İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# LİNEER OLMAYAN BAZI DALGA DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI ÜZERİNE

**DOKTORA TEZİ**

**Vural BAYRAK**

**Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Matematik Mühendisliği Programı**

**ARALIK 2019**

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# LİNEER OLMAYAN BAZI DALGA DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI ÜZERİNE

**DOKTORA TEZİ**

**Vural BAYRAK**
**(509932042)**

**Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Matematik Mühendisliği Programı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL**
**Eş Danışman: Prof.Dr. Emil NOVRUZ**

**ARALIK 2019**

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509932042 numaralı Doktora Öğrencisi Vural BAYRAK, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "LİNEER OLMAYAN BAZI DALGA DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI ÜZERİNE" başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

| | | |
|---|---|---|
| **Tez Danışmanı :** | **Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL**<br>İstanbul Teknik Üniversitesi | .............................. |
| **Eş Danışman :** | **Prof.Dr. Emil NOVRUZ**<br>Gebze Teknik Üniversitesi | .............................. |
| **Jüri Üyeleri :** | **Prof. Dr. Kamil ORUÇOĞLU**<br>İstanbul Teknik Üniversitesi | ............................. |
| | **Prof. Dr. Metin Orhan KAYA**<br>İstanbul Teknik Üniversitesi | .............................. |
| | **Doç. Dr. Aytaç ARIKOĞLU**<br>İstanbul Teknik Üniversitesi | .............................. |
| | **Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU**<br>Gebze Teknik Üniversitesi | .............................. |
| | **Prof. Dr. Fatih TAŞCI**<br>Yıldız Teknik Üniversitesi | .............................. |

**Teslim Tarihi : 8 Kasım 2019**
**Savunma Tarihi : 11 Aralık 2019**

*Haklarını Hiçbirzaman Ödeyemeyeceğim Rahmetli Babama ve Rahmetli Anneme Dualarımla…,*

## ÖNSÖZ

Yapmış olduğumuz bu çalışmalarda desteğini eksiltmeden sürdüren, her konuya anlayışla yaklaşan saygıdeğer danışman hocam Sn. Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL'a, çalışmalarımızda yardımlarını, yönlendirmelerini ve desteklerini zaman ve mekân sınırı olmaksızın sürdüren saygıdeğer eş-danışman hocam Sn. Prof. Dr. Emil NOVRUZ'a, doktora eğitimine başlamamda ve tez çalışmamın ilerlemesinde büyük katkıları olan saygıdeğer hocam, önceki danışmanım Sn. Prof. Dr. Mehmet CAN'a, tez konusunun seçiminde yönlendirmeleri ile yardımcı olan ve bu tez çalışmasında da yer alan bir makalemizin oluşmasında katkıları olan saygıdeğer hocam, Sn. Prof. Dr. Fahreddin ALİYEV'e, yapıcı ve yönlendirici soruları ile teşvik eden tez izleme komitesinde yer alan saygıdeğer hocalarım, Sn. Prof. Dr. Kamil ORUÇOĞLU'na, Sn. Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU'na, Sn. Doç. Dr. Aytaç ARIKOĞLU'na ve ilk öğretimden bu güne kadar üzerimde emeği olan saygıdeğer öğretmenlerime, hocalarıma saygılarımla teşekkürlerimi arz ederim.

Yapılan bu akademik çalışmaların bu alanda çalışmalar yapan araştırmacılara katkı sağlaması dileklerimle.

Aralık 2019

Vural Bayrak
(Matematik Yük. Müh.)

**İÇİNDEKİLER**

**Sayfa**

## LİNEER OLMAYAN BAZI DALGA DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI ÜZERİNE


## ÖZET

Patlama konusu 1940'larda ve 1950'lerde Semenov'un "Zincir Reaksiyon Teorisi" ile ortaya çıkmıştır. 1960'larda özellikle S. Kaplan, H. Fujita, A. Friedman ve R. T. Glassey tarafından bu konuda daha kapsamlı çalışmalar yapılmıştır. Lineer olmayan evrim denklemlerinin çözümlerinin davranışı ve özellikle patlamasının öğrenilmesi uygulama ve teorik açıdan önem arzetmektedir.

Bu bağlamda evrim denklemlerinin dalga çözümleri birçok araştırmacının yoğun ilgisine neden olmuştur.

Tezimizde iki konu üzerinde yoğunlaşacağız. Birinci konu quasilinear (sanki lineer) hiperbolik denklemler için çeşitli problemlerin çözümlerinin patlama olayıdır. İkinci konu olarak sığ su denklemler sistemi için çözümün patlaması ele alınmiştir.

Hiperbolik quasilinear kısmi diferansiyel denklemler için yazılmış başlangıç-sınır değer problemleri, fizik, mekanik ve mühendislik bilimlerine yönelik birçok uygulamada ortaya çıkmaktadır. Bu denklemlere yönelik çözümlerin niteliği çeşitli yollarla araştırılmıştır.

Tezimiz giriş bölümü dahil beş bölümden oluşmakta ve tez çalışmamızdan üretilen uluslararası dergilerde yayınlanmış dört makale mevcuttur.

Tezin ikinci ve üçüncü bölümlerinde farklı sınır koşulları altında Quasilinear Hiperbolik Denklemlerinin patlamasına ait sonuçlar yer almaktadır. İkinci bölümde sınır şartlarında sönüm terimi içeren iki quasilinear hiperbolik başlangıç-sınır değer problemi incelenmektedir. Üçüncü bölümde ise sınır şartlarında sönüm terimi içeren bir quasilinear hiperbolik başlangıç-sınır değer problemi dört sınır şartı için incelenmektedir. Bu sonuçlar V. K. Kalantarov ve A. Ladyzhenskaya tarafından verilen genelleştirilmiş içbükeylik yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

Tezimizin dördüncü bölümünde ise bir model problem üzerinde çalışma yapılmıştır. Model problem olarak iskele direği problemi seçilmiştir. Bu çalışmada, denklemde dissipative terimiyle birlikte quasilinear hiperbolik sınır-değer probleminin global çözümlerinin yokluğu incelenmiştir. Bir boyutlu uzayda bu başlangıç sınır-değer problemi, dalgaların ve akımın etkilerinden dolayı titreşen bir iskele direğinin davranışını modellemektedir.

İkinci ve üçüncü bölümde Genelleştirilmiş İçbükeylik yöntemi, dördüncü bölümde Levine tarafından geliştirilen İçbükeylik Yöntemi kullanılarak incelenen problemler için sonuçlar elde edilmiştir. Bu yöntemlerde, problemin ürettiği bir fonksiyonel ele alınarak bu fonksiyonelin, İçbükeylik Yöntemi veya Genelleştirilmiş İçbükeylik yönteminde istenilen şatları sağladığı ispatlanmaktadır. Bu vesile ile  Global Çözümün mevcut olmadığını göstermiş oluyoruz.

Dördüncü bölümde akıntı ve dalga etkisinde iskele direğinin titreşimleri ifade eden model problem çalışılmış ve çözümün belli koşullar altında patlama olayı incelenmiştir. Bu sonuçlar H. A. Levine tarafından verilen içbükeylik yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

Tezimizin ikinci üçüncü ve dördüncü bölümlerinde ilgili başlangıç-sınır değer problemler için çeşitli örnekler inceledik ve çözümülerinn patlaması üzerine değerlendirmeler yaptık.

Tezin beşinci bölümünde ise son yirmi yılda araştırmacıların yoğun ilgisini çeken sığ su problemlerinin çözümlerinin patlama koşulları araştırılmıştır. Bu bölümde genelleştirilmiş Camassa-Holm denklemini içeren iki bileşenli denklem sistemi için patlama (Blow-Up) olayı incelenmektedir. Belirli doğal başlangıç şartları altında uzaya göre yerel patlama kriterleri formülize edilmektedir. Burada Johnson, Constantin ve Ivanov un oluşturduğu iki bileşenli sistemlerin genelleşmesi için; daha önce Brandolese, Cortez ve Novruzov un makalelerinde sunulmuş olan lineer olmayan dispersive denklem için uzaya göre yerel patlama koşullarına benzer koşullar elde edilmiştir.

Tezimizde yukarıda referans verdiğimiz sonuçlara dayanarak iki bileşenli genelleştirilmiş Camassa-Holm denklemler sistemi incelenmiştir.

Ele alınan problemlerin hem teorik hemde pratik açıdan önemli olduğunu düşünüyoruz.

**BLOW-UP PHENOMENA FOR SOME NONLINEAR WAVE EQUATIONS**

## SUMMARY

The subject, blow-up come out in the 1940s and 1950s with Semenov's "Chain Reaction Theory". In the 1960s, widespread studies were carried out by S. Kaplan, H. Fujita, A. Friedman and R. T. Glassey. Studying the behavior and especially the blow-up of the solutions for nonlinear evolution equations is of practical and theoretical importance. Many researchers have attracted by the wave solutions of evolution equations and they have given attention for the study in this field.

In our thesis we have studied on two issues. The first issue is the blow-up of the solutions of various initial-boundary value problems for some quasilinear hyperbolic equations. Secondly, the blow-up of the solution for the system of shallow water equations have been investigated.

Initial-boundary value problems written for hyperbolic quasilinear partial differential equations emerged in several applications to physics, mechanics and engineering sciences. Natures of the solutions to these equations have been investigated by several means.

The thesis consists of five chapters, including the introductory chapter, and there are four articles produced from our thesis and published in international journals.

In the second and third chapters of our thesis, the results of the blow-up of the Quasilinear Hyperbolic Equations under different boundary conditions are included.

In the second chapter, we have examined below two quasilinear hyperbolic initial-boundary value problems with the damping terms in the boundary conditions.

$$u_{tt} + \Delta^2 u = f(u) \qquad (t,x) \in [0,T) \times \Omega$$

$$u = 0, \qquad \Delta u + \alpha(x)\frac{\partial u_t}{\partial \nu} = 0, \ (t,x) \in [0,T) \times \Gamma$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in \Omega$$

and

$$u_{tt} + \Delta^2 u = f(\Delta u) \qquad (t,x) \in [0,T) \times \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + \beta(x)\Delta u_t = 0, \ (t,x) \in [0,T) \times \Gamma$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in \Omega$$

In the third chapter, we have examined below quasilinear hyperbolic initial-boundary value problem with the damping term in the boundary conditions. The problem is

examined for four different boundary conditions. These results are obtained using the Generalized Concavity Method given by V. K. Kalantarov and A. Ladyzhenskaya.

$$u_{tt} - \Delta u + \Delta^2 u = f(-\Delta u) \qquad (t,x) \in [0,T) \times (\Omega \cup \partial\Omega)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in \Omega$$

Problem with weak damping term on the boundary

$$\Delta u = 0, \qquad \frac{\partial u_t}{\partial \nu} - \Delta^2 u = 0, \ (t,x) \in [0,T) \times \partial\Omega$$

Problem with strong damping term on the boundary

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + \Delta u_t = 0 \ , \ (t,x) \in [0,T) \times \partial\Omega$$

Additional problem with strong damping term on the boundary

$$u = 0, \qquad \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + \Delta u_t = 0 \ , \ (t,x) \in [0,T) \times \partial\Omega$$

Additional problem with weak damping term on the boundary

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} + u_t = 0 \ , \ (t,x) \in [0,T) \times \partial\Omega$$

In the fourth chapter of our thesis, a model problem is studied. The Riser problem is chosen as the model problem. In this work, the nonexistence of the global solutions of below quasilinear hyperbolic initial-boundary value problem with dissipative term in the equation is considered in the one-dimensional space. This initial-boundary value problem models is the behaviour of a riser vibrating due to the effects of waves and current.

$$u_{tt} + \alpha u_t + 2\beta u_{xxxx} - 2[(ax+b)u_x]_x + \frac{\beta}{3}(u_x^3)_{xxx} -$$

$$[(ax+b)u_x^3]_x - \beta(u_{xx}^2 u_x)_x = f(u) \qquad (t,x) \in (0,T) \times [0,l]$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,l) = \not{b} f(-\Delta u), \quad t \in (0,T)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \ u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in [0,l]$$

For the blow-up proofs we have achieved by the use of the so-called the Generalized Concavity Method given by V. K. Kalantarov and A. Ladyzhenskaya in second and third chapter and the Concavity Method given by H. A. Levine in the fourth chapter.

For the Concavity Method, it is required to prov that the functional which is produced by the initial-boundary value problem satisfy below inequality and the hypothesis of Levine lemma.

$$\Psi''(t)\,\Psi(t) - (1+\gamma)[\Psi'(t)]^2 \geq 0$$

For the Concavity Method, it is required to prov that the functional which is produced by the initial-boundary value problem satisfy below inequality and the hypothesis of V. K. Kalantarov and A. Ladyzhenskaya.

$$\Psi''(t)\Psi(t) - (1+\gamma)[\Psi'(t)]^2 \geq -2C_1\Psi(t)\Psi'(t) - C_2\Psi^2(t)$$

We hereby prove that the global solution is not available.

In the second and third chapters of our thesis, we considered various examples of related initial-boundary value problems and examined the blow-up of solutions.

In the fifth chapter of the thesis, the blow-up conditions of the solutions of shallow water equations system which have attracted the attention of researchers in the last two decades are investigated. In this chapter we have studied the Blow-Up phenomena for a two-component system of equations including the generalized Camassa-Holm equation. Under certain natural initial conditions, local-in-space blow-up criteria are formulated. We have obtained the similar conditions presented by Brandolese, Cortez and Novruzov for nonlinear dispersive equations for the generalization of two-component systems initially formulated by Johnson, Constantin and Ivanov. A two-component generalized system of Camassa-Holm equations is examined based on the results we refer to above.

In this chapter we have considered the following two-component Cauchy problem for the generalized Camassa-Holm equation.

$$u_t - u_{xxt} + 3u_x u - u u_{xxx} - 2u_{xx}u_x + [g(u)]_x + \rho\rho_x = 0$$

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$\rho(x,0) = \rho_0(x)$$

where $u(x,t)$ denotes the horizontal velocity of the fluid and $\rho(x,t)$ is a parameter related to the free surface elevation from equilibrium (or scaler density). When $g(u) = ku$ and $\rho(x,t) \equiv 0$ the first equation becomes the Camassa-Holm equation, where k is a dispersive coefficient related to the critical shallow water speed.

We have established a “local-in-space” blow-up criteria for two-components initial-boundary value equations system. The presented results extend and specify the earlier blow-up criteria for such type of the system.

By our opinion the results obtained from the problems studied in this thesis are important both in theoretical and practical terms.

# 1. GİRİŞ

## 1.1 Tezin Anlamı, Önemi ve Literatür Özeti

Patlama konusu 1940'larda ve 1950'lerde Semenov'un "Zincir Reaksiyon Teorisi" ile ortaya çıkmıştır. 1960'larda özellikle S.Kaplan [1], H.Fujita [2], A. Friedman [3] ve R. T. Glassey [4] tarafından bu konuda daha kapsamlı çalışmalar yapılmıştır. Lineer olmayan evrim denklemlerinin çözümlerinin davranışı ve özellikle patlamasının öğrenilmesi uygulama ve teorik açıdan önem arzetmektedir.

Bu bağlamda evrim denklemlerinin dalga çözümleri birçok araştırmacının yoğun ilgisine neden olmuştur. Tezimizde iki konu üzerinde yoğunlaşacağız. Birinci konu quasilinear hiperbolik denklemler için çeşitli problemlerin çözümlerinin patlaması olayıdır. İkinci konu olarak sığ su denklemler sistemi için çözümün patlaması ele alınmıştır.

Sınır koşullarında sönüm terimi bulunmayan, sönüm terimi içeren hiperbolik denklemlerin global çözümlerinin yokluğu üzerindeki çalışmalar, Lions [5] tarafından verilmiştir. Bu konuda Glassey [4] önemli sonuçlar elde etmiştir. Levine [6]'de

$$Pu_{tt} + A_1 u_t + Au = f(u)$$

şeklinde sönüm terimi denklemin içinde bulunan bir başlangıç-sınır değer problemi sınıfı için yokluk ve kararsızlık üzerine sonuçlar elde etmiştir. Burada $P,\ A_1\ ve\ A$ Hilbert uzayının yoğun bir alt uzayında tanımlanmış pozitif doğrusal operatörler ve $f(u)$ potansiyeli $F(u)$ olan bir gradyant operatörüdür. Aynı zamanda $\langle u, f(u)\rangle \geq F(u)$ eşitsizliğinin $f(u)$ nun tanım kümesindeki her $u$ için geçerli olacağı kabul edilmiştir.

Levine [7]'da ise sönüm terimi sınırda bulunan,

$$Pu_{tt} + A(t)u = F(u)$$

şeklinde diferansiyel operatör denklemleri için yazılmış geniş bir başlangıç-sınır değer problemi sınıfı için benzer yokluk ve kararsızlık teoremleri ispatlamak için, "İçbükeylik Yöntemi" denilen güçlü bir yöntem geliştirilmiştir. Burada $u,\ t$' nin

Hilbert uzayı değerli bir fonksiyonu, $A(t)$ her $t \geq 0$ için tanımlı, negatif olmayan bir lineer simetrik operatör, $P$ bir kesin pozitif simetrik operatör ve $F$ verilmiş bir doğrusal olmayan potansiyeldir.

Levine global çözümün yokluğunu öğrenerek aşağıdaki sonucu elde etti. Eğer başlangıç enerjisi negatif ise genel çözüm yoktur. Bu sonuç [6] de $A_1 = 0$ için ispatlanan sonuçla aynıdır. Bu çalışmalar bilindiği kadarıyla doğrusal olmayan sönümlü dalga denklemleri için ilk genel çözümün yokluğu teoremiydi.

J. L. Lions [5], Jörgens [8], Keller [9] ve Settinger [10], Glassey [4], Ladyzhenskaya ve Kalantarov [11] bir, iki ve üç boyutlu klasik doğrusal olmayan bazı dalga denklemi için yazılmış, başlangıç ya da başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümlerinin, keyfi başlangıç verisi ve keyfi nonlineerlikler için zamana göre kararlı olmayacaklarını göstermişlerdir.

Ayrıca, bu çalışmalarda $L$ Laplace operatörü olmak üzere, $u_{tt} + Lu = f(u)$ tipli denklemler için yazılmış başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümlerinin patlaması için yeter koşullar verilmiştir.

Knops, Levine ve Payne [12], Levine [6,13], Levine ve Payne [14], Straughan [15], V. Bayrak ve M. Can [16] çalışmalarında Levine'in içbükeylik yöntemini uygulamışlardır. V. K. Kalantarov ve A. Ladyzhenskaya tarafından [11] de verilen "genelleştirilmiş içbükeylik yöntemi", yeni bir arastirma dizisi başlatmış oldu. V. K. Kalantarov [17,18], F. G. Maksudov ve F. A. Aliyev [19], S. K. Turitsyn [20], H. A. Levine ve J. Serrin [21], M. Kirane, S. Kouachi ve N. Tartar [22], M. Kirane ve N. Tartar [23-25], M. Can, S. R. Park ve F. A. Aliev [26], V. Bayrak ve M. Can [27-28] çalışmalarında bu genelleştirilmiş içbükeylik yöntemini uygulayarak esas kısmı lineer olmayan operatör diferansiyel denklemleri, sönüm terimli ikinci basamak operatör diferansiyel denklemleri, sınır koşulları doğrusal olmayan, kendileri doğrusal, parabolik ve hiperbolik denklemler ve sürekli ortam mekaniğinden gelme daha birçok denklem ve denklem sistemi için global yokluk sonuçları elde edilmiştir.

Bu tezin ikinci ve üçüncü bölümlerinde V. K. Kalantarov ve A. Ladyzhenskaya tarafından [11]'de verilen "genelleştirilmiş içbükeylik yöntemi" nin bazı uygulamaları yer almaktadır. İncelenen bütün problemlerde, çözümlerin davranışları incelenecek hiperbolik denklemlerle yazılmış başlangıç-sınır değer problemlerinde, sınır şartlarında sönüm türü terimler bulunmaktadır. Sınır şartlarında sönüm terimleri bulunması, bu tezde incelenen problemleri, daha önce J. L. Lions [5], J. Ball [29], Georgiev ve Todorova [30], Glassey [4], H. A. Levine [6,13-14,21], V. K. Kalantarov [17,18], F. G. Maksudov ve F. A. Aliev [19] ve diğer araştırmacılar tarafından ele alınan problemlerden ayırmaktadır.

Araştırmacıların yoğunlaştığı diğer alanlarından biri de sığ su denklemleri için patlama problemleridir.

