metric.

In the fourth chapter, first some necessary conditions are investigated so that the generalized quasi Einstein manifold has a warped product structure. In this context, with the help of conformal flatness condition, it is shown that the generator vector field of the $n$-dimensional Ricci semisymmetric generalized quasi Einstein manifold is the proper concircular vector field. As consequence of this, the manifold under consideration is the warped product of a real interval and an $(n-1)$-dimensional Einsteinian fiber.

Secondly, in the case that different curvature tensors (e.g. pseudo-projective curvature tensor) are identically zero or conservative (i.e., divergence-free), the relations between the warped product manifolds and the generalized quasi Einstein manifolds have been examined. Also, contrary to the previous case, a generalized quasi Einstein manifold having a warped product structure, has been classified according to its base and fiber with the help of its generators, and then some links with Einstein-like manifolds have been established.

The next step in the evolution of the warped products is achieved by Blair, who introduced the notion of $D$-warping. More precisely, on the product manifold $M_1 \times M_2$ of a Riemannian manifold $(M_1, g_1)$ with an almost contact metric manifold

$(M_2, \phi_2, \xi_2, \eta_2, g_2)$, where $\eta_2$ is the dual 1-form of the unit vector field $\xi_2$ with respect to $g_2$, a $D$-warping metric is defined by the metric $g = g_1 + fg_2 + f(f-1)\eta_2 \otimes \eta_2$, for any positive, smooth function $f$ on $M_1$. In the last part of the fourth chapter, the $D$-warping metric is extended with a slight modification of the metric $g$, by taking into account the 1-form on the second component manifold: For two Riemannian manifolds $(M_i, g_i)$, $i = 1,2$, the $D$-general warping metric $g$ is given also by the same metric, but $M_2$ carries a unit vector field only, instead of almost contact metric structure. Then, some geometrical objects, such as the Levi-Civita connection, the Riemannian and the Ricci tensors and also the sectional and the scalar curvature, are calculated on $D$-general warping $(M, g)$, in the context of warped product. A Laplacian formula of $g$ is obtained and the harmonicity of functions and forms on $(M, g)$ is described. Finally, some necessary and sufficient conditions for $D$-general warping $(M, g)$ to be Einstein, quasi-Einstein or $\eta$-Einstein are provided.

Chapter five consists of the study of the generalized quasi Einstein space-times. Under the symmetry conditions discussed in the third chapter, the generalized quasi Einstein space-times are characterized in the context of Lorentz metric signature. Then various applications are given, by using some important tools of the theory of General Relativity: It is proved that Ricci symmetric (or recurrent) generalized quasi Einstein space-times can be considered as a model of perfect fluids. Also, such space-time satisfying Einstein's field equations has constant energy density and the isotropic pressure. Moreover, it has the vanishing expansion scalar and the acceleration vector. As a consequence, the possible local cosmological structures of this space-time are of Petrov $I$, $D$ or $O$. Finally, the existence of a generalized quasi Einstein space-times is proved by constructing a concrete non-trivial Lorentzian metric.

In the sixth chapter, first a historical overview of the developments on the theory of Ricci solitons and some basic definitions about them are given. Then, the characterizations of an $(m,\rho)-$quasi Einstein manifold admitting closed conformal or parallel vector field are made. Some necessary lemmas related to the formulas of the gradient and the Hessian of the potential function, are proved. By using these lemmas, some rigidity results for this class of manifolds are obtained. It is proved that an $(m,\rho)-$quasi Einstein manifold with a closed conformal vector field has a warped product structure of the form $I \times_\varphi M^*$. Then, this result is reduced to the case of an $(m,\rho)-$quasi Einstein manifold admitting a parallel vector field, directly. Therefore, it is shown in this case that the Ricci tensor has the classical quasi Einstein structure and also the similar rigid condition holds. Finally, a non-trivial example of an $(m,\rho)-$quasi Einstein manifold verifying obtained results is constructed.

# 1. GİRİŞ

Modern Riemann geometrisinin temel amacı, ele alınan uzayın topolojisi ile eğriliği arasındaki ilişkiyi kavrayabilmektir. Riemann manifoldu lokal olarak Euclid uzayına benzeyen topolojik bir uzaydır ve üç önemli kavram ile tanımlanır: Bunlar, Riemann eğrilik tensörü (veya, kesitsel eğrilik), Ricci eğriliği ve skaler eğriliktir. 2-boyutta, bu üç kavram birbirine denk iken, 3-boyutta Riemann eğrilik tensörü bütünüyle Ricci eğriliği tarafından tanımlanabilir. Boyut büyüdükçe, uzayın topolojik yapısının belirlenmesi de güçleşmektedir. Diğer taraftan, Riemann manifoldları, Euclid uzaylarının bir genelleştirmesi olmalarından dolayı aynı zamanda bir metrik uzay yapısına sahiptirler. Bu nedenle daha büyük boyutlu manifoldların topolojik özelliklerinin anlaşılabilmesi için, üzerinde bir Riemann metriğinin var olup olamayacağı sorusu ortaya çıkmış ve diferansiyellenebilen her manifoldunun, bir Riemann metriğine sahip olduğu kanıtlanmıştır. Daha sonra, diferansiyellenebilen bir manifoldun sahip olabileceği en iyi Riemann metriği yapısının ne olacağı araştırma konusu olmuş ve düşük boyutlarda önemli sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin 2-boyutta (yani her kompakt yüzey üzerinde) en iyi Riemann metriğinin sabit eğrilikli metrikler olduğu; boyut ikiden büyük ise, bulunabilecek en iyi metrik yapısının sabit Ricci eğrilikli metrikler olduğu gösterilmiştir.

Bir Riemann manifoldunun *Ric* ile gösterilen Ricci eğrilik tensörü, Riemann eğrilik tensörünün izi olan, simetrik, bilinear form olarak tanımlanır ve Ricci eğrilik tensörü metrik tensör ile orantılı olan, yani bir $\lambda$ fonksiyonu için $Ric = \lambda g$ denklemini sağlayan, Riemann yada semi-Riemann manifolduna Einstein manifoldu denir. $n < 4$ olmak üzere, bir $(M^n, g)$ Riemann manifoldunun Einstein manifoldu olması için gerek ve yeter koşul $M$'nin sabit kesitsel eğrilikli olmasıdır. Ayrıca, $\lambda$'nın işareti, $(M^n, g)$ $(n < 4)$ manifoldunun topolojik yapısı hakkında doğrudan bilgi verir. Ancak $n \geq 4$ ise, $(M^n, g)$ manifoldunun eğriliği sadece Einstein metrik koşulu ile belirlenemez. Bu durumda, uzayın global karakterinin anlaşılabilmesi için Ricci eğrilik tensörü üzerinde yapılan bazı genelleştirmeler önem kazanmaktadır.

Einstein manifoldları, geometride olduğu kadar matematiksel fizikte de oldukça önemli yer tutar. Einstein'ın Genel Görelilik Teorisine göre, bir uzay-zamanın geometrisi ile madde içeriği doğrudan ilişkilidir ve bu ilişki

$$Ric(X,Y) - \frac{r}{2}g(X,Y) + \Lambda g(X,Y) = \kappa T(X,Y) \tag{1.1}$$

biçimindeki Einstein alan denklemleri ile verilmektedir. Burada, $Ric$ $(0,2)$-tipinde Ricci eğrilik tensörü, $r$ skaler eğrilik, $T$ stres enerji-momentum tensörü, $\Lambda$ kozmolojik sabit ve $\kappa$ yerçekimsel sabittir. Fizikte, stres enerji-momentum tensörü, uzay-zamanın madde içeriğini ve dolayısı ile enerji ve gerilmenin yoğunluğunu tarif etmektedir. Enerji ve gerilmenin varlığı ise maddenin varlığını gösterir. Dolayısıyla Ricci tensörü uzay-zamanın bir olayındaki madde ile doğrudan ilişkilidir. Örneğin, Einstein manifoldları metriğin vakum (yani maddeden yoksun, $T = 0$) Einstein alan denklemlerinin bir çözümüdür, [1]. Bu bakımdan, Ricci eğrilik tensörü özel bir koşulu sağlayacak şekilde tanımlanan Einstein manifoldları ve çeşitli genelleştirmeleri üzerinde yapılan araştırmalar, hem topolojik uzayın global karakterinin anlaşılmasında hem de uzayın madde içeriğinin belirlenmesinde oldukça yararlı olmaktadır.

İlk kez 2000 yılında, M. C. Chaki ve R. K. Maity tarafından, yarı Einstein manifoldu kavramı [2] Einstein manifoldlarının bir genelleştirmesi olarak ortaya atılmıştır. Yarı Einstein manifoldları, [2] numaralı çalışmanın yanı sıra, S. Guha [3], U. C. De ve G. C. Ghosh [4], [5], U. C. De ve B. K. De [6] gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmış ve geometrik özellikleri hakkında çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra, A. A. Shaikh ve diğerleri [7] numaralı çalışmada Lorentz yarı-Einstein manifoldları ile ilgili çalışmalar yapmış ve Genel Görelilik Teorisi ile ilgili bazı uygulamalarına yer vermişlerdir. Bu çalışmaya göre yarı Einstein manifoldları, Einstein alan denklemlerini sağlayan ve mükemmel akışkanlı madde içeriğine sahip uzay-zamanlara bir model oluşturmaktadır.

Farklı akışkan yoğunluğuna sahip olan uzay-zamanların incelenmesi için de Ricci eğrilik tensörünün daha fazla genelleştirilmesi gerekmektedir. Bu amaçla, 2001 yılında M. C. Chaki genelleştirilmiş yarı Einstein manifold kavramını ortaya atmıştır, [8]. S. Guha da, [3] numaralı çalışmasında Riemann veya semi-Riemann metriğine sahip genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldları hakkında çeşitli geometrik ve fiziksel sonuçlar elde etmiştir. Genel Görelilik Teorisine göre genelleştirilmiş yarı

Einstein manifoldları, 4-boyutlu ısı akışına izin veren genel relativistik akışkanlı uzay-zamanlara bir model oluşturmaktadır, [3].

Sabit eğrilikli (kanonik) metrik bulma probleminin çözümü ile ilgili yeni bir yöntem olarak, 1982 yılında R. S. Hamilton [9], Ricci akışı denilen,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric(g(t)) \\ g(0) = g_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

şeklindeki kısmi diferansiyel denklemini tanımlamıştır. Hamilton'a göre, Ricci akışı $g$ metriğini (yani $M$ manifoldunun şeklini) Ricci tensörü ile orantılı olarak, uygun sabit eğrilikli (örneğin küresel) bir metriğe dönüştürür, [9]. Sabit Ricci eğrilikli metrik (yani Einstein metriği) bulma problemine benzer şekilde, [10] numaralı makalede, pozitif skaler eğrilikli veya pozitif kesitsel eğrilikli Einstein metriği üretmek için de, Hamilton'un Ricci akışı [9] kavramı kullanılmıştır. O halde, Ricci akışının bazı özel çözümlerinin bulunması ve bu çözümlerin davranışlarının incelenmesi oldukça önemli bir problem haline gelmektedir. Kısaca, Ricci akışının kendi kendine benzer (self-similar) çözümlerine Ricci soliton adı verilir. Ricci soliton kavramı tanımlandığı tarihten itibaren birçok matematikçi ve fizikçinin ilgisini çekmiş ve bu konuda önemli sonuçlar elde edilmiştir. Hamilton ve Ivey [11, 12], 2 ve 3-boyutta, kapalı bir manifold üzerinde her büzülen gradient Ricci solitonun Einstein manifoldu olduğunu kanıtlamışlardır. Daha sonra Hamilton'un bu sonucu genelleştirmek için ortaya attığı, kompakt pozitif eğrilikli, büzülen gradient Ricci solitonun Einstein olması gerektiği iddiası, [13] numaralı çalışmada kanıtlanmıştır. Bundan itibaren, hangi koşullar altında Ricci solitonun Einstein manifolduna indirgeneceği (yani trivial olacağı) problemi bir çok araştırmacının ilgisini çeken bir problem haline gelmiştir.

Öte yandan, literatüre bakıldığında hem Einstein alan denklemlerinin elde edilen birçok temel çözümünün, hem de birçok Ricci soliton ve gradient Ricci solitonun, katlı çarpım manifoldu yapısına sahip olduğu görülmektedir. Katlı çarpım manifoldları, ilk kez 1969 yılında Bishop ve O'Neill [14] tarafından tanımlanmış ve daha sonra geometride olduğu kadar, matematiksel fizik ve Genel Görelilik ile ilgili birçok çalışmada kullanılmıştır. Örneğin, dönel yüzeyler, küre ve $\mathbb{R}^n - \{0\}$ lokal olarak katlı çarpım manifoldlarıdır. Yine iyi bilinen Robertson-Walker, Schwarzchild, Reissner-Nordström-de Sitter uzay-zamanları da katlı çarpım manifoldlarıdır.

Yukarıda verilen literatür taramasının motivasyonu ile, bu tez çalışmasında temelde dört problem üzerinde çalışılmaktadır. Birinci problemde, Ricci tensörü bazı özel koşulları sağlayan genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldlarının sahip olduğu geometrik özellikler araştırılmaktadır. Bunun için, çeşitli simetri koşullarının sağlanması durumunda genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldlarının karakterizasyonu ve sınıflandırılması problemi üzerinde durulmaktadır. İkinci problem olarak, genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun bir katlı çarpım manifoldu yapısına sahip olması için gerekli koşullar incelenmekte ve tersine, katlı çarpım manifoldu yapısına sahip olan genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun taban ve lifleri üzerinde sınıflandırmalar yapılmaktadır. Üçüncü problem, elde edilen sonuçların Genel Görelilik Teorisindeki önemli sonuçlarla karşılaştırılmasının yapılması ve çeşitli fiziksel uygulamalara yer verilmesi ile ilgilidir. Son olarak, dördüncü problemde ise, yukarıdaki motivasyon ile, benzer çalışmalar Ricci soliton ve onun genelleştirmeleri üzerine taşınmaktadır. Bu problemin temel amacı, ileride tanımları verilecek olan bazı özel vektör alanlarına sahip, $(m,\rho)$-yarı Einstein manifoldları ile ilgili karakterizasyon teoremleri elde etmektir.

Tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır. Bölümlerin içerikleri ise aşağıdaki gibi planlanmıştır:

Birinci bölümde, ele alınan problemlerin tanıtımı yapılıp, önemi üzerinde durulmaktadır. Bunun için de, öncelikle gerekli literatür taramasına yer verilmiştir.

İkinci bölümde, tez çalışması boyunca kullanılacak olan notasyon, temel tanım ve kavramlara yer verilmektedir. Ayrıca, tez çalışmasının ilk yarısını oluşturan Einstein manifoldlarının çeşitli genelleştirmeleri ile ilgili tanımlar burada verilmektedir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak Ricci-pseudosimetrik ve Ricci semisimetrik genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldlarının karakterizasyonu yapılmış, daha sonra da bu tip simetri koşulları farklı eğrilik tensörlerine genelleştirilerek, genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldları sınıflandırılmıştır. Ardından, Ricci reküran, genelleştirilmiş Ricci reküran gibi, Ricci tensörünün kovaryant türevlerinin bazı koşulları sağlaması durumunda da, söz konusu manifoldunun özellikleri araştırılmıştır. Bu gibi durumlarda, manifoldun üreteç vektör alanının bir paralel vektör alanı olduğu ve böylece söz konusu manifoldun bir yarı Einstein manifolduna indirgendiği gösterilmiştir. Ayrıca bu bölümde, bir genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun varlığı, trivial olmayan somut bir Riemann metriği inşaa edilerek kanıtlamıştır.

Dördüncü bölümde, ilk olarak genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun bir katlı çarpım manifoldu yapısına sahip olması için bazı gerekli koşullar araştırılmıştır. Bu kapsamda, konformal düzlük koşulu yardımıyla, $n$-boyutlu Ricci semisimetrik genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun üreteç vektör alanının konsörkılır vektör alanı olduğu gösterilmiş ve bunun bir sonucu olarak da manifoldun bir reel aralık ile $(n-1)$-boyutlu bir Einstein manifoldunun katlı çarpımı olduğu sonucu elde edilmiştir. Ardından farklı eğrilik tensörlerinin de (örneğin pseudo-projektif eğrilik tensörü gibi) özdeş olarak sıfır yada korunumlu (yani diverjanssız) olması durumunda, genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun çarpım manifoldları ile ilişkisi incelenmiştir. Daha sonra, tersine, katlı çarpım manifoldu yapısına sahip olan bir genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun, üreteçleri yardımıyla, taban ve lifleri üzerinde sınıflandırmalar yapılmış ve Einstein-benzeri manifoldlar ile bağlantıları kurulmuştur.

Beşinci bölümde ise, Lorentz metriğine sahip genelleştirilmiş yarı Einstein uzay-zamanlarına geçiş yapılmıştır. Bu amaçla öncelikle, Genel Görelilik Teorisi hakkında temel tanımlar ve literatür bilgisine yer verilmiştir. Ardından, önceki bölümlerde bulunan sonuçların, Lorentz metrik yapısı altında geçerli olup olmadığı araştırılmıştır. İlk olarak Ricci-pseudosimetrik, Ricci semisimetrik, Ricci reküran gibi çeşitli simetri koşulları altında genelleştirilmiş yarı Einstein uzay-zamanlarının karakterizasyonu ve sınıflandırması yapılmıştır. Daha sonra, elde edilen sonuçlar Genel Görelilik Teorisindeki önemli sonuçlarla karşılaştırılarak, fiziksel uygulamalara yer verilmiştir. Ayrıca, 4-boyutlu Lorentz metriğine sahip olan genelleştirilmiş yarı Einstein uzay-zamanının varlığını ispatlayan somut bir örnek de inşaa edilmiştir.

Tezin altıncı bölümünde ise, temel çalışma alanları, önceki bölümlerden farklı olarak, Ricci solitonların bazı genelleştirmeleri olan ve özel denklemlerle tanımlanan $(m,\rho)$-yarı Einstein manifoldlarıdır. Bunun için öncelikle, tanımlanışı bakımından Einstein manifoldlarının doğal bir genelleştirmesi olan, Ricci soliton kavramının nasıl ortaya çıktığı ve daha sonra nasıl genelleştirildiği ile ilgili ayrıntılı litaratür taraması yapılmıştır. Öncelikle, Ricci solitonlar ile yakından ilişkili olmasından dolayı, Riemann geometrisinde oldukça önemli bir obje olan ve Ricci tensörünün doğal bir genellemesi olarak tanımlanan $m$-Bakry-Emery Ricci tensörünün, metrik tensör ile orantılı olarak verildiği bazı manifoldların tanımları verilmiştir. Bu amaçla ilk olarak, $(m,\rho)$-yarı Einstein manifoldlarının sınıflandırma ve karakterizasyonu üzerinde çalışılmaktadır. Kapalı konformal yada paralel vektör alanına sahip olan bir $(m,\rho)$-yarı Einstein manifoldunun, potansiyel fonksiyonunun gradiyenti ve Hessian'ı ile igili yardımcı teoremler ispatlanarak, böylesi bir $(m,\rho)$-yarı Einstein manifoldunun, katlı çarpım manifoldu olması ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Ardından, bir $(m,\rho)$-yarı Einstein manifoldunun varlığını kanıtlayan ve elde edilen sonuçları gerçekleyen örnekler inşaa edilmiştir.

Tezin son bölümü olan yedinci bölümde ise, tez çalışmasında elde edilen sonuçların değerlendirilmesi yapılmış ve ileride ele alınması planlanan problemler hakkında önerilere yer verilmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm, tezin temelini oluşturan Riemann ve semi-Riemann manifoldları ile ilgili bazı önemli tanım ve teoremleri içermektedir. Bu bölümde ifade edilen tanım ve teoremler için [1], [15] ve [16] numaralı kitaplardan faydalanılmıştır.

### 2.1 Riemann ve Semi-Riemann Manifoldları

Riemann tarafından, 19. yüzyıl ve sonrasında yapılan birçok çalışmada, Euclid uzayındaki geometrik yapıya benzeyen ancak çok daha genel bir yapı olan manifold kavramının kullanıldığı görülmektedir. Bu benzerlik manifold ile $n$-boyutlu Euclid uzayı arasında tanımlanan homeomorfizmalar (kendisi ve tersi sürekli, 1-1 ve örten olan fonksiyonlar) ile kurulmaktadır. Dolayısıyla, manifold kısaca lokal olarak Euclid uzayına benzeyen topolojik uzay olarak tanımlanabilir.

Euclid uzayında, her $1 \leqslant i \leqslant n$ için, $u^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $u^i(p) = p_i$ biçiminde tanımlanan (yani her $p = (p_1, \ldots, p_n)$ noktasını, i-ninci koordinantına götüren) $u^1, \ldots, u^n$ fonksiyonlarına $\mathbb{R}^n$'in doğal koordinant fonksiyonları adı verilir. Yukarıda bahsedilen Euclid uzayına benzerlik ise, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Bir $M$ topolojik uzayında, koordinant sistemi (veya harita), $M$'nin bir $U$ açık alt kümesinden $\mathbb{R}^n$'e tanımlanan bir homeomorfizma olarak tanımlanır. Eğer, her $p \in U$ noktası için $\xi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$ yazılırsa, $x^1, \ldots, x^n$ fonksiyonlarına $\xi$'nin koordinant fonksiyonları denir. Bu durumda, $\xi = (x^1, \ldots, x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ yazılabilir ve $u^i \circ \xi = x^i$ bulunur. O halde, manifoldun matematiksel tanımı aşağıdaki gibi verilir:

**Tanım 2.1.** *$M$ bir Hausdorf uzayı olmak üzere, her $p \in M$ noktasının $\mathbb{R}^n$'e homeomorf olan yukarıdaki gibi bir $U$ açık komşuluğu bulunabiliyorsa, $M$'e $n$-boyutlu manifold adı verilir.*

Diferansiyellebilir manifold kavramında da yine Euclid uzayındaki diferansiyellebilirlik tanımına benzer bir yapı kullanılmaktadır. Euclid uzayında, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ açık alt kümesinden $\mathbb{R}^n$'e tanımlanan bir $\phi$ fonksiyonunun diferansiyellebilir olması, her reel değerli $u^i \circ \phi : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilir olması anlamına gelmektedir. Bir $M$ manifoldunun diferansiyellenebilir olması ise, önceki tanımda, $U \to \mathbb{R}^n$ biçiminde tanımlanan homeomorfizmaların diferansiyellenebilir olması anlamına gelmektedir ki açık tanımı aşağıda verilecek olan bu kavram, bu tezin temel çalışma alanı olacaktır:

**Tanım 2.2.** *$M$ n-boyutlu bir Hausdorf uzayı ve $I$, $M$ üzerinde bir indeks kümesi olsun. Her $i \in I$ için, $\phi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ açık alt kümeler olmak üzere, M'nin aşağıdaki koşulları sağlayan $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ açık haritalar topluluğuna, M üzerindeki diferansiyellenebilir yapı denir:*

*(1)* $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ *; (Örtü Aksiyomu).*

*(2) Her* $i, j \in I$ *için* $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ *tasviri diferansiyellenebilirdir; (Uyumluluk Aksiyomu).*

*(3)* $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ *topluluğu, (1) ve (2) koşullarını sağlayan açık haritalar ailesinin maksimalidir.*

*n-boyutlu diferansiyellenebilir yapıya sahip olan M Hausdorf uzayına ise diferansiyellenebilir (veya $C^\infty$) manifold denir.*

**Tanım 2.3.** *$V$ reel bir vektör uzayı olsun. Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $u, v, w \in V$ için*

*(i)* $B(u,v) = B(v,u)$

*(ii)* $B(au + bv, w) = aB(u,w) + bB(v,w)$
$B(u, av + bw) = aB(u,v) + bB(u,w)$

*özelliklerine sahip olan $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne V üzerinde simetrik bilineer form denir.*

**Tanım 2.4.** *$V$ reel vektör uzayı üzerinde tanımlı bir B simetrik bilineer formu; sıfırdan farklı her $v \in V$ için,*

*(i)* $B(v,v) > 0$ *( veya* $< 0$*) koşulunu sağlıyor ise pozitif (veya negatif) tanımlı,*

*(ii)* $B(v,v) \geq 0$ *( veya* $\leq 0$*) koşulunu sağlıyor ise yarı-pozitif (veya yarı-negatif) tanımlıdır.*

*Ayrıca, $\forall w \in V$ için, $B(v,w) = 0$ iken $v = 0$ ise $B$ simetrik bilineer formuna dejenere olmayan, aksi durumda dejenere bilineer form denir.*

**Tanım 2.5.** *$V$ bir reel vektör uzayı ve $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bir simetrik bilineer form olsun. $B$'nin negatif tanımlı olduğu, en büyük boyutlu $W \subset V$ alt uzayının boyutuna, $B$'nin indeksi denir.*

**Tanım 2.6.** *Bir $V$ reel vektör uzayı üzerinde tanımlı, dejenere olmayan, simetrik bilineer forma, $V$ üzerinde bir skaler çarpım denir. Özel olarak, $V$ üzerindeki pozitif tanımlı skaler çarpıma ise iç çarpım denir. $V$ vektör uzayı üzerinde tanımlı olan bir skaler çarpım $g$ ise, $(V,g)$ ikilisine skalar çarpımlı vektör uzayı denir.*

**Not 2.1.** $(V,g)$ skaler çarpımlı bir reel vektör uzayı, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $V$ üzerinde bir ortonormal baz takımı ve $\delta_{ij}$ Kronecker deltası olmak üzere; $\varepsilon_i = g(e_i,e_i) = \pm 1$ ve $g(e_i,e_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$ sağlanır. Böylece, her $v \in V$ vektörü

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(v,e_i) e_i \tag{2.1}$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir. Ayrıca, $e_1, \ldots, e_n$ baz vektörlerinin $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ ile gösterilen işaretlerinden negatif olanlarının sayısı $V$'nin indeksini belirtir.

**Tanım 2.7.** *$M$, diferansiyellenebilir bir manifold ve $M$ manifoldunun herhangi bir $p$ noktasındaki teğet uzayı $T_pM$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned} g : T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X_p, X_p) &\longrightarrow g(X_p, X_p) = < X_p, Y_p > \end{aligned}$$

*biçiminde tanımlanan, sabit indeksli, dejenere olmayan, $(0,2)$-tipindeki simetrik $g$ tensörüne, $M$ üzerinde bir metrik tensör denir.*

**Tanım 2.8.** *$M$, $g$ metrik tensörüne sahip olan diferansiyellenebilir bir manifold ise $(M,g)$ ikilisine semi-Riemann manifoldu denir.Bir $(M,g)$ semi-Riemann manifoldunun indeksi, üzerindeki $g$ metrik tensörünün indeksine eşittir. $t$-indeksli bir semi-Riemann manifoldu $M_t$ ile gösterilir ve $0 \leqslant t = ind(M) < boy(M)$ eşitsizliği daima gerçeklenir. Özel olarak; $t = 0$ olması durumunda, $g$ metrik tensörü pozitif tanımlıdır ve $M$ Riemann manifoldu olarak isimlendirilir. $t = 1$ olması durumunda ise, $M_1$ manifoldu Lorentz manifoldu ve 1-indeksli $g$ metriği Lorentz metriği olarak isimlendirilir.*

**Tanım 2.9.** *$(M,g)$ semi-Riemann manifoldunda, bir $v \in T_pM$ teğet vektörü aşağıdaki gibi isimlendirilir:*

*(1)* $v = 0$ *veya* $g(v,v) > 0$ *ise,* $v$ *uzaysaldır;*

*(2)* $g(v,v) < 0$ *ise,* $v$ *zamansaldır;*

*(3)* $v \neq 0$ *ve* $g(v,v) = 0$ *ise,* $v$ *ışıksaldır.*

**Tanım 2.10.** *$(M,g)$, bir semi-Riemann manifoldu, $X,Y,Z \in \chi(M)$ ve $f,h \in C^\infty(M)$ olmak üzere;*

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$(X,Y) \longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

*biçiminde tanımlanan ve*

*(1)* $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

*(2)* $\nabla_{(fX+hY)}Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z$

*(3)* $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

*koşullarını sağlayan $\nabla$ fonksiyonuna, $M$ üzerinde bir afin konneksiyon ve $\nabla_X Y$ vektörüne de $Y$'nin $X$ doğrultusundaki kovaryant türevi denir.*

**Tanım 2.11.** *$(M,g)$ bir semi-Riemann manifoldu ve $\nabla$, $M$ üzerinde tanımlanan afin konneksiyon olsun. Her $X,Y,Z \in \chi(M)$ için;*

*(1)* $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ *(Konneksiyonun burulmasız yani simetrik olma özelliği),*

*(2)* $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z)$ *(Konneksiyonun metrikle bağdaşması özelliği)*

*koşullarını sağlayan, tek türlü belirli $\nabla$ konneksiyonuna, $M$'in Riemann (veya Levi-Civita) konneksiyonu denir ve*

$$2g(\nabla_Y Z,X) = Yg(Z,X) + Zg(X,Y) - Xg(Y,Z) - g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) + g(X,[Y,Z]) \tag{2.2}$$

*denklemi ile karakterize edilir. Bu denkleme Kozsul formülü adı verilmektedir.*

**Tanım 2.12.** $(M,g)$ *bir semi-Riemann manifoldu ve* $\nabla$*,* $M$ *üzerinde tanımlanan Levi-Civita konneksiyonu olsun.*

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \tag{2.3}$$
$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

*biçiminde tanımlanan* $(1,3)$*-tipindeki* $R$ *tensör alanına* $M$*'nin Riemann eğrilik tensörü denir. Ayrıca,* $R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$ *ile tanımlanan* $(0,4)$*-tipindeki tensör alanına ise* $M$*'nin Riemann Christoffel eğrilik tensörü adı verilir.*

**Önerme 2.1.** *Her* $X,Y,Z,W \in \chi(M)$ *için Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar:*

*(1)* $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$;

*(2)* $R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$;

*(3)* $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W)$;

*(4)* $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$;

*(5)* $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ *(Birinci Bianchi Özdeşliği);*

*(6)* $(\nabla_Z R)(X,Y) + (\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) = 0$ *(İkinci Bianchi Özdeşliği).*

$M$ manifoldunun bir $p$ noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$'nin iki boyutlu $\pi$ lineer alt uzayına, bir düzlemsel kesit adı verilir. $\{X,Y\}$, $\pi$ düzlemsel kesitinin bir tabanı olmak üzere, $Q(X,Y) := g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2 \in \mathbb{R}$'dir. Bir düzlemsel kesitin dejenere olmaması için gerekli ve yeterli koşul $Q(X,Y) \neq 0$ olmasıdır. Böylece, manifoldun eğrilik tensörünü tümüyle belirleyen, ancak Riemann eğrilik tensöründen daha basit ve reel-değerli bir fonksiyon olan kesitsel eğrilik kavramı aşağıdaki gibi tanımlanır:

**Tanım 2.13.** $(M,g)$*, semi-Riemann manifoldunun, herhangi iki* $X,Y$ *teğet vektörü tarafından belirlenen* $\pi$ *düzlemsel kesitinin* $K(\pi)$ *ile gösterilen kesitsel eğriliği,*

$$K(\pi) = K(X,Y) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{Q(X,Y)} \tag{2.4}$$

*ile tanımlanır ve bu değer* $\{X,Y\}$ *bazının seçiminden bağımsızdır.*

Bir $M$ semi-Riemann manifoldunun, her bir $p \in M$ noktasındaki $K_p$ kesitsel eğriliği bir $c$ sabitine eşitse, $M$'e sabit eğrilikli manifold denir. Bu durumda manifoldun Riemann eğriliği

$$R(X,Y,Y,X) = cQ(X,Y)$$

denklemi ile verilir. Özel olarak, her $p \in M$ için, $K_p = 0$ ise $M$'e düz manifold adı verilir. O halde, bir semi-Riemann manifoldunun düz olması için gerekli ve yeterli koşul Riemann eğriliğinin özdeş olarak sıfır olmasıdır.

**Tanım 2.14.** *$(M^n, g)$, n-boyutlu bir semi-Riemann manifoldu ve $\{e_1, \ldots, e_n\}$ M'nin ortonormal bir çatı alanı olsun.*

$$Ric(X,Y) \to iz\{Z \mapsto R(Z,X)Y\}$$

*veya*

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(R(e_i,X)Y, e_i) \tag{2.5}$$

*biçiminde tanımlanan $(0,2)$-tipindeki Ric tensör alanına, M'nin Ricci eğrilik tensörü denir.*

$$Ric(X,Y) = g(QX,Y) \ \ ve \ \ Ric^2(X,Y) = Ric(QX,Y) \tag{2.6}$$

*biçiminde tanımlanan $(1,1)$-tipindeki Q operatörüne de Ricci operatörü denir.*

Benzer şekilde, $Ric(X,Y)$ tensörü de $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormal çatı alanının seçiminden bağımsızdır. Eğer $Ric = 0$ ise, $M$'e Ricci-düz manifold adı verilir. Sonuç olarak, her düz manifold aynı zamanda Ricci-düz manifold iken bu ifadenin tersi doğru değildir.

**Tanım 2.15.** *$(M^n, g)$, n-boyutlu bir semi-Riemann manifoldu ve $\{e_1, \ldots, e_n\}$ M'nin ortonormal bir çatı alanı olsun.*

$$r = \sum_{i=1}^{n} Ric(e_i, e_i) \tag{2.7}$$

*fonksiyonuna M'nin skaler eğrilik fonksiyonu denir ve r de ortonormal çatı alanının seçiminden bağımsızdır.*

**Sonuç 2.1.** ***Daraltılmış İkinci Bianchi Özdeşliği**, d türev operatörü ve Q Ricci operatörü olmak üzere, aşağıdaki gibi verilmektedir:*

$$dr = 2divQ \tag{2.8}$$

## 2.2 Einstein ve Özel Yarı Einstein Manifoldları

Bu bölümde Einstein ve özel yarı Einstein manifoldları ile ilgili bazı tanım ve teoremlere yer verilmektedir. Ricci eğrilik tensörü metrik tensör ile orantılı olan semi-Riemann manifoldu Einstein manifoldu olarak isimlendirilir. O halde, bir $(M^n, g)$ semi-Riemann manifoldunda, her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$Ric(X,Y) = \lambda g(X,Y) \tag{2.9}$$

olacak şekilde bir $\lambda : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa, $M$'e Einstein manifoldu denir. Einstein manifoldları, diferansiyel geometri ve matematiksel fizik alanlarında oldukça önemli bir yer tutar. Çünkü Genel Görelilik Teorisine göre bu tanım, metriğin vakum Einstein alan denkleminin bir çözümü olduğunu söylemeye denktir.

Matematiksel fizikte, uzay-zamandaki enerji ve gerilmenin yoğunluğunu ve dolayısıyla maddenin varlığını gösteren stres-enerji momentum tensörü ile uzay-zamanın geometrik yapısı hakkında bilgiyi içeren Ricci tensörü, Einstein alan denklemleri aracılığı ile doğrudan ilişkilendirilebilmektedir. O halde, uzayın global karakterinin anlaşılabilmesi için Ricci tensörü üzerinde yapılan bazı özel genelleştirmeler önem kazanmaktadır.

Bu amaçla, Einstein manifoldlarının bir genelleştirmesi olarak, 2000 yılında M. C. Chaki ve R. K. Maity, [2] numaralı çalışmada yarı Einstein manifoldu kavramını aşağıdaki şekilde tanımlanmışlardır:

**Tanım 2.16.** *$(M^n, g)$, n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Ricci tensörü sıfırdan farklı olan ve a, b sıfırdan farklı skaler fonksiyonlar olmak üzere*

$$Ric(X,Y) = ag(X,Y) + bA(X)A(Y); \;\; \forall\, X,Y \in \chi(M) \tag{2.10}$$

*koşulunu sağlayan $(M^n, g)$ manifolduna, yarı Einstein manifoldu adı verilir. Burada,*

$$A(X) = g(X,U); \; \forall\, X \in \chi(M) \; ve \;\; g(U,U) = 1 \tag{2.11}$$

*biçiminde tanımlanan A 1-formu ve U birim tanjant vektörü, sırasıyla manifoldun ilgili 1-formu ve manifoldun üreteci olarak isimlendirilir. n-boyutlu bir yarı-Einstein manifoldu kısaca $(QE)_n$ ile gösterilmektedir.*

Yarı Einstein manifoldları, daha sonra S. Guha [3], U. C. De ve G. C. Ghosh [4], [5], U. C. De ve B. K. De [6] gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmış ve çok çeşitli sonuçlar elde edilmiştir.

(2.10) ve (2.11) denklemleri yardımıyla, $n > 3$ olmak üzere bir $(QE)_n$ manifoldunda, $a+b$ ve $a$ fonksiyonları, Ricci tensörünün katlılıkları sırasıyla, 1 ve $n-1$ olan özdeğerleridir, [3]. (2.10) denklemi $X$ ve $Y$ üzerinde daraltılarak, yarı Einstein manifoldunun skaler eğriliği

$$r = an + b \tag{2.12}$$

biçiminde bulunur. Ayrıca, (2.10) ve (2.11) denklemleri yardımıyla,

$$Ric(X,U) = (a+b)A(X), \quad QU = (a+b)U \tag{2.13}$$

bağıntıları elde edilmektedir.

**Tanım 2.17.** *[17] Bir M Riemann manifoldunun k-null dağılımı, $k \in C^{\infty}(M^n, \mathbb{R})$ olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$N(k) : p \to N_p(k) = \Big\{ Z \in T_p(M) : R(X,Y)Z = k[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \Big\}; \ \forall X,Y \in TM \tag{2.14}$$

**Tanım 2.18.** *[18] $(M^n, g)$ bir yarı Einstein manifoldu olsun. Eğer M'nin U üreteci, $k \in C^{\infty}(M^n, \mathbb{R})$ olmak üzere bir k-null dağılımına ait ise, $(M^n, g)$ manifolduna $N(k)$-yarı Einstein manifoldu adı verilir.*

$(M^n, g)$ bir $N(k)$-yarı Einstein manifoldu olsun. Bu durumda, yukarıdaki tanımdan

$$R(Y,Z)U = k[A(Z)Y - A(Y)Z], \tag{2.15}$$

$$R(U,Y)Z = k[g(Y,Z)U - A(Z)Y], \tag{2.16}$$

$$R(U,Y)U = k[A(Y)U - Y] \tag{2.17}$$

bağıntıları elde edilir. (2.11), (2.15) ve (2.17) denklemlerinden,

$$A(R(Y,Z)U) = k[A(Z)A(Y) - A(Y)A(Z)] = 0 \tag{2.18}$$

ve

$$A(R(U,Y)Z) = k[g(Y,Z) - A(Z)A(Y)] \tag{2.19}$$

olarak bulunur. Bu durumda, (2.19) denklemi $Y$ ve $Z$ üzerinde daraltılır ve (2.13) denklemi kullanılırsa, $n$-boyutlu $N(k)$-yarı Einstein manifoldunda $k = \frac{a+b}{n-1}$ olarak bulunur, [19].

2008 yılında, U. C. De ve A. K. Gazi [20], yarı-Einstein manifoldlarının bir özel sınıfı olarak yaklaşık yarı-Einstein manifoldu kavramını ortaya atmışlardır.

**Tanım 2.19.** *[20] $(M^n, g)$, n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Ricci tensörü sıfırdan farklı olan ve a, b sıfırdan farklı skaler fonksiyonlar olmak üzere*

$$Ric(X,Y) = ag(X,Y) + bE(X,Y); \ \forall X,Y \in \chi(M) \tag{2.20}$$

*koşulunu sağlayan $(M^n, g)$ manifolduna, yaklaşık yarı Einstein manifoldu adı verilir. Burada, E tensörüne manifoldun ilgili tensörü adı verilir ve n-boyutlu bir yaklaşık yarı-Einstein manifoldu kısaca $N(QE)_n$ ile gösterilmektedir.*

İki kovaryant vektörün çarpımı daima $(0,2)$-tipinde bir kovaryant tensör olduğundan her yarı Einstein manifold bir yaklaşık yarı-Einstein manifoldudur. Ancak bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir.

2001 yılında ise, yarı Einstein manifoldunun bir genellemesi olarak, M. C. Chaki tarafından genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldu [8] kavramı ortaya atılmıştır.

**Tanım 2.20.** *[8] $(M^n, g)$, n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Ricci tensörü sıfırdan farklı olan ve a, b ve c sıfırdan farklı skaler fonksiyonlar olmak üzere*

$$Ric(X,Y) = ag(X,Y) + bA(X)A(Y) + c[A(X)B(Y) + A(Y)B(X)]; \ \forall X,Y \in \chi(M) \tag{2.21}$$

*koşulunu sağlayan $(M^n, g)$ manifolduna genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldu denir. Burada, $U,V \in T_p(M)$ birim ortogonal vektörler olmak üzere; $\forall X \in \chi(M)$ için*

$$A(X) = g(X,U), \ B(X) = g(X,V); \ g(U,U) = g(V,V) = 1, \ g(U,V) = 0 \tag{2.22}$$

*biçiminde tanımlanan A ve B 1-formları manifoldun ilgili 1-formları, U ve V vektör alanları ise manifoldun üreteçleri olarak isimlendirilir. n-boyutlu bir genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldu kısaca $G(QE)_n$ ile gösterilmektedir. Özel olarak, $c = 0$ alınırsa manifold bir yarı-Einstein manifolduna; $b = c = 0$ alınırsa manifold bir Einstein manifolduna indirgenir.*

$U$ ve $V$ üreteçleri ortogonal vektörler olduğundan, (2.21) ile verilen Ricci tensörü daraltılarak, bir genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun skaler eğriliği de, (2.12) denklemindeki gibi bulunur. Ayrıca, yarı Einstein manifoldlarından farklı olarak, bir $G(QE)_n$, $(n \geq 3)$ manifoldunda, $a+b$ ve $a$ fonksiyonları $Q$ Ricci operatörünün $U$ ve $V$ özvektörlerine karşılık gelen özdeğerleri olamazlar, [2], [3].

Ayrıca, (2.21) and (2.22) denklemleri kullanılarak, bir genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunda aşağıdaki denklemlerin gerçeklendiği görülür:

$$Ric(X,U) = (a+b)A(X) + cB(X) \;\; ve \;\; Ric(X,V) = aB(X) + cA(X), \quad \forall X \in \chi(M). \tag{2.23}$$

2011 yılında ise, [21] numaralı çalışmada, yarı Einstein manifoldlarının bir başka genel formu olarak, karışık süper yarı-Einstein manifoldu kavramı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

**Tanım 2.21.** *[21] $(M^n, g)$, n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Ricci tensörü sıfırdan farklı olan ve a, b c, d ve e sıfırdan farklı skaler fonksiyonlar olmak üzere*

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) =& ag(X,Y) + bA(X)A(Y) + cB(X)B(Y) + d[A(X)B(Y) + A(Y)B(X)] \\ &+ eD(X,Y), \quad \forall X,Y \in \chi(M) \end{aligned} \tag{2.24}$$

*koşulunu sağlayan $(M^n, g)$ manifolduna karışık süper yarı Einstein manifoldu denir. Burada $U,V \in T_p(M)$ birim ortogonal vektörler olmak üzere; $\forall X \in \chi(M)$ için*

$$A(X) = g(X,U),\; B(X) = g(X,V);\; g(U,U) = g(V,V) = 1,\; g(U,V) = 0 \tag{2.25}$$

*biçiminde tanımlanan A ve B 1-formları manifoldun ilgili 1-formları ve*

$$D(X,U) = 0, \quad \forall X \in \chi(M) \;\; ve \;\; izD = \sum_{i=1}^{n} D(e_i, e_i) = 0 \tag{2.26}$$

*koşullarını sağlayan $(0,2)$-tipindeki simetrik D tensörüne ise manifoldun temel tensörü adı verilir. n-boyutlu bir karışık süper yarı-Einstein manifoldu kısaca $MS(QE)_n$ ile gösterilir.*

# 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI EINSTEIN MANIFOLDLARININ BAZI ÖZEL SINIFLARI

Bu bölümde, çeşitli simetri koşullarını sağlayan genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldlarının sınıflandırılması ve karakterizasyonu ile ilgili bazı problemler ele alınmaktadır. Bilindiği üzere, simetri evrende geometrik ve fiziksel açıdan oldukça önemli bir yere sahiptir. (Ayrıntılı bilgi için [22] numaralı kitaptan yararlanılabilir.)

Bir $M$ manifoldunun Riemann eğrilik tensörünün kovaryant türevi özdeş olarak sıfır ise, $M$ manifolduna lokal simetrik manifold adı verilir. Son elli yıllık zaman zarfında ise lokal simetri kavramı çeşitli yollarla zayıflatılmaya çalışılmıştır. Bunlardan bazıları, A. G. Walker tarafından tanımlanan reküran manifoldlar [23], Z. I. Szabo tarafından tanımlanan semi-simetrik manifoldlar [24] ve M. C. Chaki tarafından tanımlanan pseudo simetrik manifoldlardır [25]. Yarı-Einstein manifoldlarının simetri, semi-simetri ve pseudo simetri gibi koşullarını sağlaması durumunda, sahip olduğu özellikler bir çok yazar tarafından çalışılmıştır ve literatürde bu konu ile ilgili çok sayıda yayın bulunmaktadır. Bu bölümün temel amacı ise, genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldları üzerindeki bu tür simetri koşullarını ele almak ve çok daha genel sonuçlar elde etmektir.

## 3.1 Çeşitli Pseudosimetrik ve Semisimetrik Genelleştirilmiş Yarı Einstein Manifoldları

Bu bölümde bazı özel pseudosimetri ve semisimetri koşullarını sağlayan genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldları ele alınacaktır. Elde edilen sonuçlar [26] ve [27] numaralı makalelerde yayınlanmıştır.

**Tanım 3.1.** *[28] $(M^n, g)$, $n \geq 2$ diferansiyellenebilir bir Riemann manifoldu olsun. $M$ üzerinde tanımlı $(0,2)$-tipinde bir simetrik $A$ tensör alanı için $\wedge_A$ endomorfizmi;*

$$\wedge_A : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \tag{3.1}$$
$$(X \wedge_A Y)Z = A(Y,Z)X - A(X,Z)Y$$

*biçiminde tanımlanır. Bu çarpıma Kulkarni-Nomizu çarpımı adı verilir.*

$M$ manifoldu üzerinde, $(0,k)$-tipinde $(k \geq 1)$ bir $T$ tensör alanı ile $(0,2)$-tipinde simetrik bir $A$ tensör alanı için, $R \cdot T$ tensörü ve $Q(A,T)$ Tachibana tensörü aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned}(R\cdot T)(X_1,X_2,\ldots,X_k;X,Y) =& (R(X,Y)\cdot T)(X_1,X_2,\ldots,X_k) \\ =& -T(R(X,Y)X_1,\ldots,X_k)-\ldots-T(X_1,\ldots,R(X,Y)X_k),\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$Q(A,T)(X_1,X_2,\ldots,X_k;X,Y) = -T((X\wedge_A Y)X_1,\ldots,X_k)-\ldots-T(X_1,\ldots,(X\wedge_A Y)X_k). \tag{3.3}$$

**Tanım 3.2.** *[28] $(0,k)$-tipinde $(k \geqslant 1)$ $T$ tensör alanına sahip $(M^n,g)$, $(n \geq 3)$ semi-Riemann manifoldunun her noktasında, $R \cdot T$ tensörü ile $Q(g,T)$ Tachibana tensörü lineer bağımlı ise M'e $T$-pseudosimetrik manifold denir.*

O halde, bir $(M,g)$ manifoldunun $T$-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter koşul, $R \cdot T = L_T Q(g,T)$ koşulunu sağlayan ve $U_T = \{x \in M : Q(g,T) \neq 0\}$ kümesi üzerinde tanımlı bir $L_T$ fonksiyonu mevcut olmasıdır.

Özel olarak, (3.2) ve (3.3) denklemlerinde $T = R$ ve $A = g$ olarak alınırsa, aşağıdaki tanım verilebilir:

**Tanım 3.3.** *[28] Bir $(M^n,g)$, $(n \geq 3)$ Riemann manifoldunun her noktasında $R \cdot R$ ve $Q(g,R)$ tensörleri lineer bağımlı ise M'e pseudosimetrik manifold denir.*

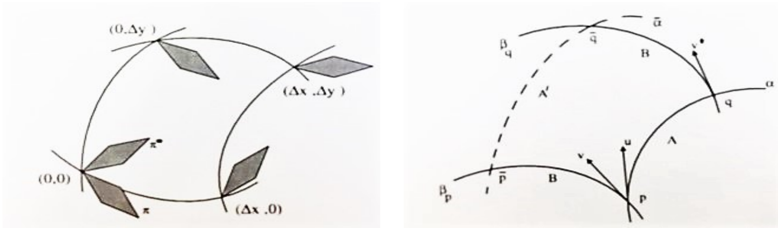
O halde, bir $(M,g)$ manifoldunun pseudosimetrik olması için gerek ve yeter koşul her $x \in U_R = \{x \in M : Q(g,R) \neq 0\}$ için

$$R \cdot R = L_R Q(g,R) \tag{3.4}$$

olmasıdır. Burada $L_R$, $U_R$ üzerinde bir fonksiyondur. Özel olarak, $L_R = 0$ olarak alınırsa, $(M^n,g)$ manifoldunda

$$R \cdot R = 0 \tag{3.5}$$

koşulu sağlanır. Bu durumda, (3.5) koşulunu sağlayan $M$ manifolduna semisimetrik manifold denir, [28].




(a) (b)

**Şekil 3.1** : (a) $R \cdot R$ tensörünün geometrik yorumu; (b) Levi-Civita paralelogramoidi [29]

**Not 3.1.** $(M,g)$ manifoldunun, $(0,6)$-tipindeki $R \cdot R$ tensörü ile, herhangi bir $p \in M$ noktasında, herhangi bir $\pi$ düzleminin, $p$ noktasını köşe kabul eden, sonsuz küçük koordinantlara sahip paralelkenar etrafında paralel kaydırılması sonucu, kesitsel eğrilikte meydana gelen değişim ölçülmektedir. $Q(g,R)$ Tachibana tensörü ise, $R \cdot R$ tensörünün tersine, herhangi bir $p \in M$ noktasında, bu noktadan ayrılmadan yapılan ve sonsuz küçük dönmeleri içeren hareketler sonucunda $K(p,\pi)$ kesitsel eğriliğinde meydana gelen değişimi ölçmektedir. $L_R = \frac{R \cdot R}{Q(g,R)}$ (çift katlı kesitsel eğrilik) fonksiyonu ise, bir $p$ noktasında teğet düzlemi $\pi$ olan ve üreteç vektörlerinin sonsuz küçük koordinantlardaki bir paralelkenar etrafında paralel kayması sonucu üretilen iki paralelogramoidin, yakın jeodezikleri arasındaki uzaklık farkını ölçmektedir. Dolayısıyla, çift katlı kesitsel eğriliği sıfır olan manifoldlara semisimetrik manifold adı verilir, [29].

### 3.1.1 Ricci-pseudosimetrik ve Ricci semisimetrik $G(QE)_n$

Bu bölümde, Ricci-pseudosimetrik ve Ricci semisimetrik $G(QE)_n$'nun sahip olduğu özellikler incelenecek ve manifoldun karakterizasyonu ile ilgili çeşitli teoremler verilecektir.

**Tanım 3.4.** *[28] $(M^n,g)$, $(n \geq 3)$ Riemann manifoldunun her noktasında $R \cdot Ric$ ve $Q(g,Ric)$ tensörleri lineer bağımlı ise M'ye Ricci-pseudosimetrik manifold adı verilir.*

O halde, bir $(M,g)$ manifoldunun Ricci-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter koşul her $x \in U_S = \{x \in M : Ric \neq \frac{r}{n} g\}$ için

$$R \cdot Ric = L_S Q(g,Ric) \tag{3.6}$$

olmasıdır. Burada $L_S$, $U_S$ üzerinde bir fonksiyondur. Özel olarak, $L_S = 0$ olarak alınırsa, $(M^n, g)$ manifoldunda

$$R \cdot Ric = 0 \tag{3.7}$$

koşulu sağlanır ve bu durumda da (3.7) koşulunu sağlayan $M$ manifolduna Ricci semisimetrik manifold adı verilir, [28]. Dolayısıyla, her Ricci semisimetrik manifold Ricci-pseudosimetriktir. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

(3.2) ve (3.3) denklemlerinde $T = Ric$ ve $A = g$ alınırsa, her $X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$(R(X,Y)\cdot Ric)(Z,W) = -Ric(R(X,Y)Z,W) - Ric(Z,R(X,Y)W) \tag{3.8}$$

$$Q(g,Ric)(Z,W;X,Y) = -Ric((X \wedge_g Y)Z,W) - Ric(Z,(X \wedge_g Y)W) \tag{3.9}$$

elde edilir.

**Not 3.2.** Benzer şekilde, $(M,g)$ manifoldunun, $(0,4)$-tipindeki $R \cdot Ric$ tensörü ile, herhangi bir $p \in M$ noktasında, herhangi bir $\upsilon$ vektörünün, $p$ noktasını köşe kabul eden, sonsuz küçük koordinantlara sahip paralelkenar etrafında paralel kaydırılması sonucu, Ricci eğriliğinde meydana gelen değişim ölçülmektedir. $Q(g,Ric)$ Tachibana tensörü ise, $R \cdot Ric$ tensörünün tersine, herhangi bir $p \in M$ noktasında, bu noktadan ayrılmadan yapılan ve sonsuz küçük dönmeleri içeren hareketler sonucunda Ricci eğriliğinde meydana gelen değişimi ölçmektedir. O halde, Einstein olmayan bir $(M^n,g)$, $(n \geq 3)$ Riemann manifoldunun, her $p \in U = \{x \in M : Q(g,Ric) \neq 0\}$ noktasında, $\upsilon \in T_pM$ vektörünün ürettiği $d$ doğrultusu ve $\bar{\pi} = x \wedge y$ düzlemi için $L_S(p,d,\bar{\pi}) = \frac{R\cdot Ric(\upsilon,\upsilon;x,y)}{Q(g,Ric)(\upsilon,\upsilon;x,y)}$ biçiminde tanımlanan Deszcz-Ricci eğriliği, her $d$ doğrultusu ve $\bar{\pi}$ düzlemi için aynı (yani $L_S(p,d,\bar{\pi}) = L_S(p)$) ise, $M$ manifolduna Ricci-pseudosimetrik manifold denir. Sonuç olarak, Ricci semisimetrik manifoldlar, Deszcz-Ricci eğriliğinin sıfır olduğu manifoldlar olarak karakterize edilebilir, [30].

**Teorem 3.1.** *Her Ricci-pseudosimetrik $G(QE)_n$ manifoldu, bir $N(k)$-yarı Einstein manifoldudur ve Deszcz-Ricci eğriliği $k = L_S = \frac{a+b}{n-1}$'dir.*

*İspat.* (3.8) ve (3.9) denklemleri kullanılarak, herhangi bir $(M^n,g)$ manifoldunun Ricci-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} Ric(R(X,Y)Z,W) + Ric(Z,R(X,Y)W) = L_S[&g(Y,Z)Ric(X,W) - g(X,Z)Ric(Y,W) \\ &+ g(Y,W)Ric(Z,X) - g(X,W)Ric(Y,Z)] \end{aligned} \tag{3.10}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

(2.21) ve (3.10) denklemleri kullanılarak, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}
&b[A(R(X,Y)Z)A(W)+A(Z)A(R(X,Y)W)]+c[A(R(X,Y)Z)B(W) \\
&+A(W)B(R(X,Y)Z)+A(Z)B(R(X,Y)W)+A(R(X,Y)W)B(Z)] \\
&=L_S\Big[b\Big\{g(Y,Z)A(X)A(W)-g(X,Z)A(Y)A(W)+g(Y,W)A(Z)A(X) \\
&-g(X,W)A(Y)A(Z)\Big\}+c\Big\{g(Y,Z)[A(X)B(W)+A(W)B(X)] \\
&-g(X,Z)[A(Y)B(W)+A(W)B(Y)]+g(Y,W)[A(Z)B(X)+A(X)B(Z)] \\
&-g(X,W)[A(Y)B(Z)+A(Z)B(Y)]\Big\}\Big].
\end{aligned} \tag{3.11}$$

(3.11) denkleminde, $Z=U$ ve $W=V$ olarak alınır, $A(R(X,Y,V))=g(R(X,Y)V,U)=R(X,Y,V,U)$ ve $b\neq 0$ olduğu kullanılırsa,

$$R(X,Y,U,V)=L_S[A(Y)B(X)-A(X)B(Y)] \tag{3.12}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (3.11) denklemi, $X$ ve $W$ üzerinde daraltılırsa,

$$\begin{aligned}
&b[A(R(U,Y)Z)-A(Z)Ric(Y,U)]+c[A(R(V,Y)Z)+B(R(V,Y)Z)-A(Z)Ric(Y,V) \\
&-B(Z)Ric(Y,U)]=L_S\Big\{b[g(Y,Z)-nA(Y)A(Z)]-cn[A(Y)B(Z)+A(Z)B(Y)]\Big\}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

bulunur. (3.13) denkleminde $Z=U$ alınırsa,

$$bRic(Y,U)-cR(U,Y,U,V)+cRic(Y,V)=L_S[b(n-1)A(Y)+cnB(Y)] \tag{3.14}$$

elde edilir. (2.23) ve (3.12) eşitlikleri, (3.14) denkleminde yerine yazılırsa,

$$[ab+b^2+c^2-b(n-1)L_S]A(Y)+[bc+ac+c(1-n)L_S]B(Y)=0 \tag{3.15}$$

bağıntısı bulunur. (3.15) denkleminde sırasıyla, $Y=U$ ve $Y=V$ alınır ve (2.22) denklemi kullanılırsa, aşağıdaki iki eşitlik elde edilir:

$$L_S=\frac{ab+b^2+c^2}{b(n-1)} \tag{3.16}$$

$$c[a+b-L_S(n-1)]=0 \tag{3.17}$$

Bu durumda, aşağıdaki iki durum elde edilir:

*1. Durum:* Eğer $c = 0$ ise, $b \neq 0$ olduğu için (3.16) denkleminden, $L_S = \frac{a+b}{n-1}$ elde edilir. Aksi taktirde hem $b$ hem $c$ sıfır olur ki bu da manifoldun Einstein manifolduna dönüşmesine neden olur.

*2. Durum:* Eğer $c \neq 0$ ise, (3.17) denkleminden, yine $L_S = \frac{a+b}{n-1}$. Bu denklemi (3.16) ile karşılaştırılırsa, bu durumda da yine $c = 0$ bulunur.

Dolayısıyla, her iki durumda da $c = 0$ ve $L_S = \frac{a+b}{n-1}$ olarak elde edilmiş olur. Ayrıca, elde edilen bu sonuçlar (3.11) denkleminde kullanılır, $W = U$ olarak alınır ve $b \neq 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$R(X,Y)U = \frac{a+b}{n-1}[A(Y)X - A(X)Y], \quad \forall X,Y \in \chi(M) \tag{3.18}$$

bulunur. O halde, $U$ üreteci $k = \frac{a+b}{n-1}$-null dağılımına aittir ve manifold bir $N(k)$-yarı Einstein manifoldu olur. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.1'de $L_S = 0$ alınırsa, aşağıdaki sonuçlara doğrudan ulaşılır:

**Sonuç 3.1.** *Ricci-pseudosimetrik bir $G(QE)_n$ manifoldunun Ricci semisimetrik olması için gerek ve yeter koşul $a+b = 0$ olmasıdır.*

Bu durumda, Ricci semisimetrik $G(QE)_n$ manifoldunun Ricci tensörü

$$Ric(X,Y) = a[g(X,Y) - A(X)A(Y)] \tag{3.19}$$

formunda yazılabilir. O halde aşağıdaki teorem elde edilmiş olur:

**Teorem 3.2.** *Her Ricci semisimetrik $G(QE)_n$ manifoldu, ilgili skaler fonksiyonlarının toplamı sıfır olan bir yarı Einstein manifoldudur.*

### 3.1.2 Projektif ve pseudo-projektif Ricci-semisimetrik $G(QE)_n$

Bu bölümde, sırasıyla, $P$ ve $\bar{P}$ ile gösterilecek olan projektif ve pseudo-projektif eğrilik tensörlerinin sahip olduğu özellikler verilecek ve özel olarak bir genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldu üzerinde projektif ve pseudo-projektif eğrilik tensörlerinin Ricci-semisimetri koşulunu sağlaması durumunda manifoldun geometrik yapısı incelenecektir.

**Tanım 3.5.** *[31] n-boyutlu bir $(M^n, g)$; $(n > 3)$ Riemann manifoldunun, $(1,3)$-tipindeki projektif eğrilik tensörü*

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{n-1}[Ric(Y,Z)X - Ric(X,Z)Y] \tag{3.20}$$

*biçiminde tanımlanır.*

Projektif eğrilik tensörü ilk iki indise göre antisimetrik iken, son iki indise göre antisimetrik değildir. Yani, her $X,Y,Z,W \in TM$ için

(i) $P(X,Y,Z,W) = -P(Y,X,Z,W)$,

(ii) $P(X,Y,Z,W) \neq \mp P(X,Y,W,Z)$

sağlanır. Burada $P(X,Y,Z,W) = g(P(X,Y)Z,W)$, $(0,4)$-tipindeki projektif eğrilik tensörüdür.

$\{e_i\}$; $1 \leqslant i \leqslant n$ manifoldun her bir noktasında teğet uzayının ortonormal bir tabanı olsun. Bu durumda, (3.20) denkleminden, aşağıdaki denklem bulunur:

$$\sum_{i=1}^{n} P(Y,e_i,e_i,U) = Ric(Y,U) - \frac{1}{n-1}[rA(Y) - Ric(Y,U)] \tag{3.21}$$

Projektif eğrilik tensörü diferansiyel geometride oldukça önemli bir yere sahiptir. Bir $M$ Riemann manifoldunda, $M$'deki her bir jeodeziği, Euclid uzayındaki düzgün doğrulara resmeden, bire-bir eşleme mevcut ise, $M$ manifolduna *lokal olarak projektif düzdür* denir. Ayrıca $n \geq 1$ boyutlu $(M^n,g)$ manifoldunun lokal olarak projektif düz olması için gerek ve yeter koşul projektif eğrilik tensörünün özdeş olarak sıfıra eşit olmasıdır, [31]. Bu durumda, (3.20) denkleminden, $M$ sabit eğrilikli bir manifold ise projektif olarak düzdür sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla, projektif eğrilik tensörü bir Riemann manifoldunun sabit eğriliğe sahip olup olmadığını belirlemek için kullanılabilen bir ölçüttür.

Pseudo-projektif eğrilik tensörü ise, 2002 yılında B. Prasad tarafından, projektif eğrilik tensörünün bir genelleştirmesi olarak tanımlanmıştır.

**Tanım 3.6.** *[32] Bir $(M^n,g)$, $(n>2)$ Riemann manifoldunda, pseudo-projektif eğrilik tensörü; $\alpha$, $\beta$ sıfırdan farklı skalerler, R Riemann eğrilik tensörü, Ric Ricci tensörü ve r skaler eğrilik olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:*

$$\begin{aligned} \bar{P}(X,Y)Z =& \alpha R(X,Y)Z + \beta[Ric(Y,Z)X - Ric(X,Z)Y] \\ & - \frac{r}{n}\left(\frac{\alpha}{n-1} + \beta\right)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \end{aligned} \tag{3.22}$$

Pseudo-projektif eğrilik tensörü, $X,Y,Z,W \in TM$ keyfi vektör alanları olmak üzere aşağıdaki simetri koşullarını sağlar:

(i) $\bar{P}(X,Y,Z,W) = -\bar{P}(Y,X,Z,W)$,

(ii) $\bar{P}(X,Y,Z,W) \neq \mp\bar{P}(X,Y,W,Z)$.

$1 \leqslant i \leqslant n$ olmak üzere, $\{e_i\}$ manifoldun her noktasında teğet uzayının ortonormal bir bazı olsun. Bu durumda, (3.22) denklemi kullanılarak, $Ric^0 = Ric - \frac{r}{n}g$ izi sıfır olan (yani $\sum_{i=1}^{n} Ric^0(e_i,e_i) = 0$ koşulunu sağlayan) Ricci tensörü olmak üzere aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{P}(X,Y,e_i,e_i) = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}(e_i,e_i,Z,W) = 0, \tag{3.23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{P}(e_i,Y,Z,e_i) = [\alpha + \beta(n-1)]Ric^0(Y,Z), \tag{3.24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{P}(X,e_i,e_i,W) = (\alpha - \beta)Ric^0(X,W) \tag{3.25}$$

Özel olarak, $\alpha = 1$ ve $\beta = -\frac{1}{n-1}$ olarak seçilirse (3.22) denklemi, (3.20) denklemine indirgenir. Dolayısıyla, projektif eğrilik tensörü pseudo-projektif eğrilik tensörünün bir özel halidir.

Bu aşamada, Tanım 3.4'e benzer şekilde aşağıdaki tanım verilebilir:

**Tanım 3.7.** *n-boyutlu $(n > 2)$ $(M^n,g)$ Riemann manifoldunun pseudo-projektif Ricci semisimetrik olması için gerek ve yeter koşul manifoldun her noktasında, pseudo-projektif eğrilik tensörünün $\bar{P} \cdot Ric = 0$ koşulunu sağlamasıdır.*

Bu durumda, bir $(M^n,g)$ Riemann manifoldunun pseudo-projektif Ricci semisimetrik olması durumunda, aşağıdaki denklem sağlanır:

$$(\bar{P}(X,Y)\cdot Ric)(Z,W) = -Ric(\bar{P}(X,Y)Z,W) - Ric(Z,\bar{P}(X,Y)W) = 0;\ \forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M^n) \tag{3.26}$$

**Teorem 3.3.** *Her pseudo-projektif Ricci semisimetrik $G(QE)_n$ $(n > 2)$ manifoldu bir $N(k)$-yarı Einstein manifoldudur ve $k = \frac{a+b}{n-1} = \frac{r}{\alpha n}(\frac{\alpha}{n-1} + \beta)$ eşitliği gerçeklenir.*

*İspat.* $(M^n,g)$ pseudo-projektif Ricci semisimetrik $G(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu durumda, (2.21) denklemi (3.26) bağıntısında kullanılırsa

$$\begin{aligned} & a[\bar{P}(X,Y,Z,W) + \bar{P}(X,Y,W,Z)] + b[A(\bar{P}(X,Y)Z)A(W) + A(Z)A(\bar{P}(X,Y)W)] \quad (3.27) \\ & + c[A(\bar{P}(X,Y)Z)B(W) + A(W)B(\bar{P}(X,Y)Z) + A(Z)B(\bar{P}(X,Y)W) \\ & + A(\bar{P}(X,Y)W)B(Z)] = 0, \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $g(\bar{P}(X,Y)Z,W) = \bar{P}(X,Y,Z,W)$'dır. (3.22) denklemi yardımıyla (3.27) denklemi

$$
\begin{aligned}
& a\beta[Ric(Y,Z)g(X,W) - Ric(X,Z)g(Y,W) + Ric(Y,W)g(X,Z) - Ric(X,W)g(Y,Z)] \\
& + b[\bar{P}(X,Y,Z,U)A(W) + A(Z)\bar{P}(X,Y,W,U)] + c[\bar{P}(X,Y,Z,U)B(W) \\
& + A(W)\bar{P}(X,Y,Z,V) + A(Z)\bar{P}(X,Y,W,V) + \bar{P}(X,Y,W,U)B(Z)] = 0.
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

biçimine dönüşür. Burada, $Z = U$ ve $W = V$ olarak alınır ve (2.22) bağıntısı göz önünde bulundurulursa

$$
\begin{aligned}
& a\beta[Ric(Y,U)B(X) - Ric(X,U)B(Y) + Ric(Y,V)A(X) - Ric(X,V)A(Y)] \\
& + b\bar{P}(X,Y,V,U) + c[\bar{P}(X,Y,U,U) + \bar{P}(X,Y,V,V)] = 0.
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

elde edilir. Diğer taraftan, (3.22) denklemi yardımıyla, pseudo-projektif eğrilik tensörünün aşağıdaki dört denklemi sağladığı görülmektedir:

$$
\begin{aligned}
\bar{P}(X,Y,U,V) = {} & \alpha R(X,Y,U,V) + \beta[Ric(Y,U)B(X) - Ric(X,U)B(Y)] \\
& - \frac{r}{n}(\frac{\alpha}{n-1} + \beta)[A(Y)B(X) - A(X)B(Y)],
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{P}(X,Y,V,U) = {} & \alpha R(X,Y,V,U) + \beta[Ric(Y,V)A(X) - Ric(X,V)A(Y)] \\
& - \frac{r}{n}(\frac{\alpha}{n-1} + \beta)[A(X)B(Y) - A(Y)B(X)],
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

$$
\bar{P}(X,Y,U,U) = \beta[Ric(Y,U)A(X) - Ric(X,U)A(Y)] \tag{3.32}
$$

$$
\bar{P}(X,Y,V,V) = \beta[Ric(Y,V)B(X) - Ric(X,V)B(Y)]. \tag{3.33}
$$

(2.23) ve (3.31)-(3.33) denklemleri (3.29) denkleminde yerine yazılır ve $b \neq 0$ olduğu dikkate alınırsa, $\bar{P} \cdot Ric = 0$ koşulunu sağlayan bir $G(QE)_n$ manifoldunda, Riemann eğrilik tensörünün

$$
R(X,Y,U,V) = \frac{r}{\alpha n}(\frac{\alpha}{n-1} + \beta)[A(Y)B(X) - A(X)B(Y)] \tag{3.34}
$$

bağıntısını gerçeklediği görülür. Ayrıca (3.28) denklemi $X$ ve $W$ üzerinde daraltılır ve (3.25) bağıntısı kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
& a\beta[nRic(Y,Z) - rg(Y,Z)] + b[\bar{P}(U,Y,Z,U) - A(Z)(\alpha - \beta)\{Ric(Y,U) - \frac{r}{n}A(Y)\}] \\
& + c[\bar{P}(V,Y,Z,U) + \bar{P}(U,Y,Z,V) - A(Z)(\alpha - \beta)\{Ric(Y,V) - \frac{r}{n}B(Y)\} \\
& - B(Z)(\alpha - \beta)\{Ric(Y,U) - \frac{r}{n}A(Y)\}] = 0
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

elde edilir. Burada, $Z=U$ olarak alınırsa

$$a\beta[nRic(Y,U)-rA(Y)]+b[\bar{P}(U,Y,U,U)-(\alpha-\beta)\{Ric(Y,U)-\frac{r}{n}A(Y)\}] \tag{3.36}$$
$$+c[\bar{P}(V,Y,U,U)+\bar{P}(U,Y,U,V)-(\alpha-\beta)\{Ric(Y,V)-\frac{r}{n}B(Y)\}]=0$$

bulunur. (2.23), (3.30) ve (3.32) denklemleri, (3.36) denkleminde kullanılırsa

$$\Big[-\alpha b(a+b)+\frac{br}{n}(\frac{\alpha}{n-1}+\beta)(n-1)-\alpha c^2\Big]A(Y) \tag{3.37}$$
$$+\Big[-\alpha c(a+b)+\frac{cr}{n}(\frac{\alpha}{n-1}+\beta)(n-1)\Big]B(Y)=0$$

bulunur. (3.37) denkleminde, sırasıyla $Y=U$ ve $Y=V$ olarak alınırsa, aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$\alpha[b(a+b)+c^2]=\frac{br}{n}(\frac{\alpha}{n-1}+\beta)(n-1) \tag{3.38}$$

$$c[-\alpha(a+b)+\frac{r}{n}(\frac{\alpha}{n-1}+\beta)(n-1)]=0 \tag{3.39}$$

elde edilir. O halde (3.39) denkleminden, ya $c=0$ ya da $\alpha(a+b)=\frac{r}{n}(\frac{\alpha}{n-1}+\beta)(n-1)$ olduğu sonucuna ulaşılır.

*1. Durum:* Eğer $c=0$ ise, bu durumda (3.38) denkleminden (aynı anda $b=0$ olamayacağı için) $\alpha(a+b)=\frac{r}{n}(\frac{\alpha}{n-1}+\beta)(n-1)$ elde edilir. (Aksi takdirde, $b=c=0$ olur ki bu da bir çelişkidir.)

*2. Durum:* Eğer $c\neq 0$ ise, yine $\alpha(a+b)=\frac{r}{n}(\frac{\alpha}{n-1}+\beta)(n-1)$ olur. Bu eşitlik (3.38) denkleminde yerine yazılırsa, $c^2\alpha=0$ elde edilir. Pseudo-projektif eğrilik tensörünün tanımına göre $\alpha\neq 0$ olduğundan, bu durumda da $c=0$ olmalıdır.

Dolayısıyla, her iki durumda da $c=0$ ve $\frac{a+b}{n-1}=\frac{r}{\alpha n}(\frac{\alpha}{n-1}+\beta)$ elde edilir. Ayrıca, elde edilenler bu sonuçlar (3.28) denkleminde kullanılır, $W=U$ alınır ve $b\neq 0$ olduğu hatırlanırsa, yine

$$R(X,Y)U=\frac{r}{\alpha n}(\frac{\alpha}{n-1}+\beta)[A(Y)X-A(X)Y], \quad \forall X,Y\in\chi(M) \tag{3.40}$$

elde edilir. O halde, $U$ üreteci $k=\frac{r}{\alpha n}(\frac{\alpha}{n-1}+\beta)$-null dağılımına aittir ve manifold bir $N(k)$-yarı Einstein manifoldu olur. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

**Not 3.3.** (3.1)-(3.3) denklemleri kullanılarak, pseudo-projektif eğrilik tensörünün

$$(\bar{P}\cdot Ric)=\alpha(R\cdot Ric)-\frac{r}{n}[\frac{\alpha}{n-1}+\beta]Q(g,Ric). \tag{3.41}$$

eğrilik koşulunu sağladığı görülmektedir. O halde, (3.41) denklemi ve $\alpha \neq 0$ olduğu dikkate alınarak, bir Riemann manifoldunda $\bar{P} \cdot Ric = 0$ koşulu gerçekleniyorsa,

$$(R \cdot Ric) = \frac{r}{n\alpha}[\frac{\alpha}{n-1} + \beta]Q(g, Ric) \tag{3.42}$$

denkleminin de sağlandığı görülür. Böylece, her pseudo-projektif Ricci semisimetrik manifold Ricci-pseudosimetriktir ve Deszcz-Ricci eğriliği $L_S = \frac{r}{n\alpha}[\frac{\alpha}{n-1} + \beta] = \frac{a+b}{n-1}$'e eşittir. Böylece, Teorem 3.1 ve Not 3.3 ile, Teorem 3.3 'ün bir başka yoldan ispatı verilmiş olur.

Teorem 3.1 ve Teorem 3.3'de uygulanan ispat tekniği ve (3.41) denklemi kullanılarak aşağıdaki teorem de kolaylıkla elde edilir:

**Teorem 3.4.** *Projektif eğrilik tensörü $P \cdot Ric = L_S Q(g, Ric)$ koşulunu sağlayan her $G(QE)_n$ manifoldu, Deszcz-Ricci eğriliği $k = L_S = \frac{a+b}{n-1}$ olan bir $N(k)$-yarı Einstein manifoldudur.*

O halde, aşağıdaki sonuç doğrudan gerçeklenir:

**Sonuç 3.2.** *Projektif eğrilik tensörü $P \cdot Ric = L_S Q(g, Ric)$ koşulunu sağlayan her $(QE)_n$ manifoldu, Deszcz-Ricci eğriliği $L_S = \frac{a+b}{n-1}$ olan bir $N(k)$-yarı Einstein manifoldudur.*

**Örnek 3.1.** $\rho$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + du^2 + dv^2 + \rho^2(xdu - ydv + dz)^2 \tag{3.43}$$

metriği [33] ile verilen $M \subset \mathbb{R}^5$ açık, bağlantılı alt kümesi verilsin. $M$ manifoldunun skaler eğriliği $r = \rho^2$'dir. Skaler fonksiyonlar $a = \frac{r}{2}$ ve $b = \frac{-3r}{2}$ olarak ve $A$ ilgili 1-formunun bileşenleri aşağıdaki gibi seçilsin:

$$A_i = \begin{cases} 0 & i = 1,2 \text{ ise} \\ -\rho & i = 3 \text{ ise} \\ -x\rho & i = 4 \text{ ise} \\ y\rho & i = 5 \text{ ise} \end{cases} \tag{3.44}$$

Bu durumda, $M$ manifoldunun Ricci tensörü, $Ric = ag + bA \otimes A$ koşulunu sağlar ve dolayısıyla $M$ bir yarı Einstein manifoldudur, [34]. Dahası, $M$ üzerinde $P \cdot Ric = \frac{-r}{4} Q(g, Ric)$ pseudo simetri koşulunu sağlamaktadır, [34]. Yani $L_S = \frac{a+b}{n-1} = \frac{-r}{4}$ olur. Dolayısıyla bu örnek, Sonuç 3.2'i gerçeklemektedir.

Öte yandan, $\alpha = 1$ ve $\beta = -\frac{1}{n-1}$ olması durumunda, Teorem 3.3 yardımıyla, aşağıdaki teoreme direk ulaşılmış olur:

**Teorem 3.5.** *Projektif eğrilik tensörü $P \cdot Ric = 0$ koşulunu sağlayan (projektif Ricci semisimetrik) her $G(QE)_n$ $(n > 2)$ manifoldu, ilgili skaler fonksiyonlarının toplamı sıfır olan, Ricci semisimetrik bir yarı Einstein manifoldudur ve projektif eğrilik tensörü $\forall X,Y,Z,W \in TM$ için $P(X,Y,U,V) = 0$ bağıntısını sağlar.*

### 3.1.3 Konformal, konsörkılır ve yarı konformal Ricci-semisimetrik $G(QE)_n$

**Tanım 3.8.** *[15] Bir $(M^n, g)$, $(n > 2)$ Riemann manifoldunda, Ric $(0,2)$ tipindeki Ricci tensörü, Q Ricci operatörü ve r skaler eğrilik olmak üzere, $(1,3)$-tipindeki konformal eğrilik tensörü, aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$C(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}[Ric(Y,Z)X - Ric(X,Z)Y + g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY] + \frac{r}{(n-1)(n-2)}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \tag{3.45}$$

Konformal eğrilik tensörü ilk iki ve son iki indise göre antisimetri ve dolayısıyla da blok simetri özelliklerini sağlar. Ayrıca, konformal eğrilik tensörünün herhangi iki indisi üzerinden alınan izi sıfıra eşittir.

Bu bölümde, $C \cdot Ric = 0$ koşulunu sağlayan $G(QE)_n$ manifoldu ele alınmaktadır. O halde,

$$(C(X,Y) \cdot Ric)(Z,W) = -Ric(C(X,Y)Z,W) - Ric(Z,C(X,Y)W) = 0; \ \forall X,Y,Z \in \chi(M) \tag{3.46}$$

denklemi gerçeklenir. Bu durumda, aşağıdaki teorem verilebilir:

**Önerme 3.1.** *$C \cdot Ric = 0$ koşulunu sağlayan (konformal Ricci semisimetrik) her $M = G(QE)_n$, $(n > 2)$ manifoldunda, konformal eğrilik tensörü ile Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki bağıntıları gerçekler:*

$$C(X,Y,Z,U) = C(X,Y,Z,V) = 0, \ \forall X,Y,Z \in \chi(M) \tag{3.47}$$

$$R(X,Y,U,V) = \frac{a+b}{n-1}[A(Y)B(X) - A(X)B(Y)], \ \forall X,Y \in \chi(M) \tag{3.48}$$

*İspat.* (2.21) denklemi (3.46) denkleminde kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} &b[A(C(X,Y)Z)A(W)+A(Z)A(C(X,Y)W)]+c[A(C(X,Y)Z)B(W) \\ &+A(W)B(C(X,Y)Z)+A(Z)B(C(X,Y)W)+A(C(X,Y)W)B(Z)]=0. \end{aligned} \tag{3.49}$$

(3.49) denkleminde $Z=U$ ve $W=V$ yazılır ve $U$ ile $V$ vektör alanlarının ortonormal oldukları kullanılırsa, $bA(C(X,Y)V)=0$ bulunur. $A(C(X,Y)V)=C(X,Y,V,U)$ ve $b\neq 0$, olduğundan konformal eğrilik tensörü

$$C(X,Y,U,V)=0 \tag{3.50}$$

bağıntısını gerçekler. (3.50) bağıntısı (3.49) denkleminde kullanılır ve sırasıyla $W=U$ ve $W=V$ olarak alınırsa, (3.47) numaralı bağıntılar elde edilir. Benzer şekilde, (3.50) bağıntısı, konformal eğrilik tensörünün tanımında kullanılırsa,

$$\begin{aligned} R(X,Y,U,V)=&\frac{1}{n-2}[Ric(Y,U)g(X,V)-Ric(X,U)g(Y,V)+g(Y,U)Ric(X,V) \\ &-g(X,U)Ric(Y,V)]-\frac{r}{(n-1)(n-2)}[g(Y,U)g(X,V)-g(X,U)g(Y,V)] \end{aligned} \tag{3.51}$$

elde edilir. (2.23) denklemi, (3.51) denkleminde yerine yazılırsa (3.48) bağıntısı elde edilir. □

**Tanım 3.9.** *[35] n-boyutlu bir $(M^n,g)$; $(n>3)$ Riemann manifoldunun, $(1,3)$-tipindeki konsörkılır eğrilik tensörü, her $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ için*

$$\tilde{C}(X,Y)Z=R(X,Y)Z-\frac{r}{n(n-1)}[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y] \tag{3.52}$$

*biçiminde tanımlanır.*

Konsörkılır eğrilik tensörü $\tilde{C}$ ilk iki ve son iki indise göre antisimetri özelliğini ve dolayısı ile blok simetri özelliklerini sağlar, yani her $X,Y,Z,W\in TM$ için

- $\tilde{C}(X,Y,Z,W)=-\tilde{C}(Y,X,Z,W)=-\tilde{C}(X,Y,W,Z)$

sağlanır. Burada, $\tilde{C}(X,Y,Z,W)=g(\tilde{C}(X,Y)Z,W)$, $(0,4)$-tipindeki konsörkılır eğrilik tensörünü göstermektedir.

$\{e_i\}$; $1\leqslant i\leqslant n$ manifoldun her bir noktasında teğet uzayının ortonormal bir tabanı olsun. Bu durumda, (3.52) denkleminden, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{C}(Y,e_i,e_i,U)=Ric(Y,U)-\frac{r}{n}A(Y) \tag{3.53}$$

Bu bölümde ilk olarak, $\tilde{C}\cdot Ric = 0$ koşulunu sağlayan $G(QE)_n$ manifoldu dikkate alınacaktır. Bu durumda,

$$(\tilde{C}\cdot Ric)(Z,W) = -Ric(\tilde{C}(X,Y)Z,W) - Ric(Z,\tilde{C}(X,Y)W) = 0 \tag{3.54}$$

denkleminin gerçeklenmesi durumunda aşağıdaki teorem verilmektekdir:

**Teorem 3.6.** *Konsörkılır eğrilik tensörü $\tilde{C}\cdot Ric = 0$ koşulunu sağlayan (konsörkılır Ricci semisimetrik) bir $G(QE)_n$, $(n > 3)$ manifoldu mevcut değildir.*

*İspat.* (2.21) ve (3.54) denklemlerinden aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} & b[A(\tilde{C}(X,Y)Z)A(W) + A(Z)A(\tilde{C}(X,Y)W)] + c[A(\tilde{C}(X,Y)Z)B(W) \\ & + A(W)B(\tilde{C}(X,Y)Z) + A(Z)B(\tilde{C}(X,Y)W) + A(\tilde{C}(X,Y)W)B(Z)] = 0 \end{aligned} \tag{3.55}$$

(3.55) denkleminde, $Z = U$ ve $W = V$ alınır ve $U$ ile $V$'nin ortonormal vektör alanları olduğu hatırlanırsa, $bA(\tilde{C}(X,Y)V) = 0$ bulunur. $A(\tilde{C}(X,Y)V) = \tilde{C}(X,Y,V,U)$ ve $b \neq 0$ olduğundan

$$\tilde{C}(X,Y,U,V) = 0 \tag{3.56}$$

elde edilir. Bu durumda, konsörkılır eğrilik tensörünün tanımı ve (3.56) denkleminden, Riemann eğrilik tensörünün

$$R(X,Y,U,V) = \frac{r}{n(n-1)}[A(Y)B(X) - A(X)B(Y)] \tag{3.57}$$

bağıntısını gerçeklediği görülür. (3.55) denklemi $X$ ve $W$ üzerinde daraltılır ve (3.53) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & b\Big[A(\tilde{C}(U,Y)Z) - A(Z)[Ric(Y,U) - \frac{r}{n}g(Y,U)]\Big] + c\Big[A(\tilde{C}(V,Y)Z) \\ & + B(\tilde{C}(U,Y)Z) - A(Z)[Ric(Y,V) - \frac{r}{n}g(Y,V)] - B(Z)[Ric(Y,U) - \frac{r}{n}g(Y,U)]\Big] = 0 \end{aligned} \tag{3.58}$$

elde edilir. (3.58) denkleminde $Z = U$ alınırsa,

$$b[-Ric(Y,U) + \frac{r}{n}g(Y,U)] + c[\tilde{C}(U,Y,U,V) - Ric(Y,V) + \frac{r}{n}g(Y,V)] = 0 \tag{3.59}$$

bulunur. (2.23) ve (3.56) denklemleri kullanılarak, (3.59) denkleminden

$$(-ab - b^2 + \frac{rb}{n} - c^2)A(Y) + (-ac - bc + \frac{cr}{n})B(Y) = 0 \tag{3.60}$$

denklemi elde edilir. (3.60) denkleminde sırasıyla, $Y = U$ ve $Y = V$ alınır ve (2.22) denklemi kullanılırsa, aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$-ab - b^2 + \frac{rb}{n} - c^2 = 0 \tag{3.61}$$

$$c(-a - b + \frac{r}{n}) = 0 \tag{3.62}$$

Bu durumda aşağıdaki iki durum elde edilir:

*1. Durum:* Eğer $c = 0$ ise, (3.61) denkleminden (aynı anda $b = 0$ olamayacağı için) $a + b = \frac{r}{n}$ olmalıdır. Ancak $r = an + b$ ve $a + b = \frac{r}{n}$ yine $b = 0$ sonucunu verir ki bu durumda manifold Einstein olur.

*2. Durum:* Eğer $a + b = \frac{r}{n}$ ise, $r = an + b$ olduğundan yine $b = 0$ elde edilir ve (3.61) denklemi de kullanılarak $c = 0$ elde edilir.

O halde, her iki durumda da $b = c = 0$'dır, yani manifoldun bir Einstein manifolduna indirgenmiş olduğu çelişkisine ulaşılacağından, ispat sona erer. □

1968 yılında, Yano and Sawaki, hem konformal hem de konsörkılır eğrilik tensörlerini içeren yeni bir tensörü tanımı daha yapmışlardır.

**Tanım 3.10.** *[36]* $(1,3)$*-tipindeki yarı konformal eğrilik tensörü,* $\alpha$ *ve* $\beta$ *sıfırdan farklı keyfi sabitler olmak üzere*

$$\tilde{W}(X,Y)Z = -(n-2)\beta C(X,Y)Z + [\alpha + (n-2)\beta]\tilde{C}(X,Y)Z \tag{3.63}$$

*biçiminde tanımlanır. Özel olarak eğer* $\alpha = 1$*,* $\beta = 0$ *olarak seçilirse,* $\tilde{W}$ *tensörü konsörkılır eğrilik tensörüne ve* $\alpha = 1$*,* $\beta = \frac{-1}{n-2}$ *olarak seçilirse,* $\tilde{W}$ *tensörü konformal eğrilik tensörüne dönüşür.*

(3.45) ve (3.52) denklemleri ile verilen konformal ve konsörkılır eğrilik tensörleri yardımıyla, (3.63) denklemi ile verilen yarı konformal eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}\tilde{W}(X,Y)Z =& \alpha R(X,Y)Z + \beta[Ric(Y,Z)X - Ric(X,Z)Y + g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY] \\ & - \frac{r}{n}\left(\frac{\alpha}{n-1} + 2\beta\right)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]\end{aligned} \tag{3.64}$$

biçiminde ifade edilebilir.

$\tilde{W}$ yarı konformal eğrilik tensörü de ilk iki ve son iki indise göre antisimetri ve dolayısıyla blok simetri özelliğini sağlar. Dolayısıyla, her $X,Y,Z,W \in TM$ için,

- $\tilde{W}(X,Y,Z,W) = -\tilde{W}(Y,X,Z,W) = -\tilde{W}(X,Y,W,Z)$

simetri koşullarını sağlar. Burada, $\tilde{W}(X,Y,Z,W) = g(\tilde{W}(X,Y)Z,W)$, $(0,4)$-tipindeki yarı konformal eğrilik tensörüdür.

Ayrıca, $\{e_i\}$; $1 \leqslant i \leqslant n$ manifoldunun her bir noktasında teğet uzayının ortonormal bir tabanı olmak üzere, (3.64) denkleminden, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \tilde{W}(Y,e_i,e_i,U) =& \alpha Ric(Y,U) + \beta[rA(Y) + (n-2)Ric(Y,U)] \\ & -\frac{r}{n}\Big(\frac{\alpha}{n-1} + 2\beta\Big)(n-1)A(Y).\end{aligned} \tag{3.65}$$

Bu bölümde şimdi de, $\tilde{W} \cdot Ric = 0$ koşulunu sağlayan $G(QE)_n$ manifoldu incelenecektir. Bu durumda

$$(\tilde{W}(X,Y) \cdot Ric)(Z,W) = -Ric(\tilde{W}(X,Y)Z,W) - Ric(Z,\tilde{W}(X,Y)W) = 0 \tag{3.66}$$

gerçeklenir ve aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

**Teorem 3.7.** *Yarı konformal eğrilik tensörü $\tilde{W} \cdot Ric = 0$ koşulunu sağlayan (yarı konformal Ricci semisimetrik) $G(QE)_n$, $(n > 3)$ manifoldu mevcut değildir.*

*İspat.* (2.21) ve (3.66) denklemlerinden, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}& b[A(\tilde{W}(X,Y)Z)A(W) + A(Z)A(\tilde{W}(X,Y)W)] + c[A(\tilde{W}(X,Y)Z)B(W) \\ & + A(W)B(\tilde{W}(X,Y)Z) + A(Z)B(\tilde{W}(X,Y)W) + A(\tilde{W}(X,Y)W)B(Z)] = 0.\end{aligned} \tag{3.67}$$

(3.67) denkleminde $Z = U$ ve $W = V$ alınırsa, $bA(\tilde{W}(X,Y)V) = 0$ bulunur. $A(\tilde{W}(X,Y)V) = g(\tilde{W}(X,Y)V,U) = \tilde{W}(X,Y,V,U)$ ve $b \neq 0$ olduğundan, yarı konformal eğrilik tensörünün

$$\tilde{W}(X,Y,U,V) = 0 \tag{3.68}$$

denklemini gerçeklediği görülür ve böylece (3.64) denkleminden

$$\begin{aligned}\alpha R(X,Y,U,V) =& \beta[Ric(X,U)B(Y) - Ric(Y,U)B(X) + Ric(Y,V)A(X) - Ric(X,V)A(Y)] \\ & + \frac{r}{n}\Big(\frac{\alpha}{n-1} + 2\beta\Big)[A(Y)B(X) - A(X)B(Y)]\end{aligned} \tag{3.69}$$

elde edilir. (2.23) ve (3.69) denklemlerinden, $\gamma := \frac{1}{\alpha}\{-(2a+b)\beta + \frac{r}{n}\Big(\frac{\alpha}{n-1} + 2\beta\Big)\}$ olmak üzere, Riemann eğrilik tensörünün aşağıdaki denklemi sağladığı görülür:

$$R(X,Y,U,V) = \gamma[A(Y)B(X) - A(X)B(Y)], \quad \forall\, X,Y \in \chi(M). \tag{3.70}$$

(3.67) denkleminde, $X$ ve $W$ üzerinde daraltma yapılır ve (3.65) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} 0 = b\Big\{&A(\tilde{W}(U,Y)Z) - A(Z)\Big[\alpha Ric(Y,U) + \beta\{rA(Y) + (n-2)Ric(Y,U)\} \\ &-\frac{r}{n}\Big(\frac{\alpha}{n-1} + 2\beta\Big)(n-1)A(Y)\Big]\Big\} + c\Big\{A(\tilde{W}(V,Y)Z) + B(\tilde{W}(U,Y)Z) \\ &-A(Z)\Big[\alpha Ric(Y,V) + \beta\{rB(Y) + (n-2)Ric(Y,V)\} - \frac{r}{n}\Big(\frac{\alpha}{n-1} + 2\beta\Big)(n-1)B(Y)\Big] \\ &-B(Z)\Big[\alpha Ric(Y,U) + \beta\{rA(Y) + (n-2)Ric(Y,U)\} - \frac{r}{n}\Big(\frac{\alpha}{n-1} + 2\beta\Big)(n-1)A(Y)\Big]\Big\} \end{aligned} \tag{3.71}$$

elde edilir. (3.71) denkleminde $Z = U$ alınırsa,

$$\begin{aligned} &-b\Big[\alpha Ric(Y,U) + \beta\{rA(Y) + (n-2)Ric(Y,U)\} - \frac{r}{n}\Big(\frac{\alpha}{n-1} + 2\beta\Big)(n-1)A(Y)\Big] \\ &+c\tilde{W}(U,Y,U,V) - c\Big[\alpha Ric(Y,V) + \beta\{rB(Y) + (n-2)Ric(Y,V)\} \\ &-\frac{r}{n}\Big(\frac{\alpha}{n-1} + 2\beta\Big)(n-1)B(Y)\Big] = 0 \end{aligned} \tag{3.72}$$

bulunur. Yine (2.23) ve (3.68) denklemleri yardımıyla, (3.72) denkleminden:

$$\begin{aligned} &\Big[ab\alpha + b^2\alpha + c^2\alpha + \beta(n-1)(b^2 + c^2 + 2ab) - \beta c^2 - \frac{br}{n}\Big(\alpha + 2(n-1)\beta\Big)\Big]A(Y) \\ &+\Big[c\alpha(a+b) + c\beta(n-2)(a+b) + c\beta r - \frac{cr}{n}\Big(\alpha + 2(n-1)\beta\Big)\Big]B(Y) = 0 \end{aligned} \tag{3.73}$$

elde edilir. (3.73) denkleminde sırasıyla, $Y = U$ ve $Y = V$ alınır ve (2.22) denklemi kullanılırsa, aşağıdaki iki bağıntı bulunur:

$$ab\alpha + b^2\alpha + c^2\alpha + \beta(n-1)(b^2 + c^2 + 2ab) - \beta c^2 - \frac{br}{n}\Big(\alpha + 2(n-1)\beta\Big) = 0 \tag{3.74}$$

$$c\Big[\alpha(a+b) + \beta(n-1)(2a+b) - \frac{r}{n}\Big(\alpha + 2(n-1)\beta\Big)\Big] = 0 \tag{3.75}$$

Böylece, (3.75) denkleminden, aşağıdaki iki durum elde edilir:

*1. Durum:* Eğer $c = 0$ ise, (3.74) denkleminden, (aynı anda $b = 0$ olamayacağı için) $\alpha(a+b) + \beta(n-1)(2a+b) - \frac{r}{n}\Big(\alpha + 2(n-1)\beta\Big) = 0$ bulunur. Son eşitlikte $r = an + b$ olduğu kullanılırsa, ya $b = 0$ yada $\alpha + (n-2)\beta = 0$ olabilir. Yarı konformal eğrilik tensörünün tanımından, $\alpha + (n-2)\beta \neq 0$ olduğundan, yalnızca $b = 0$ olabilir. Ancak yine manifoldun Einstein manifolduna düşeceği çelişkisi elde edilir.

*2. Durum:* Eğer $c \neq 0$ ise, yine benzer hesaplamalar ile $b = 0$ bulunur ve (3.74) denkleminden $c = 0$ bulunur ve böylece ispat sona erer. □

### 3.1.4 $W_2$ Ricci-semisimetrik $G(QE)_n$

**Tanım 3.11.** *[37] $W_2$-eğrilik tensörü, $Q$ Ricci operatörü olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$W_2(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{n-1}[g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY] \tag{3.76}$$

$W_2$-eğrilik tensörü ilk iki indise göre antisimetri özelliğini sağlarken, son iki indise göre simetri yada antisimetri özelliğini sağlamaz. Yani her $X,Y,Z,W \in TM$ için,

- $W_2(X,Y,Z,W) = -W_2(Y,X,Z,W)$
- $W_2(X,Y,Z,W) \neq \mp W_2(X,Y,W,Z)$

sağlanır. Dolayısıyla, $W_2$-eğrilik tensörü blok simetri özelliğini gerçeklemez. $\{e_i\}$; $1 \leqslant i \leqslant n$ manifoldunun her bir noktasında teğet uzayının ortonormal bir tabanı olsun. Bu durumda, (3.76) denkleminden, ele alınan önceki eğrilik tensörlerinden farklı olarak

$$\sum_{i=1}^{n} W_2(Y,e_i,e_i,U) = 0 \tag{3.77}$$

elde edilir. Bu bölümde, son olarak, $W_2 \cdot Ric = 0$ koşulunu sağlayan $G(QE)_n$ manifoldu dikkate alınacaktır. Bu durumda, her $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ için;

$$(W_2(X,Y)\cdot Ric)(Z,W) = -Ric(W_2(X,Y)Z,W) - Ric(Z,W_2(X,Y)W) = 0 \tag{3.78}$$

denkleminin gerçeklendiği bir $G(QE)_n$ manifoldu ele alınmaktadır:

**Teorem 3.8.** *Her $W_2 \cdot Ric = 0$ koşulunu sağlayan ($W_2$-Ricci semisimetrik) $G(QE)_n$ manifoldunun Ricci tensörü, $r$ skaler eğrilik olmak üzere*

$$Ric(X,Y) = rA(X)A(Y), \ \ \forall\, X,Y \in \chi(M) \tag{3.79}$$

*biçimindedir. (Böyle bir manifold özel yarı Einstein manifoldu olarak isimlendirilir.)*

*İspat.* (2.21) ve (3.78) denklemlerinden, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}&\frac{-a}{n-1}[g(Y,Z)Ric(X,W) - g(X,Z)Ric(Y,W) + g(Y,W)Ric(X,Z) - g(X,W)Ric(Y,Z)]\\&+b[A(W_2(X,Y)Z)A(W) + A(Z)A(W_2(X,Y)W)] + c[A(W_2(X,Y)Z)B(W)\\&+A(W)B(W_2(X,Y)Z) + A(Z)B(W_2(X,Y)W) + A(W_2(X,Y)W)B(Z)] = 0.\end{aligned} \tag{3.80}$$

(3.80) denkleminde $Z = U$ ve $W = V$ alınırsa,

$$\frac{-a}{n-1}[A(Y)Ric(X,V) - A(X)Ric(Y,V) + B(Y)Ric(X,U) - B(X)Ric(Y,U)] \tag{3.81}$$
$$+ bW_2(X,Y,V,U) + c[W_2(X,Y,U,U) + W_2(X,Y,V,V)] = 0$$

elde edilir. (2.23) ve (3.76) denklemlerinin yardımıyla, (3.81) denkleminden, $b \neq 0$ olduğu kullanılarak, Riemann eğrilik tensörünün

$$R(X,Y,U,V) = \frac{2a+b}{n-1}[A(Y)B(X) - A(X)B(Y)] \tag{3.82}$$

bağıntısını gerçeklediği görülür. Ayrıca, (3.80) denkleminde $X$ ve $W$ üzerinde daraltma yapılır ve (3.77) denklemi kullanılırsa

$$\frac{-a}{n-1}[rg(Y,Z) - nRic(Y,Z)] + bW_2(U,Y,Z,U) + c[W_2(V,Y,Z,U) + W_2(U,Y,Z,V)] = 0 \tag{3.83}$$

elde edilir. (3.83) denkleminde $Z = U$ alınırsa

$$\frac{-a}{n-1}[rA(Y) - nRic(Y,U)] + bW_2(U,Y,U,U) + c[W_2(V,Y,U,U) + W_2(U,Y,U,V)] = 0 \tag{3.84}$$

bulunur. Yine (2.23), (3.76) ve (3.84) denklemlerinden

$$\Big[\frac{-ar}{n-1} + \frac{an(a+b)}{n-1} - \frac{c^2}{n-1}\Big]A(Y) + \Big[\frac{acn}{n-1} + \frac{bc}{n-1} - \frac{c(2a+b)}{n-1} + \frac{ac}{n-1}\Big]B(Y) = 0 \tag{3.85}$$

ilişkisi bulunur. (3.85) denkleminde sırasıyla, $Y = U$ ve $Y = V$ alınır ve (2.22) denklemi kullanılırsa, aşağıdaki iki bağıntı bulunur:

$$ab = \frac{c^2}{n-1} \quad ve \quad ac = 0. \tag{3.86}$$

Bu iki bağıntı göz önüne alındığında, her durumda $a = c = 0$ ve $r = b$ olarak bulunur ve ispat sonlanır. □

## 3.2 Çeşitli Rekürans Koşullarını Sağlayan Genelleştirilmiş Yarı Einstein Manifoldları

Bu bölümde, $n$-boyutlu $(n > 2)$ ve ilgili skaler fonksiyonları $a, b \neq 0$ koşulunu sağlayan $G(QE)_n$ manifoldunun Ricci reküran, Ricci simetrik ve genelleştirilmiş Ricci reküran olması durumunda sahip olduğu özellikler incelenecektir.

### 3.2.1 (Genelleştirilmiş) Ricci reküran ve Ricci simetrik $G(QE)_n$

U. C De ve N. Kamilya [38] numaralı çalışmada, Ricci reküran ve Ricci simetri kavramlarını genelleştirmek amacı ile aşağıdaki kavramı tanımlamışlardır:

**Tanım 3.12.** *[38] $(M^n, g)$ manifoldunun Ricci tensörünün kovaryant türevi, $\phi$ ve $\psi$ sıfırdan farklı 1-formlar olmak üzere*

$$(\nabla_X Ric)(Y,Z) = \phi(X)Ric(Y,Z) + \psi(X)g(Y,Z) \tag{3.87}$$

*koşulunu sağlıyorsa, $(M^n, g)$ manifolduna genelleştirilmiş Ricci reküran manifold adı verilir ve kısaca $GRK_n$ ile gösterilir. Özel olarak,*

- *$\psi = 0$ ise (3.87) koşulu her $X, Y \in TM$ için $(\nabla_X Ric)(Y,Z) = \phi(X)Ric(Y,Z)$ olur ve bu durumda $(M^n, g)$ manifoldu Ricci reküran manifolda [39],*
- *$\phi = \psi = 0$ ise (3.87) koşulu her $X, Y \in TM$ için $(\nabla_X Ric)(Y,Z) = 0$ biçimine dönüşür ve bu durumda da $(M^n, g)$ manifoldu Ricci simetrik manifolda indirgenir.*

Bu bölümde elde edilen sonuçlar ile ilişkili olmasında dolayı, şimdi bazı özel vektör alanlarının tanımlarına yer verilecektir:

**Tanım 3.13.** *$(M^n, g)$ Riemann manifolduna ait olan bir $\xi$ vektör alanının kovaryant türevi, $\rho$ bir fonksiyon ve $\phi$ bir lineer form olmak üzere*

$$\nabla_X \xi = \rho X + \phi(X)\xi, \quad \forall X \in \chi(M) \tag{3.88}$$

*koşulunu sağlıyor ise, $\xi$'e tors oluşturan vektör alanı adı verilir, [40]. Özel olarak,*

- *$\phi$ gradiyent (yani $\phi = d\psi = \partial_i \psi dx^i$) ise, $\xi$'e konsörkılır vektör alanı [35],*
- *$\rho = 0$ ise, $\xi$'e reküran vektör alanı,*
- *$\rho = \phi = 0$ ise, $\xi$'e paralel vektör alanı adı verilir.*

Tanım 3.12 ve Tanım 3.13 kullanılarak aşağıdaki teorem ispatlanacaktır:

**Teorem 3.9.** *$(M^n, g)$, $(n > 3)$ bir genelleştirilmiş Ricci reküran $G(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu durumda, aşağıdakiler gerçeklenmektedir:*

*(i) $U$ üreteci paralel (yani irrotasyonel Killing) vektör alanıdır.*

*(ii) $U$ üretecinin integral eğrileri jeodeziklerden ibarettir.*

*(iii) $(M^n, g)$, ilgili skalerleri sabit ve toplamları sıfır olan bir $(QE)_n$ manifoldudur.*

*(iv) $(M^n, g)$ manifoldu Ricci simetriktir.*

*İspat.* $G(QE)_n$ manifoldunun Ricci tensörünün kovaryant türevi alınır ve (3.87) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\phi(X)Ric(Y,Z)+\psi(X)g(Y,Z) =&da(X)g(Y,Z)+db(X)A(Y)A(Z)+b[(\nabla_X A)(Y)A(Z) \\ &+A(Y)(\nabla_X A)(Z)]+dc(X)[A(Y)B(Z)+A(Z)B(Y)] \\ &+c[(\nabla_X A)(Y)B(Z)+A(Y)(\nabla_X B)(Z) \\ &+(\nabla_X A)(Z)B(Y)+A(Z)(\nabla_X B)(Y)]\end{aligned} \tag{3.89}$$

denklemi elde edilir. (3.89) denkleminde $Y = Z = U$ alınırsa

$$(a+b)\phi(X)+\psi(X) = da(X)+db(X)+2c(\nabla_X B)(U) \tag{3.90}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (3.89) denkleminde $Y = Z = V$ alınırsa

$$a\phi(X)+\psi(X) = da(X)-2c(\nabla_X B)(U) \tag{3.91}$$

(3.90) denkleminden (3.91) denklemi çıkartılırsa

$$b\phi(X) = db(X)+4c(\nabla_X B)(U) \tag{3.92}$$

bulunur. Son iki denklem kullanılarak

$$\psi(X)-da(X) = -(a+\frac{b}{2})\phi(X)+\frac{db(X)}{2} \tag{3.93}$$

bulunur. Ayırca (3.87) denklemi $Y$ ve $Z$ üzerinde daraltılır ve bir $G(QE)_n$'nun skaler eğriliğinin kovaryant türevinin $dr(X) = nda(X)+db(X)$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$n[\psi(X)-da(X)] = db(X)-(an+b)\phi(X) \tag{3.94}$$

denklemi elde edilir. (3.93) ve (3.94) denklemleri birlikte kullanılır ve $n > 2$ olduğu hatırlanırsa

$$db(X) = b\phi(X), \ \forall X \in \chi(M) \tag{3.95}$$

bağıntısı elde edilir. (3.92) ve (3.95) denklemlerinden $c(\nabla_X B)(U) = 0$ bulunur. Dolayısıyla, ya $c = 0$ ya da $(\nabla_X B)(U) = 0$'dır.

*1. Durum:* Eğer $c = 0$ ise bu durumda manifold yarı Einstein manifolduna indirgenir. Yani, Ricci tensörü

$$Ric(Y,Z) = ag(Y,Z) + bA(Y)A(Z) \tag{3.96}$$

biçimindedir. (3.96) denkleminin kovaryant türevi alınır ve (3.87) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \phi(X)Ric(Y,Z) + \psi(X)g(Y,Z) =& da(X)g(Y,Z) + db(X)A(Y)A(Z) \\ &+ b[(\nabla_X A)(Y)A(Z) + A(Y)(\nabla_X A)(Z)] \end{aligned} \tag{3.97}$$

bulunur. (3.97) denkleminde $Y = U$ alınırsa

$$(a+b)\phi(X)A(Z) + \psi(X)A(Z) = da(X)A(Z) + db(X)A(Z) + b(\nabla_X A)(Z) \tag{3.98}$$

elde edilir. Ayrıca, (3.91) denklemi $c = 0$ olduğundan $a\phi(X) + \psi(X) = da(X)$ biçimine dönüşür. Son denklem ile (3.95) denklemi, (3.98) denkleminde yerlerine yazılırsa, $b(\nabla_X A)(Z) = 0$ bulunur. Bu durumda, (aynı anda $b = 0$ olamayacağı için)

$$(\nabla_X A)(Z) = 0, \quad \forall\, X, Z \in \chi(M) \tag{3.99}$$

bulunur. (Aksi takdirde, $c = b = 0$ olur ve manifold Einstein manifolduna indirgenir.) O halde, bu durumun sonunda (3.99) denkleminden, $U$ paralel vektör alanı olarak bulunur.

*2. Durum:* Eğer $c \neq 0$ ise bu durumda $(\nabla_X B)(U) = 0$ olur. Dolayısıyla $(\nabla_X A)(V) = 0$ olur ve (3.91) denkleminden

$$a\phi(X) + \psi(X) = da(X), \;\; \forall\, X \in \chi(M) \tag{3.100}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (3.89) denkleminde $Y = U$ ve $Z = V$ olarak alınırsa, $(\nabla_X A)(V) = 0$ olduğu kullanılarak

$$dc(X) = c\phi(X), \;\; \forall\, X \in \chi(M) \tag{3.101}$$

bağıntısı elde edilir. Eğer (3.89) denkleminde $Y = V$ olarak alınır ve (3.100) ve (3.101) denklemleri kullanılırsa $c(\nabla_X A)(Z) = 0$ bulunur. Bu durumda $c \neq 0$ olarak kabul edildiğinden

$$(\nabla_X A)(Z) = 0, \;\; \forall\, X, Z \in \chi(M) \tag{3.102}$$

sağlanır. Dolayısıyla, her iki durumda da her $X,Z \in \chi(M)$ için $(\nabla_X A)(Z) = g(\nabla_X U, Z) = 0$ olarak bulunur. Yani, $U$ üreteci paralel vektör alanıdır. Ayrıca, bir $U$ vektör alanı

$$g(\nabla_X U, Y) + g(X, \nabla_Y U) = 0; \;\; \forall\, X,Y \in \chi(M) \tag{3.103}$$

denklemini sağlıyor ise $U$'ya Killing vektör alanı denir. Benzer şekilde, $U$ vektör alanı

$$g(\nabla_X U, Y) - g(X, \nabla_Y U) = 0; \;\; \forall\, X,Y \in \chi(M) \tag{3.104}$$

denklemini sağlıyor ise $U$'ya irrotasyonel vektör alanı denir. Yukarıdaki iki denklem yardımıyla, $U$'nun paralel olması için gerek ve yeter koşul $U$'nun irrotasyonel Killing vektör alanı olması şeklinde bulunur. Böylece, $(i)$'nin ispatı tamamlanmış olur.

Ayrıca (3.102) denkleminde $X = Z = U$ alınırsa, $\nabla_U U = 0$ elde edilir. Bu da $U$ üretecinin integral eğrilerinin jeodezik eğrileri olduğunu gösterir ve böylece $(ii)$ ispatlanmış olur.

Ayrıca, $U$ üreteci paralel vektör alanı olduğundan,

$$R(X,Y)U = \nabla_X \nabla_Y U - \nabla_Y \nabla_X U - \nabla_{[X,Y]} U = 0; \;\; \forall\, X,Y \in \chi(M) \tag{3.105}$$

bulunur ve (3.105) denklemi daraltılarak $Ric(X,U) = (a+b)A(X) + cB(X) = 0$ elde edilir. Burada sırasıyla $X = U$ ve $X = V$ alınırsa, $a+b = 0$ ve $c = 0$ olarak elde edilir. Dolayısıyla, manifoldun Ricci tensörü

$$Ric(X,Y) = a[g(X,Y) - A(X)A(Y)], \;\; \forall\, X,Y \in \chi(M) \tag{3.106}$$

biçiminde yazılır. Bu durumda, (3.106) denklemi $X$ ve $Y$ üzerinde daraltılarak skaler eğrilik fonksiyonu

$$r = (n-1)a \tag{3.107}$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca, (3.106) denkleminin kovaryant türevi alınır ve $U$ üretecinin paralel vektör alanı olduğu hatırlanırsa

$$(\nabla_Z Ric)(X,Y) = da(Z)[g(X,Y) - A(X)A(Y)] \tag{3.108}$$

bulunur. (3.108) denklemi $X$ ve $Z$ üzerinde daraltılır ve daraltılmış ikinci Bianchi özdeşliği ve (3.107) denklemi kullanılırsa

$$\left(\frac{n-3}{2}\right) da(Y) = -da(U)A(Y) \tag{3.109}$$

elde edilir. (3.109) denkleminde $Y = U$ yazılırsa $da(U) = 0$ bulunur ve bu da (3.109) denkleminde yerine yazılırsa, $n > 3$ olduğu için

$$da(Y) = 0, \ \ \forall Y \in \chi(M) \tag{3.110}$$

bulunur. Dolayısıyla, manifoldun ilgili skaler fonksiyonları sabittir. Dahası, (3.108) ve (3.110) denklemleri yardımıyla, $\nabla Ric = 0$ bulunur ve böylece manifold, Ricci simetrik manifolda indirgenmiş olur. Böylece, ispat sona erer. □

(3.87) denklemi ve Teorem 3.9 yardımıyla, aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur:

**Sonuç 3.3.** *Her Ricci reküran veya Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldu, Teorem 3.9'daki sonuçları gerçekler.*

### 3.2.2 Pseudo-projektif olarak reküran manifoldlar

Reküran manifold tanımına benzer olarak, pseudo-projektif olarak reküran manifold kavramı aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

**Tanım 3.14.** *n-boyutlu $(M^n, g)$, $(n > 3)$ Riemann manifoldunda, $\bar{P}$ pseudo-projektif eğrilik tensörü, $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ keyfi vektör alanları ve $\phi$ sıfırdan farklı 1-form olmak üzere*

$$(\nabla_K \bar{P})(X,Y,Z,W) = \phi(K)\bar{P}(X,Y,Z,W) \tag{3.111}$$

*koşulunu sağlıyor ise $(M^n, g)$ manifolduna pseudo-projektif olarak reküran manifold adı verilir ve kısaca $\bar{P}K_n$ ile gösterilir.*

(3.22) ve (3.111) denklemleri kullanılırsa, $\forall\, X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
&\alpha(\nabla_K R)(X,Y,Z,W) + \beta[(\nabla_K Ric)(Y,Z)g(X,W) - (\nabla_K Ric)(X,Z)g(Y,W)] \\
&-\frac{dr(K)}{n}(\frac{\alpha}{n-1} + \beta)[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)] \\
&=\alpha\phi(K)R(X,Y,Z,W) + \beta\phi(K)[Ric(Y,Z)g(X,W) - Ric(X,Z)g(Y,W)] \\
&-\frac{r}{n}(\frac{\alpha}{n-1} + \beta)\phi(K)[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)]
\end{aligned} \tag{3.112}$$

bulunur. Son denklem $Y$ ve $Z$ üzerinde daraltılırsa

$$(\alpha - \beta)(\nabla_K Ric)(X,W) = (\alpha - \beta)\Big[\phi(K)Ric(X,W) + \frac{1}{n}[dr(K) - r\phi(K)]g(X,W)\Big] \tag{3.113}$$

elde edilir. $\alpha \neq \beta$ olarak seçildiği takdirde (3.113) denkleminden

$$(\nabla_K Ric)(X,W) = \phi(K)Ric(X,W) + \frac{1}{n}[dr(K) - r\phi(K)]g(X,W) \tag{3.114}$$

olur. Burada, $\psi(K) := \frac{1}{n}[dr(K) - r\phi(K)]$ olarak alınır ve skaler eğriliğin sıfırdan farklı olduğu kabul edilirse, Ricci tensörünün kovaryant türevi

$$(\nabla_K Ric)(X,W) = \phi(K)Ric(X,W) + \psi(K)g(X,W) \tag{3.115}$$

biçiminde yazılabilir. Bu da manifoldun genelleştirilmiş Ricci reküran olması anlamına gelir. Dolayısıyla, ilk olarak aşağıdaki teorem elde edilmiş olur:

**Teorem 3.10.** *$(M^n, g)$, skaler eğriliği sıfırdan farklı olan $\bar{P}K_n$ manifoldu olsun. Eğer $\bar{P}$ tensörünün tanımındaki $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\alpha \neq \beta$ ise $(M^n, g)$ bir $GRK_n$ manifoldudur. Manifoldun skaler eğriliğinin sıfir olması durumunda ise, $(M^n, g)$ Ricci rekürandır.*

$\bar{P}K_n$ manifoldunda, $K$ bir keyfi vektör alanı olmak üzere (3.111) denklemi kısaca

$$\nabla_K \bar{P} = \phi(K)\bar{P} \tag{3.116}$$

biçiminde yazılabilir. (3.116) denkleminin kovaryant türevi alınır ve yine (3.116) denklemi kullanılırsa

$$\nabla_L \nabla_K \bar{P} = L(\phi(K))\bar{P} + \phi(L)\phi(K)\bar{P} \tag{3.117}$$

elde edilir. Son denklemde $K$ ve $L$ vektör alanlarının yerleri değiştirilirse

$$\nabla_K \nabla_L \bar{P} = K(\phi(L))\bar{P} + \phi(K)\phi(L)\bar{P} \tag{3.118}$$

bulunur. Böylece, (3.116)-(3.118) denklemleri yardımıyla, manifoldun $\mathscr{R}(K,L)$ Riemann operatörü

$$\begin{aligned}\mathscr{R}(K,L)\bar{P} =& \nabla_K \nabla_L \bar{P} - \nabla_L \nabla_K \bar{P} - \nabla_{[K,L]}\bar{P} \\ =& [\underbrace{K(\phi(L)) - L(\phi(K)) - \phi([K,L])}]\bar{P} \\ =& 2d\phi(K,L)\bar{P}\end{aligned} \tag{3.119}$$

biçiminde elde edilir. (3.119) denkleminden, $K, L$ teğet vektörleri için $\mathscr{R}(K,L)$ tensör cebrinin türevi

$$\begin{aligned}&(\mathscr{R}(K,L)\bar{P})(W,X,Y,Z) + (\mathscr{R}(W,X)\bar{P})(Y,Z,K,L) + (\mathscr{R}(Y,Z)\bar{P})(K,L,W,X) \\ &= 2[d\phi(K,L)\bar{P}(W,X,Y,Z) + d\phi(W,X)\bar{P}(Y,Z,K,L) + d\phi(Y,Z)\bar{P}(K,L,W,X)]\end{aligned} \tag{3.120}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, (3.22) denkleminin $K$ ve $L$ vektör alanları doğrultusunda iki kez kovaryant türevi alınır, ardından $K$ ile $L$ vektör alanlarının yerleri değiştirilerek elde edilen denklem bir önceki denklemden çıkartılır ve $G$ tensörü $R$, $Ric$ veya $\bar{P}$ tensörleri olmak üzere $\mathscr{R}(K,L)G = \nabla^2_{K,L}G - \nabla^2_{L,K}G$ bağıntısı göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}(\mathscr{R}(K,L)\bar{P})(W,X,Y,Z) = \alpha(\mathscr{R}(K,L)R)(W,X,Y,Z) + \beta[(\mathscr{R}(K,L)Ric)(X,Y)g(W,Z)\\ -(\mathscr{R}(K,L)Ric)(W,Y)g(X,Z)]\end{aligned} \tag{3.121}$$

elde edilir. (Burada $\nabla^2_{K,L} = \nabla_K\nabla_L - \nabla_{\nabla_K L}$ operatörüdür.) Dolayısıyla (3.121) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned}&(\mathscr{R}(K,L)\bar{P})(W,X,Y,Z) + (\mathscr{R}(W,X)\bar{P})(Y,Z,K,L) + (\mathscr{R}(Y,Z)\bar{P})(K,L,W,X)\\ &=\alpha[(\mathscr{R}(K,L)R)(W,X,Y,Z) + (\mathscr{R}(W,X)R)(Y,Z,K,L) + (\mathscr{R}(Y,Z)R)(K,L,W,X)]\\ &+\beta\Big[(\mathscr{R}(K,L)Ric)(X,Y)g(W,Z) - (\mathscr{R}(K,L)Ric)(W,Y)g(X,Z)\\ &+(\mathscr{R}(W,X)Ric)(Z,K)g(Y,L) - (\mathscr{R}(W,X)Ric)(Y,K)g(Z,L)\\ &+(\mathscr{R}(Y,Z)Ric)(L,W)g(K,X) - (\mathscr{R}(Y,Z)Ric)(K,W)g(L,X)\Big]\end{aligned} \tag{3.122}$$

bulunur. Herhangi pseudo-Riemann manifoldunda geçerli olan ve

$$\begin{aligned}(\nabla^2_{K,L}R - \nabla^2_{L,K}R)(W,X,Y,Z) + (\nabla^2_{W,X}R - \nabla^2_{X,W}R)(Y,Z,K,L)\\ +(\nabla^2_{Y,Z}R - \nabla^2_{Z,Y}R)(K,L,W,X) = 0\end{aligned}$$

biçiminde verilen özdeşliğe *Walker Özdeşliği* adı verilir. İspatın devamı ile uyumlu olması açısından, Walker Özdeşliği

$$(\mathscr{R}(K,L)R)(W,X,Y,Z) + (\mathscr{R}(W,X)R)(Y,Z,K,L) + (\mathscr{R}(Y,Z)R)(K,L,W,X) = 0 \tag{3.123}$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda (3.120) ve (3.123) denklemleri kullanılarak (3.122) denklemi

$$\begin{aligned}&\beta\Big[(\mathscr{R}(K,L)Ric)(X,Y)g(W,Z) - (\mathscr{R}(K,L)Ric)(W,Y)g(X,Z)\\ &+(\mathscr{R}(W,X)Ric)(Z,K)g(Y,L) - (\mathscr{R}(W,X)Ric)(Y,K)g(Z,L)\\ &+(\mathscr{R}(Y,Z)Ric)(L,W)g(K,X) - (\mathscr{R}(Y,Z)Ric)(K,W)g(L,X)\Big]\\ &=2[d\phi(K,L)\bar{P}(W,X,Y,Z) + d\phi(W,X)\bar{P}(Y,Z,K,L) + d\phi(Y,Z)\bar{P}(K,L,W,X)]\end{aligned} \tag{3.124}$$

biçiminde yazılır. Ayrıca, (3.114) denkleminin ikinci kovaryant türevi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$
\begin{aligned}
(\nabla_L \nabla_K Ric)(X,Y) =& (\nabla_L \phi)(K) Ric(X,Y) + \phi(L)\phi(K) Ric(X,Y) \\
&+ \frac{1}{n}\phi(K)[dr(L) - r\phi(L)]g(X,Y) \\
&+ \frac{1}{n}[d^2 r(K,L) - dr(L)\phi(K) - r(\nabla_L \phi)(K)]g(X,Y)
\end{aligned} \tag{3.125}
$$

$M$ manifoldunun Ricci tensörü özdeş olarak sıfırdan farklı ve kovaryant türevi; $(0,2)-$tipindeki sıfırdan farklı $E$ ve $F$ tensörleri için,

$$
\nabla\nabla Ric = E \otimes Ric + F \otimes g \tag{3.126}
$$

koşulunu sağlıyorsa, $M$ manifolduna *genelleştirilmiş 2-Ricci reküran* manifold adı verilir. Bu durumda (3.125) denkleminden, skaler eğriliği sıfırdan farklı olan ve $\alpha \neq \beta$ koşulunu sağlayan $\bar{P}K_n$ manifoldunun genelleştirilmiş 2-Ricci reküran manifoldu olduğu sonucuna varılır.

(3.125) denkleminde $K$ ve $L$ vektör alanlarının yerleri değişitirilerek elde edilen denklemden (3.125) denklemi çıkartılırsa

$$
(\mathscr{R}(K,L)Ric)(X,Y) = [(\nabla_K \phi)(L) - (\nabla_L \phi)(K)].[Ric(X,Y) - \frac{r}{n}g(X,Y)] \tag{3.127}
$$

bulunur. (3.127) denklemi (3.124) denkleminde yerine yazılır ve $\alpha \neq 0$ olduğu kullanılırsa, $\tilde{C}$ konsörkılır eğrilik tensörünü göstermek üzere,

$$
\begin{aligned}
&\Big[[(\nabla_K \phi)(L) - (\nabla_L \phi)(K)]\tilde{C}(W,X,Y,Z) + [(\nabla_W \phi)(X) - (\nabla_X \phi)(W)]\tilde{C}(Y,Z,K,L) \\
&+[(\nabla_Y \phi)(Z) - (\nabla_Z \phi)(Y)]\tilde{C}(K,L,W,X)\Big] = 0
\end{aligned} \tag{3.128}
$$

denklemi elde edilir.

**(Walker Lemma)** [23] $a_{ij}$ ve $b_i$; her $i,j = 1,2,\ldots,n$ için $a_{ij} = a_{ji}$ ve $a_{ij}b_k + a_{jk}b_i + a_{ki}b_j = 0$ koşullarını sağlayan tensörler olsun. Bu durumda her $i,j$ için, $a_{ij} = 0$ veya $b_i = 0$'dır.

Konsörkılır eğrilik tensörü blok simetri özelliğini sağladığından, (3.128) ve Walker Lemması kullanılarak, her $X,Y \in \chi(M)$ için $d\phi(X,Y) = \frac{1}{2}[(\nabla_X \phi)(Y) - (\nabla_Y \phi)(X)] = 0$ veya $\tilde{C} = 0$ bulunur. Eğer $\tilde{C} = 0$ olursa, (3.52) denkleminden, manifoldun bir Einstein manifolduna düştüğü görülür. Dolayısıyla, $d\phi = 0$ olmalıdır. O halde, $\phi$ rekürans

1-formu kapalıdır. Bu durumda (3.127) denkleminden, $\mathscr{R} \cdot Ric = 0$ olarak bulunur. Böylece, aşağıdaki teorem elde edilir:

**Teorem 3.11.** *$(M^n, g)$, Einstein olmayan ve skaler eğriliği sıfırdan farklı olan bir $\bar{P}K_n$ manifoldu olsun ve öyle ki; $\bar{P}$ tensörünün tanımındaki $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\alpha \neq \beta$ olsun . Bu durumda, $(M^n, g)$ manifoldunda aşağıdakiler gerçeklenmektedir:*

*(i)* *$(M^n, g)$ genelleştirilmiş 2-Ricci reküran manifoldudur.*

*(ii)* *$(M^n, g)$ manifoldunun $\phi$ reküran 1-formu kapalıdır.*

*(iii)* *$(M^n, g)$ Ricci semisimetriktir.*

### 3.3 Genelleştirilmiş Yarı Einstein Manifoldu Örneği

Bu bölümün amacı, 4-boyutlu bir genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun varlığını trivial olmayan, somut bir Riemann metriği inşaa ederek kanıtlamaktır. Literatürde genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldlarının varlığına dair çok fazla örnek bulunmamakta ve varolan örneklerin uzayın bazı özelliklerini gerçeklemediği görülmektedir. Dolayısıyla, şimdi (2.21) ve (2.22) koşullarının tümünü sağlayan 4-boyutlu bir Riemann metriği inşaa edilecektir.

4-boyutlu $\mathbb{R}^4$ Reel sayılar uzayında, $\{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ standart koordinatlar ve $A$, $B$, $C$ yalnızca $x^4$ değişkenine bağlı olan fonksiyonlar olmak üzere

$$ds^2 = A^2(dx^1)^2 + B^2(dx^2)^2 + C^2(dx^3)^2 + (dx^4)^2 \tag{3.129}$$

metriği dikkate alınsın.

Bu durumda, Christoffel sembollerinin, Riemann eğrilik tensörünün ve Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri ile skaler eğrilik aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\Gamma^1_{14} = \frac{A_4}{A},\ \Gamma^4_{11} = -AA_4,\ \Gamma^2_{24} = \frac{B_4}{B},\ \Gamma^3_{34} = \frac{C_4}{C},\ \Gamma^4_{22} = -BB_4,\ \Gamma^4_{33} = -CC_4 \tag{3.130}$$

$$R_{1221} = ABA_4B_4, \quad R_{1331} = ACA_4C_4, \quad R_{1441} = AA_{44} \tag{3.131}$$

$$R_{2332} = BCB_4C_4, \quad R_{2442} = BB_{44}, \quad R_{3443} = CC_{44} \tag{3.132}$$

$$Ric_{11} = \frac{AA_4B_4}{B} + \frac{AA_4C_4}{C} + AA_{44} \tag{3.133}$$

$$Ric_{22} = \frac{BA_4B_4}{A} + \frac{BB_4C_4}{C} + BB_{44} \tag{3.134}$$

$$Ric_{33} = \frac{CA_4C_4}{A} + \frac{CB_4C_4}{B} + CC_{44} \tag{3.135}$$

$$Ric_{44} = \frac{A_{44}}{A} + \frac{B_{44}}{B} + \frac{C_{44}}{C} \tag{3.136}$$

Bu durumda $(1,1)$-tipindeki Ricci operatörü de aşağıdaki sıfırdan farklı bileşenlere sahiptir:

$$Q_1^1 = \frac{A_4B_4}{AB} + \frac{A_4C_4}{AC} + \frac{A_{44}}{A}, \quad Q_2^2 = \frac{A_4B_4}{AB} + \frac{B_4C_4}{BC} + \frac{B_{44}}{B} \tag{3.137}$$

$$Q_3^3 = \frac{A_4C_4}{AC} + \frac{B_4C_4}{BC} + \frac{C_{44}}{C}, \quad Q_4^4 = \frac{A_{44}}{A} + \frac{B_{44}}{B} + \frac{C_{44}}{C} \tag{3.138}$$

$$r = 2\Big[\frac{A_4B_4}{AB} + \frac{A_4C_4}{AC} + \frac{B_4C_4}{BC} + \frac{A_{44}}{A} + \frac{B_{44}}{B} + \frac{C_{44}}{C}\Big] \tag{3.139}$$

Burada "$_4$" alt indisi $x^4$ değişkenine göre türevi göstermektedir.