1990'lı yılların başlarında R. Camassa ve D. Holm. sığ sularda oluşan tekil dalgaların hareketleri üzerine yeni bir model önermişlerdir. Camassa-Holm denklemi olarak bilinen bu denklem suyun sığ yerlerinde dalga hareketi için alternatif bir modeldir. Denklemin çözüm fonksiyonu, dibi düz bir yapıya sahip olan zemin üzerindeki suyun t zamanında ve x konumundaki yüksekliği, olarak tanımlanmıştır [31-32].

Camassa-Holm Denklemin tekil dalgaları zirve noktasına sahiptir ve tekil dalga çözümleri düzgün solitonlar olup bu çözümler kararlıdır [32], [33], [34]. Camassa-Holm Denklemi bi-hamilton yapıya sahiptir ve tamamen integrallenebilirdir [32], [35]. Camassa-Holm Denkleminin Hamilton yapısı ile ilgili olan en geniş kapsamlı çalışma A. Constantin tarafından gerçekleştirilmiştir [36].

A. Constantin ve J. Escher başlangıç koşulunun geniş bir sınıfı için Camassa-Holm denkleminin Cauchy problemi için global çözümünün varlığını ve çözümün patlama olayını araştırarak yeni sonuçlar elde etmişlerdir. Ayrıca yaptıkları çalışmalarda Camassa-Holm denkleminin zayıf çözümünü öğrenmişlerdir. [37], [38], [39].

A. Constantin, J. Escher ve L. Molinet Cauchy probleminin global çözümün varlığı ve çözümün sonlu bir zamanda patlaması üzerine önemli araştırmalar yapmışlardır. Çalışmalarının sonucunda herhangi bir $T > 0$ pozitif reel sayısı ile birlikte verilen $u_0$ başlangıç koşulu için $u_0 \in H^1(R)$ olmak üzere $y_0(x) = u_0(x) - u_{0_{xx}}(x)$ ifadesinin pozitif olması durumunda $u \in$ C ([0, T], $H^1(R)$) olacak şekilde global zayıf çözümün varlığı gösterilmiştir. Bununla birlikte, $u_0(x) \in H^3(R)$ ve $u_0(x)$ tek fonksiyon olmak üzere eğer $u_{0_x}(0) < 0$ şartı sağlanıyorsa Cauchy problemi için $u_0$ başlangıç koşulu ile incelenen çözümün sonlu bir zamanda patladığı tespit edilmiştir. [37], [40].

2000 yılında, A. A. Himonas ve G. Misiolek Camassa-Holm denkleminin bir modifikasyonu olan periyodik Cauchy probleminin yerel çözümün varlığını ve tekliğini ayrıca aynı problemin global çözümünün varlığını da ispatlamışlardır [41].

Y. A. Li, P. J. Olver ve G. Misiolek $s > \frac{3}{2}$ olmak üzere $H^s$ Sobolev uzayında sığ su dalgalarına bir model olarak ortaya çıkan nonlineer dispersiv dalga denkleminde yerel çözümün varlığını ve tekliğini ispatlamışlar ve problemin kuvvetli çözümlerinin sonlu bir zamanda patlamasına neden olan başlangıç koşulları üzerine çalışmalar yapmışlardır [42], [43].

Ayrıca L. Tian, G. Gui, Y. Liu ve Y. Zhou, Camassa-Holm denkleminin bir modifikasyonu olan Dullin, Gottwald ve Holm (DGH) Denklemi üzerine çalışmalar yaparak elde ettikleri sonuçları [44], [45] çalışmalarında yayınlamışlardır.

E. Novruzov, [46-47] çalışmalarında zayıf disipatif Camassa-Holm denklemi ile zayıf disipatif Dullin–Gottwald–Holm (DGH) denklemi için Cauchy probleminin pozitif kuvvetli çözümlerinin sonlu bir zamanda patlaması için yeterli koşullar elde etmiştir.

A. A. Himonas ve C. Holliman, (k+1). mertebeden lineer olmayan genelleştirilmiş Camassa-Holm Denkleminin başlangıç değer problemi üzerinde çalışmalar yaparak $s > \frac{3}{2}$ için $H^s$ Sobolev uzayında, problemin yerel çözümün varlığını göstermişlerdir [48].

E. Novruzov ve A. Hagverdiyev [49], çalışmalarında keyfi dispersiyon katsayılı ve kompakt destekli başlangıç değere sahip olan disipatif Camassa-Holm denkleminin global çözümünün varlığını garanti edecek ve çözümün sonlu bir zamanda patlamasını sağlayacak basit koşullar elde etmişlerdir.

Sonraki yıllarda A.A. Himonas ve G. Misiolek, Y.A.Li, P.J. Olver, Z. Yin, Y. Zhou, L. Brandolese, H. Holden, E. Novruzov ve diğerleri tarafından farklı sığ su Denklemleri için yerel ve yerel olmayan patlama koşulları altında çözümlerin patladığı gösterilmişti.

Camassa-Holm denklemi için iki bileşenli model ilk olarak [50] da oluşturuldu ve Oluşturulan bu model sığ su teorisinde önemli bir modeldir. [51, 52, 53]. [51] ve [52] daki makalelerdeki sıvı modelleri vorticity içermektedirler. [54] de, pertürbatif simetri yaklaşımı kullanılarak integrallenebilir iki bileşenli denklem sistemlerinin sınıflandırılması yapılmıştır [51] 'te yazarlar düzgün çözümlerde tekilliklerin ortaya çıkmasının tek yolunun dalga kırılması ile olduğunu ve dolayısıyla $u$ nun sınırlı kaldığını, ancak $u_x$ ın zaman içinde sınırlı kalmadığını göstermektedirler. Uygun tanımlanmış başlangıç verileri için dalga kırılma olayı gerçekleşir. Dahası, [51] 'de uygun azalma hızına sahip başlangıç koşulları için (5.1)-(5.4)' in küçük ve büyük amplitütlere sahip gezen dalga çözümlerinin global varlığı kanıtlanmıştır. Bu araştırmanın ilginç sonuçlarından biri soliton dalgaların düzgün olmasıdır. Böylece iki bileşenli Camassa-Holm genelleşmesi için zirve çözümlerinin mevcut olmadığı anlaşılır. [55] de başlangıç verileri (u$(u_0, \rho_0 - 1) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^{s-1}(\mathbb{R})$ ve $s \geq 2$ olmak üzere iki bileşenli Camassa-Holm sistemi için yerel iyi konumluluk [56] da verilen Kato Teoremi uygulanarak araştırılmış ve sistemin kuvvetli çözümler için bazı kesin patlama senaryoları elde edilmiştir. Besov uzaylarında iyi konumluluk Gui ve Liu tarafından incelenmiştir [57], ve aynı zamanda yazarlar, sonlu zamanda patlamanın birinci bileşenin eğimi veya ikinci bileşenin eğimi ile belirlendiğini göstermiştir (ayrıca bakınız [51, 55]). Patlama kriteri [58] 'de daha belirgin hale getirilmiştir, burada yazarlar sonlu zamanda dalga kırılmasının sadece $u$ nun eğimine bağlı olduğunu göstermişlerdir. Modifiye edilmiş iki bileşenli Camassa-Holm sisteminin özellikleri de birçok çalışmada incelenmiştir, örneğin; [58-65]. Camassa-Holm denkleminin hidrodinamik teorisi açısından olan önemi ile ilgili detaylar [66] 'da Constantin ve Lannes tarafından matematiksel olarak titizlikle tanımlanmıştır. (Daha önce Johnson [67] Camassa-Holm denklemini asimtotik analiz kullanarak türetmiştir); ek olarak, yazarlar, ele alınan modeller için dalga kırılma olayını incelemişlerdir. Denklem bi-Hamiltonian bir yapıya sahiptir [68] ve tamamen integrallenebilirdir [32,69-72]. $k = 0$ olduğunda, Camassa-Holm denklemi "zirve" / "peakon" olarak adlandırılan süreksiz birinci türevlere sahip tekil dalgalar üretir ([31]). Bressan ve Constantin [73] de dalga kırıldıktan sonra, Camassa-Holm denkleminin çözümü global conservative veya global dissipative çözüm şeklinde genişletilebilir ve bu çözümün genişlemesi tektir. Düzgün, kompakt değerli başlangıç değerlere sahip çözümlerin tekilliklerinin sadece dalga kırılması şeklinde oluşacağı dalga teorisi açısından özellikle ilgi çekicidir [74]. [38, 42, 75] 'de dalga kırılımı başlangıç verilerinin geniş bir sınıfı için belirlenmiştir. $k = 0$ durumunda Camassa-Holm denklemi için (ve bunun iki bileşenli genişlemesi için) sonsuz yayılma hızı özelliği incelenmiştir [76- 80]. ($k \neq 0$ için ayrıca [49]' de inceleme yapılmıştır).

Ayrıca, sıfırdan farklı dispersion katsayılı Camassa-Holm denklemi için geniş problem yelpazesi [42, 47, 49, 81] 'da incelenmiştir. Özellikle, ilgili çözümün global varlığını veya sonlu bir zamanda patladığını garanti eden başlangıç verileri üzerine belirli koşullar elde edilmiştir. Bu denklemin özel bir hali Dai tarafından tanıtılan hiperelastik çubuk dalga denklemi olur [82, 83]. (5.1) denklemi için Cauchy probleminin yerel olarak iyi konumlu olduğu dikkate alınmıştır [84] (ayrıca bkz. [85, 86, 87, 88]). Bu tür denklemler için patlama kriterlerinin sistematik şekilde bazı global nicelikleri, global koşulları veya potansiyel için anti simetri varsayımları ve işaret koşulları dikkat çekmektedir. Bu bağlamda daha önce bilinen patlama kriterlerinin aksine Brandolese ve Cortez çalışmasında $u_0'(x_0)$ ve $u_0(x_0)$ fonksiyonlarının tek bir $x_0$ noktasında değerlerini içeren uzaya göre yerel koşulunun önerilmesi ilginçtir. [89] de yazar, [90] da elde edilen patlama koşulunu kesinleştirmiştir. Yukarıda belirtilen [88- 91] makalelerin motivasyonu ile, (5.1) - (5.4) te verilen iki bileşenli denklem sistemi için "uzaya göre yerel" bir patlama kriteri oluşturacağız. Bölüm 5.2'de, elde edilecek yeni patlama sonucunun ispatı için çok önemli olan bazı yararlı bilgiler yer alacak. Bu bilgilerden yararlanarak elde edilecek yeni patlama kriterlerinin ispatı Bölüm 5.3'te yapılacak.

## 1.2 Ön Bilgiler.

Bu kısımda, gelecek bölümlerde kullanılacak yararli bazı ön bilgiler ve eşitsizlikler yer alacaktır.

Tanım 1.1: ($C^m(\Omega)$ uzayı) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de bir bölge ve $m \geq 0$ ve tamsayı olsun. $\Omega$ üzerinde tanımlanmış sürekli, sınırlı ve $|\alpha| \leq m$ olmak üzere $(D^\alpha \phi)$ kısmi türevleri sürekli ve sınırlı olan tüm $\phi$ fonksiyonlarını içeren vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. Bu vektör uzayı üzerinde aşağıdaki biçimde bir norm tanımlanmıştır [92].

$$\forall \phi \in C^m(\Omega) \text{ için } \| \phi \|_{C^m(\Omega)} = \sum_{n=0}^{m} \sup_{x\in\Omega} \left|\phi^{(n)}(x)\right| \tag{1.1}$$

Tanım 1.2: ($C^\infty(\Omega)$ uzayı) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge olsun. $\Omega$ üzerinde tanımlı, sürekli ve sonsuz (her mertebeden) sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlardan oluşan vektör uzayı $C^\infty(\Omega)$ uzayı ile gösteilir. Yani $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$ gösterimi sağlanır [92].

Tanım 1.3: (($L^p(\Omega)$ uzayı ) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de bir bölge , $p > 0$ ve $p \in \mathbb{R}$ için,

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \tag{1.2}$$

koşulunu sağlayan $u: \Omega \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonlarından oluşan vektör uzayı $L^p(\Omega)$ ile gösterilir. $L^p(\Omega)$ vektör uzayı üzerinde $p \geq 1$ için aşağıdaki biçimde bir norm tanımlanmıştır [92]

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p} \tag{1.3}$$

Tanım 1.4: (Esaslı Supremum) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge ve $u: \Omega \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\Omega$ üzerinde hemen hemen her yerde $|u(x)| \leq K$ eşitsizliğini sağlayan bir $K > 0$ sayısı bulunabiliyorsa $u$ fonksiyonuna $\Omega$ üzerinde esas sınırlı (essentially bounded) fonksiyon denir. Böyle $K$'ların infimumuna da $u$ fonksiyonunun esaslı supremumu denir ve

$$\underset{x\in\Omega}{esssup}|u(x)| = inf\{K: |u(x)| \leq K, h.h.y.\} \tag{1.4}$$

ile gösterilir [92].

Tanım 1.5: ($L^\infty(\Omega)$ uzayı) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge olmak üzere $\Omega$ üzerinde ölçülebilir ve hemen hemen her yerde sınırlı olan fonksiyonlardan oluşan uzaya $L^\infty(\Omega)$ uzayı denir. Bu vektör uzayı üzerinde aşağıdaki biçimde bir norm tanımlanmıştır [92].

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \underset{x\in\Omega}{esssup}|u(x)| \tag{1.5}$$

Teorem 1.1: $p \in [1, \infty]$için $L^p(\Omega)$ Banach uzayıdır [92].

Tanım 1.6: ( Zayıf Türev ) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge, $u, v \in L^1{}_{loc}(\Omega)$ ve α multi indeks olsun. Eğer her $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega uD^\alpha\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \phi v dx \tag{1.6}$$

eşitliği sağlanıyorsa v fonksiyonuna $u$ fonksiyonunun $\Omega$ bölgesinde $\alpha$. mertebeden zayıf türevi denir ve $D^\alpha u = v$ ile gösterilir [93].

Tanım 1.7: ( Sobolev Uzayı ) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge, $1 \leq p \leq \infty$ ve $k$ negatif olmayan bir tam sayı olsun. $|\alpha| \leq k$ olmak üzere her $\alpha$ multiindeksi için $D^\alpha u$ zayıf türevi var ve $L^p(\Omega)$ uzayına ait olan $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonlarının oluşturduğu uzaya Sobolev uzayı denir ve $W^{k,p}(\Omega)$ ile gösterilir. Yani bu uzay

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^1_{loc}(\Omega) |\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\quad 0 \leq |\alpha| \leq k\} \tag{1.7}$$

şeklindedir. $W^{k,p}(\Omega)$ uzayı normlu bir lineer uzaydır ve bu uzay üzerinde tanımlanmış norm $1 \le p < \infty$ için;

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0\le|\alpha|\le k} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^{p} dx\right)^{1/p} =$$

$$\left(\sum_{0\le|\alpha|\le k} \|D^{\alpha}u\|_{L^{p}(\Omega)}^{p}\right)^{1/p} \tag{1.8}$$

ve $p = \infty$ için;

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{0\le|\alpha|\le k} \underset{x\in\Omega}{esssup}|D^{\alpha}u| = \sum_{0\le|\alpha|\le k} \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)} \tag{1.9}$$

şeklindedir [93].

Teorem 1.2: $1 \le p \le \infty$ ve $k = 1,2,\ldots$ olmak üzere $W^{k,p}(\Omega)$ uzayı üzerindeki $\|.\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ normuna göre Banach uzayıdır [93].

Teorem 1.3: $W^{k,2}(\Omega)$ uzayı bir Hilbert uzayıdır ve $H^{k}(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzay üzerindeki iç çarpım $u, v \in W^{k,2}(\Omega)$ olmak üzere

$$\langle u, v\rangle_{W^{k,2}(\Omega)} = \sum_{0\le|\alpha|\le k} \int_{\Omega} D^{\alpha}u(x)D^{\alpha}v(x)dx \tag{1.10}$$

şeklinde tanımlanmıştır [93].

Tanım 1.8: $X, Y$ normlu lineer uzay olsunlar. Bu durumda

*i)* $X \subset Y$
*ii)* $\forall f \in X$ için $\|f\|_{Y} \le C\|f\|_{X}$ olacak şekilde $C > 0$ vardır.

koşulları sağlanırsa *X* uzayı *Y* uzayına sürekli gömülür denir ve $X \rightarrow Y$ ile işaret edilir. [92].

Teorem 1.4: $\Omega \subset \mathbb{R}^{n}$ sınırlı bir bölge olsun. $1 \le p \le q \le \infty$ için $L^{q}(\Omega) \subset L^{p}(\Omega)$ doğrudur. Ayrıca $u \in L^{q}(\Omega)$ için

$$|\Omega|^{-1/p}\|u\|_{L^{p}(\Omega)} \le |\Omega|^{-1/q}\|u\|_{L^{q}(\Omega)} \tag{1.11}$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla

$$L^{q}(\Omega) \rightarrow L^{p}(\Omega) \tag{1.12}$$

sürekli gömülmesi geçerlidir [92].

Teorem 1.5: $m \geq 1$ tamsayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere aşağıdaki sürekli gömülmeler geçerlidir.

*i)* Eğer $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ ise $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ için $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$,

*ii)* Eğer $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ ise $\forall q \in [p, \infty)$ için $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$,

*iii)* Eğer $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ ise $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

*iii*) durumunda

$$\begin{cases} \left[\left|m - \frac{n}{p}\right|\right], & \frac{n}{p} \notin \mathbb{Z} \\ m - \frac{n}{p} - 1\text{'den küçük pozitif tamsayı}, & \frac{n}{p} \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{1.13}$$

ve

$$k = \left[\left|m - \frac{n}{p}\right|\right], \qquad \theta = \left(m - \frac{n}{p}\right) - k \tag{1.14}$$

olmak üzere

$$\gamma = \begin{cases} k, & \frac{n}{p} \notin \mathbb{Z} \\ m - \frac{n}{p} - 1, & \frac{n}{p} \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{1.15}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall|\alpha| \leq \gamma \tag{1.16}$$

ve ayrıca

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C|x-y|^\theta \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \quad h.h.y., \ |\alpha| = \gamma \tag{1.17}$$

olur. Dolayısıyla

$$\|u\|_{C^\gamma(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.18}$$

sağlanır [94].

Tanım 1.9: (Konvolüsyon) $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \tag{1.19}$$

şeklinde tanımlanmış olan $h(x)$ fonksiyonuna $f$ ve $g$ fonksiyonunun konvolüsyonu denir ve

$$h = f * g \tag{1.20}$$

ile gösterilir [94].

Teorem 1.6: $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olsun. $f$ ve $g$ fonksiyonunun konvolüsyonu değişme özelliğine sahiptir [119]:

$$f * g = g * f \tag{1.21}$$

Tanım 1.10:( İyi Tanımlılık ) Bir kısmi diferansiyel denklem için verilen bir problemin tek bir çözümü varsa ve bu çözüm başlangıç değerlerine sürekli bağlıysa verilen probleme iyi tanımlıdır denir [93].

Tanım 1.11: (Çözümün Patlaması) Bir başlangıç sınır değer probleminde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık bölge , $T > 0$ olmak üzere $\Omega \times [0, T)$'de çözümün var olduğu $T$'lerin supremumuna çözümün varlık aralığı denir ve $T^*$ ile gösterilir. Eğer $T^* = +\infty$ ise globa çözüm vardır, $T^* < +\infty$ ise çözüm sonlu bir zamanda patlar denir.

**İçbükeylik Yöntemi:**

Cauchy probleminin yerel çözümü cinsinden yazılmış, $\Psi(0) > 0, \Psi'(0) > 0$ özelliğine sahip bir $\Psi(t)$ fonksiyonelini bulmaya ve onun bir diferansiyel eşitsizliği sağladığını göstermeye dayanır ve aşağıda bir lemma olarak verilmektedir [7,11-12].

**Lemma 1.1**

$\Psi(t)$ fonksiyonu, $\mathrm{t} > 0$ olduğunda bir $\gamma > 0$ sayısı için;

$$\Psi''(t)\,\Psi(t) - (1+\gamma)[\Psi'(t)]^2 \geq 0 \tag{1.22}$$

eşitsizliğini sağlayan, iki kere diferansiyellenebilen, pozitif bir fonksiyon olsun.

$$\Psi(0) > 0, \;\; \Psi'(0) > 0 \tag{1.23}$$

ise,

$$\mathrm{t}_1 \leq \frac{\Psi(0)}{\gamma\Psi'(0)} \tag{1.24}$$

Olmak üzere,

$$t \to t_1 \quad \text{için} \quad \Psi(t) \to \infty \tag{1.25}$$

Bu lemma'yı kullanarak global yokluk teoremi ispatlayan araştırmacılar, bu lemma'nın uygulanamayacağı birçok problemle de karşılaştılar. Levine'in [6]'de de bahsettiği gibi yukarıdaki lemma'nın uygulanabilmesi için $A$ operatörünün simetrikliği ve negatif olmayışı çok önemliydi. V. K. Kalantarov ve A. Ladyzhenskaya [11] tarafından verilen ve "Genelleştirilmiş İçbükeylik Yöntemi" denilen bir genişletme, bu zorluğun aşılmasına yardımcı oldu. Bu genişletme, Levine'in lemmasını da bir özel hal olarak içeriyordu:

**Lemma 1.2**

Bir $\Psi(t) \in C^2,\ \Psi(t) \geq 0$ fonksiyonu $\gamma > 0,\ \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2 \geq 0$ reel sayıları için;

$$\Psi''(t)\Psi(t) - (1+\gamma)[\Psi'(t)]^2 \geq -2\mathrm{C}_1\Psi(t)\Psi'(t) - \mathrm{C}_2\Psi^2(\mathrm{t}) \tag{1.26}$$

eşitsizliğini sağlarsa

**a)**

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= -C_1 + \sqrt{C_1^2 + \gamma C_2} \\ \gamma_2 &= -C_1 - \sqrt{C_1^2 + \gamma C_2} \end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

olmak üzere

$$\Psi(0) > 0,\ \ \Psi'(0) > \gamma_2\, \gamma^{-1}\Psi(0),\ \ \ C_1 + C_2 > 0 \tag{1.28}$$

olması halinde $t_2$ sayısı;

$$\mathrm{t}_2 = \frac{1}{2\sqrt{C_1^2+\gamma C_2}} \ln \frac{\gamma_1\Psi(0)+\gamma\Psi'(0)}{\gamma_2\Psi(0)+\gamma\Psi'(0)} \tag{1.29}$$

formülünden hesaplanmak üzere öyle bir $\mathrm{t}_1 < \mathrm{t}_2$ pozitif reel sayısı vardır ki,

$$t \ \rightarrow t_1 \text{ için } \Psi(t) \ \rightarrow \ \infty \tag{1.30}$$

Olur.

**b)**

$\Psi(0) > 0,\ \ \Psi'(0) > 0$ ve $C_1 = C_2 = 0$ olması halinde $t_2$ sayısı;

$$t_2 = \frac{\Psi(0)}{\gamma\Psi'(0)} \tag{1.31}$$

formülünden hesaplanmak üzere öyle bir $t_1 < t_2$ pozitif reel sayısı vardır ki,

$$t \to t_1 \text{ için } \Psi(t) \to \infty \tag{1.32}$$

Olur.

**Eşitsizlikler:**

Cauchy Eşitsizliği [96]:

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \tag{1.33}$$

Young Eşitsizliği [95]:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad a, b > 0, \ a, b \in \mathbb{R} \text{ ve}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ 1 < p, \quad q < \infty \tag{1.34}$$

Hölder Eşitsizliği [95]:

$$\int_{\mathrm{U}} |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ 1 \leq p, \ q \leq \infty \\ u \in L^p(U), \ v \in L^q(U) \end{cases} \tag{1.35}$$

# 2. DOĞRUSAL OLMAYAN PETROVSKY DENKLEMİ İÇİN BAZI BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN GLOBAL ÇÖZÜMÜN YOKLUĞUNUN İNCELENMESİ

## 2.1 Sınırda Zayıf Sönüm Terimi İçeren Başlangıç-Sınır Değer Problemi

Bu bölümde aşağıda (2.1)-(2.3) ile verilen Problemin çözümünün patlaması incelenmiştir.

$$u_{tt} + \Delta^2 u = f(u) \qquad (t,x) \in [0,T) \times \Omega \tag{2.1}$$

$$u = 0, \quad \Delta u + \alpha(x)\frac{\partial u_t}{\partial \nu} = 0, \qquad (t,x) \in [0,T) \times \Gamma \tag{2.2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{2.3}$$

burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve yeterince düzgün $\Gamma$ sınırına sahip bir bölge, $T > 0$ herhangi bir reel sayı $\nu$ dış doğrultudaki normal ve $\alpha(x) \geq 0$, $\Omega$ bölgesinin sınırında verilmiş düzgün bir fonksiyondur.

$f(u)$ Fonksiyonu ilkeli $F(u) = \int_0^u f(\xi)d\xi$ olan ve aşağıdaki eşitsizliği $\forall\ u \in \mathbb{R}^n$ fonksiyonu ve $\gamma > 0$, $C_0 > 0$ reel sayıları için sağlayan bir fonksiyon olsun.

$$f(u) \cdot u \geq 2(2\gamma + 1)F(u) - C_0 \tag{2.4}$$

Bu verilerle (2.1)-(2.3) Başlangıç-Sınır Değer Probleminin genel çözümünün yokluğu hakkındaki aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

**Teorem 2.1:**

$u_0(x)$ ve $u_1(x)$ aşağıdaki eşitsizlikleri sağlasınlar.

$$\int_\Omega {u_0}^2 dx > 0 \tag{2.5}$$

$$(2\gamma+1)\left(2\int_\Omega F(u_0)dx - \int_\Omega {u_1}^2 dx - \int_\Omega (\Delta u_0)^2 dx\right) - C_0|\Omega| \geq 0 \tag{2.6}$$

$$2\int_\Omega u_0 u_1 dx > 2\gamma^{-1}(1+\gamma)\left[\int_\Omega {u_0}^2 dx + \int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx\right]$$

$$-\int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx \tag{2.7}$$

$$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = -2(1+\gamma) \tag{2.8}$$

$$A = \int_\Omega {u_0}^2 dx + \int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx \tag{2.9}$$

$$B = 2\gamma \int_\Omega u_0 u_1 dx + \gamma \int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx \tag{2.10}$$

ve

$$t_2 = \frac{1}{2(1+\gamma)}\, ln \frac{B}{\gamma_2 A + B} \tag{2.11}$$

Olmak üzere $\exists\ t_1 \leq t_2$ reel sayısı vardır ki,

$$\lim_{t \to t_1}\left(\int_\Omega u^2 dx + \int_0^t \int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dx\, dt\right) \to +\infty \tag{2.12}$$

**İspat:**

Teoremi ispatlamak için aşağıdaki fonksiyonun Ladyzhenskaya-Kalantarov Lemmasındaki hipotezleri sağladığını göstermek yeterli olacaktır.

$$\Psi(t) = \int_\Omega u^2 dx + \int_0^t \int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dx\, dt + \int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx \tag{2.13}$$

Bu amaca ulaşabilmek için aşağıdaki eşitlikler kullanılacak.

$$2\int_0^t \int_\Gamma \alpha(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u_t}{\partial \nu} dx\, dt =$$

$$\int_0^t \int_\Gamma \alpha(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dx\, dt =$$

$$= \int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dx - \int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx \tag{2.14}$$

Bu eşitliklerden aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dx = 2\int_0^t \int_\Gamma \alpha(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u_t}{\partial \nu} dx\, dt + \int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx \tag{2.15}$$

Yukarıda elde edilen denklemden yararlanarak $\Psi'(t)$ ve $\Psi''(t)$ türevleri hesaplanacak olursa;

$$\Psi'(t) =$$

$$2\int_\Omega u u_t dx + 2\int_0^t \int_\Gamma \alpha(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u_t}{\partial \nu} dx\, dt + \int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx \tag{2.16}$$

$\Psi'(t)$ türevi elde edilir ve bundan,

$$\Psi''(t) = 2\int_\Omega (u_t)^2 dx + 2\int_\Omega u u_{tt} dx + 2\int_\Gamma \alpha(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u_t}{\partial \nu} dx \tag{2.17}$$

(2.1) denklemi kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\int_\Omega u_{tt} u dx = \int_\Omega f(u) u dx - \int_\Omega (\Delta^2 u) u dx \tag{2.18}$$

$f(u)$ fonksiyonunun sağladığı (2.4) eşitsizliği ve (2.2) de verilen sınır şartı kullanılarak $\Psi''(t)$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\Psi''(t) = 2\int_\Omega (u_t)^2 dx + 2\int_\Omega f(u) u dx - 2\int_\Omega (\Delta^2 u) u dx$$

$$+2\int_\Gamma \alpha(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u_t}{\partial \nu} dx$$

$$= 2\int_\Omega (u_t)^2 dx + 2\int_\Omega f(u) u dx - 2\int_\Omega (\Delta u)^2 dx$$

$$\geq 2\int_{\Omega}(u_t)^2dx + 4(2\gamma+1)\int_{\Omega}F(u)dx - 2C_0|\Omega| - 2\int_{\Omega}(\Delta u)^2dx \tag{2.19}$$

Denklemi elde edilir. $\Psi''(t)$ için bir alt sınır elde edebilmek amacıyla karakteri hakkında bir şey söylenemeyen $\int_{\Omega}(\Delta^2 u)u\,dx$ integralinin yerine davranışı daha belirli olan $\int_{\Omega}(\Delta u)^2dx$ integrali alınmıştır. Bu işlem aşağıda verilecek olan Green-Gauss özdeşliğinden yararlanılarak yapılmıştır.

$$\int_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\Gamma}\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)dx$$

(2.1) denkleminin her iki tarafı $u_t$ ile çarpılıp $\Omega$ üzerinde integre edilerek aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}(u_t)^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}(\Delta u)^2dx + \int_{\Gamma}\alpha(x)\left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2dx - \frac{d}{dt}\int_{\Omega}F(u)dx = 0 \tag{2.20}$$

Enerji ifadesi olarak aşağıdaki denklemi tanımlayalım.

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}(u_t)^2dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\Delta u)^2dx - \int_{\Omega}F(u)dx \tag{2.21}$$

Eğer (2.20) denkleminin her iki tarafı $[0,t]$ aralığında $t$ ye göre integre edilir ve $E(t)$ nin tanımı kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}(u_t)^2dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\Delta u)^2dx - \int_{\Omega}F(u)dx = E(0) - \int_0^t\int_{\Gamma}\alpha(x)\left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2dx\,dt \tag{2.22}$$

Şimdi $E(t)$ fonksiyonu kullanılarak $\Psi''(t)$ için bir alt sınır elde edilebilir.

$$\Psi''(t) \geq 4(2\gamma+1)\left[\int_0^t\int_{\Gamma}\alpha(x)\left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2dx\,dt - E(0)\right]$$

$$+4\gamma\int_{\Omega}(\Delta u)^2dx + 4(\gamma+1)\int_{\Omega}(u_t)^2dx - 2C_0|\Omega| =$$

$$4\gamma\int_{\Omega}(\Delta u)^2dx+4(\gamma+1)\left[\int_0^t\int_{\Gamma}\alpha(x)\left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2dx\,dt+\int_{\Omega}(u_t)^2dx\right]$$

$$+4\gamma\int_0^t\int_{\Gamma}\alpha(x)\left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2dx\,dt-4(2\gamma+1)E(0)-2C_0|\Omega| \tag{2.23}$$

yukarıdaki eşitsizlikte pozitif olan bazı sağ taraf terimleri eşitsizlikten çıkarılarak

$$\Psi''(t)\geq 4(\gamma+1)\left[\int_0^t\int_{\Gamma}\alpha(x)\left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2dx\,dt+\int_{\Omega}(u_t)^2dx\right]$$

$$-4(2\gamma+1)E(0)-2C_0|\Omega| \tag{2.24}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer (2.6) de verilen teoremin şartı ve $E(t)$ fonksiyonu göz önüne alınarak yukarıdaki eşitsizliğe bakılırsa,

$$\Psi''(t)\geq 4(\gamma+1)\left[\int_0^t\int_{\Gamma}\alpha(x)\left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2dx\,dt+\int_{\Omega}(u_t)^2dx\right] \tag{2.25}$$

olduğu görülür. (2.25) eşitsizliğinden $\Psi''(t)\geq 0,\ \forall\ t\geq 0$ olacağı aşikardır. (2.7) eşitsizliğinden,

$$\Psi'(0)=2\int_{\Omega}u_0u_1dx+\int_{\Gamma}\alpha(x)\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2dx\geq 0$$

elde edilir. Yazılan son iki eşitsizlikten $\forall\ t\geq 0$ için $\Psi'(t)\geq 0$ sonucuna varılır. Şimdi aşağıdaki denklem için bir alt sınır arayalım.

$$\chi(t)=\Psi''(t)\Psi(t)-(1+\gamma)[\Psi'(t)]^2 \tag{2.26}$$

(2.26) eşitliğindeki $\Psi(t)$, $\Psi'(t)$ ve $\Psi''(t)$ yerine sırasıyla (2.13), (2.16) ve (2.25) denklemlerindeki eşitleri alınırsa,

$$\chi(t)\geq 4(\gamma+1)\left\{\left[\int_0^t\int_{\Gamma}\alpha(x)\left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2dx\,dt+\int_{\Omega}(u_t)^2dx\right]\right.$$

$$\times\left[\int_{\Omega}u^2dx+\int_0^t\int_{\Gamma}\alpha(x)\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2dx\,dt+\int_{\Gamma}\alpha(x)\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2dx\right]$$

$$-\left[\int_{\Omega}uu_tdx+\int_0^t\int_{\Gamma}\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u_t}{\partial \nu}dx\,dt\right]^2$$

$$-\left[\int_{\Omega} u u_t dx + \int_0^t \int_{\Gamma} \alpha(x) \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\partial u_t}{\partial \nu} dx\, dt\right] \times$$

$$\int_{\Gamma} \alpha(x) \left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx - \left[\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \alpha(x) \left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx\right]^2 \Bigg\} =$$

$$4(\gamma + 1) \left\{ \left[\int_0^t \int_{\Gamma} \alpha(x) \left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2 dx\, dt + \int_{\Omega} (u_t)^2 dx\right] \times \right.$$

$$\left[\int_{\Omega} u^2 dx + \int_0^t \int_{\Gamma} \alpha(x) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dx\, dt + \int_{\Gamma} \alpha(x) \left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx\right] -$$

$$\left[\int_{\Omega} u u_t dx + \int_0^t \int_{\Gamma} \alpha(x) \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\partial u_t}{\partial \nu} dx\, dt\right]^2 -$$

$$\left. \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \alpha(x) \left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx \times \Psi'(t) \right\} \tag{2.27}$$

Bu aşamadan sonra (2.27) eşitsizliğinin ilk üç satırında görülen iki terimin toplamının negatif olamayacağı gösterilecektir.

Aşağıda verilen Hölder eşitsizliğinden yararlanarak,

$$\int |u \cdot v| dx \leq \left(\int u^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int v^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$\int_{\Omega} |u u_t| dx \leq \left(\int_{\Omega} u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Omega} (u_t)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\int_0^t \int_{\Gamma} \left|\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right| dx\, dt \leq$$

$$\left[\int_0^t \int_{\Gamma} \left(\alpha^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dx\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_0^t \int_{\Gamma} \left(\alpha^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2 dx\, dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

yukarıdaki iki eşitsizlik taraf tarafa toplandıktan sonra her iki tarafın karesi alınarak aşağıdaki eşitsizlik elde edili

$$\left[\int_\Omega u u_t dx + \int_0^t \int_\Gamma \alpha(x) \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\partial u_t}{\partial \nu} dx\, dt\right]^2$$

$$\leq \left\{ \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega (u_t)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. \left[\int_0^t \int_\Gamma \left(\alpha^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dx\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_0^t \int_\Gamma \left(\alpha^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2 dx\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2$$

$$\leq \left[\int_\Omega u^2 dx + \int_0^t \int_\Gamma \alpha(x) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dx\, dt\right]$$

$$\times \left[\int_\Omega u_t^2 dx + \int_0^t \int_\Gamma \alpha(x) \left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2 dx\, dt\right]$$

yukarıdaki eşitsizliğin son kısmı reel sayılar için geçerli olan aşağıdaki eşitsizlikten yararlanılarak elde edilmiştir.

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

şimdi (2.27) eşitsizliğinin ilk üç satırında görülen iki terimin toplamı için bir alt sınır oluşturulabilir.

$$\left[\int_0^t \int_\Gamma \alpha(x) \left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2 dx\, dt + \int_\Omega (u_t)^2 dx\right] \times$$

$$\left[\int_\Omega u^2 dx + \int_0^t \int_\Gamma \alpha(x) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dx\, dt + \int_\Gamma \alpha(x) \left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx\right] -$$

$$\left[\int_\Omega u u_t dx + \int_0^t \int_\Gamma \alpha(x) \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\partial u_t}{\partial \nu} dx\, dt\right]^2 =$$

$$\left[\int_0^t \int_\Gamma \alpha(x) \left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2 dx\, dt + \int_\Omega (u_t)^2 dx\right] \times$$

$$\left[\int_\Omega u^2 dx + \int_0^t \int_\Gamma \alpha(x) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dx\, dt\right] -$$

$$\left[\int_\Omega u u_t dx + \int_0^t \int_\Gamma \alpha(x) \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\partial u_t}{\partial \nu} dx\, dt\right]^2 +$$

$$\left[\int_0^t \int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2 dx\,dt + \int_\Omega (u_t)^2 dx\right] \times \int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx \geq$$

$$\left[\int_0^t \int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2 dx\,dt + \int_\Omega (u_t)^2 dx\right] \times \int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx \geq 0 \qquad (2.28)$$

dolayısıyla $\chi(t)$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\chi(t) \geq -2(\gamma+1)\int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx \times \Psi'(t)$$

$$\geq -2(\gamma+1)\left[\int_0^t \int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dx\,dt + \int_\Omega u^2 dx + \int_\Gamma \alpha(x)\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx\right]\Psi'(t)$$

$$= -2(\gamma+1)\Psi(t)\Psi'(t) \qquad (2.29)$$

sonuç olarak $\chi(t)$ için bir alt sınır elde edilmiş olur.

$$\chi(t) = \Psi''(t)\Psi(t) - (1+\gamma)[\Psi'(t)]^2 \geq$$

$$-2(\gamma+1)\Psi(t)\Psi'(t) \qquad (2.30)$$

Ve böylece $C_1 = 1+\gamma$ , $C_2 = 0$ olmak üzere Ladyzhenskaya-Kalantarov Lemmasındaki hipotezler sağlanır ve dolayısıyla Teorem 2.1 in ispatı tamamlanmış olur.

**Örnek 2.1:**

Yukarıdaki probleme ilk örnek olarak aşağıda (2.31)-(2.33) ile verilen Problemin çözümünün patlaması incelenmiştir.

$$u_{tt} + u_{xxxx} = u^3(t,x) \in [0,T) \times [0,1] \qquad (2.31)$$

$$u = 0, \qquad u_{xx} + \frac{\partial u_t}{\partial x} = 0, \qquad t \in [0,T), \qquad x = 0 \ \text{ ve } \ x = 1 \qquad (2.32)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in [0,1] \qquad (2.33)$$

Bir boyutlu uzayda verilsin. Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ [0,1] aralığına karşılık gelmektedir. Problemde sağ taraf fonksiyonu ve ilkeli,

$$f(u) = u^3, F(u) = \frac{1}{4}u^4 \tag{2.34}$$

olarak alınmıştır. $\gamma = 0{,}5$ reel sayısı için ve her $u \in \mathbb{R}^1$ için (2.4) eşitsizliği sağlanmaktadır. $\gamma = 0{,}5$ için $\mathrm{C}_0 = 1$, $\mathrm{C}_1 = 1{,}5$ ve $\mathrm{C}_2 = 0$ olmaktadır.

$u_0(x)$ $ve$ $u_1(x)$ fonksiyonları aşağıdaki eşitsizlikleri sağlamalıdırlar.

$$\int_0^1 u_0^2 dx > 0, \tag{2.35}$$

$$\int_0^1 u_0^4\, dx - 2\int_0^1 u_1^2\, dx - 2\int_0^1 \left(\frac{d^2 u_0(x)}{dx^2}\right)^2 dx - 1 \geq 0 \tag{2.36}$$

$$2\int_0^1 u_0 u_1 dx > 6\int_0^1 u_0^2\, dx \tag{2.37}$$

Örneğin aşağıdaki fonksiyonlar bu eşitsizlikleri sağlamaktadırlar.

$$u_0(x) = 20\sin(\pi x) \qquad u_1(x) = 100\sin^2(\pi x) \tag{2.38}$$

Dolayısıyla (2.31)-(2.33) başlangıç-sınır değer probleminin genel çözümünün yokluğu için yukarıda verilen teoremin şartları bu problem için sağlanmaktadır.

$$\gamma_1 = 0\,, \qquad \gamma_2 = -3 \tag{2.39}$$

Olmak üzere,

$$t_2 = \frac{1}{3} ln \frac{\int_0^1 u_0 u_1 dx}{-3\int_0^1 u_0^2 dx + \int_0^1 u_0 u_1 dx} \cong 0{,}4090331099 \tag{2.40}$$

olarak hesaplanır ve öyle bir $t_1 \leq 0{,}4090331099$ sayısı vardır ki

$$\lim_{t \to t_1} \int_0^1 u^2 dx \to +\infty \tag{2.41}$$

**Örnek 2.2:**

Yukarıdaki probleme ikinci örnek olarak Örnek 2.1'deki problemde sadece sağ taraf fonksiyonu $f(u) = u^4$ olarak değiştirelim, sınır şartlarını ve başlangıç fonksiyonlarını aynen alalım.