Manifoldun ilgili 1-formları, $\lambda \neq 0$ olmak üzere,

$$A^i = \Big(\frac{sin(\lambda)}{A}, 0, 0, cos(\lambda)\Big) \tag{3.140}$$

ve

$$B_i = \Big(Acos(\lambda), 0, 0, -sin(\lambda)\Big) \tag{3.141}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, (3.140) ve (3.141) ile verilen üreteçler, (2.22) denklemi ile verilen ortonormallik koşulunu sağlamaktadır.

Ayrıca, (2.21) denklemi, aşağıdaki gibi $(1,1)$-tipi tensörel ifade ile yazılabilir:

$$Q_i^j = a\delta_i^j + bA_iA^j + c[A_iB^j + B_iA^j], \quad j = 1,2,3,4 \tag{3.142}$$

Bu durumda (3.137), (3.138) ve (3.142) denklemleri yardımıyla, aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$a + bsin^2(\lambda) + 2csin(\lambda)cos(\lambda) = \frac{A_4B_4}{AB} + \frac{A_4C_4}{AC} + \frac{A_{44}}{A} \tag{3.143}$$

$$a = \frac{A_4B_4}{AB} + \frac{B_4C_4}{BC} + \frac{B_{44}}{B} = \frac{A_4C_4}{AC} + \frac{B_4C_4}{BC} + \frac{C_{44}}{C} \tag{3.144}$$

$$a + bcos^2(\lambda) - 2csin(\lambda)cos(\lambda) = \frac{A_{44}}{A} + \frac{B_{44}}{B} + \frac{C_{44}}{C} \tag{3.145}$$

$$c = -\frac{b}{2}tan(2\lambda) \tag{3.146}$$

(3.143), (3.144) ve (3.145) denklemleri kullanılarak

$$b = 2\Big(\frac{A_{44}}{A} - \frac{B_4C_4}{BC}\Big) \;\; ve \;\; c = \Big(\frac{B_4C_4}{BC} - \frac{A_{44}}{A}\Big)tan(2\lambda) \tag{3.147}$$

elde edilir. Şimdi yukarıdaki sistemin bir

$$A = e^{(x^4)}, \quad B = C = (x^4)^2 \tag{3.148}$$

çözümü dikkate alınsın. Bu durumda, 4-boyutlu $\mathbb{R}^4$ uzayında, $g$ Riemann metriği

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = (e^{2x^4})(dx^1)^2 + (x^4)^4[(dx^2)^2 + (dx^3)^2] + (dx^4)^2 \tag{3.149}$$

biçiminde yazılır. Burada $-1-\sqrt{7} < x^4 < 1-\sqrt{3}$ veya $-1+\sqrt{7} < x^4 < 1+\sqrt{3}$ koşulu sağlanmalıdır.

Böylece, Christoffel sembollerinin, Riemann eğrilik tensörünün ve Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri ile skaler eğrilik aşağıdaki denklemlerdeki gibi elde edilmiş olur:

$$\Gamma^1_{14} = 1, \; \Gamma^4_{11} = -e^{2x^4}, \; \Gamma^2_{24} = \Gamma^3_{34} = \frac{2}{x^4}, \; \Gamma^4_{22} = \Gamma^4_{33} = -2(x^4)^3 \tag{3.150}$$

$$R_{1221} = R_{1331} = 2e^{2x^4}(x^4)^3, \; R_{1441} = e^{2(x^4)} \tag{3.151}$$

$$R_{2332} = 4(x^4)^6, \; R_{2442} = R_{3443} = 2(x^4)^2 \tag{3.152}$$

$$Ric_{11} = \frac{4e^{2(x^4)}}{(x^4)} + e^{2(x^4)}, \; Ric_{22} = Ric_{33} = 2(x^4)^2[(x^4)+3], \; Ric_{44} = 1 + \frac{4}{(x^4)^2} \tag{3.153}$$

$$r = \frac{16}{(x^4)^2} + \frac{8}{(x^4)} + 2 \tag{3.154}$$

Görüldüğü üzere, manifoldun skaler eğriliği sabitten farklı bulunur. Manifoldun ilgili skaler fonksiyonları

$$a = \frac{6}{(x^4)^2} + \frac{2}{(x^4)}, \quad b = 2 - \frac{8}{(x^4)^2}, \quad c = (\frac{4}{(x^4)^2} - 1)tan(2\lambda) \tag{3.155}$$

ve ilgili 1-formları da

$$A_i(x) = \begin{cases} e^{(x^4)}sin(\lambda) & i = 1 \text{ ise} \\ 0 & i = 2,3 \text{ ise} \\ cos(\lambda) & i = 4 \text{ ise} \end{cases} \tag{3.156}$$

ve

$$B_i(x) = \begin{cases} e^{(x^4)}cos(\lambda) & i = 1 \text{ ise} \\ 0 & i = 2,3 \text{ ise} \\ -sin(\lambda) & i = 4 \text{ ise} \end{cases} \tag{3.157}$$

biçiminde elde edilir. Burada $\lambda$ sıfırdan farklı ve $(x^4)$ değişkenine bağlı olup

$$sin^2(\lambda) = \frac{(x^4)^2 + 2(x^4) - 6}{4(x^4) - 4} \;\; ve \;\; cos^2(\lambda) = \frac{(x^4)^2 - 2(x^4) - 2}{-4(x^4) + 4}$$

koşullarını sağlamaktadır.

Böylece, Ricci tensörünün aşağıdaki denklemleri sağladığı sonucuna ulaşılır:

1. $Ric_{11} = ag_{11} + bA_1A_1 + 2cA_1B_1$

2. $Ric_{22} = ag_{22} + bA_2A_2 + 2cA_2B_2$

3. $Ric_{33} = ag_{33} + bA_3A_3 + 2cA_3B_3$

4. $Ric_{44} = ag_{44} + bA_4A_4 + 2cA_4B_4$

Ayrıca, (1)-(4) dışında kalan durumlar da benzer şekilde sağlanmaktadır. Dolayısıyla, (2.21) denklemi ile verilen koşul her $j = 1,2,3,4$ için gerçeklenir. Dahası, $A$ ve $B$ 1-formları (2.22) numaralı denklemleri sağlamaktadır. Böylece manifoldun skaler eğriliği de

$$r = 4a + b = \frac{16}{(x^4)^2} + \frac{8}{(x^4)} + 2 \tag{3.158}$$

bağıntısını gerçekler. Sonuç olarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

**Teorem 3.12.** *$\{x^1, x^2, x^3, x^4\}$; $\mathbb{R}^4$ reel sayılar uzayının standart koordinaları olmak üzere,*

$$ds^2 = g_{ij}dx^idx^j = (e^{2x^4})(dx^1)^2 + (x^4)^4[(dx^2)^2 + (dx^3)^2] + (dx^4)^2$$

*Riemann metriği ile verilen*

$M^4 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 : \ x^4 \in (-1-\sqrt{7}, 1-\sqrt{3}) \bigcup (-1+\sqrt{7}, 1+\sqrt{3})\} \subseteq \mathbb{R}^4$

*açık alt kümesi, sabitten farklı $r = \frac{16}{(x^4)^2} + \frac{8}{(x^4)} + 2$ skaler eğriliğine sahip olan bir genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldudur.*

### 3.4 Hiper-Genelleştirilmiş Yarı Einstein Manifoldlarının Bazı Özel Sınıfları

A. A. Shaikh, C. Özgür ve A. Patra 2011 yılında, [41] numaralı çalışmada, Einstein manifoldlarının bir başka genelleştirmesi olarak hiper-genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldu kavramını tanımlamışlardır. Bu bölümde, hiper-genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun üreteçlerinin sağladığı özellikler bakımından karakterizasyonu yapılacak ve ardından hangi simetri koşulları altında bir yarı Einstein yada genelleştirilmiş yarı Einstein manifolduna indirgeneceği araştırılacaktır. Elde edilen sonuçlar [42] numaralı makalede yayınlanmıştır.

**Tanım 3.15.** *$(M^n, g)$, n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Ricci tensörü sıfırdan farklı olan ve a, b, c ve d sıfırdan farklı skaler fonksiyonlar olmak üzere*

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) =& ag(X,Y) + bA(X)A(Y) + c[A(X)B(Y) + A(Y)B(X)] \\ &+ d[A(X)D(Y) + A(Y)D(X)], \ \forall X,Y \in \chi(M) \end{aligned} \tag{3.159}$$

*koşulunu sağlayan $(M^n, g)$ manifolduna hiper-genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldu denir. Burada $\rho_1, \rho_2$ ve $\rho_3$ birim ve ikişer ikişer birbirine dik vektörler olmak üzere,*

$$g(X,\rho_1) = A(X), \quad g(X,\rho_2) = B(X), \quad g(X,\rho_3) = D(X), \ \forall X \in \chi(M) \tag{3.160}$$

*biçiminde tanımlanan A, B ve D 1-formları manifoldun ilgili 1-formları, $\rho_1, \rho_2$ ve $\rho_3$ ise manifoldun üreteçleri olarak isimlendirilir. n-boyutlu bir hiper-genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldu kısaca $(HGQE)_n$ ile gösterilir.*

- $\rho_2$ ve $\rho_3$ üreteçlerinin lineer bağımlı yada $d = 0$ olması durumunda, $(M^n, g)$ genelleştirilmiş yarı Einstein manifolduna;
- $d = c = 0$ olması durumunda, $(M^n, g)$ genelleştirilmiş yarı Einstein manifolduna;
- $d = c = b = 0$ olması durumunda ise, $(M^n, g)$ Einstein manifolduna indirgenir.

[43] numaralı makalede, hemen hemen kontakt metrik manifoldların bir alt sınıfı olan konformal düz trans-Sasakian manifoldların Ricci tensörünün (3.159) denklemindeki gibi yazılabildiği gösterilmiş ve böylece hiper-genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldların varlığına bir soyut örnek verilmiştir.

(3.159) denkleminin $X$ ve $Y$ üzerinden izi alınarak, $(HGQE)_n$ manifoldunun skaler eğriliği

$$r = an + b, \tag{3.161}$$

biçiminde bulunur. Ayrıca, (3.159) ve (3.160) denklemlerinden, bir $(HGQE)_n$ manifoldunda aşağıdaki bağıntıların gerçeklendiği görülür:

$$Ric(X,\rho_1) = (a+b)A(X) + cB(X) + dD(X), \tag{3.162}$$

$$Ric(X,\rho_2) = aB(X) + cA(X), \quad Ric(X,\rho_3) = aD(X) + dA(X), \tag{3.163}$$

$$Ric(\rho_1,\rho_1) = (a+b), \ Ric(\rho_2,\rho_2) = Ric(\rho_3,\rho_3) = a, \ Ric(\rho_1,\rho_2) = c, \ Ric(\rho_1,\rho_3) = d. \tag{3.164}$$

### 3.4.1 $(HGQE)_n$ manifoldunun geometrik özellikleri

Bu bölümde, üreteçleri paralel vektör alanı olan ve $a \neq 0$ ilgili skaler fonksiyonuna sahip olan $(HGQE)_n$ manifoldunun, geometrik özellikler incelenecektir.

**Teorem 3.13.** *$\rho_1$ üreteci paralel vektör alanı olan bir $M = (HGQE)_n$ manifoldu, ilgili skaler fonksiyonlarının toplamı sıfır olan bir yarı Einstein manifoldudur. Öte yandan, bir $(HGQE)_n$ manifoldunun $\rho_2$ ve $\rho_3$ üreteçleri paralel vektör alanları olamazlar.*

*İspat.* İlk olarak $\rho_1$ üretecinin paralel olduğu kabul edilsin. Yani

$$\nabla_X \rho_1 = 0, \;\; \forall X \in \chi(M) \tag{3.165}$$

sağlanır. Bu durumda, her $X, Y \in \chi(M)$ için $(\nabla_X A)(Y) = g(\nabla_X \rho_1, Y) = 0$ sağlanacağından $R(X,Y)\rho_1 = 0$ bulunur. Riemann eğrilik tensörü daraltılarak her $X \in \chi(M)$ için $Ric(X, \rho_1) = 0$ olur. Son eşitlik (3.162) denkleminde kullanılırsa

$$(a+b)A(X) + cB(X) + dD(X) = 0, \;\; \forall X \in \chi(M) \tag{3.166}$$

elde edilir. (3.166) denkleminde sırasıyla, $X = \rho_1$, $X = \rho_2$ ve $X = \rho_3$ olarak alınırsa, $a+b=0$, $c=0$ ve $d=0$ bulunur. Bu ise, manifoldun ilgili skaler fonksiyonlarının toplamı sıfır olan bir yarı Einstein manifoldu olduğu anlamına gelir.

Öte yandan, $\rho_2$ üretecinin paralel olduğu kabul edilirse, benzer şekilde her $X \in \chi(M)$ vektör alanı için $\nabla_X \rho_2 = 0$ ve dolayısı ile $Ric(X, \rho_2) = 0$ bulunur. Böylece son eşitlik (3.162) denkleminde kullanılarak

$$aB(X) + cA(X) = 0, \;\; \forall X \in \chi(M) \tag{3.167}$$

elde edilir. (3.167) denkleminde $X = \rho_2$ olarak alınırsa $a = 0$ bulunur, ki bu da çelişkidir. Benzer şekilde $\rho_3$ üretecinin paralel vektör alanı olması durumunda, her $X \in \chi(M)$ için $\nabla_X \rho_3 = 0$ ve dolayısıyla $Ric(X, \rho_3) = 0$ bulunur. Böylece (3.163) denklemi yardımıyla

$$aD(X) + dA(X) = 0, \;\; \forall X \in \chi(M) \tag{3.168}$$

elde edilir. Burada $X = \rho_3$ alınarak $a = 0$ bulunur, ki bu da bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

**Teorem 3.14.** *$\rho_1$ üreteci paralel vektör alanı olan bir $M = (HGQE)_n$, $(n > 3)$ manifoldu ilgili skalerleri sabit olan Ricci simetrik bir manifolddur.*

*İspat.* Teorem (3.13)'den, $\rho_1$ üreteci paralel vektör alanı olan $(HGQE)_n$ manifoldunun Ricci tensörü

$$Ric(X,Y) = a[g(X,Y) - A(X)A(Y)], \ \ \forall\, X,Y \in \chi(M) \tag{3.169}$$

formundadır. Dolayısıyla da, skaler eğrilik $r = a(n-1)$ olur. (3.169) denkleminin kovaryant türevi alınır ve $\rho_1$ üretecinin paralel olduğu kullanılırsa

$$(\nabla_Z Ric)(X,Y) = Z(a)[g(X,Y) - A(X)A(Y)] \tag{3.170}$$

bulunur. (3.170) denklemi $X$ ve $Z$ üzerinden daraltılır ve daraltılmış ikinci Bianchi özdeşliği kullanılırsa

$$\frac{1}{2}Y(r) = Y(a) - \rho_1(a)A(Y) \tag{3.171}$$

elde edilir. Burada $r = a(n-1)$ olduğu kullanılırsa

$$(\frac{n-3}{2})Y(a) = -\rho_1(a)A(Y) \tag{3.172}$$

bulunur. (3.172) denkleminde $Y = \rho_1$ olarak alınırsa, $\rho_1(a) = 0$ olur. Tekrar (3.172) denkleminde $n > 3$ olduğu kullanılırsa, her $Y \in \chi(M)$ için $Y(a) = 0$ bulunur. O halde $a$ ilgili skaleri sabittir. Bu ise (3.170) denkleminde kullanılırsa $\nabla Ric = 0$ bulunur, yani manifold Ricci simetriktir. □

Dahası, $Q$ Ricci operatörü olmak üzere, her $X,Y$ için $Ric(X,Y) = g(QX,Y)$ ve $a \neq 0$ olduğu (3.162)-(3.164) denklemlerinde kullanılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

**Sonuç 3.4.** *Her $(HGQE)_n$ manifoldunda, aşağıdakiler gerçeklenir:*

*(1) $Q\rho_1$ ve $\rho_1$ vektörlerinin ortogonal olması için gerek ve yeter koşul $a+b=0$ olmasıdır.*

*(2) $Q\rho_2$ vektörü $\rho_1$ üretecine dik ise, $c = 0$'dır. Yani manifold, üreteçleri $\rho_1$ ve $\rho_3$ olan bir genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldudur.*

*(3) $Q\rho_3$ vektörü $\rho_1$ üretecine dik ise, $d = 0$'dır. Yani manifold, üreteçleri $\rho_1$ ve $\rho_2$ olan bir genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldudur.*

*(4) $Q\rho_2$ vektörü $\rho_2$ ve $\rho_3$ üreteçlerine dik olamaz.*

*(5) $Q\rho_2$ vektörü daima $\rho_3$ üretecine diktir.*

### 3.4.2 Çeşitli pseudo-simetrik $(HGQE)_n$ manifoldları

Bu bölümde çeşitli pseudo-simetri koşulları altında $(HGQE)_n$ manifoldunun özellikleri incelenmektedir. Bu bakımdan, bu bölümde elde edilen sonuçlar, Bölüm 3.1.1'de elde edilen bazı sonuçları daha da genelleştirmektedir.

**Teorem 3.15.** *Her Ricci-pseudosimetrik $M = (HGQE)_n$ manifoldu bir $N(k)$-yarı Einstein manifoldudur ve manifoldun Deszcz-Ricci eğriliği $k = L_S = \frac{a+b}{n-1}$'dir.*

*İspat.* (3.6), (3.8), (3.9) ve (3.159) denklemleri yardımıyla Ricci-pseudosimetrik $(HGQE)_n$ manifoldunda

$$\begin{aligned}
&b[A(R(X,Y)Z)A(W)+A(Z)A(R(X,Y)W)]+c[A(R(X,Y)Z)B(W)\\
&+A(W)B(R(X,Y)Z)+A(Z)B(R(X,Y)W)+A(R(X,Y)W)B(Z)]\\
&+d[A(R(X,Y)Z)D(W)+A(W)D(R(X,Y)Z)+A(Z)D(R(X,Y)W)+A(R(X,Y)W)D(Z)]\\
&=L_S\Big[b\Big\{g(Y,Z)A(X)A(W)-g(X,Z)A(Y)A(W)+g(Y,W)A(Z)A(X)\\
&-g(X,W)A(Y)A(Z)\Big\}+c\Big\{g(Y,Z)[A(X)B(W)+A(W)B(X)]\\
&-g(X,Z)[A(Y)B(W)+A(W)B(Y)]+g(Y,W)[A(Z)B(X)+A(X)B(Z)]\\
&-g(X,W)[A(Y)B(Z)+A(Z)B(Y)]\Big\}\Big]\\
&+d\Big\{g(Y,Z)[A(X)D(W)+A(W)D(X)]-g(X,Z)[A(Y)D(W)+A(W)D(Y)]\\
&+g(Y,W)[A(Z)D(X)+A(X)D(Z)]-g(X,W)[A(Y)D(Z)+A(Z)D(Y)]\Big\}\Big]
\end{aligned} \tag{3.173}$$

denklemi gerçeklenir. (3.173) denklemi $X$ ve $W$ üzerinden daraltılır ve elde edilen denklemde $Z = \rho_1$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}
&-bRic(Y,\rho_1)+cR(\rho_1,Y,\rho_1,\rho_2)-cRic(Y,\rho_2)+dR(\rho_1,Y,\rho_1,\rho_3)-dRic(Y,\rho_3)\\
&=L_Sb(1-n)A(Y)-ncL_SB(Y)-ndL_SD(Y), \quad \forall\, Y \in \chi(M)
\end{aligned} \tag{3.174}$$

bulunur. (3.173) denkleminde sırasıyla, $Z = \rho_1$ ve $W = \rho_3$; $Z = \rho_1$ ve $W = \rho_2$; $Z = \rho_2$ ve $W = \rho_3$ olarak alınırsa aşağıdaki üç bağıntı bulunur:

$$\begin{aligned}
bR(X,Y,\rho_3,\rho_1)+cR(X,Y,\rho_3,\rho_2) &= L_Sb[D(Y)A(X)-D(X)A(Y)]\\
&+L_Sc[D(Y)B(X)-D(X)B(Y)],
\end{aligned} \tag{3.175}$$

$$\begin{aligned}
bR(X,Y,\rho_2,\rho_1)+dR(X,Y,\rho_2,\rho_3) &= L_Sb[B(Y)A(X)-B(X)A(Y)]\\
&+L_Sd[B(Y)D(X)-B(X)D(Y)],
\end{aligned} \tag{3.176}$$

$$cR(X,Y,\rho_3,\rho_1)+dR(X,Y,\rho_2,\rho_1) = L_S c[D(Y)A(X) - D(X)A(Y)] \qquad (3.177)$$
$$+L_S d[B(Y)A(X) - B(X)A(Y)].$$

(3.175) ve (3.177) denklemleri kullanılarak, $b \neq 0$ olduğundan

$$(c^2 - d^2)\Big[R(X,Y,\rho_2,\rho_1) - L_S[B(Y)A(X) - B(X)A(Y)]\Big] = 0 \qquad (3.178)$$

eşitliği bulunur. Böylece, aşağıdaki iki durum söz konusu olur:

*1. Durum:* $c^2 - d^2 = 0$ olması durumunda, $c = \mp d$ olur. Bu durumda, manifoldun üreteçlerinin birim ve birbirlerine ikişer ikişer dik vektörler olduğu kullanılırsa, $M$ üreteçleri $\rho_1$ ve $\rho_2 \mp \rho_3$ olan bir $G(QE)_n$ manifoldu olur.

*2. Durum:* $c^2 - d^2 \neq 0$ olduğu kabul edilirse, (3.178) denkleminden,

$$R(X,Y,\rho_2,\rho_1) = L_S[B(Y)A(X) - B(X)A(Y)], \quad \forall\, X,Y \in \chi(M) \qquad (3.179)$$

bağıntısı elde edilir. Benzer şekilde, (3.179) denklemi, (3.176) denkleminde kullanılırsa $d = 0$ (bu durumda yine manifold bir $G(QE)_n$ manifolduna indirgenir) veya

$$R(X,Y,\rho_2,\rho_3) = L_S[B(Y)D(X) - B(X)D(Y)], \quad \forall\, X,Y \in \chi(M) \qquad (3.180)$$

bağıntısı elde edilir. Son olarak, (3.180) denklemi, (3.175) denkleminde kullanılırsa ($b \neq 0$ olduğundan)

$$R(X,Y,\rho_3,\rho_1) = L_S[D(Y)A(X) - D(X)A(Y)], \quad \forall\, X,Y \in \chi(M) \qquad (3.181)$$

bağıntısı bulunur. (3.162),(3.163) ve (3.179)-(3.181) denklemleri, (3.174) denkleminde kullanılır ve sırasıyla, $Y = \rho_i,\ i = 1,2,3$ olarak alınırsa, her durumda $c = 0$ veya $d = 0$ bulunur.

Sonuç olarak, ortaya çıkan her durumda manifold bir $G(QE)_n$ manifolduna indirgenmiş olur. Bu durum ise, Teorem 3.1'de kullanılırsa, manifoldun $k = L_S = \frac{a+b}{n-1}$ olmak üzere bir $N(k)$-yarı Einstein manifoldu olduğu sonucuna ulaşılır. □

Teorem 3.15'de $L_S = 0$ olarak alınırsa, doğrudan aşağıdaki sonuç elde edilir:

**Sonuç 3.5.** *Her Ricci semisimetrik $(HGQE)_n$ manifoldu, Ricci tensörü*

$$Ric(X,Y) = a[g(X,Y) - A(X)A(Y)]$$

*formunda olan bir yarı Einstein manifoldudur.*

Deszcz [28] numaralı çalışmasında, Ricci-pseudosimetrik manifoldları genelleştirerek, farklı bir simetri kavramı tanımlamıştır:

**Tanım 3.16.** *[28] $(M^n,g)$, $(n \geq 3)$ Riemann manifoldunun her noktasında $R \cdot R$ ve $Q(S,R)$ tensörleri lineer bağımlı ise $(M^n,g)$ manifolduna Ricci-genelleştirilmiş pseudosimetriktir denir.*

O halde, bir $(M^n,g)$, $(n \geq 3)$ manifoldunun Ricci-genelleştirilmiş pseudosimetrik olması için gerek ve yeter koşul manifoldun her noktasında

$$R \cdot R = L_R Q(Ric,R) \tag{3.182}$$

koşulunu sağlayan bir $L_R$ fonksiyonunun varolmasıdır. Ricci-genelleştirilmiş pseudosimetrik manifoldlarının önemli bir alt sınıfı,

$$R \cdot R = Q(Ric,R). \tag{3.183}$$

denklemini (yani $L_R = 1$ durumu) sağlayan *özel Ricci-genelleştirilmiş pseudosimetrik* manifoldlardır, [44]. Deszcz ve Grycak, bu tip manifoldlar ile ilgili aşağıdaki karakterizasyon teoremini elde etmişlerdir:

**Teorem 3.16.** *( [45]-Teorem 1) Bir $(M^n,g)$ manifoldunun, bir $x \in M$ noktasında, sıfırdan farklı $\omega$ 1-formu için*

$$\omega(X)R(Y,Z) + \omega(Y)R(Z,X) + \omega(Z)R(X,Y) = 0, \tag{3.184}$$

*koşulu sağlanıyorsa, $x \in M$ noktasında* (3.183) *denklemi sağlanır.*

Bu teoremin verdiği motivasyon ile, şimdi aşağıdaki teorem ispatlanacaktır:

**Teorem 3.17.** *$\Xi$ dairesel toplam ve $\omega$ sıfırdan farklı bir 1-form olmak üzere, $(M^n,g)$, $(n > 2)$ manifoldu, her $X,Y,Z \in \chi(M)$ için,*

$$\Xi_{X,Y,Z}\,\omega(X)R(Y,Z) = 0, \tag{3.185}$$

*koşulunu sağlayan bir $(HGQE)_n$ manifoldu olsun. Bu durumda, aşağıdakiler gerçeklenir:*

*(1) Eğer $\omega = A$ ise, $(M^n,g)$ manifoldu $a$, ilgili skaler fonksiyon olmak üzere, bir $N(a)$-yarı Einstein manifoldudur.*

*(2) Eğer $\omega = B$ veya $D$ ise, $(M^n, g)$ bir $G(QE)_n$ manifoldudur.*

*İspat.* İlk olarak, $M$ manifoldunun (3.185) dairesel toplamını sağlayan bir $(HGQE)_n$ manifoldu olduğu kabul edilsin.

**1. Durum:** Eğer $\omega = A$ ise, (3.185) dairesel toplamı, her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için aşağıdaki gibidir:

$$A(X)R(Y,Z)W + A(Y)R(Z,X)W + A(Z)R(X,Y)W = 0. \tag{3.186}$$

(3.186) denklemi $Z$ ve $W$ üzerinden daraltılırsa

$$A(X)Ric(Y,Z) + R(\rho_1, Y, X, Z) - A(Z)Ric(Y,X) = 0. \tag{3.187}$$

bulunur. (3.187) denklemi ise $X$ ve $Y$ üzerinden tekrar daraltılırsa

$$2Ric(\rho_1, Z) - rA(Z) = 0, \quad \forall\, Z \in \chi(M) \tag{3.188}$$

elde edilir. (3.161) ve (3.162) denklemleri, (3.188) denkleminde kullanılırsa aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$[(2-n)a + b]A(Z) + 2cB(Z) + 2dB(Z) = 0, \quad \forall\, Z \in \chi(M) \tag{3.189}$$

(3.189) denkleminde sırasıyla, $Z = \rho_i$, $i = 1,2,3$ olarak alınırsa, $b = (n-2)a$, $c = 0$ ve $d = 0$ bulunur. Böylece $M$'nin Ricci tensörü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Ric(X,Y) = a[g(X,Y) + (n-2)A(X)A(Y)], \quad \forall\, X, Y \in \chi(M). \tag{3.190}$$

$n = boyM > 2$ olduğundan, (3.190) denkleminden $(M^n, g)$ bir $(QE)_n$ manifoldudur. Ayrıca (3.190) denklemi (3.187) denkleminde kullanılırsa

$$R(X,Y)\rho_1 = a[A(Y)X - A(X)Y], \quad \forall\, X, Y \in \chi(M) \tag{3.191}$$

bulunur, ki bu da $\rho_1$ üretecinin $a$-null dağılımına ait olduğunu gösterir. Böylece, $(M^n, g)$, $k = \frac{a+b}{n-1} = a$ olmak üzere bir $N(k)$-yarı Einstein manifoldudur.

**2. ve 3. Durum:** $\omega$ 1-formunun $(HGQE)_n$ manifoldunun $B$ (veya $D$) ilgili 1-formu olduğu kabul edilirse, 1. Duruma benzer şekilde hesap yapıldığında $c = 0$ (veya $d = 0$) ve $b = a(2-n)$ bulunur ve böylece manifoldun Ricci tensörü

$$Ric(X,Y) = ag(X,Y) + a(2-n)A(X)A(Y) + d[A(X)\omega(Y) + A(Y)\omega(X)], \; \forall\, X, Y \in \chi(M) \tag{3.192}$$

şeklinde yazılır. Bu ise manifoldun bir $G(QE)_n$ manifoldu olduğu anlamına gelir. □

Teorem 3.16 ve Teorem 3.17 yardımıyla, aşağıdaki sonuç doğrudan elde edilir:

**Sonuç 3.6.** *$M = (HGQE)_n$ ($n > 2$) manifoldu, $\Xi$ dairesel toplam ve $\omega$ manifoldun ilgili 1-formlarından herhangi biri olmak üzere, her $X,Y,Z \in \chi(M)$ için*

$$\Xi_{X,Y,Z}\omega(X)R(Y,Z) = 0, \tag{3.193}$$

*koşulunu sağlıyor ise, $(M^n, g)$ özel Ricci-genelleştirilmiş pseudosimetriktir.*

# 4. GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI EINSTEIN ÇARPIM MANİFOLDLARI

Bu bölümde, genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldu üzerindeki katlı çarpım metrik yapısı araştırılacaktır. Katlı çarpım manifoldları ile ilgili bu bölümde ifade edilen tüm temel tanım ve teoremler için $[1,14]$ numaralı kitaplardan yararlanılmıştır.

*Notasyon:* Bu bölümde, $M \times_f N$ katlı çarpım manifolduna ait tüm objeler "tilda" sembolü ile ve $N$ lif manifolduna ait tüm objeler ise "bar" sembolü ile gösterilecektir. $M$ taban manifolduna ait objeler ise işaretsiz temsil edilecektir.

## 4.1 Katlı Çarpım Manifoldları

Katlı çarpım manifoldları, ilk kez 1969 yılında Bishop ve O'Neill [14] tarafından tanımlanmış ve daha sonra da hem geometrik hem de fiziksel açıdan birçok kişi tarafından çalışılmıştır. Örneğin, $B$ üreteç eğrisi, $F$ birim çember ve $f(b)$ dönme eksenine uzaklık olmak üzere dönme eksenini kesmeyen dönel yüzeyler, $B \times_f F$ katlı çarpım manifolduna izometriktir. Küre ve $\mathbb{R}^n - \{0\}$ lokal olarak katlı çarpım manifoldlarıdır. Yine iyi bilinen Robertson-Walker, Schwarzchild, Reissner-Nordström-de Sitter uzay-zamanları da katlı çarpım manifoldlarıdır. Dolayısıyla, katlı çarpım manifoldları geometride olduğu kadar Genel Görelilik Teorisinde de oldukça önemli bir yer tutar.

**Tanım 4.1.** *[1, 14] $(M,g)$ and $(N,\bar{g})$ (boy$M = q$, boy$N = n-q$; $1 \leq q < n$) sırasıyla $\{\phi, x^{\alpha}\}$ ve $\{\psi, y^{\alpha}\}$ harita sistemleri ile örtülü iki Riemann manifoldu ve $f$, $M$ manifoldu üzerinde bir pozitif $C^{\infty}$-fonksiyon olsun. $(M,g)$ ve $(N,\bar{g})$ manifoldlarının katlı çarpımı, $\tilde{g} = g \times_f \bar{g}$ metriği ile tanımlanan çarpım manifoldudur.*

Burada, $\pi_i$ $(1 \leq i \leq 2)$'ler, $M \times N$'den sırasıyla $M$ ve $N$'e doğal izdüşüm fonksiyonları olmak üzere, $\tilde{g}$ katlı çarpım metriği,

$$g \times_f \bar{g} = \pi_1^* g + (f \circ \pi_1)^2 \pi_2^* \bar{g} \tag{4.1}$$

şeklindedir. O halde her $x, y \in T_{(p,q)}(M \times_f N)$ vektörleri için

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x,y) =&\pi_1^*(g(x,y)) + (f \circ \pi_1)^2 \sigma^*(\bar{g}(x,y))\\ =&g(d\pi_1(x), d\pi_1(y)) + (f \circ \pi_1)^2 \bar{g}(d\sigma(x), d\sigma(y))\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Bir $M \times_f N$ katlı çarpım manifoldunda, $(M, g)$'e taban manifoldu, $(N, \bar{g})$'e lif manifoldu ve $f$ fonksiyonuna da çarpım fonksiyonu adı verilir. Çarpım fonksiyonu sabit olan katlı çarpım manifolduna ise Riemann çarpımı adı verilir.

$\{\phi \times \psi : x^1, \cdots, x^q, x^{q+1} = y^1, \cdots, x^n = y^{n-q}\}$ topluluğu, $M \times_f N$ katlı çarpım manifoldu için bir harita olsun. Bu durumda $\tilde{g} = g \times_f \bar{g}$ çarpım metriğinin lokal bileşenleri, her $a, b, c \cdots \in \{1, \cdots, q\}$, $\alpha, \beta, \gamma \cdots \in \{q+1, \cdots, n\}$ ve $i, j, k \cdots \in \{1, \cdots, n\}$ için, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\tilde{g}_{ij} = \begin{cases} g_{ab} & , i = a,\ j = b \text{ ise} \\ f\bar{g}_{\alpha\beta} & , i = \alpha,\ j = \beta \text{ ise} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{4.2}$$

(4.2) denklemi ile verilen katlı çarpım metriğine ait Christoffel sembollerinin tüm bileşenleri aşağıdaki biçiminde elde edilmektedir:

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}^a_{bc} = \Gamma^a_{bc}, & \tilde{\Gamma}^a_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g^{ab} f_b \bar{g}_{\alpha\beta}, & \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \\ \tilde{\Gamma}^\alpha_{a\beta} = \frac{1}{2f} f_a \delta^\alpha_\beta, & \tilde{\Gamma}^a_{\alpha b} = \tilde{\Gamma}^\alpha_{ab} = 0, & f_a = \frac{\partial f}{\partial x^a} \end{cases} \tag{4.3}$$

Bu durumda, $(M \times_f N, g)$ katlı çarpım manifoldunun Riemann eğrilik tensörünün ve Ricci tensörünün sıfırdan farklı lokal bileşenleri sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\tilde{R}_{abcd} = R_{abcd}, \quad \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = f\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{\Delta_1 f}{4} \bar{G}_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad \tilde{R}_{\alpha ab\beta} = -\frac{1}{2} T_{ab} \bar{g}_{\alpha\beta} \tag{4.4}$$

$$\tilde{Ric}_{ab} = Ric_{ab} - \frac{n-q}{2f} T_{ab}, \quad \tilde{Ric}_{\alpha\beta} = \bar{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\left[tr(T) + (n-q-1)\frac{\Delta_1 f}{2f}\right] \bar{g}_{\alpha\beta} \tag{4.5}$$

(4.4) ve (4.5) denklemlerindeki $T$ tensörü

$$T_{ab} = \nabla_b f_a - \frac{1}{2f} f_a f_b, \quad T_{\alpha\beta} = T_{\alpha a} = 0, \quad trace(T) = g^{ab} T_{ab} \tag{4.6}$$

biçiminde tanımlanan $(0,2)$-tipinde simetrik tensör alanı ve

$$\Delta_1 f = g^{ab} f_a f_b, \quad \bar{G}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \bar{g}_{\alpha\delta}\bar{g}_{\beta\gamma} - \bar{g}_{\alpha\gamma}\bar{g}_{\beta\delta} \tag{4.7}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Dahası $M \times_f N$ katlı çarpım manifoldunun skaler eğrilik tensörü de aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{r} = r + \frac{\bar{r}}{f^2} - \frac{n-q}{f}\Big[trace(T) + (n-q-1)\frac{\Delta_1 f}{4f}\Big] \tag{4.8}$$

Bu bölümün devamında, daha sonraki bölümlerde yapılacak hesaplar için gerekli olan, bir katlı çarpım manifoldunun Christoffel sembollerinin, Riemann eğrilik tensörünün ve Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenlerini global formda ifade eden bazı yardımcı teoremlere yer verilecektir:

**Yardımcı Teorem 4.1.** *[1] $M \times_f N$ katlı çarpım manifoldunda, $\nabla f = gradient(f)$ olmak üzere, her $X, Y \in \chi(M)$ ve $V, W \in \chi(N)$ vektör alanları için, Levi-Civita konneksiyonunun bileşenleri aşağıdaki gibidir:*

*(1)* $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$,

*(2)* $\tilde{\nabla}_X V = \tilde{\nabla}_V X = (\frac{Xf}{f})V$,

*(3)* $\tilde{\nabla}_V W = -f\bar{g}(V,W)\nabla f + \bar{\nabla}_V W$.

Dolayısıyla, yukarıdaki yardımcı teoremden, $X \in \chi(M)$ ve $V \in \chi(N)$ birim vektör alanları için, $M \times_f N$ katlı çarpım manifoldunun kesitsel eğriliği aşağıdaki gibi elde edilir:

$$K(X \wedge V) = g(\nabla_V \nabla_X X - \nabla_X \nabla_V X, V) = \frac{1}{f}\Big[(\nabla_X X)f - X^2 f\Big]. \tag{4.9}$$

$\{e_1, \ldots, e_{n_1}\}$'ler $M$ taban manifolduna ve $\{e_{n_1+1}, \ldots, e_n\}$'ler $N$ lif manifolduna teğet olmak üzere, bir $\{e_1, \ldots, e_n\}$ lokal ortonormal çatısı seçilirse, her bir $s = n_1 + 1, \cdots, n$ için aşağıdaki bağıntı elde edilir [1]:

$$\frac{\Delta f}{f} = \sum_{j=1}^{n} K(e_j \wedge e_s) \tag{4.10}$$

**Yardımcı Teorem 4.2.** *[1] $M \times_f N$ katlı çarpım manifoldunda, $Hessf = Hessian(f)$ olmak üzere, her $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $U, V, W \in \chi(N)$ vektör alanları için, Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri aşağıdaki gibidir:*

*(1)* $\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z$,

*(2)* $\tilde{R}(V,X)Y = -(\frac{Hessf(X,Y)}{f})V$,

*(3)* $\tilde{R}(X,Y)V = \tilde{R}(V,W)X = 0$*,*

*(4)* $\tilde{R}(X,W)V = -(\frac{\tilde{g}(V,W)}{f})\tilde{\nabla}_X grad f$*,*

*(5)* $\tilde{R}(V,W)U = \bar{R}(V,W)U - \frac{||grad f||^2}{f^2}[\tilde{g}(W,U)V - \tilde{g}(V,U)W]$*.*

**Yardımcı Teorem 4.3.** *[1]* $M \times_f N$ *(*$boyM = m, boyN = d$*) katlı çarpım manifoldunda,* $\Delta f = Laplacian(f)$ *olmak üzere, her* $X,Y \in \chi(M)$ *ve* $V,W \in \chi(N)$ *vektör alanları için, Ricci tensörünün bileşenleri aşağıdaki gibidir:*

*(1)* $\tilde{Ric}(X,Y) = Ric(X,Y) - \frac{d}{f} Hess f(X,Y)$*,*

*(2)* $\tilde{Ric}(X,V) = 0$*,*

*(3)* $\tilde{Ric}(V,W) = \bar{Ric}(V,W) - \left[\frac{\Delta f}{f} + (d-1)\frac{||grad f||^2}{f^2}\right]\tilde{g}(V,W)$*.*

**Yardımcı Teorem 4.4.** *[1]* $M \times_f N$ *(*$boyM = m, boyN = d$*) katlı çarpım manifoldunda, her* $X,Y,Z \in \chi(M)$ *ve* $U,V,W \in \chi(N)$ *vektör alanları için,* $\tilde{r}, \bar{r}$ *ve* $r$ *skaler eğrilikleri aşağıdaki bağıntıyı gerçekler:*

$$\tilde{r} = r + \frac{\bar{r}}{f^2} - 2d\frac{\Delta f}{f} - d(d-1)\frac{||grad f||^2}{f^2} \tag{4.11}$$

### 4.1.1 Konformal düz Ricci semisimetrik $G(QE)_n$

Bu bölümde, konformal düz Ricci semisimetrik genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldları üzerinde çalışılmaktadır.

**Tanım 4.2.** *Eğer* $(M^n, g)$ *manifoldunun,* (3.45) *denklemi ile verilen C konformal eğrilik tensörü özdeş olarak sıfır ise,* $(M^n, g)$*'e konformal düz manifold denir. C konformal eğrilik tensörünün diverjansı ise*

$$\begin{aligned} divC(X,Y)Z = & \frac{(n-3)}{(n-2)}[(\nabla_X Ric)(Y,Z) - (\nabla_Z Ric)(Y,X)] \\ & - \frac{(n-3)}{2(n-1)(n-2)}[dr(X)g(Y,Z) - dr(Z)g(Y,X)] \end{aligned} \tag{4.12}$$

*biçimindedir. Eğer* $divC = 0$ *ise* $(M^n, g)$ *manifolduna konformal korunumludur denir.*

Dolayısı ile her konformal düz manifold, konformal korunumludur. Bir $(M^n, g)$ manifoldunda $divC = 0$ olması, yani manifoldun konformal korunumlu olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki denklemin sağlanmasıdır, [46]:

$$(\nabla_X Ric)(Y,Z) - (\nabla_Z Ric)(Y,X) = \frac{1}{2(n-1)}[dr(X)g(Y,Z) - dr(Z)g(Y,X)] \tag{4.13}$$

**Teorem 4.1.** *$(M^n,g)$, $(n>3)$ manifoldu, konformal düz Ricci semisimetrik bir $G(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenmektedir:*

*(i) Manifoldun $U$ üreteci birim has konsörkılır vektör alanıdır ve $U$'nun integral eğrileri jeodeziklerden ibarettir.*

*(ii) $(M^n,g)$ manifoldu Kagan anlamında bir alt projektif uzaydır.*

*(iii) $(M^n,g)$ manifoldu eş uzaklıklı (equidistant) manifolddur.*

*İspat.* Teorem 3.2'den, Ricci semisimetrik bir $G(QE)_n$ manifoldunun Ricci tensörü aşağıdaki formda elde edilmiştir:

$$Ric(X,Y)=a[g(X,Y)-A(X)A(Y)],\quad \forall\, X,Y\in\chi(M) \tag{4.14}$$

(4.14) denklemi $X$ ve $Y$ üzerinde daraltılırsa, skaler eğrilik fonksiyonu

$$r=(n-1)a \tag{4.15}$$

ve türevi

$$dr(X)=(n-1)da(X),\quad \forall\, X\in\chi(M) \tag{4.16}$$

biçiminde bulunur. (4.14) denkleminin $Z\in TM$'ye göre kovaryant türevi, aşağıdaki gibidir:

$$(\nabla_Z Ric)(X,Y)=da(Z)[g(X,Y)-A(X)A(Y)]-a[(\nabla_Z A)(X)A(Y)+A(X)(\nabla_Z A)(Y)] \tag{4.17}$$

(4.17) ve (4.13) denklemleri kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(n-1)}[g(X,Y)dr(Z)-g(X,Z)dr(Y)]&=da(Z)g(X,Y)-da(Y)g(X,Z)\\&\quad-da(Z)A(X)A(Y)+da(Y)A(X)A(Z)\\&\quad+a[(\nabla_Y A)(X)A(Z)+A(X)(\nabla_Y A)(Z)]\\&\quad-a[(\nabla_Z A)(X)A(Y)+A(X)(\nabla_Z A)(Y)]\end{aligned} \tag{4.18}$$

(4.16) denklemi yardımıyla (4.18) denkleminden

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[g(X,Y)da(Z)-g(X,Z)da(Y)]&=da(Z)g(X,Y)-da(Y)g(X,Z)\\&\quad-da(Z)A(X)A(Y)+da(Y)A(X)A(Z)\\&\quad+a[(\nabla_Y A)(X)A(Z)+A(X)(\nabla_Y A)(Z)]\\&\quad-a[(\nabla_Z A)(X)A(Y)+A(X)(\nabla_Z A)(Y)]\end{aligned} \tag{4.19}$$

bulunur. (4.19) denklemi $X$ ve $Y$ üzerinde daraltılırsa

$$\left(\frac{n-3}{2}\right)da(Z) = -da(U)A(Z) - a.div(A)A(Z) - a(\nabla_U A)(Z) \tag{4.20}$$

denklemi bulunur. (4.19) denkleminde $X = U$ alınırsa

$$\frac{1}{2}[A(Y)da(Z) - A(Z)da(Y)] = a[(\nabla_Y A)(Z) - (\nabla_Z A)(Y)] \tag{4.21}$$

bulunur. (4.20) denkleminde $Z = U$ alınırsa

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)da(U) = -a.div(A) \tag{4.22}$$

bulunur. (4.22) denklemi yardımıyla, (4.20) denkleminden

$$a(\nabla_U A)(Z) = \left(\frac{n-3}{2}\right)[da(U)A(Z) - da(Z)] \tag{4.23}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (4.19) denkleminde $Y = U$ alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[A(X)da(Z) - g(X,Z)da(U)] = &- da(U)g(X,Z) + da(U)A(X)A(Z) \\ &+ a[(\nabla_U A)(X)A(Z) + A(X)(\nabla_U A)(Z) - (\nabla_Z A)(X)]\end{aligned} \tag{4.24}$$

bulunur. (4.24) denkleminde $X = U$ alınırsa

$$\frac{1}{2}[da(Z) - da(U)A(Z)] = a(\nabla_U A)(Z) \tag{4.25}$$

elde edilir. (4.23) ve (4.25) denklemlerinden, $a$ skaler fonksiyonunun

$$da(Z) = da(U)A(Z) \tag{4.26}$$

ve dolayısıyla $r$ skaler eğrilik fonksiyonunun

$$dr(Z) = (n-1)da(U)A(Z) \tag{4.27}$$

eşitliklerini sağladığı görülür. Şimdi $\phi := da(U)$ olarak alınırsa, (4.26) denklemi

$$da(Z) = \phi A(Z), \quad \forall\, Z \in \chi(M) \tag{4.28}$$

biçiminde yazılabilir. (4.27) denklemi kullanılarak, (4.21)'den

$$a\Big[(\nabla_Y A)(Z) - (\nabla_Z A)(Y)\Big] = 0 \tag{4.29}$$

bulunur. Bu durumda, $a \neq 0$ olduğundan

$$(\nabla_Y A)(Z) = (\nabla_Z A)(Y), \quad \forall\, Y,Z \in \chi(M) \tag{4.30}$$

elde edilir. Bu ise, $A$ 1-formunun kapalı olduğunu anlamına gelir. (4.24), (4.28) ve (4.30) denklemleri aracılığıyla, $A$ 1-formunun

$$(\nabla_Z A)(X) = \frac{-\phi}{2a}[g(X,Z) - A(X)A(Z)], \quad \forall\, X,Z \in \chi(M) \tag{4.31}$$

bağıntısını sağladığı sonucuna varılır. Burada, $f = \frac{-\phi}{2a}$ ve $\omega(Z) = -fA(Z)$ olarak tanımlansın. Bu durumda, $A$ kapalı 1-form olduğundan $\omega$ da kapalıdır. Dolayısıyla, (4.31) denklemi

$$(\nabla_Z A)(X) = fg(X,Z) + \omega(Z)A(X), \quad \forall\, X,Z \in \chi(M) \tag{4.32}$$

biçiminde yazılabilir. Böylece, $U$ üretecinin birim has konsörkılır vektor alanı olduğu sonucuna ulaşılır. (4.31) denkleminde $Z = U$ olarak alınırsa, her $X \in \chi(M)$ için $(\nabla_U A)(X) = g(X, \nabla_U U) = 0$ ve dolayısıyla $\nabla_U U = 0$ olarak bulunur. Bu ise, $U$ üretecinin integral eğrilerinin jeodezikler olduğunu gösterir. Böylece $(i)$ ispatlanmış olur.

T. Adati tarafından, [47] nolu çalışmada, bir konformal düz $(M^n, g)$ Riemann manifoldu konsörkılır vektör alanına sahip ise bu manifoldun Kagan anlamında bir alt projektif manifold olduğu kanıtlanmıştır. Ayırca, konsörkılır vektör alanına sahip olan Riemann manifolduna eş uzaklıklı (equidistant) manifold adı verilir, (bknz. [35, 48]). Böylece ispat sona erer.

□

**Teorem 4.2.** *$M = G(QE)_n$ manifoldunun, ilgili skaler fonksiyonları $a+b > 0$ koşulu sağlıyor ve $U$ üreteci, ilgili $\rho$ fonksiyonu sabit olan birim konsörkılır vektör alanı ise, $M$ bir $N(\rho^2)$-yarı Einstein manifoldudur.*

*İspat.* Teoremin hipotezinden dolayı, $M = G(QE)_n$ manifoldunun, $U$ üretecinin dual 1-formunun kovaryant türevi, $\rho$ =sabit olmak üzere

$$(\nabla_X A)(Y) = \rho[g(X,Y) - A(X)A(Y)], \quad \forall\, X,Y \in \chi(M) \tag{4.33}$$

denklemini sağlar. (4.33) denkleminin kovaryant türevi alınırsa,

$$(\nabla_Z \nabla_X A)(Y) = -\rho[(\nabla_Z A)(X)A(Y) + A(X)(\nabla_Z A)(Y)] \tag{4.34}$$

elde edilir. (4.33) denklemi ve $A$ 1-formu için Ricci özdeşliği kullanılırsa,

$$A(R(Z,X)Y) = R(Z,X,Y,U) = -\rho^2[A(X)g(Z,Y) - A(Z)g(X,Y)], \quad \forall\, X,Y,Z \in \chi(M) \tag{4.35}$$

bulunur. (4.35) denklemi $X$ ve $Y$ üzerinde daraltılırsa,

$$Ric(Z,U) = \rho^2(n-1)A(Z), \quad \forall\, Z \in \chi(M) \tag{4.36}$$

elde edilir. (4.13) ve (4.36) denklemlerinden

$$\rho^2(n-1)A(Z) = (a+b)A(Z) + cB(Z), \quad \forall\, Z \in \chi(M) \tag{4.37}$$

elde edilir. Burada sırasıyla, $Z = V$ ve $Z = U$ alınır ve $U$ ile $V$ üreteçlerinin ortonormal oldukları kullanılırsa, $c = 0$ ve $a+b = (n-1)\rho^2$ bulunur. Bu durumda manifold bir yarı Einstein manifolduna indirgenir. Öte yandan, $\forall\, X,Y,Z \in \chi(M)$ için (4.35) denklemi sağlandığından, $U$ üreteci $k = \frac{a+b}{n-1} = \rho^2$-null dağılımına aittir. Böylece $M$ manifoldunun bir $N(\rho^2)$-yarı Einstein manifoldu olduğu sonucuna ulaşılmış olur. □

Ayrıca, K. Yano [40] numaralı çalışmasında aşağıdaki teoremi elde etmiştir:

**Teorem 4.3.** *Bir Riemann manifoldunun konsörkılır vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter koşul $q = q(x^1)$ sabitten farklı ve yalnızca $x^1$'in bir fonksiyonu, $g^*_{\alpha\beta} = g^*_{\alpha\beta}(x^\gamma)$ yalnızca $x^\gamma$'nın fonksiyonları ve $(\alpha,\beta,\gamma,\delta = 2,3,\ldots,n)$ olmak üzere, temel kuadratik form*

$$ds^2 = (dx^1)^2 + e^q g^*_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{4.38}$$

*biçiminde olacak şekilde bir koordinant sisteminin varolmasıdır.*

Öte yandan, A. Gebarowski [49] nolu çalışmasında, $I \times_f M^*$ katlı çarpım manifoldunun (4.13) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşulun $M^*$'ın bir Einstein manifoldu olduğunu ispatlamıştır. Bu durumda, aşağıdaki teorem elde edilmiş olur:

**Teorem 4.4.** *Konformal düz Ricci semisimetrik bir $G(QE)_n$, $(n > 3)$ manifoldu, $M^*$ $(n-1)$-boyutlu bir Einstein manifoldu olmak üzere, lokal olarak $I \times_{e^{q/2}} M^*$ biçiminde bir katlı çarpım manifoldudur.*

Şimdi, Teorem 4.4'de elde edilen $n$-boyutlu $(n > 3)$ bir $I \times_{e^{q/2}} M^*$ katlı çarpım manifoldu üzerinde jeodezik denklemlerinin analizi yapılacaktır.

$\lambda$ bir afin parametre ve $\tilde{\Gamma}$ katlı çarpım manifolduna ait Christoffel sembolleri olmak üzere, katlı çarpım manifoldu üzerindeki jeodezik denklemleri

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \tilde{\Gamma}^i_{jk}\frac{dx^j}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda} = 0 \tag{4.39}$$

biçimindedir. $\tilde{\Gamma}$, (4.3) denklemindeki bileşenlere sahip olduğundan, (4.39) denklemi ile verilen jeodezik denklemleri, yalnızca $x^1$ koordinantına sahip olan bir boyutlu $I$ aralığı ile $(n-1)-$boyutlu $M^*$ manifoldu üzerinde aşağıdaki gibi iki parçaya ayrılabilir:

$$\frac{d^2x^1}{d\lambda^2} - \frac{1}{2}q'[1-(\frac{dx^1}{d\lambda})^2] = 0 \tag{4.40}$$

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = -q'\frac{dl}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda}; \quad (\mu = 2,3,\ldots,n) \tag{4.41}$$

Görüldüğü gibi, (4.40) denklemi ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemdir ve $q' = q'(x^1)$ fonksiyonu verildiği takdirde çözülebilir.

$\gamma = \frac{dx^1}{d\lambda}$ şeklinde yeni bir değişken tanımlanarak, (4.40) denklemi aşağıdaki gibi otonom sistem olarak yazılabilir:

$$\begin{cases} \frac{dx^1}{d\lambda} = \gamma \\ \\ \frac{d\gamma}{d\lambda} = \frac{q'}{2}(1-\gamma^2) \end{cases} \tag{4.42}$$

Dinamik sistemlerin denge noktalarının ve onların kararlılık özelliklerinin incelenmesi, diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunmasında önemli rol oynamaktadır. (4.42) sisteminin denge noktaları $\frac{q'}{2}(1-\gamma^2) = 0$ ve $\gamma = 0$ eşitliklerini sağlayan noktalardır. Eğer en az bir $x_0$ noktasında $q'(x^1) = 0$ olduğu kabul edilirse, bu sistemin tek denge noktası $(x_0, 0)$ olur.

(4.42) sistemini lineerleştirmek için, $(x_0, 0)$ denge noktasında Jacobian matrsinin özdeğerlerinin karakterleri incelenmelidir:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x_0}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{q''(x_0)}{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.43}$$

Yukarıdaki matrisin determinantı ve izi sırasıyla, $\delta = detJ(x_0, 0) = \frac{-q''(x_0)}{2}$ ve $\tau = traceJ(x_0, 0) = 0$ biçiminde bulunur. Bu durumda aşağıdaki durumlar söz konusu olacaktır:

**1. Durum:** Eğer $q''(x_0) > 0$ ise, bu durumda $\delta < 0$'dır ve bu durumda denge noktası *eğer noktası* olur. Bu ise denge noktasındaki çözümün kararsız olduğu anlamına gelir. Ayrıca, [50] numaralı çalışmada, bu durumun denge noktası civarındaki bir parçacığın hiperyüzeyden exponansiyel olarak uzaklaşması anlamına geldiği gösterilmiştir. Yine aynı çalışmaya göre, bu durumu gerçekleyen çarpım fonksiyonunun, $q(x^1) = -ln(coshx^1)$ biçiminde olduğu gösterilmiştir. Bu durumda, (4.40) denklemi aşağıdaki ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denkleme dönüşür:

$$\frac{d^2x^1}{d\lambda^2} + \frac{1}{2}tanh(x^1)[1-(\frac{dx^1}{d\lambda})^2] = 0 \tag{4.44}$$

Burada $w(x^1) = (\frac{dx^1}{d\lambda})^2$ dönüşümü yapılırsa, (4.44) denklemi

$$w' - tanh(x^1)w = -tanh(x^1) \tag{4.45}$$

şeklinde birinci mertebe lineer denklemine dönüşür ve çözümü, $c_1 \in \mathbb{R}$ integrasyon sabiti olmak üzere $w = c_1 cosh(x^1) + 1$ biçiminde bulunur. Dolayısıyla $I$ aralığı üzerindeki jeodeziklerin denklemi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\frac{dx^1}{d\lambda} = \sqrt{c_1 cosh(x^1) + 1}. \tag{4.46}$$

**2. Durum:** Eğer $q''(x_0) < 0$ ise, $\delta > 0$ olur ve $\tau = 0$ olduğundan denge noktası *merkezdir*. Bu durumda, denge noktası civarındaki çözümler çemberin topolojisine sahiptir ve faz portleri $x^1 = x_0$ hiperyüzeyi civarında, salınım yapan parçacığın hareketini tasvir eden kapalı eğrilerden oluşmaktadır. Bu tip parçacığı sınırlandıran merkez denge noktalarının varlığı, neredeyse tümden jeodezik hiperyüzeylerin varlığını göstermektedir, [50].

**3. Durum:** Eğer $q''(x_0) = 0$ ise, $\delta = \tau = 0$ olur. Bu durumda $J(x_0, 0)$ Jacobian matrisinin her iki özdeğeri de sıfır olacağından, bu durum dejenere durumdur. Dolayısıyla bu durum ihmal edilmekttedir.

**4. Durum:** Eğer $q(x^1)$ sabit ise her $x^1$ için $q'(x^1) = 0$ olur. Bu durumda, $q = 0$ doğrusu boyunca sonsuz tane denge noktası varolur ve bu doğru civarındaki pertürbasyonlar kararlıdır. Bu ise, herhangi $x^1 = sabit$ hiperyüzeyinde bulunan parçacığın hiperyüzey boyunca sabit kaldığı anlamına gelir, [50].

**5. Durum:** Son olarak, eğer sistemin denge noktası yoksa, yani daima $q(x^1) \neq 0$ ise (çarpım fonksiyonunun hiç dönüm noktası yoksa), bu durum $q = ln(\frac{\Lambda(x^1)^2}{3})$ çarpım fonksiyonu ile temsil edilmektedir, [50].

(4.40) denklemi

$$\frac{d^2x^1}{d\lambda^2} - \frac{1}{x^1}[1-(\frac{dx^1}{d\lambda})^2] = 0 \tag{4.47}$$

biçimindedir. Bu denklemi çözmek için $w(x^1) = (\frac{dx^1}{d\lambda})^2$ değişken dönüşümü yapılırsa, (4.47) denklemi

$$w' + \frac{2}{x^1}w = \frac{2}{x^1} \tag{4.48}$$

biçiminde birinci mertebe lineer denkleme dönüşür ve çözümü ise (integrasyon sabiti 1 olarak seçildiğinde) $w = \frac{1}{(x^1)^2} + 1$ şeklindedir. Böylece $I$ aralığı üzerindeki jeodezik denkleminin çözümü, $\lambda^2 - (x^1)^2 = 1$ hiperbolü olarak bulunur.

Ayrıca, hiç denge noktası olmadığı (yani $q'(x_0) \neq 0$ olduğu) ve $q(x^1)$ fonksiyonu bilindiği takdirde (4.42) sistemi

$$\frac{dx^1}{d\gamma} = \frac{\gamma}{\frac{q'}{2}(1-\gamma^2)} \tag{4.49}$$

şeklinde birinci mertebe diferansiyel denklemi olarak yazılabilir ve $c_2$ integrasyon sabiti olmak üzere çarpım fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunmuş olur:

$$q(x^1) = -ln|1-\gamma^2| + c_0 \tag{4.50}$$

Şimdi Teorem 4.4'teki yapıya benzer bir örnek inşaa edilecektir:

**Örnek 4.1.** $M^*$ 3-boyutlu Riemann manifoldu ve $f$ çarpım fonksiyonu, $\lambda$ ve $\rho > 0$ sabitler olmak üzere çarpım fonksiyonu

$$f(t) = (\rho t + \lambda)^2 \tag{4.51}$$

şeklinde tanımlanan $I \times_f M^*$ katlı çarpım manifoldu ele alınsın. $I$ aralığı üzerindeki metrik $g = (dt)^2$ standard metriği olarak alınabilir. Bu durumda (4.6) ve (4.7) denklemlerinden,

$$T_{tt} = 0 \quad and \quad \frac{\Delta_1 f}{f} = 4\rho^2 \tag{4.52}$$

bulunur. (4.2) katlı çarpım metriği, (4.4), (4.5) ve (4.8) denklemlerinden, Riemann eğrilik tensörünün ve Ricci tensörünün bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{R}_{tttt} = R_{tttt} = 0, \;\; \tilde{R}_{\alpha ab\beta} = 0, \;\; \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = f[\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \rho^2 \bar{G}_{\alpha\beta\gamma\delta}] \tag{4.53}$$

$$\tilde{Ric}_{tt} = 0, \;\; \tilde{Ric}_{\alpha\beta} = \frac{\tilde{r}}{n-1}\tilde{g}_{\alpha\beta}; \;\; \alpha, \beta \in \{2,3,4\} \tag{4.54}$$

Görüldüğü üzere, (4.54)'den $M^*$ Einstein manifoldudur. $a = -b = \frac{\tilde{r}}{n-1}$ ve her $i, j \in \{1,2,3,4\}$ için $\phi_i = \delta_i^1$ olarak seçilirse, Ricci tensörünün

$$\tilde{Ric}_{ij} = a\tilde{g}_{ij} + b\phi_i\phi_j \tag{4.55}$$

koşulunu sağladığı görülür. Dolayısıyla, $I \times_f M^*$, ilgili skalerlerinin toplamı sıfır olan yarı Einstein manifoldudur. Dahası, (4.54) ve (4.55) denklemlerinden, $M^*$ fiberi ve $I \times_f M^*$ katlı çarpımı Ricci-semisimetriktir.

Ayrıca, $I \times_f M^*$ manifoldunun $\tilde{C}$ Weyl konformal eğrilik tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$\tilde{C}_{\alpha 11\beta} = \frac{-1}{2}[\bar{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{\bar{r}}{3}\bar{g}_{\alpha\beta}], \tag{4.56}$$

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{f}{2}[\bar{Ric}_{\beta\gamma}\bar{g}_{\alpha\delta} - \bar{Ric}_{\alpha\gamma}\bar{g}_{\beta\delta} + \bar{Ric}_{\alpha\delta}\bar{g}_{\beta\gamma} - \bar{Ric}_{\beta\delta}\bar{g}_{\alpha\gamma}] - \frac{f\bar{r}}{3}\bar{G}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{4.57}$$

şeklindedir. $M^*$, 3-boyutlu Einstein manifoldu olduğundan, (4.56) ve (4.57) denklemleri kullanılarak, her $i,j,k,l = 1,2,3,4$ için $\tilde{C}_{ijkl} = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $I \times_f M^*$ konformal düzdür.