Oluşturulan bu yeni başlangıç-sınır değer probleminin genel çözümünün yokluğu için Teorem 2.1 de verilen gerekli şartlar sağlanmaktadır. Bu örnekte. $\gamma = \frac{3}{4}$ için $C_0 = 1$, $C_1 = 1{,}75$ ve $C_2 = 0$ olmaktadır. Bu değerlere karşılık;

$$\gamma_1 = 0\,, \qquad \gamma_2 = -3{,}5 \tag{2.42}$$

Olmak üzere,

$$t_2 = \frac{1}{3{,}5} ln \frac{2\gamma \int_0^1 u_0 u_1 dx}{-3{,}5 \int_0^1 u_0^2 dx + 2\gamma \int_0^1 u_0 u_1 dx} \cong 0{,}2280045918 \tag{2.43}$$

olarak hesaplanır ve öyle bit $t_1 \leq 0{,}2280045918$ sayısı vardır ki

$$\lim_{t \to t_1} \int_0^1 u^2 dx \to +\infty \tag{2.44}$$

**Örnek 2.3:**

Yukarıdaki probleme üçüncü örnek olarak Örnek 2.2'de yaptığımız gibi problemde sadece sağ taraf fonksiyonu $f(u) = u^{1/3}$ olarak değiştirelim, sınır şartlarını ve başlangıç fonksiyonlarını aynen alalım.

Oluşturulan bu yeni başlangıç-sınır değer probleminin genel çözümünün yokluğu için (2.4) eşitsizliğini sağlayacak herhangi bir $\gamma > 0$ sayısı bulunamamaktadır.

**Örnek 2.4:**

Yukarıdaki probleme dördüncü örnek olarak Örnek 2.1'de verilen başlangıç-sınır değer problemini, başlangıç fonksiyonlarını aşağıda verilen şekliyle göz önüne alalım.

$$u_0(x) = 0{,}01 \sin(\pi x) \qquad u_1(x) = 0 \tag{2.45}$$

Oluşturulan bu yeni başlangıç-sınır değer probleminin genel çözümünün yokluğu için seçilen yeni başlangıç fonksiyonları Teorem 2.1 de verilen (2.6) eşitsizliğini sağlamamaktadır.

## 2.2 Sınırda Güçlü Sönüm Terimi İçeren Başlangıç-Sınır Değer Problemi

Bu bölümde aşağıda (2.46)-(2.48) ile verilen Problemin çözümünün patlaması incelenmiştir.

$$u_{tt} + \Delta^2 u = f(\Delta u)(t,x) \in [0,T) \times \Omega \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + \beta(x)\Delta u_t = 0, (t,x) \in [0,T) \times \Gamma \tag{2.47}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \Omega \tag{2.48}$$

burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve yeterince düzgün $\Gamma$ sınırına sahip bir bölge , $T > 0$ herhangi bir reel sayı $\nu$ dış doğrultudaki normal ve $\beta(x) \geq 0$, $\Omega$ bölgesinin sınırında verilmiş düzgün bir fonksiyondur.

$f(u)$ Fonksiyonu ilkeli $F(u) = \int_0^u f(\xi)d\xi$ olan ve aşağıdaki eşitsizliği $\forall\ u \in \mathbb{R}^n$ fonksiyonu ve $\gamma > 0$ reel sayısı için sağlayan bir fonksiyon olsun.

$$f(u)u \leq 2(2\gamma + 1)F(u) \tag{2.49}$$

Bu verilerle (2.46)-(2.48) Başlangıç-Sınır Değer Probleminin genel çözümünün yokluğu hakkındaki aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

**Teorem 2.2:**

Başlangıç fonksiyonları $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ aşağıdaki eşitsizlikleri sağlasınlar.

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx > 0 \tag{2.50}$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_1|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \Delta u_0|^2 dx + \int_\Omega F(\Delta u_0) dx \leq 0 \tag{2.51}$$

$$\mathbf{2}\int_\Omega \nabla u_0 \nabla u_1 dx \ > 2(1+\gamma^{-1})\left[\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx + \int_\Gamma \beta(x)(\Delta u_0)^2 dx\right] - \int_\Gamma \beta(x)(\Delta u_0)^2 dx \tag{2.52}$$

$$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = -2(1+\gamma) \tag{2.53}$$

$$A = \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx + \int_\Gamma \beta(x)(\Delta u_0)^2 dx \tag{2.54}$$

$$B = 2\gamma \int_\Omega \nabla u_0 \nabla u_1 dx + \gamma \int_\Gamma \beta(x)(\Delta u_0)^2 dx \tag{2.55}$$

ve

$$t_2 = \frac{1}{2(1+\gamma)}\, ln \frac{B}{\gamma_2 A + B} \tag{2.56}$$

olmak üzere $\exists\ t_1 \leq t_2$ reel sayısı vardır ki,

$$\lim_{t \to t_1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_0^t \int_\Gamma \beta(x)(\Delta u)^2 dx\, dt +\right) \to +\infty \tag{2.57}$$

**İspat:**

Teoremi ispatlamak için aşağıdaki fonksiyonun Ladyzhenskaya-Kalantarov Lemmasındaki hipotezleri sağladığını göstermek yeterli olacaktır.

$$\Psi(t) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_0^t \int_\Gamma \beta(x)(\Delta u)^2 dx\, dt + \int_\Gamma \beta(x)(\Delta u_0)^2 dx \tag{2.58}$$

olarak alalım. $\Psi'(t)$ ve $\Psi''(t)$ türevleri hesaplanacak olursa;

$$\Psi'(t) = 2\int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx + \int_\Gamma \beta(x)(\Delta u)^2 dx \tag{2.59}$$

Kullanımda kolaylık sağlayacağı için (2.59) denkleminin sağ tarafındaki ikinci integral yerine aşağıda hesaplanacak olan eşitini alalım.

$$2\int_0^t \int_\Gamma \beta(x)\Delta u \Delta u_t dx\, dt =$$

$$\int_0^t \int_\Gamma \beta(x)\frac{\partial}{\partial \tau}(\Delta u)^2 dx\, d\tau \ =$$

$$\int_\Gamma \beta(x)(\Delta u)^2|_{\tau=0}^{\tau=t} dx \ =$$

$$= \int_\Gamma \beta(x)(\Delta u)^2 dx - \int_\Gamma \beta(x)(\Delta u_0)^2 dx \qquad (2.60)$$

Bu denklemden ;

$$\int_\Gamma \beta(x)(\Delta u)^2 dx =$$

$$2\int_0^t \int_\Gamma \beta(x)\Delta u \Delta u_t dx dt + \int_\Gamma \beta(x)(\Delta u_0)^2 dx \qquad (2.61)$$

denklemi elde edilir. Bu ifade denklem (2.59) de yerine yazılarak,

$$\Psi'(t) = 2\int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx$$
$$+ 2\int_0^t \int_\Gamma \beta(x)\Delta u \Delta u_t dx dt + \int_\Gamma \beta(x)(\Delta u_0)^2 dx \qquad (2.62)$$

$\Psi'(t)$ türevi elde edilir ve bundan

$$\Psi''(t) = 2\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + 2\int_\Omega \nabla u \nabla u_{tt} dx + 2\int_\Gamma \beta(x)\Delta u \Delta u_t dx \qquad (2.63)$$

Denklemi elde edilir. $\Psi''(t)$ için bir alt sınır elde edebilmek amacıyla karekterleri hakkında bir şey söylenemeyen integrallerin yerine davranışları daha belirli integraller yazmak için, Green-Gauss teoreminden ;

$$\int_\Omega \nabla u \nabla u_{tt} dx = -\int_\Omega \Delta u u_{tt} dx + \int_\Gamma \mathrm{u}_{tt}\frac{\partial u}{\partial \nu} dx \qquad (2.64)$$

$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0,$ olduğundan (2.64) denkleminin sağ tarafındaki üçüncü integral;

$$\int_{\Gamma} u_{tt} \frac{\partial u}{\partial \nu} dx = 0$$

olur. (2.46) denkleminin her iki tarafı $-\Delta u$ ile çarpılıp $\Omega$ üzerinde integre edilerek (2.64) denkleminin sağ tarafındaki birinci integral için aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$-\int_{\Omega} \Delta u u_{tt} dx = \int_{\Omega} \Delta u \Delta^2 u dx - \int_{\Omega} f(\Delta u) \Delta u dx \tag{2.65}$$

yukarıdaki denklemin sağ tarafındaki birinci integral yerine Green-Gauss teoreminden eşiti yazılarak;

$$-\int_{\Omega} \Delta u u_{tt} dx = -\int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx + \int_{\Gamma} \Delta u \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} dx - \int_{\Omega} f(\Delta u) \Delta u dx \tag{2.66}$$

elde edilir. Bulunan bu değer (2.63) de yerine yazılarak,

$$\Psi''(t) = 2\int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx + 2\int_{\Gamma} \beta(x) \Delta u \Delta u_t dx - 2\int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx +$$

$$2\int_{\Gamma} \Delta u \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} dx - 2\int_{\Omega} f(\Delta u) \Delta u dx \tag{2.67}$$

elde edilir. (2.47) denklemindeki ilk sınır şartını kullanarak,

$$\Psi''(t) = 2\int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx - 2\int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx - 2\int_{\Omega} f(\Delta u) \Delta u dx \tag{2.68}$$

elde edilir.

$f(u)$ fonksiyonu için yazılan (2.49) eşitsizliğinden,

$$\Psi''(t) \geq 2\int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx - 2\int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx - 4(2\gamma + 1)\int_{\Omega} F(\Delta u) dx \tag{2.69}$$

(2.69) denklemindeki son integral yerine davranışı daha belirli bir ifade bulabilmek amacıyla (2.46) denkleminin her iki tarafı $-\Delta u_t$ ile çarpıp $\Omega$ üzerinde integre edilerek aşağıdaki denklem elde edilir.

$$-\int_{\Omega} f(\Delta u) \Delta u_t dx = -\int_{\Omega} \Delta u_t u_{tt} dx - \int_{\Omega} \Delta u_t \Delta^2 u dx \tag{2.70}$$

(2.70) denkleminin sağındaki integraller yerine Green-Gauss teoreminden eşitleri yazılırsa denklemin sağ tarafı aşağıdaki gibi olur.

$$\int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u_{tt} dx - \int_{\Gamma} u_{tt} \frac{\partial u_t}{\partial \nu} dx + \int_{\Omega} \nabla \Delta u_t \nabla \Delta u dx - \int_{\Gamma} \Delta u_t \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} dx \tag{2.71}$$

(2.47) deki sınır şartından,

$$\int_{\Gamma} u_{tt} \frac{\partial u_t}{\partial \nu} dx = \int_{\Gamma} u_{tt} \frac{d}{dt} \frac{\partial u}{\partial \nu} dx = 0 \tag{2.72}$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = -\beta(x) \Delta u_t \tag{2.73}$$

olarak yazılırlar. Aşağıda tanımlanan $E(t)$ fonksiyonu kullanılarak (2.75) elde edilir.

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx + \int_{\Omega} F(\Delta u) dx \tag{2.74}$$

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\int_{\Gamma} \beta(x) (\Delta u_t)^2 dx \tag{2.75}$$

(2.75) denkleminin iki tarafı $[0, t]$ de t ye göre integre edilerek aşağıdaki ifade elde edilir.

$$E(t) = E(0) - \int_0^t \int_{\Gamma} \beta(x) (\Delta u_t)^2 dx d\tau \tag{2.76}$$

Bu ifade ve $E(t)$ nin tanımı kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} -4(2\gamma + 1) \int_{\Omega} F(\Delta u) dx &= 2(2\gamma + 1) \left[ \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx \right] \\ &+ 4(2\gamma + 1) \left[ -E(0) + \int_0^t \int_{\Gamma} \beta(x) (\Delta u_t)^2 dx d\tau \right] \end{aligned} \tag{2.77}$$

Şimdi (2.69) denkleminde verilen $\Psi''(t)$ için bir alt sınır elde edilebilir.

$$\Psi''(t) \geq 4\gamma \int_\Omega |\nabla\Delta u|^2 dx + 4(\gamma+1)\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - 4(2\gamma+1)E(0)$$
$$+ 4(2\gamma+1)\int_0^t \int_\Gamma \beta(x)(\Delta u_t)^2 dx d\tau \tag{2.78}$$

Yukarıdaki denklemin üçüncü terimi Teorem 2.2 nin (2.51) denklem numarası ile verilen hipotezine göre negatif olmayan bir büyüklüktür, dolayısıyla denklemin sağ tarafındaki birinci ve üçüncü terimler tamamen dördüncü terim kısmen kaldırılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\Psi''(t) \geq 4(\gamma+1)\left[\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \int_0^t \int_\Gamma \beta(x)(\Delta u_t)^2 dx d\tau\right] \tag{2.79}$$

Şimdi aşağıdaki denklem için bir alt sınır arayalım.

$$\chi(t) = \Psi''(t)\Psi(t) - (1+\gamma)[\Psi'(t)]^2 \tag{2.80}$$

$$A = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \qquad B = \int_0^t \int_\Gamma \beta(x)(\Delta u)^2 dx d\tau,$$

$$C = \int_\Gamma \beta(x)(\Delta u_0)^2 dx \tag{2.81}$$

$$A_1 = \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx, \qquad B_1 = \int_0^t \int_\Gamma \beta(x)\Delta u \Delta u_t dx d\tau \tag{2.82}$$

$$A_2 = \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx, \qquad B_2 = \int_0^t \int_\Gamma \beta(x)(\Delta u_t)^2 dx d\tau \tag{2.83}$$

olmak üzere,

$$\Psi(t) = A + B + C$$

$$\Psi'(t) = 2A_1 + 2B_1 + C$$

$$\Psi''(t) \geq 4(\gamma+1)(A_2 + B_2) \tag{2.84}$$

Olur ve $\chi(t)$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\chi(t) \geq 4(1+\gamma)(A_2+B_2)(A+B+C)-(1+\gamma)(2A_1+2B_1+C)^2$$
$$=4(1+\gamma)[(A_2+B_2)(A+B)-(A_1+B_1)^2]-2(1+\gamma)C\Psi'(t)$$
$$+4(1+\gamma)(A_2+B_2)C+(1+\gamma)C^2 \tag{2.85}$$

Eşitsizliğin sağ tarafındaki son iki terimin negatif olamayacağı aşikardır. Lemma 2.1 de köşeli parantez içindeki ifadenin pozitif olduğu gösterilecektir. Dolayısıyla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\Psi''(t)\,\Psi(t)-(1+\gamma)[\Psi'(t)]^2 \geq -2(1+\gamma)\Psi(t)\Psi'(t) \tag{2.86}$$

Lemma 1.2 de $C_1=(1+\gamma)$, $C_2=0$ olarak alınırsa yukarıdaki eşitsizlik elde edilir ve Ladyzhenskaya-Kalantarov Lemması sağlanmış olur ve sonuç olarak (2.56) ve (2.57) elde edilerek Teorem 2.2'nin ispati tamamlanmış olur.

**Lemma 2.1:**

(2.81), (2.82) ve (2.83) denklemleri ile tanımlanan $A, B, C, A_1, B_1, A_2$ ve $B_2$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilebilir.

$$(A_2+B_2)(A+B)-(A_1+B_1)^2 \geq 0 \tag{2.87}$$

**İspat:**

Hölder eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizliklerin yazılabileceği aşikârdır.

$$A_2A \geq A_1^2 \; ve \; B_2B \geq B_1^2 \tag{2.88}$$

Bu eşitsizliklerden ve Schwarz eşitsizliğinden yararlanarak,

$$\left(\sqrt{AA_2}+\sqrt{BB_2}\right)^2 \geq \; (A_1+B_1)^2 \tag{2.89}$$

Ve buradan,

$$(A_2+B_2)(A+B) \geq 0,$$

dört pozitif sayı için eşitsizlik elde edilir ve Lemma 2.1 in ispatı tamamlanır.

**Örnek 2.5:**

Yukarıdaki probleme örnek olarak aşağıda (2.90)-(2.92) ile verilen problemin çözümünün patlaması inçelenmiştir.

$$u_{tt} + u_{xxxx} = (u_{xx})^2 (t, x) \in [0, T) \times [0,1] \tag{2.90}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad u_{xxx} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0, \qquad t \in [0, T), \qquad x = 0 \text{ ve } x = 1 \tag{2.91}$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad x \in [0,1] \tag{2.92}$$

Bir boyutlu uzayda verilsin. Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ [0,1] aralığına karşılık gelmektedir. Problemde sağ taraf fonksiyonu ve ilkeli

$$f(u) = u^2, F(u) = \frac{1}{3}u^3 \tag{2.93}$$

olarak alınmıştır. $\gamma = 0,25$ reel sayısı için ve her $u \in \mathbb{R}^1$ için (2.49) eşitsizliği sağlanmaktadır. $\gamma = 0,25$ için $C_1 = 1,25$ ve $C_2 = 0$ olmaktadır.

$u_0(x)$ ve $u_1(x)$ fonksiyonları aşağıdaki eşitsizlikleri sağlamalıdırlar.

$$\int_0^1 \left|\frac{du_0(x)}{dx}\right|^2 dx > 0, \tag{2.94}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left|\frac{du_1(x)}{dx}\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \left|\frac{d^3u_0(x)}{dx^3}\right|^2 dx$$

$$+\frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{d^2u_0(x)}{dx^2}\right)^3 dx \le 0 \tag{2.95}$$

$$2\int_0^1 \frac{du_0(x)}{dx}\frac{du_1(x)}{dx} dx > 2(1 + \gamma^{-1})\int_0^1 \left|\frac{du_0(x)}{dx}\right|^2 dx \tag{2.96}$$

Örneğin aşağıdaki fonksiyonlar bu eşitsizlikleri sağlamaktadırlar.

$$u_0(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{12}x^3 \qquad u_1(x) = \frac{1}{4}x(x + 1) \tag{2.97}$$

Dolayısıyla (2.90)-(2.92) başlangıç-sınır değer probleminin genel çözümünün yokluğu için yukarıda verilen teoremin şartları bu problem için sağlanmaktadır.

$$\gamma_1 = 0\,, \qquad \gamma_2 = -2{,}5 \tag{2.98}$$

Olmak üzere,

$$t_2 = \frac{1}{2{,}5} ln \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du_0(x)}{dx}\frac{du_1(x)}{dx}dx}{-2{,}5\int_0^1 \left|\frac{du_0(x)}{dx}\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du_0(x)}{dx}\frac{du_1(x)}{dx}dx}$$

$$\cong 0{,}2772588722 \tag{2.99}$$

olarak hesaplanır ve öyle bir $t_1 \leq\ 0{,}2772588722$ sayısı vardır ki

$$\lim_{t\to t_1}\int_0^1 \left|\frac{du(x)}{dx}\right|^2 dx \to\ +\infty \tag{2.100}$$

## 3. QUASILINEAR HİPERBOLİK DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇEŞİTLİ SINIR ŞARTLARI ALTINDA GLOBAL ÇÖZÜMÜN YOKLUĞUNUN İNCELENMESİ

### 3.1 Sınırda Zayıf Sönüm Terimi İçeren Problem

$$u_{tt} - \Delta u + \Delta^2 u = f(-\Delta u) \qquad (t,x) \in [0,T) \times (\Omega \cup \partial\Omega) \tag{3.1}$$

$$\Delta u = 0, \qquad \frac{\partial u_t}{\partial \nu} - \Delta^2 u = 0, \qquad (t,x) \in [0,T) \times \partial\Omega \tag{3.2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{3.3}$$

Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve yeterince düzgün $\Gamma = \partial\Omega$ sınırına sahip bir bölge, $T > 0$, $\nu$, $\Gamma$ sınırına dış doğrultudaki normal.

$f(u)$ Fonksiyonu ilkeli $F(u) = \int_0^u f(\xi)d\xi$ olan ve aşağıdaki eşitsizliği $\forall\ s \in \mathbb{R}^n$ fonksiyonu ve $\gamma > 0$ reel sayısı için sağlayan bir fonksiyon olsun.

$$f(0) = 0, \qquad sf(s) \geq 2(2\gamma + 1)F(s) \tag{3.4}$$

$\Psi(t)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\Psi(t) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_0^t \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dx\, dt$$

$$+ \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx \tag{3.5}$$

(3.5) denklemini *t* ye göre türeterek,

$$\Psi'(t) = 2\int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx + 2\int_0^t \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u_t}{\partial \nu} dx\, dt$$

$$+\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 dx \tag{3.6}$$

elde edilir. Bulunan bu ifadenin *t* ye göre bir daha türevi alınarak,

$$\Psi''(t) = 2\int_{\Omega}|\nabla u_t|^2 dx + 2\int_{\Omega}\nabla u \nabla u_{tt} dx + 2\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u_t}{\partial \nu}dx \tag{3.7}$$

olur. Green-Gauss Teoremini kullanarak ve (3.1) denklemini sınırda göz önüne alarak (3.7) denkleminin sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü integraller dönüştürülerek aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\Psi''(t) = 2\int_{\Omega}|\nabla u_t|^2 dx - 2\int_{\Omega}u_{tt}\Delta u dx \tag{3.8}$$

$u_{tt}$ yerine denklem (3.1) den eşiti alınarak ve (3.4) eşitsizliği kullanılarak,

$$\Psi''(t) \geq 2\int_{\Omega}|\nabla u_t|^2 dx - 2\int_{\Omega}(\Delta u)^2 dx - 2\int_{\Omega}(\nabla \Delta u)^2 dx \; +$$

$$4\,(2\gamma+1)\int_{\Omega}F(-\Delta u)\,dx \tag{3.9}$$

eşitsizliği elde edilir. Sistemin toplam enerjisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\mathrm{E}(t) = \int_{\Omega}|\nabla u_t|^2 dx + \int_{\Omega}(\Delta u)^2 dx + \int_{\Omega}|\nabla \Delta u|^2 dx \, -$$

$$2\int_{\Omega}F(-\Delta u)\,dx \tag{3.10}$$

(3.1) denkleminin her iki tarafı $-2\Delta u_t$ ile çarpılıp $\Omega$ üzerinde integre edilirse

$$\frac{\partial \mathrm{E}(t)}{\partial t} = -2\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2 dx \tag{3.11}$$

elde edilir ve

$$\mathrm{E}(t) \leq \mathrm{E}(0), \quad \forall\, t \geq 0 \tag{3.12}$$

elde edilir. Başlangıç fonksiyonları aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak şekilde seçilsinler.

$$\mathrm{E}(0) = \int_\Omega |\nabla u_1|^2 dx + \int_\Omega (\Delta u_0)^2 dx + \int_\Omega |\nabla \Delta u_0|^2 dx \; -$$

$$2\int_\Omega F(-\Delta u_0)\, dx \; \leq 0, \tag{3.13}$$

$$2(2\gamma + 1)\left[\mathrm{E}(t) - \mathrm{E}(0) + 2\int_0^t \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2 dxdt\right] = 0$$

ifadesini (3.9) denkleminin sağ tarafına ekleyip pozitif terimlerin bazıları çıkartılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\Psi''(t) \geq 4(1+\gamma)\left[\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \int_0^t \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2 dxdt\right] \tag{3.14}$$

Özetlersek,

$$\Psi(t) = X_1 + Y_1 + Z,$$

$$\Psi'(t) = 2X_2 + 2Y_2 + Z,$$

$$\Psi''(t) \geq 4(1+\gamma)(X_3 + Y_3) \tag{3.15}$$

burada $X_1, Y_1, C, X_2, Y_2, X_3$ ve $Y_3$ değerleri (3.5), (3.6) ve (3.14) denklemlerindeki integrallere karşılık gelen ifadelerdir. LK lemmasında

$$\Psi''(t)\Psi(t) - (1+\gamma)[\Psi'(t)]^2 \geq$$

$$4(1+\gamma)[(X_3 + Y_3)(X_1 + Y_1 + Z) - (X_2 + Y_2 + Z/2)^2] \geq$$

$$4(1+\gamma)[H - \Psi(t)\Psi'(t)/2] \tag{3.16}$$

Burada,

$$H = (X_3 + Y_3)(X_1 + Y_1) - (X_2 + Y_2)^2 \geq 0 \tag{3.17}$$

Eşitsizliği Hölder eşitsizliğinden yararlanarak gösterilebilir. Dolayısıyla $\mathrm{C}_1 = (1+\gamma)$ ve $\mathrm{C}_2 = 0$ alınarak LK lemmasının hipotezleri sağlanmış olur ve dolayısıyla aşağıdaki verilen Teorem 3.1 ispatlanmış olur.

**Teorem 3.1:**

$u_0(x)$ ve $u_1(x)$ aşağıdaki özellikleri sağlayan iki fonksiyon olsun ve $f(u)$ fonksiyonu (3.4) eşitsizliğini sağlasın,

1) LK lemmasında $\Psi$ ve $\Psi'$ için verilen (1.28) eşitsizlikleri sağlansın,
2) (3.13) de verilen başlangıç enerjisi $\mathrm{E}(0) \leq 0$ olsun.

Eğer $\mathrm{t}_2 > 0$ (1.29) de verilen sayı ise o halde öyle bir pozitif reel $\mathrm{t}_1 < \mathrm{t}_2$ sayısı vardır ki

$$\mathrm{t} \to \mathrm{t}_1, \qquad \Psi(t) \longrightarrow +\infty$$

## 3.2 Sınırda Güçlü Sönüm Terimi İçeren Problem

İkinci problem olarak (3.1)-(3.3) de verilen problemdeki sınır şartını aşağıdaki gibi değiştirelim.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + \Delta u_t = 0 \qquad (t, x) \in [0, T) \times \partial\Omega \tag{3.18}$$

$\Psi(t)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\Psi(t) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_0^t \int_\Gamma (\Delta u)^2 dx\, dt + \int_\Gamma (\Delta u_0)^2 dx \tag{3.19}$$

daha önce olduğu gibi $f(u)$ fonksiyonu (3.4) eşitsizliğini sağlasın. (3.19) denklemini *t* ye göre türeterek

$$\Psi'(t) = 2\int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx + 2\int_0^t \int_\Gamma \Delta u \Delta u_t dx\, dt +$$

$$\int_\Gamma (\Delta u_0)^2 dx \tag{3.20}$$

elde edilir. Bulunan bu ifadenin *t* ye göre bir daha türevi alınarak,

$$\Psi''(t) = 2\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + 2\int_\Omega \nabla u \nabla u_{tt} dx + 2\int_\Gamma \Delta u \Delta u_t dx \tag{3.21}$$

olur. Green-Gauss Teoremini kullanarak ve (3.1) denklemini sınırda göz önüne alarak (3.21) denkleminin sağ tarafındaki ikinci integral dönüştürülerek aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\Psi''(t) = 2\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - 2\int_\Omega u_{tt}\Delta u dx + 2\int_\Gamma \Delta u \Delta u_t dx \tag{3.22}$$

$u_{tt}$ yerine denklem (3.1) den eşiti alınarak ve (3.4) eşitsizliği kullanılarak,

$$\Psi''(t) \geq 2\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - 2\int_\Omega (\Delta u)^2 dx - 2\int_\Omega |\nabla \Delta u|^2 dx$$

$$+4(2\gamma+1)\int_\Omega F(-\Delta u) dx \tag{3.23}$$

eşitsizliği elde edilir. Sistemin toplam enerjisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\mathrm{E}(t) = \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \int_\Omega (\Delta u)^2 dx + \int_\Omega |\nabla \Delta u|^2 dx -$$

$$2\int_\Omega F(-\Delta u)\, dx \tag{3.24}$$

(3.1) denkleminin her iki tarafı $-2\Delta u_t$ ile çarpılıp $\Omega$ üzerinde integre edilirse

$$\frac{\partial \mathrm{E}(t)}{\partial t} = -2\int_\Gamma (\nabla \Delta u_t)^2 dx \tag{3.25}$$

elde edilir ve

$$\mathrm{E}(t) \leq \mathrm{E}(0), \quad \forall\, t \geq 0 \tag{3.26}$$

elde edilir. Başlangıç fonksiyonları aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak şekilde seçilsinler.

$$\mathrm{E}(0) = \int_\Omega |\nabla u_1|^2 dx + \int_\Omega (\Delta u_0)^2 dx + \int_\Omega |\nabla \Delta u_0|^2 dx$$

$$-2\int_\Omega F(-\Delta u_0)\, dx \leq 0, \tag{3.27}$$

$$2(2\gamma+1)\big(\mathrm{E}(t) - \mathrm{E}(0)\big) + 2\int_0^t \int_\Gamma (\nabla \Delta u_t)^2 dx dt = 0$$

ifadesini (3.23) denkleminin sağ tarafına ekleyip pozitif terimlerin bazıları çıkartılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\Psi''(t) \geq 4(1+\gamma)\left[\int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx + \int_0^t \int_{\Gamma} (\Delta u_t)^2 dx dt\right] \tag{3.28}$$

Özetlersek,

$$\Psi(t) = A_1 + B_1 + C,$$

$$\Psi'(t) = 2A_2 + 2B_2 + C,$$

$$\Psi''(t) \geq 4(1+\gamma)(A_3 + B_3) \tag{3.29}$$

Burada $A_1, B_1, C, A_2, B_2, A_3\ ve\ B_3$ değerleri (3.19), (3.20) ve (3.28) denklemlerindeki integrallere karşılık gelen ifadelerdir. LK lemmasında bu ifadeler dikkate alınarak ispatın bu kısımdan sonrası bir önceki problemle aynıdır.

Dolayısıyla $\mathrm{C}_1 = (1+\gamma)$ ve $\mathrm{C}_2 = 0$ alınarak LK lemmasının hipotezleri sağlanmış olur. Lemma nın sonucu olarak aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

**Teorem 3.2:**

$f(u)$ fonksiyonu (3.4) eşitsizliğini sağlasın, $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ aşağıdaki özellikleri sağlayan iki fonksiyon olsun,

1) LK lemmasında $\Psi$ ve $\Psi'$ için verilen (1.28) eşitsizlikleri sağlansın,
2) (3.27) de verilen başlangıç enerjisi $\mathrm{E}(0) \leq 0$ olsun.

Eğer $\mathrm{t}_2 > 0$ (1.29) de verilen sayı ise o halde öyle bir pozitif reel $\mathrm{t}_1 < \mathrm{t}_2$ sayısı vardır ki

$$\mathrm{t} \to \mathrm{t}_1, \qquad \Psi(t) \longrightarrow +\infty$$

## 3.3 İlave Problemler

### 3.3.1 Sınırda güçlü sönüm terimi içeren problem

Üçüncü problem olarak (3.1)-(3.3) de verilen problemdeki sınır şartını aşağıdaki gibi değiştirelim.

$$u = 0, \qquad \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + \Delta u_t = 0, \qquad (t,x) \in [0,T) \times \partial\Omega \tag{3.30}$$

$\Psi(t)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\Psi(t) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_0^t \int_\Gamma (\Delta u)^2 dx\, dt + \int_\Gamma (\Delta u_0)^2 dx \tag{3.31}$$

daha önce olduğu gibi $f(u)$ fonksiyonu (3.4) eşitsizliğini sağlasın. (3.31) denklemini *t* ye göre türeterek

$$\Psi'(t) = 2\int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx +$$

$$2\int_0^t \int_\Gamma \Delta u \Delta u_t dx\, dt + \int_\Gamma (\Delta u_0)^2 dx \tag{3.32}$$

elde edilir. Bulunan bu ifadenin *t* ye göre bir daha türevi alınarak,

$$\Psi''(t) = 2\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + 2\int_\Omega \nabla u \nabla u_{tt} dx + 2\int_\Gamma \Delta u \Delta u_t dx \tag{3.33}$$

elde edilir. Green-Gauss Teoremini kullanarak ve (3.1) denklemini sınırda göz önüne alarak (3.33) denkleminin sağ tarafındaki ikinci integral dönüştürülerek aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\Psi''(t) = 2\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - 2\int_\Omega u_{tt} \Delta u dx + 2\int_\Gamma \Delta u \Delta u_t dx \tag{3.34}$$

$u_{tt}$ yerine denklem (3.1) den eşiti alınarak ve (3.4) eşitsizliği kullanılarak,

$$\Psi''(t) \geq 2\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - 2\int_\Omega (\Delta u)^2 dx - 2\int_\Omega |\nabla \Delta u|^2 dx$$

$$+4(2\gamma + 1)\int_\Omega F(-\Delta u) dx \tag{3.35}$$

eşitsizliği elde edilir. Sistemin toplam enerjisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\mathrm{E}(t) = \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \int_\Omega (\Delta u)^2 dx + \int_\Omega |\nabla \Delta u|^2 dx -$$

$$2\int_\Omega F(-\Delta u)\, dx \tag{3.36}$$

(3.1) denkleminin her iki tarafı $-2\Delta u_t$ ile çarpılıp $\Omega$ üzerinde integre edilirse

$$\frac{\partial \mathrm{E}(t)}{\partial t} = -2\int_\Gamma (\Delta u_t)^2 dx \tag{3.37}$$

elde edilir ve

$$\mathrm{E}(t) \leq \mathrm{E}(0), \quad \forall\, t \geq 0 \tag{3.38}$$

elde edilir. Başlangıç fonksiyonları (3.27) eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçilsinler.

$$2(2\gamma + 1)\left[\mathrm{E}(t) - \mathrm{E}(0) + 2\int_0^t \int_\Gamma (\Delta u_t)^2 dxdt\right] = 0$$

ifadesini (3.35) denkleminin sağ tarafına ekleyip pozitif terimlerin bazıları çıkartılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\Psi''(t) \geq 4(1+\gamma)\left[\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \int_0^t \int_\Gamma (\Delta u_t)^2 dxdt\right] \tag{3.39}$$

Bir önceki problemde olduğu gibi aynen sonuca gidilir. $\mathrm{C}_1 = (1+\gamma)$ ve $\mathrm{C}_2 = 0$ alınarak LK lemmasının hipotezleri sağlanmış olur. Lemmanın sonucu olarak problemde sınır şartı değiştirildiği halde Teorem 3.2 nin böyle bir problem içinde geçerli olduğu ispatlanmış olur.

### 3.3.2 Sınırda zayıf sönüm terimi içeren problem

Dördüncü problem olarak (3.1)-(3.3) de verilen problemdeki sınır şartını aşağıdaki gibi değiştirelim.

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} + u_t = 0, \qquad (t,x) \in [0,T) \times \partial\Omega \tag{3.40}$$

$\Psi(t)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\Psi(t) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_0^t \int_{\Gamma} {u_t}^2 dx\, dt + \int_{\Gamma} u_1^2 dx \tag{3.41}$$

daha önce olduğu gibi $f(u)$ fonksiyonu (3.4) eşitsizliğini sağlasın. (3.41) denklemini *t* ye göre türeterek

$$\Psi'(t) = 2\int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + 2\int_0^t \int_{\Gamma} u_t u_{tt} dx\, dt + \int_{\Gamma} u_1^2 dx \tag{3.42}$$

elde edilir. Bulunan bu ifadenin *t* ye göre bir daha türevi alınarak,

$$\Psi''(t) = 2\int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx + 2\int_{\Omega} \nabla u \nabla u_{tt} dx + 2\int_{\Gamma} u_t u_{tt} dx \tag{3.43}$$

olur. Green-Gauss Teoremini kullanarak ve (3.1) denklemini sınırda göz önüne alarak (3.43) denkleminin sağ tarafındaki ikinci integral dönüştürülerek aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\Psi''(t) = 2\int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx - 2\int_{\Omega} u_{tt} \Delta u dx \tag{3.44}$$

$u_{tt}$ yerine denklem (3.1) den eşiti alınarak ve (3.4) eşitsizliği kullanılarak,

$$\Psi''(t) \geq 2\int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx - 2\int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx - 2\int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx +$$

$$4(2\gamma + 1)\int_{\Omega} F(-\Delta u) dx \tag{3.45}$$

eşitsizliği elde edilir. Sistemin toplam enerjisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\mathrm{E}(t) = \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx + \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx -$$

$$2\int_{\Omega} F(-\Delta u)\, dx \tag{3.46}$$

(3.1) denkleminin her iki tarafı $-2\Delta u_t$ ile çarpılıp $\Omega$ üzerinde integre edilirse

$$\frac{\partial \mathrm{E}(t)}{\partial t} = -2\int_{\Gamma} (u_{tt})^2 dx \tag{3.47}$$

elde edilir ve

$$\mathrm{E}(t) \leq \mathrm{E}(0), \quad \forall\, t \geq 0 \tag{3.48}$$

elde edilir. Başlangıç fonksiyonları aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak şekilde seçilsinler.

$$\mathrm{E}(0) = \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 dx + \int_{\Omega} (\Delta u_0)^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla \Delta u_0|^2 dx -$$

$$2\int_{\Omega} F(-\Delta u_0)\, dx \;\leq 0 \tag{3.49}$$

$$2(2\gamma+1)\left[\mathrm{E}(t) - \mathrm{E}(0) + 2\int_0^t \int_{\Gamma} (u_{tt})^2 dxdt\right] = 0$$

ifadesini (3.45) denkleminin sağ tarafına ekleyip pozitif terimlerin bazıları çıkartılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\Psi''(t) \geq 4(1+\gamma)\left[\int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx + \int_0^t \int_{\Gamma} (u_{tt})^2 dxdt\right] \tag{3.50}$$

Özetlersek,

$$\Psi(t) = A_1 + B_1 + C,$$

$$\Psi'(t) = 2A_2 + 2B_2 + C,$$

$$\Psi''(t) \geq 4(1+\gamma)(A_3 + B_3) \tag{3.51}$$

Burada $A_1, B_1, C, A_2, B_2, A_3\ ve\ B_3$ değerleri (3.41), (3.42) ve (3.50) denklemlerindeki integrallere karşılık gelen ifadelerdir. LK lemmasında bu ifadeler dikkate alınarak ispatın bu kısımdan sonrası daha önceki problemlerde olduğu gibi tamamlanır.

Dolayısıyla $\mathrm{C}_1 = (1+\gamma)$ ve $\mathrm{C}_2 = 0$ alınarak LK lemmasının hipotezleri sağlanmış olur. Lemmanın sonucu olarak aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

**Teorem 3.3:**

$f(u)$ fonksiyonu (3.4) eşitsizliğini sağlasın, $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ aşağıdaki özellikleri sağlayan iki fonksiyon olsun,

1) LK lemmasında $\Psi$ ve $\Psi'$ için verilen (1.28) eşitsizlikleri sağlansın,
2) (3.49) da verilen başlangıç enerjisi $\mathrm{E}(0) \leq 0$ olsun.

Eğer $\mathrm{t}_2 > 0$ (1.29) de verilen sayı ise o halde öyle bir pozitif reel $\mathrm{t}_1 < \mathrm{t}_2$ sayısı vardır ki

$$\mathrm{t} \rightarrow \mathrm{t}_1, \qquad \Psi(t) \longrightarrow +\infty$$

# 4. İSKELE DİREĞİ PROBLEMİ

Bu bölümde denklem içinde sönüm terimi içeren bir quasilinear hiperbolik başlangıç-sınır değer problemi incelendi. Bu başlangıç-sınır değer problemi bir boyutlu uzayda akıntı ve dalgalanma etkisinde iskele direği problemidir.

## 4.1 Problemin Tanımlanması

Aşağıdaki başlangıç-sınır değer probleminin yerel klasik çözümünün varlığını kabul edelim.

$$u_{tt} + \alpha u_t + 2\beta u_{xxxx} - 2[(ax+b)u_x]_x + \frac{\beta}{3}(u_x^3)_{xxx} - \beta\,(u_{xx}^2 u_x)_x \; -$$

$$[(ax+b)u_x^3]_x = f(u) \quad (t,x) \in (0,T) \times [0,l] \tag{4.1}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0\ , \qquad u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,l) = 0 \qquad t \in (0,T) \tag{4.2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x) \qquad\qquad x \in [0,l] \tag{4.3}$$

Burada $T > 0$ keyfi bir sayı, $\alpha$ , $\beta, a$ ve $b$ negatif olmayan sayılardır. (4.1) denklemi akıntı ve dalgalanma etkisindeki bir iskele direğinin bir boyutlu uzaydaki modelinin denklemidir [95].

Şimdi (4.1) – (4.3) başlangıç-sınır değer probleminin $f(u),\ u_0\ ve\ u_1$ üzerindeki bazı şartlar altında genel çözümünün olamayacağı içbükeylik metodu kullanılarak gösterilecektir.