### 4.1.2 Genelleştirilmiş yarı Einstein katlı çarpım manifoldları

Bu bölümde, Teorem 4.4'te ele alınan durumun tersine, $boyI = 1$, $boyN = n-1$, $(n \geq 3)$ olmak üzere $M = I \times_{e^{q/2}} N$ katlı çarpım manifoldu için aşağıdaki teorem ispatlanacaktır:

**Teorem 4.5.** *$I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere, $M = I \times_{e^{q/2}} N$ katlı çarpım manifoldunun $N$ lif manifoldu $(n-1)$-boyutlu $(n \geq 3)$, $a,b$ ve $c$ ilgili skalerlerine sahip olan bir $G(QE)_{n-1}$ olsun. Bu durumda, $a = -\frac{(n-2)}{4}e^{q/2}q''$ bağıntısı sağlanıyorsa, $M$ katlı çarpım manifoldu da bir $G(QE)_n$ manifoldudur.*

*İspat.* $I \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerindeki metrik $(dt)^2$ olarak seçilebilir. Ayrıca $f = e^{q/2}$ olsun. Bu durumda (4.8) ve (4.6) denklemlerinden

$$iz(T) = T_{tt} = \frac{q''}{2}e^{q/2} + \frac{1}{8}(q')^2 e^{q/2} \quad and \quad \Delta_1 f = \frac{(q')^2}{4}e^q \tag{4.58}$$

olur. (4.58) denklemi (4.5) denkleminde kullanılırsa, " $'$ " ve " $''$ " $t$'ye göre birinci ve ikinci mertebeden adi türevi göstermek üzere aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\tilde{Ric}_{tt} = -\frac{(n-1)}{16}[4q'' + (q')^2], \tag{4.59}$$

$$\tilde{Ric}_{\alpha\beta} = \bar{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{e^{q/2}}{16}[4q'' + (n-1)(q')^2]\bar{g}_{\alpha\beta}. \tag{4.60}$$

$N$ manifoldu $(n-1)-$boyutlu, $a,b,c \neq 0$ ilgili skaler fonksiyonlarına sahip bir $G(QE)_{n-1}$ manifoldu olduğundan, Ricci tensörü

$$\bar{Ric}_{\alpha\beta} = a\bar{g}_{\alpha\beta} + b\bar{A}_\alpha\bar{A}_\beta + c[\bar{A}_\alpha\bar{B}_\beta + \bar{A}_\beta\bar{B}_\alpha], \;\; \alpha,\beta = 2,\cdots,n \tag{4.61}$$

formundadır ve tanım gereği buradaki $\bar{A}$ ve $\bar{B}$ ilgili 1-formları

$$\bar{A}_\alpha \bar{A}_\beta \bar{g}^{\alpha\beta} = 1, \quad \bar{B}_\alpha \bar{B}_\beta \bar{g}^{\alpha\beta} = 1, \quad \bar{A}_\alpha \bar{B}_\beta \bar{g}^{\alpha\beta} = 0 \tag{4.62}$$

koşullarını gerçeklemektedir. (4.60) ve (4.61) denklemleri kullanılarak, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\tilde{Ric}_{\alpha\beta} = a\bar{g}_{\alpha\beta} - \frac{e^{q/2}}{16}[4q'' + (n-1)(q')^2]\bar{g}_{\alpha\beta} + b\bar{A}_\alpha \bar{A}_\beta + c[\bar{A}_\alpha \bar{B}_\beta + \bar{A}_\beta \bar{B}_\alpha]. \tag{4.63}$$

Şimdi, $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ , lokal bileşenleri aşağıdaki gibi olan 1-formlar olsun:

$$\tilde{A}_i = \begin{cases} A_i & , i = 1 \text{ ise} \\ \sqrt{f}\bar{A}_i & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{4.64}$$

$$\tilde{B}_i = \begin{cases} B_i & , i = 1 \text{ ise} \\ \sqrt{f}\bar{B}_i & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{4.65}$$

Bu durumda, (4.2) denkleminde verilen katlı çarpım metriği, (4.64) ve (4.65) denklemleri (4.63) denkleminde kullanılırsa, $\tilde{Ric}_{\alpha\beta}$ aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\tilde{Ric}_{\alpha\beta} = \left\{ \frac{a}{e^{q/2}} - \frac{1}{16}[4q'' + (n-1)(q')^2] \right\} \tilde{g}_{\alpha\beta} + \frac{b}{f}\tilde{A}_\alpha \tilde{A}_\beta + \frac{c}{f}[\tilde{A}_\alpha \tilde{B}_\beta + \tilde{A}_\beta \tilde{B}_\alpha] \tag{4.66}$$

Ayrıca $I$ aralığı üzerinde $\tilde{g}_{tt} = g_{tt} = 1$ olduğundan, (4.59) denkleminden, $\tilde{Ric}_{tt}$ aşağıdaki gibi olur:

$$\tilde{Ric}_{tt} = \left\{ \frac{a}{e^{q/2}} - \frac{1}{16}[4q'' + (n-1)(q')^2] \right\} \tilde{g}_{tt} - \frac{a}{e^{q/2}} - \frac{(n-2)}{4}q'' \tag{4.67}$$

$boyI = 1$ olduğundan $A_i = B_i = 0$ seçilebilir. Dolayısıyla (4.64) ve (4.65) denklemleri aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\tilde{A}_i = \begin{cases} 0 & , i = 1 \text{ ise} \\ \sqrt{f}\bar{A}_i & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{4.68}$$

$$\tilde{B}_i = \begin{cases} 0 & , i = 1 \text{ ise} \\ \sqrt{f}\bar{B}_i & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{4.69}$$

Bu durumda, (4.2), (4.62) ve (4.68) – (4.69) denklemlerinden,

$$\tilde{A}_\alpha \tilde{A}_\beta \tilde{g}^{\alpha\beta} = 1, \quad \tilde{B}_\alpha \tilde{B}_\beta \tilde{g}^{\alpha\beta} = 1, \quad \tilde{A}_\alpha \tilde{B}_\beta \tilde{g}^{\alpha\beta} = 0 \tag{4.70}$$

bağıntılarının gerçeklendiği görülür. Dahası, (4.68) ve (4.69) denklemleri kullanılarak, (4.67) denklemi, $\frac{a}{e^{q/2}} + \frac{(n-2)}{4}q'' = 0$ eşitliğinin sağlanması durumunda

$$\tilde{Ric}_{tt} = \left\{ \frac{a}{e^{q/2}} - \frac{1}{16}[4q'' + (n-1)(q')^2] \right\} \tilde{g}_{tt} + \frac{b}{f}\tilde{A}_t \tilde{A}_t + 2\frac{c}{f}\tilde{A}_t \tilde{B}_t \tag{4.71}$$

biçiminde yazılabilir. Böylece, (4.66) ve (4.71) denklemlerinin elde edilmesi sonucu, ispat tamamlanır. □

**Teorem 4.6.** *$I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $N$ ise $(n-1)$-boyutlu $(n \geq 3)$ bir Riemann manifoldu olmak üzere $M = I \times_f N$ katlı çarpım manifoldu bir $N(k)-$yarı Einstein manifoldu olsun. Bu durumda, $N$ lif manifoldu $\kappa = \frac{1}{2f}[(f')^2 - ff'']$ olmak üzere bir $N(\kappa)-$yarı Einstein manifoldudur.*

*İspat.* $M = I \times_f N$ katlı çarpım manifoldu bir $N(k)-$yarı Einstein manifoldu olsun. Dolayısıyla, $M$ katlı çarpımı, üreteç vektör alanı bir $k$-null dağılımına ait olan yarı Einstein manifoldudur. $M$'nin $\tilde{A}_i$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ üreteç vektörü (4.68) denklemindeki gibi tanımlanırsa, önceki teoremin ispatında kullanılan yöntemle, $N$ lif manifoldunun da $\bar{A}_\alpha$ birim üreteç vektör alanına sahip bir yarı Einstein manifoldu olduğu görülür. O halde, şimdi $\bar{A}_\alpha$ vektör alanın bir null dağılımına ait olduğunu ispatlamak gerekmektedir.

$\tilde{A}_i$, vektör alanı $k$-null dağılımına ait olduğundan, her $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots \in \{2, \cdots, n\}$ için aşağıdaki eğrilik koşulları sağlanmaktadır:

$$\tilde{A}^\alpha \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = k[\tilde{A}_\delta \tilde{g}_{\beta\gamma} - \tilde{A}_\gamma \tilde{g}_{\beta\delta}], \quad \tilde{A}^\alpha \tilde{R}_{\alpha tt\beta} = k\tilde{A}_\beta \tilde{g}_{tt} \tag{4.72}$$

(4.2) katlı çarpım metriği ve (4.4) eğrilik tensörünün bileşenleri kullanılarak, (4.72) denkleminde verilen eşitlikler aşağıdaki formlara indirgenirler:

$$\bar{A}^\alpha \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \underbrace{[fk + \frac{\Delta_1 f}{4f}]}_{=:\kappa}[\bar{A}_\delta \bar{g}_{\beta\gamma} - \bar{A}_\gamma \bar{g}_{\beta\delta}], \quad \tilde{A}^\alpha \tilde{R}_{\alpha tt\beta} = k\sqrt{f}\bar{A}_\beta. \tag{4.73}$$

Böylece (4.2) metriği kullanılarak, (4.73) denklemindeki ikinci bağıntıdan

$$k = -\frac{1}{2f}T_{tt} = -\frac{1}{2f}[f'' - \frac{(f')^2}{2f}] \tag{4.74}$$

bulunur. $boyI = 1$ olduğundan, $\Delta_1 f = (f')^2$ biçimindedir. Böylece, (4.73) ve (4.74) denklemlerinden $\kappa = \frac{1}{2f}[(f')^2 - ff'']$ olmak üzere, $\bar{A}_\alpha$, $(2 \leqslant \alpha \leqslant n)$ vektörünün $\kappa-$null dağılımına ait olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır. □

Bu bölümün devamında, yukarıdaki teoremler $G(QE)_n$ manifolduna genelleştirilecek ve böyle bir katlı çarpım manifoldunda taban ve lif manifoldunun Ricci tensörlerinin bileşenleri ve skaler eğrilikleri ayrıntılı biçimde incelenecektir. Bunun için $M \times_f N$ katlı çarpım manifolduna ait herhangi bir vektör alanının, $X \in \chi(M)$ ve $U \in \chi(N)$ olmak üzere $X + U \in \chi(M \times_f N)$ biçiminde yazılabildiği kabul edilmektedir.

**Teorem 4.7.** *$boyM = m$, $boyN = d > 1$ olmak üzere, $M \times_f N$ katlı çarpım manifoldu üreteçleri $\xi_1$ ve $\xi_2$ olan bir $G(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu durumda, taban ve lif* *manifoldlarının Ricci tensörleri her $X,Y \in \chi(M)$ ve $U,V \in \chi(N)$ için aşağıdaki gibi yazılabilmektedir:*

*(1) Eğer $\xi_1, \xi_2 \in \chi(M)$ ise,*

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) =& ag(X,Y) + \frac{d}{f} Hessf(X,Y) + bg(X,\xi_1)g(Y,\xi_1) \\ &+ c[g(X,\xi_1)g(Y,\xi_2) + g(X,\xi_2)g(Y,\xi_1)] \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\bar{Ric}(U,V) = f^2\left(a + \frac{\Delta f}{f} + \frac{d-1}{f^2}||gradf||^2\right)\bar{g}(U,V) \quad (4.76)$$

*(2) Eğer $\xi_1, \xi_2 \in \chi(N)$ ise,*

$$Ric(X,Y) = ag(X,Y) + \frac{d}{f} Hessf(X,Y) \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} \bar{Ric}(U,V) =& f^2\left(a + \frac{\Delta f}{f} + \frac{d-1}{f^2}||gradf||^2\right)\bar{g}(U,V) + bf^4\bar{g}(U,\xi_1)\bar{g}(V,\xi_1) \\ &+ cf^4[\bar{g}(U,\xi_1)\bar{g}(V,\xi_2) + \bar{g}(U,\xi_2)\bar{g}(V,\xi_1)] \end{aligned} \quad (4.78)$$

*(3) Eğer $\xi_1 \in \chi(M)$ ve $\xi_2 \in \chi(N)$ ise,*

$$Ric(X,Y) = ag(X,Y) + \frac{d}{f} Hessf(X,Y) + bg(X,\xi_1)g(Y,\xi_1) \quad (4.79)$$

$$\bar{Ric}(U,V) = f^2\left(a + \frac{\Delta f}{f} + \frac{d-1}{f^2}||gradf||^2\right)\bar{g}(U,V) \quad (4.80)$$

*(4) Eğer $\xi_1 \in \chi(N)$ ve $\xi_2 \in \chi(M)$ ise,*

$$Ric(X,Y) = ag(X,Y) + \frac{d}{f} Hessf(X,Y) \quad (4.81)$$

$$\bar{Ric}(U,V) = f^2\left(a + \frac{\Delta f}{f} + \frac{d-1}{f^2}||gradf||^2\right)\bar{g}(U,V) + bf^4\bar{g}(U,\xi_1)\bar{g}(V,\xi_1) \quad (4.82)$$

*İspat.* $M \times_f N$ katlı çarpımı bir $G(QE)_n$ manifoldu olduğundan, Ricci tensörü

$$\tilde{Ric} = a\tilde{g} + b\tilde{A} \otimes \tilde{A} + c[\tilde{A} \otimes \tilde{B} + \tilde{B} \otimes \tilde{A}] \quad (4.83)$$

koşulunu sağlamaktadır. Burada, $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ 1-formlarını üreten $\xi_1$ ve $\xi_2$ üreteçlerinin, $M$ ve $N$ alt manifoldları üzerindeki bileşenleri sırasıyla $\xi_{1M}$ ve $\xi_{1N}$, $\xi_{2M}$ ve $\xi_{2N}$ olarak seçilirse, $i = 1,2$ için $\xi_i = \xi_{iM} + \xi_{iN}$ yazılabilir. Dolayısıyla, incelenmesi gereken aşağıdaki dört durum ortaya çıkar:

**1. Durum:** Eğer $\xi_1$ ve $\xi_2$ bileşenlerinin her ikisi de taban manifolduna teğet ise, her $X \in \chi(M)$ için, $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ 1-formları

$$\tilde{A}(X) = \tilde{g}(X,\xi_1) = g(X,\xi_1) \;\; ve \;\; \tilde{B}(X) = \tilde{g}(X,\xi_2) = g(X,\xi_2) \tag{4.84}$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda, (4.84) denklemi ve $\tilde{g}$ metriği, (4.83) denkleminde kullanılırsa, her $X,Y \in \chi(M)$ için

$$\tilde{Ric}(X,Y) = ag(X,Y) + bg(X,\xi_1)g(Y,\xi_1) + c[g(X,\xi_1)g(Y,\xi_2) + g(X,\xi_2)g(Y,\xi_1)] \tag{4.85}$$

elde edilir. (4.85) denklemi Yardımcı Teorem 4.3-(1)'de kullanılırsa, taban manifoldunun Ricci tensörü (4.75) formunda olur. Benzer şekilde, her $U \in \chi(N)$ için

$$\tilde{A}(U) = \tilde{g}(U,\xi_1) = 0 \;\; ve \;\; \tilde{B}(U) = \tilde{g}(U,\xi_2) = 0 \tag{4.86}$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda, (4.86) denklemi ve $\tilde{g}$ metriği, (4.83) denkleminde kullanılırsa, her $U,V \in \chi(N)$ için

$$\tilde{Ric}(U,V) = af^2\bar{g}(U,V) \tag{4.87}$$

elde edilir. (4.87) denklemi Yardımcı Teorem 4.3-(3)'de kullanılırsa, lif manifoldunun Ricci tensörü (4.76) forumunda olur.

**2. Durum:** Eğer $\xi_1$ ve $\xi_2$ bileşenlerinin her ikisi de lif manifolduna teğet ise, her $X \in \chi(M)$ için, $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ 1-formları

$$\tilde{A}(X) = \tilde{g}(X,\xi_1) = 0 \;\; ve \;\; \tilde{B}(X) = \tilde{g}(X,\xi_2) = 0 \tag{4.88}$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda (4.88) denklemi ve $\tilde{g}$ metriği, (4.83) denkleminde kullanılırsa, her $X,Y \in \chi(M)$ için

$$\tilde{Ric}(X,Y) = ag(X,Y) \tag{4.89}$$

elde edilir. (4.89) denklemi Yardımcı Teorem 4.3-(1)'de kullanılırsa, taban manifoldunun Ricci tensörü (4.77) denklemindeki gibi bulunur. Benzer şekilde, her $U \in \chi(N)$ için

$$\tilde{A}(U) = \tilde{g}(U,\xi_1) = f^2\bar{g}(U,\xi_1) \;\; ve \;\; \tilde{B}(U) = \tilde{g}(U,\xi_2) = f^2\bar{g}(U,\xi_2) \tag{4.90}$$

yazılabilir. Bu durumda, (4.90) denklemi ve $\tilde{g}$ metriği (4.83) denkleminde yerine yazılırsa, her $U,V \in \chi(N)$ için

$$\begin{aligned}\tilde{Ric}(U,V) =& af^2\bar{g}(U,V) + bf^4\bar{g}(U,\xi_1)\bar{g}(V,\xi_1) \\ &+ cf^4[\bar{g}(U,\xi_1)\bar{g}(V,\xi_2) + \bar{g}(U,\xi_2)\bar{g}(V,\xi_1)]\end{aligned} \tag{4.91}$$

bulunur. (4.91) denklemi Yardımcı Teorem 4.3-(3)'de kullanılırsa, lif manifoldunun Ricci tensörü (4.78)'deki gibi bulunur.

**3. Durum:** Şimdi de, $\xi_1$ bileşeni taban manifolduna, $\xi_2$ bileşeni ise lif manifolduna teğet olsun. O halde $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ 1-formları, her $X \in \chi(M)$ için,

$$\tilde{A}(X) = \tilde{g}(X,\xi_1) = g(X,\xi_1) \;\; ve \;\; \tilde{B}(X) = \tilde{g}(X,\xi_2) = 0 \tag{4.92}$$

biçiminde yazılır. (4.92) denklemi ve $\tilde{g}$ metriği (4.83) denkleminde yerine yazılırsa, her $X,Y \in \chi(M)$ için,

$$\tilde{Ric}(X,Y) = ag(X,Y) + bg(X,\xi_1)g(Y,\xi_1) \tag{4.93}$$

bulunur. (4.93) denklemi Yardımcı Teorem 4.3-(1)'de kullanılırsa, taban manifoldunun Ricci tensörü (4.79)'deki gibi bulunur. Benzer şekilde, her $U \in \chi(N)$ için

$$\tilde{A}(U) = \tilde{g}(U,\xi_1) = 0 \;\; ve \;\; \tilde{B}(U) = \tilde{g}(U,\xi_2) = f^2\bar{g}(U,\xi_2) \tag{4.94}$$

yazılabilir. Bu durumda da, (4.94) denklemi ve $\tilde{g}$ metriği, (4.83) denkleminde kullanılarak,her $U,V \in \chi(N)$ için

$$\tilde{Ric}(U,V) = af^2\bar{g}(U,V) \tag{4.95}$$

bulunur. (4.95) denklemi Yardımcı Teorem 4.3-(3)'de kullanılarak, lif manifoldunun Ricci tensör (4.80) biçiminde elde edilir.

**4. Durum:** Son olarak $\xi_1$ bileşeni lif manifolduna ve $\xi_2$ bileşeni de taban manifolduna teğet seçilebilir. Bu durumda, $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ 1-formları her $X \in \chi(M)$ için,

$$\tilde{A}(X) = \tilde{g}(X,\xi_1) = 0 \;\; ve \;\; \tilde{B}(X) = \tilde{g}(X,\xi_2) = g(X,\xi_2) \tag{4.96}$$

biçiminde yazılabilir. (4.96) denklemi ve $\tilde{g}$ metriği, (4.83) denkleminde yerine yazılırsa, her $X,Y \in \chi(M)$ için,

$$\tilde{Ric}(X,Y) = ag(X,Y) \tag{4.97}$$

bulunur. Dolayısıyla (4.97) denklemi ve Yardımcı Teorem 4.3-(1)'den, taban manifoldunun Ricci tensörü (4.81) biçiminde elde edilir. Benzer şekilde her $U \in \chi(N)$ için

$$\tilde{A}(U) = \tilde{g}(U,\xi_1) = f^2\bar{g}(U,\xi_1) \;\; ve \;\; \tilde{B}(U) = \tilde{g}(U,\xi_2) = 0 \tag{4.98}$$

yazılabilir. Dolayısıyla (4.98) denklemi ve $\tilde{g}$ metriği, (4.83) denkleminde yerine yazılırsa, her $U,V \in \chi(N)$ için

$$\tilde{Ric}(U,V) = af^2\bar{g}(U,V) + bf^4\bar{g}(U,\xi_1)\bar{g}(V,\xi_1) \tag{4.99}$$

bulunur. Sonuç olarak (4.99) denklemi ve Yardımcı Teorem 4.3-(3)'den, lif manifoldunun Ricci tensörü (4.82) forumunda elde edilir. □

Ayrıca, $M \times_f N$ katlı çarpım manifoldu aynı zamanda bir $G(QE)_n$ manifoldu olduğundan, $\xi_i$, $(i = 1,2)$ üreteçleri $\tilde{g}(\xi_i,\xi_i) = 1$ ve $\tilde{g}(\xi_1,\xi_2) = 0$ bağıntılarını sağlar. Bu durumda, eğer $\xi_i \in \chi(M)$, $(i = 1,2)$ ise, $g(\xi_i,\xi_i) = 1$ ve eğer $\xi_i \in \chi(N)$ ise, $f^2\bar{g}(\xi_i,\xi_i) = 1$'dir. O halde, Teorem 4.7'de verilen taban ve lif manifoldlarının Ricci tensörlerinin izi alınarak, skaler eğirlikleri kolayca elde edilebilir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur:

**Sonuç 4.1.** *$boyM = m$, $boyN = d > 1$ olmak üzere, $M \times_f N$ katlı çarpım manifoldu üreteçleri $\xi_1$ ve $\xi_2$ olan bir $G(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu durumda, $M \times_f N$ katlı çarpımının skaler eğriliği $\tilde{r} = (m+d)a + b$ biçimindedir. $M$ taban ve $N$ lif manifoldlarının skaler eğirlikleri ise aşağıdaki gibi elde edilir:*

*(1) Eğer $\xi_1,\xi_2 \in \chi(M)$ veya $\xi_1 \in \chi(M)$ ve $\xi_2 \in \chi(N)$ ise,*

$$r = ma + \frac{d}{f}\Delta f + b \;\; ve \;\; \bar{r} = df^2\Big(a + \frac{\Delta f}{f} + \frac{d-1}{f^2}||gradf||^2\Big) \tag{4.100}$$

*(2) Eğer $\xi_1,\xi_2 \in \chi(N)$ veya $\xi_1 \in \chi(N)$ ve $\xi_2 \in \chi(M)$ ise,*

$$r = ma + \frac{d}{f}\Delta f \;\; ve \;\; \bar{r} = df^2\Big(a + \frac{\Delta f}{f} + \frac{d-1}{f^2}||gradf||^2\Big) + bf^2 \tag{4.101}$$

Bölüm 3-Teorem 3.12'de inşaa edilen metriğin aynı zamanda katlı çarpım metrik yapısına sahip olduğu aşağıdaki örnekte gösterilecektir:

**Örnek 4.2.** $M^4 = \{(x^1,x^2,x^3,x^4) \in \mathbb{R}^4 : \; x^4 \in (-1-\sqrt{7}, 1-\sqrt{3}) \bigcup (-1+\sqrt{7}, 1+\sqrt{3})\} \subseteq \mathbb{R}^4$ açık alt kümesi üzerinde,

$$ds^2 = g_{ij}dx^idx^j = (e^{2x^4})(dx^1)^2 + (x^4)^4[(dx^2)^2 + (dx^3)^2] + (dx^4)^2$$

Riemann metriği ile verilen manifoldun, sabitten farklı $r = \frac{16}{(x^4)^2} + \frac{8}{(x^4)} + 2$ skaler eğriliğine sahip bir genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldu olduğu kanıtlanmıştır.

Bu $G(QE)_4$ manifoldu üzerinde katlı çarpım yapısı tanımlamak için, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$, $f(x_2, x_3, x_4) = e^{x^4}$ biçiminde pozitif tanımlı ve diferansiyellenebilen fonksiyonu ele alınsın. Bu durumda, $\mathbb{R}^3$ taban manifoldu ve $\mathbb{R}$ fiber manifoldu olmak üzere $\mathbb{R}^3 \times_{e^{x^4}} \mathbb{R}$ manifoldu üzerideki metrik

$$ds^2 = \tilde{g}_{ij}dx^i dx^j = \underbrace{(x^4)^4(dx^2)^2 + (x^4)^4(dx^3)^2 + (dx^4)^2}_{=:g} + e^{2x^4}\underbrace{(dx^1)^2}_{=:\bar{g}} \tag{4.102}$$

biçiminde yazılabilir. Böylece $\tilde{g} = g + f^2\bar{g}$ metriği, $f_b = \nabla_b f$, $f^a = f_b g^{ba}$, $a, b, c, d, \ldots \in \{2, 3, 4\}$ olmak üzere

$$\tilde{\Gamma}^a_{bc} = \Gamma^a_{bc}, \;\; \tilde{\Gamma}^a_{11} = -ff^a, \;\; \tilde{\Gamma}^1_{1a} = \frac{f_a}{f}, \;\; \tilde{\Gamma}^1_{11} = \bar{\Gamma}^1_{11} \tag{4.103}$$

$$\tilde{R}^a_{bcd} = R^a_{bcd}, \quad \tilde{R}^1_{d1b} = -\frac{1}{f}\nabla_d f_b \tag{4.104}$$

$$\tilde{Ric}_{bc} = Ric_{bc} + \frac{1}{f}(\nabla_c f_b) \quad \tilde{Ric}_{c1} = 0, \quad \tilde{Ric}_{11} = f(\Delta f) \tag{4.105}$$

$$\tilde{r} = r + \frac{2\Delta f}{f} \tag{4.106}$$

denklemlerini sağlar. O halde, $M^4 = \mathbb{R}^3 \times_{e^{x^4}} \mathbb{R}$ manifoldu (4.102) metriği ile üretilen ve $f(x_2, x_3, x_4) = e^{x^4}$ biçiminde tanımlı $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ çarpım fonksiyonu ile verilen bir $G(QE)_4$ katlı çarpım manifoldudur.

Bu bölümde şimdi de, bir $G(QE)_n$ manifoldu üzerindeki katlı çarpım metriğinin, bir Riemann çarpımına indirgenmesine, yani $f$ çarpım fonksiyonunun sabit olmasına neden olan bazı durumlar araştırılacaktır. Dolayısıyla, Teorem 4.7'e benzer şekilde yine dört durum söz konusu olacaktır.

*1. Kabul: "$\xi_1$ ve $\xi_2$ üreteçlerinin her ikisinin de taban manifolduna teğet olduğu"* veya *"$\xi_1$ üretecinin taban manifolduna, $\xi_2$ üretecinin ise lif manifolduna teğet olduğu"* kabul edilsin.

Şimdi, 1. kabul altında aşağıdaki teorem ispatalanacaktır:

**Teorem 4.8.** *$M \times_f N$ (boy$M = m$, boy$N = d$) katlı çarpım manifoldu kompakt, yönlendirilebilir ve sınırsız olmak üzere $\xi_1$ ve $\xi_2$ üreteçleri 1. kabuldeki koşulları sağlayan, $a, b$, $c$ ilgili skalerlerine sahip bir $G(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu durumda,* *(a) Eğer $m = 1$ veya $d = 1$ ve a, b ilgili skalerleri pozitif ise $M \times_f N$ bir Riemann çarpım manifoldudur.*

*(b) Eğer $m, d > 1$ ve $a > 0$ ve aşağıdaki durumlardan herhangi biri sağlanıyor ise, $M \times_f N$ bir Riemann çarpım manifoldudur:*

*(i) $r - \tilde{r} \geqslant 0$ ise,*

*(ii) M taban manifoldu negatif skaler eğriliğe sahip ve $b > 0$ ise,*

*(iii) $\tilde{r} \geqslant r + \frac{\bar{r}}{f^2}$ ise.*

*İspat.* *(a)* Eğer $boyM = m = 1$ ise $r = 0$ olur ve Sonuç 4.1-(1)'den, $\Delta f = -f[\frac{a+b}{d}]$ bulunur. $a$ ve $b$ ilgili skalerleri pozitif olduğundan $\Delta f < 0$ bulunur ve böylece Bochner Lemma'dan $f$ sabit olur. Benzer şekilde, eğer $boyN = d = 1$ ise $\bar{r} = 0$ olur ve Sonuç 4.1-(1)'den, $a + \frac{\Delta f}{f} = 0$ elde edilir. Dolayısıyla yine laplasyenin işareti daima negatiftir ve $f$ sabit bulunur.

*(b)* Şimdi de, $boyM = m > 1$, $boyN = d > 1$ ve $a > 0$ olsun.

(i) Eğer $r - \tilde{r} \geqslant 0$ ise Sonuç 4.1-(1)'den, $r - \tilde{r} = d\frac{\Delta f}{f} - da \geqslant 0$ olur ve dolayısıyla $\Delta f \geqslant af \geqslant 0$ bulunur. Bu durumda, $a > 0$ ve $f > 0$ olduğundan, f sabit olur.

(ii) Eğer $r < 0$ ise Sonuç 4.1-(1)'den, $ma + d\frac{\Delta f}{f} + b < 0$ olur ve böylece $a, b > 0$ olduğundan $\Delta f < -\frac{f}{d}(ma + b) < 0$ olacaktır. Dolayısıyla $f$ sabittir.

(iii) Eğer $\tilde{r} \geqslant r + \frac{\bar{r}}{f^2}$ ise Yardımcı Teorem 4.4 kullanılarak $-2d\frac{\Delta f}{f} \geqslant d(d-1)\frac{||gradf||^2}{f^2} > 0$ olduğu görülür. O halde $\Delta f < 0$ olur ve $f$ sabittir.

□

*2. Kabul: " $\xi_1$ ve $\xi_2$ üreteçlerinin her ikisi de lif manifolduna teğet"* yada *"$\xi_1$ lif manifolduna $\xi_2$ ise taban manifolduna teğet olsun."*

Şimdi de, Teorem 4.8'e benzer şekilde, 2. kabul altında aşağıdaki teorem ispatlanabilir:

**Teorem 4.9.** *$M \times_f N$ ($boyM = m, boyN = d$) katlı çarpım manifoldu kompakt, yönlendirilebilir ve sınırsız olmak üzere $\xi_1$ ve $\xi_2$ üreteçleri 2. kabuldeki koşulları sağlayan, $a, b$, $c$ ilgili skalerlerine sahip bir $G(QE)_n$ manifoldu ve $a, b > 0$ olsun. Bu durumda,* *(a) Eğer $m = 1$ veya $d = 1$ ise, $M \times_f N$ Riemann çarpım manifoldudur.*

*(b) Eğer $m, d > 1$ ise, aşağıdaki durumlardan herhangi biri sağlanıyor ise, $M \times_f N$ bir Riemann çarpım manifoldudur:*

*(i) $N$ lif manifoldu negatif skaler eğrilikli ise,*

*(ii) $\lambda := a + b + \frac{\Delta f}{f} + \frac{(d-1)}{f^2}||grad f||^2$ olmak üzere $\lambda \leqslant \frac{(d-1)}{f^2}||grad f||^2$ ise,*

*(iii) $\lambda$, (ii) şıkkındaki gibi olmak üzere $r \leqslant 2ma - m\lambda$ ise,*

*İspat. (a)* Eğer $boyM = m = 1$ ise, $r = 0$ olur ve Sonuç 4.1-(2)'den, $a + d\frac{\Delta f}{f} = 0$ olur ve dolayısıyla $a, b > 0$ olduğundan $\Delta f = -\frac{af}{d} < 0$ elde edilir. Bu durumda Bochner Lemma'dan $f$ sabit olur. Benzer şekilde, eğer $boyN = d = 1$ ise $\bar{r} = 0$ olur ve Sonuç 4.1-(2)'den, $f > 0$ olduğundan, $a + \frac{\Delta f}{f} + b = 0$ elde edilir. Böylece, $a$ ve $b$ her ikisi de pozitif iken $\Delta f = -(a+b)f < 0$ bulunur ve $f$ sabit olur.

*(b)* Şimdi de $boyM = m > 1$, $boyN = d > 1$ ve $a > 0$ olsun.

(i) Eğer $\bar{r} < 0$ ve $a, b > 0$ ise Sonuç 4.1-(2)'den, $\Delta f < 0$ olur ve dolayısıyla $f$ sabittir.

(ii) $boyN = d > 1$ olduğundan, Sonuç 4.1-(2)'den

$$\bar{r} > f^2 \underbrace{(a + b + \frac{\Delta f}{f} + \frac{(d-1)}{f^2}||grad f||^2)}_{:=\lambda}$$

elde edilir. Bu durumda, eğer $\lambda \leqslant \frac{(d-1)}{f^2}||grad f||^2$ bağıntısı gerçekleniyorsa, $a + b + \frac{\Delta f}{f} = \lambda - \frac{(d-1)}{f^2}||grad||^2 \leqslant 0$ olur ve böylece $\Delta f \leqslant -f(a+b) < 0$ bulunur. Dolayısıyla, $f$ sabittir.

(iii) $\lambda - a - \frac{\Delta f}{f} = b + \frac{(d-1)}{f^2}||grad f||^2 > 0$ olduğundan, $m\lambda > ma + m\frac{\Delta f}{f}$ olur. Sonuç 4.1-(2)'den $r = ma + d\frac{\Delta f}{f}$ olduğundan son iki denklem kullanılarak

$$r + m\lambda > 2ma + \frac{\Delta f}{f}(m + d)$$

elde edilir. Bu durumda, $r \leqslant 2ma - m\lambda$ bağıntısı gerçeklendiğinden $\Delta f < 0$ olur ve yine $f$ sabit bulunur. □

Yukarıdaki iki teoremde elde edilen katlı çarpım metrik yapısının varlığını engelleyen durumlar, $G(QE)_n$ manifoldunun ve bileşenlerinin skaler eğrilikleri veya manifoldun ilgili fonksiyonları üzerine koyulabilecek olan farklı koşullar ile çoğaltılabilir.

Bu bölümde, son olarak genelleştirilmiş yarı-sabit eğrilikli manifoldlar üzerindeki katlı çarpım yapısı incelenecektir.

Genelleştirilmiş yarı-sabit eğrilikli manifold kavramı, $G(QE)_n$ manifoldu kavramının bir özel durum olarak M. C. Chaki tarafından [8] numaralı çalışmada tanımlanmıştır:

**Tanım 4.3.** *Düz olmayan n-boyutlu* $(n \geq 3)$, $(M^n, g)$ *Riemann manifoldunda,* $\alpha, \beta, \gamma$ *sıfırdan farklı skaler fonksiyonlar,* $\phi$ *ve* $\psi$ *sırasıyla, birim P ve Q vektörlerinin*

$$g(X,P) = \phi(X), \;\; g(X,Q) = \psi(X) \text{ ve } g(P,Q) = 0 \tag{4.107}$$

*biçiminde tanımlanan sıfırdan farklı dual 1-formları olmak üzere,* $(0,4)$*-tipindeki Riemann eğrilik tensörü*

$$\begin{aligned}
&R(X,Y,Z,W) = \alpha\Big[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\Big] \qquad (4.108)\\
&+\beta\Big[\phi(Y)\phi(Z)g(X,W) - \phi(X)\phi(Z)g(Y,W) + \phi(X)\phi(W)g(Y,Z) - \phi(Y)\phi(W)g(X,Z)\Big]\\
&+\gamma\Big[g(Y,Z)\{\phi(X)\psi(W) + \phi(W)\psi(X)\} - g(X,Z)\{\phi(Y)\psi(W) + \phi(W)\psi(Y)\}\\
&+g(X,W)\{\phi(Y)\psi(Z) + \phi(Z)\psi(Y)\} - g(Y,W)\{\phi(X)\psi(Z) + \phi(Z)\psi(X)\}\Big]
\end{aligned}$$

*koşulunu sağlıyorsa, M'e genelleştirilmiş yarı-sabit eğrilikli manifold denir ve kısaca* $G(QC)_n$ *ile gösterilir. Özel olarak,* $\gamma = 0$ *ise,* $(M^n, g)$ *manifolduna yarı-sabit eğrilikli manifold;* $\gamma = \beta = 0$ *ise,* $(M^n, g)$ *manifolduna sabit eğrilikli manifold adı verilir.*

S. Guha [3] çalışmasında, her $G(QE)_3$ manifoldunun $G(QC)_3$ manifoldu olduğunu ve her konformal düz $G(QE)_n$, $(n > 3)$ manifoldunun $G(QC)_n$ manifoldu olduğunu kanıtlamıştır. Tersine, her $G(QC)_n$, $(n \geq 3)$ manifoldu $G(QE)_n$ manifoldudur.

**Teorem 4.10.** $(M, g)$*,* $q-$*boyutlu* $(1 < q < n)$ *tam bağlantılı bir Riemann manifoldu ve* $(N, \bar{g})$*,* $(n-q)-$*boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere,* $M \times_f N$ *manifoldu P ve Q üreteçlerine ve* $\alpha, \beta, \gamma$ *skaler fonksiyonlar sahip bir* $G(QC)_n$ *katlı çarpım manifoldu olsun. Eğer f çarpım fonksiyonunun Hessianı g metriği ile orantılı ise, aşağıdakiler gerçeklenir:*

*(1) Eğer* $P, Q \in \chi(M)$ *ve* $\beta + \alpha q < 0$ *ise, M taban manifoldu 2-boyutlu bir Einstein manifoldudur. Dahası,* $M \times N$ *manifoldu bir Riemann çarpımıdır.*

*(2) Eğer* $P \in \chi(M)$ *ve* $Q \in \chi(N)$ *ise, M taban manifoldu yine 2-boyutlu bir Einstein manifoldudur.*

*(3) Eğer $P,Q \in \chi(N)$ veya $P \in \chi(N)$, $Q \in \chi(M)$ ise, $M$ skaler eğriliği $r = \alpha q(q-1)$ olan bir Einstein manifoldudur.*

*İspat.* $M \times_f N$ manifoldu $G(QC)_n$ olduğundan, Riemann eğrilik tensörü, her $X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için aşağıdaki koşulu sağlamaktadır:

$$\begin{aligned}
&\tilde{R}(X,Y,Z,W) = \alpha\Big[\tilde{g}(Y,Z)\tilde{g}(X,W) - \tilde{g}(X,Z)\tilde{g}(Y,W)\Big] \\
&+\beta\Big[\phi(Y)\phi(Z)\tilde{g}(X,W) - \phi(X)\phi(Z)\tilde{g}(Y,W) + \phi(X)\phi(W)\tilde{g}(Y,Z) - \phi(Y)\phi(W)\tilde{g}(X,Z)\Big] \\
&+\gamma\Big[\tilde{g}(Y,Z)\{\phi(X)\psi(W) + \phi(W)\psi(X)\} - \tilde{g}(X,Z)\{\phi(Y)\psi(W) + \phi(W)\psi(Y)\} \\
&+\tilde{g}(X,W)\{\phi(Y)\psi(Z) + \phi(Z)\psi(Y)\} - \tilde{g}(Y,W)\{\phi(X)\psi(Z) + \phi(Z)\psi(X)\}\Big]
\end{aligned} \tag{4.109}$$

$P$ ve $Q$ üreteçlerinin taban ve lif manifoldları üzerindeki bileşenleri sırasıyla, $P_M$ ile $P_N$ ve $Q_M$ ile $Q_N$ olmak üzere

$$P = P_M + P_N \quad ve \quad Q = Q_M + Q_N \tag{4.110}$$

kabul edilsin. Bu durumda, aşağıdaki dört alt durum meydana gelmektedir:

**1. Durum:** İlk olarak $P$ ve $Q$ vektörlerinin taban manifolduna teğet oldukları kabul edilsin, yani $P,Q \in \chi(M)$ olsun. Bu durumda, her $Y \in \chi(M)$ için,

$$\phi(Y) = \tilde{g}(Y,P) = g(Y,P_M) \quad ve \quad \psi(Y) = \tilde{g}(Y,Q) = g(Y,Q_M) \tag{4.111}$$

olur. Ayrıca, $P$ ve $Q$ vektörleri ortonormal vektörler olduğundan, $g(P_M,Q_M) = 0$ ve $g(P_M,P_M) = 1$ bulunur. O halde, Yardımcı Teorem 4.8 ve (4.111) denklemi, (4.109) denkleminde kullanılarak her $X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
&R(X,Y,Z,W) = \alpha\Big[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\Big] \\
&+\beta\Big[g(Y,P_M)g(Z,P_M)g(X,W) - g(X,P_M)g(Z,P_M)g(Y,W) + g(X,P_M)g(W,P_M)g(Y,Z) \\
&-g(Y,P_M)g(W,P_M)g(X,Z)\Big] + \gamma\Big[g(Y,Z)\{g(X,P_M)g(W,Q_M) + g(W,P_M)g(X,Q_M)\} \\
&-g(X,Z)\{g(Y,P_M)g(W,Q_M) + g(W,P_M)g(Y,Q_M)\} + g(X,W)\{g(Y,P_M)g(Z,Q_M) \\
&+g(Z,P_M)g(Y,Q_M)\} - g(Y,W)\{g(X,P_M)g(Z,Q_M) + g(Z,P_M)g(X,Q_M)\}\Big]
\end{aligned} \tag{4.112}$$

elde edilir. (4.112) denklemi $X$ ve $W$ üzerinde daraltılırsa,

$$Ric(Y,Z) = [\alpha(q-1)+\beta]g(Y,Z) + \beta(q-2)\phi(Y)\phi(Z) + \gamma(q-2)[\phi(Y)\psi(Z) + \phi(Z)\psi(Y)] \tag{4.113}$$

bulunur. (4.113) denklemi $Y$ ve $Z$ üzerinde daraltılırsa, $r$ skaler eğriliği

$$r = (q-1)(\alpha q + 2\beta) \tag{4.114}$$

biçiminde elde edilir. $j = 1,2,\ldots,n_1$ için $\{e_j\} \in \chi(M)$ ve $s = n_1+1,\ldots,n$ için $\{e_s\} \in \chi(N)$ olmak üzere, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $M \times_f N$ katlı çarpımı için bir ortonormal çatı alanı olsun. $M \times_f N$ katlı çarpımı $G(QC)_n$ manifold olduğunda, (4.10) ve (4.112) denklemleri kullanılarak, kesitsel eğrilik

$$\sum_{j<s}^{n} K(e_j \wedge e_s) = \frac{\Delta f}{f} = \frac{\alpha q + \beta}{2} \tag{4.115}$$

biçiminde elde edilir. $f$ fonksiyonunun Hessian'ı $g$ metriği ile orantılı olduğundan,

$$Hessf(X,Y) = \frac{\Delta f}{q} g(X,Y) \tag{4.116}$$

yazılabilir. Bu durumda, (4.114) ve (4.115) denklemleri, (4.116) denkleminde kullanılırsa

$$Hessf(X,Y) + fKg(X,Y) = 0 \tag{4.117}$$

elde edilir. Burada $K = \frac{(q-1)\beta - r}{2q(q-1)}$ biçiminde elde edilir.

Obata'nın [51] numaralı makalesine göre, iki veya daha büyük boyutlu, tam bağlantılı $M^n$ Riemann manifoldunun $\nabla_X df = -c^2 fX$ (yani $Hessf(X,Y) + c^2 fg(X,Y) = 0$) koşulunu sağlayan, sabitten farklı bir $f$ fonksiyonuna sahip olması için gerek ve yeter koşul $M$'in $(n+1)-$boyutlu Euclid uzayında $\frac{1}{c}$ yarıçaplı $S^n(c)$ küresine izometrik olmasıdır.

Bu durumda, (4.117) denkleminden, eğer $\beta + \alpha q < 0$ ise, $K > 0$ olur ve böylece $M$, $(q+1)$-boyutlu Euclid uzayında, $\frac{1}{\sqrt{K}}$ yarıçaplı bir küreye izometriktir. Bu ise, $M$'nin bir Einstein manifoldu olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla, $\beta, \gamma \neq 0$ olduğundan (4.113) denkleminden $q = 2$ elde edilir.

Ayrıca, $\beta + \alpha q < 0$ olduğundan, (4.115) denkleminden $\Delta f < 0$ bulunur ve Bochner Teoreminden $f$ sabit olur ve $M \times N$ Riemann çarpımına indirgenmiş olur.

**2. Durum:** Şimdi de, $P, Q \in \chi(N)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda her $Y \in \chi(M)$ için

$$\phi(Y) = \tilde{g}(Y,P) = 0 \quad ve \quad \psi(Y) = \tilde{g}(Y,Q) = 0 \tag{4.118}$$

olacağından (4.109) ve (4.118) denklemlerinden her $X,Y,Z,W \in \chi(M)$

$$\tilde{R}(X,Y,Z,W) = \alpha[\tilde{g}(Y,Z)\tilde{g}(X,W) - \tilde{g}(X,Z)\tilde{g}(Y,W)] \tag{4.119}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 4.8 ve (4.119) denklemi kullanılarak

$$R(X,Y,Z,W) = \alpha[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)] \tag{4.120}$$

bulunur. (4.120) denklemi $X$ ve $W$ üzerinde daraltılırsa

$$Ric(Y,Z) = \alpha(q-1)g(Y,Z) \tag{4.121}$$

elde edilir ve böylece $M$ Einstein manifoldu olur. Ayrıca, (4.121) denklemi $Y$ ve $Z$, üzerinde tekrar daraltılırsa skaler eğriliği $r = aq(q-1)$ biçiminde olur.

**3. Durum:** Şimdi ise, $P \in \chi(M)$ ve $Q \in \chi(N)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda ise her $Y \in \chi(M)$ için

$$\phi(Y) = \tilde{g}(Y,P) = g(Y,P_M) \quad ve \quad \psi(Y) = \tilde{g}(Y,Q) = 0 \tag{4.122}$$

olur ve bu durumda Yardımcı Teorem 4.8 ve (4.122) denklemi, (4.109) denkleminde kullanılarak her $X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) &= \alpha\Big[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\Big] \\ &+\beta\Big[g(Y,P_M)g(Z,P_M)g(X,W) - g(X,P_M)g(Z,P_M)g(Y,W) \\ &+g(X,P_M)g(W,P_M)g(Y,Z) - g(Y,P_M)g(W,P_M)g(X,Z)\Big] \end{aligned} \tag{4.123}$$

elde edilir. Bu da, $M$ manifoldunun yarı-sabit eğrilikli manifold olması anlamına gelir. 1. durumdaki benzer işlemler tekrarlandığında, $M$ yine 2-boyutlu bir Einstein manifolduna indirgenmektedir.

**4. Durum:** Son olarak da, $P \in \chi(N)$ ve $Q \in \chi(M)$ olduğu kabul edilsin. Bu kez her $Y \in \chi(M)$ için

$$\phi(Y) = \tilde{g}(Y,P) = 0 \tag{4.124}$$

olacağından 2. durumdaki sonuçlar elde edilir ve ispat tamamlanır. □

### 4.1.3 Pseudo-projektif olarak düz ve pseudo-projektif olarak korunumlu Riemann manifoldlar

Bu bölümde, öncelikle pseudo-projektif olarak düz ve pseudo-projektif olarak korunumlu keyfi Riemann manifoldları ve daha sonra da özel olarak genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldları ele alınacaktır.

**Önerme 4.1.** *Pseudo-projektif olarak düz her Riemann manifoldu, bir Einstein manifoldudur.*

*İspat.* $(M^n, g)$, $n(>2)$ boyutlu, pseudo-projektif olarak düz olan bir Riemann manifoldu olsun. Dolayısıyla, pseudo-projektif eğrilik tensörü özdeş olarak sıfıra eşittir. Bu durumda, (3.22) denkleminden,

$$\begin{aligned} &\alpha R(X,Y,Z,W) + \beta[Ric(Y,Z)g(X,W) - Ric(X,Z)g(Y,W)] \\ =&\frac{r}{n}\left(\frac{\alpha}{n-1} + \beta\right)[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)]. \end{aligned} \tag{4.125}$$

bulunur. (4.125) denklemi $X$ ve $W$ üzerinde daraltılırsa

$$[\alpha + \beta(n-1)].[Ric(Y,Z) - \frac{r}{n}g(Y,Z)] = 0. \tag{4.126}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\alpha + \beta(n-1) = 0 \ \ veya \ \ Ric(Y,Z) = \frac{r}{n}g(Y,Z). \tag{4.127}$$

biçiminde iki durum ortaya çıkar.

*1. Durum:* $Ric(Y,Z) = \frac{r}{n}g(Y,Z)$ sağlanıyor ise manifoldun bir Einstein manifoldu olduğu görülmektedir.

*2. Durum* Şimdi de $\alpha + \beta(n-1) = 0$ bağıntısının gerçeklendiği kabul edilsin. Bu durumda, $\beta = -\frac{\alpha}{n-1}$ denklemi, pseudo-projektif eğrilik tensörünün tanımında yerine yazılırsa, $P$ projektif eğrilik tensörü olmak üzere

$$\bar{P}(X,Y,Z,W) = \alpha \underbrace{\left[R(X,Y,Z,W) - \frac{1}{n-1}[Ric(Y,Z)g(X,W) - Ric(X,Z)g(Y,W)]\right]}_{=P(X,Y,Z,W)} \tag{4.128}$$

bulunur. Diğer taraftan manifold pseudo-projektif olarak düz ve $\alpha \neq 0$ olduğundan, (4.128) denkleminden

$$R(X,Y,Z,W) = \frac{1}{n-1}[Ric(Y,Z)g(X,W) - Ric(X,Z)g(Y,W)] \tag{4.129}$$

elde edilir. Yani manifold sabit eğriliklidir. Dolayısıyla, (4.129) denklemi $Y$ ve $Z$ üzerinde daraltılarak, manifoldun yine bir Einstein manifolduna indirgendiği görülür. □

**Önerme 4.2.** *$(M^n,g)$, $(n>2)$ manifoldu pseudo-projektif olarak korunumlu ise, $(M^n,g)$ ya konformal olarak korunumludur (yani $divC=0$) ya da skaler eğriliği sabittir.*

*İspat.* $(M^n,g)$, $(n>2)$ pseudo-projektif olarak korunumlu (yani $div\bar{P}=0$) bir Riemann manifoldu olsun. (3.22) denkleminin kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned}(\nabla_W\bar{P})(X,Y)Z = {} & \alpha(\nabla_W R)(X,Y)Z+\beta[(\nabla_W Ric)(Y,Z)X-(\nabla_W Ric)(X,Z)Y] \\ & -\frac{dr(W)}{n}\left(\frac{\alpha}{n-1}+\beta\right)[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y].\end{aligned} \tag{4.130}$$

elde edilir. Ardından, (4.130) denklemi $W$ üzerinden daraltılırsa,

$$\begin{aligned}(div\bar{P})(X,Y)Z = {} & \alpha(divR)(X,Y)Z+\beta[(\nabla_X Ric)(Y,Z)-(\nabla_Y Ric)(X,Z)] \\ & -\frac{1}{n}\left(\frac{\alpha}{n-1}+\beta\right)[g(Y,Z)dr(X)-g(X,Z)dr(Y)].\end{aligned} \tag{4.131}$$

bulunur. Riemann eğrilik tensörünün diverjansı

$$(divR)(X,Y)Z=(\nabla_X Ric)(Y,Z)-(\nabla_Y Ric)(X,Z) \tag{4.132}$$

olduğundan, (4.131) ve (4.132) denklemleri kullanılarak, pseudo-projektif eğrilik tensörünün diverjansı

$$\begin{aligned}(div\bar{P})(X,Y)Z = {} & (\alpha+\beta)[(\nabla_X Ric)(Y,Z)-(\nabla_Y Ric)(X,Z)] \\ & -\frac{1}{n}\left(\frac{\alpha}{n-1}+\beta\right)[g(Y,Z)dr(X)-g(X,Z)dr(Y)]\end{aligned} \tag{4.133}$$

biçiminde elde edilir. Dolayısıyla, pseudo-projektif olarak korunumlu $(M^n,g)$, $(n>2)$ manifoldunda,

$$(\alpha+\beta)[(\nabla_X Ric)(Y,Z)-(\nabla_Y Ric)(X,Z)]=\frac{1}{n}\left(\frac{\alpha}{n-1}+\beta\right)[g(Y,Z)dr(X)-g(X,Z)dr(Y)] \tag{4.134}$$

denklemi sağlanmaktadır. (4.134) denklemi $Y$ ve $Z$ üzerinde daraltılırsa, 2. Bianchi Özdeşliği de kullanılarak ($n>2$ olduğundan), her $X\in TM$ için $(\alpha-\beta)dr(X)=0$ bulunur. Bu durumda, ya $\alpha=\beta$ gerçeklenir ya da manifoldun skaler eğriliği sabittir. Eğer, $\alpha=\beta$ eşitliği sağlanıyorsa, (4.134) denklemi ve $\alpha\neq 0$ olduğu kullanılarak

$$(\nabla_X Ric)(Y,Z)-(\nabla_Y Ric)(X,Z)=\frac{1}{2(n-1)}[g(Y,Z)dr(X)-g(X,Z)dr(Y)] \tag{4.135}$$

elde edilir. Bu da, $C$ konformal eğrilik tensörü olmak üzere; $divC=0$ koşulunun sağlanmasına denktir. Dolayısıyla, manifold konformal olarak korunumlu olur. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

**Not 4.1.** Eğer $\alpha \neq \beta$ ise, bu durumda, $r$ sabit olacağından, (4.134) denkleminden

$$(\alpha+\beta)[(\nabla_X Ric)(Y,Z)-(\nabla_Y Ric)(X,Z)]=0 \tag{4.136}$$

elde edilir. Bu durumda da, ya $\alpha+\beta=0$ olur ya da manifold Codazzi tipinde (bknz. [52]) Ricci tensörüne sahip olur.

Bu bölümün devamında, $(M^n,g)$, $(n>2)$ manifoldu; pseudo-projektif olarak korunumlu ve sabit ilgili skalerlere sahip $G(QE)_n$ manifoldunu temsil etmektedir. Dolayısıyla, (2.21) denkleminden $M$'nin skaler eğriliği $r=an+b$ sabittir. Ayrıca, pseudo-projektif eğrilik tensörünün tanımındaki $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ sayıları için $\alpha\neq-\beta$ olduğu kabul edilirse, (4.136) denkleminden, manifoldun Ricci tensörü daima Codazzi tipinde olacaktır. Yani,

$$(\nabla_Z Ric)(X,Y)=(\nabla_X Ric)(Z,Y), \quad \forall\, X,Y,Z\in\chi(M) \tag{4.137}$$

denklemi sağlanır. Bu durumda, aşağıdaki teorem kanıtlanacaktır:

**Teorem 4.11.** *$(M^n,g)$, $(n>2)$ pseudo-projektif olarak korunumlu, ilgili skalerleri sabit olan bir $G(QE)_n$ manifoldu olsun ve öyle ki; $\bar{P}$ tensörünün tanımındaki $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ için $\alpha\neq-\beta$ kabul edilsin. Bu durumda, aşağıdaki sonuçlar gerçeklenmektedir:*

*(1) Manifoldun $V$ üreteci $\nabla_U U$ vektörüne ve $U$ üreteci de $\nabla_V V$ vektörüne diktir.*

*(2) Manifoldun $A$ 1-formu diverjanssızdır.*

*(3) Manifoldun $B$ 1-formunun diverjansı sıfırdan farklı ise (dolayısıyla $\nabla_U U+\nabla_V V\neq 0$ ise),*

*(i) $(M^n,g)$ manifoldu, ilgili skalerlerinin toplamları sıfır olan bir yarı Einstein manifoldudur.*

*(ii) $(M^n,g)$ manifoldunun $U$ üreteci parallel vektör alanıdır.*

*(iii) $U$ üretecinin integral eğrileri jeodeziklerden ibarettir.*

*(iv) $(M^n,g)$ manifoldu Ricci simetriktir.*

*İspat.* $M$ manifoldunun (2.21) ile verilen Ricci tensörünün kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned}(\nabla_Z Ric)(X,Y) &= b[(\nabla_Z A)(X)A(Y)+A(X)(\nabla_Z A)(Y)] \\ &+c[(\nabla_Z A)(X)B(Y)+A(X)(\nabla_Z B)(Y)+(\nabla_Z A)(Y)B(X)+A(Y)(\nabla_Z B)(X)]\end{aligned} \tag{4.138}$$

bulunur ve (4.138) denklemi, (4.137) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & b[(\nabla_Z A)(X)A(Y)+A(X)(\nabla_Z A)(Y)-(\nabla_X A)(Z)A(Y)-A(Z)(\nabla_X A)(Y)] \\ & +c[(\nabla_Z A)(X)B(Y)+A(X)(\nabla_Z B)(Y)+(\nabla_Z A)(Y)B(X)+A(Y)(\nabla_Z B)(X) \\ & -(\nabla_X A)(Z)B(Y)-A(Z)(\nabla_X B)(Y)-(\nabla_X A)(Y)B(Z)-A(Y)(\nabla_X B)(Z)]=0 \end{aligned} \tag{4.139}$$

elde edilir. (4.139) denkleminde $Y=U$ yazılırsa

$$\begin{aligned} b[(\nabla_Z A)(X)-(\nabla_X A)(Z)]+&c[A(X)(\nabla_Z B)(U)+(\nabla_Z B)(X) \\ & -A(Z)(\nabla_X B)(U)-(\nabla_X B)(Z)]=0. \end{aligned} \tag{4.140}$$

Benzer şekilde, (4.140) denkleminde $X=U$ yazılırsa

$$-b(\nabla_U A)(Z)+c[2(\nabla_Z B)(U)-A(Z)(\nabla_U B)(U)-(\nabla_U B)(Z)]=0 \tag{4.141}$$

elde edilir ve son denklemde de $Z=V$ yazılırsa

$$-b(\nabla_U A)(V)+2c(\nabla_V B)(U)=0 \tag{4.142}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.139) denkleminde $Y=Z=V$ ve $X=U$ yazılırsa,

$$b(\nabla_V A)(V)+2c(\nabla_U B)(U)=0 \tag{4.143}$$

bulunur. Ayrıca, $g(U,V)=0$ olduğundan, konneksiyonun özelliğinden,

$$g(\nabla_U U,V)+g(U,\nabla_U V)=0 \;\; ve \;\; g(\nabla_V U,V)+g(U,\nabla_V V)=0 \tag{4.144}$$

denklemleri sağlanmaktadır. O halde, (4.144) denklemi, (4.142) ve (4.143) denkleminde kullanılırsa, aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{cases} -bg(\nabla_U U,V)+2cg(\nabla_V V,U)=0 \\ -bg(\nabla_V V,U)-2cg(\nabla_U U,V)=0 \end{cases} \tag{4.145}$$

Yukarıdaki denklem sistemi düzenlendiğinde, $c[(g(\nabla_U U,V))^2+(g(\nabla_V V,U))^2]=0$ bulunur. O halde, $(g(\nabla_U U,V))^2+(g(\nabla_V V,U))^2=0$ ise, bu durumda $g(\nabla_U U,V)=g(\nabla_V V,U)=0$ olmak zorundadır. Yani $V$ üreteci $\nabla_U U$ vektörüne ve $U$ üreteci de $\nabla_V V$ vektörüne diktir.

Eğer $c=0$ ise, (4.145) numaralı denklem sisteminden, $b\neq 0$ olması gerektiğinden, $g(\nabla_U U,V)=g(\nabla_V V,U)=0$ bulunur. Çünkü, aksi takdirde $b=c=0$ bulunacağından manifold Einstein manifoldun indirgenir. Dolayısıyla, her iki durumda da,

$$g(\nabla_U U,V)=g(\nabla_V V,U)=0 \tag{4.146}$$

elde edilir. (4.140) denkleminde $X = V$ yazılır ve (4.146) denklemi de kullanılırsa

$$b[(\nabla_Z A)(V) - (\nabla_V A)(Z)] - c(\nabla_V B)(Z) = 0 \tag{4.147}$$

bulunur. Benzer şekilde (4.139) denkleminde $Y = V$ ve $Z = U$ yazılır ve (4.146) denklemi kullanılırsa

$$-b(\nabla_X A)(V) + c(\nabla_U A)(X) = 0 \tag{4.148}$$

elde edilir. Ayrıca, (4.138) denklemi $X$ ve $Z$ üzerinde daraltılırsa

$$\begin{aligned} b[div(A)A(Y) + (\nabla_U A)(Y)] + c[div(A)B(Y) + div(B)A(Y) \\ + (\nabla_U B)(Y) + (\nabla_V A)(Y)] = 0 \end{aligned} \tag{4.149}$$

bulunur. (4.149) denkleminde $Y = U$ yazılır ve (4.146) denklemi kullanılırsa,

$$bdiv(A) + cdiv(B) = 0 \tag{4.150}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.149) denkleminde $Y = V$ yazılırsa, $cdiv(A) = 0$ bulunur. Bu durumda, ya $c = 0$ ya da $div(A) = 0$ elde edilir. Eğer $c = 0$ ise, (4.150) denklemi kullanılarak, ($b \neq 0$ olması gerektiğinden) yine $div(A) = 0$ bulunur. Dolayısıyla, her iki durumda da $A$ 1-formu diverjanssızdır. Bu durumda, (4.150) denkleminden ya $c = 0$ ya da $div(B) = 0$ şeklinde iki durum ortaya çıkar:

**1. Durum:** İlk olarak $c \neq 0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $div(B) = 0$ olur. Ayrıca, $div(A) = 0$ daima sağlandığından, (4.149) denklemi

$$b(\nabla_U A)(Y) + c[(\nabla_U B)(Y) + (\nabla_V A)(Y)] = 0 \tag{4.151}$$

formuna indirgenir. Bu durumda, (4.141) ve (4.151) denklemleri taraf tarafa toplanır ve yine (4.146) denklemi gözönünde bulundurulursa

$$c[(\nabla_V A)(Y) - 2(\nabla_Y A)(V)] = 0 \tag{4.152}$$

denklemi elde edilir. Yukarıda $c \neq 0$ kabul edildiğinden, $(\nabla_V A)(Y) = 2(\nabla_Y A)(V)$ bulunur. Son denklem (4.147) denkleminde yerine yazılırsa

$$b(\nabla_Z A)(V) + c(\nabla_V B)(Z) = 0 \tag{4.153}$$

elde edilir. (4.148) ve (4.153) denklemleri taraf tarafa toplanır ve $c \neq 0$ olduğu kullanılırsa $\nabla_U U + \nabla_V V = 0$ bulunur.

**2. Durum:** Diğer taraftan, $c = 0$ olduğu kabul edilirse, (4.140) denkleminden (bu durumda $b \neq 0$ olacağından),

$$(\nabla_Z A)(X) = (\nabla_X A)(Z) \tag{4.154}$$

bulunur. (4.139) denkleminde $X = U$ yazılır, (4.154) denklemi ve $c = 0$ olduğu kullanılırsa her $X, Z \in TM$ için

$$(\nabla_Z A)(X) = g(\nabla_Z U, X) = 0 \tag{4.155}$$

bulunur. Böylece, manifoldun $U$ üreteci paralel vektör alanı olur. Yani, her $X \in TM$ için $\nabla_X U = 0$ olur. Buradan da $X = U$ yazılarak $\nabla_U U = 0$ bulunur. Yani, $U$'nun integral eğrilerinin jeodezikleriden ibaret olduğu sonucuna varılır. Ayrıca, (4.155) denkleminden, manifoldun Ricci tensörü $\nabla Ric = 0$ koşulunu gerçekler. O halde, bu manifold Ricci simetriktir. Dahası, (4.155) denkleminin bir kez daha kovaryant türevi alınır ve Ricci Özdeşliği kullanılırsa, her $X, Y, Z \in TM$ için $R(U, X, Y, Z) = 0$ bulunur. Son denklem de $X$ ve $Y$ üzerinden daraltılırsa, $c = 0$ olduğundan $Ric(Z, U) = (a + b)A(Z) = 0$ bulunur ve böylece $a + b = 0$ olur. Sonuç olarak manifold ilgili skalerlerinin toplamı sıfır olan bir yarı Einstein manifolduna indirgenir. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

□

**Not 4.2.** [53] $(M^n)$, $(n \geqslant 2)$ tam Riemann manifoldu, $l$ ve $m$ sabit katsayılar olmak üzere

$$\nabla_\mu \nabla_\lambda \rho = (-l\rho + m) g_{\mu\lambda}, \tag{4.156}$$

koşulunu sağlayan bir özel $\rho$ konsörkılır vektör alanına sahip olsun. Eğer $l = m = 0$ ise, $M$ manifoldu, $(n-1)$-boyutlu tam $M^*$ Riemann manifoldu ile $I$ aralığının $M^* \times I$ biçimindeki direk çarpımı olarak yazılabilir.

Bu not aslında De Rham ayrıştırması olarak bilinen teoremin (bknz. [54]) bir özel halidir. Dolayısıyla, yukarıdaki not ve Teorem 4.11 yardıyla aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur:

**Sonuç 4.2.** *$(M^n, g)$, $(n > 2)$ tam, pseudo-projektif olarak korunumlu, ilgili skalerleri sabit olan bir $G(QE)_n$ manifoldu olsun ve öyle ki; $\bar{P}$ tensörünün tanımındaki $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\alpha \neq -\beta$ kabul edilsin. Eğer $U$ üreteci gradient ve $div(B) \neq 0$ ise, $M$ manifoldu $(n-1)$-boyutlu tam $M^*$ Riemann manifoldu ile $I$ aralığının $M^* \times I$ direk çarpımıdır.*

#### 4.1.3.1 Pseudo-Projektif Olarak Düz Katlı Çarpım Manifoldları

Bu alt bölümde, pseudo-projektif olarak düz olan bir Riemann manifoldu üzerinde özel bir katlı çarpım yapısının varolması durumu incelenecektir. $(N^n, g)$ taban manifoldu ve $f : N \to \mathbb{R}^+$ çarpım fonksiyonu olmak üzere $M = N \times_f \mathbb{R}^1$ katlı çarpım manifoldu ele alınsın. Bu durumda, $h, i, j, k \ldots \in \{1, 2, 3, \ldots n+1\}$ ve $a, b, c, d \ldots \in \{2, 3, \ldots n+1\}$ olmak üzere, $M = N \times_f \mathbb{R}^1$ katlı çarpım manifoldunun metriği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(\tilde{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{ab} & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix} \tag{4.157}$$

(4.157) denklemi ile verilen katlı çarpım metriğine ait Christoffel sembollerinin sıfırdan farklı tüm bileşenleri

$$\tilde{\Gamma}^a_{bc} = \Gamma^a_{bc}, \ \tilde{\Gamma}^a_{11} = -ff^a, \ \tilde{\Gamma}^1_{1a} = \frac{f_a}{f}, \ \ \tilde{\Gamma}^1_{11} = \bar{\Gamma}^1_{11} \tag{4.158}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada, $f_b = \nabla_b f, \ f^a = f_b g^{ba}$ biçimindedir.

Bu durumda, $M$ ve $N$ manifoldlarının, sırasıyla $\tilde{R}$ and $R$ eğrilik tensörlerinin sıfırdan farklı lokal bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\tilde{R}^a_{bcd} = R^a_{bcd}, \quad \tilde{R}^1_{d1b} = -\frac{1}{f}\nabla_d f_b \tag{4.159}$$

Dolayısıyla, $M$ ve $N$ manifoldlarının sırasıyla $\tilde{Ric}$ and $Ric$ Ricci tensörlerinin sıfırdan farklı lokal bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\tilde{Ric}_{bc} = Ric_{bc} + \frac{1}{f}(\nabla_c f_b) \quad \tilde{Ric}_{c1} = 0, \quad \tilde{Ric}_{11} = f(\Delta f) \tag{4.160}$$

Burada $\Delta f$, $f$ çarpım fonksiyonunun $g$ metriğine göre laplasyenini göstermektedir. Dahası, $M$ ve $N$ manifoldlarının $\tilde{r}$ ve $r$ skaler eğrilikleri, aşağıdaki bağıntıyı sağlar:

$$\tilde{r} = r + \frac{2\Delta f}{f} \tag{4.161}$$

**Teorem 4.12.** $M^{n+1} = N^n \times_f \mathbb{R}^1$, $(n > 3)$ *pseudo-projektif olarak düz, katlı çarpım manifoldu olsun. Bu durumda, N taban manifoldu projektif olarak düz, yani bir Einstein manifoldudur.*

*İspat.* $M^{n+1} = N^n \times_f \mathbb{R}^1$ pseudo-projektif olarak düz, katlı çarpım manifoldu olsun. Bu durumda, $M$ manifoldunun $\tilde{P}$ pseudo-projektif eğrilik tensörü özdeş olarak sıfıra eşittir. ( Dikkat edilecek olursa $boyM = n+1$.) Dolayısıyla, (3.22) denkleminden

$$\alpha\tilde{R}^h_{kji} = -\beta[\tilde{Ric}_{jk}\delta^h_i - \tilde{Ric}_{ik}\delta^h_j] + \frac{\tilde{r}}{n+1}(\frac{\alpha}{n} + \beta)[\tilde{g}_{jk}\delta^h_i - \tilde{g}_{ik}\delta^h_j] \tag{4.162}$$

elde edilir. (4.159)-(4.161) denklemleri (4.162) denkleminde kullanılarak

$$\begin{aligned}\alpha R^a_{dcb} =& -\beta[Ric_{cd}\delta^a_b - Ric_{bd}\delta^a_c] + \frac{r}{n+1}(\frac{\alpha}{n}+\beta)[g_{cd}\delta^a_b - g_{bd}\delta^a_c] \\ & -\frac{\beta}{f}[\nabla_c f_d\delta^a_b - \nabla_b f_d\delta^a_c] + \frac{2}{n+1}\frac{\Delta f}{f}(\frac{\alpha}{n}+\beta)[g_{cd}\delta^a_b - g_{bd}\delta^a_c]\end{aligned} \tag{4.163}$$

bulunur. (4.163) denklemi $a$ ve $b$ indisleri üzerinden daraltılırsa

$$\begin{aligned}[\alpha+(n-1)\beta]Ric_{cd} =& r\frac{(n-1)}{n+1}(\frac{\alpha}{n}+\beta)g_{cd} - \frac{\beta}{f}(n-1)\nabla_c f_d \\ & + \frac{2}{n+1}\frac{\Delta f}{f}(\frac{\alpha}{n}+\beta)(n-1)g_{cd}\end{aligned} \tag{4.164}$$

bulunur. (4.164) denklemi tekrar $c$ ve $d$ indisleri üzerinden daraltılırsa

$$[2\alpha+(n-1)\beta].[r-(n-1)\frac{\Delta f}{f}] = 0 \tag{4.165}$$

olur ve dolayısıyla aşağıdaki iki durum söz konusu olabilir:

**1. Durum :** İlk olarak $2\alpha+(n-1)\beta \neq$ olsun. Bu durumda, (4.165) denkleminden

$$r = (n-1)\frac{\Delta f}{f} \tag{4.166}$$

bulunur ve (4.166) ile (4.164) denklemlerinden

$$[\alpha+(n-1)\beta]Ric_{cd} = r(\frac{\alpha}{n}+\beta)g_{cd} - \frac{\beta}{f}(n-1)\nabla_c f_d \tag{4.167}$$

bağıntısı elde edilir. (4.166) ve (4.167) denklemleri (4.163) denkleminde kullanılır ve $\alpha \neq 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$R^a_{dcb} = \frac{1}{n-1}[Ric_{cd}\delta^a_b - Ric_{bd}\delta^a_c] \tag{4.168}$$

bulunur ki bu da $N$ manifoldunun, (3.20) ile tanımlanan projektif eğrilik tensörünün sıfıra eşit olduğu anlamına gelir. O halde $N$ manifoldu projektif olarak düz ve dolayısı ile bir Einstein manifoldudur.

**2. Durum :** Şimdi de

$$2\alpha+(n-1)\beta = 0 \tag{4.169}$$

olduğu kabul edilsin. Bu durumda (4.164) ve (4.169) denklemleri ve $\alpha \neq 0$ olduğu kullanılırsa

$$Ric_{cd} = \frac{1}{n}(r+2\frac{\Delta f}{f})g_{cd} - \frac{2}{f}\nabla_c f_d \tag{4.170}$$

bulunur. (4.163) ve (4.170) denklemleri yardımıyla 1. durum ile benzer şekilde (4.168) eşitliği elde edilir ve yine $N$ manifoldu projektif olarak düz, yani Einstein manifoldu olur. □

Önerme 4.1 ve Teorem 4.12'den, pseudo-projektif olarak düz, $M^{n+1} = N^n \times_f \mathbb{R}^1$ katlı çarpım manifoldu ve bu katlı çarpımın $N$ taban manifoldu Einstein manifoldlarıdır. Dolayısıyla, $M$ ve $N$ manifodlarının Ricci tensörleri (4.160) denkleminde yerine yazılırsa, $a,b,c,d\ldots \in \{1,2,3\ldots n\}$ olmak üzere,

$$\frac{\tilde{r}}{n+1} g_{ab} = \frac{r}{n} g_{ab} + \frac{1}{f}(\nabla_a f_b) \tag{4.171}$$

elde edilir. (4.171) denklemi $g^{ab}$ ile daraltılırsa

$$\frac{n}{n+1}\tilde{r} = r + \frac{\Delta f}{f} \tag{4.172}$$

elde edilir. Bu durumda, (4.172) denklemi (4.161) denkleminden çıkartılırsa

$$\frac{r}{n-1} = \frac{\Delta f}{f} \tag{4.173}$$

bulunur. $M^{n+1}$, $(n > 3)$ ve $N$ Einstein manifoldları olduklarından dolayı $\tilde{r}$ ve $r$ sabittir ve dolayısıyla (4.173) denkleminden sabit olmayan $f$ çarpım fonksiyonu, $c = \frac{r}{n-1}$ sabit olmak üzere $\Delta f = cf$ denklemini sağlar. Bu durumda, Bochner Lemma yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur:

**Sonuç 4.3.** *$M^{n+1} = N^n \times_f \mathbb{R}^1$, $(n > 3)$ kompakt, yönlendirilebilir, sınırsız ve pseudo-projektif olarak düz katlı çarpım manifoldu olsun. Bu durumda, M ve N pozitif skaler eğriliklidir.*

Son olarak, eğer $f$ çarpım fonksiyonu sabit seçilirse, $M^{n+1} = N^n \times_f \mathbb{R}^1$ Riemann çarpımına indirgenir ve $\Delta f = 0$ olur ve (4.170), (4.172), (4.173) denklemleri kullanılarak $M$ ve $N$ manifoldlarının $\tilde{R}$ ve $R$ eğrilik tensörleri sıfır bulunur. O halde, aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur:

**Sonuç 4.4.** *$M^{n+1} = N^n \times_f \mathbb{R}^1$, $(n > 3)$ kompakt, yönlendirilebilir, sınırsız ve pseudo-projektif olarak düz Riemann çarpım manifoldu olsun. Bu durumda, M ve N manifoldlarının her ikisi de lokal olarak Euclid uzaydır.*

## 4.2 *D*-Genel Çarpım Manifoldları

D. Blair, [55] numaralı çalışmada, *D*-homotetik deformasyon, (bknz. [56]), kavramından faydalanarak $M_1$ keyfi bir Riemann manifoldu ve $M_2$ hemen hemen kontakt metrik manifold (bknz. [57]) olmak üzere $M_1 \times M_2$ çarpım manifoldu üzerinde

$D$-çarpım metriği kavramını tanımlamıştır. Buna göre, $(M_1, g_1)$ Riemann manifoldu ile $(M_2, \phi_2, \xi_2, \eta_2, g_2)$ hemen hemen kontakt metrik manifoldunun $D$-çarpım manifoldu, $f \in C^\infty(M_1)$ pozitif bir fonksiyon, $\xi_2$ ve $\eta_2$, $M_2$ üzerindeki hemen hemen kontakt metrik yapının sırasıyla, karakteristik vektör alanı ve onun dual formu olmak üzere,

$$g = g_1 + fg_2 + f(f-1)\eta_2 \otimes \eta_2, \tag{4.174}$$

metriği ile verilen $(M_1 \times M_2, g)$ çarpım manifoldu olarak tanımlanmaktadır, [55]. Burada,

$$D = \{X \in \chi(M_2) : \eta_2(X) = 0\} \tag{4.175}$$

biçiminde tanımlanan $D$ kümesi kontakt dağılımı temsil etmektedir.

Bu bölümde, $M_2$ manifoldu üzerindeki koşul zayıflatılarak, $M_1 \times M_2$ manifoldu üzerindeki $D$-çarpım metrik yapısı genelleştirilecek ve $D$-genel çarpım metriği kavramı tanımlanacaktır.

**Tanım 4.4.** *$(M_j, g_j)$, $(j = 1,2)$ iki Riemann manifoldu ve $\xi_2 \in \chi(M_2)$, $g_2$ metriğine göre dual formu $\eta_2$ olan herhangi bir birim vektör alanı olsun. $D = Ker\eta_2$ olmak üzere,* (4.174) *metriği ile verilen $(M_1 \times M_2, g)$ çarpımına D-genel çarpım manifoldu adı verilir.*

**Notasyon 4.1.** Bu bölüm boyunca, $m_j = boyM_j$, $(j = 1,2)$, $f$ fonksiyonu $M_1$ üzerinde pozitif ve diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\xi_2 \in \chi(M_2)$, $g_2$ metriğine göre duali $\eta_2$ olan herhangi bir birim vektör alanı olmak üzere, $(M_j, g_j)$, $(j = 1,2)$ iki Riemann manifoldunu temsil edecektir. Bu durumda, $(M = M_1 \times M_2, g)$, (4.174) metriğine sahip ve $D = Ker\eta_2$ koşulunu sağlayan $D$-genel çarpım manifoldunu göstermektedir. Ayrıca ileriki alt bölümlerde, $||\cdot||$ ile $M_1$ üzerindeki bir vektör alanının $g_1$ metriğine göre uzunluğu gösterilecektir. Aksi belirtilmedikçe, $j$-indisine sahip olan (veya olmayan) her geometrik objenin $M_j$, $j = 1,2$ bileşenlerine (veya $M = M_1 \times M_2$ çarpım manifolduna) ait olduğu kabul edilecektir.

(4.174) ile verilen $g$ metriğinin bileşenleri ve Tanım 4.4 kullanılarak doğrudan hesap sonucunda, aşağıdaki yardımcı teorem elde edilir:

**Yardımcı Teorem 4.5.** *$(M_j, g_j)$, $j = 1,2$ manifoldları üzerindeki Levi-Civita konneksiyonları $\nabla^j$ ile gösterilmek üzere,* (4.174) *ile verilen g metriğine ait Levi-Civita* *konneksiyonunun bileşenleri aşağıdaki gibidir:*

$$\begin{aligned}
&\nabla_{X_1}Y_1 = \nabla^1_{X_1}Y_1,\ \ \nabla_{X_1}Y_2 = \nabla_{Y_2}X_1 = \frac{X_1(f)}{2f}[Y_2+\eta_2(Y_2)\xi_2],\\
&\nabla_{X_2}Y_2 = \nabla^2_{X_2}Y_2 + \frac{(f-1)}{2f}[g_2(\nabla^2_{X_2}\xi_2,Y_2)+g_2(\nabla^2_{Y_2}\xi_2,X_2)]\xi_2\\
&\qquad + f(f-1)[\eta_2(Y_2)(i_{X_2}d\eta_2)^\sharp + \eta_2(X_2)(i_{Y_2}d\eta_2)^\sharp]\\
&\qquad - [g_2(X_2,Y_2)+(2f-1)\eta_2(X_2)\eta_2(Y_2)]\nabla^1 f,\ \ X_j,Y_j\in\chi(M_j),\, j=1,2
\end{aligned} \tag{4.176}$$

*Burada, i ve $\sharp$ sırasıyla, her $X,Y$ için $(i_X d\eta_2)(Y) = d\eta_2(X,Y)$ biçiminde tanımlanan iç çarpım operatörünü ve $g_2$ metriğine göre müzikal izomorfizmayı göstermektedir.*

Yardımcı Teorem 4.5 yardımıyla, bu bölümün devamında da kullanılacak olan aşağıdaki sonuç elde edilir:

**Yardımcı Teorem 4.6.** *$D = Ker\eta_2$ dağılımının $\xi_2$ vektör alanı doğrultusunda kovaryant olarak invaryant kalması (yani her $V\in D$ için $\nabla^2_{\xi_2}V\in D$ olması) için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki koşulun sağlanmasıdır:*

$$i_{\xi_2}d\eta_2 = 0. \tag{4.177}$$

Bu bölümün devamında kullanılacak olan hipotez aşağıdaki gibi olacaktır:

**Hipotez 4.1.** $\xi_2$ vektör alanının $g_2$ metriğine göre paralel (yani her $X_2\in\chi(M_2)$ için $\nabla^2_{X_2}\xi_2 = 0$) olduğu kabul edilsin. Bu durumda $\eta_2$ dual formu kapalıdır (yani $d\eta_2 = 0$'dır) ve dolayısıyla (4.177) denklemi kendiliğinden gerçektenir.

Böylece, Yardımcı Teorem 4.5 kullanılarak, aşağıdaki sonuç elde edilir:

**Yardımcı Teorem 4.7.** *Hipotez 4.1 altında,* (4.174) *ile verilen D-genel çarpım metriğine ait Levi-Civita konneksiyonunun bileşenleri aşağıdaki gibidir:*

$$\begin{aligned}
&\nabla_{X_1}Y_1 = \nabla^1_{X_1}Y_1,\ \ \nabla_{X_1}Y_2 = \nabla_{Y_2}X_1 = \frac{X_1(f)}{2f}[Y_2+\eta_2(Y_2)\xi_2],\\
&\nabla_{X_2}Y_2 = \nabla^2_{X_2}Y_2 - [g_2(X_2,Y_2)+(2f-1)\eta_2(X_2)\eta_2(Y_2)]\nabla^1 f,\ \ X_j,Y_j\in\chi(M_j),\, j=1,2
\end{aligned} \tag{4.178}$$

### 4.2.1 *D*-genel çarpım manifoldu üzerinde harmonik fonksiyonlar

$(N,h)$ bir Riemann manifoldu, $\{E_j\}_j$, $N$ manifoldu üzerinde ortonormal bir çatı ve $\nabla$, $h$ metriğine ait Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere, $\varphi\in C^\infty$ fonksiyonunun Laplasyeni

$$\Delta\varphi = iz(\nabla d\varphi) = E_jE_j(\varphi) - (\nabla_{E_j}E_j)\varphi. \tag{4.179}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $\Delta\varphi = 0$ ise, $\varphi$'e harmonik fonksiyon denir. Bu tanıma denk olarak, $\Delta\varphi = div(grad\varphi)$ olarak da yazılabilir. Burada, bir $X \in \chi(N)$ vektör alanının diverjansı $divX = h(\nabla_{E_j}X, E_j)$ denklemi ile, $\varphi$ fonksiyonunun gradienti ise, $\sharp$, $h$ metriğine göre müzikal izomorfizma olmak üzere $grad\varphi = \nabla\varphi = (d\varphi)^\sharp$ biçiminde tanımlanır. $\varphi$ fonksiyonunun Hessian tensörü de, her $X, Y \in \chi(N)$ için $Hess\varphi(X,Y) = h(\nabla_X\nabla\varphi, Y)$ biçiminde tanımlanır.

Bu bölümün devamında yapılacak olan çalışmalarda, $D$-genel çarpım manifoldu üzerindeki taban kavramı ile ilgili aşağıdaki not kullanılacaktır:

**Not 4.3.** $\{A_k\}_k$ ve $\{u_l\}_l$ sırasıyla, $M_1$ manifoldu üzerinde $g_1$ metriğine göre ve $D$ dağılımı üzerinde $g_2$ metriğine göre ortonormal çatı alanları ise, $\{A_k\}_k$ ve $\{U_l = \frac{u_l}{\sqrt{f}}\}_l$ sırasıyla, $M_1$ manifoldu ve $D$ dağılımı üzerinde, her ikisi için de $g$ metriğine göre ortonormal çatı alanlarıdır. Dolayısıyla, $\{u_l, \xi_2\}_l$ ve $\{U_l, \frac{\xi_2}{f}\}_l$, $M_2$ manifoldu üzerinde sırasıyla, $g_2$ ve $g$ metriklerine göre ortonormal çatı alanlarıdır. Böylece, $\{E_j\}_j = \{A_k\}_k \bigcup \{U_l\}_l \bigcup \{\frac{\xi_2}{f}\}$, $M$ manifoldunun $g$ metriğine göre bir ortonormal çatı alanıdır.

**Önerme 4.3.** *$(M = M_1 \times M_2, g)$ bir D-genel çarpım manifoldu olsun. Eğer* (4.177) *denklemi sağlanıyorsa, herhangi bir $\varphi \in C^\infty(M)$ fonksiyonunun Laplasyeni aşağıdaki gibi bulunur:*

$$\begin{aligned}\Delta\varphi =&\Delta_1\varphi + \frac{1}{f}\Delta_2\varphi + \frac{1-f}{f^2}[(div_2\xi_2)(\xi_2\varphi) + Hess_2\varphi(\xi_2,\xi_2)] \\ &+(m_2+1)\nabla^1(lnf)\varphi.\end{aligned} \tag{4.180}$$

*İspat.* Not 4.3 ve (4.179) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}\Delta\varphi =&E_jE_j(\varphi) - (\nabla_{E_j}E_j)\varphi \\ =&A_kA_k(\varphi) - (\nabla_{A_k}A_k)\varphi + U_lU_l(\varphi) - (\nabla_{U_l}U_l)\varphi + \frac{1}{f^2}[\xi_2\xi_2\varphi - (\nabla_{\xi_2}\xi_2)\varphi].\end{aligned} \tag{4.181}$$

bulunur. Son denklemde, (4.177) denklemi ve Yardımcı Teorem 4.5 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\Delta\varphi =&\Delta_1\varphi + \frac{1}{f}\Big[u_lu_l\varphi - (\nabla^2_{u_l}u_l + \frac{f-1}{f}(div_2\xi_2)\xi_2 - (m_2-1)\nabla^1 f)\varphi\Big] \\ &+\frac{1}{f^2}\Big[\xi_2\xi_2\varphi - (\nabla^2_{\xi_2}\xi_2 - 2f\nabla^1 f)\varphi\Big],\end{aligned} \tag{4.182}$$

elde edilir. (4.182) denklemi $\Delta_2\varphi$ ve $Hess\varphi$ cinsinden düzenlenirse, (4.180) elde edilir.
□

Ayrıca (4.180) yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

**Sonuç 4.5.** *$(M = M_1 \times M_2, g)$ bir D-genel çarpım manifoldu olsun. Eğer* (4.177) *denklemi sağlanıyorsa, her $\varphi_1 \in C^\infty(M_1)$ fonksiyonu için aşağıdakiler gerçeklenmektedir:*

*(i) $\varphi_1$ fonksiyonunun $(M,g)$ üzerinde harmonik olması için gerek ve yeter koşul $\Delta_1\varphi_1 = -(m_2+1)\nabla^1(lnf)\varphi_1$ olmasıdır;*

*(ii) Aşağıdaki ifadelerden herhangi ikisi sağlanıyorsa, üçüncüsü de sağlanır:*

*(a) $\varphi_1$ fonksiyonu $(M,g)$ üzerinde harmoniktir;*

*(b) $\varphi_1$ fonksiyonu $(M_1,g_1)$ üzerinde harmoniktir;*

*(c) $\nabla^1(lnf)$ ve $\nabla^1(\varphi_1)$ vektörleri ortogonaldir.*

**Sonuç 4.6.** *$(M = M_1 \times M_2, g)$ bir D-genel çarpım manifoldu olsun. Eğer* (4.177) *denklemi sağlanıyorsa, her $\varphi_2 \in C^\infty(M_2)$ fonksiyonu için aşağıdakiler gerçeklenmektedir:*

*(i) $\varphi_2$ fonksiyonunun $(M,g)$ üzerinde harmonik olması için gerek ve yeter koşul $\Delta_2\varphi_2 = \frac{f-1}{f}[(div_2\xi_2)\xi_2 + Hess\varphi_2(\xi_2,\xi_2)]$ olmasıdır.*

*(ii) Eğer $Hess\varphi_2(\xi_2,\xi_2) = 0$ ve aşağıdaki ifadelerden herhangi ikisi sağlanıyorsa, üçüncüsü de sağlanır:*

*(a) $\varphi_2$ fonksiyonu $(M,g)$ üzerinde harmoniktir;*

*(b) $\varphi_2$ fonksiyonu $(M_2,g_2)$ üzerinde harmoniktir;*

*(c) ya $\xi_2$ vektörünün $g_2$ metriğine göre diverjansı sıfırdır yada $\varphi_2$ fonksiyonu $\xi_2$ doğrultusunda sabittir.*

**Tanım 4.5.** *Bir $(N,h)$ Riemann manifoldu üzerinde, $\omega \in \mathscr{A}_p(N)$ p-formunun*

$$\delta^h\omega(X_1,\ldots,X_{p-1}) = (\nabla_{\bullet}\omega)(\bullet, X_1,\ldots,X_{p-1}),\ \ \forall X_1,\ldots,X_{p-1} \in \chi(N). \qquad (4.183)$$

*şeklinde tanımlanan ko-diferansiyeli sıfır ise, $\omega$ ko-kapalıdır. Dahası, $\omega$ p-formu hem kapalı hem de ko-kapalı ise, harmoniktir.*

**Önerme 4.4.** *Hipotez* 4.1 *altında, $(M = M_1 \times M_2, g)$ D-genel çarpım manifoldunun $\delta^g$ ko-diferansiyel operatörü ile $(M_j, g_j)$ bileşenlerinin $\delta^{g_j}$ $(j = 1,2)$ ko-diferansiyel operatörleri arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibidir:*

$$\delta^g\omega_1 = \delta^{g_1}\omega_1 + \frac{m_2+1}{f}w(gradf);\ \ \forall\omega_1 \in \mathscr{A}_1(M_1), \qquad (4.184)$$

$$\delta^g\omega_2 = \frac{1}{f}\delta^{g_2}\omega_2 + \frac{1-f}{f^2}\xi_2 w(\xi_2); \;\; \forall\omega_2 \in \mathscr{A}_1(M_2). \tag{4.185}$$

*İspat.* Not 4.3'de verilen ortonormal çatı alanları kullanılarak, $\delta^g$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}\delta^g\omega =& (\nabla_{E_j}\omega)(E_j) = E_j(\omega(E_j)) - \omega(\nabla_{E_j}E_j) \\ =& A_k(\omega(A_k)) - \omega(\nabla_{A_k}A_k) + U_l(\omega(U_l)) - \omega(\nabla_{U_l}U_l) \\ &+ \frac{1}{f^2}\xi_2(\omega(\xi_2)) - \omega(\nabla_{\frac{\xi_2}{f}}\frac{\xi_2}{f}).\end{aligned} \tag{4.186}$$

Yardımcı Teorem 4.7, (4.186) denkleminde kullanılırsa, ispat tamamlanır. □

Böylece aşağıdaki iki sonuç ifade edilebilir:

**Teorem 4.13.** *Hipotez* 4.1 *altında,* $f \neq 1$ *olmak üzere* $(M = M_1 \times M_2, g)$ *D-genel çarpım manifoldu üzerinde, her* $\omega \in \mathscr{A}_1(M)$ *1-formu için, aşağıdaki ifadelerden herhangi üçü sağlanıyorsa, dördüncüsü de sağlanır:*

*(i)* $\omega$ *1-formu g metriğine göre ko-kapalıdır;*

*(ii)* $\omega$ *1-formunun* $M_1$ *manifolduna kısıtlanışı* $g_1$ *metriğine göre ko-kapalıdır;*

*(iii)* $\omega$ *1-formunun* $M_2$ *manifolduna kısıtlanışı* $g_2$ *metriğine göre ko-kapalıdır;*

*(iv)* $\omega$ *1-formu aşağıdaki eşitliği gerçekler:*

$$\frac{\omega(grad f^2)}{f-1} = sabit = \frac{2}{m_2+1}\xi_2\omega(\xi_2): \tag{4.187}$$

**Sonuç 4.7.** *Hipotez* 4.1 *altında,* $f \neq 1$ *olmak üzere* $(M = M_1 \times M_2, g)$ *D-genel çarpım manifoldu üzerinde, her kapalı* $\omega \in \mathscr{A}_1(M)$ *1-formu için, aşağıdaki ifadelerden herhangi üçü sağlanıyorsa, dördüncüsü de sağlanır:*

*(i)* $\omega$ *1-formu g metriğine göre harmoniktir;*

*(ii)* $\omega$ *1-formunun* $M_1$ *manifolduna kısıtlanışı* $g_1$ *metriğine göre harmoniktir;*

*(iii)* $\omega$ *1-formunun* $M_2$ *manifolduna kısıtlanışı* $g_2$ *metriğine göre harmoniktir;*

*(iv)* $\omega$ *kapalıdır ve* (4.187) *denklemini sağlar.*

**Not 4.4.** Yukarıda ifade edilen Önerme 4.4, Teorem 4.13 ve Sonuç 4.7 benzer hesaplamalar ile herhangi bir $p$-formuna genelleştirilebilir.

### 4.2.2 *D*-genel çarpım manifoldu üzerinde Einstein-benzeri koşullar

Bu bölümde, Notasyon 4.1 ve Hipotez 4.1 altında, *D*-genel çarpım manifoldunun Riemann ve Ricci eğrilikleri ile ilgili sonuçlar ifade edilecektir. Yardımcı Teorem 4.7 kullanılarak, doğrudan hesaplama ile aşağıdaki yardımcı teorem elde edilir:

**Yardımcı Teorem 4.8.** *Hipotez 4.1 altında,* (4.174) *metriği ile verilen D-genel çarpım manifoldunun Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri aşağıdaki gibidir:*

$$\begin{aligned}
R(X_1,Y_1)Z_1 &= R_1(X_1,Y_1)Z_1, \quad R(X_1,Y_1)Z_2 = R(X_2,Y_2)Z_1 = 0\\
R(X_1,Y_2)Z_1 &= \frac{2Hess_1(lnf)(X_1,Z_1)+X_1(lnf)Z_1(lnf)}{4}Y_2\\
&\quad + \frac{2Hess_1(lnf)(X_1,Z_1)+3X_1(lnf)Z_1(lnf)}{4}\eta_2(Y_2)\xi_2\\
R(X_1,Y_2)Z_2 &= -[g_2(Y_2,Z_2)+(2f-1)\eta_2(Y_2)\eta_2(Z_2)]\nabla^1_{X_1}(\nabla^1 f)\\
&\quad + \frac{X_1(lnf)}{2}[g_2(Y_2,Z_2)-\eta_2(Y_2)\eta_2(Z_2)]\nabla^1 f\\
R(X_2,Y_2)Z_2 &= R_2(X_1,Y_2)Z_2 + \frac{||\nabla^1 f||^2}{2f}\Big[-g(Y_2,Z_2)X_2 - g(Y_2,Z_2)\eta_2(X_2)\xi_2\\
&\quad -(2f-1)\eta_2(Y_2)\eta_2(Z_2)X_2 + g_2(X_2,Z_2)Y_2 + g_2(X_2,Z_2)\eta_2(Y_2)\xi_2\\
&\quad +(2f-1)\eta_2(X_2)\eta_2(Z_2)Y_2\Big], \ \ \forall X_j,Y_j,Z_j \in \chi(M_j), \ j=1,2.
\end{aligned} \tag{4.188}$$

Bu durumda, Yardımcı Teorem 4.8 yardımı ile aşağıdaki önerme elde edilir:

**Önerme 4.5.** *Hipotez 4.1 altında,* (4.174) *metriği ile verilen D-genel çarpım manifoldunun $Q$ Ricci operatörü ile $M_j$'e ait $Q_j$ ($j=1,2$) Ricci operatörleri arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibidir:*

$$QX_1 = Q_1X_1 + \frac{(m_2-1)}{2f^2}df(X_1)\nabla^1 f - \frac{(m_2+1)}{f}\nabla^1_{X_1}(\nabla^1 f), \ \ \forall X_1 \in \chi(M_1), \tag{4.189}$$

$$\begin{aligned}
QX_2 &= \frac{1}{f}Q_2X_2 - \Big[\frac{\Delta_1(lnf)}{2} + (1+2m_2)\frac{||\nabla^1 f||^2}{4f^2}\Big]X_2\\
&\quad + \Big[-\frac{\Delta_1(lnf)}{2} + (1-2m_2)\frac{||\nabla^1 f||^2}{4f^2}\Big]\eta_2(X_2)\xi_2, \ \ \forall X_2 \in \chi(M_2).
\end{aligned} \tag{4.190}$$

*İspat.* Not 4.3'de verilen ortonormal taban yardımıyla, $Q$ Ricci operatörü

$$QX = R(X,E_j)E_j = R(X,A_k)A_k + R(X,U_l)U_l + \frac{1}{f^2}R(X,\xi_2)\xi_2, \tag{4.191}$$

biçiminde ifade edilebilir. Hipotez 4.1 ve Yardımcı Teorem 4.8 kullanılarak yapılan uzun hesaplamalar sonucunda (4.189) ve (4.190) denklemleri elde edilir. □

Şimdi, Bölüm 6'da ayrıntılı tanımları verilecek olan, Einstein-benzeri bazı özel manifoldlar ile ilgili tanımlar verilecektir:

**Tanım 4.6.** *[58] Bir $(N,h)$ Riemann manifoldu üzerinde*

$$Q+\nabla gradF+\mu dF\otimes gradF=\lambda I. \tag{4.192}$$

*koşulunu sağlayan $F,\lambda\in C^{\infty}(N)$ fonksiyonları ve $\mu\in\mathbb{R}$ sabiti varsa $(N,h,F)$ manifolduna genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldu adı verilir.*

Eğer $F$ sabit ise, $(N,h)$ Einstein manifolduna; eğer $\lambda$ sabit ise $(N,g,F)$ manifoldu yarı Einstein manifolduna indirgenir, [59]. (Bilinmelidir ki, burada bahsedilen yarı Einstein ve genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldu kavramları Chaki tarafından [2] ve [8] numaralı makalelerde tanımlanan yarı Einstein ve genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldu kavramlarından farklıdır. Ayrıntılı bilgi Bölüm 6'da mevcuttur.)

(4.189) denklemi ve Tanım 4.6 kullanılarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

**Teorem 4.14.** *$boyM_1>2$ olmak üzere, Hipotez 4.1 altında, $(M=M_1\times M_2,g)$ D-genel çarpım manifoldunun $Q$ Ricci operatörünün $M_1$'e kısıtlanışının Einstein denklemini sağlaması (yani $\forall\ X_1\in\chi(M_1)$ için $QX_1=\alpha X_1$ olacak şekilde bir $\alpha\in C^{\infty}(M_1)$ fonksiyonunun varolması) için gerek ve yeter koşul $F=-(m_2+1)lnf,\quad \lambda=\alpha$ ve $\mu=-(m_2+3)/2(m_2+1)^2$ olmak üzere $(M_1,g_1,F)$ manifoldunun yarı Einstein manifoldu olmasıdır.*

*İspat.* $F=-(m_2+1)lnf$ olarak seçilirse, Hessian tensörünün tanımı kullanılarak

$$HessF(X_1,Y_1)=-\frac{m_2+1}{f}Hessf(X_1,Y_1)+\frac{m_2+1}{f^2}df(X_1)df(Y_1),\ \ \forall\,X_1,Y_1\in\chi(M_1) \tag{4.193}$$

elde edilir. O halde $\forall\ X_1\in\chi(M_1)$ için $QX_1=\alpha X_1$ koşulu ve (4.189) denklemi kullanılarak, (4.192) bağıntısı, $F$ potansiyel fonksiyonu, $\mu=-(m_2+3)/2(m_2+1)^2$ sabiti ve $\lambda=\alpha$ için gerçeklenir. Benzer şekilde, teoremin tersi de ispatlanır. □

Einstein manifoldunun bir diğer genelleştirilmesi de aşağıdaki gibidir:

**Tanım 4.7.** *$(N,h)$ bir Riemann manifoldu, $\alpha,\beta\in C^{\infty}(N)$, $\xi\in\chi(N)$ ve $\eta$ sırasıyla, birim vektör alanı ve $\xi$'nin $h$ metriğine göre dual 1-formu ve olmak üzere, $(N,h)$ manifoldunun $Q$ Ricci operatörü*

$$Q=\alpha I+\beta\eta\otimes\xi. \tag{4.194}$$

*koşulunu sağlıyor ise $(N,h,\xi,\eta)$ manifolduna $\eta$-Einstein manifoldu denir.*

Bu tanım Chaki tarafından tanımlanan yarı Einstein manifoldu kavramının [2], kontakt geometrideki analoğu olarak ortaya çıkmıştır. O halde, (4.190) denklemi ve Tanım 4.7 yardımıyla aşağıdaki teorem elde edilir:

**Teorem 4.15.** *Hipotez 4.1 altında, $(M = M_1 \times M_2, g)$ D-genel çarpım manifoldunun Q Ricci operatörünün $M_2$'e kısıtlanışının Einstein denklemini sağlaması (yani $\forall\, X_2 \in \chi(M_2)$ için $QX_2 = \sigma X_2$ olacak şekilde bir $\sigma \in C^\infty(M_2)$ fonksiyonunun varolması) için gerek ve yeter koşul*

$$\alpha = \sigma f + f\frac{\Delta_1(lnf)}{2} + (1+2m_2)\frac{||\nabla^1 f||^2}{4f}, \tag{4.195}$$

$$\mu = f\frac{\Delta_1(lnf)}{2} - (2m_2-1)\frac{||\nabla^1 f||^2}{4f} \tag{4.196}$$

*ilgili skalerler olmak üzere, $(M_2, g_2, \xi_2, \eta_2)$ manifoldunun bir $\eta_2$-Einstein manifoldu olmasıdır.*

Böylelikle, Teorem 4.14, Teorem 4.15 ve Önerme 4.5 yardımıyla aşağıdaki sonuca ulaşılır:

**Sonuç 4.8.** *Hipotez 4.1 altında, $(M = M_1 \times M_2, g)$ D-genel çarpımı bir Einstein manifoldu ise, $(M_1, g_1)$ bir yarı-Einstein ve $(M_2, g_2, \xi_2, \eta_2)$ bir $\eta_2$-Einstein manifoldudur. $j = 1,2$ için $r_j$, $(M_j, g_j)$ bileşeninin skaler eğriliği olmak üzere, eğer $f = \frac{m_1 r_1}{m_2 r_2}$ sabit fonksiyon ve $j = 1,2$ için $(M_j, g_j)$'ler Einstein manifoldu ise, bu durumda $(M = M_1 \times M_2, g)$ D-genel çarpımı da Einstein manifoldudur.*

### 4.2.3 *D*-genel çarpım manifoldunun skaler ve kesitsel eğrilikleri

Bu bölüm boyunca da yine Notasyon 4.1 ve Hipotez 4.1 göz önünde bulundurulacaktır. Not 4.3'de verilen ortonormal çatı alanları yardımıyla, Önerme 4.5'de bulunan Ricci operatörünün izi alınarak, *D*-genel çarpım manifoldunun skaler eğriliği aşağıdaki gibi bulunur:

**Önerme 4.6.** *Hipotez 4.1 altında, $(M = M_1 \times M_2, g)$ D-genel çarpımının $r$ skaler eğriliği ile sırasıyla $g_1$ ve $g_2$ metriklerine ait $r_1$ ve $r_2$ skaler eğrilikleri arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi elde edilir:*

$$r = r_1 + \frac{r_2}{f} - \frac{(n_2-1)(2m_2+1)}{4f^2}||\nabla^1 f||^2 - \frac{(3m_2+1)}{2}\frac{\Delta_1 f}{f}. \tag{4.197}$$

**Sonuç 4.9.** *Hipotez 4.1 altında, $(M = M_1 \times M_2, g)$ D-genel çarpımının $f$ çarpım fonksiyonu $(M_1, g_1)$ üzerinde harmonik olsun. Bu durumda:*

*(i)* *Eğer $(M_j, g_j)$, $(j = 1,2)$ bileşenleri negatif skaler eğrilikli manifoldlar ise, $(M = M_1 \times M_2, g)$ D-genel çarpımı da negatif skaler eğriliklidir.*

*(ii)* *Eğer $(M = M_1 \times M_2, g)$ D-genel çarpımı pozitif skaler eğrilikli ise, $r_1 + \frac{r_2}{f} > 0$ gerçeklenir.*

$\{X,Y\}$, $g$ metriğine göre 2-boyutlu $\sigma \subseteq TM$ düzlemsel kesitinin ortonormal tabanı olmak üzere, $D$-genel çarpım manifoldunun kesitsel eğriliği $K(\sigma) = K(X,Y) = g(R(X,Y)Y,X)$ biçimindedir. O halde, Not 4.3'de verilen $D$-genel çarpımının ortonormal tabanı ve Yardımcı Teorem 4.8 kullanılarak, aşağıdaki sonuç elde edilir:

**Önerme 4.7.** *$(M = M_1 \times M_2, g)$ D-genel çarpım manifoldunun herhangi bir 2-boyutlu $\sigma \subseteq TM$ düzlemsel kesiti için, Hipotez 4.1 altında, $g$ metriğine ait $K$ kesitsel eğriliği ile $g_j$, $(j = 1,2)$ metriklerine ait $K_j$ kesitsel eğrilikleri arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibidir:*

*(i)* *$\sigma$ kesiti $M_1$ manifolduna teğet ise,*

$$K(\sigma) = K_1(\sigma); \tag{4.198}$$

*(ii)* *$\sigma \subseteq D$ ise,*

$$K(\sigma) = \frac{1}{f}[K_2(\sigma) - \frac{||\nabla^1 f||^2}{2f}]; \tag{4.199}$$

*(iii)* *$\sigma$ kesiti $\xi_2$ vektör alanını içeriyor ve $M_2$ manifolduna teğet ise,*

$$K(\sigma) = \frac{1}{f^2}[K_2(\sigma) - ||\nabla^1 f||^2]; \tag{4.200}$$

*(iv)* *Eğer $\sigma$, $D$ dağılımına ait herhangi bir vektör ile herhangi bir $A \in \chi(M_1)$ birim vektörü tarafından gerilen düzlemsel kesit ise,*

$$K(\sigma) = \frac{1}{2f^2}[(Af)^2 - 2fHessf(A,A)]; \tag{4.201}$$

*(v)* *Eğer $\sigma$, herhangi bir $A \in \chi(M_1)$ birim vektörü ile $\xi_2$ vektör alanı tarafından gerilen düzlemsel kesit ise,*

$$K(\sigma) = -\frac{2}{f}Hessf(A,A). \tag{4.202}$$

Yukarıdaki önermenin bir sonucu olarak aşağıdakiler elde edilir:

**Sonuç 4.10.** *Hipotez 4.1 altında, eğer* $(M = M_1 \times M_2, g)$ *D-genel çarpımının kesitsel eğriliğinin işareti sabit ise,*

*(i)* $M_1$ *manifoldunun* $K_1$ *kesitsel eğriliğinin de işareti sabittir;*

*(ii) Her* $A \in \chi(M_1)$ *birim vektörü için* $Hessf(A,A)$ *sabit işaretlidir;*

*(iii) Her* $A \in \chi(M_1)$ *birim vektörü için* $K_1$ *ve* $Hessf(A,A)$ *zıt işaretlidir.*

*D*-genel çarpım manifoldunun sabit kesitsel eğrilikli olması durumunda ise aşağıdaki sonuç elde edilir:

**Önerme 4.8.** *Hipotez 4.1 koşulunu sağlayan* $(M = M_1 \times M_2, g)$ *D-genel çarpım manifoldunda aşağıdakiler birbirine denktir:*

*(i)* $(M = M_1 \times M_2, g)$ *D-genel çarpımı bir uzay-formdur;*

*(ii)* $(M = M_1 \times M_2, g)$ *D-genel çarpımı düzdür;*

*(iii)* $(M_j, g_j)$, $(j = 1, 2)$ *bileşenleri düzdür ve* $f$ *çarpım fonksiyonu sabittir.*

*İspat. (i)* $\Rightarrow$ *(ii), (iii):* $M$'nin $K$ kesitsel eğriliğinin $k \in \mathbb{R}$ sabitine eşit olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (4.201) ve (4.202) denklemlerinden

$$\frac{(Af)^2}{f} = fk, \ \forall A \in \chi(M_1). \tag{4.203}$$

bulunur. Eğer $A \in Kerdf$ olarak alınırsa, (4.203) denkleminden $k = 0$ olarak bulunur. (4.202) denkleminden, her $A \in \chi(M_1)$ için $Hessf(A,A) = 0$ bulunur. Burada, Hessian tensörünün simetrik bir tensör olduğu kullanılırsa, her $A, B \in \chi(M_1)$ için $Hessf(A,B) = 0$ bulunur. Böylece $Hessf = 0$ ve $K_1 = 0$ bulunur. Bu durumda, (4.199) ve (4.200) denklemlerinden, sırasıyla aşağıdaki iki denklem elde edilir:

$$K_2(\sigma) = \frac{||\nabla^1 f||^2}{2f}, \ \forall \sigma \subseteq D, \tag{4.204}$$

$$K_2(\sigma) = ||\nabla^1 f||^2, \ \forall \sigma \ni \xi_2 \in \sigma \subseteq TM_2. \tag{4.205}$$

(4.204) ve (4.205) denklemlerinde, eşitliklerin sağ ve sol tarafında farklı manifoldlara ait fonksiyonlar bulunduğundan, bu fonksiyonların yalnızca sabit fonksiyon olmaları gerektiği sonucuna ulaşılır. O halde, her 2-boyutlu $\sigma \in TM_2$ düzlemi için $K_2(\sigma)$ sabit olacağından $f$ sabit fonksiyondur. Bunun sonucunda $\nabla^1 f = 0$ olur ve (4.204)-(4.205) denklemlerinden $K_2 = 0$ elde edilir.

*(ii) ⇒ (i), (iii):* $(ii)$ durumu $(i)$'nin bir özel hali olduğundan, yukarıdaki (i) ⇒ (ii), (iii) ispatı kullanılarak, doğrudan elde edilir.

*(iii) ⇒ (i), (ii):* (4.198)-(4.202) denklemlerinden, ispat tamamlanır. □

Daha sonra, sabit kesitsel eğrilikli Riemann manifoldu kavramına benzer şekilde, yarı-sabit kesitsel eğrilikli Riemann manifoldu kavramı ortaya atılmıştır. Temelde, yarı-sabit kesitsel eğrilikli Riemann manifoldu iki geometrik yapı ile belirlenir. Bunlar bir $h$ Riemann metriği ve bir $\xi$ birim vektör alanıdır, [60]. O halde tanım aşağıdaki gibi verilir:

**Tanım 4.8.** *[60–62] $(N,h,\xi)$, birim $\xi$ vektör alanına sahip olan bir Riemann manifoldu, $\sigma \subseteq T_pN$ 2-boyutlu bir düzlemsel kesit, $p \in N$ ve $\theta$ ise $\sigma$ kesiti ile $\xi$ arasındaki açı (yani $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ olmak üzere $\theta = \angle(\sigma,\xi)$) olsun. Bu şekilde tanımlanan her $\sigma$ kesiti ve $p \in N$ noktası için, $K(\sigma)$ kesitsel eğriliği aynı ise (yani yalnızca $p \in N$ noktasına ve $\theta$ açısına bağlı ise), $(N,h,\xi)$ manifolduna yarı-sabit kesitsel eğrilikli manifold adı verilir.*

Bu kavram ilk olarak Chen ve Yano tarafından Riemann eğrilik tensörünün sağlaması gereken bir denklem yardımı ile tanımlanmış [61], daha sonra Boju ve Popescu tarafından yukarıdaki gibi geometrik yorumu yapılmıştır, [60]. Yakın geçmişte ise, Ganchev ve Mihova [62] numaralı çalışmada, yarı-sabit kesitsel eğrilikli manifoldların sınıflandırılması ve çeşitli örneklerin inşaası ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir.

Bu bölümde, son olarak $D$-genel çarpım manifoldunun yarı-sabit kesitsel eğrilikli olması durumunda bileşen manifoldlarının özellikleri incelenecektir:

**Teorem 4.16.** *Hipotez 4.1 koşulunu sağlayan, $(M = M_1 \times M_2, g)$ D-genel çarpım manifoldu yarı-sabit kesitsel eğrilikli ise, $(M_j, g_j)$, $j = 1,2$ bileşenlerinin $K_j$ kesitsel eğrilikleri için aşağıdakiler gerçeklenir:*

*(i) $f$ çarpım fonksiyonunun $M_1$ üzerindeki düzey hiperyüzeyleri tümden umbiliktir;*

*(ii) $(M_1, g_1)$ bir uzay-formudur;*

*(iii) Her 2-boyutlu $\sigma \subseteq D$ düzlemsel kesiti için, $K_2(\sigma)$ sabittir;*

*(iv) Her 2-boyutlu $\xi_2 \in \sigma \subseteq TM_2$ düzlemsel kesiti için, $K_2(\sigma)$ sabittir.*

*İspat. (i):* (4.202) denkleminden, bir $c \in \mathbb{R}$ için $Hessf = cf$ eşitliği gerçeklenir. Bu da $f^{-1}(q) = \{x \in M_1 : f(x) = q\}$ düzey hiperyüzeylerinin $M_1$ üzerinde tümden umbilik olduğunu gösterir.

*(ii):* Önerme 4.7-(4.198), (4.199), (4.201) denklemleri ve $(M = M_1 \times M_2, g)$ $D$-genel çarpımının yarı-sabit kesitsel eğrilikli olduğu kullanılarak, her 2-boyutlu $\sigma \subseteq TM_1$ ve $\tilde{\sigma} \subseteq D$ düzlemleri ve $A \in \chi(M_1)$ birim vektör alanı için aşağıdaki eşitlik gerçeklenir:

$$K_1(\sigma) = \frac{1}{f}(K_2(\tilde{\sigma}) - \frac{||\nabla^1 f||^2}{2f}) = \frac{1}{2f^2}[(Af)^2 - 2fHessf(A,A)], \tag{4.206}$$

$A \in Kerdf$ olarak seçilir ve $(i)$'nin ispatında bulunan $Hessf = cf$ denklemi kullanılırsa, $(ii)$ gerçeklenir.

*(iii):* $(ii)$ maddesinden, $(M_1, g_1)$ bileşeninin kesitsel eğriliği $K_1 = (-c)$ =sabit olarak bulunur. Bu durumda, (4.206) denklemindeki ilk eşitlikten, her 2-boyutlu $\sigma \subseteq D$ düzlemsel kesiti için $K_2(\sigma) = -fc + \frac{||\nabla^1 f||^2}{2f}$ olur. Eşitliğin sağ ve sol tarafında farklı manifoldlara ait fonksiyonlar bulunduğundan, yine bu fonksiyonların yalnızca sabit fonksiyon olmaları gerektiği sonucuna ulaşılır ve böylece $(iii)$ de ispatlanmış olur.

*(iv):* Yine $(M = M_1 \times M_2, g)$ $D$-genel çarpımının yarı-sabit kesitsel eğrilikli olduğu ve (4.200) ile (4.202) denklemleri kullanılarak, $\xi_2$'yi içeren her 2-boyutlu $\sigma \subseteq TM_2$ düzlemsel kesiti ve her $A \in \chi(M_1)$ birim vektörü için :

$$\frac{1}{f^2}(K_2(\sigma) - ||\nabla^1 f||^2) = -\frac{2}{f}Hessf(A,A) \tag{4.207}$$

eşitliği elde edilir. $(i)$'de elde edilen $Hessf = cf$ denklemi de kullanılarak, yine farklı manifoldlara ait fonksiyonların aşağıdaki eşitliği sağladığı görülür:

$$K_2(\sigma) = ||\nabla^1 f||^2 - 2cf^2. \tag{4.208}$$

Burada da, $(iii)$'e benzer şekilde, her $\xi_2 \in \sigma \subseteq TM_2$ kesiti için, $K_2(\sigma)$ sabit bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

**Not 4.5.** Bu bölüm boyunca kullanılan $D$-genel çarpım metriği yapısı, Riemann ve semi-Riemann geometrisinde kullanılan klasik katlı çarpım metriği kavramının bir genelleştirilmiş formu olup, bu kavram üzerindeki çalışmalar devam etmektedir. Buraya kadar elde edilen sonuçlar, Riemann katlı çarpım manifodlarında ele alınan harmoniklik, Einstein-benzeri koşullar vb. problemlerin *D*-genel çarpım manifoldlarına genelleştirilmesidir.

# 5. GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI EINSTEIN UZAY-ZAMANLARI VE FİZİKSEL UYGULAMALARI

20. yüzyılın başlarına kadar, Newton tarafından da benimsenen,zamanın hareketten bağımsız olduğu ve uzay boşluğunu esir (veya eter) adı verilen, ağırlıksız, saydam ve sürtünmesiz olan, varlığı kesin olarak ispatlanamayan ve tüm maddeleri geçiren esnek bir maddenin doldurduğu fikri kabul edilmiştir. 1905 yılında ise, Lorentz'in elektrodinamik teorisini en baştan yeniden yorumlayan, kabul edilen görüşün aksine uzay ve zaman kavramlarının birbirinden ayrı düşünülemeyeceğini gösteren ve esirin varlığını reddeden Einstein'in Özel Görelilik Teorisi yayınlanmıştır, [63]. Bu teori klasik mekanik ile çelişen iki önermeye dayanmaktadır:

(1) (Görelilik İlkesi) Fizik yasaları, düzgün hareket eden tüm gözlemciler için aynıdır.

(2) Göreli hareket veya ışığın kaynağının hareketi söz konusu olmadığında, boş uzayda (vakumdaki) ışığın hızı, tüm gözlemciler için aynıdır.

Ortaya çıkan bu yeni teori, yapılan deneylerle, klasik mekaniğe göre, daha çok uyumlu sonuçlar vermiştir. Özellikle, 20. yüzyılın en ünlü denklemi olan $E = mc^2$'nin ortaya çıkmasını sağlamış, bir başka deyişle enerji ve kütlenin eşdeğer ve birbirine dönüşebilir olduğunu göstermiştir. 2. önerme aynı zamanda Michelson-Morley deneyi olarak bilinen ve bulmayı bekledikleri sonucun aksine ışık hızının, tüm yönlerde aynı olduğunun anlaşılmasını sağlayan çalışmaya dayanmaktadır. Bu deney sonucunda, dünya ile esir arasında karşılıklı bir hareket ilişkisi olduğuna yönelik bir kanıt bulunamamış ve böylece Michelson ve Morley istemeden de olsa esirin varolmadığını kanıtlamışlardır.

Einstein'ın Özel Göreliliğinin matematiksel modeli ise $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzay-zamanıdır. Uzay-zaman kavramı, Einstein'ın 1905'te yayınladığı Özel Görelilik Teorisinin bir sonucu olarak görülmesine rağmen, aslında ilk olarak 1908 yılında, H. Minkowski tarafından matematiksel olarak açıkça önerilmiş ve daha sonra da Einstein'ın çalışmalarına genişletilmiştir. 1912'de Einstein Minkowski'nin uzay-zamanını kullanarak, Genel Görelilik Teorisinin temellerini atmıştır.

Einstein'ın Genel Görelilik Teorisi, yerçekimini bir kuvvetten ziyade, eğriliği maddenin kütle-enerji yoğunluğundan ve elektromanyetizmadan etkilenen, eğrisel bir uzay-zamanın tezahürü olarak görür, [64]. Bu bakımdan, Genel Görelilik Teorisi, Özel Görelilik Teorisi ile Newton'un Evrensel Çekim Teorisini birleştiren geometrik bir kuramdır. Bu durumda, "Uzayın madde içeriği, yani enerji-momentum tensörü, uzayın eğriliği ile nasıl ilişkilendirilebilir?" sorusu ortaya çıkmaktadır. Bu soruya cevap olarak, Einstein, Newton'un 2. Yasası olan Dinamiğin Temel Prensibini ($F = ma$ formülü) kullanmış ve $\kappa$ yerçekimsel sabit ve $G = Ric - \frac{1}{2}rg$ Einstein tensörü olmak üzere, $G = \kappa T$ formülünü önermiştir. Böylece

$$Ric - \frac{1}{2}rg = \kappa T \tag{5.1}$$

biçimindeki alan denklemlerini elde etmiştir. Einstein, $G$ tensörünü elde etmek için, başta Ricci tensörü olmak üzere birçok olasılık denemiş; ancak sistemin korunumlu (yani $divT = 0$) olması için, daraltılmış ikinci Bianchi özdeşliği aracılığı ile Ricci tensöründen $\frac{1}{2}rg$ terimini çıkarması gerektiğini görmüştür. Ortaya çıkan bu yeni teori, kütle-enerji-momentum tensörü olan $T$'yi, Ricci eğrilik tensörü ve metrik tensör ile ilişkilendiren Einstein alan denklemlerini kullanması bakımından diğer çekim teorilerinden ayrılır. Özetle, Einstein alan denklemlerine göre; herhangi bir kütlenin bulunduğu uzay-zaman eğrilirken, eğriliğe sahip olan uzay-zamanda bulunan bir kütle hareket eder.

Genel Görelilik, uzayın geometrisi, serbest düşüşte cisimlerin hareketi ve ışığın yayılımı ile ilgili konularda klasik fizik ile önemli ölçüde farklılık gösterir. Fizikte uzay-zaman, genellikle 3-boyutlu uzay ile dördüncü boyut olarak rol oynayan zamanı tek bir sürekli ortam içinde birleştiren matematiksel bir modeldir. Euclid geometrisine göre de, evrenin üç uzay boyutu ve bir zaman boyutu vardır. Genel Görelilik Teorisine göre ise, uzay-zaman 4-boyutlu bir Lorentz manifoldudur. Bu teoriye göre, eğriliği Riemann eğrilik tensörü ile temsil edilen bir uzay-zamanın, madde ve enerjinin varlığı ile büküldüğü varsayılmaktadır. Ancak birçok uzay-zamanın ilginç fiziksel özellikleri vardır. Örneğin, kompakt bir uzay-zaman, kapalı ve zamansal eğrileri içerir ki bu da Nedensellik İlkesindeki bazı genel bilinen kalıpları ihlal etmektedir (gelecekteki olayların geçmişteki olayları etkilemesi gibi). Bu nedenle, matematiksel fizikçiler genellikle uzay-zamanların sınırlı altkümelerini göz önüne alırlar. Bunu yapmanın bir yolu, genel görelilik denklemlerinin "gerçekçi" çözümlerini incelemektir. Başka bir yol ise, bazı ek "fiziksel olarak tutarlı" geometrik kısıtlamalar eklemektir. Son yaklaşım, Penrose-Hawking'in tekillik teoremleri olmak üzere bazı önemli sonuçların elde edilmesini sağlamıştır.

20. yüzyılın başlarına kadar, gökbilimciler evrenin boyutunun birkaç on binlerce ışık yılından daha fazla olmadığı kabul etmişlerdir. Einstein 1917'de [65] numaralı çalışmasında, kendi tanımladığı alan denklemlerinin statik bir çözümü olarak, genişlemeyen küresel simetrik bir modeli ileri sürmüştür. Bu model, Einstein'ın statik evreni olarak bilinen, uzaysal olarak sonsuz, genişlemeyen ve daralmayan kozmolojik bir modeldir.

Fiziksel kozmoloji alanına büyük katkılar yapan Hollandalı matematikçi ve astronom olan W. De Sitter, 1932'de Einstein ile birlikte evrenin eğriliği ile ilgili kozmolojik sonuçlar elde etmiş ve Einstein alan denklemlerinin bir başka statik çözümü olan *de Sitter uzay-zamanı* kavramını ortaya atmıştır. (De Sitter uzay-zamanı 5-boyutlu Minkowski uzayında gömülü hiperboloid olarak düşünülebilir.)

Ancak, gökbilimciler, gece gökyüzünde bulutsu (nebula) adı verilen ışık parçalarına rastlamışlar ve bazıları bunların uzak galaksiler olabileceğini düşünmüşlerdir. E. Hubble, 1920'li yıllarda, bu bulutsuların birçoğunun, Samanyolu ile karşılaştırılabilir boyutta, oldukça uzak galaksiler olduğunu gözlemlemiş, uzaklık arttıkça bulutsuların ışığının artan kırmızı bir değişim gösterdiğini ve tüm galaksilerin birbirlerinden uzaklaştığını kanıtlamıştır. Böylece, evrenin genişlediği konusunda şaşırtıcı bir keşif yapmıştır. Bu da, Einstein'ın statik modelinin gerçek evreni temsil etme olasılığını ortadan kaldırmıştır. Ayrıca, madde içermeyen de Sitter statik modelinin de yapılan yeni gözlemlerle, evreni temsil edemeyeceği kanıtlanmıştır.

Aslında o dönemde, oldukça az sayıda gökbilimcinin ilgilendiği, Einstein'ın alan denklemlerinin diğer çözümleri ile ilgili olarak, 1922 yılında Rus meteorolog A. Friedmann, statik olmayan evreni temsil edebilecek olası matematiksel çözümleri yayınlamış ve Einstein, bu çözümlerin gerçekten matematiksel olarak mümkün olduğunu kabul etmiştir.

Einstein alan denklemlerinin elde edilen birçok temel çözümünün, Bölüm 4'te detaylı şekilde tanımı verilen katlı çarpım manifoldu yapısına sahip olduğu görülmektedir. Robertson-Walker modeli olarak bilinen çözümler, $g_k$ sabit $k$ eğrilikli bir Riemann metriği (örneğin, 3-boyutlu Euclid metriği veya 3-boyutlu küre üzerindeki metrik vs.) olmak üzere

$$g = -dt^2 + f^2(t) g_k \tag{5.2}$$

metriği ile tanımlanır ve bu metrik ile donatılmış uzay-zamana da *Robertson-Walker uzay-zamanı* adı verilir. Robertson-Walker metriği, bir uzay-zaman üzerindeki, uzaysal olarak homojen (yani, her yerde aynı görünen) ve izotropik (yani, tüm uzaysal doğrultuları aynı) olan tek metriktir. 1930'ların sonlarından bu yana, Robertson-Walker uzay-zamanı genişleyen evren için önemli bir kozmolojik model olarak kabul edilmektedir.

**Örnek 5.1.** [66] Robertson-Walker uzay-zaman modeli , $\{t, r, \theta, \phi\}$ koordinantları ile verilen, $a(t)$ evrenin boyutunun zamanla nasıl değiştiğini gösteren ölçek faktörü (scale factor) ve evrenin sırasıyla pozitif, sıfır veya negatif eğrilikli uzaysal kesitlere sahip olmasına bağlı olarak $f(r) = sinr,\ r$ veya $sinhr$ biçiminde olan

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2[dr^2 + f^2(r)(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)] \tag{5.3}$$

metriği ile verilebilir. Böylesi bir modelde, farklı konumlarda bulunan gözlemciler $\{r, \theta, \phi\} = sabit$ doğruları üzerinde hareket ederler ve dolayısıyla hız vektörleri $u^a = \frac{dx^a}{dt} = \delta_0^a$ şeklindedir. En basit durum, düz uzay kesitlerine sahip olan ve $a(t) = t^{2/3}$ ölçeği ile verilen Einstein-de Sitter modelidir.

Evrenin durağan olmayabileceğini belirten Hubble'ın kızıla kayma (redshift) gözleminden sonra, Einstein da teorisinde evrenin değişmediği fikrini terk etmiş ve orjinal teorisinde bir modifikasyon yaparak *kozmolojik sabit* kavramını ortaya atmıştır. Böylece Einstein'ın modifiye edilmiş alan denklemleri, $\Lambda$ kozmolojik sabiti göstermek üzere

$$Ric - \frac{1}{2} rg + \Lambda g = \kappa T \tag{5.4}$$

biçiminde verilmiştir. (5.4) denkleminde $\Lambda = 0$ olduğunda, orjinal alan denklemleri elde edilir. Burada, $T$ stres enerji-momentum tensörü ve $\kappa$ yerçekimsel sabittir. Fizikte, stres enerji-momentum tensörü olarak bilinen $T$ tensörü, uzay-zamandaki enerji ve gerilmenin varlığını ve yoğunluğunu tarif etmektedir. Ricci tensörü simetrik olduğundan, $T$ de simetriktir. Ayrıca, daraltılmış ikinci Bianchi özdeşliğinden, $G = Ric - \frac{1}{2}rg$ Einstein tensörü korunumlu (yani her $\alpha, \beta = 1,2,3,4$ için $\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0$) olduğundan, $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$'dır. Ayrıca, $T$ stres-enerji momentum tensörünün her bir bileşeni çeşitli fiziksel büyüklükleri temsil etmektedir:

$$T = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

olmak üzere, $T^{00}$ enerji yoğunluğunu (energy density), $T^{01}$, $T^{02}$ ve $T^{03}$ enerji akışını (energy flow), $T^{10}$, $T^{20}$ ve $T^{30}$ ivme (momentum) yoğunluğunu, $T^{11}$, $T^{22}$ ve $T^{33}$ basıncı ve diğer alt ve üst üçgensel bölgede kalan terimler ise teğetsel gerilmeyi (shear tensor) temsil etmektedir. Enerji ve gerilmenin varlığı ise maddenin varlığını gösterir.

- Eğer $T = 0$ ise, alan denklemleri boş, yani maddeden yoksun olan uzayı (vakum) temsil etmektedir. Dolayısı ile Einstein manifoldları, Einstein alan denklemlerinin vakum çözümlerine karşılık gelmektedir, [1].

Einstein alan denklemleri aracılığı ile, Ricci tensörü uzay-zamanın bir olayındaki madde ile doğrudan ilişkili olduğundan, Ricci eğrilik tensörü özel bir koşulu sağlayacak şekilde tanımlanan Einstein manifoldları üzerinde yapılan araştırmalar topolojik uzayın global karakterinin anlaşılmasında oldukça yararlı olmaktadır. O halde, evrenin global karakterinin anlaşılabilmesi için Ricci eğrilik tensörü üzerinde yapılan bazı özel genelleştirmeler önem kazanmaktadır.