$f(u)$ fonksiyonu ilkeli $F(u) = \int_0^u f(\xi)d\xi$ olan ve aşağıdaki eşitsizliği $\forall\ s \in \mathbb{R}^1$

fonksiyonu ve $\gamma > 0$ reel sayısı için sağlayan bir fonksiyon olsun.

$$sf(s) \geq 4\left(2\gamma + \frac{\alpha}{2} + 1\right)F(s) \tag{4.4}$$

yukarıda tanımlanan problemin genel çözümünün yokluğu için aşağıda verilen teoremi ispatlayabiliriz.

### 4.2 Genel Çözümün Yokluğu

**Teorem 4.1 :**

$u_0(x)$ ve $u_1(x)$ aşağıdaki eşitsizlikleri sağlasınlar.

$$\int_0^l u_0(x)u_1(x)dx > 0$$

$$\int_0^l \big(u_0'(x)\big)^2\big(u_0''(x)\big)^2 dx + \int_0^l \big(u_1(x)\big)^2 dx +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^l (ax+b)\big(u_0'(x)\big)^4 dx + 2\int_0^l (ax+b)\big(u_0'(x)\big)^2 dx +$$

$$2\beta\int_0^l \big(u_0''(x)\big)^2 dx - 2\int_0^l F\big(u_0(x)\big)dx \le 0 \tag{4.5}$$

$\gamma$ aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak şekilde seçilmesi ile $f(u)$ fonksiyonu (4.4) şartını sağlasın.

$$\gamma > \frac{\alpha}{32\beta\mu_1^2} - \frac{1+\alpha}{4}$$

Burada $\mu_1$ Dirichlet şartını sağlayan $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ operatörünün en küçük özdeğeridir.

$t_2$ değerini aşağıda tanımlanan değer olarak alırsak,

$$t_2 = \frac{\int_0^l \big(u_0(x)\big)^2 dx}{\int_0^l u_0(x)u_1(x)dx} \tag{4.6}$$

$t_1 \le t_2$ olmak üzere bir $t_1$ sayısı vardır ve bu sayıya bağlı olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\lim_{t\to t_1}\int_0^l \big(u(x)\big)^2 dx \to +\infty \tag{4.7}$$

**İspat 4.1 :**

$$\Psi(t) = \int_0^l u^2(t,x)dx \tag{4.8}$$

$$\phi(t) = [\Psi(t)]^{-\gamma} \tag{4.9}$$

(4.8) ve (4.9) denklemleri $t$ ye göre iki kez türetilerek aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\phi'(t) = -\gamma[\Psi(t)]^{-\gamma-1}\Psi'(t) =$$

$$-2\gamma[\Psi(t)]^{-\gamma-1}\int_0^l u(t,x)u_t(t,x)dx \tag{4.10}$$

$$\phi''(t) = \gamma(\gamma+1)[\Psi(t)]^{-\gamma-2}[\Psi'(t)]^2 - \gamma[\Psi(t)]^{-\gamma-1}\Psi''(t)$$

$$\phi''(t) = -\gamma[\Psi(t)]^{-\gamma-2}\{\Psi''(t)\Psi(t) - (\gamma+1)[\Psi'(t)]^2\} \tag{4.11}$$

Şimdi aşağıdaki eşitsizlikleri ispatlayalım.

$$\phi'(0) < 0, \quad \text{ve} \quad \phi''(t) \le 0, \quad \forall\, t \ge 0 \tag{4.12}$$

(4.10) kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\phi'(0) = -2\gamma[\Psi(0)]^{-\gamma-1}\int_0^l u(0,x)u_t(0,x)dx \tag{4.13}$$

Teorem 4.1 deki hipotezler kullanılarak $\phi'(0) < 0$ eşitsizliğinin elde edileceği kolaylıkla görülebilir. $\phi''(t) \le 0$ eşitsizliğini ispatlamak için bu eşitsizliğe eş olan aşağıdaki eşitsizliği ispatlayalım.

$$H \equiv \Psi''(t)\,\Psi(t) - (1+\gamma)[\Psi'(t)]^2 \ge 0 \tag{4.14}$$

Yukarıdaki eşitsizliği ispatlamak için ilk olarak $\Psi'(t)$ ve $\Psi''(t)$ türevlerini hesaplayalım.

$$\Psi'(t) = 2\int_0^l u(t,x)u_t(t,x)dx \tag{4.15}$$

$$\Psi''(t) = 2\int_0^l u(t,x)u_{tt}(t,x)dx + 2\int_0^l [u_t(t,x)]^2dx \tag{4.16}$$

Bu iki eşitlik (4.14) de yerlerine konulursa,

$$H = 4(1+\gamma)\left\{\int_0^l u^2(t,x)dx \int_0^l [u_t(t,x)]^2 dx \; - \left[\int_0^l u(t,x)u_{tt}(t,x)dx\right]^2\right\}$$

$$+2\Psi(t)\left[\int_0^l u(t,x)u_{tt}(t,x)dx - (1+2\gamma)\int_0^l [u_t(t,x)]^2 dx\right] \tag{4.17}$$

Hölder eşitsizliğinden (4.17) denkleminin sağ tarafında küme parantezi içindeki ifadenin negatif olamayacağı görülmektedir. O halde (4.14) eşitsizliğinin ispati için aşağıdaki eşitsizliği ispatlamak yeterli olacaktır.

$$G(t) \equiv \int_0^l u(t,x)u_{tt}(t,x)dx - (1+2\gamma)\int_0^l [u_t(t,x)]^2 dx \;\geq\; 0 \tag{4.18}$$

(4.1) denkleminin her iki tarafı $u(t,x)$ ile çarpılıp $[0,l]$ aralığında integrallenerek ve gerekli kısmı integraller alınarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\int_0^l u(t,x)u_{tt}(t,x)dx \; = -\alpha\int_0^l u(t,x)u_t(t,x)dx - 2\beta\int_0^l [u_{xx}(t,x)]^2 dx \; -$$

$$2\beta\int_0^l [u_{xx}(t,x)]^2[u_x(t,x)]^2 dx - 2\int_0^l (ax+b)[u_x(t,x)]^2 dx$$

$$-\int_0^l (ax+b)[u_x(t,x)]^4 dx \; + 2\int_0^l u(t,x)f\big(u(t,x)\big)dx$$

$$\int_0^l \left[\frac{u(t,x)}{2} - u_t(t,x)\right]^2 dx \;\geq\; 0 \tag{4.19}$$

eşitsizliğinden yararlanarak aşağıdaki eşitsizlik kolaylıkla yazılabilir.

$$-\int_0^l u(t,x)u_t(t,x)dx \geq -\frac{1}{4}\int_0^l [u(t,x)]^2 dx \; - \int_0^l [u_t(t,x)]^2 dx$$

Bulunan bu ifadeler (4.18) de kullanılarak

$$G(t) \geq -\frac{\alpha}{4}\int_0^l [u(t,x)]^2 dx - 2\left(2\gamma + \frac{\alpha}{2} + 1\right)\int_0^l [u_t(t,x)]^2 dx$$

$$-2\beta\int_0^l [u_{xx}(t,x)]^2 dx \; - 2\beta\int_0^l [u_{xx}(t,x)]^2[u_x(t,x)]^2 dx$$

$$-2\int_0^l (ax+b)[u_x(t,x)]^2dx \; - \int_0^l (ax+b)[u_x(t,x)]^4dx$$

$$+\int_0^l u(t,x)f\big(u(t,x)\big)dx \tag{4.20}$$

Elde edilir. Şimdi (4.1) denklemi $u_t(t,x)$ ile çarpılıp $[0,l]$ aralığında $x$'e ve $[0,t]$ aralığında $t$'ye göre integrallenerek aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\int_0^l [u_t(t,x)]^2dx = -2\alpha\int_0^t\int_0^l [u_t(t,x)]^2dxdt - 2\beta\int_0^l [u_{xx}(t,x)]^2dx -$$

$$-2\beta\int_0^l [u_{xx}(t,x)]^2[u_x(t,x)]^2dx - 2\int_0^l (ax+b)[u_x(t,x)]^2dx \; -$$

$$\int_0^l (ax+b)[u_x(t,x)]^4dx \; - 2\int_0^l F\big(u(t,x)\big)dx \; + 2\beta\int_0^l [u_0''(x)]^2dx +$$

$$2\beta\int_0^l [u_0''(x)]^2[u_0'(x)]^2dx + \; 2\int_0^l (ax+b)[u_0'(x)]^2dx \; + \frac{1}{2}\int_0^l (ax+b)[u_0'(x)]^4dx$$

$$+\int_0^l [u_1(x)]^2dx + 2\int_0^l F\big(u_0(x)\big)dx \tag{4.21}$$

Bulunan bu ifade (4.20) denkleminde yerine yazılıp ve bazı pozitif terimler eşitsizliğin sağ tarafından çıkarılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$G(t) \geq -\frac{\alpha}{4}\int_0^l [u(t,x)]^2dx + 2\beta(4\gamma + \; \alpha+1)\int_0^l [u_{xx}(t,x)]^2dx$$

$$+\int_0^l u(t,x)f\big(u(t,x)\big)dx \; - 2(4\gamma + \; \alpha+2)\int_0^l F\big(u(t,x)\big)dx$$

$$-(4\gamma + \; \alpha+2)\Bigg[2\beta\int_0^l [u_0''(x)]^2dx + \beta\int_0^l [u_0''(x)]^2[u_0'(x)]^2dx$$

$$+2\int_0^l (ax+b)[u_0'(x)]^2dx \; + \frac{1}{2}\int_0^l (ax+b)[u_0'(x)]^4dx$$

$$+\int_0^l [u_1(x)]^2dx + 2\int_0^l F\big(u_0(x)\big)dx\Bigg] \tag{4.22}$$

Teorem 4.1 deki hipotezler kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$G(t) \geq -\frac{\alpha}{4}\int_0^l [u(t,x)]^2 dx + 2\beta(4\gamma + \alpha + 1)\int_0^l [u_{xx}(t,x)]^2 dx \tag{4.23}$$

$\mu_1$ Dirichlet şartını sağlayan $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ operatörünün en küçük özdeğeri olduğundan Courant-Weil teoreminden aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\mu_1 \int_0^l [u(t,x)]^2 dx \leq \int_0^l [u_{xx}(t,x)]^2 dx \tag{4.24}$$

Bu eşitsizlikle (4.23) eşitsizliğine gidilerek aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$G(t) \geq [2\beta\, \mu_1^2\, (4\gamma + \alpha + 1) - \alpha/4]\int_0^l [u(t,x)]^2 dx \tag{4.25}$$

Teorem 4.1 de yapılan kabule göre

$$2\beta\, \mu_1^2\, (4\gamma + \alpha + 1) - \alpha/4 \geq 0$$

olduğunda,

$$G(t) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır ve böylece Teorem 4.1 ispatlanmış olur.

# 5. İKİ BİLEŞENLİ LİNEER OLMAYAN DİSPERSİVE DALGA DENKLEMLER SİSTEMİ İÇİN UZAYA GÖRE YEREL PATLAMA KRİTERLERİ

Bu bölümde genelleştirilmiş Camassa-Holm denklemini içeren iki bileşenli denklem sistemi için patlama (Blow-Up) olayı incelenecektir. Belirli doğal başlangıç şartları altında uzaya göre yerel patlama kriterleri formülize edilecektir. Burada *Johnson,* Constantin ve Ivanovun un oluşturduğu iki bileşenli sistemler için; daha önce [88-89]. Brandolese, Cortez ve Novruzov un makalelerinde sunulmuş olan genelleştirilmiş Camassa-Holm denklemi için uzaya göre yerel patlama koşullarına; benzer koşullar elde edilmiştir.

## 5.1 Problemin Tanımı

Bu bölümde genelleştirilmiş Camassa-Holm denklemi için aşağıdaki iki bileşenli Cauchy problemini inceledik.

$$u_t - u_{xxt} + 3u_x u - uu_{xxx} - 2u_{xx}u_x + [g(u)]_x + \rho\rho_x = 0 \quad (5.1)$$

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \quad (5.2)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (5.3)$$

$$\rho(x,0) = \rho_0(x) \quad (5.4)$$

Burada $u(x,t)$ sıvının yatay hızını ifade etmekte, $\rho(x,t)$ ise sıvının denge durumuna göre yüksekliğe bağlı bir parametredir. (veya Skaler yoğunluğu ifade eden bir parametredir.) Eğer $g(u) = ku$ olarak alınırsa (5.1) denklemi Camassa-Holm denklemine dönüşür.

$$u_t - u_{xxt} + ku_x + 3uu_x + \rho\rho_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx},$$

$$(t > 0, x \in \mathbb{R}) \tag{5.5}$$

Burada $k$ kritik sığ su hızına bağlı bir dispersive katsayısıdır.

### 5.2 Ön Hazırlık

Bu bölümde, amacımıza ulaşmak için yerel iyi konumluluk sonucunu, doğrusal olmayan dispersive dalga denkleminin kesin patlama senaryosunu ve [90] den elde edilen bir sonucu sunuyoruz. (5.1) deki Cauchy probleminin yerel iyi tanımlı olduğu [84,87] de [56] daki klasik Kato teoremi ile ispatlanmıştır. Aşağıdaki teoremin ispatı [55, 60, 64] da elde edilen sonuçlara benzerdir ve [87] deki Teorem 3.1 in ispatını kullanarak kolayca elde edilir

(5.1) −(5.4) denklem sistemi için aşağıdaki teorem den yararlanacağız

**Theorem 5.1:** [84,87]

$g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ , $s > \frac{5}{2}$ olmak üzere $(u_0, \rho_0 - 1) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^{s-1}(\mathbb{R})$ olsun. Öyle bir $T = T(u_0, \rho_0, g) > 0$ ve (5.1) -(5.4) Cauchy probleminin tek çözümü vardır ki,

$(u, \rho - 1) \in C\big([0, T^*), H^s(\mathbb{R}) \times H^{s-1}(\mathbb{R})\big) \cap C^1\big([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{R}) \times H^{s-2}(\mathbb{R})\big)$
Ayrıca, çözüm başlangıç verilerine sürekli bağlıdır.

Ayrıca standart yolla aşağıdakileri elde ederiz.

**Lemma 5.1:**

$(u, \rho)$ çifti $(u_0, \rho_0 - 1) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^{s-1}(\mathbb{R})$, $s > \frac{5}{2}$, başlangıç verilerine karşılık gelen, (5.1) − (5.4) sisteminin çözümü ve $T$ çözümün var olduğu maksimum zaman olsun.

Bu durumda $t \in [0, T)$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\int_{\mathbb{R}} (u^2 + u_x^2 + (\rho - 1)^2)dx = \int_{\mathbb{R}} \big(u_0^2 + {u_0'}^2 + (\rho_0 - 1)^2\big)dx \tag{5.6}$$

[55] 'de benzer bir sistem için yapılan çalışmalara benzer şekilde, aşağıdaki sonucun geçerli olduğu gösterilebilir.

**Theorem 5.2:**

$g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ ve $(u,\rho)$ çifti $(u_0,\rho_0-1) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^{s-1}(\mathbb{R})$, $s > \frac{5}{2}$ başlangıç koşullarına karşılık gelen (5.1)-(5.4) sisteminin çözümü ve $T^* > 0$ olsun,

$(u,\rho)$ çözümünün sonlu zamanda patlaması için aşağıdaki koşul gerekli ve yeterlidir.

$$\lim_{t \to T^*} inf \left\{ \inf_{x \in \mathbb{R}} [u_x(x,t)] \right\} \to -\infty$$

Son olarak ilerde kullanacağımız aşağıdaki faydalı lemma yı hatırlayalım.

**Lemma 5.2:**

$f, g_1 \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ ve $f'' \geq \gamma > 0$ olmak üzere $1_{R\pm}$ iki indicator/ gösterge fonksiyonlarından ($1_{R^+}$ veya $1_{R^-}$) biri olsun [90].

($i$) öyle bir $c \in \mathbb{R}$ var ki $m = g_1(c) = \min_{\mathbb{R}} g_1$ olur.

$0 \leq K \leq 1$ olmak üzere,

$\varphi = \sqrt{\frac{(g_1 - m)}{\gamma}}$ ile verilen $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu K − Lipschitz fonksiyonu olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$p1_{R\pm} * \left( g_1(u) + \frac{f''(u)}{2} u_x^2 \right) \geq \frac{\alpha}{2}\big((g_1(u) - m)\big) + \frac{m}{2} \tag{5.7}$$

Burada,

$$p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \text{ ve } \alpha = \frac{1}{4K^2}\left(\sqrt{1+8K^2} - 1\right)$$

($ii$) öyle bir $c \in \mathbb{R}$ var ki $M = g_1(c) = \max_{\mathbb{R}} g_1$ olur.

$0 \leq K \leq 1/\sqrt{8}$ olmak üzere,

$\psi = \sqrt{\frac{(M - g_1)}{\gamma}}$ ile verilen $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu K−Lipschitz fonksiyonu olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$p1_{R\pm} * \left( g_1(u) + \frac{f''(u)}{2} u_x^2 \right) \geq \frac{\alpha}{2}\big((g_1(u) - M)\big) + \frac{M}{2} \tag{5.8}$$

Burada,

$$\alpha = \frac{1}{4K^2}\left(1 - \sqrt{1 - 8K^2}\right)$$

Sabit bir fonksiyon için $g_1 = m = M$ olur (bu da K = 0'a karşılık gelir) ve yukarıdaki eşitsizlik aşağıdaki gibi yazılır.

$$p1_{R\pm} * \left(g_1(u) + \frac{f''(u)}{2} u_x^2\right) \geq \frac{g}{2}$$

## 5.3 Esas Teorem

Şimdi çalışma sonuçlarımızı ispatlamaya ve formülize etmeye hazırız.

**Teorem 5.3:**

$g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $s > \frac{5}{2}$ ve $(u, \rho)$ çifti $(u_0, \rho_0 - 1) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^{s-1}(\mathbb{R})$, başlangıç değerine karşılık gelen (5.1)–(5.4) sisteminin çözümü olsun. $(u, \rho) \in C\left([0, T^*), H^s(\mathbb{R})\right) \cap C^1\left([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{R}) \times H^{s-2}(\mathbb{R})\right)$ çözümünün $T^*$ maksimal zamanı aşağıdaki (*i*) veya (*ii*) koşullarından birisi sağladığı zaman sonlu olur.

(*i*)- $g_1(s) = s^2 + g(s)$ fonksiyonu için öyle bir $c \in \mathbb{R}$ vardır ki $m = g_1(c) = \min_{\mathbb{R}} g_1$

- $0 \leq K \leq 1$ olmak üzere $\varphi = \sqrt{(g_1 - m)}$ ile verilen $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu K−Lipschitz dir.

- $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ öyle ki $\rho_0(x_0) = 0$ ve

$$u_0'(x_0) < -\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1 + 8K^2} - 1\right)\varphi\left(u_0(x_0)\right) \tag{5.9}$$

(*ii*)- Veya Diğer durumda

- $g_1(s) = s^2 + g(s)$ fonksiyonu için öyle bir $c \in \mathbb{R}$ vardır ki $M = g_1(c) = \min_{\mathbb{R}} g_1$

- $0 \leq K \leq 1/\sqrt{8}$ olmak üzere $\psi = \sqrt{(M - g_1)}$ ile verilen $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu K−Lipschitz fonksiyonu olsun.

- $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ öyle ki $\rho_0(x_0) = 0$ ve

$$u_0'(x_0) < -\frac{1}{2K}\left(1 - \sqrt{1 - 8K^2}\right) \psi\big(u_0(x_0)\big) \tag{5.10}$$

**İspat:**

Aşağıdaki notasyonu kullalım

$$y = u - u_{xx} \quad \text{ve}$$

$$E_1(t) = \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y(\xi,t)\, d\xi \, .$$

Burada $q(x_0,t)$ aşağıdaki problemin çözümüdür.

$$q_t = u(q(x,t),t), q(x,0) = 0 \tag{5.11}$$

$u$ üzerine konulan koşullardan dolayı $q \in C^1([0,T^*) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ fonksiyonu tüm $[0,T^*)$ zaman aralığında tanımlıdır [74, 87, 90]. Bu durumda $E_1(t)$ in türevini alarak aşağıdaki ifadeyi elde ediliriz.

$$\frac{dE_1(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y_t(\xi,t)\, d\xi + e^{q(x_0,t)} y(q(x_0,t),t) q_t(x_0,t) \tag{5.12}$$

Kısmi integral alınarak aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y_t(\xi,t)\, d\xi =$$

$$\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} (-3u_x u + u u_{xxx} + 2u_{xx}u_x - [g(u)]_x - \rho\rho_x)\, d\xi =$$

$$\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} (-u_x u + u u_{xxx} + 2u_{xx}u_x - [g(u) + u^2]_x - \rho\rho_x)\, d\xi =$$

$$\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} \left(-\left[\frac{1}{2}u^2\right]_x + [u u_{xx}]_x - [g_1(u)]_x + \left[\mathbf{\frac{1}{2}} u_x^2\right]_x - \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_x\right) d\xi =$$

$$\left[-\frac{1}{2} e^{\xi} u^2 + e^{\xi} u u_{xx} + \frac{1}{2} e^{\xi} u_x^2 - e^{\xi} g_1(u) - \frac{1}{2} e^{\xi}\rho^2\right]\Bigg|_{-\infty}^{q(x_0,t)} +$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} u^2 d\xi - \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} u u_{xx} d\xi - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} u_x^2 d\xi +$$

$$\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, g_1(u)d\xi + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, \rho^2 d\xi \;\; =$$

$$\left[-\frac{1}{2}\, e^{\xi}\, u^2 + e^{\xi}uu_{xx} - \frac{1}{2}\, e^{\xi}\rho^2\right]\Bigg|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + \left[\frac{1}{2}\, e^{\xi}\, u_x^2 - \; e^{\xi}g_1(u) - \; e^{\xi}uu_x\right]\Bigg|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \;\; +$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, u^2 d\xi + \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, uu_x d\xi + \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, u_x^2 d\xi - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, u_x^2 d\xi +$$

$$\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, g_1(u)d\xi + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, \rho^2 d\xi \; =$$

$$\left[\frac{1}{2}\, e^{\xi}\, u^2 - \; e^{\xi}uu_x\right]\Bigg|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \; +$$

$$\left[-\frac{1}{2}\, e^{\xi}\, u^2 + e^{\xi}uu_{xx} + \frac{1}{2}\, e^{\xi}\, u_x^2 - \; e^{\xi}g_1(u) \; - \frac{1}{2}\, e^{\xi}\rho^2\right]\Bigg|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \;\; +$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, u^2 d\xi - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, u^2 d\xi \; + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, u_x^2 d\xi \; +$$

$$\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, g_1(u)d\xi \; + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, \rho^2 d\xi \; =$$

$$\left[e^{\xi}u(u - u_x)\right]\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + \left[\frac{1}{2} e^{\xi}\, u_x^2 - e^{\xi}u\,(u - u_{xx}) - e^{\xi}g_1(u) \; - \frac{1}{2}\, e^{\xi}\rho^2\right]\Bigg|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \; +$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, u_x^2 d\xi \; + \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, g_1(u)d\xi \; + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, \rho^2 d\xi \; =$$

$$\left[e^{\xi}u\,(u - u_x) - \; e^{\xi}uy + \frac{1}{2}\, e^{\xi}\, u_x^2 - \; e^{\xi}(g_1(u) - m) \; - \frac{1}{2}\, e^{\xi}\rho^2\right]\Bigg|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \; +$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, u_x^2 d\xi \; + \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, (g_1(u) - m)d\xi \; +$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, \rho^2 d\xi \qquad (5.13)$$

Şimdi (5.13) ü (5.12) de kullanarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\frac{dE_1(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y_t(\xi,t)\, d\xi + e^{q(x_0,t)} y(q(x_0,t),t) q_t(x_0,t) \geq$$

$$\left[e^{\xi}u\,(u-u_x)-\ e^{\xi}uy+\frac{1}{2}\ e^{\xi}\ u_x^2-\ e^{\xi}(g_1(u)-m)\ -\frac{1}{2}\ e^{\xi}\rho^2\right]\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}+$$

$$e^{q(x_0,t)}y(q(x_0,t),t)q_t(x_0,t)+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}\ u_x^2d\xi+$$

$$\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}\ (g_1(u)-m)d\xi\ +\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}\ \rho^2d\xi$$

(5.11) eşitliğini dikkate alarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\frac{dE_1(t)}{dt}\geq\left[e^{\xi}u\,(u-u_x)+\frac{1}{2}\ e^{\xi}\ u_x^2-\ e^{\xi}(g_1(u)-m)\ -\frac{1}{2}\ e^{\xi}\rho^2\right]\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}+$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}\ u_x^2d\xi\ +\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}\ (g_1(u)-m)d\xi+$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}\ \rho^2d\xi \tag{5.14}$$

(5.14) eşitsizliğini $e^{-q(x_0,t)}$ ile çarparak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$e^{-q(x_0,t)}\frac{dE_1(t)}{dt}\geq\left[u\,(u-u_x)+\frac{1}{2}\ u_x^2-(g_1(u)-m)\ \right](q(x_0,t),t)\ +$$

$$\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}\ u_x^2d\xi+e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}\ (g_1(u)-m)d\xi\ -$$

$$\frac{1}{2}\rho^2|_{-\infty}^{q(x_0,t)}\ +\ \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}\ \rho^2d\xi$$

Son eşitsizliğin sağ ve sol tarafına $-\ q_t(x_0,t)e^{-q(x_0,t)}E_1(t)$ ifadesini ekleyip ve (5.11) den yararlanarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$-\ q_t(x_0,t)e^{-q(x_0,t)}E_1(t)+e^{-q(x_0,t)}\frac{dE_1(t)}{dt}\geq-\ q_t(x_0,t)e^{-q(x_0,t)}E_1(t)+$$

$$\left[u\,(u-u_x)+\frac{1}{2}\ u_x^2-(g_1(u)-m)-\frac{1}{2}\rho^2\ \right](q(x_0,t),t)\ +$$

$$\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}\ u_x^2d\xi+e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}\ (g_1(u)-m)d\xi\ +$$

$$\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}\ \rho^2d\xi$$

Bununla birlikte aşağıdaki eşitliğin doğru olduğu açıktır..

$$E_1(t) = \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y(\xi,t)\, d\xi = e^{q(x_0,t)}\big(u(q(x_0,t),t) - u_x(q(x_0,t),t)\big)$$

Dolayısıyla,

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\Big) \geq$$

$$\frac{1}{2}u_x^2(q(x_0,t),t) - \big(g_1\big(u(q(x_0,t),t)\big) - m\big) - \frac{1}{2}\rho^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}$$

$$+\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, u_x^2 d\xi \ + e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, (g_1(u) - m) d\xi$$

$$+\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, \rho^2 d\xi$$

(5.7) kullanılarak (tam olarak [90] daki (3.5) eşitsizliği) $f(s) = \frac{1}{2}s^2$ ve $g_1(s) = s^2 + g(s)$ için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\Big) \geq$$

$$\frac{1}{2}u_x^2(q(x_0,t),t) - \left(1 - \frac{1}{4K^2}\Big(\sqrt{1+8K^2} - 1\Big)\right) \times$$

$$\big(g_1\big(u(q(x_0,t),t)\big) - m\big) - \frac{1}{2}\rho^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, \rho^2 d\xi \ \geq$$

$$\frac{1}{2}\left(u_x^2(q(x_0,t),t) - \frac{\mathbf{2}}{K^2}\left(K^2 - \frac{1}{4}\Big(\sqrt{1+8K^2} - 1\Big)\right)\big(g_1\big(u(q(x_0,t),t)\big) - m\big)\right) -$$

$$\frac{1}{2}\rho^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\, \rho^2 d\xi$$

Aşağıdaki eşitliğin sağlandığı açıktır.

$$\frac{1}{2K}\Big(\sqrt{1+8K^2} - 1\Big) = \sqrt{\frac{\mathbf{2}}{K^2}\left(K^2 - \frac{1}{4}\Big(\sqrt{1+8K^2} - 1\Big)\right)}$$

Burdan,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(u(q(x_0,t),t) - u_x(q(x_0,t),t)\right) \geq$$

$$\frac{1}{2}\left(u_x^2(q(x_0,t),t) - \left(\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\left(u(q(x_0,t),t)\right)\right)^2\right)$$

$$-\left(g_1\left(u(q(x_0,t),t)\right) - m\right) - \frac{1}{2}\rho^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\,\rho^2 d\xi \;\geq$$

$$\frac{1}{2}\rho^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\,\rho^2 d\xi \tag{5.15}$$

Şimdi aşağıda verilen integral için benzer eşitsizliği elde edelim.

$$E_2(t) = \int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi} y(\xi,t)\,d\xi$$

Türev alarak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\frac{dE_2(t)}{dt} = \int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi} y_t(\xi,t)\,d\xi - e^{-q(x_0,t)} y(q(x_0,t),t)q_t(x_0,t) \tag{5.16}$$

Kısmi integrasyon kullanarak,

$$\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi} y_t(\xi,t)\,d\xi =$$

$$\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\left(-\left[\frac{1}{2}u^2\right]_x + [uu_{xx}]_x - [g_1(u)]_x + \left[\frac{1}{2}u_x^2\right]_x - \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_x\right)d\xi \;=$$

$$\left[-\frac{1}{2}e^{-\xi}u^2 + e^{-\xi}uu_{xx} + \frac{1}{2}e^{-\xi}u_x^2 - e^{-\xi}g_1(u) - \frac{1}{2}e^{-\xi}\,\rho^2\right]\Bigg|_{q(x_0,t)}^{\infty} -$$

$$\int_{q(x_0,t)}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-\xi}u^2\,d\xi \;+\; \int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\,uu_{xx}d\xi \;+\frac{1}{2}\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\,u_x^2\,d\xi \;-$$

$$\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi} g_1(u)\,d\xi - \frac{1}{2}\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\,\rho^2\,d\xi \;=$$

$$\left[\frac{1}{2}e^{-\xi}u^2 - e^{-\xi}g_1(u) + e^{-\xi}uu_x - \frac{1}{2}e^{-\xi}u^2 + \frac{1}{2}e^{-\xi}u_x^2 - \frac{1}{2}e^{-\xi}\,\rho^2\right]\Bigg|_{q(x_0,t)}^{\infty} -$$

$$\frac{1}{2}\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\,u_x^2 d\xi \;-\; \int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi} g_1(u)\,d\xi - \frac{1}{2}\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\,\rho^2\,d\xi \;=$$

$$\left[e^{-\xi}\, u(u+u_x) - e^{-\xi} uy - e^{-\xi} g_1(u) + \frac{1}{2} e^{-q(x_0,t)} u_x^2 \; - \frac{1}{2} e^{-\xi}\, \rho^2 \right]\Bigg|_{q(x_0,t)}^{\infty} -$$

$$\frac{1}{2}\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\, u_x^2 d\xi \; - \int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi} g_1(u)\, d\xi - \frac{1}{2}\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\, \rho^2\, d\xi \qquad (5.17)$$

Elde edilir.

Ayrıca (5.16) ve (5.17) ye göre,

$$-\frac{dE_2(t)}{dt} = -\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi} y_t(\xi,t)\, d\xi + e^{-q(x_0,t)} y(q(x_0,t),t) q_t(x_0,t) \geq$$

$$e^{-q(x_0,t)} y(q(x_0,t),t) q_t(x_0,t) +$$

$$\left[ u(u+u_x) - e^{-\xi} uy + \frac{1}{2} u_x^2 - (g_1(u) \; - \; m) \right] (q(x_0,t),t) \; +$$

$$\frac{1}{2}\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\, u_x^2 d\xi \; + \int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi} (g_1(u) - m)\, d\xi +$$

$$\frac{1}{2} e^{-q(x_0,t)} \rho^2 |_{q(x_0,t)}^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\, \rho^2\, d\xi$$

Elde edilir.

(5.11) kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$-e^{q(x_0,t)} \frac{dE_2(t)}{dt} \geq$$

$$\frac{1}{2} e^{q(x_0,t)} \int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\, u_x^2 d\xi \; + e^{q(x_0,t)} \int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi} (g_1(u) - m)\, d\xi +$$

$$\left[ u(u+u_x) + \frac{1}{2} u_x^2 - (g_1(u) \; - \; m) \right] (q(x_0,t),t) \; +$$

$$\frac{1}{2} \rho^2 |_{q(x_0,t)}^{\infty} + \frac{1}{2} e^{q(x_0,t)} \int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\, \rho^2\, d\xi \qquad (5.18)$$

Kısmi integrasyon kullanılarak

$$E_2(t) = \int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi} y(\xi,t)\, d\xi = \; e^{-q(x_0,t)} \big( u(q(x_0,t),t) + u_x(q(x_0,t),t) \big)$$

Elde edilir.

(5.18) eşitsizliğinin her iki tarafına $q_t(x_0,t)e^{q(x_0,t)}E_2(t)$ ifadesini ekleyip, (5.11) ve (5.7) yardımıyla aşağıdaki ifade elde edilir.

$$-\frac{d\left(e^{q(x_0,t)}E_2(t)\right)}{dt} \geq$$

$$\frac{1}{2}u_x^2(q(x_0,t),t) - \left(g_1\big(u(q(x_0,t),t)\big) - m\right) +$$

$$\frac{1}{2}e^{q(x_0,t)}\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\,u_x^2 d\xi \; + \; e^{q(x_0,t)}\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}(g_1(u)-m)\,d\xi -$$

$$\frac{1}{2}\rho^2|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\,\rho^2\,d\xi \;\geq \frac{1}{2}u_x^2(q(x_0,t),t) -$$

$$\left(1-\frac{1}{4K^2}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\right)\left(g_1\big(u(q(x_0,t),t)\big) - m\right) +$$

$$\frac{1}{2}\rho^2|_{q(x_0,t)}^{\infty} + \frac{1}{2}e^{q(x_0,t)}\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\,\rho^2\,d\xi$$

(5.2) ve (5.11) kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{d}{dt}\rho(q(x_0,t),t) = \rho_t(q(x_0,t),t) + \rho_x(q(x_0,t),t)q'(x_0,t) =$$

$$\rho_t(q(x_0,t),t) + \rho_x(q(x_0,t),t)u(q(x_0,\tau),\tau)$$

$$= -\rho(q(x_0,t),t)u_x(q(x_0,\tau),\tau)$$

Dolayısıyla,

$$\rho(q(x_0,t),t) = \rho_0(x_0)e^{\int_0^t - u_x(q(x_0,\tau),\tau)d\tau}$$

ve $\rho_0(x_0) = 0$ olduğundan tüm *t* değerleri için $\rho(q(x_0,t),t) = 0$ olur

Böylece,

$$\frac{d}{dt}\left(-u(q(x_0,t),t) \; - \; u(q(x_0,t),t)\right) \geq$$

$$\frac{1}{2}\left(u_x^2(q(x_0,t),t) - \left(\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\big(u(q(x_0,t),t)\big)\right)^2\right) \tag{5.19}$$

Bununla birlikte, (5.15) kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{d}{dt}\big(u(q(x_0,t),t) - u_x(q(x_0,t),t)\big) \geq$$

$$\frac{1}{2}\left(u_x^2(q(x_0,t),t) - \left(\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\big(u(q(x_0,t),t)\big)\right)^2\right)$$

Dolayısıyla, aşağıdaki gibi tanımlanan $\mathcal{R}_1(t)$ and $\mathcal{R}_2(t)$ fonksiyonları

$$\mathcal{R}_1(t) = u(q(x_0,t),t) - u_x(q(x_0,t),t)$$

$$\mathcal{R}_2(t) = -u(q(x_0,t),t) - u_x(q(x_0,t),t)$$

aşağıda tanımlanan $\mathcal{N}_1(t)$ fonksiyonu pozitif kaldıkça monoton artan fonksiyonlardır.

$$\mathcal{N}_1(t) = -u_x(q(x_0,t),t) - \frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\big(u(q(x_0,t),t)\big) > 0$$

Teorem 5.3'deki (5.9) denkleminden yararlanılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\mathcal{N}_1(0) = -u_0'(x_0) - \frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\big(u_0(x_0)\big) > 0$$

$\mathcal{N}_1(t)$ in sürekliliğinden $\mathcal{R}_1(t)$ ve $\mathcal{R}_2(t)$ fonksiyonlarının $[0,T_1)$ aralığında artan oldukları görülür. Bunun anlamı $\mathcal{R}_1(t_2) \geq \mathcal{R}_1(t_1)$ ve $\mathcal{R}_2(t_2) \geq \mathcal{R}_2(t_1)$ $t_1 < t_2 < T_1$ veya eşdeğer olarak

$$\big(-u_x(q(x_0,t_2),t_2)\big) - \big(-u_x(q(x_0,t_1),t_1)\big) \geq$$

$$-\big(u(q(x_0,t_2),t_2) - u(q(x_0,t_1),t_1)\big),$$

$$\big(-u_x(q(x_0,t_2),t_2)\big) - \big(-u_x(q(x_0,t_1),t_1)\big) \geq$$

$$u(q(x_0,t_2),t_2) - u(q(x_0,t_1),t_1)$$

Burada,

$$\big(-u_x(q(x_0,t_2),t_2)\big) - \big(-u_x(q(x_0,t_1),t_1)\big) \geq$$

$$|u(q(x_0,t_2),t_2) - u(q(x_0,t_1),t_1)|$$

elde edilir.

Bununla birlikte Teorem 3.1 in koşulundan,

$$\big|\varphi\big(u(q(x_0,t_2),t_2)\big) - \varphi\big(u(q(x_0,t_1),t_1)\big)\big| \leq$$

$$K|u(q(x_0,t_2),t_2) - u(q(x_0,t_1),t_1)|,$$

elde edilir.

Burada $K \leq 1$ dir. Böylece aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$\left(-u_x(q(x_0,t_2),t_2)\right) - \left(-u_x(q(x_0,t_1),t_1)\right) \geq$$

$$\frac{1}{K}\left|\varphi\left(u(q(x_0,t_2),t_2)\right) - \varphi\left(u(q(x_0,t_1),t_1)\right)\right| \geq$$

$$\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\left|\varphi\left(u(q(x_0,t_2),t_2)\right) - \varphi\left(u(q(x_0,t_1),t_1)\right)\right|.$$

Bunun anlamı,

$$\mathcal{N}_1(t_2) \geq \mathcal{N}_1(t_1) > 0 \tag{5.20}$$

Aynı zamanda aşağıdaki gibi tanımlanan $\mathcal{N}_2(t)$ fonksiyonunun $[0, T_1)$ aralığında monoton artan olduğu görülür

$$\mathcal{N}_2(t) = \left(-u_x(q(x_0,t),t)\right) + \frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\left(u(q(x_0,t),t)\right)$$

Böylece $\mathcal{N}_1(t)$, $\mathcal{N}_2(t)$ ve $\mathcal{N}_1(t)\mathcal{N}_2(t)$ fonksiyonları $[0, T_1)$ aralığında artandır. Bununla birlikte (5.20) nin yardımıyla $\mathcal{N}_1(T_1) > 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla, yukarıda kullanılan argümanlar benzer şekilde kullanılarak $\mathcal{R}_1(t)$, $\mathcal{R}_2(t)$, $\mathcal{N}_1(t)$ ve $\mathcal{N}_2(t)$ fonksiyonları tüm $t > T_1$ için monoton artan oldukları kolaylıkla görülebilir.

Dolayısıyla,

$$\mathcal{N}_1(t)\mathcal{N}_2(t) \geq \mathcal{N}_1(0)\mathcal{N}_2(0)$$

olduğundan, aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\frac{d}{dt}\left(u(q(x_0,t),t) - u_x(q(x_0,t),t)\right) \geq$$

$$\left(-u_x(q(x_0,t),t)\right)^2 - \left(\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\left(u(q(x_0,t),t)\right)\right)^2 \geq$$

$$\left(-u_x(x_0,0)\right)^2 - \left(\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\left(u(x_0,0)\right)\right)^2 = l > 0 \tag{5.21}$$

Benzer şekilde,

$$\frac{d}{dt}\left(-u(q(x_0,t),t) - u_x(q(x_0,t),t)\right) \geq l \tag{5.22}$$

(5.21) ve (5.22) eşitsizliklerinin toplamından aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\frac{d}{dt}\big(-u_x(q(x_0,t),t)\big) \geq l$$

Dolayısıyla,

$$-u_x(q(x_0,t),t) \geq -u_x(x_0,0) + lt$$

Ancak (5.6) dan aşağıdaki eşitsizlik görülebir.

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \tfrac{1}{\sqrt{2}}\|u\|_{H^1} \leq \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\int_{\mathbb{R}}\big(u_0^2 + {u_0'}^2 + (\rho_0 - 1)^2\big)dx} \quad [74]$$

Bu da $u(q(x_0,t),t)$ nin (ve dolayısıyla $\varphi\big(u(q(x_0,t),t)\big)$ nin) sınırlı olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak yeterince büyük $t_0$ vardır.

$$-\frac{1}{2}u_x(q(x_0,t_0),t_0) \geq \left(\sqrt{1+8K^2} - 1\right)|u(q(x_0,t_0),t_0) - c|$$

Böylece, (5.21) ve (5.22) den aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$\frac{d}{dt}\big(u(q(x_0,t),t) - u_x(q(x_0,t),t)\big) \geq \frac{1}{4}\big(-u_x(q(x_0,t),t)\big)^2$$

ve

$$\frac{d}{dt}\big(-u(q(x_0,t),t) - u_x(q(x_0,t),t)\big) \geq \frac{1}{4}\big(-u_x(q(x_0,t),t)\big)^2$$

$t > t_0$ için.