1927 yılında, G. Lemaitre, Friedmann'dan bağımsız olarak benzer sonuçlara ulaşmış ve evrenin genişlediğini kanıtlamıştır. Başlarda Einstein tarafından kabul edilmeyen bu teori, daha sonraları kozmolojinin öne çıkan problemleri için dahice bir çözüm olarak nitelendirilmiştir. 1931 yılına gelindiğinde ise, evrenin bir başlangıç noktasından (ilkel atom denilen nokta) genişlemeye başladığını ifade eden Lemaitre'nin teorisi günümüzde *Büyük Patlama (Big Bang)* şeklinde anılmaktadır. Bu teoriye göre, evrenin oluşum süreci üç farklı evreden meydana gelmektedir:

- *Başlangıç evresi*: Büyük Patlamadan hemen sonraki evredir. Bu evrede akışmazlık (viscosity) ve ısı akışı (heat flux) oldukça belirgindir.

- *Ara evre*: Bu evrede akışmazlık artık belirgin değildir, ancak ısı akışı hala mevcuttur.

- *Son evre*: Bu evrede ise, hem akışmazlık hemde ısı akışı ihmal edilebilir haldedir ve evrenin madde içeriği mükemmel akışkanlı (perfect fluid) olarak kabul edilmektedir.

**Tanım 5.1.** *[1] M uzay-zamanı üzerinde bir mükemmel akışkan, aşağıdaki koşulları sağlayan $(U, \sigma, p)$ üçlüsü olarak tanımlanır:*

*(1) U, M uzay-zamanı üzerinde, zamansal, geleceği işaret eden birim vektör alanıdır ve akış vektör alanı olarak isimlendirilir.*

*(2) $\sigma \in C^{\infty}(M)$ enerji yoğunluk fonksiyonu ve $p \in C^{\infty}(M)$ izotropik basınç fonksiyonudur.*

*(3) A, U vektörünün dual 1-formu, yani $\forall X \in \chi(M)$ için $g(X,U) = A(X)$, olmak üzere, mükemmel akışkanlı uzay-zamanın enerji-momentum tensörü aşağıdaki denklem ile verilir:*

$$T(X,Y) = pg(X,Y) + (\sigma + p)A(X)A(Y) \tag{5.6}$$

Dolayısıyla, (5.4) ve (5.6) denklemleri kullanarak, Genel Görelilik Teorisinde, mükemmel akışkanlı madde içeren uzay-zaman için Einstein alan denklemleri:

$$Ric(X,Y) - \frac{r}{2}g(X,Y) + \Lambda g(X,Y) = \kappa[pg(X,Y) + (\sigma + p)A(X)A(Y)] \tag{5.7}$$

olarak yazılabilir. (5.7) denkleminde $a = \frac{r}{2} - \Lambda + \kappa + p$ ve $b = \kappa(\sigma + p)$ olarak alınırsa Ricci eğrilik tensörü

$$Ric(X,Y) = ag(X,Y) + bA(X)A(Y) \tag{5.8}$$

biçiminde ifade edilebilir ve bu da mükemmel akışkanlı madde içeren uzay-zamanın bir yarı-Einstein manifoldu olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla, yarı Einstein manifoldları, ilgili vektör alanı olarak, akışkanın hız vektör alanını kabul eden mükemmel akışkanlı uzay-zamanlara örnek teşkil etmektedir, [3].

- Genellikle mükemmel bir akışkanın basınç ve yoğunluğu, $\Theta$ mutlak sıcaklığı göstermek üzere, $p = p(\sigma, \Theta)$ formundaki bir durum denklemi ile ilişkilidir.

- Durum denkleminin $p = p(\sigma)$ formuna indirgendiği durumda, akışkan *eş entropili* (isentropic) olarak adlandırılır.

- Özel olarak, $p = \sigma$ olması durumunda, mükemmel akışkana *katı madde* (stiff matter) denir. Enerji-momentum tensörü özelleştirilerek, katı madde modelinin $Ric = (2\kappa\sigma)A \otimes A$ formunda Ricci tensörüne sahip olduğu görülür. Bu durum ilk olarak Zel'dovich tarafından ortaya atılmış ve bazı kozmolojik modellemelerde kullanılmıştır, [67]. Ayrıca, bu çalışmada katı madde içeren uzay-zamanda, ses hızının ışığın hızına eşit olduğu gösterilmiştir.

- *Göreceli olmayan, basınçsız madde (dust) çağı:* Eğer evren seyreltilmiş gazla dolu ise, basınç ihmal edilebilir ve dolayısıyla $p = 0$'dır.

- *Radyasyon çağı (Yüksek göreceli parçaçık):* Evren, enerjileri kütlelerinden daha büyük parçacıklar ile dolu ise, bu parçaçıklar kütlesisiz gibi davranırlar ve ışık hızı ile hareket ederler. Bu durum $\sigma = 3p$ durumuna karşılık gelmektedir.

- *Karanlık madde (dark matter) çağı:* Eğer $\sigma + p = 0$ ise, daima $\sigma > 0$ olduğundan $p < 0$ olur ve ortam maddeden yoksun demektir. Dolayısıyla bu durum vakum enerji olarak isimlendirilir.

- *Gerçeklik koşulu:* $\sigma + 3p > 0$ olarak kabul edilir. $\frac{p}{\sigma} < -\frac{1}{3}$ ise, evrenin genişlemesi hızlanır, $\frac{p}{\sigma} > -\frac{1}{3}$ ise, evrenin genişlemesi yavaşlar.

- Genel Görelilik Teorisinde, ısı akışı varolan akışkanlı uzay-zamanının madde içeriğini temsil eden enerji-momentum tensörü ise [1]

$$T(X,Y) = pg(X,Y) + (\sigma + p)A(X)A(Y) + [A(X)B(Y) + A(Y)B(X)] \tag{5.9}$$

denklemi ile verilmektedir. Burada $\sigma$ ve $p$ sırasıyla akışkanın enerji yoğunluğu ve izotropik basıncı,

$$A(X) = g(X,U);\ g(U,U) = -1 \textit{ ve } B(X) = g(X,V);\ g(V,V) > 0 \tag{5.10}$$

olmak üzere $U$ zamansal akış vektör alanı ve $V$ ısı akışı vektör alanıdır. Ayrıca $g(U,V) = 0$'dır.

Eğer (5.9), Einstein alan denklemlerinde kullanılırsa, Ricci tensörü

$$Ric(X,Y) = (\frac{r}{2} + kp + \Lambda)g(X,Y) + \kappa(\sigma + p)A(X)A(Y) + k[A(X)B(Y) + A(Y)B(X)] \tag{5.11}$$

formunda elde edilir. Dolayısıyla, ısı akışına sahip akışkanlı uzay-zamanı bir genelleştirilmiş yarı-Einstein uzay-zamanıdır ve üreteçleri uzay-zamanın zamansal hız vektör alanı $U$ ve ısı akışı vektör alanı $V$'dir.

Robertson-Walker uzay-zamanları, klasik göreceli kozmolojik model olmasına rağmen, liflerinin sabit eğrilikli olması hipotezi oldukça güçlü bir varsayımdır. Bu özellik, evrenin çok büyük ölçekli yapısı için makul olsa da, daha küçük bir ölçek kullanıldığında uygun olmayacaktır. Bu nedenle, relativistik modelleri daha genel olarak incelemek gerekmektedir.

Bu amaçla, 1995 yılında, L. J. Alias ve diğerleri, tabanı reel eksenin bir açık aralığı, lifi keyfi 3-boyutlu bir $(M^3, g_M)$ Riemann manifoldu olan ve

$$g = -dt^2 + f^2(t)g_M \tag{5.12}$$

metriğine sahip olan $I \times_f M^3$ katlı çarpım manifolduna *genelleştirilmiş Robertson-Walker uzay-zamanı (GRW)* adını vermişlerdir, [68]. O zamandan beri, GRW uzay-zamanları birçok matematikçi ve matematiksel fizikçi tarafından çalışılmıştır. B.-Y. Chen [69] numaralı çalışmasında, "bir Lorentz manifoldunun GRW uzay-zamanı olması için gerek ve yeter koşul uzay-zamanın zamansal konsörkılır bir vektör alanına sahip olmasıdır." sonucuna ulaşmıştır.

Bir GRW uzay-zamanında uzaysal dilimler her zaman homotetiktir, diğer bir deyişle, metrikleri yalnızca sabit kadar farklıdır. Dolayısıyla, bu bir bakıma hala güçlü bir koşuldur ve doğal olarak, genişleyen ya da büzülen evren için daha genel kozmolojik modellerin üretilip üretilemeyeceği sorusu ortaya çıkmaktadır. B.-Y. Chen bu soruya cevap olarak, GRW modelleri yerine, $F$ çarpım fonksiyonu yalnızca $t$'e değil, aynı zamanda $M^3$ manifolduna da bağlı olan $g = -dt^2 + F^2 g_M$ metriğine sahip uzay-zamanların dikkate alınması gerektiğini ifade etmiştir. Böylesi bir metriğe sahip olan $I \times_F M^3$ uzay-zamanına *bükümlü çarpım* (twisted product) uzay-zamanı ve $F$ fonksiyonuna da *büküm fonksiyonu* adı verilir. Bu tip kozmolojik modelleri kullanmanın avantajı uzaysal dilimler için homotetik olma şartının bulunmaması ve uzaysal dilimler üzerinde bazı değişikliklere izin vermesidir. Böylece, evrenin genişleyen kozmolojik yapısına en uygun kozmolojik modeller üretilmiş olacaktır.

Yukarıda ifade edilen çalışmaların motivasyonu ile bu bölümde, önceki bölümlerde ele alınan genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldları, Lorentz metrik yapısı altında incelencek ve çeşitli fiziksel uygulamalara yer verilecektir.

## 5.1 Genelleştirilmiş Yarı Einstein Uzay-Zamanının Bazı Özel Sınıfları

İlk olarak, Bölüm 3'e benzer şekilde, bir genelleştirilmiş yarı Einstein uzay-zamanının çeşitli simetri koşulları altında geometrik özellikleri araştırılacaktır. Tanım 2.20'de verilen $(M,g)$ manifoldu, Ricci tensörü (2.21) denklemini sağlayan, $A$ ve $B$ 1-formları, birbirine dik, zamansal birim $U$ vektör alanı ile birim $V$ vektör alanı tarafından üretilen, 4-boyutlu semi-Riemann manifoldu ise, $(M^4,g)$'e genelleştirilmiş yarı Einstein uzay-zamanı adı verilir. Dolayısı ile, uzay-zamanın ilgili 1-formları her $X \in \chi(M)$ için aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$A(X) = g(X,U),\ g(U,U) = -1;\ B(X) = g(X,V),\ g(V,V) = 1\ ve\ g(U,V) = 0 \quad (5.13)$$

Bu durumda, (2.21) ve (5.13) denklemleri kullanılarak aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$Ric(Y,U) = (a-b)A(Y) - cB(Y)\ \ ve\ \ Ric(Y,V) = aB(Y) + cA(Y), \quad \forall\, Y \in \chi(M). \quad (5.14)$$

Bu bölümün devamında, $\mathscr{B}$ tensörü, $(0,4)$-tipindeki Riemann, konformal, konsörkılır veya $W_2$ eğrilik tensörünü temsil etmek üzere, $\mathscr{B}(X,Y)\cdot Ric = L_S Q(g,Ric)$ şeklindeki simetri koşulları ele alınacaktır. Elde edilen sonuçlar [70] ve [71] numaralı makalelerde yayınlanmıştır.

### 5.1.1 Ricci-pseudosimetrik ve konformal simetrik $G(QE)_4$ uzay-zamanı

**Teorem 5.1.** *Her Ricci-pseudosimetrik $M = G(QE)_4$ uzay-zamanı, $k = L_S = \frac{a-b}{3}$ olmak üzere bir $N(k)$-yarı Einstein uzay-zamanıdır.*

*İspat.* Teorem 3.1'in ispatına benzer şekilde, $G(QE)_4$ uzay-zamanının Ricci-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter koşul (3.10) denkleminin sağlanmasıdır. Uzay-zamanın (2.21) ile verilen Ricci tensörü, (3.10) denkleminde kullanılırsa, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$
\begin{aligned}
& b[A(R(X,Y)Z)A(W)+A(Z)A(R(X,Y)W)]+c[A(R(X,Y)Z)B(W) \\
& +A(W)B(R(X,Y)Z)+A(Z)B(R(X,Y)W)+A(R(X,Y)W)B(Z)] \\
& = L_S\Big[b\Big\{g(Y,Z)A(X)A(W)-g(X,Z)A(Y)A(W)+g(Y,W)A(Z)A(X) \\
& -g(X,W)A(Y)A(Z)\Big\}+c\Big\{g(Y,Z)[A(X)B(W)+A(W)B(X)] \\
& -g(X,Z)[A(Y)B(W)+A(W)B(Y)]+g(Y,W)[A(Z)B(X)+A(X)B(Z)] \\
& -g(X,W)[A(Y)B(Z)+A(Z)B(Y)]\Big\}\Big]
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

(5.15) denkleminde, $Z = U$ ve $W = V$ alınır ve $b \neq 0$ olduğu kullanılırsa, $A(R(X,Y,V)) = g(R(X,Y)V,U) = R(X,Y,V,U)$ olmak üzere,

$$
R(X,Y,U,V) = L_S[A(Y)B(X)-A(X)B(Y)], \ \forall X,Y \in \chi(M) \tag{5.16}
$$

elde edilir. Diğer taraftan, (5.15) denklemi, $X$ ve $W$ üzerinde daraltılırsa,

$$
\begin{aligned}
& b[A(R(U,Y)Z)-A(Z)Ric(Y,U)]+c[A(R(V,Y)Z)+B(R(U,Y)Z)-A(Z)Ric(Y,V) \\
& -B(Z)Ric(Y,U)] = L_S\Big\{b[-g(Y,Z)-4A(Y)A(Z)]-4c[A(Y)B(Z)+A(Z)B(Y)]\Big\}
\end{aligned} \tag{5.17}
$$

bulunur. (5.17) denkleminde $Z = U$ alınırsa,

$$
bRic(Y,U)+cR(U,Y,U,V)+cRic(Y,V) = L_S[3bA(Y)+4cB(Y)] \tag{5.18}
$$

elde edilir. (5.14) ve (5.16) eşitlikleri, (5.18) denkleminde yerine yazılırsa,

$$
[b(a-b)+c^2-3bL_S]A(Y)+c[a-b-3L_S]B(Y) = 0 \tag{5.19}
$$

bulunur. (5.19) denkleminde sırasıyla, $Y = U$ ve $Y = V$ alınır ve (5.13) denklemi kullanılırsa, aşağıdaki iki denklem elde edilir:

$$
L_S = \frac{b(a-b)+c^2}{3b} \tag{5.20}
$$

$$
c[a-b-3L_S] = 0 \tag{5.21}
$$

Böylece aşağıdaki iki durum elde edilir:

*1. Durum:* Eğer $c = 0$ ise, (5.20) denkleminden, aynı anda $b$ de sıfır olamayacağı için $L_S = \frac{a-b}{3}$ elde edilir.

2. *Durum:* Eğer $c \neq 0$ ise, (5.21)'den, yine $L_S = \frac{a-b}{3}$. Bu denklemi (5.20) ile karşılaştırırsak, bu durumda da yine $c = 0$ bulunur. Dolayısıyla, her iki durumda da $c = 0$ ve $L_S = \frac{a-b}{3}$ olarak elde edilmiş olur. Bu durumda, (5.15) denkleminde $c = 0$ olduğu kullanılır ve $W = U$ olarak alınırsa

$$R(X,Y)U = L_S[A(Y)X - A(X)Y], \ \forall X,Y \in \chi(M) \tag{5.22}$$

bağıntısı gerçeklenir. O halde, $U$ üreteci $k = L_S = \frac{a-b}{n-1}$-null dağılımına aittir. Böylece uzay-zaman, $k = L_S = \frac{a-b}{3}$ olmak üzere, bir $N(k)$-yarı Einstein uzay-zamanına indirgenmiş olur. □

$L_S = 0$ alınırak, doğrudan aşağıdaki sonuç elde edilir:

**Sonuç 5.1.** *Her Ricci semisimetrik $M = G(QE)_4$ uzay-zamanı ilgili skaler fonksiyonları eşit olan bir yarı Einstein uzay-zamanıdır.*

**Önerme 5.1.** *$C \cdot Ric = 0$ koşulunu sağlayan bir $G(QE)_4$ uzay-zamanının zamansal $U$ üreteci aşağıdaki bağıntıları gerçekler:*

$$C(X,Y,Z,U) = C(X,Y,Z,V) = 0, \quad \forall X,Y,Z \in \chi(M). \tag{5.23}$$

$$R(X,Y,U,V) = \frac{a-b}{3}[A(Y)B(X) - A(X)B(Y)], \ \forall X,Y \in \chi(M). \tag{5.24}$$

*İspat.* $C \cdot Ric = 0$ koşulunu sağlayan bir $G(QE)_4$ uzay-zamanında, her $X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$(C(X,Y) \cdot Ric)(Z,W) = -Ric(C(X,Y)Z,W) - Ric(Z,C(X,Y)W) = 0 \tag{5.25}$$

gerçekleneceğinden, (2.21) denklemi (5.25) denkleminde kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} & b[A(C(X,Y)Z)A(W) + A(Z)A(C(X,Y)W)] + c[A(C(X,Y)Z)B(W) \\ & + A(W)B(C(X,Y)Z) + A(Z)B(C(X,Y)W) + A(C(X,Y)W)B(Z)] = 0 \end{aligned} \tag{5.26}$$

(5.26) denkleminde $Z = U$ ve $W = V$ yazılır ve (5.13) denklemi ve $b \neq 0$ olduğu kullanılırsa, $C(X,Y,U,V) = 0$ bulunur. Bu bağıntı yardımıyla, (5.26) denkleminde, sırasıyla $W = U$ ve $W = V$ alınarak, (5.23) numaralı eşitlikler elde edilir. Benzer şekilde, (3.45) ile verilen konformal eğrilik tensörü kullanılarak

$$\begin{aligned} R(X,Y,U,V) = & \frac{1}{2}[Ric(Y,U)g(X,V) - Ric(X,U)g(Y,V) + g(Y,U)Ric(X,V) \\ & - g(X,U)Ric(Y,V)] - \frac{r}{6}[g(Y,U)g(X,V) - g(X,U)g(Y,V)] \end{aligned} \tag{5.27}$$

elde edilir. $G(QE)_4$ uzay-zamanının skaler eğriliği $r = 4a - b$ ve (5.14) bağıntıları son denklemde yerine yazılırsa (5.24) denklemine ulaşılır. □

### 5.1.2 Konsörkılır ve $W_2$ Ricci-pseudosimetrik $G(QE)_4$ uzay-zamanı

**Teorem 5.2.** *Konsörkılır eğrilik tensörü $\tilde{C} \cdot Ric = L_S Q(g, Ric)$ koşulunu sağlayan (konsörkılır Ricci-pseudosimetrik) $G(QE)_4$ uzay-zamanı, $k = L_S = \frac{a-b}{3}$ olmak üzere, bir $N(k)$-yarı Einstein uzay-zamanıdır.*

*İspat.* Teorem 3.6'nın ispatına benzer şekilde, $G(QE)_4$ uzay-zamanının konsörkılır Ricci-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter koşul

$$
\begin{aligned}
Ric(\tilde{C}(X,Y)Z,W) + Ric(Z,\tilde{C}(X,Y)W) = L_S[&g(Y,Z)Ric(X,W) - g(X,Z)Ric(Y,W) \\
&+ g(Y,W)Ric(Z,X) - g(X,W)Ric(Y,Z)]
\end{aligned} \tag{5.28}
$$

gerçeklenmesidir. (2.21) ve (5.28) denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
& b[A(\tilde{C}(X,Y)Z)A(W) + A(Z)A(\tilde{C}(X,Y)W)] + c[A(\tilde{C}(X,Y)Z)B(W) \\
& + A(W)B(\tilde{C}(X,Y)Z) + A(Z)B(\tilde{C}(X,Y)W) + A(\tilde{C}(X,Y)W)B(Z)] = 0 \\
& = L_S\Big[b\Big\{g(Y,Z)A(X)A(W) - g(X,Z)A(Y)A(W) + g(Y,W)A(Z)A(X) \\
& - g(X,W)A(Y)A(Z)\Big\} + c\Big\{g(Y,Z)[A(X)B(W) + A(W)B(X)] \\
& - g(X,Z)[A(Y)B(W) + A(W)B(Y)] + g(Y,W)[A(Z)B(X) + A(X)B(Z)] \\
& - g(X,W)[A(Y)B(Z) + A(Z)B(Y)]\Big\}\Big]
\end{aligned} \tag{5.29}
$$

elde edilir. (5.29) denkleminde, $Z = U$ ve $W = V$ alınır ve $b \neq 0$ olduğu kullanılırsa

$$\tilde{C}(X,Y,U,V) = L_S[A(Y)B(X) - A(X)B(Y)], \ \forall X,Y \in \chi(M) \tag{5.30}$$

elde edilir. Bu durumda, (3.52) ile verilen konsörkılır eğrilik tensörü ve (5.30) denkleminden, Riemann eğrilik tensörünün

$$R(X,Y,U,V) = (\frac{r}{12} + L_S)[A(Y)B(X) - A(X)B(Y)], \ \forall X,Y \in \chi(M) \tag{5.31}$$

bağıntısını gerçeklediği görülür. (5.29) denklemi $X$ ve $W$ üzerinde daraltılır ve (3.53) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & b\Big[A(\tilde{C}(U,Y)Z) - A(Z)[Ric(Y,U) - \frac{r}{4}g(Y,U)]\Big] \\ & +c\Big[A(\tilde{C}(V,Y)Z) + B(\tilde{C}(U,Y)Z) - A(Z)[Ric(Y,V) - \frac{r}{4}g(Y,V)] \\ & -B(Z)[Ric(Y,U) - \frac{r}{4}g(Y,U)]\Big] \\ & =L_S\Big[b[-g(Y,Z) - 4A(Y)A(Z)] - 4c[A(Y)B(Z) + A(Z)B(Y)]\Big] \end{aligned} \tag{5.32}$$

elde edilir. (5.32) denkleminde $Z = U$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & b[Ric(Y,U) - \frac{r}{4}g(Y,U)] + c[\tilde{C}(U,Y,U,V) + Ric(Y,V) - \frac{r}{4}g(Y,V)] \\ & =L_S[3bA(Y) + 4cB(Y)] \end{aligned} \tag{5.33}$$

bulunur. (5.14) ve (5.30) denklemleri kullanılarak, (5.33) denkleminden

$$[b(a-b) - \frac{br}{4} + c^2 - 3bL_S]A(Y) + [c(a-b) - \frac{cr}{4} - 3cL_S]B(Y) = 0 \tag{5.34}$$

eşitliği elde edilir. (5.34) denkleminde sırasıyla, $Y = U$ ve $Y = V$ alınır ve (5.13) denklemi kullanılırsa, aşağıdaki iki eşitlik bulunur:

$$-3b^2 + 4c^2 = 12bL_S \tag{5.35}$$

$$c(\frac{b}{4} + L_S) = 0 \tag{5.36}$$

Bu durumda yine iki durum elde edilir: Eğer $c = 0$ ise, (5.35) denkleminden $b = 0$ veya $L_S = \frac{-b}{4}$ olur. Eğer $b = 0$ ise, uzay-zaman bir Einstein uzay-zamanına dönüşeceğinden, $L_S = \frac{-b}{4}$ elde edilir. $c \neq 0$ ise (5.36) ve (5.35) denkleminden yine $L_S = \frac{-b}{4}$ ve $c = 0$ bulunur. Elde edilen bulgular, (5.29) denkleminde kullanılır ve $W = U$ olarak alınırsa

$$R(X,Y)U = \frac{a-b}{3}[A(Y)X - A(X)Y], \ \forall X,Y \in \chi(M) \tag{5.37}$$

elde edilir. Böylece, Teorem 5.1'e benzer şekilde, uzay-zaman $k = L_S = \frac{a-b}{3}$ biçiminde olan bir $N(k)$-yarı Einstein uzay-zamanına indirgenmiş olur. □

Özel olarak $L_S = 0$ seçilirse, $b = 0$ olacağından doğrudan aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur:

**Sonuç 5.2.** *Konsörkılır Ricci semisimetrik (yani konsörkılır eğrilik tensörü $\tilde{C} \cdot Ric = 0$ koşulunu sağlayan) $G(QE)_4$ uzay-zamanı mevcut değildir.*

**Teorem 5.3.** *$W_2$-Ricci pseudosimetrik (yani $W_2 \cdot Ric = L_S Q(g,Ric)$ koşulunu sağlayan) her $G(QE)_4$ uzay-zamanı, $k = L_S = \frac{a-b}{3}$ olmak üzere, bir $N(k)$-yarı Einstein uzay-zamanıdır.*

*İspat.* $W_2 \cdot Ric = L_S Q(g,Ric)$ koşulunu sağlayan $G(QE)_4$ uzay-zamanında, her $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M^n)$ için;

$$Ric(W_2(X,Y)Z,W) + Ric(Z,W_2(X,Y)W) = L_S[g(Y,Z)Ric(X,W) - g(X,Z)Ric(Y,W) \\ + g(Y,W)Ric(Z,X) - g(X,W)Ric(Y,Z)] \tag{5.38}$$

gerçeklenir. (2.21) ve (5.38) denklemlerinden,

$$-(\frac{a}{3} + L_S)[g(Y,Z)Ric(X,W) - g(X,Z)Ric(Y,W) + g(Y,W)Ric(X,Z) \\ -g(X,W)Ric(Y,Z)] + b[A(W_2(X,Y)Z)A(W) + A(Z)A(W_2(X,Y)W)] \\ +c[A(W_2(X,Y)Z)B(W) + A(W)B(W_2(X,Y)Z) \\ +A(Z)B(W_2(X,Y)W) + A(W_2(X,Y)W)B(Z)] = 0 \tag{5.39}$$

bulunur. (5.39) denkleminde $Z = U$ ve $W = V$ alınırsa,

$$-(\frac{a}{3} + L_S)[A(Y)Ric(X,V) - A(X)Ric(Y,V) + B(Y)Ric(X,U) - B(X)Ric(Y,U)] \\ -bW_2(X,Y,V,U) + c[W_2(X,Y,U,U) - W_2(X,Y,V,V)] = 0 \tag{5.40}$$

elde edilir. (5.14) ve (3.76) denklemlerinin yardımıyla, (5.40) denkleminden ($b \neq 0$ olduğundan), Riemann eğrilik tensörünün

$$R(X,Y,U,V) = (\frac{2a-b}{3} + L_S)[A(Y)B(X) - A(X)B(Y)], \ \forall X,Y \in \chi(M) \tag{5.41}$$

bağıntısını gerçeklediği görülür. Ayrıca, (5.39) denklemi $X$ ve $W$ üzerinden daraltılır ve (3.77) denklemi kullanılırsa

$$-(\frac{a}{3} + L_S)[rg(Y,Z) - 4Ric(Y,Z)] + bW_2(U,Y,Z,U) \\ +c[W_2(V,Y,Z,U) + W_2(U,Y,Z,V)] = 0 \tag{5.42}$$

elde edilir. (5.42) denkleminde $Z = U$ alınırsa

$$-(\frac{a}{3} + L_S)[rA(Y) - 4Ric(Y,U)] + bW_2(U,Y,U,U) \\ +c[W_2(V,Y,U,U) + W_2(U,Y,U,V)] = 0 \tag{5.43}$$

bulunur. (3.76) ile verilen $W_2$ eğrilik tensörü, (5.14) ve (5.43) denklemlerinden

$$\Big[-3b(\frac{a}{3}+L_S)+\frac{c^2}{3}\Big]A(Y)-\Big[-4c(\frac{a}{3}+L_S)+\frac{bc}{3}+c(\frac{2a-b}{3}+L_S)-\frac{ac}{3})\Big]B(Y)=0 \tag{5.44}$$

ilişkisi bulunur. (5.44) denkleminde sırasıyla $Y=U$ ve $Y=V$ alınır ve (5.13) denklemi kullanılırsa,

$$L_S=\frac{-3ab+c^2}{9b} \quad ve \quad c(a+3L_S)=0 \tag{5.45}$$

bağıntıları elde edilir. Bu durumda yine $c=0$ veya $L_S=\frac{-a}{3}$ şeklinde iki durum elde edilir. Eğer $c=0$ ise, aynı anda $b$ de sıfır olamayacağı için (5.45) denklemindeki ilk bağıntından, $L_S=\frac{-a}{3}$ olur. Eğer $c\neq 0$ ise, (5.45) kullanılarak yine $L_S=\frac{-a}{3}$ bulunur. Dolayısıyla, her iki durumda da $c=0$ ve $L_S=\frac{-a}{3}$ bulunur. Elde edilen bulgular, (5.39) denkleminde kullanılır ve $W=U$ olarak alınırsa,

$$R(X,Y)U=\frac{a-b}{3}[A(Y)X-A(X)Y], \;\; \forall X,Y\in\chi(M) \tag{5.46}$$

sağlanır ve bunun sonuncunda uzay-zaman bir $N(\frac{a-b}{3})$-yarı Einstein uzay-zamanı olur. □

Özel olarak, $L_S=0$ seçilirse, $a=c=0$ olacağından, Ricci tensörünün

$$Ric(X,Y)=bA(X)A(Y), \;\; \forall X,Y\in\chi(M) \tag{5.47}$$

biçiminde olduğu görülür. Ayrıca, (5.47) denklemi $X$ ve $Y$ üzerinde daraltılırsa skaler eğrilik $r=b$ olarak bulunur. Böylece aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

**Teorem 5.4.** *$W_2$-Ricci semisimetrik (yani $W_2\cdot Ric=0$ koşulunu sağlayan) her $G(QE)_4$ uzay-zamanı, Ricci tensörü, $r$ skaler eğrilik olmak üzere, $Ric(X,Y)=rA(X)A(Y)$ formunda olan ve katı madde (stiff matter) içeriğine sahip bir özel yarı Einstein uzay-zamanıdır.*

### 5.1.3 $W_2$-düz uzay-zamanı

Bu bölümde, kozmolojik sabitli Einstein alan denklemlerini sağlayan $W_2$-düz uzay-zamanı ele alınmaktadır. Bu durumda, $W_2$-eğrilik tensörü özdeş olarak sıfıra eşittir. O halde, (3.76) denkleminden, $W_2$-düz bir uzay-zamanın Riemann eğrilik tensörü,

$$R(X,Y,Z,W)=\frac{1}{3}[g(Y,Z)Ric(X,W)-g(X,Z)Ric(Y,W)] \tag{5.48}$$

biçiminde elde edilir. (5.48) denklemi $X$ ve $W$ üzerinde daraltılırsa

$$Ric(Y,Z) = \frac{r}{4} g(Y,Z) \tag{5.49}$$

bulunur ve böylece $r$ skaler eğriliği sabittir. (5.49) denklemi yardımıyla, (5.48) denkleminden

$$R(X,Y)Z = \frac{r}{12}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y], \quad \forall\, X,Y,Z \tag{5.50}$$

Böylece, her $W_2$-düz uzay-zaman, sabit eğrilikli bir uzaydır.

**Not 5.1.** [72] Bir $M$ Lorentz manifoldunda, $l$ ve $m$ reel değerli fonksiyonlar olmak üzere, Riemann eğrilik tensörü

$$R(X,Y)Z = l[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y], \ \ \forall X,Y,Z \in U^{\perp}, \tag{5.51}$$

$$R(X,U)U = mX; \ \ \forall X \in U^{\perp} \tag{5.52}$$

denklemlerini sağlıyorsa $M$, birim zamansal $U$ vektör alanına *sonsuz küçük uzaysal-izotropiktir (infinitesimally spatially isotropic)* denir.

Bu durumda, $W_2$-düz bir uzay-zamanda, $U$ üretecine dik olan vektörlerin oluşturduğu 3-boyutlu $U^{\perp}$ dağılımı dikkate alınırsa, her $X,Y,Z \in U^{\perp}$ için (5.50) denklemi ve

$$R(X,U)U = -\frac{r}{12}X, \ \ \forall\, X \in U^{\perp} \tag{5.53}$$

denklemi sağlanır. O halde aşağıdaki teorem elde edilir:

**Teorem 5.5.** *Einstein alan denklemlerini sağlayan, $W_2$-düz ve birim zamansal $U$ vektör alanını hız vektör alanı olarak kabul eden bir uzay-zaman, $U$ vektör alanına sonsuz küçük uzaysal-izotropiktir.*

Bir uzay-zamanın simetrisi, $A$ geometrik veya fiziksel bir büyüklük, $\mathscr{L}_\xi$ bir $\xi$ vektör alanı doğrultusundaki Lie türevi ve $\Omega$ bir skaler olmak üzere

$$\mathscr{L}_\xi A - 2\Omega A = 0 \tag{5.54}$$

denklemi ile verilir, [73]. Özel olarak $A = g_{ij}$ metrik tensörü olarak alınırsa, (5.54) koşulu *metrikten doğan simetri* olarak isimlendirilir ve (5.54) denkleminden

$$(\mathscr{L}_\xi g)(X,Y) = 2\Omega g(X,Y) \tag{5.55}$$

yazılabilir. Bu denklemde $\Omega = 0$ ise, $\xi$'ye Killing vektör alanı, $\Omega$ sıfırdan farklı skaler fonksiyon ise $\xi$'ye konformal Killing vektör alanı adı verilir. Einstein alan denklemleri ve (5.49) denkleminden

$$(\Lambda - \frac{r}{4})g(X,Y) = \kappa T(X,Y) \tag{5.56}$$

bulunur. (5.56) eşitliğinin her iki tarafının Lie türevi alınır ve $r$ skaler eğriliğinin sabit olduğu hatırlanırsa

$$(\Lambda - \frac{r}{4})(\mathscr{L}_\xi g)(X,Y) = \kappa(\mathscr{L}_\xi T)(X,Y) \tag{5.57}$$

elde edilir. Eğer $\xi$ is konformal Killing vektor alanı ise, (5.57) ve (5.55) denklemlerinden, $\Omega$ skaler fonksiyon olmak üzere

$$2(\Lambda - \frac{r}{4})\Omega g(X,Y) = \kappa(\mathscr{L}_\xi T)(X,Y) \tag{5.58}$$

bulunur. Einstein alan denklemlerini sağlayan, $W_2$-düz uzay zamanında, $\kappa \neq 0$ olduğundan (5.56) ve (5.58) denklemleri yardımıyla

$$(\mathscr{L}_\xi T)(X,Y) = 2\Omega T(X,Y) \tag{5.59}$$

bulunur. Bu ise, enerji momentum tensörünün simetri özelliğini sağladığını gösterir. Tersine, eğer (5.59) sağlanıyorsa, (5.56) ve (5.57) denklemlerinden, $\Lambda, \kappa$ ve $r$ sabit olduğundan, (5.55) denklemi bir $\Omega$ skaler fonksiyonu için sağlanır. Dolayısıyla, $\xi$ konformal Killing vektör alanı olur. Eğer $\Omega = 0$ olarak alınırsa, (5.58) ve (5.59) denklemlerinden, $\xi$'nin Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter koşul enerji momentum tensörünün $\xi$ doğrultusundaki Lie türevinin sıfır olmasıdır. O halde aşağıdaki sonuç elde edilir:

**Teorem 5.6.** *Einstein alan denklemlerini sağlayan, bir $W_2$-düz uzay-zamanın*

*(1) $\xi$ konformal Killing vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter koşul enerji momentum tensörünün simetri özelliğini sağlamasıdır.*

*(2) $\xi$ Killing vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter koşul enerji momentum tensörünün $\xi$ doğrultusundaki Lie türevinin sıfır olmasıdır.*

### 5.1.4 Konformal düz $G(QE)_4$ uzay-zamanı

Bu bölümde, Teorem 4.1 ve Teorem 4.4'de elde edilen sonuçlar, birim ve zamansal $U$ üretecine sahip olan, konformal düz, Ricci semisimetrik $G(QE)_4$ uzay-zamanına genişletilecektir. Elde edilen sonuçların bir kısmı [74] numaralı makalede yayınlanmıştır:

**Teorem 5.7.** *$(M^4,g)$ konformal düz, Ricci semisimetrik bir $G(QE)_4$ uzay-zamanı olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenmektedir:*

*(1) $U$ üreteci birim has, zamansal, konsörkılır vektör alanıdır.*

*(2) $(M^4,g)$ Kagan anlamında alt projektif uzay-zamanıdır.*

*(3) $(M^4,g)$ uzay-zamanının birinci temel formu;*

$$ds^2 = -(dx^1)^2 + e^q g^*_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

*biçimindedir. Burada $(\alpha,\beta,\gamma,\delta = 2,3,4)$ olmak üzere $g^*_{\alpha\beta} = g^*_{\alpha\beta}(x^\gamma)$ yalnızca $x^\gamma$'nın fonksiyonları, $q = q(x^1)$ sabitten farklı ve yalnızca $x^1$'in bir fonksiyonudur. Yani, $(M^4,g)$ uzay-zamanı lokal olarak, $M^*$ 3-boyutlu bir Einstein manifoldu olmak üzere, $I \times_{e^{q/2}} M^*$ biçiminde bir katlı çarpım manifoldudur.*

*(4) $(M^4,g)$, bir Robertson-Walker uzay-zamanıdır.*

*İspat. (1)* Sonuç 5.1'den, Ricci semisimetrik $G(QE)_4$ uzay-zamanının Ricci tensörü

$$Ric(X,Y) = a[g(X,Y) + A(X)A(Y)], \quad \forall\, X,Y \in \chi(M) \tag{5.60}$$

biçimindedir. O halde, uzay-zamanın skaler eğriliği $r = 3a$ olarak bulunur ve dolayısıyla

$$dr(X) = 3da(X), \quad \forall\, X \in \chi(M) \tag{5.61}$$

dir. Ayrıca $M$ konformal düz olduğundan, konformal eğrilik tensörünün diverjansı sıfırdır ve dolayısı ile

$$(\nabla_Z Ric)(X,Y) - (\nabla_Y Ric)(X,Z) = \frac{1}{6}[dr(Z)g(X,Y) - dr(Y)g(X,Z)] \tag{5.62}$$

denklemi sağlanmaktadır. Bu durumda, (5.61) kullanılarak (5.62) denkleminden

$$(\nabla_Z Ric)(X,Y) - (\nabla_Y Ric)(X,Z) = \frac{1}{2}[da(Z)g(X,Y) - da(Y)g(X,Z)] \tag{5.63}$$

elde edilir. (5.60) denkleminin kovaryant türevi alınırsa,

$$(\nabla_Z Ric)(X,Y) = da(Z)[g(X,Y) + A(X)A(Y)] + a[(\nabla_Z A)(X)A(Y) + A(X)(\nabla_Z A)(Y)] \tag{5.64}$$

bulunur ve son iki denklem kullanılarak

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[da(Z)g(X,Y) - da(Y)g(X,Z)] = {} & da(Z)g(X,Y) - da(Y)g(X,Z) + da(Z)A(X)A(Y) \\ & - da(Y)A(X)A(Z) + a\Big[(\nabla_Z A)(X)A(Y) + A(X)(\nabla_Z A)(Y) \\ & - (\nabla_Y A)(X)A(Z) - A(X)(\nabla_Y A)(Z)\Big]\end{aligned} \tag{5.65}$$

elde edilir. Burada, $X$ ve $Y$ üzerinde daraltma yapılırsa

$$\frac{1}{2}da(Z) = da(U)A(Z) + a.div(A)A(Z) + a(\nabla_U A)(Z) \tag{5.66}$$

bulunur. Ayrıca (5.65) denkleminde sırasıyla, $X = U$ ve $Y = U$ alınırsa aşağıdaki iki denklem elde edilir:

$$\frac{1}{2}[A(Y)da(Z) - A(Z)da(Y)] = a[(\nabla_Y A)(Z) - (\nabla_Z A)(Y)] \tag{5.67}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[A(X)da(Z) - da(U)g(X,Z)] = {} & da(Z)A(X) + da(U)A(X)A(Z) \\ & + a[(\nabla_U A)(X)A(Z) + A(X)(\nabla_U A)(Z) + (\nabla_Z A)(X)]\end{aligned} \tag{5.68}$$

(5.68) denkleminde $X = U$ alınırsa

$$\frac{-1}{2}[da(Z) + A(Z)da(U)] = a(\nabla_U A)(Z) \tag{5.69}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (5.66) denkleminde $Z = U$ olarak alınırsa

$$\frac{3}{2}da(U) = -a.div(A) \tag{5.70}$$

bulunur. (5.70) denklemi, (5.66) denkleminde kullanılırsa

$$a(\nabla_U A)(Z) = \frac{1}{2}[da(Z) + da(U)A(Z)] \tag{5.71}$$

bulunur. (5.71) ve (5.69) denklemlerinden, $\phi = -da(U)$ olarak alınarak,

$$da(Z) = \phi A(Z), \ \ \forall\, Z \in \chi(M) \tag{5.72}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu durumda, (5.72) bağıntısı (5.67) denkleminde kullanılırsa, $a \neq 0$ olduğundan

$$(\nabla_Y A)(Z) = (\nabla_Z A)(Y), \ \ \forall Y, Z \in \chi(M) \tag{5.73}$$

elde edilir. Bu da $A$ 1-formunun kapalı olduğu anlamına gelir. Böylece, (5.68), (5.72) ve (5.73) denklemlerinden

$$(\nabla_Z A)(X) = \frac{\phi}{2a}[g(X,Z) + A(X)A(Z)], \ \ \forall Y, Z \in \chi(M) \tag{5.74}$$

elde edilir. Böylece zamansal $U$ vektör alanı birim has konsörkılır vektör alanıdır.

*(2)* Bir semi-Riemann manifoldunun alt projektif uzay olması için gerek ve yeter koşul $\sigma$, $\rho$'nun bir fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki üç koşulun sağlanmasıdır [75]:

$$\begin{cases} R(X,Y,Z,W) = T(X,W)g(Y,Z) + T(Y,Z)g(X,W) \\ \qquad\qquad\qquad -T(X,Z)g(Y,W) - T(Y,W)g(X,Z) \\ (\nabla_W T)(Y,Z) - (\nabla_Z T)(Y,W) = 0 \\ T_{\mu\nu} = \rho g_{\mu\nu} + \rho_\mu \sigma_\nu \end{cases} \tag{5.75}$$

Burada $T$ tensörü aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$T(Y,Z) = \frac{1}{n-2}\Big(Ric(Y,Z) - \frac{R}{2(n-1)}g(Y,Z)\Big) \tag{5.76}$$

$$\rho_\mu = \frac{\partial \rho}{\partial x^\mu} \ , \ \sigma_\mu = \frac{\partial \sigma}{\partial x^\mu} \tag{5.77}$$

(5.75) denklemindeki ilk iki koşul, manifoldun konformal eğrilik tensörünün sıfır olduğunu, yani manifoldun konformal düz olduğunu göstermektedir. Şimdi, (5.60) ve (5.61) denklemleri konformal eğrilik tensöründe kullanılırsa, konformal düz Ricci semisimetrik $G(QE)_4$ uzay-zamanının Riemann eğrilik tensörü,

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) = &\frac{a}{2}\Big[A(Y)A(Z)g(X,W) - A(X)A(Z)g(Y,W) \\ &+A(X)A(W)g(Y,Z) - A(Y)A(W)g(X,Z)\Big] \\ &+\frac{a}{2}\Big[g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)\Big] \end{aligned} \tag{5.78}$$

biçiminde bulunur. Diğer taraftan, (5.60) ve (5.61) denklemleri, (5.76) denkleminde yerine yazılırsa

$$T(X,Y) = \frac{a}{2}\Big[\frac{g(X,Y)}{2} + A(X)A(Y)\Big] \tag{5.79}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}T(X,W)g(Y,Z)+T(Y,Z)g(X,W)-T(X,Z)g(Y,W)-T(Y,W)g(X,Z)\\ =\frac{a}{2}\Big[A(Y)A(Z)g(X,W)-A(X)A(Z)g(Y,W)\\ +A(X)A(W)g(Y,Z)-A(Y)A(W)g(X,Z)\Big]\\ +\frac{a}{2}\Big[g(X,W)g(Y,Z)-g(X,Z)g(Y,W)\Big]\end{aligned} \tag{5.80}$$

bulunur. Bu durumda, (5.78) ve (5.80) denklemleri karşılaştırılırsa, (5.75)'de verilen ilk koşulun sağlandığı görülür.

$\rho=\frac{a}{4}$ ve $\frac{a}{2}A_i=\rho_i$ olarak alınırsa $A$ kapalı 1-form olduğundan $d\rho$ da kapalı olur ve (5.75)'de verilen üçüncü koşul da sağlanmış olur.

Son olarak, (5.79)'nin kovaryant türevi alınarak

$$\begin{aligned}(\nabla_Z T)(X,Y)-(\nabla_Y T)(X,Z)=&\frac{da(Z)}{2}\Big[\frac{g(X,Y)}{2}+A(X)A(Y)\Big]\\ &-\frac{da(Y)}{2}\Big[\frac{g(X,Z)}{2}+A(X)A(Z)\Big]\\ &+\frac{a}{2}\Big[(\nabla_Z A)(X)A(Y)+A(X)(\nabla_Z A)(Y)\\ &-(\nabla_Y A)(X)A(Z)-A(X)(\nabla_Y A)(Z)\Big]\end{aligned} \tag{5.81}$$

elde edilir. Bu durumda, (5.72), (5.73)ve (5.74) denklemleri (5.81) denkleminde kullanıldığında

$$(\nabla_Z T)(X,Y)=(\nabla_Y T)(X,Z) \tag{5.82}$$

denkleminin sağlandığı görülür. Böylece, (5.75)'de verilen ikinci koşul da sağlanmış olur. Dolayısıyla, $(M^4,g)$ alt projektif uzay-zamandır.

*(3)* K. Yano'nun [40] numaralı çalışmasına benzer şekide, $(-,+,+,+)$ işaretine sahip Lorentz uzayları için de $g^*_{\alpha\beta}=g^*_{\alpha\beta}(x^\gamma)$ yalnızca $x^\gamma$'nın fonksiyonları, $(\alpha,\beta,\gamma,\delta=2,3,4)$, $q=q(x^1)$ sabitten farklı ve yalnızca $x^1$'in bir fonksiyonu olmak üzere, temel kuadratik form

$$ds^2=-(dx^1)^2+e^q g^*_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{5.83}$$

biçiminde olacak şekilde bir koordinant sistemi mevcuttur. Dolayısıyla, konformal düz, Ricci semisimetrik $G(QE)_4$ uzay-zamanı lokal olarak, $(M^*,g^*)$ 3-boyutlu semi-Rimann manifoldu olmak üzere, $I\times_{e^{q/2}}M^*$ biçiminde bir katlı çarpım manifoldudur.

*(4)* Gebarowski'nin [49] numaralı çalışmasına göre, $I \times_{e^{q/2}} M^*$ katlı çarpım manifoldu konformal düz olduğundan, $M^*$ lifi Einstein manifoldudur. Bu durumda, $(M^*, g^*)$ 3-boyutlu Einstein manifoldu ve dolayısıyla da sabit eğrilikli manifold olur. Sonuç olarak, $I \times_{e^{q/2}} M^*$ katlı çarpımı bir Robertson-Walker uzay-zamanıdır. □

### 5.1.5 Ricci reküran ve Ricci simetrik $G(QE)_4$ uzay-zamanlar ve çeşitli fiziksel sonuçlar

Bu bölümde, Bölüm 3.2'de ele alınan Ricci reküran ve Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldu için elde edilen sonuçlar, $U$ üreteci zamansal hız vektör alanı olan $G(QE)_4$ uzay-zamanlarına genişletilecek ve elde edilen sonuçların Genel Görelilik Teorisi ile bağlantısı kurulacaktır.

**Teorem 5.8.** *$(M^4, g)$ Ricci reküran $G(QE)_4$ uzay-zamanı olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenir:*

*(i) $(M^4, g)$'nin $U$ hız vektörü paraleldir ve $U$'nun integral eğrileri jeodeziklerden ibarettir.*

*(ii) $(M^4, g)$ skaler fonksiyonları eşit olan $(QE)_4$ uzay-zamandır.*

*(iii) Einstein alan denklemlerini sağlayan $(M^4, g)$ uzay-zamanı mükemmel akışkanlı uzay-zamanlara bir model oluşturmaktadır.*

*İspat.* $G(QE)_4$ uzay-zamanının Ricci tensörünün kovaryant türevi, Tanım 3.12 ile verilen Ricci rekürans bağıntısında kullanılırsa, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} \phi(X)Ric(Y,Z) =& da(X)g(Y,Z) + db(X)A(Y)A(Z) + b[(\nabla_X A)(Y)A(Z) + A(Y)(\nabla_X A)(Z)] \\ & + dc(X)[A(Y)B(Z) + A(Z)B(Y)] \\ & + c[(\nabla_X A)(Y)B(Z) + A(Y)(\nabla_X B)(Z) \\ & + (\nabla_X A)(Z)B(Y) + A(Z)(\nabla_X B)(Y)] \end{aligned} \tag{5.84}$$

(5.84) denkleminde $Y = Z = U$ alınır ve $U$'nun zamansal hız vektör alanı olduğu hatırlanırsa

$$(a-b)\phi(X) = da(X) - db(X) + 2c(\nabla_X B)(U) \tag{5.85}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (5.84) denkleminde $Y = Z = V$ alınır ve $U$ ile $V$ üreteçlerinin ortonormal oldukları kullanılırsa

$$a\phi(X) = da(X) + 2c(\nabla_X A)(V) \tag{5.86}$$

(5.85) denkleminden (5.86) denklemi çıkartılırsa

$$b\phi(X) = db(X) + 4c(\nabla_X A)(V) \tag{5.87}$$

bulunur. Son iki denklem, Ricci rekürans bağıntısı ve $r = 4a - b$ skaler eğriliği kullanılarak

$$4[a\phi(X) - da(X)] = b\phi(X) - db(X) \tag{5.88}$$

bulunur. (5.87) ve (5.88) eşitlikleri yardımıyla

$$da(X) = a\phi(X), \ \forall X \in \chi(M) \tag{5.89}$$

bağıntısı elde edilir. Benzer şekilde, (5.88) ve (5.89) eşitlikleri yardımıyla

$$db(X) = b\phi(X), \ \forall X \in \chi(M) \tag{5.90}$$

bulunur. Diğer taraftan, (5.86) ve (5.89) denklemleri kullanılırsa $c(\nabla_X A)(V) = 0$ bulunur ve böylece iki durum söz konusu olur: Eğer $c = 0$ ise, (5.84) denkleminde $X = U$ alınır ve (5.89) ile (5.90) bağıntıları kullanılırsa (aynı anda $b = 0$ olamayacağı için),

$$(\nabla_X A)(Z) = 0, \ \forall X, Z \in \chi(M) \tag{5.91}$$

bulunur. Benzer şekilde, eğer $c \neq 0$ ise, bu durumda her $X \in \chi(M)$ için $(\nabla_X A)(V) = 0$ sağlanır. Bu durumda, (5.84) denkleminde $Y = U$ ve $Z = V$ alınırsa

$$dc(X) = c\phi(X), \ \forall X \in \chi(M) \tag{5.92}$$

bağıntısının gerçeklendiği görülür. Böylece, (5.84) denkleminde $Y = V$ alınarak elde edilen denklemde, (5.89) ve (5.92) bağıntıları kullanılırsa, yine ($c \neq 0$ kabul edildiğinden) her $X, Z \in \chi(M)$ için $(\nabla_X A)(Z) = 0$ eşitliğine ulaşılır ki bu da ilk durum ile aynıdır. O halde, her iki durumda da $U$ üretecinin paralel vektör alanı olduğu elde edilmiş olur ve $(i)$'nin ispatı tamamlanır.

$(i)$'de elde edilen paralellik koşulu yardımıyla, Bölüm 3.2'de yapılan hesaplara benzer şekilde, Ricci reküran $G(QE)_4$ uzay-zamanının Ricci tensörü

$$Ric(X,Y) = a[g(X,Y) + A(X)A(Y)], \ \forall X,Y \in \chi(M) \tag{5.93}$$

biçiminde bulunur ve böylece $(ii)$ elde edilmiş olur. (5.93) denklemi Einstein alan denkleminde yerine yazılırsa, Ricci reküran $G(QE)_4$ uzay-zamanın enerji momentum tensörü

$$T(X,Y) = \frac{2\Lambda - a}{2\kappa} g(X,Y) + \frac{a}{\kappa} A(X)A(Y) \tag{5.94}$$

biçiminde elde edilir. Bu ise, $M$'nin mükemmel akışkanlı uzay-zamanlara model oluşturduğunu gösterir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 5.8'in sonucu olarak, Ricci reküran $G(QE)_4$ uzay-zamanın skaler eğriliği $r = 3a$'dır. Ayrıca, $U$ paralel olduğundan

$$(\nabla_Z Ric)(X,Y) = da(Z)[g(X,Y) + A(X)A(Y)] \tag{5.95}$$

elde edilir. (5.95) denklemi $X$ ve $Z$ üzerinde daraltılır ve daraltılmış ikinci Bianchi özdeşliği kullanılırsa

$$\frac{1}{2} da(Y) = da(U)A(Y), \ \forall Y \in \chi(M) \tag{5.96}$$

elde edilir. (5.96) denkleminde $X = U$ yazılırsa $da(U) = 0$ bulunur ve bu da tekrar (5.96) denkleminde kullanılırsa

$$da(Y) = 0, \ \forall Y \in \chi(M) \tag{5.97}$$

bulunur. Dolayısıyla, uzay-zamanın ilgili skaler fonksiyonları sabittir. Dahası, (5.95) denkleminden, $\nabla Ric = 0$'dır, yani her Ricci reküran $G(QE)_4$ uzay-zamanı Ricci simetrik manifolda indirgenmiş olur. Böylece doğrudan aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

**Teorem 5.9.** *$(M^4, g)$ Ricci simetrik $G(QE)_4$ uzay-zamanı olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenir:*

*(i) $(M^4, g)$ skaler fonksiyonları eşit olan $(QE)_4$ uzay-zamandır.*

*(ii) $(M^4, g)$'nin $U$ hız vektörü paraleldir ve $U$'nun integral eğrileri jeodeziklerden ibarettir.*

*(iii) Einstein alan denklemlerini sağlayan $(M^4, g)$ uzay-zamanı mükemmel akışkanlı uzay-zamanına bir model oluşturmaktadır.*

*(iv) Einstein alan denklemlerini sağlayan $(M^4, g)$ uzay-zamanında enerji yoğunluğu ve izotropik basınç sabittir.*

*İspat.* Teorem 5.8'de reküırans 1-formu sıfır olarak alınırsa, $(i)-(iii)$ açıktır. (5.6) ve (5.94) denklemleri karşılaştırılırak uzay-zamanın enerji yoğunluğu ve izotropik basıncı

$$\sigma = \frac{3a - 2\Lambda}{2\kappa}\ ,\ p = \frac{2\Lambda - a}{2\kappa} \tag{5.98}$$

biçiminde bulunur. Ayrıca, Teorem 5.8'in bir sonucu olarak $a$ ilgili skaleri sabit olduğundan, $\sigma$ ve $p$ sabittir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

**Not 5.2.** [1] Mükemmel akışkanlı bir uzay-zaman için enerji ve kuvvet denklemleri, aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$U\sigma = g(grad\sigma, U) = -(\sigma + p)divU \tag{5.99}$$

$$(\sigma + p)(\nabla_U U) = -grad p - (Up)U \tag{5.100}$$

Teorem 5.9-$(iv)$'de elde edilen $\sigma$ ve $p$'nin sabit oldukları sonucu, (5.99) ve (5.100) denklemlerinde kullanılırsa

$$U\sigma = -(\sigma + p)divU = 0\ \ ve\ \ (\sigma + p)(\nabla_U U) = 0 \tag{5.101}$$

bulunur. Burada, $\sigma + p \neq 0$ gerçeklik koşulu kullanılırsa, aşağıdaki iki ifade bulunur:

$$divU = 0\ \ ve\ \ \nabla_U U = 0 \tag{5.102}$$

bulunur.

**Not 5.3.** Hatırlanacak olursa, $\sigma + p = 0$ olması durumunda, (5.4) ve (5.6) denklemlerinden, $T(X,Y) = pg(X,Y)$ bulunur ki bu da Einstein alan denklemlerinin vakum çözümlerine karşılık gelir. (Bu durum ayırca, hayali bariyer (phantom barrier) olarak da isimlendirilir, [76].)

**Not 5.4.** [77] numaralı çalışmada verilen bir uzay-zamanın zamansal hız vektör alanının kovaryant türev ifadesi yardımıyla, bu hız vektörünün dualinin kovaryant türevi, her $X \in \chi(M)$ için $hX = X + A(X)U$ izdüşüm vektörü (yani $X$ vektörünün $U$ hız vektörüne dik olan parçası) olmak üzere, her $X,Y$ vektör alanı için

$$(\nabla_X A)(Y) = \frac{1}{3}\theta g(hX,Y) - (\nabla_U A)(X)A(Y) + \sigma(X,Y) + \omega(X,Y) \tag{5.103}$$

denklemi ile verilmektedir. Burada, $\theta = divU$ ile genleşme sabiti (expansion scalar),

$$\sigma(X,Y) = \frac{1}{2}[g(\nabla_{hX}U,hY) - g(\nabla_{hY}U,hX)] - \frac{1}{3}\theta g(hX,Y) \tag{5.104}$$

ile simetrik kayma tensörü(shear tensor) ve

$$\omega(X,Y) = \frac{1}{2}[g(\nabla_{hX}U,hY) - g(\nabla_{hY}U,hX)] = proj(rotU) \tag{5.105}$$

ile dönme tensörü (vorticity-rotation tensor) gösterilmektedir.

Teorem 5.9 – $(ii)$'e göre, Ricci simetrik $G(QE)_4$ uzay-zamanının, $U$ hız vektör alanı paralel olduğundan, yukarıdaki notta verilen tanımlar yardımıyla aşağıdaki teorem elde edilmiş olur:

**Teorem 5.10.** *Einstein alan denklemlerini sağlayan her Ricci simetrik $G(QE)_4$ uzay-zamanının, ivme vektörü, dönme tensörü, genleşme sabiti ve kayma tensörü sıfırdır.*

**Açıklama 5.1.** Shaikh ve diğerleri [7] numaralı çalışmada, Ricci tensörü Codazzi tipinde olan mükemmel akışkanlı yarı Einstein uzay-zamanının dönme ve kayma tensörlerinin sıfır olduğunu göstermişlerdir. Bu sonuç, Teorem 5.9'da elde edilen sonuçlar ile birleştirilirse, Einstein alan denklemlerini sağlayan Ricci simetrik $G(QE)_4$ uzay-zamanının, dönme ve kayma tensörlerinin sıfır olduğu sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla, (5.10)'da elde edilien sonuçlar [7] numaralı çalışmada elde edilen sonuçlar ile uyumludur.

**Tanım 5.2.** *[78] A simetrik $(0,2)$-tensörü ve her $X,Y$ vektör alanı için $A(X,Y) = g(\mathscr{A}X,Y)$ şeklinde tanımlı $\mathscr{A}$ Lie cebri endomorfizması için, Riemann eğrilik tensörü, her $X,Y,Z,W$ vektör alanı için*

$$R(\mathscr{A}X,Y,Z,W) + R(\mathscr{A}Y,Z,X,W) + R(\mathscr{A}Z,X,Y,W) = 0 \tag{5.106}$$

*denklemini sağlıyorsa, A tensörüne Riemann uyumlu (Riemann compatible) veya kısaca R-uyumlu tensör adı verilir.*

Riemann eğrilik tensörü, daima Birinci Bianchi Özdeşliğini sağladığından, metrik tensörün Riemann uyumlu olduğu aşikardır. [79] ve [80] numaralı çalışmalarda, her Ricci-pseudosimetrik semi-Riemann manifoldunun Riemann uyumlu olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca, uyumluluk kavramı başka genelleştirilmiş eğrilik tensörlerine de genişletilebilir. Yani, (5.106) denkleminde, Riemann eğrilik tensörü yerine, Birinci Bianchi Özdeşliğini ve Riemann eğrilik tensörünün sahip olduğu simetri özelliklerini sağlayan başka eğrilik tensörleri (genelleştirilmiş eğrilik tensörü olarak isimlendirilen tensörler) de getirilebilir. Weyl konformal eğrilik tensörü bunun ile ilgili en bilinen örneklerdendir. Dolayısıyla, yukarıdaki tanıma benzer şekilde, simetrik $A$ tensörü, her $X,Y,Z,W$ vektör alanı için

$$C(\mathscr{A}X,Y,Z,W)+C(\mathscr{A}Y,Z,X,W)+C(\mathscr{A}Z,X,Y,W)=0 \tag{5.107}$$

denklemini sağlıyorsa $A$ tensörüne Weyl uyumlu (Weyl compatible) tensör adı verilir. Riemann ve Weyl uyumluluk kavramları, tensörler yerine vektör alanları üzerinde de tanımlanabilmektedir. Uyumlu tensörlerin karakterizasyonu için verilen (5.106) ve (5.107) şeklindeki genel formüller, uyumlu vektörler için daha güçlü ifadeler hale gelir ve yeni karakterizasyon sonuçları ortaya çıkar, [81]. Örneğin:

**Teorem 5.11.** *[81] u vektör alanının Riemann uyumlu olması için gerek ve yeter koşul u'nun Weyl uyumlu olması ve* $u_{[a}{R_{b]}}^{m}u_m=0$ *denklemini sağlamasıdır.*

O halde Teorem 5.9 ve Teorem 5.11 yardımıyla aşağıdaki teorem ispatlanabilir:

**Teorem 5.12.** *Einstein alan denklemlerini sağlayan her Ricci simetrik* $G(QE)_4$ *uzay-zaman Weyl (ve aynı zamanda Riemann) uyumludur.*

*İspat.* Teorem 5.9 yardımıyla, Ricci simetrik $G(QE)_4$ uzay-zamanının Weyl konformal eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} C(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) - \frac{a}{2}[A(Y)A(Z)g(X,W) - A(X)A(Z)g(Y,W) \\ +A(X)A(W)g(Y,Z) - A(Y)A(W)g(X,Z)] - \frac{a}{2}[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)] \end{aligned} \tag{5.108}$$

şeklinde bulunur. (5.108) denkleminde $W=U$ olarak alınırsa her $X,Y,Z$ için $C(X,Y,Z,U)=0$ olacağı açıktır. Böylece, her $X,Y,Z,W$ vektör alanı için

$$A(X)C(Y,Z,W,U)+A(Y)C(Z,X,W,U)+A(Z)C(X,Y,W,U)=0 \tag{5.109}$$

denklemi sağlanır ve $U$ hız vektör alanı (dolayısı ile uzay-zaman) Weyl uyumludur. Diğer taraftan, Ricci simetrik $G(QE)_4$ uzay-zamanında, $A_{[a}R_{b]}{}^{m}A_m = 0$ koşulunun sağlandığı da açıktır. Dolayısıyla, Teorem 5.11'den, $U$ (ve uzay-zaman) aynı zamanda Riemann uyumludur. □

**Not 5.5.** 4-boyutlu bir uzay-zamanda, Riemann eğrilik tensörünün 20 tane, Ricci tensörün ise 10 tane birbirinden bağımsız bileşeni vardır. Dolayısıyla, Einstein alan denklemlerinden, eğrilik tensörü ile ilgili sadece 10 adet bileşen belirlenebilir. Riemann eğrilik tensörünün, izi sıfır olan parçası olarak tanımlanan, yerçekimi ve elektromanyetizma ile ilgili bilgileri içeren Weyl (konformal) eğrilik tensörü ise, kalan 10 bağımsız bileşeni temsil etmektetedir. Genel Görelilik Teorisine göre Weyl tensörü, Einstein alan denklemlerinin tam çözümlerinin sınıflandırılmasında, evrenin oluşumu hakkında bilgiye sahip olduğu düşünülen kütleçekim dalgalarının incelenmesinde ve uzay-zamanın asimptotik özelliklerinin belirlenmesinde kullanılan doğal bir objedir.

Weyl tensörü, simetrik iki tensör olan elektrik ve manyetik bileşenleri tarafından tek türlü olarak belirlenir ve bu bileşenler klasik elektromanyetizma teorisindeki elektrik ve manyetik alanlar ile benzer rol oynayan yerçekimsel niceliklerdir. $u$ zamansal, hız vektör alanı olmak üzere, Weyl tensörünün elektirik ve magnetik bileşenleri [82], [83]

$$E_{kl} = u^j u^m C_{jklm} \tag{5.110}$$

$$H_{kl} = u^j u^m \bar{C}_{jklm} \tag{5.111}$$

denklemleri ile tanımlanmaktadır. Burada, $\bar{C}_{jklm} = \frac{1}{2}\varepsilon_{jkrs}u^j u^m C^{rs}{}_{lm}$ dual tensör ve $\varepsilon_{jkrs}$ ise ters simetrik Levi-Civita sembolünü göstermektedir (yani $j,k,r,s$'nin çift permütasyonları için $+1$, $j,k,r,s$'nin tek permütasyonları için $-1$ ve diğer durumlarda 0 değerini alan anti-simetrik tensördür). $E$ ve $H$ simetrik, izleri sıfır olan ($E^i_i = H^i_i = 0$) ve uzaysal (yani $E_{ab}u^b = 0$, $H_{ab}u^b = 0$ denklemlerini sağlayan) tensörlerdir. Her ikisi de, 5 bağımsız bileşene sahip olup, Weyl konformal eğrilik tensörü tümüyle bu iki tensör aracılığı ile belirlenir. Weyl tensörünün sırasıyla elektrik veya manyetik bileşeninin sıfır olması durumunda, uzay-zaman sırasıyla *sadece manyetik (SM)* veya *sadece elektriksel (SE)* olarak isimlendirilir. Dolayısı ile, $E = 0$ ve $H \neq 0$ veya $E \neq 0$ ve $H = 0$ olması durumunda, uzay-zaman konformal düz olmayan uzaydır.

Elektrik bileşeni, Newton'un teorisindeki gel-git (tidal) tensörünün Genel Göreliliğe genellemesi iken [84]; manyetik bileşenin Newton'un teorisinde bir analoğu yoktur.

Bu nedenle, SE alanlar Newton-benzeri ve SM alanlar ise sadece Genel Göreceli veya anti-Newtonian olarak kabul edilmektedir, [85].

Weyl tensörünün bu özel bileşenleri aracılığı ile, Weyl uyumluluk kavramı uzay-zamanların Petrov sınıflandırmaları ve Genel Görelilik teorisi ile ilgili uygulamaları hakkında daha genel sonuçlar elde edilmesini sağlamaktadır.

**Teorem 5.13.** *[86] 4-boyutlu bir uzay-zamanda zamansal bir vektörün Weyl uyumlu olması için gerek ve yeter koşul Weyl eğrilik tensörünün magnetik bileşeninin sıfır olmasıdır.*

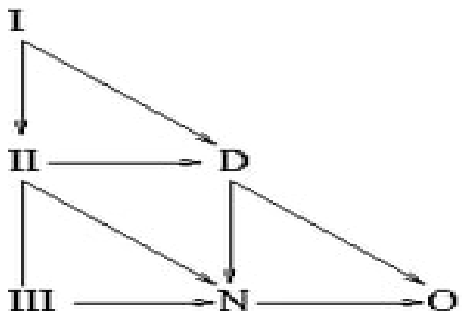
(5.109) denkleminden, Ricci simetrik $G(QE)_4$ uzay-zamanında, zamansal $U$ hız vektörünün Weyl uyumlu olduğu görülmektedir. O halde, Teorem 5.13'den Ricci simetrik $G(QE)_4$ uzay-zamanının Weyl eğrilik tensörünün magnetik bileşeni sıfır bulunur. Böylece, aşağıdaki teorem elde edilir:

**Teorem 5.14.** *Einstein alan denklemlerini sağlayan her Ricci simetrik $G(QE)_4$ uzay-zaman sadece elektiriksel (SE) uzay-zamandır, yani $H = 0$'dır.*

**Not 5.6.** Weyl tensörünün cebirsel yapısı, Petrov sınıflandırması olarak isimlendirilen ve Weyl tensörünün özvektörlerinin ve özdeğerlerinin sahip olduğu özellikler ile belirlenen bir teori ile karakterize edilebilir. Diğer bir değişle, özdeğerlerin bulunmasını sağlayan polinom denkleminin derecesine bağlı olarak uzay-zamanlar sınıflandırılabilir. Farklı Petrov tipine sahip olan Weyl tensörleri, metriklerinin farklı olduğu anlamına gelirken, metrikleri farklı olan iki uzay-zaman aynı Petrov tipine sahip olabilir. Öyleyse farklı Petrov tipleri, iki metrik gösteriminin farklı uzay-zamanlara ait olması için yeterli bir koşuldur, ancak gerekli koşul değildir.

Petrov [87]'a göre bir uzay-zaman, Weyl tensörünün esas null doğrultularının sağladığı bazı özelliklere bağlı olarak, $I$, $II$, $III$, $D$, $N$ ve $O$ olmak üzere altı sınıfa ayrılabilir. $k_{[e}C_{a]bc[d}k_{f]}k^b k^c = 0$ eşitliğini sağlayan $k^a$ vektörlerine Weyl tensörünün esas null doğrultuları adı verilir ve 4-boyutlu bir uzay-zamanda bu denklemi sağlayan en çok 4-null vektör bulunur. Bu tanıma göre, aralarındaki muhtemel geçişler diagramdaki gibi verilen Petrov tipleri, aşağıdaki gibi sınıflandırılmaktadır:

- *Tip I:* Tüm esas null doğrultuların birbirinden farklı olduğu durumdur.




**Şekil 5.1** : Petrov Classification, A. Z. Petrov (1954)

- *Tip II:* Esas null doğrultulardan ikisinin çakışık, diğer ikisinin farklı olması durumudur.
- *Tip D:* İki tane çift katlı esas null doğrultunun bulunması durumudur.
- *Tip III:* Esas null doğrultulardan üçünün çakışık, diğer doğrultunun farklı olması durumudur.
- *Tip N:* Dört katlı esas null doğrultunun bulunması durumudur.
- *Tip O:* Weyl tensörünün sıfır olması durumudur; yani konformal düz uzay-zamanlardır.

Örneğin, Robertson-Walker kozmolojik modelleri, $O$ Petrov tipine sahip uzay-zamanlarıdır. A. Barnes [88], mükemmel akışkanlı bir uzay-zamanda, dönme ile kayma tensörleri sıfır olan ve akışkanın hız vektör alanına dik olan hiper yüzeyde enerji yoğunluğu sabit olan uzay-zamanın $I$, $D$ ya da $O$ Petrov tipinde olduğunu göstermiştir. Ayrıca, Weyl tensörünün elektrik ve magnetik bileşenleri orantılı olan, yani $\gamma$ ve $\mu$ skalerleri için ($\gamma$ ve $\mu$'den birinin sıfır olma durumunu da ihtiva edecek şekilde) $\gamma E = \mu H$ bağıntısını sağlayan uzaylara, $I, D$ veya $O$ Petrov tipi uzaylar denir, [83].

O halde, yukarıdaki not ve Teorem 5.14 yardımıyla, aşağıdaki sınıflandırma teoremi edilir:

**Teorem 5.15.** *Einstein alan denklemlerini sağlayan her Ricci simetrik $G(QE)_4$ uzay-zamanı $I, D$ veya $O$ Petrov tipi uzay-zamandır.*

### 5.1.6 Genelleştirilmiş Yarı Einstein Uzay-Zamanı Örneği

Bu bölümün amacı, 4-boyutlu bir genelleştirilmiş yarı Einstein uzay-zamanının varlığını trivial olmayan bir Lorentz metriği inşaa ederek kanıtlamaktır. Genelleştirilmiş yarı Einstein uzay-zamanının, Ricci tensörü sıfırdan farklı ve (2.21) denklemini sağlamakta ve birbirine dik, sırasıyla zamansal ve uzaysal $U$ ve $V$ üreteçleri (5.13) denklemi ile verilmektedir. Dolayısıyla, şimdi (2.21) ve (5.13) koşullarının tümünü sağlayan 4-boyutlu bir Lorentz metriği inşaa edilecektir.

4-boyutlu $\mathbb{R}^4$ Reel sayılar uzayında, $\{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ standart koordinatlar ve $A$, $B$, $C$ yalnızca $x^4$ değişkenine bağlı olan fonksiyonlar olmak üzere; $(+,+,+,-)$ Lorentz işaretine sahip olan

$$ds^2 = A^2(dx^1)^2 + B^2(dx^2)^2 + C^2(dx^3)^2 - (dx^4)^2 \tag{5.112}$$

metriği dikkate alınsın. Bu durumda, Christoffel sembollerinin, Riemann eğrilik tensörünün ve Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri ile skaler eğrilik aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\Gamma^1_{14} = \frac{A_4}{A},\ \Gamma^4_{11} = AA_4,\ \Gamma^2_{24} = \frac{B_4}{B},\ \Gamma^3_{34} = \frac{C_4}{C},\ \Gamma^4_{22} = BB_4,\ \Gamma^4_{33} = CC_4 \tag{5.113}$$

$$R_{1221} = -ABA_4B_4, \quad R_{1331} = -ACA_4C_4, \quad R_{1441} = AA_{44} \tag{5.114}$$

$$R_{2332} = -BCB_4C_4, \quad R_{2442} = BB_{44}, \quad R_{3443} = CC_{44} \tag{5.115}$$

$$Ric_{11} = -\frac{AA_4B_4}{B} - \frac{AA_4C_4}{C} - AA_{44} \tag{5.116}$$

$$Ric_{22} = -\frac{BA_4B_4}{A} - \frac{BB_4C_4}{C} - BB_{44} \tag{5.117}$$

$$Ric_{33} = -\frac{CA_4C_4}{A} - \frac{CB_4C_4}{B} - CC_{44} \tag{5.118}$$

$$Ric_{44} = \frac{A_{44}}{A} + \frac{B_{44}}{B} + \frac{C_{44}}{C} \tag{5.119}$$

Bu durumda $(1,1)$-tipindeki Ricci operatörünün sıfırdan farklı bileşenleri ve skaler eğrilik aşağıdaki gibidir:

$$Q^1_1 = -\frac{A_4B_4}{AB} - \frac{A_4C_4}{AC} - \frac{A_{44}}{A}, \quad Q^2_2 = -\frac{A_4B_4}{AB} - \frac{B_4C_4}{BC} - \frac{B_{44}}{B} \tag{5.120}$$

$$Q^3_3 = -\frac{A_4C_4}{AC} - \frac{B_4C_4}{BC} - \frac{C_{44}}{C}, \quad Q^4_4 = -\frac{A_{44}}{A} - \frac{B_{44}}{B} - \frac{C_{44}}{C} \tag{5.121}$$

$$r=-2\Big[\frac{A_4B_4}{AB}+\frac{A_4C_4}{AC}+\frac{B_4C_4}{BC}+\frac{A_{44}}{A}+\frac{B_{44}}{B}+\frac{C_{44}}{C}\Big] \tag{5.122}$$

Burada "$_4$" alt indisi $x^4$ değişkenine göre türevi göstermektedir.

$G(QE)_4$ uzay-zamanının ilgili 1-formları, $\lambda \neq 0$ olmak üzere,

$$A^i=\Big(\frac{sinh(\lambda)}{A},0,0,cosh(\lambda)\Big) \tag{5.123}$$

ve

$$B_i=\Big(Acosh(\lambda),0,0,-sinh(\lambda)\Big) \tag{5.124}$$

olarak alınsın. Görüldüğü üzere, (5.13) denklemi sağlanmaktadır. Yani $A$ ve $B$ 1-formları birbirine dik, zamansal ve uzaysal iki vektör tarafından üretilmektedir.

Ayrıca, (2.21) denklemi, aşağıdaki gibi $(1,1)$-tipi tensörel ifade ile yazılabilir:

$$Q_i^j=a\delta_i^j+bA_iA^j+c[A_iB^j+B_iA^j],\quad j=1,2,3,4 \tag{5.125}$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda (5.120), (5.121) ve (5.125) denklemlerinden aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$a+bsinh^2(\lambda)+2csinh(\lambda)cosh(\lambda)=-\frac{A_4B_4}{AB}-\frac{A_4C_4}{AC}-\frac{A_{44}}{A} \tag{5.126}$$

$$a=-\frac{A_4B_4}{AB}-\frac{B_4C_4}{BC}-\frac{B_{44}}{B}=-\frac{A_4C_4}{AC}-\frac{B_4C_4}{BC}-\frac{C_{44}}{C} \tag{5.127}$$

$$a-bcosh^2(\lambda)-2csinh(\lambda)cosh(\lambda)=-\frac{A_{44}}{A}-\frac{B_{44}}{B}-\frac{C_{44}}{C} \tag{5.128}$$

$$c=-\frac{b}{2}tanh(2\lambda) \tag{5.129}$$

(5.126)-(5.129) denklemleri kullanılarak

$$b=2\Big(\frac{A_{44}}{A}-\frac{B_4C_4}{BC}\Big)\ \ ve\ \ c=\Big(\frac{B_4C_4}{BC}-\frac{A_{44}}{A}\Big)tanh(2\lambda) \tag{5.130}$$

elde edilir.

Şimdi bu sistemin bir

$$A=(x^4),\quad B=C=e^{(x^4)} \tag{5.131}$$

çözümü dikkate alınsın. Bu durumda, 4-boyutlu $\mathbb{R}^4$ Reel Sayılar uzayındaki $g$ Lorentz metriği

$$ds^2=g_{ij}dx^idx^j=(x^4)^2(dx^1)^2+e^{2(x^4)}[(dx^2)^2+(dx^3)^2]-(dx^4)^2 \tag{5.132}$$

biçiminde yazılır ve Christoffel sembollerinin, Riemann eğrilik tensörünün ve Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri ile skaler eğrilik aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\Gamma^1_{14} = \frac{1}{(x^4)}, \;\; \Gamma^4_{11} = (x^4), \;\; \Gamma^2_{24} = \Gamma^3_{34} = 1, \;\; \Gamma^4_{22} = \Gamma^4_{33} = e^{2(x^4)} \tag{5.133}$$

$$R_{1221} = R_{1331} = -e^{2(x^4)}(x^4), \;\; R_{2332} = -e^{4(x^4)}, \tag{5.134}$$

$$R_{2442} = R_{3443} = e^{2(x^4)} \tag{5.135}$$

$$Ric_{11} = -2(x^4), \;\; Ric_{22} = Ric_{33} = -e^{2(x^4)}\frac{[1+2(x^4)]}{(x^4)}, \;\; Ric_{44} = 2 \tag{5.136}$$

$$r = -2[\frac{2}{(x^4)} + 3] \tag{5.137}$$

Görüldüğü üzere, uzay-zamanın skaler eğriliği sabitten farklı bulunur. Dolayısıyla, (5.126)-(5.130) denklem sisteminden ilgili skaler fonksiyonlar

$$a = -2 - \frac{1}{(x^4)}, \quad b = -2, \quad c = \frac{\sqrt{2(x^4)-1}}{(x^4)} \tag{5.138}$$

ve ilgili 1-formlar

$$A_i(x) = \begin{cases} (x^4)\sqrt{\frac{2(x^4)-1}{2(1-(x^4))}} & \text{if } i=1 \\ 0 & \text{if } i=2,3 \\ \frac{-1}{\sqrt{2(1-(x^4))}} & \text{if } i=4 \end{cases} \tag{5.139}$$

ve

$$B_i(x) = \begin{cases} \frac{(x^4)}{\sqrt{2(1-(x^4))}} & \text{if } i=1 \\ 0 & \text{if } i=2,3 \\ -\sqrt{\frac{2(x^4)-1}{2(1-(x^4))}} & \text{if } i=4 \end{cases} \tag{5.140}$$

formunda elde edilir. Burada $\lambda$ sıfırdan farklı ve $(x^4)$ değişkenine bağlı olup

$$sinh^2(\lambda) = \frac{2(x^4)-1}{2(1-(x^4))} \;\; ve \;\; cosh^2(\lambda) = \frac{1}{2(1-(x^4))}$$

koşullarını sağlamaktadır. O halde, (daima $sinh^2(\lambda) > 0$ ve $cosh^2(\lambda) > 1$ olduğundan) $\frac{1}{2} < x^4 < 1$ koşulu sağlanmalıdır. Böylece, Ricci tensörünün

1. $Ric_{11} = ag_{11} + bA_1A_1 + 2cA_1B_1$

2. $Ric_{22} = ag_{22} + bA_2A_2 + 2cA_2B_2$

3. $Ric_{33} = ag_{33} + bA_3A_3 + 2cA_3B_3$

4. $Ric_{44} = ag_{44} + bA_4A_4 + 2cA_4B_4$

denklemlerini sağladığı gösterilebilir. Ayrıca, (1)-(4) dışında kalan durumların da sağlandığı gösterilebilmektedir. Dolayısıyla, (2.21) ve (5.13) denklemleri tümüyle sağlanmış olur. Böylece manifoldun skaler eğriliği de

$$r = 4a - b = -2[\frac{2}{(x^4)} + 3] \tag{5.141}$$

bağıntısını gerçekler. Sonuç olarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

**Teorem 5.16.** $\{x^1, x^2, x^3, x^4\}$; $\mathbb{R}^4$ *reel sayılar uzayının standart koordinaları olmak üzere,*

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = (x^4)^2 (dx^1)^2 + (e^{2x^4})[(dx^2)^2 + (dx^3)^2] - (dx^4)^2$$

*Lorentz metriği ile verilen* $M^4 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 : \frac{1}{2} < x^4 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^4$ *açık alt kümesi, zamansal hız vektör alanı ile ısı vektör alanı sırasıyla,* (5.139) *ve* (5.140) *denklemleri ile verilen, sabitten farklı* $r = -2[\frac{2}{(x^4)} + 3]$ *skaler eğriliğine sahip bir genelleştirilmiş yarı Einstein uzay-zamanıdır.*

# 6. RİCCİ SOLİTONLAR VE GENELLEŞTİRMELERİ

Bu bölümde, Ricci soliton kavramına giriş yapılacağı için, öncelikle bu kavramın ortaya çıkmasını sağlayan Ricci akışı (flow) teorisi ile ilgili literatür bilgisine yer verilecektir. Ricci akışı ve Ricci soliton kavramlarının nasıl ortaya çıktığı, ne şekilde ve hangi amaçlarla tanımlandığı hakkındaki detaylı bilgi için [9–12, 89–91] numaralı kaynaklardan yararlanılmıştır.

## 6.1 Ricci Akışı ve Bazı Özel Çözümleri

Diferansiyel geometrinin temel problemlerinden bir tanesi, herhangi bir Riemann manifoldu üzerinde kanonik (yani sabit eğriliğe sahip) bir metrik bulmaktır. Bir manifold üzerinde kanonik metriğin varlığı ise manifoldun topolojik yapısı hakkında önemli sonuçlar vermektedir. Bu konuda en iyi bilinen örnek kapalı yüzeyler için verilen *Üniformizasyon (Tekdüzelik) Teoremi*'dir, [10].

**Teorem 6.1.** ***(Üniformizasyon Teoremi)*** *Her basit bağlantılı Riemann yüzeyi, açık birim disk, kompleks düzlem yada Riemann küresinden herhangi birine konformal olarak denktir. Yani bu yüzey sabit eğrilikli bir Riemann metriğine sahiptir.*

Öte yandan, verilen bir Riemann manifoldu üzerinde kanonik bir metrik bulmak genellikle zor bir problemdir. Bu konu ile ilgili olarak *Yamabe Problemi* ortaya çıkmış ve aşağıdaki soru ortaya atılmıştır:

"$n \geqslant 3$ boyutlu, $g$ Riemann metriğine sahip, kompakt diferansiyellenebilir bir $M$ manifoldu için, sabit skaler eğrilikli ve $g$ metriğine konformal olan $g'$ metriği var mıdır?" Diğer bir deyişle; "$g' = e^{2f} g$ sabit eğrilikli bir metrik olacak şekilde $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonu bulunabilir mi?"

Bu bakımdan, Yamabe problemi, Üniformizasyon Teoreminin yüksek boyutlara bir genellemesi olarak düşünülebilir. Bu sorunun cevabının olumlu olduğu diferansiyel geometri, fonksiyonel analiz ve PDE teknikleri kullanılarak ispatlanmıştır.

20. yüzyıl matematiğinin önemli çözülemeyen problemlerinden bir tanesi olan Poincaré sanısı, 1900'lü yıllarda Poincaré tarafından ortaya atılmış ve 3-boyutlu kapalı ve basit bağlantılı bir manifoldun, küreye ($\mathbb{S}^3$) izometrik olması gerektiği hipotezi üzerine kurulmuştur. 1970'lerde W. Thurston bu problem ile ilgili önemli bazı sonuçlar elde etmiş ve 1982 yılında, 3-boyutlu her Riemann manifoldunun benzer şekilde sınıflandırılabileceğini öngören genel bir sanı ortaya atmıştır. Eğer ispatlanabilirse, 3-boyutlu tüm kompakt manifoldların sınıflandırılmasını sağlayacak olan *Thurston'ın Geometrikleştirme Sanısı* aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Geometrikleştirme sanısı ortaya çıkmadan önce, her kompakt, 3-boyutlu manifoldun bağlantılı toplam (connected sum) dekompozisyonu kullanılarak daha basit manifodlara ayrıştırılabileceği ispatlanmıştır. $m$-boyutlu iki manifoldun her birinin içinden bir yuvar çıkarıp, oluşan sınır küreleri (boundary spheres) birbirine yapıştırarak elde edilen manifold olarak tanımlanan bağlantılı toplam, kapalı yüzeylerin sınıflandırılmasında anahtar rol oynayan topolojik ve geometrik bir modifikasyondur. Eğer bir manifold bağlantılı toplam kullanarak trivial olmayan bileşenlerine ayrılamıyorsa bu manifolda *asal* denir. 1929'da her 3-boyutlu yönlendirilebilir, kompakt manifoldun, sonlu sayıda asal bileşene ayrılabiliceği ve bu ayrışımın tek türlü olduğu kanıtlanmışlardır. Dolayısıyla, 3-boyutlu manifoldları sınıflandırmak için aslında 3-boyutlu asal manifoldların sınıflandırılması yeterli olacaktır. 3-boyutlu manifoldların 2-boyutlu küreler boyunca kesilmesinden ibaret olan bağlantılı toplam dekompozisyonunun bir genelleştirmesi, manifoldun 2-boyutlu toruslar boyunca kesilmesi olarak yapılabileceğinden, Thurston aşağıdaki sanıyı öne sürmüştür:

**Thurston'ın Geometrikleştirme Sanısı:** Her kompakt, yönlendirilebilir ve asal 3-boyutlu manifold sonlu sayıda birbirine gömülmüş torus parçaları olarak ayrıştırılabilir ve bu parçaların herbiri sekiz temel ve simetrik geometrik yapıdan birinin metriğine sahiptir. (Bunlardan üçü, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{R}^3$ üzerindeki sabit eğrilikli metriklerdir.)

Bu sanının 2-boyuttaki analoğu, "Her kompakt, yönlendirilebilir 2-boyutlu manifold; ya sabit pozitif eğrilikli metriğe sahip olan $\mathbb{S}^2$ küresi, ya sıfır eğrilikli metriğe sahip olan $\mathbb{T}^2$ torusu ya da boşluklu torusların bağlantılı toplamı (bu da negatif sabit eğrilikli metrik ile verilebilir) olarak ayrıştırılabilir." şeklindedir.

Thurston'ın elde ettiği bu sınıflandırma 3-boyutlu manifoldların yalnızca bir özel sınıfı (Haken manifoldları) için sağlanmaktadır. Bu sonucun 3-boyutlu tüm manifoldlara genelleştirebilmesi için Hamilton 1982 yılında Ricci akışı kavramını tanımlayarak, Geometrikleştirme Sanısının çözümü için çığır açan bir makale yayınlamıştır, [9].

**Tanım 6.1.** *[9] $g_0$ metriği ile verilen, diferansiyellenebilen ve kapalı (yani kompakt ve sınırsız) bir $M$ Riemann manifoldu üzerinde metrik tensöre bağlı olan*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric(g(t)) \\ g(0) = g_0 \end{cases} \tag{6.1}$$

*kısmi diferansiyel denklemine Ricci akışı (Ricci flow) denir.*

Ricci akışı, $g$ metriğini (yani $M$ manifoldunun şeklini) Ricci tensörü ile orantılı olarak, uygun sabit eğrilikli (örneğin küresel) bir metriğe dönüştürür ve böylece $g$ metriği, Thurston'un ifade ettiği sekiz temel geometrik yapıdan birinin metriğine denk olur. Böylece, Üniformizasyon Teoreminde olduğu gibi, zaman ilerledikçe manifoldun şekli daha küresel bir hal almış olur.

**Açıklama 6.1.** Bilindiği üzere, bir demir çubuk üzerindeki $u(x,t)$ ısı dağılımının zaman içerisindeki değişimini gösteren ısı denklemi, $\Delta$ Laplace operatörü olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \tag{6.2}$$

biçimde verilen parabolik tipte kısmi diferansiyel denklemidir. Ricci tensörü, metriğin ikinci mertebe türevlerini içerdiğinden, (eğer harmonik koordinantlar kullanılırsa) $Ric = -\frac{1}{2}\Delta g$ olarak yazılabilir. O halde Ricci tensörü, ısı denklemindeki $\Delta u$ teriminin analoğu olarak düşünülebilir ve Ricci akışı denklemi $\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \Delta g(t)$ biçiminde bir ısı denklemi şeklinde yazılabilir. Isı denkleminin ısıyı uzay boyunca eşit şekilde yayması gibi, Ricci akışı da eğriliği kompakt diferansiyellenebilen manifold boyunca eşit şekilde yayar ve böylece metrik istenildiği gibi daha sabit eğrilikli hale gelmiş olur.

Isı-tipi (parabolik) denklemlerin karakteristik özelliği, Maksimum Prensibini sağlamalarıdır. Örneğin, yukarıdaki demir çubuk üzerindeki ısı denklemi için Maksimum Prensibi, çubuk üzerindeki en sıcak noktadaki ısının zamanın artmayan fonksiyonu olduğunu ve en soğuk noktadaki ısının ise zamanın azalmayan fonksiyonu olduğunu söyler. Zaman ilerledikçe ısı yayılır, nispeten sıcak olan bölgeler soğutulur ve çubuk üzerindeki maksimum sıcaklık azalır. Sonuç olarak, zaman arttıkça ortalama ısı için bir sınır belirlenmiş olur. Benzer şekilde Ricci akışında da Maksimum Prensibi aracılığı ile eğriliğin sınırı belirlenir. Bunun ile ilgili Hamilton'un elde ettiği sonuç aşağıdaki gibidir:

**Teorem 6.2.** *[9] $M^3$ kesin pozitif Ricci eğrilikli Riemann metriğine sahip kapalı 3-boyutlu bir manifold olsun. Bu durumda $M^3$ aynı zamanda sabit pozitif eğrilikli metriğe sahiptir.*

Ayrıca, Ivey tarafından keyfi boyutlu bir Riemann manifoldu için aşağıdaki sonuç elde edilmiştir:

**Teorem 6.3.** *[90] $(M^n, g)$ tam, basit bağlantılı ve sabit $C$ kesitsel eğrilikli Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $M$ manifoldu, $C = 0$ ise $\mathbb{E}^n$ öklid uzayına, $C = \frac{1}{R^2}$ ise $\mathbb{S}^n_R$ küresine ve $C = -\frac{1}{R^2}$ ise $\mathbb{H}^n_R$ hiperbolik uzayına izometriktir.*

O halde, Teorem 6.3'ün bir sonucu olarak, her 3-boyutlu basit bağlantılı, kapalı ve pozitif Ricci eğrilikli metriğe sahip manifold, 3-boyutlu küreye difeomorfiktir ki bu da Poincaré Sanısının doğruluğunu gösteren bir sonuçtur. Özel olarak, $g_0$ başlangıç metriği kesin pozitif Ricci eğriliğe sahipse, $M^3$ manifoldu Ricci akışı altında sonlu zaman içinde noktaya büzülecektir. Ancak eğer metrik, hacmi sabit bırakan, zamana bağlı bir çarpan ile genişletilirse, noktaya büzülme problemi ortadan kalkar. Dahası, bu yeniden ölçeklendirilen metrik, $M^3$ üzerinde aranan sabit pozitif eğrilikli metriğe de düzgün yakınsar. 2002 ve 2003 yıllarında Perelman [91], Hamilton'un Ricci akışını kullanarak Geometrikleştirme Sanısını ispat eden üç makale yayınlamış ve böylece yüz yıllık Poincaré Sanısının ispatı sona erdirilmiştir. Benzer şekilde, sabit Ricci eğrilikli metrik (yani Einstein metriği) bulma problemi de oldukça zor bir problem olup çözümü için Einstein alan denklemlerinin çözülmesi gerekmektedir. [10] numaralı makalede, pozitif skaler eğrilikli ve pozitif kesitsel eğrilikli Einstein metriği üretmek için de, yine Ricci akışı kavramı kullanılmıştır.

Bu bölümün devamında, Ricci akışının bazı özel çözümleri ve bu çözümlerin davranışları incelenecektir. İlk olarak, sabit eğrilikli uzaylar üzerinde Ricci akışının çözümleri aşağıdaki gibi bulunabilir:

**Einstein Manifoldları:**

**(a)** $\bar{g}$ birim küre üzerindeki standard metriği göstermek üzere, $n > 1$ boyutlu $r$-yarıçaplı küre üzerinde, $g = r^2\bar{g}$ metriği verilsin. Bu durumda tüm kesitsel eğrilikler $\frac{1}{r^2}$ olur. O halde her $V$ birim vektörü için

$$Ric(V,V) = \frac{(n-1)}{r^2} \tag{6.3}$$

bulunur. Böylece Ricci tensörü

$$Ric = \frac{(n-1)}{r^2}g = (n-1)\bar{g} \tag{6.4}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla (6.1) ile verilen Ricci akışı, (6.4) denklemi yardımıyla aşağıdaki adi diferansiyel denkleme dönüşür:

$$\frac{\partial}{\partial t}(r^2\bar{g}) = -2(n-1)\bar{g} \tag{6.5}$$

Bu ise $\frac{dr^2}{dt}\bar{g} + r^2\frac{\partial \bar{g}}{\partial t} = -2(n-1)\bar{g}$ biçiminde yazılabileceğinden,

$$\Rightarrow \frac{dr^2}{dt} = -2(n-1) \tag{6.6}$$

denklemi bulunur ve çözümü

$$r(t) = \sqrt{R_0^2 - 2(n-1)t} \tag{6.7}$$

biçimindedir. Burada $R_0$ kürenin başlangıçtaki yarıçapıdır ve $t \to \frac{R_0^2}{2(n-1)}$ yaklaşımı yapılırsa manifold tek noktaya büzülür, [89].

**(b)** Benzer şekilde, $n > 1$ boyutlu $\mathbb{H}^n$ hiperbolik uzayında, Ricci akışı

$$\frac{dr^2}{dt} = 2(n-1) \tag{6.8}$$

biçimine dönüşür ve çözümü

$$r(t) = \sqrt{R_0^2 + 2(n-1)t} \tag{6.9}$$

şeklinde elde edilir, [89]. Bu durumda ise, çözümler sonsuza kadar genişlemeye devam eder.

**(c)** $\mathbb{E}^n$ üzerinde (yani düz metrikde) ise Ricci eğriliği sıfırdır ve dolayısıyla çözümler Ricci flow altında değişmez kalır.

Ayrıca metriğin düz olması, yani manifoldun Euclid uzayına lokal olarak izometrik olması için, gerek ve yeter koşul Riemann eğriliğinin sıfır olmasıdır. Dolayısıyla bu manifoldların Ricci eğrilikleri de sıfır olacağından, bu tip metrikler trivial olmayan ve Ricci akışı altında değişmez kalan çözümleri verir. Bu metrikler Ricci akışının sabit noktaları (fixed points) olarak düşünülebilir.

**Ricci Solitonlar:** Ricci akışının bir önceki maddedeki düzgün şekilde büzülen veya genişleyen çözümlerinden çok daha genel bir formu olan, kendi kendine benzer (self-similar) çözümlerine Ricci soliton adı verilir. Ayrıca bu durumda manifoldun kompakt olma şartı da bulunmamaktadır. Bu tür çözümleri anlamak için, bir difeomorfizma ailesi tarafından, akışın nasıl değiştiğini gösteren Lie türevi kavramına ihtiyaç vardır:

**Not 6.1.** $M$ manifoldu üzerinde verilen diferansiyellenebilen bir $X$ vektör alanı için $M$'den kendisine her $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ için,

$$\varphi_t : M \to M; \quad \frac{d\varphi_t}{dt} = X \quad ve \quad \varphi_0 = Id$$

olacak şekilde zamana bağlı difeomorfizmalar ailesi tanımlansın. (Bu tip $\varphi_t$'lerin varlığı diferansiyel denklemlerin temel varlık teoremi ile garanti altındadır.) Bu denkleme, manifoldun $X$ vektör alanı doğrultusundaki akışı denir. Ayrıca, bir $F$ tensör alanının $X$ doğrultusundaki *Lie türevi* ise

$$\mathscr{L}_X F = \left(\frac{d}{dt}(\varphi_t^*)F\right)|_{t=0} \tag{6.10}$$

biçiminde tanımlanmaktadır, [92].

**Tanım 6.2.** *[9] $(M^n, g(t))$ manifoldu Ricci akışının bir çözümü, $\varphi_t : M^n \to M^n$ zamana bağlı difeomorfizmler ailesi ($\varphi_0 = Id$) ve $\sigma(t)$ zamana bağlı ölçeklendirme çarpanı ($\sigma_0 = 1$) olsun. Eğer*

$$g(t) = \sigma(t)\varphi_t^* g(0) \tag{6.11}$$

*ise $(M^n, g(t))$ Ricci soliton olarak isimlendirilir.*

(6.11) denkleminin $t = 0$'da türevi alınır ve (6.1), (6.10) denklemleri kullanılırsa, $V = \frac{d\varphi_t}{dt}$ olmak üzere

$$-2Ric(g(0)) = \sigma'(0)g(0) + \mathscr{L}_V g(0) \tag{6.12}$$

bulunur. Burada $\sigma'(0) = 2\lambda$ olarak seçilirse, Ricci soliton denklemi

$$-2Ric = 2\lambda g + \mathscr{L}_V g \tag{6.13}$$

biçiminde ifade edilebilir, [89]. O halde, aşağıdaki tanım elde edilmiş olur:

**Tanım 6.3.** *[11] $(M,g)$ Riemann manifoldu üzerinde, $\xi \in \chi(M)$ diferansiyellebilen vektör alanı ve $\lambda \in \mathbb{R}$ sabiti için*

$$Ric + \frac{1}{2}\mathscr{L}_\xi g = \lambda g \tag{6.14}$$

*denklemi sağlanıyorsa $(M,g)$'e Ricci soliton adı verilir. $\xi$ vektör alanı ise Ricci solitonun potansiyel vektör alanı olarak isimlendirilir.*

- $\xi$ özdeş olarak sıfır yada Killing vektör alanı (yani $\mathscr{L}_\xi g = 0$) ise, Ricci soliton trivial olarak Einstein manifolduna indirgenir. Dolayısıyla, Ricci soliton kavramı Einstein manifoldlarının bir doğal genelleştirilmesi olarak düşünülebilir.

- $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ ve $\lambda = 0$ olması durumunda Ricci soliton sırasıyla, *genişleyen (expanding)*, *büzülen (shrinking)* ve *sabit (steady)* olarak isimlendirilir.

Ricci soliton kavramı tanımlandığı tarihten itibaren birçok matematikçi ve fizikçinin ilgisini çekmiş ve bu konuda önemli sonuçlar elde edilmiştir (bknz. [11], [12], [93], [94], [95] vb.). 2-boyutta kompakt Ricci solitonun sabit eğriliğe sahip olduğu Hamilton [11] tarafından gösterilmiştir ve daha sonra bu sonuç Ivey [12] tarafından 3-boyutlu manifoldlara genelleştirilmiştir.

**Tanım 6.4.** *[11] Potensiyel vektör alanı gradient (yani bir $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonu için $\xi = \nabla f$) olan Ricci soliton denklemi $\mathscr{L}_\xi g = 2Hess f$ olacağından*

$$Ric + Hess f = \lambda g \tag{6.15}$$

*denklemine dönüşür. Ricci akışının bu tip çözümlerine gradient Ricci soliton ve $f$ fonksiyonuna da potansiyel fonksiyon adı verilir.*

Hamilton ve Ivey [11, 12], 2 ve 3-boyutta, kapalı bir manifold üzerinde her büzülen gradient Ricci solitonun Einstein manifoldu olduğunu kanıtlamışlardır. Hamilton, bu sonucu genelleştirmek için daha sonra, kompakt pozitif eğrilikli, büzülen gradient

Ricci solitonun Einstein olması gerektiği hipotezini ortaya atmış ve bunun doğruluğu [13] numaralı makalede kanıtlanmıştır. Bundan itibaren, hangi koşullar altında Ricci solitonun Einstein manifolduna indirgeneceği (yani trivial olacağı) problemi bir çok araştırmacının ilgisini çeken bir problem haline gelmiştir. Perelman'ın da bu konuya önemli katkıları olmuş ve kompakt bir manifold üzerinde her Ricci solitonun gradient Ricci soliton olduğunu kanıtlamıştır, [91].

### 6.1.1 Soliton örnekleri

$n \geqslant 4$ iken, çeşitli trivial olmayan kompakt gradient büzülen solitonlar mevcuttur. Ayrıca, kompakt ve Einstein olmayan (büzülen, genişleyen ve sabit) Ricci solitonlar da mevuttur. Şimdi aşağıda bu durumlara uygun bazı örnekler listelenecektir [89]:

**Örnek 1: (Hamilton'un Cigar Solitonu)**

$M = \mathbb{R}^2$ üzerinde $g_0 = \rho^2(dx^2 + dy^2)$ metriği ele alınsın. Bu durumda Gauss eğriliği, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ olmak üzere

$$K = -\frac{1}{\rho^2}\Delta ln\rho \tag{6.16}$$

biçimindedir ve Ricci tensörü $Ric(g_0) = Kg_0$ şeklinde yazılabilir. Eğer $\rho^2 = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ alınırsa, $K = \frac{2}{1+x^2+y^2}$ olur ve böylece

$$Ric(g_0) = \frac{2}{1+x^2+y^2}g_0 \tag{6.17}$$

sağlanır. Potansiyel vektör alanı

$$V = -2(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}) \tag{6.18}$$

olarak seçilirse

$$\mathscr{L}_V g_0 = -\frac{4}{1+x^2+y^2}g_0 \tag{6.19}$$

denklemi sağlanır. (6.17) ve (6.19) denklemleri (6.14) denkleminde yerine yazılırsa $g_0$ metriğinin sabit ($\lambda = 0$) Ricci soliton metriği olduğu sonucuna varılır.

$g_0$ metriği, $s$ orjinden jeodezik uzaklığı ve $\theta$ polar koordinantı bakımından

$$g_0 = ds^2 + tanh^2 sd\theta^2 \tag{6.20}$$

biçiminde yazılabilir. Bu ise cigar (puroya benzer) solitonun, sonsuzda silindire benzer şekilde açıldığını gösterir. Ayrıca bu koordinantlarda Gauss eğriliği

$$K = \frac{2}{cosh^2 s} \tag{6.21}$$

şeklinde yazılır. Eğer $f = -2ln(coshs)$ olarak seçilirse $V = \nabla f$ olacağından cigar soliton gradienttir.

**Örnek 2: (Bryant Soliton)**

Cigar solitonun yüksek boyuttaki analoğu olan Bryant soliton, $\mathbb{R}^n$, $(n \geqslant 3)$ için rotasyonel simetrik (yani Eulid uzaylarında tüm dönmelere göre simetrik) olan bir sabit (steady) gradient Ricci solitondur. Cigar solitonun silindire benzer şekilde açılmasına karşılık, Bryant soliton paraboloide benzer şekilde asimptotik olarak açılır ve pozitif kesitsel eğriliğe sahiptir.

**Örnek 3: (Gaussian Soliton)**

$\mathbb{R}^n$ üzerinde standard düz Euclid metriği ile büzülen ve genişleyen gradient Ricci soliton, sırasıyla Gaussian büzülmesi ve genişlemesi olarak isimlendirilir.

(a) $(\mathbb{R}^n, g_0)$, $f = \frac{|x|^2}{4}$ potansiyel fonksiyonu ile $Ric + Hessf = \frac{1}{2}g_0$ koşulunu sağlar. Yani genişleyen gradient Ricci solitondur.

(b) $(\mathbb{R}^n, g_0)$, $f = -\frac{|x|^2}{4}$ potansiyel fonksiyonu ile $Ric + Hessf = -\frac{1}{2}g_0$ koşulunu sağlar. Yani büzülen gradient Ricci solitondur.

**Örnek 4: (Katlı Çarpımlar)**

Literatürde katlı çarpım metriğine sahip birçok Ricci soliton ve gradient Ricci soliton örnekleri mevcuttur. Örneğin, Ivey [96], çift katlı (doubly warped) ve çoklu katlı (multiply warped) çarpım metriğini kullanarak kompakt olmayan ve Bryant solitonun bir genelleştirmesi olarak sabit gradient Ricci soliton metriği inşaa etmiştir. Yine Gastel ve Kronz [97], $N^n$ $(n \geqslant 2)$ pozitif skaler eğrilikli Einstein manifoldu olmak üzere $\mathbb{R}^{n+1} \times N$ üzerinde çift katlı çarpım metriği ile genişleyen gradient Ricci solitonu tanımlamışlardır.

### 6.1.2 m-Bakry-Emery Ricci tensörü ve özel yarı Einstein manifoldları

Ricci akışı ve Ricci solitonlar ile yakından ilişkili olması ve Ricci tensörünün doğal bir genellemesi olmasından dolayı Riemann geometrisinde oldukça önemli bir obje olan *m-Bakry-Emery Ricci tensörü*; $f$, $M$ manifoldu üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $0 < m \leqslant \infty$ bir tamsayı olmak üzere

$$Ric_f^m = Ric + Hessf - \frac{1}{m} df \otimes df \tag{6.22}$$

biçiminde tanımlanmaktadır, [59], [91], [98]. Eğer $f$ sabit fonksiyon ise m-Bakry-Emery Ricci tensörü klasik Ricci tensörüne indirgenir.

Daha sonra, birçok matematikçi tarafından $m$-Bakry-Emery Ricci tensörünün metrik tensör ile orantılı olması durumunda, çeşitli özel manifold tanımları yapılmıştır. Bu tip manifoldların tanımlarına ve bazı özelliklerine aşağıda yer verilecektir:

- **$m$-Yarı Einstein Manifoldu:** $f \in C^\infty(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $0 < m \leqslant \infty$ bir tamsayı olmak üzere

$$Ric_f^m = Ric + Hessf - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g \tag{6.23}$$

  koşulunu sağlayan $(M, g)$ manifolduna *m-yarı Einstein manifoldu* adı verilir, [59]. $f$ potansiyel fonksiyonuna sahip $m$-yarı Einstein manifoldu kısaca $(M, g, f, \lambda)$ ile gösterilir.

  (i) (6.23) denkleminde $m = \infty$ olması durumunda manifold gradient Ricci solitona dönüşmüş olur.

  (ii) $f$ sabit ise (6.23) denklemi Einstein denklemine indirgenir. Bu duruma kısaca *rijid durum* adı verilmektedir.

[12, 93] numaralı çalışmalarda, kompakt büzülen Ricci solitonların pozitif skaler eğriliğe sahip olduğu ve [11, 12] numaralı çalışmalarda, iki ve üç boyutlu kompakt Ricci solitonların trivial olduğu ispatlanmıştır. Bu duruma analog olarak, $m$-yarı Einstein manifoldları üzerinde aşağıdaki sonuç elde edilmiştir:

**Önerme 6.1.** *[59] $(M^n, g, f, \lambda)$ bir yarı Einstein manifoldu olsun. Eğer $1 \leqslant m < \infty$ ve $\lambda > 0$ ise, M pozitif skaler eğriliğe sahiptir. Eğer $n = 2$ ve M kompakt ise, trivialdir.*

Ardından, Catino [58] tarafından yarı Einstein manifoldu kavramını genelleştiren ve Chaki tarafından tanımlanan $G(QE)_n$ manifoldu tanımından farklı olan, yeni ve daha genel bir tanım ortaya atılmıştır:

- **Genelleştirilmiş Yarı Einstein Manifoldu:** $(M, g)$, $n \geqslant 3$ boyutlu bir Riemann manifoldu ve $f, \mu, \lambda$ fonksiyonları $M$ üzerinde diferansiyellenebilen üç fonksiyon olmak üzere

$$Ric + Hess f - \mu df \otimes df = \lambda g \tag{6.24}$$

koşulu sağlanıyorsa, $(M, g, f, \lambda)$ manifolduna *genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldu* adı verilir, [58].

Litaretüre bakıldığında, Ricci solitonların hangi şartlar altında katlı çarpım metriğine dönüşeceği sorusunun oldukça ilgi çeken bir problem olduğu görülmektedir. Trivial Ricci solitonların bir genelleştirmesi olarak Petersen ve Wylie [99] gradient Ricci solitonların rijidlik kavramını tanımlamışlardır. $N$ bir Einstein manifoldu, $f = \frac{\lambda}{2}|x|^2$ Euclidyen çarpan ve $h \in C^\infty(N)$ olmak üzere, $M$ gradient Ricci solitonu, $N \times_h \mathbb{R}^k$ çarpım manifolduna izometrik ise $M$'e *rijid* adı verilir. Eğer $M$ kompakt ise, $(M^n, g)$ Ricci solitonunun rijid olması için gerek ve yeter koşul $N$'nin Einstein olmasıdır, [94]. Ayrıca, Catino [58], harmonic Weyl eğrilik tensörüne (yani $divC = 0$) sahip genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun rijidliğini incelemiş ve aşağıdaki sonucu elde etmiştir:

**Teorem 6.4.** *[58] $(M^n, g)$, $(n \geqslant 3)$ harmonik Weyl tensörüne sahip ve Weyl eğrilik tensörü $C(\nabla f, ., ., .) = 0$ koşulunu sağlayan genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldu olsun. Bu durumda $(M^n, g)$ manifoldu lokal olarak, $(n-1)$-boyutlu Einstein fiberine sahip olan $I \times_{e^\psi} M^*$ katlı çarpım manifoldudur.*

Genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldların bir özel sınıfı olarak Huang ve Wei [100] yeni bir tanım daha ortaya atmışlardır:

- $(M, g)$, $n \geqslant 3$ boyutlu Riemann manifoldu, $f \in C^\infty(M)$, $r$ skaler eğrilik ve $m, \rho, \lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

  $$Ric + Hess f - \frac{1}{m} df \otimes df = (\rho r + \lambda) g \tag{6.25}$$

  koşulunu sağlıyorsa $(M, g, f, \lambda)$'a $(m, \rho)-$*yarı Einstein manifoldu* adı verilir, [100].

## 6.2 $(m, \rho)$-Yarı Einstein Manifoldları ile İlgili Sonuçlar

Bu bölümde, genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldlarının bir özel sınıfı olan $(m, \rho)-$yarı Einstein manifodları üzerinde çeşitli karakterizasyon problemleri üzerinde çalışılmaktadır. Elde edilen sonuçlar [101] numaralı makalede yayınlanmıştır.

[100] numaralı çalışmada $(m,\rho)-$yarı Einstein manifoldları ile ilgili bazı temel bağıntılar ve kompaktlık koşulunun sağlanması durumunda çeşitli rijidlik sonuçları elde edilmiştir:

**Yardımcı Teorem 6.1.** *[100] $(M^n,g)$, $(m,\rho)-$yarı Einstein manifoldu olsun. Bu durumda, $Ric^o$ Ricci eğrilik tensörünün izi sıfır olan parçası ve $f^j = g^{jk}f_k$ olmak üzere, aşağıdakiler gerçeklenmektedir:*

*(1)* $\Delta_{m,f} f = \Delta f - \frac{1}{m}||\nabla f||^2 = (n\rho-1)r + n\lambda$,

*(2)* $(||\nabla f||^2)_{,i} = 2(\rho r+\lambda)f_i - 2R_{ij}f^i + \frac{2}{m}||\nabla f||^2 f_i$,

*(3)* $\frac{2(n-1)\rho-1}{2}r_i = -\frac{m-1}{m}R_{ij}f^i + \frac{[(n-1)\rho-1]r+(n-1)\lambda}{m}f_i$,

*(4)* $\frac{2(n-1)\rho-1}{2}\Delta r = \frac{4(n-1)\rho-(m+2)}{2m}\nabla r\nabla f + \frac{m-1}{m}||Ric^o||^2 + \frac{(1-n\rho)r-n\lambda}{nm}[(m+(n-1)(1-n\rho))r - n(n-1)\lambda]$,

**Teorem 6.5.** *[100] $(M^n,g)$, bir kompakt $(m,\rho)$-yarı Einstein manifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenmektedir:*

*(1) Eğer $r$ skaler eğriliği sabit ise $(M^n,g)$ trivialdir.*

*(2) Eğer $\rho = \frac{1}{n}$ ise $(M^n,g)$ trivialdir.*

**Teorem 6.6.** *[100] $(M^n,g)$, kompakt $(m,\rho)$-yarı Einstein manifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenmektedir:*

*(1)* $\rho \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$ *ise, ya* $\lambda > 0$ *ve* $r \geqslant \frac{n(n-1)\lambda}{m+(n-1)(1-n\rho)}$, *ya da* $(M^n,g)$ *trivialdir.*

*(2)* $\frac{1}{2(n-1)} \leqslant \rho < \frac{1}{n}$ *ise, ya* $\lambda < 0$ *ve* $r \leqslant \frac{n(n-1)\lambda}{m+(n-1)(1-n\rho)}$, *ya da* $(M^n,g)$ *trivialdir.*

*(3)* $\rho = \frac{1}{2(n-1)}$ *ise* $(M^n,g)$ *trivialdir.*

*(4)* $\rho \geqslant \frac{1}{n}$ *ise* $(M^n,g)$ *trivialdir.*

*(5)* $n=2$ *ve* $\rho \leqslant \frac{1}{2}$ *ise* $(M^n,g)$ *trivialdir.*

Bu bölümün temel amacı, potansiyel fonksiyonu kapalı konformal veya paralel olan $(m,\rho)$-yarı Einstein manifoldlarını incelemektir. Bu nedenle öncelikle bazı önemli tanım ve yardımcı teoremlere yer verilecektir.

**Tanım 6.5.** *$(M^n, g)$, n-boyutlu Riemann manifoldu olsun. $\mathscr{L}_\phi$, $\phi$ doğrultusundaki Lie türevi ve $\Omega \in C^\infty(M)$ olmak üzere, $\phi$ vektör alanı*

$$\mathscr{L}_\phi g = 2\Omega g \tag{6.26}$$

*denklemini sağlıyorsa, $\phi$'e konformal vektör alanı ve $\Omega$'a konformal çarpan adı verilir.*

(6.26) denkleminden $\Omega = \frac{1}{n} div\phi$ olarak elde edilir. Eğer $\Omega$ sabit (ya da özdeş olarak sıfır) ise, $\phi$ vektör alanına *homotetik* (ya da Killing) vektör alanı denir. Özel olarak $\phi$,

$$\nabla_X \phi = \Omega X, \;\; \forall\, X \in \chi(M) \tag{6.27}$$

koşulunu sağlıyorsa $\phi$'e *kapalı konformal vektör alanı* denir. (6.27) denkleminde $\Omega = 0$ olması durumunda ise, $\phi$ *paralel* vektör alanı olur. Doğal olarak, her gradient konformal vektör alanı kapalıdır, (bknz. [102] ve [103]).

Şimdi, kapalı konformal vektör alanına sahip bir Riemann manifoldu üzerinde gerçeklenen ve ileride ifade edilecek olan teoremlerin ispatlarında kullanılacak önemli bir yardımcı teoreme yer verilecektir:

**Yardımcı Teorem 6.2.** *[104] $(M^n, g)$, trivial olmayan ve konformal çarpanı $\Omega$ olan $\phi$ kapalı konformal vektör alanına sahip bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, $\phi^\flat$ ile $\phi$ vektör alanının dual 1-formu gösterilmek üzere ve $X, Y, Z \in \chi(M)$ keyfi vektör alanları için, aşağıdakiler gerçeklenmektedir:*

*(1) $\phi$ vektör alanının sıfirlarının kümesi $\mathscr{Z}(\phi)$ ayrıktır.*

*(2) $\| \phi \|^2$ vektör alanının gradienti*

$$\nabla \| \phi \|^2 = 2\Omega\phi. \tag{6.28}$$

*(3) $\| \phi \|^2$ vektör alanının Hessian'ı*

$$Hess \| \phi \|^2 = 2\Omega^2 g + 2\phi^\flat \otimes d\Omega. \tag{6.29}$$

*(4) $(M^n, g)$ manifoldunun Riemann eğrilik tensörü*

$$R(X,Y,\phi,Z) = g(\nabla\Omega, X)g(Y,Z) - g(\nabla\Omega, Y)g(X,Z). \tag{6.30}$$

*(5)* $(M^n, g)$ *manifoldunun Ricci eğrilik tensörü*

$$Ric(\phi, X) = -(n-1)g(\nabla\Omega, X). \tag{6.31}$$

Yukarıdaki yardımcı teorem yardımıyla, kapalı konformal vektör alanına sahip olan bir $(m,\rho)-$yarı Einstein manifoldu için aşağıdaki yardımcı teorem ispatlanacaktır:

**Yardımcı Teorem 6.3.** *$(M^n, g, f, \lambda)$, konformal çarpanı $\Omega$ olan kapalı konformal $\phi \in \chi(M)$ vektör alanına sahip bir $(m,\rho)-$yarı Einstein manifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenmektedir:*

*(1)* $\nabla\phi(f) = \frac{1}{m}\phi(f)\nabla f + (n-1)\nabla\Omega + (\rho r + \lambda)\phi + \Omega\nabla f.$

*(2)* $Hess(\phi(f)) = \frac{1}{m}[d(\phi(f)) \otimes df + \phi(f)Hess f] + (n-1)Hess\Omega + \rho(dr \otimes \phi^\flat)$
$+ (\rho r + \lambda)\Omega g + \Omega Hess f + d\Omega \otimes df.$

*(3)* $\frac{1}{m}d(\phi(f)) \otimes df + \rho(dr \otimes \phi^\flat) + d\Omega \otimes df$ *simetrik tensördür.*

*İspat.* Yardımcı Teorem 6.2-(5) maddesi, $(m,\rho)-$yarı Einstein manifoldunun (6.25) temel denkleminde kullanılırsa, her $X$ vektör alanı için

$$Hess f(\phi, X) = \frac{1}{m}df(\phi)df(X) + (n-1)d\Omega(X) + (\rho r + \lambda)g(\phi, X) \tag{6.32}$$

bulunur. $Hess f(\phi, X) = X(\phi(f)) - (\nabla_X\phi)f = g(\nabla_X\nabla f, \phi)$ olduğundan, (6.32) denklemi

$$X(\phi(f)) = \frac{1}{m}df(\phi)df(X) + (n-1)d\Omega(X) + \lambda g(\phi, X) + \Omega df(X), \ \forall X \in \chi(M) \tag{6.33}$$

biçiminde yazılır. Son eşitlik $X$ vektör alanı ile iç çarpım olmadan yazılırsa, ilk iddia kanıtlanmış olur. (6.33) denkleminin tekrar kovaryant türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\nabla_Z X(\phi(f)) =& \frac{1}{m}[Z(\phi(f))df(X) + \phi(f)ZX(f)] + (n-1)\nabla_Z(X(\Omega)) \\ &+ d\lambda(Z)\phi^\flat(X) + \lambda(\nabla_Z\phi^\flat)(X) + d\Omega(Z)df(X) + \Omega\nabla_Z(X(f))\end{aligned} \tag{6.34}$$

bulunur. (6.34) denkleminde Hessian tensörünün tanımı ve (6.31) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}Hess(\phi(f))(Z,X) =& \frac{1}{m}[d(\phi(f))(Z)df(X) + \phi(f)Hess(f)(Z,X)] \\ &+ (n-1)Hess(\Omega)(Z,X) + d\lambda \otimes \phi^\flat(Z,X) + \lambda\Omega g(Z,X) \\ &+ d\Omega \otimes df(Z,X) + \Omega Hess(f)(Z,X)), \ \ \forall X, Z \in \chi(M)\end{aligned} \tag{6.35}$$

elde edilir ve son denklem ile de ikinci iddia kanıtlanmış olur. Son olarak, Hessian ve metrik tensörlerinin simetrik oldukları kullanılarak, üçüncü iddia elde edilir. □

Yardımcı Teorem 6.3'ün bir sonucu olarak da aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur:

**Yardımcı Teorem 6.4.** *$(M^n, g, f, \lambda)$, paralel $\phi \in \chi(M)$ vektör alanına sahip $(m, \rho)-$yarı Einstein manifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenmektedir:*

*(1)* $\nabla\phi(f) = \frac{1}{m}\phi(f)\nabla f + (\rho r + \lambda)\phi$.

*(2)* $Hess(\phi(f)) = \frac{1}{m}[d(\phi(f)) \otimes df + \phi(f) Hess f] + \rho(dr \otimes \phi^\flat)$.

*(3)* $\frac{1}{m}d(\phi(f)) \otimes df + \rho(dr \otimes \phi^\flat)$ *simetrik tensördür.*

*İspat.* Yardımcı Teorem 6.3'ün ispatında konformal çarpan $\Omega = 0$ olarak seçilirse, $\phi$ vektör alanı paralel vektör alanına indirgenir ve böylece ispat tamamlanmış olur. □

Bir manifoldun konformal vektör alanına sahip olması manifoldun geometrisi ile ilişkili önemli sonuçlar vermektedir. Örneğin, $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık, $f$ fonksiyonu $I$ üzerinde pozitif ve tam bir fonksiyon, $F$ bir Riemann manifoldu, $\pi_I : M \to I$ kanonik izdüşüm fonksiyonu ve $t$ parametresi $I$ üzerindeki standard koordinant olmak üzere $M = I \times_f F$ katlı çarpım manifoldu, $(f \circ \pi_I)\partial_t$ konformal vektör alanına sahiptir. Diğer taraftan $p$, sabit $c$ kesitsel eğrilikli $M$ Riemannian manifoldunun bir sabit noktası olsun. $p \in M$ noktasından uzaklık fonksiyonu $r$ ve $y'' + cy = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ diferansiyel denkleminin çözümü $s$ olmak üzere, $\xi = (s \circ r)\nabla r$, $p \in M$ noktasından geçmeyen bir konformal vektör alanıdır, [105].

Bu bilgilerin motivasyonu ile, aşağıda kapalı konformal vektör alanına sahip $(m, \rho)-$yarı Einstein manifoldunun karakterizasyonu ile ilgili sonuçlar verilecektir:

**Teorem 6.7.** *$(M^n, g, f, \lambda)$, konformal çarpanı $\Omega$ olan, kapalı konformal $\phi \in \chi(M)$ vektör alanına sahip bir $(m, \rho)-$yarı Einstein manifoldu olsun. Bu durumda, $U^\flat$, $\phi$ vektör alanı doğrultusundaki $U$ birim vektör alanının dual 1-formu olmak üzere, $(M^n, g)$ manifoldunun Ricci tensörü aşağıdaki formdadır:*

$$Ric = (\rho r + \lambda)g + \Big(\frac{1-n}{||\phi||}d\Omega(U) - (\rho r + \lambda)\Big)U^\flat \otimes U^\flat \tag{6.36}$$

*İspat.* Yardımcı Teorem 6.3'in birinci ve üçüncü maddesi kullanılarak, her $X,Y \in \chi(M)$ için

$$[\frac{1}{m}(\rho r+\lambda)df(X)-\rho dr(X)]g(\phi,Y) \tag{6.37}$$
$$+\frac{n+m-1}{m}[d\Omega(Y)df(X)-d\Omega(X)df(Y)] = [\frac{1}{m}(\rho r+\lambda)df(Y)-\rho dr(Y)]g(\phi,X)$$

bulunur. Burada $X=\phi$ alınırsa

$$[\frac{1}{m}(\rho r+\lambda)df(\phi)-\rho dr(\phi)]g(\phi,Y) \tag{6.38}$$
$$+\frac{n+m-1}{m}[d\Omega(Y)df(\phi)-d\Omega(\phi)df(Y)] = [\frac{1}{m}(\rho r+\lambda)df(Y)-\rho dr(Y)] \parallel \phi \parallel^2$$

elde edilir. Şimdi $U$ ile $\phi$ vektör alanı doğrultusundaki birim vektör alanı gösterilsin. Bu durumda önceki denklemden

$$[\frac{1}{m}(\rho r+\lambda)U(f)-\rho U(r)]U^\flat(Y)+\frac{n+m-1}{m||\phi||}[Y(\Omega)U(f)-U(\Omega)Y(f)] \tag{6.39}$$
$$=[\frac{1}{m}(\rho r+\lambda)g(\nabla f,Y)-\rho g(\nabla r,Y)]$$

bulunur ve böylece (6.39) denkleminden

$$\nabla f\Big(1+\frac{n+m-1}{(\rho r+\lambda)||\phi||}U(\Omega)\Big) = U(f)U+\frac{m\rho}{\rho r+\lambda}[\nabla r-U(r)U] \tag{6.40}$$
$$+\frac{n+m-1}{(\rho r+\lambda)||\phi||}U(f)\nabla\Omega$$

bulunur. (6.39) ve (6.40) denklemleri (6.32) denkleminde kullanılırsa

$$Hessf(\phi,X)=\frac{1}{m}(df\otimes df)(\phi,X)+(\rho r+\lambda)(U^\flat\otimes U^\flat)(\phi,X)+\frac{n-1}{\parallel \phi \parallel}(d\Omega\otimes U^\flat)(\phi,X) \tag{6.41}$$

elde edilir. $U$ birim vektörü için $D=KerU^\flat=\{X\in TM : g(X,U)=0\}$ olmak üzere, $M$'nin teğet uzayının $TM=span\{U\}\perp D$ şeklindeki ortogonal dekompozisyonu bulunur. Dolayısıyla, her $X\in TM$ vektör alanı, $X^D\in D$ olmak üzere $X=g(X,U)U+X^D$ biçiminde ayrıştırılabilir. O halde, her $X,Y\in TM$ için

$$Hessf(X,Y)=\frac{1}{m}(df\otimes df)(X,Y)+(\rho r+\lambda)(U^\flat\otimes U^\flat)(X,Y)+\frac{n-1}{\parallel \phi \parallel}(d\Omega\otimes U^\flat)(X,Y) \tag{6.42}$$

elde edilir. Böylece (6.42) denklemi $(m,\rho)-$yarı Einstein manifoldunun temel denkleminde yerine yazılırsa Ricci tensörü

$$Ric=(\rho r+\lambda)[g-U^\flat\otimes U^\flat]+\frac{1-n}{||\phi||}d\Omega\otimes U^\flat \tag{6.43}$$

biçiminde yazılabilir. Ricci ve metrik tensörler simetrik olduğundan, yukarıdaki denklemden $d\Omega \otimes U^{\flat}$ tensörünün de simetrik olduğu görülür ve böylece

$$d\Omega(X) = d\Omega(U)U^{\flat}(X); \quad \forall X \in \chi(M) \tag{6.44}$$

bağıntısı gerçeklenir. Bu durumda (6.44) ve (6.43) denklemlerinden Ricci tensörünün (6.36) biçiminde olduğu elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. □

(6.36) denklemi $U$ birim vektör alanı ile daraltılarak, $Q$ Ricci operatörü olmak üzere

$$QX = \frac{1-n}{||\phi||} d\Omega(U)X, \quad \forall X \in \chi(M) \tag{6.45}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur:

**Sonuç 6.1.** *$(M^n, g, f, \lambda)$, konformal çarpanı $\Omega$ olan kapalı konformal $\phi \in \chi(M)$ vektör alanına sahip bir $(m, \rho)-$yarı Einstein manifoldu olsun. Bu durumda $\phi$ vektör alanı doğrultusundaki $U$ birim vektörü $Q$ Ricci operatörünün, $\frac{1-n}{||\phi||} d\Omega(U)$ özdeğeri ile ilişkili özvektörüdür.*

Ayrıca (6.27) ve (6.28) denklemleri kullanılarak $\phi$ vektör alanı doğrultusundaki $U$ birim vektörünün

$$\nabla_X U = \frac{\Omega}{||\phi||}[X - U^{\flat}(X)U], \quad \forall\, X \in \chi(M) \tag{6.46}$$

denklemini sağladığı görülür ve bu da $U$'nun birim konsörkılır vektör alanı olduğu anlamına gelmektedir. Bu durumda, Bölüm 4'de ifade edilen Yano'nun teoremi [40] ve Gebarowski'nin [49] numaralı makalesindeki Teorem 1 kullanılarak, aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur:

**Teorem 6.8.** *$(M^n, g, f, \lambda)$, konformal çarpanı $\Omega$ olan kapalı konformal $\phi \in \chi(M)$ vektör alanına sahip bir $(m, \rho)-$yarı Einstein manifoldu olsun. Bu durumda, $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $(M^*, g^*)$, $(n-1)$-boyutlu Riemann manifoldu ve $q$, $I$ aralığı üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere $(M^n, g)$ manifoldu lokal olarak $I \times_{e^{q/2}} M^*$ katlı çarpım manifoldudur. Buna ek olarak, eğer $(M^n, g)$ konformal düz ise $(M^*, g^*)$ fiberi $(n-1)$-boyutlu Einstein manifoldudur.*

Teorem 6.7'de, $\Omega$ konformal çarpanı sıfır olarak alınırsa, $\phi$ vektör alanı paralel vektör alanına indirgenir ve böylesi bir $(m, \rho)-$yarı Einstein manifoldunda

$$\nabla f = U(f)U + \frac{m\rho}{\rho r + \lambda}[\nabla r - U(r)U] \tag{6.47}$$

ve

$$Hessf = \frac{1}{m} df \otimes df + (\rho r + \lambda) U^{\flat} \otimes U^{\flat} \tag{6.48}$$

denklemleri gerçeklenir. Böylece, $U^{\flat}$, $\phi$ vektör alanı doğrultusundaki $U$ birim vektör alanının dual 1-formu olmak üzere, manifoldun Ricci tensörü

$$Ric = (\rho r + \lambda)[g - U^{\flat} \otimes U^{\flat}] \tag{6.49}$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca, (6.49) denklemi daraltılarak skaler eğrilik $r = (n-1)(\rho r + \lambda)$ şeklinde olur. Burada $\rho, \lambda \in \mathbb{R}$ olduğundan, skaler eğrilik sabittir. Yardımcı Teorem 6.5'de ifade edilen [100] sonuca göre, bir kompakt $(m,\rho)-$yarı Einstein manifoldunun skaler eğriliği sabit ise manifoldun trivial olduğu kanıtlanmıştır. Dolayısıyla bu sonuç, $(M^n, g, f, \lambda)$ manifoldunun kompakt olamayacağını gösterir. Bu durumda aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

**Teorem 6.9.** *$(M^n, g, f, \lambda)$, paralel $\phi \in \chi(M)$ vektör alanına sahip bir $(m,\rho)-$yarı Einstein manifoldu olsun. Bu durumda, $U^{\flat}$, $\phi$ vektör alanı doğrultusundaki $U$ birim vektör alanının dual 1-formu olmak üzere, $(M^n, g)$ manifoldun Ricci tensörü*

$$Ric = (\rho r + \lambda)[g - U^{\flat} \otimes U^{\flat}] \tag{6.50}$$

*biçimindedir. Dahası $(M^n, g, f, \lambda)$ kompakt olmayan, sabit skaler eğrilikli manifolddur.*

Teorem 6.9'da, gradient tipte olması gerekmeyen, $\phi$ paralel vektör alanına sahip $(m,\rho)-$yarı Einstein manifoldları incelenmiştir. Eğer $\phi$ paralel vektör alanının aynı zamanda gradient olduğu kabul edilirse aşağıdaki teorem elde edilir:

**Teorem 6.10.** *$(M^n, g, f, \lambda)$, gradient paralel $\phi \in \chi(M)$ vektör alanına sahip $(m,\rho)-$yarı Einstein manifoldu olsun. Bu durumda, $(M^n, g, f, \lambda)$ manifoldu $(n-1)$-boyutlu $(M^*, g^*)$ tam Einstein manifoldu olmak üzere $M^* \times \mathbb{R}$ çarpım manifolduna izometriktir. Dahası manifoldun $f$ potansiyel fonksiyonu, $a, b$ ve $c$ keyfi skalerler olmak üzere aşağıdaki iki fonksiyondan biridir:*

$$f(t) = \mp \sqrt{-m(\rho r + \lambda)} t + c \tag{6.51}$$

*ya da*

$$f(t) = -mlog\Big(cosh\Big[\sqrt{\frac{-(\lambda + \rho r)}{m}}(t+a)\Big]\Big) + b \tag{6.52}$$

*İspat.* $(M^n, g, f, \lambda)$ manifoldu gradient paralel vektör alanına sahip olduğundan, [53]-Teorem 2'den $M^n$ manifoldu $(n-1)-$boyutlu tam $(M^*, g^*)$, Riemann manifoldu ile $(I, dt^2)$ aralığının $M^* \times I$ direk çarpımıdır. Dolayısıyla $M$ manifoldu üzerindeki $g$ Riemann metriği, $g = g_{M^*} + (dt)^2$ biçiminde yazılabilir. Böylece, Ricci tensörü $Ric = Ric_{M^*} + Ric_I$ şeklinde ayrıştırılabilir. Şimdi $U = \partial_t$ olarak seçilsin. Bu durumda Teorem 6.9'dan

$$Ric = (\rho r + \lambda)[g - \partial_t^\flat \otimes \partial_t^\flat] \tag{6.53}$$

sağlanır. $Ric_I = 0$ olduğundan, (6.53) denkleminden her $X, Y \in \chi(M^*)$ vektör alanı için,

$$Ric_{M^*}(X,Y) = (\rho r + \lambda) g_{M^*}(X,Y) \tag{6.54}$$

bulunur. Böylece $M^*$ manifoldunun sabit skaler eğrilikli Einstein manifoldu olur. $r$'nin sabit olduğu, (6.47) denkleminde kullanılırsa

$$\nabla f = U(f)U \tag{6.55}$$

elde edilir ve böylece her $X \in \chi(M)$ için $X(f) = (\partial_t f)\partial_t^\flat(X)$ bulunur. Son eşitliğin ikinci kez kovaryant türevi alınırsa $Hess f = (\partial_{tt}^2 f)\partial_t^\flat \otimes \partial_t^\flat$ bulunur. Son iki denklem $(m, \rho)-$yarı Einstein manifoldunun (6.25) ile verilen temel denkleminde yerine yazılırsa

$$\partial_{tt}^2(f) - \frac{1}{m}(\partial_t f)^2 = \rho r + \lambda; \quad \rho, \lambda \in \mathbb{R} \tag{6.56}$$

ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümleri ise (6.51) ve (6.52) biçiminde bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Bu bölümün devamında, bir $(M^n, g)$ manifoldu üzerindeki $(m, \rho)$-yarı Einstein metrik yapısının rijidlik durumları ile ilgili sonuçlar verilecektir. $(M, g)$ manifoldu üzerinde $g^* = e^{2f/m} g$ konformal metriği ele alınsın. Bu durumda, her $X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X^* U = \nabla_X U + \frac{1}{m}\Big[X(f)U + U(f)X - U^\flat(X)\nabla f\Big] \tag{6.57}$$

bulunur. Aşağıdaki teoremde, $g^* = e^{2f/m} g$ konformal dönüşümü altında, $(m, \rho)-$yarı Einstein manifoldu yapısı incelenmektedir:

**Teorem 6.11.** *$(M^n, g, f, \lambda)$, paralel $\phi \in \chi(M)$ vektör alanına sahip bir $(m, \rho)-$yarı Einstein manifoldu olsun. Bu durumda, $(M^n, g, f, \lambda)$ manifoldu, $\varphi$ bir pozitif fonksiyon ve $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere, $I \times_\varphi F$ katlı çarpım manifolduna konformal olarak denktir.*

*İspat.* Öncelikle $(M^n, g)$ manifoldu üzerinde $h$ potansiyel fonksiyonu ile verilen ikinci bir $(M^n, g, h, \lambda)$ $(m, \rho)-$yarı Einstein metrik yapısı ele alınsın. Şimdi $M$ manifoldu üzerinde diferansiyellenebilen

$$\varphi = \frac{1}{m} g(\nabla f, \nabla h) + \rho r + \lambda \tag{6.58}$$

fonksiyonu tanımlansın. Teorem 6.9'dan skaler eğrilik sabit olduğundan (6.55) denklemi sağlanır. Bu durumda (6.55) ve Yardımcı Teorem 6.4'ün birinci maddesi kullanılarak

$$\nabla \varphi = \frac{\varphi}{m} \nabla (f + h) \tag{6.59}$$

bulunur. Şimdi ise, $M$ üzerinde diferansiyellenebilen $\psi = \Big[\frac{1}{m} g(\nabla f, \nabla h) + \rho r + \lambda\Big] e^{-\frac{(f+h)}{m}}$ fonksiyonu ele alınsın. Bu durumda, (6.59) denklemi dikkate yardımıyla, $\nabla \psi = 0$ bulunur ki bu da $\psi$ fonksiyonunun sabit olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla, bir $c \in \mathbb{R}$ sabiti için

$$\frac{1}{m} g(\nabla f, \nabla h) + \lambda + \rho r = c e^{\frac{(f+h)}{m}} \tag{6.60}$$

elde edilmiş olur. Burada $h = f$ olarak seçilirse, (6.60) denkleminden

$$\frac{1}{m} \parallel \nabla f \parallel^2 + \lambda + \rho r = c e^{\frac{2f}{m}} \tag{6.61}$$

bulunur. Ayrıca, ($r$ sabit olduğundan) (6.48) ve (6.55) denklemlerinden

$$Hess f = \Big[\frac{1}{m} \parallel \nabla f \parallel^2 + \lambda + \rho r\Big] U^\flat \otimes U^\flat \tag{6.62}$$

elde edilir. Son iki denklem kullanılarak

$$Hess f = c e^{\frac{2f}{m}} U^\flat \otimes U^\flat \tag{6.63}$$

bulunur. $\phi$ paralel vektör alanı olduğundan, $\phi$ doğrultusundaki $U$ birim vektörü de paraleldir ve dolayısıyla her $X \in \chi(M)$ için $\nabla_X U = 0$ sağlanır.

Öte yandan, (6.37) denkleminde $\Omega = 0$ ve $r$'nin sabit olduğu kullanılırsa, her $Z \in \chi(M)$ için

$$g(\nabla f, X) U = g(U, X) \nabla f, \quad \forall\, X \in \chi(M) \tag{6.64}$$

bulunur. Bu durumda (6.57) ve (6.64) denklemleri kullanılarak $X \in \chi(M)$ için

$$\nabla^*_X U = \frac{1}{m} U(f) X, \quad \forall\, X \in \chi(M) \tag{6.65}$$

elde edilir. Bu ise $U$ vektör alanının $\nabla^*$ konformal metriği altında kapalı ve konformal vektör alanı olduğu anlamına gelir.

Bu noktada, $U(f)$'nin sabit olup olmamasına bağlı olarak aşağıdaki iki durum söz konusu olacaktır:

**1. Durum:** İlk olarak $U(f)$ sabitten farklı olsun. Bu durumda, $M$ manifoldu üzerinde diferansiyellenebilen $\Phi_1 = \frac{1}{c}U(f)$; $c \in \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanabilir. $U(f)^2 = ||\nabla f||^2$ olduğundan, (6.61) denklemi ve Yardımcı Teorem 6.4'ün ilk maddesi kullanılarak

$$\nabla^*\Phi_1 = \frac{1}{c}e^{-2f/m}\nabla U(f) = \underbrace{\frac{1}{c}e^{-2f/m}\left[\frac{1}{m} \parallel \nabla f \parallel^2 + \lambda + \rho r\right]}_{=1} U = U \tag{6.66}$$

bulunur. Yani $\nabla^*\Phi_1 = U$ olduğundan $U$ gradient vektör alanı olur.

**2. Durum:** Şimdi de $U(f)$ sabit olsun. Bu kez $M$ manifoldu üzerinde diferansiyellenebilen $\Phi_2 = \frac{-1}{2(\rho r+\lambda)}U(f)e^{2f/m}$ fonksiyonu tanımlanabilir. 1. durum ile benzer şekilde

$$\nabla^*\Phi_2 = \frac{-1}{m(\rho r+\lambda)}||\nabla f||^2 U \tag{6.67}$$

elde edilir. Ayrıca bu durumda, $\nabla U(f) = 0$ olduğundan, Yardımcı Teorem 6.4'ün ilk maddesi kullanılarak, $\frac{1}{m}||\nabla f||^2 = -(\rho r + \lambda)$ bulunur. Son bağıntı ve (6.67) denklemleri yardımıyla $\nabla^*\Phi_2 = U$ bulunur ve böylece $U$ yine gradient vektör alanıdır.

Dolayısıyla, her iki durumda da $U$ vektör alanı $(M^n, g^*)$ üzerinde gradienttir. O halde, Cheeger ve Colding'in [106] numaralı çalışmasından, $(M^n, g^*)$ manifoldu, $\varphi$ bir pozitif fonksiyon ve $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere, $I \times_\varphi F$ katlı çarpımına izometriktir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

**Not 6.2.** Teorem 6.11'de, birim $U$ vektör alanı, $\nabla^*$ konformal metriği altında kapalı konformal ve gradienttir. Yani, (6.65) denkleminden, $\Phi_i$, $(i = 1, 2)$ olmak üzere

$$\nabla^*_X \nabla^* \Phi_i = \Omega X; \quad \Omega = \frac{U(f)}{m} \tag{6.68}$$

sağlanmaktadır. (6.68) denklemi ise $\Phi_i$ vektör alanlarının konsörkılır skaler alan olduğu anlamına gelmektedir, [53]. $N$, $\Phi_1$ (veya $\Phi_2$) konsörkılır skaler alanının izole noktalarının sayısını göstersin. Bu durumda, [53] numaralı çalışmadaki sınıflandırma teoremi kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilmiş olur:

**Teorem 6.12.** *$(M^n, g, f, \lambda)$, paralel $\phi \in \chi(M)$ vektör alanına sahip tam $(m, \rho)-$yarı Einstein manifoldu olsun. Bu durumda $N \leqslant 2$'dir ve $(M^n, g)$, aşağıdaki manifoldlardan bir tanesine konformaldir:*

*(1) Eğer $N = 0$ ise, $V$ $(n-1)$-boyutlu Riemann manifoldu ve $J$ açık aralık olmak üzere, $V \times J$ direk çarpımına,*

*(2) Eğer $N = 1$ ise, $(n-1)$-boyutlu küre içerisindeki n-boyutlu Euclidyen bölgeye, yani n-boyutlu hiperbolik uzaya,*

*(3) Eğer $N = 2$ ise, n-boyutlu küresel uzaya konformaldir.*

Bu bölümün devamında ise genel bir katlı çarpım metrik yapısı ile verilen $(m, \rho)-$yarı Einstein manifoldunun özellikleri incelenecektir. Öncelikle, $M^n$ manifoldu üzerinde $\theta = e^{\frac{-f}{m}}$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda, $\nabla\theta = \frac{-\theta}{m}\nabla f$ olacaktır ve

$$\frac{m}{\theta}Hess\theta = -Hessf + \frac{1}{m}df \otimes df \tag{6.69}$$

bulunur. (6.69) denklemi kullanılarak, $(m, \rho)-$yarı Einstein manifoldunun (6.25) ile verilen temel denklemi

$$Ric - \frac{m}{\theta}Hess\theta = (\rho r + \lambda)g \tag{6.70}$$

biçiminde ifade edilir. Görüldüğü üzere, $(m, \rho)-$yarı Einstein manifoldu üzerinde katlı çarpım yapısının incelenmesi için, (6.70) denklemini kullanmak çok daha elverişlidir. Şimdi, Bölüm 4'de verilen katlı çarpım metrik yapısı kullanılarak, aşağıdaki teorem ispatlanacaktır:

**Teorem 6.13.** *$(M^n = B \times_h F, \tilde{g}, f, \lambda)$ bir $(m, \rho)-$yarı Einstein katlı çarpım manifoldu olsun. Bu durumda $f$ potansiyel fonksiyonu yalnızca $(B, g)$ taban manifoldu üzerinde tanımlıdır.*

*İspat.* $(M^n, \tilde{g}, f, \lambda)$ $(m, \rho)-$yarı Einstein manifoldu, $\theta = e^{\frac{-f}{m}}$ ve $h : B \to \mathbb{R}^+$ çarpım fonksiyonu olmak üzere, $M = B \times_h F$ üzerindeki katlı çarpım metriği $\tilde{g} = g + h^2\bar{g}$ biçiminde olsun. Bu durumda (6.70) denklemi kullanılarak,

$$\tilde{Ric} - \frac{m}{\theta}\tilde{Hess}\theta = (\rho r + \lambda)\tilde{g} \tag{6.71}$$

temel denklemi sağlanır. (4.2) denklemi ile verilen katlı çarpım metriğinin tanımından, her $X \in \chi(B)$ ve her $V \in \chi(F)$ için, $\tilde{g}(X,V) = 0$ ve $\tilde{Ric}(X,V) = 0$'dır. Bu durumda, $m \neq 0$ olduğundan, (6.71) denklemi kullanılarak

$$\tilde{Hess}(\theta)(X,V) = 0,\ \forall\, X \in \chi(B)\ ve\ \forall\, V \in \chi(F) \tag{6.72}$$

bulunur. Ayrıca, (4.1) ile verilen katlı çarpım üzerindeki $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun özellikleri kullanılarak, (6.72) denklemi

$$\begin{aligned} \tilde{Hess}(\theta)(X,V) =& \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X(grad_{\tilde{g}}\theta),V) \\ =& \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X tan(grad_{\tilde{g}}\theta),V) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X nor(grad_{\tilde{g}}\theta),V) \\ =& \tilde{g}(\nabla_X tan(grad_{\tilde{g}}\theta),V) + \frac{X(h)}{h}\tilde{g}(nor(grad_{\tilde{g}}\theta),V) \\ =& hX(h)\bar{g}(nor(grad_{\tilde{g}}\theta),V) = 0 \end{aligned} \tag{6.73}$$

biçiminde yazılır. $h$ katlı çarpım fonksiyonu sıfırdan farklı olduğundan (6.73) denklemi kullanılarak, ya her $X \in \chi(B)$ için $X(h) = 0$ ya da $nor(grad_{\tilde{g}}\theta) = 0$ olabilir. Eğer her $X \in \chi(B)$ için $X(h) = 0$ ise, $h$ sabit olur ve katlı çarpım metriği Riemann çarpımına indirgenir. Dolayısıyla, $X(h) \neq 0$ ve $nor(grad_{\tilde{g}}\theta) = 0$ olmalıdır. Bu ise $\theta$'nın ve dolayısıyla $f$ potansiyel fonksiyonunun yalnızca taban manifoldu üzerinde tanımlı olduğu anlamına gelir. □

**Sonuç 6.2.** *$(M^n = B \times_h F, \tilde{g}, f, \lambda)$ manifoldu bir $(m,\rho)-$yarı Einstein katlı çarpım manifoldu olsun. Bu durumda $(F,\bar{g})$ fiberi Einstein manifoldudur.*

*İspat.* (6.70) denkleminden her $U,V \in \chi(F)$ için

$$\tilde{Ric}(U,V) - \frac{m}{\theta}\tilde{Hess}(\theta)(U,V) = (\rho r + \lambda)\tilde{g}(U,V) \tag{6.74}$$

bulunur. Teorem 6.13'den, $tan(grad_{\tilde{g}}\theta) = grad_g\theta$, $nor(grad_{\tilde{g}}\theta) = 0$ ve dolayısıyla Yardımcı Teorem 4.3 yardımıyla

$$\tilde{Hess}(\theta)(U,V) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U(grad_g\theta),V) = \frac{grad_g\theta(h)}{h}\tilde{g}(U,V) = hgrad_g\theta(h)\bar{g}(U,V) \tag{6.75}$$

elde edilir. Ayrıca, Yardımcı Teorem 4.3'den, $d = dimF$ olmak üzere

$$\tilde{Ric}(U,V) = \bar{Ric}(U,V) - \Big[\frac{\Delta h}{h} + (d-1)\frac{||\nabla h||^2}{h^2}\Big]\tilde{g}(U,V) \tag{6.76}$$

dır. (6.75) ve (6.76) denklemleri (6.74) denkleminde yerine yazılırsa her $U,V \in \chi(F)$ için

$$\bar{Ric}(U,V) = \Big[\frac{mh}{\theta} grad_g \theta(h) + h^2(\rho r + \lambda) + h\Delta h + (d-1)||\nabla h||^2\Big]\bar{g}(U,V) \qquad (6.77)$$

bulunur ve dolayısıyla $F$ bir Einstein manifoldudur. □

Bu bölümde son olarak, Bölüm 4-Teorem 4.7'de elde edilen, bir genelleştirilmiş yarı Einstein katlı çarpım manifoldunun taban ve lif manifoldlarının Ricci tensörleri ile, bir önceki bölümde ifade edilen Case, Catino ve Huang [58,59,100] tarafından tanımlanan manifoldların Ricci tensörleri arasında ilişki kurulmaya çalışılacaktır. Burada elde edilen sonuçlar [107] numaralı çalışmanın bir parçasıdır.

**Teorem 6.14.** *boy$M = m$, boy$N = n > 1$ olmak üzere, $M \times_f N$ katlı çarpım manifoldu üreteçleri $\xi_1$ ve $\xi_2$ olan bir $G(QE)_{m+n}$ manifoldu ve $h = -nlnf$ olsun. Bu durumda, aşağıdakiler gerçeklenmektedir:*

*(1) Eğer $\xi_1, \xi_2 \in \chi(M)$ öyle ki $\xi_2 = \nabla h$, her $X \in \chi(M)$ için $g(\nabla_X \xi_1, \nabla f) = 0$ ve $\Delta f = \frac{1}{f}||\nabla f||^2$ ise, $(M,g)$ üreteçleri $\xi_1, \nabla h$ ve ilgili tensörü $Hess(h)$ olan bir karışık süper yarı Einstein manifoldu, $(N,\bar{g})$ Einstein manifoldudur.*

*(2) Eğer $\xi_1, \xi_2 \in \chi(N)$ ise, $(M,g,h,a)$ Case anlamında $n-$yarı Einstein manifoldu, $(N,\bar{g})$ ise üreteçleri $\bar{\xi} = f\xi_1$ ve $\bar{\mu} = f\xi_2$ olan Chaki anlamında genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldudur.*

*(3) Eğer $\xi_1 \in \chi(M)$, $\xi_2 \in \chi(N)$ ve $\xi_1 = \nabla h$ ise, $(M,g,h,a)$ Catino anlamında genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldu, $(N,\bar{g})$ Einstein manifoldudur.*

*(4) Eğer $\xi_1 \in \chi(N)$ ve $\xi_2 \in \chi(M)$ ise, $(M,g,h,a)$ Case anlamında n-yarı Einstein manifoldu, $(N,\bar{g})$ ise üreteci $\bar{\xi} = f\xi_1$ olan Chaki anlamında yarı Einstein manifoldudur.*

*İspat.* Teorem 4.7'in ispatında olduğu gibi, $G(QE)_{m+n}$ manifoldunun üreteçlerinin taban yada lif manifolduna ait olmasına bağlı olarak aşağıdaki dört durum söz konusu olacaktır:

**1. Durum:** İlk olarak $\xi_1, \xi_2 \in \chi(M)$ olduğu durum ele alınsın. $\xi_1$ ve $\xi_2$ birbirine dik vektör alanları olduğundan, (4.2) katlı çarpım metriğinin tanımı kullanılarak

$$g(\xi_1,\xi_1) = g(\xi_2,\xi_2) = 1 \quad ve \quad g(\xi_1,\xi_2) = 0 \qquad (6.78)$$

olur. Şimdi

$$h = -nlnf \quad ve \quad \xi_2 = \nabla h \tag{6.79}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} Hess(h)(X,Y) =& Hess(-nlnf)(X,Y) = -g(\nabla_X \nabla(nlnf),Y) \\ =& -n[\frac{1}{f}g(\nabla_X \nabla f,Y) + X(\frac{1}{f})g(\nabla f,Y)] \\ =& -\frac{n}{f}Hess(f)(X,Y) + \frac{n}{f^2}df(X)df(Y) \end{aligned} \tag{6.80}$$

Böylece (6.79) ve (6.80) denklemleri (4.75) denkleminde yerine yazılırsa Ricci tensörü

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) =& ag(X,Y) - Hess(h)(X,Y) + \frac{1}{n}dh(X)dh(Y) + bA(X)A(Y) \\ &+ [A(X)dh(Y) + A(Y)dh(X)] \end{aligned} \tag{6.81}$$

biçiminde yazılır.

$$g(\xi_1,\xi_2) = g(\xi,\nabla h) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \xi_1(h) = 0 \;\; ve \;\; \xi_1(f) = 0 \tag{6.82}$$

bulunur. $D =: Hess(h)$ olarak tanımlanır ve her $X \in \chi(M)$ için $g(\nabla_X \xi_1, \nabla f) = 0$ olduğu kabul edilirse, (6.82) denkleminden

$$D(X,\xi_1) = 0, \quad \forall X \in \chi(M) \tag{6.83}$$

bağıntısı sağlanır. Öte yandan, $h$ fonksiyonunun Laplasyeni

$$\Delta h = -\frac{n}{f}\Delta f + \frac{n}{f^2}||\nabla f||^2 \tag{6.84}$$

biçimindedir. Dolayısıyla eğer $\Delta f = \frac{1}{f}||\nabla f||^2$ koşulunun sağlandığı kabul edilirse $D$ tensörünün izi $iz(D) = 0$ olur. O halde (6.81), (6.83) ve (6.84) denklemlerinden, $M$ taban manifoldu karışık süper yarı-Einstein manifoldudur. Diğer taraftan, (4.76) denkleminden $N$ fiber manifoldu Einstein manifoldudur.

**2. Durum:** Şimdi $\xi_1, \xi_2 \in \chi(N)$ olduğu durum ele alınsın. 1. durum ile benzer şekilde $h = -nlnf$ dönüşümü yapılarak elde edilen (6.80) denklemi (4.77) denkleminde yerine yazılırsa

$$Ric + Hessh - \frac{1}{n}dh \otimes dh = ag \tag{6.85}$$

bulunur. $a \in C^{\infty}(M)$ olduğundan, $M$ taban manifoldu Catino'nun verdiği tanıma göre $h = -nlnf$ potansiyel fonksiyonuna sahip $n$-yarı Einstein manifoldu olur.

Diğer taraftan, $\xi_1, \xi_2 \in \chi(N)$ iken

$$f^2\bar{g}(\xi_1,\xi_1) = f^2\bar{g}(\xi_2,\xi_2) = 1 \quad ve \quad f^2\bar{g}(\xi_1,\xi_2) = 0 \tag{6.86}$$

olur.

$$\bar{\xi} = f\xi_1 \quad ve \quad \bar{\mu} = f\xi_2 \tag{6.87}$$

olarak tanımlanırsa

$$\bar{g}(\bar{\xi},\bar{\xi}) = \bar{g}(\bar{\mu},\bar{\mu}) = 1 \quad ve \quad \bar{g}(\bar{\xi},\bar{\mu}) = 0 \tag{6.88}$$

elde edilir. Bu durumda her $U \in \chi(N)$ için $\bar{A}(U) = \bar{g}(\bar{\xi},U)$ ve $\bar{B}(U) = \bar{g}(\bar{\mu},U)$ olarak tanımlanırsa, (4.78) denklemi

$$R\bar{i}c = f^2\Big(a + \frac{\Delta f}{f} + \frac{n-1}{f^2}||gradf||^2\Big)\bar{g} + bf^2\bar{A}\otimes\bar{A} + cf^2[\bar{A}\otimes\bar{B} + \bar{B}\otimes\bar{A}]$$

biçiminde yazılır ve böylece $N$ fiberi Chaki anlamında genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldudur.

**3. Durum:** Şimdi de $\xi_1 \in \chi(M)$ ve $\xi_2 \in \chi(N)$ olsun. Benzer şekilde

$$h = -nlnf \quad ve \quad \xi_1 = \nabla h \tag{6.89}$$

olarak tanımlanırsa (4.79) denklemi

$$Ric + Hess(h) - (\frac{1}{n} + b)dh\otimes dh = ag \tag{6.90}$$

biçimine dönüşür. $a,b \in C^\infty(M)$ olduğundan, son denklem taban manifoldunun Catino anlamında genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldu olduğunu söyler. Diğer taraftan, $\xi_1 \in \chi(M)$ ve $\xi_2 \in \chi(N)$ iken (4.80) denkleminden fiber bir Einstein manifoldudur.

**4. Durum:** Son olarak $\xi_1 \in \chi(N)$ ve $\xi_2 \in \chi(M)$ olsun. 2. durum ile benzer şekilde taban manifoldu $n$-yarı Einstein manifoldu olur. Fiber manifoldu için ise, benzer şekilde $\bar{\xi} = f\xi_1$ olarak tanımlanır ve (4.2) katlı çarpım metriği kullanılırsa, $\bar{g}(\bar{\xi},\bar{\xi}) = 1$ bağıntısı sağlanır. Her $U \in \chi(N)$ için $\bar{A}(U) = \bar{g}(U,\xi)$ 1-formu tanımlanarak (4.82) denklemi

$$R\bar{i}c = f^2\Big(a + \frac{\Delta f}{f} + \frac{n-1}{f^2}||gradf||^2\Big)\bar{g} + bf^2\bar{A}\otimes\bar{A} \tag{6.91}$$

biçiminde yazılır. O halde $N$ Chaki anlamında yarı Einstein manifoldudur. □

### 6.2.1 $(m,\rho)$-yarı Einstein manifoldu örneği

Bu bölümde $(m,\rho)-$yarı Einstein manifoldunun varlığını kanıtlayan trivial olmayan somut bir örnek inşaa edilecektir.

$M$, $(t,x,y)$ lokal koordinantları ile verilen, $\{\partial_t,\partial_x,\partial_y\}$ lokal çatı alanına sahip olan ve $f$ yalnızca $t$'e bağlı diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere

$$g_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & f(t) \end{pmatrix}. \tag{6.92}$$

metriğine sahip olan 3-boyutlu semi-Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, $(M,g_f)$ manifoldunun Levi-Civita konneksiyonunun ve eğrilik tensörünün sıfırdan farklı olan bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$\nabla_{\partial_t}\partial_y = \frac{1}{2}f_t\partial_t, \qquad \nabla_{\partial_y}\partial_y = \frac{1}{2}ff_t\partial_t - \frac{1}{2}f_t\partial_y \tag{6.93}$$

$$R(\partial_t,\partial_y)\partial_t = -\frac{1}{2}f_{tt}\partial_t, \qquad R(\partial_t,\partial_y)\partial_y = -\frac{1}{2}ff_{tt}\partial_t + \frac{1}{2}f_{tt}\partial_y \tag{6.94}$$

Dolayısıyla, Ricci tensörü

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}f_{tt} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}f_{tt} & 0 & \frac{1}{2}ff_{tt} \end{pmatrix}. \tag{6.95}$$

biçimindedir. Ayrıca skaler eğrilik $r = f_{tt}$ olarak elde edilir.

$(M,g_f)$ manifoldu üzerinde $(m,\rho)-$yarı Einstein metrik yapısı inşaa edilebilmesi için

$$Ric_{ij} + h_{ij} - \frac{1}{m}h_ih_j = (\rho r + \lambda)g_{ij}, \;\; i,j = 1,2,3 \tag{6.96}$$

temel denklemini sağlayan bir $h$ potansiyel fonksiyonunun varolduğu gösterilmelidir. (6.96) denkleminde Ricci tensörünün bileşenleri kullanılarak aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{cases} h_{tt} - \frac{1}{m}(h_t)^2 = 0, & h_{tx} - \frac{1}{m}h_th_x = 0, \quad \frac{1}{2}f_{tt} + h_{ty} - \frac{1}{m}h_th_y = \rho f_{tt} + \lambda \\ h_{xx} - \frac{1}{m}(h_x)^2 = \rho f_{tt} + \lambda, & h_{xy} - \frac{1}{m}h_xh_y = 0, \quad \frac{1}{2}ff_{tt} + h_{yy} - \frac{1}{m}(h_y)^2 = (\rho f_{tt} + \lambda)f \end{cases}$$

Burada indisler $t,x$ ve $y$ değişkenlerine göre kovaryant türevleri göstermektedir.

Bu denklem sisteminin uygun çözümlerinin bulunabilmesi için $h$ fonksiyonunun bağlı olduğu değişkene göre aşağıdaki durumlar ele alınabilir:

**1. Durum:** İlk olarak $h$ fonksiyonunun yalnızca $t$'e bağlı olduğu kabul edilsin. Bu durumda, yukarıdaki denklem sistemi aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$h'' - \frac{1}{m}(h')^2 = 0, \quad f'' = f'h', \quad \rho f'' + \lambda = 0 \tag{6.97}$$

Burada ise "$'$", $t$'e göre kısmi türevi göstermektedir. $w = e^{-h/m}$ dönüşümü yapılırsa $w'' = 0$ lineer homojen denklemi elde edilir ve bunun da çözümü $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $w = \alpha t + \beta$ biçimindedir. Böylece $h$ potansiyel fonksiyonu ve $f$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$h(t) = -mln|\alpha t + \beta|, \quad f(t) = \frac{(\alpha t + \beta)^{-m+1}}{\alpha(-m+1)}, \; m \neq -1 \tag{6.98}$$

**2. Durum:** Şimdi, $h$ fonksiyonunun yalnızca $x$'e bağlı olduğu kabul edilsin. İlk durum ile benzer şekilde aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$h_{xx} - \frac{1}{m}(h_x)^2 = \rho f'' + \lambda, \quad \frac{1}{2}f'' = \rho f'' + \lambda \tag{6.99}$$

Burada ise "$'$", $t$'e göre kısmi türevi ve alt indisler ise $x$'e göre kısmi türevi göstermektedir. (6.99) denklemindeki ilk eşitliğin sağ ve sol tarafı farklı değişkenlere bağlı olduğundan, eşitliğin sağlanabilmesi için, bu ifadelerin aynı sabite eşit olmaları gerekir. Böylece, bu diferansiyel denklemlerin çözümü de $k, l, p, c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(t) = kt^2 + lt + p$ ve

$$h(x) = \begin{cases} -mln\Big(c_1 sinh(x\sqrt{|\frac{c}{m}|}) + c_2 cosh(x\sqrt{|\frac{c}{m}|})\Big) & ; \; c < 0, \\ -mln|c_1 + c_2 x| & ; \; c = 0, \\ -mln\Big(c_1 sin(x\sqrt{|\frac{c}{m}|}) + c_2 cos(x\sqrt{|\frac{c}{m}|})\Big) & ; \; c > 0, \end{cases} \tag{6.100}$$

biçiminde elde edilir.

**3. Durum:** Son olarak, $h$ fonksiyonunun yalnızca $y$'e bağlı olduğu kabul edilsin. Bu durumda da aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$h_{yy} - \frac{1}{m}(h_y)^2 + \frac{1}{2}f'h_y = 0, \quad \rho f'' + \lambda = 0, \quad f'' = 0 \tag{6.101}$$

Burada ise "$'$", $t$'e göre kısmi türevi ve alt indisler ise $y$'e göre kısmi türevi göstermektedir. Bu diferansiyel denklemlerin çözümü ise $c_0, c_1, k, l \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$h(y) = c_0 y + c_1, \quad f(t) = kt + l \tag{6.102}$$

biçiminde elde edilir.

Görüldüğü üzere 2. durumda elde edilen (6.100) denklemi ile verilen $h$ potansiyel fonksiyonu $(m,\rho)-$yarı Einstein metrik yapısını sağlamaktadır. 1. ve 3. durumlarda ise $\rho f'' + \lambda = 0$ olduğundan bu iki durum da özel $(m,\rho)-$yarı Einstein metrik yapısındadır. Sonuç olarak aşağıdaki teorem elde edilmiş olur:

**Teorem 6.15.** *M, $(t,x,y)$ lokal koordinantları ile verilen, $\{\partial_t, \partial_x, \partial_y\}$ lokal çatı alanına sahip olan ve $f(t) = kt^2 + lt + p;\ k,l,p \in \mathbb{R}$ olmak üzere $g_f = 2dtdy + (dx)^2 + f(t)(dy)^2$ metriğine sahip bir semi-Riemann manifoldu olsun. Bu durumda* (6.100) *denklemi ile verilen ve yalnızca x değişkenine bağlı olan h potansiyel fonksiyonuna sahip $(M^3, g_f, h, \lambda)$ manifoldu bir $(m,\rho)-$yarı Einstein manifoldudur. Burada, $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda = k(1-2\rho)$'dur.*

Dahası, ilgili skaler fonksiyonlar $a$ ve $b$

$$a = \frac{1}{2} f_{tt} = -b \tag{6.103}$$

biçiminde ve ilgili 1-form $A$

$$A_i(x) = \begin{cases} 1, & i = 2 \\ 0, & i \neq 2 \end{cases} \tag{6.104}$$

şeklinde tanımlanırsa, $(M, g_f)$ manifoldunun Ricci tensörünün

$$R_{ij} = ag_{ij} + bA_iA_j, \quad g^{ij}A_iA_j = 1; \quad \forall i,j = 1,2,3 \tag{6.105}$$

denklemini sağladığı görülür. Dolayısıyla $(M, g_f)$ aynı zamanda ilgili skalerlerinin toplamı sıfır olan, Chaki'nin tanımlamış olduğu (J. Case'in tanımından farklı olarak) yarı Einstein manifoldudur. Ayrıca (6.104) denkleminden, $A$ 1-formunu üreten birim vektör alanının da paralel olduğu görülmektedir. Dolayısıyla (6.105) denkleminden, Ricci tensörünün (6.50) koşulunu sağladığı görülür. Böylece bu örnek ile $(M^3, g_f, h, \lambda)$ manifoldunun Teorem 6.9'u gerçeklediği ispatlanmış olur. Bunlara ek olarak, $(M^3, g_f, h, \lambda)$ manifoldu konformal düzdür. Dolayısıyla harmonik ve radyali sıfır olan Weyl tensörüne sahiptir. Bu durumda Catino'nun [58] numaralı çalışmasına göre, $(M^3, g_f, h, \lambda)$ manifoldu $(n-1)$-boyutlu Einstein fiberine sahip katlı çarpım manifoldudur. Böylece Teorem 6.11 de gerçeklenmiş olur.

# 7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Einstein manifoldlarının genelleştirmeleri olan özel yarı Einstein manifoldları üzerinde, çeşitli simetri koşulları ve özel çarpım metrik yapıları çalışılmış ve söz konusu manifoldlar ile ilgili çeşitli örnekler inşaa edilmiştir.

İlk olarak, bazı eğrilik tensörlerinin çeşitli simetri koşullarını sağlanması durumunda, genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldlarının, sahip olduğu geometrik özellikler araştırılmış ve bu tip manifoldların bir $N(k)$-yarı Einstein veya yarı Einstein manifolduna indirgendiği gösterilmiştir. Daha sonra, genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun, çarpım metriği yapısına sahip olabilmesi için bazı gerekli koşullar elde edilmeye çalışılmıştır. Konformal yada pseudo-projektif eğrilik tensörlerinin, özdeş olarak sıfır olmaları yada diverjanslarının sıfır olması durumunda, genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldunun çarpım manifoldları ile ilişkilendirilebileceği görülmüştür.

Ardından, yeni bir çarpım yapısı olan $D$-genel çarpımları tanımlanmış ve bu tip çarpım manifoldlarının Levi-Civita konneksiyonu, Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörü, kesitsel ve skaler eğrilikleri hesaplanarak, bileşenlerinin Einstein-benzeri manifoldlar ile ilişkileri araştırılmıştır. Buraya kadar elde edilen sonuçlar, Riemann katlı çarpım manifodlarında ele alınan harmoniklik, Einstein-benzeri koşullar vb. problemlerin $D$-genel çarpım manifoldlarına genelleştirilmesidir. İleride, bu yeni çarpım metriği üzerinde de, genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldlarının karakterizasyonu yapılabilir ve $D$-genel çarpımının aynı zamanda bir genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldu olması durumunda, manifoldun üreteçleri yardımıyla, taban ve lifler üzerinde benzeri sınıflandırmalar yapılabilir.

Ayrıca tez çalışmasında, elde edilen sonuçlar Genel Görelilik Teorisindeki önemli sonuçlarla karşılaştırılarak, çeşitli fiziksel yorumlar yapılmıştır. Einstein alan denklemlerini sağlayan, 4-boyutlu, Ricci simetrik, genelleştirilmiş yarı Einstein uzay-zamanının, sabit enerji yoğunluğuna ve izotropik basınca sahip olduğu, genleşme sabiti ve ivme vektörü sıfır olan, hız vektör alanı manifoldun üreteci olan mükemmel akışkanlı modellere örnek olduğu kanıtlanmıştır. Böylece, bu tip bir uzay-zamanın $I$,

$D$ veya $O$ Petrov tipinde bir kozmolojik yapıya sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Böylece, genelleştirilmiş yarı Einstein uzay-zamanlarının, Genel Görelilik Teorisindeki araçlar yardımıyla özel kozmolojik modellerle ilişkilendirilmesi sağlanmıştır. Literatürde Riemann veya semi-Riemann metriğine sahip, genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldlarının varlığına dair çok fazla örnek bulunmamakta ve varolan örneklerin uzayın bazı özelliklerini gerçeklemediği görülmektedir. Tez çalışmasında genelleştirilmiş yarı Einstein manifoldlarının varlığını somut örneklerle kanıtlayan, trivial olmayan, Riemann ve Lorentz metrikleri inşaa edilmiştir.

Diğer taraftan, semi-Riemann geometrisinde birçok uygulaması olan Robertson-Walker ve genelleştirilmiş Robertson-Walker uzay-zamanları da aslında birer katlı çarpım manifoldu olduğundan, bundan sonraki adımda, $D$-genel çarpım metrik yapısı Lorentz geometrisine genişletilerek, Genel Görelilik ve Kozmoloji ile ilgili uygulamalar elde edilmeye çalışılabilir.

Tez çalışmasının son kısmında, Einstein manifoldlarının farklı genelleştirmeleri olan, $(m,\rho)$-yarı Einstein manifoldları üzerine çalışılmıştır. Kapalı konformal vektör alanına sahip olan bir $(m,\rho)$-yarı Einstein manifoldunun, bir katlı çarpım manifoldu olduğu ispatlanmıştır. Daha sonra bu durum paralel vektör alanlarına doğrudan indirgenerek Ricci tensörünün klasik yarı Einstein manifoldu yapısına sahip olduğu gösterilmiştir.

Bu sonuç önceki bölümlerde ele alınan özel yarı Einstein manifoldları ile Ricci solitonların bazı genelleştirmeleri arasında bağlantıların olduğunu göstermektedir. Benzer çalışmalar Ricci solitonların daha farklı genelleştirmeleri üzerinde, farklı vektör alanları dikkate alınarak yapılabilir ve böylece sınıflandırma teoremleri geliştirilebilir.

## KAYNAKLAR


[1] **O'Neill, B.** (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press Inc., New York.

[2] **Chaki, M.C. ve Maity, R.K.** (2000). On quasi-Einstein manifolds, *Publ. Math. Debrecen*, *57*, 297–306.

[3] **Guha, S.R.** (2003). On quasi-Einstein and generalized quasi-Einstein manifolds, *Facta Univ. Se. Math. Inform.*, *3*, 821–842.

[4] **De, U.C. ve Ghosh, G.C.** (2004). On quasi-Einstein manifolds, *Period. Math. Hungar.*, *48*, 223–231.

[5] **De, U.C. ve Ghosh, G.C.** (2005). On conformally flat special quasi-Einstein manifolds, *Publ. Math. Debrecen*, *66*, 129–136.

[6] **De, U.C. ve De, B.K.** (2008). On quasi-Einstein manifolds, *Commun. Korean Math. Soc.*, *3*, 413–420.

[7] **Shaikh, A.A.**, **Yoon, D.W. ve Hui, S.K.** (2009). On quasi Einstein spacetimes, *Tsukuba J. Math.*, *33*(2), 305–326.

[8] **Chaki, M.C.** (2001). On generalized quasi-Einstein manifolds, *Publ. Math. Debrecen*, *58*, 683–691.

[9] **Hamilton, R.S.** (1982). Three-manifolds with positive Ricci curvature, *J. Differential Geom.*, *17*, 255–306.

[10] **Cao, H.D. ve Chow, B.** (1999). Recent developments on the Ricci flow, *Bull. Amer. Math. Soc.*, *36*(1), 59–74.

[11] **Hamilton, R.S.** (1988). The Ricci flow on surfaces, mathematics and general relativity, *Contemp. Math.*, *71*, 237–262.

[12] **Ivey, T.** (1993). Ricci solitons on compact three-manifolds, *Differential Geom. Appl.*, *3*, 301–307.

[13] **Baird, P. ve Eells, J.** (1980). A conservation law for harmonic maps, *Harmonic Maps: Selected Papers by James Eells and Collaborators*, *894*, 131–155.

[14] **Bishop, R.L. ve O'Neill, B.** (1969). Manifolds of negative curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.*, *145*, 10–49.

[15] **Yano, K. ve Kon, M.** (1984). *Structures on manifolds*, World Scientific, Singapore.

[16] **Chen, B.Y.** (2011). *Pseudo-Riemannian geometry, $\delta$-invariants and applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, USA.

[17] **Tanno, S.** (1988). Ricci curvatures of contact Riemannian manifolds, *Tohoku Math. J.*, *40*(3), 441–448.

[18] **Triphati, M.M. ve Kim, J.S.** (2007). On N(k)-Einstein manifolds, *Commun. Korean Math. Soc.*, *22*(3), 411–417.

[19] **Özgür, C. ve Tripathi, M.M.** (2007). On the concircular curvature tensor of an $N(k)$-quasi Einstein manifold, *Math. Pannon.*, *18*(1), 95–100.

[20] **De, U.C. ve Gazi, A.K.** (2008). On nearly quasi Einstein manifolds, *Novi Sad J. Math.*, *38*(2), 115–121.

[21] **Nivas, R. ve Bajpai, A.** (2011). Certain properties of mixed super quasi Einstein manifolds, *Gen. Math. Notes*, *5*(1), 15–26.

[22] **Deszcz, R.**, **Haesen, S. ve Verstrselen, L.** (2008). *On natural symmetries, In: Mihai, A. Mihai, I. Miron, R.(eds.), Topics in differential geometry*, Editura Academiei Romane, Bucharest.

[23] **Walker, A.G.** (1950). On Ruse's spaces of recurrent curvature, *Proc. Lond. Math. Soc.*, *52*, 36–64.

[24] **Szabo, Z.I.** (1982). Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y)\cdot R=0$, The local version, *J. Differential Geom.*, *17*(4), 531–582.

[25] **Chaki, M.C.** (1987). On pseudosymmetric manifolds, *An. Stiint. Ale Univ. Al. I. Cuza, Iasi. Mat. (N.S.)*, *33*, 53–58.

[26] **Güler, S. ve Altay Demirbağ, S.** (2015). On some classes of generalized quasi Einstein manifolds, *Filomat*, *29*(3), 443–456.

[27] **Güler, S. ve Altay Demirbağ, S.** (2016). Riemannian manifolds satisfying certain conditions on pseudo-projective curvature tensor, *Filomat*, *30*(3), 721–731.

[28] **Deszcz, R.** (1992). On pseudosymmetric spaces, *Bull. Soc. Math. Belg. Ser. A*, *44*(1), 1–34.

[29] **Haesen, S. ve Verstraelen, L.** (2007). Properties of a scalar curvature invariant depending on two planes, *Manuscripta Math.*, *122*, 59–72.

[30] **Jahanara, B.**, **Haesen, S. Şentürk, Z. ve Verstraelen, L.** (2007). On the parallel transport of the Ricci curvatures, *J. Geom. Phys.*, *57*, 1771–1777.

[31] **Mishra, R.S.** (1984). *Structure on a differentiable manifold and their applications*, Chandrama Prakashan, 50 A, Balrampur House, Allahabad, India.

[32] **Prasad, B.** (2002). A pseudo-projective curvature tensor on a Riemannian manifolds, *Bull. Cal. math. Soc.*, *94*(3), 163–166.

[33] **Calvaruso, M. ve Parker, M.** (2012). Homogeneous contact metric structures on five-dimensional generalized symmetric spaces, *Publ. Math. Debrecen*, *81*, 373–396.

[34] **Shaikh, A.A.**, **Deszcz, R.**, **Hotlos, M.**, **Jelowicki, J. ve Kundu, H.** (2015). On pseudosymmetric manifolds, *Publ. Math. Debrecen*, *86*(3-4), 1–32.

[35] **Yano, K.** (1940). *Concircular geometry*, I-IV, Proc. Imp. Acad.

[36] **Yano, K. ve Sawaki, S.** (1968). Riemannian manifolds admitting a conformal transformation group, *J. Differential Geom.*, *2*, 161–184.

[37] **Pokhariyal, G.P. ve Mishra, R.S.** (1970). The curvature tensor and their relativistic significance, *Yokohama Math. J.*, *18*, 105–108.

[38] **De, U.C. ve Kamilya, N.** (1995). On generalized Ricci-recurrent manifolds, *Tensor (N. S.)*, *56*, 312–317.

[39] **Patterson, E.M.** (1952). Some theorems on Ricci-recurrent spaces, *J. Lond. Math. Soc.*, *27*, 287–295.

[40] **Yano, K.** (1944). On torse-forming direction in a Riemannian space, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, *20*, 340–345.

[41] **Shaikh, A.A.**, **Özgür, C. ve Patra, A.** (2011). On hyper-generalized quasi-Einstein manifolds, *Int. J. of Math. Sci. and Engg. Appl.*, *5*(3), 189–206.

[42] **Güler, S. ve Altay Demirbağ, S.** (2017). Hyper-generalized quasi Einstein manifolds satisfying certain Ricci conditions, *Proceedings Book of International Workshop on Theory of Submanifolds*, *1*, 205–215.

[43] **Shaikh, A.A. ve Matsuyama, Y.** (2009). On trans-Sasakian manifolds, *SUT Journal of Mathematics*, *45*(1), 25–41.

[44] **Defever, F. ve Deszcz, R.** (1991). On warped product manifolds satisfying a certain curvature condition, *Atti Acad. Peloritana Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, *69*, 213–236.

[45] **Deszcz, R. ve Grycak, W.** (1990). On certain curvature conditions on Riemannian manifolds, *Colloq. Math.*, *58*, 259–268.

[46] **Eisenhart, L.** (1926). *Riemannian geometry*, Princeton Univ. Press, 91 sürüm.

[47] **Adati, T.** (1951). On subprojective spaces, III., *Tohoku Math. J.*, *3*, 343–358.

[48] **Sinyukov, N.S.** (1979). *Geodesic mappings of Riemannian spaces*, Moscow: Nauka, 91 sürüm.

[49] **Gebarowski, A.** (1992). Nearly conformally symmetric warped product manifolds, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)*, *4*(20), 359–371.

[50] **Dahia, F.**, **da Silva, L.F.P.**, **Romero, C. ve Tavakol, R.** (2007). Warped product spaces and geodesic motion in the neighborhood of branes, *J. Math. Phys.*, *48*(7), 072501.

[51] **Obata, M.** (1962). Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere, *J. Math. Soc. Japan*, *14*, 333–340.

[52] **Ferus, D.** (1981). *A remark on Codazzi tensors on constant curvature space*, Springer-Verlag, New-York, 838 sürüm.

[53] **Tashiro, Y.** (1965). Complete Riemannian manifolds and some vector fields, *Trans. Amer. Math. Soc.*, *117*, 251–275.

[54] **De Rham, G.** (1952). Sur la reducibilite d'un espace de Riemann, *Comment. Math. Helv.*, *26*, 328–344.

[55] **Blair, D.E.** (2013). *D*-homothetic warping, *Publ. de I'Inst. Math.*, *94*(108), 47–54.

[56] **Blair, D.E.** (2010). *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Birkhäuser, Springer, Boston, 203 sürüm.

[57] **Tanno, S.** (1968). The topology of contact Riemannian manifolds, *Illinois J. Math.*, *12*(4), 700–717.

[58] **Catino, G.** (2012). Generalized quasi Einstein manifolds with harmonic Weyl tensor, *Math. Z.*, *271*, 751–756.

[59] **Case, J.**, **Shu, Y. ve Wei, G.** (2011). Rigidity of quasi-Einstein metrics, *Differential Geom. Appl.*, *29*, 93–100.

[60] **Boju, V. ve Popescu, M.** (1978). Espaces a*Á* courbure quasi-constante, *J. Diff. Geom.*, *13*, 373–383.

[61] **Chen, B.Y. ve Yano, K.** (1972). Hypersurfaces of a conformally flat space, Tensor, *Tensor (N. S.)*, *26*, 318–322.

[62] **Ganchev, G. ve Mihova, V.** (2000). Riemannian manifolds of quasi-constant sectional curvatures, *J. Reine Angew. Math.*, *522*, 119–141.

[63] **Einstein, A.** (1905). On electrodynamic moving bodies, *Ann. Physics*, *17*(23), 891–921.

[64] **Einstein, A.** (1916). The foundation of the generalised theory of relativity, *Ann. Physics*, *354*(7), 769–822.

[65] **Einstein, A.** (1917). Cosmological considerations in the General Theory of Relativity, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, *6*(43), 142–152.

[66] **Ellis, G.F.R.**, **Maartens, R. ve MacCallum, M.** (2012). *Relativistic cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge.

[67] **Zel'dovich, Y.B.** (1962). The equation of state at ultrahigh densities and its relativistic limitations, *Soviet, Phys. Jetp*, *14*(5), 1609–1615.

[68] **Alías, L.J.**, **Romero, A. ve Sanchez, M.** (1995). Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes, *Gen. Relativity Gravitation*, *27*, 71–84.

[69] **Chen, B.Y.** (2014). A simple characterization of generalized Robertson-Walker spacetimes, *Gen. Relativity and Gravitation*, *46*, 1833.

[70] **Güler, S. ve Altay Demirbağ, S.** (2016). A study of generalized quasi Einstein spacetimes with applications in general relativity, *Int. J. Theor. Phys.*, *55*, 548–562.

[71] **Güler, S. ve Altay Demirbağ, S.** (2015). On Ricci symmetric generalized quasi Einstein spacetimes, *Miskolc Math. Notes*, *16*(2), 853–868.

[72] **Karchar, H.** (1992). Infinitesimal characterization of Friedmann Universes, *Arch. Math. Basel*, *38*, 58–64.

[73] **Katzin, G.H.**, **Levine, J. ve Davis, W.R.** (1969). Curvature collineations: A fundamental symmetry property of the space-times of general relativity defined by the vanishing Lie derivative of the Riemann curvature tensor, *J. Math. Phys.*, *10*, 617–629.

[74] **Güler, S. ve Altay Demirbağ, S.** (2014). Conformally flat special generalized quasi Einstein spacetimes, *Tensor (N.S.)*, *75*(1), 61–71.

[75] **Rachevsky, P.** (1933). Caracteres tensoriels de espace sous-projectif, *Abh. des Sem. fur Vektor un Tensor analysis, Moskau*, *1*, 126–140.

[76] **Chakraborty, S.**, **Mazumder, N. ve Biswas, R.** (2011). Cosmological evolution across phantom crossing and the nature of the horizon, *Astrophys. Space Sci.*, *334*, 183–186.

[77] **Ellis, G.F.R.** (1971). *Relativistic cosmology in general relativity and cosmology*, R.K. Sachs. Academic Press, London, 91 sürüm.

[78] **Mantica, C.A. ve Molinari, L.G.** (2012). Extended Derdzinski-Shen theorem for curvature tensors, *Colloq. Math.*, *128*(1), 1–6.

[79] **Mantica, C.A. ve Molinari, L.G.** (2011). A second order identity for the Riemann tensor and applications, *Colloq. Math.*, *122*, 69–82.

[80] **Mantica, C.A. ve Molinari, L.G.** (2012). Weakly $Z$-symmetric manifolds, *Acta Math. Hungar.*, *35*, 80–96.

[81] **Mantica, C.A. ve Molinari, L.G.** (2014). Weyl Compatible Tensors, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, *11*(1), 1450070.

[82] **Bertschinger, E. ve Hamilton, A.J.S.** (1994). Lagrangian evolution of the Weyl tensor, *Astroph. J.*, *435*(1), 1–7.

[83] **Stephani, H.**, **Kramer, D.**, **MacCallum, M.**, **C., H. ve Hertl, E.** (2003). *Exact solutions of Einstein's field equations*, Cambridge University Press, London, 2 sürüm.

[84] **Ellis, G.F.R. ve Dunsby, P.K.S.** (1997). Newtonian evolution of the Weyl tensor, *Astrophys. J.*, *479*(1), 97–98.

[85] **Maartens, R.**, **Lesame, W.M. ve Ellis, G.F.R.** (1998). Newtonian-like and anti-Newtonian universes, *Class. Quantum Grav.*, *15*, 1005–1006.

[86] **Mantica, C.A. ve Molinari, L.G.** (2012). Riemann compatible tensors, *Colloq. Math.*, *128*(2), 197–210.

[87] **Petrov, A.Z.** (1949). *Einstein spaces*, Pergamon Press, Oxford.

[88] **Barnes, A.** (1973). On shear free normal flows of a perfect fluid, *Gen. Relativity Gravitation*, *4*(2), 105–129.

[89] **Sheridan, N.** (2006). *Hamilton's Ricci flow*, The University of Melbourne,, Australia.

[90] **Lee, J.M.** (1997). *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, Springer-Verlag, New-York.

[91] **Perelman, G.** (2002). The entropy formula for the Ricci fow and its geometric applications, *http://arXiv.org/sbs/Math.DG/0211159.*, *Preprint*, 1–39.

[92] **Chern, S.S.**, **Chen, W.H. ve Lam, K.S.** (2000). *Lectures on differential geometry*, World Scientific, Singapure, vol.1 sürüm.

[93] **Eminenti, M.**, **Nave, G. ve Mantegazza, C.** (2008). Ricci solitons-the equation point of view, *Manuscripta Math.*, *127*(3), 345–367.

[94] **Fernandez-Lopez, M. ve Garcio-Rio, E.** (2011). Rigidity of shrinking Ricci solitons, *Math. Z.*, *269*, 461–466.

[95] **Bejan, C.L. ve Crasmareanu, M.** (2011). Ricci solitons in manifolds with quasi-constant curvature, *Publ. Math. Debrecen*, *78*(1), 235–243.

[96] **Ivey, T.** (1994). New examples of complete Ricci solitons, *Proc. Amer. Math. Soc.*, *122*, 241–245.

[97] **Gastel, A. ve Kronz, M.** (2004). A family of expanding Ricci solitons, Variational problems in Riemannian geometry, *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, *59*, 81–93.

[98] **Bakry, D. ve Emery, M.** (1985). Diffusions hypercontractives, In seminaire de probabilities, XIX., *Lecture Notes in Math.*, *1123*, 177–206.

[99] **Petersen, P. ve Wylie, W.** (2009). Rigidity of gradient Ricci solitons, *Pacific J. Math.*, *24*, 329–345.

[100] **Huang, G. ve Wei, Y.** (2013). The classification of $(m,\rho)-$quasi Einstein manifolds, *Ann. Glob. Anal. Geom.*, *44*, 269–282.

[101] **Altay Demirbağ, S. ve Güler, S.** (2017). Rigidity of $(m,\rho)$-quasi Einstein manifolds, *Math. Nach.*, *290*(14-15), 2100–2110.

[102] **Besse, A.L.** (1987). *Einstein Manifolds*, Springer Verlag, Berlin.

[103] **Tanno, S. ve Weber, W.** (1969). Closed conformal vector fields, *J. Differential Geom.*, *3*, 361–366.

[104] **Ros, A. ve Urbano, F.** (1988). Lagrangian submanifolds of $\mathbb{C}^n$ with conformal Maslov form and the Whitney sphere, *J. Math. Soc. Japan*, *50*, 203–226.

[105] **Caminha, A.** (2011). The geometry of closed conformal vector fields on Riemannian spaces, *Bull. Braz. Math. Soc., New Series*, *42*(2), 277–300.

[106] **Cheeger, J. ve Colding, T.** (1996). Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products, *Ann. of Math. (2)*, *144*(1), 189–237.

[107] **Güler, S. ve Altay Demirbağ, S.** (2017). On Warped Product Manifolds Satisfying Ricci-Hessian Class Type Equations, *Publ. de l'Inst. Math.*, kabul edildi.

**ÖZGEÇMİŞ**

**Ad-Soyad** : Sinem Güler

**Doğum Tarihi ve Yeri** : İstanbul, 12/10/1986

**E-Posta** : singuler@itu.edu.tr

**ÖĞRENİM DURUMU:**

- **Lisans** : 2008, İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Tezsiz Yüksek Lisans** : 2010, İstanbul Üniversitesi, Orta Öğretim Matematik Eğitimi Formasyonu
- **Yüksek Lisans** : 2012, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik

**MESLEKİ DENEYİMLER VE ÖDÜLLER :**

- 2011- Devam, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi
- 2012-2017, TÜBİTAK BİDEB, 2211-Yurtiçi Doktora Bursu
- 02.05.2017-29.07.2017, TÜBİTAK BİDEB, 2214-A Doktora Sırası Yurtdışı Araştırma Bursu, "Gheorghe Asachi" Technical University of Iasi, Romanya.

**YAYIN LİSTESİ**

- Bejan, C.-L., **Güler, S.**, 2017. Kähler Manifolds of Quasi-Constant Holomorphic Sectional Curvature and Generalized Sasakian Space Forms, (Değerlendirmede.)
- Bejan, C.-L., **Güler, S.**, 2017 Harmonicity, Einstein and Quasi-Einstein Equations on *D*-General Warping, (Hazırlık aşamasında).

**TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR**

- **Güler, S.**, Altay Demirbağ, S., 2012. Genelleştirilmiş Yarı-Einstein Manifoldların Bazı Özellikleri, 7. *Ankara Matematik Günleri*, Bilkent Üniversitesi, Ankara.

- **Güler, S.**, Altay Demirbağ S., 2013. On Conformally Flat Generalized Quasi Einstein Manifolds, *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling ICAAMM*, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- **Güler, S.**, Altay Demirbağ, S., 2013. Conformally Flat Special Generalized Quasi Einstein Spacetimes, *The 13th International Conference of Tensor Society on Differential Geometry and Its Applications*, Iasi, Romania.
- **Güler, S.**, Altay Demirbağ, S., 2014. Conformally Flat Special Generalized Quasi Einstein Spacetimes, *Tensor (N.S.)*, 75(1), 61–71.
- **Güler, S.**, Altay Demirbağ, S., 2014. On Some Classes of Generalized Quasi Einstein Manifolds, *XVIII. Geometrical Seminar*, Vrnjacka Banja, Serbia.
- **Güler, S.**, Altay Demirbağ, S., 2015. On Some Classes of Generalized Quasi Einstein Manifolds, *Filomat*, 29(3), 443–456.
- **Güler, S.**, Altay Demirbağ, S., 2015. Hyper-Generalized Quasi Einstein Manifolds Satisfying Certain Ricci Conditions, *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling (ICAAMM)*, Yıldız Teknik Üniversitesi Istanbul.
- **Güler, S.**, Altay Demirbağ, S., 2015. Riemannian Manifolds Satisfying Certain Conditions On Pseudo-Projective Curvature Tensor, *International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM)*,İstanbul Ticaret Üniversitesi, Istanbul.
- **Güler, S.**, Altay Demirbağ, S., 2015. Some Results on Special Warped Product Manifolds, *13. Geometri Sempozyumu*, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- **Güler, S.**, Altay Demirbağ, S., 2015. On Ricci Symmetric Generalized Quasi Einstein Spacetimes, *Miskolc Math. Notes*, 16(2), 853–868.
- **Güler, S.**, Altay Demirbağ, S., 2016. A Study of Generalized Quasi Einstein Spacetimes with Applications in General Relativity, *Int. J. Theor. Phys.*, 55(1), 548–562.
- **Güler, S.**, Altay Demirbağ, S., 2016. Riemannian Manifolds Satisfying Certain Conditions on Pseudo-Projective Curvature Tensor, *Filomat*, 30(3),721–731.
- **Güler, S.**, Altay Demirbağ, S., 2016. On Warped Product Manifolds Satisfying Ricci-Hessian Class Type Equations, *XIX. Geometrical Seminar*, Zlatibor, Serbia.
- **Güler, S.**, Altay Demirbağ, S., 2016. A Note on Warped Product Manifolds With Certain Curvature Conditions, *14th International Geometry Symposium*, Pamukkale Üniversitesi, Denizli.
- Altay Demirbağ, S., **Güler, S.**, 2017. Rigidity of $(m,\rho)$-quasi Einstein Manifolds, *Math. Nachr.*, 290(14–15), 2100–2110.
- **Güler, S.**, Altay Demirbağ, S., 2017. Hyper-Generalized Quasi Einstein Manifolds Satisfying Certain Ricci Conditions, *Proceedings Book of International Workshop on Theory of Submanifolds*, 1, 205–215.

- **Güler, S.**, Altay Demirbağ, S., 2017. On Warped Product Manifolds Satisfying Ricci-Hessian Class Type Equations, *Publications de l'Institute Mathematique*, (Kabul edildi.)
- **Güler, S.**, Altay Demirbağ, S., 2017. *m*-Quasi Einstein Spacetime and Its Applications, *Mathematical Days in Sofia (MDS)*, Bulgaria.
- **Güler, S.**, Altay Demirbağ, S., 2017. Some Characterizations of Generalized Ricci Solitons, *Differential Geometry*, Bedlewo, Poland.