Buradan,

$$\frac{d}{dt}\big(-u_x(q(x_0,t),t)\big) \geq \frac{1}{4}\big(-u_x(q(x_0,t),t)\big)^2$$

Bu durumda,

$$-\frac{d}{dt}\big(-u_x(q(x_0,t),t)\big)^{-1} \geq \frac{1}{4}$$

Bu ifadeyi $(t_0, \tau + t_0)$ aralığında integre ederek,

$$-\big(-u_x(q(x_0,\tau+t_0),\tau+t_0)\big)^{-1} + \big(-u_x(q(x_0,t_0),t_0)\big)^{-1} \geq \frac{1}{4}\tau$$

Elde edilir, Eşitsizlik düzenlenerek,

$$\big(-u_x(q(x_0,t_0),t_0)\big)^{-1} - \frac{1}{4}\tau \geq$$

$$\left(-u_x(q(x_0,\tau+t_0),\tau+t_0)\right)^{-1}$$

ve

$$-u_x(q(x_0,\tau+t_0),\tau+t_0) \geq$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\left(-u_x(q(x_0,t_0),t_0)\right)^{-1}-\frac{1}{4}\tau}$$

elde edilir. Böylece

$$\tau \longrightarrow \mathbf{4}\left(\left(-u_x(q(x_0,t_0),t_0)\right)^{-1}\right)$$

olduğunda,

$$-u_x(q(x_0,\tau+t_0),\tau+t_0) \longrightarrow \infty$$

elde edilir.

Böylece, Teorem 5.3, ($i$) koşulu için ispatlanmış olur.

Teoremin ($ii$) kısmını ispatlamak için ($i$) kısmında bazı gerekli basit değişiklikler yapmak yeterlidir. Bu durumda, (5.15) ve (5.19) yerine (5.8) kullanılarak aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\frac{d}{dt}\left(u(q(x_0,t),t)-u_x(q(x_0,t),t)\right) \geq$$

$$\frac{1}{2}\left(u_x^2|_{q(x_0,t)}-\left(\frac{1}{2K}\left(1-\sqrt{1-8K^2}\right)\psi\left(u(q(x_0,t),t)\right)\right)^2\right)$$

ve

$$\frac{d}{dt}\left(-u(q(x_0,t),t)-u_x(q(x_0,t),t)\right) \geq$$

$$\frac{1}{2}\left(u_x^2|_{q(x_0,t)}-\left(\frac{1}{2K}\left(1-\sqrt{1-8K^2}\right)\psi\left(u(q(x_0,t),t)\right)\right)^2\right).$$

elde edilir.

İspatın kalan kısmı için (5.10) kullanılarak ve aynı yol kullanılır tamamlanır.

Böylece Teorem in ispatı tamamlanmış olur.

Thorem 5.3 in ispatından kolaylıkla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 1:**

$g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $\rho \equiv 0$ olsun ve $u \in C\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R})\big), s > \frac{5}{2}$ (5.1) -(5.3) de verilen problemin global düzgün çözümü olsun, ayrıca aşağıda verilen ($i$) veya ($ii$) koşullarından en az bir tanesi sağlansın.

($i$)- $g_1(s) = s^2 + g(s)$ olmak üzere $g_1(s)$ fonksiyonu için öyle bir $c \in \mathbb{R}$ vardır ki

$$m = g_1(c) = \min_{\mathbb{R}} g_1$$

- $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\varphi = \sqrt{(g_1 - m)}$ ile tanımlı, $\varphi$ dönüşümü, $0 \leq K \leq 1$ için K−Lipschitz dir.

($ii$)- veya,

- $g_1(s) = s^2 + g(s)$ olmak üzere $g_1(s)$ fonksiyonu için öyle bir $c \in \mathbb{R}$ vardır ki

$$M = g_1(c) = \max_{\mathbb{R}} g_1$$

- $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\psi = \sqrt{(M - g_1)}$ ile tanımlı ,$\psi$ dönüşümü, $0 \leq K \leq \frac{1}{\sqrt{8}}$ için K−Lipschitz dir.

Buradan, tüm $t > 0$ için aşağıda ($i$') ve ($i$'') nde verilen iki sonuç elde edilir:

($i$')- ($i$) Koşulu altında,

$$u_x(x,t) \succ \frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2} - 1\right)\varphi\big(u(x,t)\big) \geq$$

$$-\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2} - 1\right)|u(x,t) - c|;$$

($i$'') – veya ($ii$) koşulu altında,

$$u_x(x,t) \succ \frac{1}{2K}\left(1 - \sqrt{1-8K^2}\right)\psi\big(u(x,t)\big) \geq$$

$$-\frac{1}{2K}\left(1 - \sqrt{1-8K^2}\right)|u(x,t) - c|,$$

**Sonuç 2:**

Sonuç 1deki koşullar altında,

($i$') $c < 0$ olması halinde , tüm $x \in \mathbb{R}$ , $u \geq c$ olur.

($i$'') $c > 0$ olması halinde, tüm $x \in \mathbb{R}$ , $u < c$ olur.

İspat: Eğer sabit t için $[a,b]$ aralığı üzerinde $u(x,t)-c>0$ olursa (5.23) (veya (5.24)) e göre aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$-\gamma\int_a^b e^{\gamma x}\,(u(x,t)-c)dx \le \int_a^b e^{\gamma x}\,u_x(x,t)dx =$$

$$e^{\gamma b}(u(b,t)-c)-e^{\gamma a}(u(a,t)-c)-\gamma\int_a^b e^{\gamma x}\,(u(x,t)-c)dx$$

Burada,

$$\gamma=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\quad \text{(Sonuç 1 deki } (i) \text{ durumunda)}$$

veya,

$$\gamma=\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-8K^2}\right)\quad \text{(Sonuç 1 deki } (ii) \text{ durumunda)}$$

Buradan aşağıdaki ifade elde edilir.

$$0\le e^{\gamma a}(u(a,t)-c)\le e^{\gamma b}(u(b,t)-c)$$

Dolayısıyla, $a$ dan büyük tüm $b$ değerleri için , $u(b,t)>c$ olur. $(a,t)$ noktasının sol komşuluğunun herhangi bir noktasında $u(x,t)<c$ olsun. Örneğin $p<a$ için $u(p,t)<c$.

Bu durumda,

$$\gamma\int_s^p e^{-\gamma x}\,(u(x,t)-c)dx \le \int_s^p e^{-\gamma x}\,u_x(x,t)dx =$$

$$e^{-\gamma b}(u(p,t)-c)-e^{\gamma s}(u(s,t)-c)+\gamma\int_s^p e^{-\gamma x}\,(u(x,t)-c)dx$$

olur ve bunun sonucu olarak,

$$e^{-\gamma s}(u(s,t)-c)\le e^{-\gamma p}(u(p,t)-c)<0$$

elde edilir.

Ancak, $c<0$ olduğu için $s\to-\infty$ olmak üzere , $u(s,t)\to 0$ olur. Buradan belli bir $s<p$ için son eşitsizliğin sol tarafı pozitif olur. Diğer yandan $u(s,t)-c<0$ . Böylece bir çelişki elde ediyoruz. Bu da $u(x,t)-c>0\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ için demektir.

Benzer şekilde, (*i*") ifadesinin geçerliliğini ispatlayabiliriz. Böylece Sonuç 2 sağlanır.

Not: Teorem 5.3 aynı zamanda $c \in (0,3)$ olmak üzere aşağıdaki genelleştirilmiş hiperelastik-çubuk dalga denklem sistem için de geçerlidir.

$$u_t - u_{xxt} + 3u_x u - c(uu_{xxx} + 2u_{xx}u_x) + [g(u)]_x + \rho\rho_x = 0$$

$$\rho_t + (c\rho u)_x = 0$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$\rho(x,0) = \rho_0(x)$$

İspat, gerekli küçük değişikliklerle ve aynı yöntemle yapılır.

## 6. SONUÇ

Tezimizde Levine tarafından [6-7]’de verilen "İçbükeylik Yöntemi" ve V. K. Kalantarov ve A. Ladyzhenskaya tarafından [9]’da verilen "Genelleştirilmiş İçbükeylik Yöntemi" kullanılarak bazı dalga denklemlerı için; sınır koşullarının sönüm terimini içerdiği durumlar da güz önüne alınarak; başlangıç sınır değer problemlerinin çözümlerinin patlaması ve genelleştirilmiş Camassa-Holm denklemler sistemi için Cauchy probleminin çözümünün patlama koşulları araştırılmış ve incelenen problemlerde çözümlerin patlaması ile ilgili kriterler elde edilmiştir.

Elde edilen sonuçlar hem teorik hemde pratik açıdan önemlidir. Özellikle bu tür denklemler için basit ve kolay yoklanabilecek patlama koşullarının elde edilmesi önem arzetmektedir.

Tezimiz bu alanda çalışmakta olan diğer araştırmacıların farklı problemlerin değişik şartlar altında çözümlerinin incelenmesinde faydalanabilecekleri bir çalışmadır.

## KAYNAKLAR


[1] **Kaplan, S.** (1963). On the Growth of Solutions of Quasilinear Parabolic Equations, *Comm. pure Appl. Math. 16*, 305-330.

[2] **Fujita, H.** (1969). On the Blowing Up of Solutions to the Cauchy Problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ *Journal Faculty Science*, *13*, 109-124.

[3] **Friedman, A**. (1964*). Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, Inc.

[4] **Glassey, R. T.** (1973). Blow up Theorems of Nonlinear Wave Equations, *Mathematische Zeitschrift, 132*, 183-203.

[5] **Lions, J. L.** (1961). *Equations Differéntielles Opérationelles et Probléme aux Limites*, Springer.

[6] **Levine**, **H. A.** (1974). Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations. *SIAM J. Math. Anal. 5, No: 1*, 138-148

[7] **Levine, H. A.**. (1974). Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form, $Pu_{tt} = -Au + F(u)$, *Trans.Am. Math. Soc.192*, 1-21.

[8] **Jörgens, K.** (1967). Das Anfangsproblem im Grossen für eine Klasse Nightlinearer Wellengleichung, *Math. Z. 77*, 295-308.

[9] **Keller, J. B.** (1957). On solutions of nonlinear wave equations, *Comm. Pure Appl. Math.,10*, 523-530.

[10] **Settinger, D. H.** (1967). Stability of nonlinear hyperbolic equations, *Arch. Rational Mech. Anal. 28*, 226-244.

[11] **Kalantarov, V. K.** ve **Ladyzhenskaya, O. A.** (1977). The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hypherbolic type, *J. soviet Math., 10*, 5370, 1978. Translated from *Zap. Nauch. Sem. LOMI Steklov, 69*, 77-102.

[12] **Knops, R. J., Levine, H. A. ve Payne, L. E.** (1974). Nonexistence, instability and growth theorems for solutions to an abstract nonlinear equation with applications to elastodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal. 55*.

[13] **Levine**, **H. A.** (1974). A note on a nonexistence theorem for nonlinear wave equations. *SIAM J. Math. Anal. 5, No:5*, 644-648.

[14] **Levine, H. A., Payne**, **L. E.** (1974). Nonexistence theorems for the heat equations with nonlinear boundary conditions and for porous medium equation backward in time, *J. Diff. Eq. 16*, 319-334.

[15] **Straughan**, **B.** (1975). Further global nonexistence theorems for abstract nonlinear wave equations, *Proc. Amer. Math. Soc. 48*, 381-390.

[16] **Bayrak, V.** ve **Can**, **M.** (1997). Global nonexistence of solutions of the quasilinear hyperbolic equation of the vibrations of a riser, *Math. and Comp. Appl. 2 (1),* 45-52.

[17] **Kalantarov**, **V. K.** (1983). Collapse of the solutions of parabolic and hypherbolic equtions with nonlinar boundary conditions, *J. soviet Math., 27,* 2601-2606, 1984. Translated from *Zap. Nauch. Sem. LOMI Steklov, 127,* 75-83.

[18] **Kalantarov, V. K.** (1987). On the global behaviour of the solutions of Cauchy problem for the second order differential-operator equtions, *Izv. A. N. Az. SSR, sr. fiz. Tch. Math. Nauk., 7, no. 6,* 36-43.

[19] **Maksudov, F.G.** ve **Aliev**, **F. A.** (1992). On a problem for a nonlinear hyperbolic equation of higher order with dissipation on the boundary of the domain, *Soviet Math. Dokl., 44,* 771-774.

[20] **Turitsyn**, **S. K.** (1993).On the Toda lattice model with a transversal degree of freedom, sufficient criterion of blow up in the continuum limit, *Phys. Lett. A, 173,* 267-269.

[21] **Levine, H. A.** ve **Serrin, J.** (1995) *A global nonexistence theorem for quasilinear evolution equations with dissipation,* IMA Preprint Series # 1340. University of Minnesota

[22] **Kirane, M., Kouachi, S.** ve **Tartar**, **N.** (1995). Nonexistence of global solutions of some quasilinear hyperbolic equations with dynamic boundary conditions, *Math. Nachr. 176,* 139-147.

[23] **Kirane, M.** ve **Tartar, N.** (2001). A nonexistence result to a Cauchy problem in nonlinear one-dimensional thermoelasticity, *Journal of mathematical analysis and applications, Volume 254, Issue 1,71-86*

[24] **Kirane, M.** ve **Tartar, N.** (2000). Non-existence results for a semilinear hyperbolic problem with boundary condition of memory type, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen 19 (2),* 453-468

[25] **M. Kirane**. (1992) Blow-up for some equations with semilinear dynamical boundary conditions of parabolic and hyperbolic type, *Hokkaido Mathematical Journal 21 (2),* 221-229.

[26] **Can, M., Park,S. R.** ve **Aliyev**, **F.** (1997) Nonexistence of global solutions of some quasilinear hyperbolic equations, *J. Math. Anal. And Appl. 213,* 540-553.

[27] **Bayrak, V., Can M,** ve **Aliyev**, **F.** (1998) Nonexistence of global solutions of a quasilinear hyperbolic equation, *Math. Inequalities and Appl. 1 (3),* 367-374.

[28] **Bayrak, V.** ve **Can M.** (1999) Nonexistence of global solutions of a quasilinear bihyperbolic equation with dynamical boundary conditions, *EJQTDE. No: 3,* 1-10.

[29] **Ball, J.** (1977) Remarks on blow up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations, *Quart. J. Math. Oxford (2), 28,* 473-486.

[30] **Georgiev, V.** ve **Todorova**, **G.** (1994). Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms, *J. Diff. Eqs., 109/2,* 295-308.

[31] **Camassa, R.** ve **Holm, D**. (1993). An integrable shallow water equation with peaked solitons, *Physical Review Letters, 71,* 1661-1664.

[32] **Camassa, R., Holm, D.** ve **Hyman, J.** (1994) A new integrable shallow water equation, *Advences in Applied Mechanics, 31,* 1-33.

[33] **Constantin. A.** ve **Strauss W. A**. (2000). Stabilty of peakons, *Pure Applied Mathematics, 53,* 603-610.

[34] **Beals R., Sottinger D.** ve **Szmigielski J**. (1999). Multipeakons and a theorem of Stieltjes, *Inverse Problem, 15,* 1-4.

[35] **Beals R., Sottinger D.** ve **Szmigielski J**. (1998). Acoustic scattering and the extended Korteweg de Vries hierarchy, *Advances in Mathematics, 140,* 190-206

[36] **Constantin, A**. (1997). The Hamiltonian structure of the Camassa-Holm equation, *Expo setiones Mathematics, 15,* 53-85.

[37] **Constantin, A.** ve **Escher, J.** (1998). Global weak solutions for a shallow water equation, *Indiana University Mathematics Journal, 47,* 1527-1545,

[38] **Constantin, A.** ve **Escher, J**. (1998). Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations, *Acta Mechanica, 181,* 229-243.

[39] **Constantin, A.** ve **Escher, J**. (1998). Global existence and blow-up for a shallow water equation, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Scienze, 26,* 303-328.

[40] **Constantin, A.** ve **Molinet, L**. (2000). Global weak solutions for a shallow water equation, *Communications in Mathematical Physics, 211,* 45-61.

[41] **Himonas, A. A.** ve **Misiolek, G**. (2000). Well-posedness of the Cauchy problem for a shallow water equation on the circle, *Journal of Differential Equations, 161,* 479-495.

[42] **Li, Y. A.** ve **Olver, tP. J.** (2000) Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation, *Journal of Differential Equations, 162,* 27–63.

[43] **Misiolek, G.** (2002) Classical solutions of the periodic Camassa-Holm equation, *Geometric and Functional Analysis, 12, 5,* 1080-1104.

[44] **Tian, L., Gui G.** ve **Liu Y**. (2005). On the Cauchy Problem and the scattering problem for the Dullin-Gottwald-Holm equation, *Communications in Mathematical Physics,257, 3,* 667-701.

[45] **Zhou, Y**. (2007). Blow up solutions to the DGH equation, *Journal of Functional Analysis, 250, 1,* 227-248.

[46] **Novruzov, E**. (2012). On blow-up phenomena for the weakly dissipative Camassa-Holm equation, *Journal of Engineering Mathematics, 77,* 187-195.

*[47]* **Novruzov, E**. (2013). Blow-up phenomena for the weakly dissipative Dullin–Gottwald- Holm equation, *Journal of Mathematical Phsics, 54, 9.*

[48] **Himonas, A. A. ve Holliman, C**. (2014). The Cauchy Problem For A Generalized Camassa-Holm Equation, *Advances in Differential Equation, 19, 1-2,* 161-200.

[49] **Novruzov, E.** ve **Hagverdiyev, A**. (2014). On the behavior of the solution of the dissipative Camassa–Holm equation with the arbitrary dispersion coefficient, *Journal of Differantial Equations, 257,* 4525–4541.

[50] **Olver, P.** ve **Rosenau, P.** (1996). Tri- Hamiltonian duality between solitons and solitary - wave solutions having compact support, *Phys. Rev. E, 53,* 1900-1906.

[51] **Constantin, A.** ve **Ivanov, R. I.** (2008). On an integrable two-component Camassa–Holm shallow water system, *Phys. Lett. A, 372,* 7129-7132.

[52] **Escher, J., Henry, D., Kolev, B.** ve **Lyons**, **T.** (2016). Two-component equations modelling water waves with constant vorticity, *Ann. Mat. Pura Appl., 195,* 249-271

[53] **Ivanov**, **R.** (2009). Two- component integrable systems modelling shallow water waves: the constant vorticity case, *Wave Motion, 46* , 389–396.

[54] **Hone, A. N. W., Novikov, V.** ve **Wang, J. P.** (2017). Two-component generalizations of the Camassa-Holm equation, *Nonlinearity, 30,* 622–658.

[55] **Escher, J., Lechtenfeld, O. ,** ve **Yin, Z. Y.** (2007). Well-posedness and blow-up phenomena for the 2-component Camassa–Holm equation, *Discrete Contin. Dyn. Syst., 19,* 493-513.

[56] **Kato, T.** (1975). Quasi-linear Equations of Evolution with Applications to Partial Differential Equations, Spectral Theory and Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics, *Berlin Heidelberg New York, Springer, 448,* 25-70.

[57] **Gui, G.** ve **Liu, Y.** (2011). On the Cauchy problem for the two component Camassa-Holm system, *Math. Z., 268,* 45-66.

[58] **Liu, Y. ve Zhang**, **P.** (2010). Stability of solitary waves and wave - breaking phenomena for the two - component Camassa - Holm system, *International Mathematics Research Notices ( Volume: 2010 , Issue: 11),* 1981-2021.

[59] **Aratyn, H., Gomes,J. F. ve A. H. Zimerman.** On a negative flow of the AKNS hierarchy and its relation to a two - Component Camassa – Holm equation, *Symmetry, Integrability and Geom. Methods Appl., 2, Paper 070,* 12 pp.

[60] **Chen, R. M. ve Liu, Y.** (2011). Wave breaking and global existence for a generalized two-component Camassa–Holm system, *Int. Math. Res. Not., 6,* 1381–1416.

[61] **Chen, R. M.** ve **Liu, Y. ve Qiao, Z.** (2011**).** Stability of solitary waves and global existence of a generalized two-component Camassa-Holm system, *Comm. Partial Differ. Equ., 36,* 2162-2188.

[62] **Guan, C. X. ve Yin**, **Z. Y.** (2011). Global weak solutions for a two-component Camassa-Holm shallow water systems, *J. Funct. Anal., 260,* 1132–1154.

[63] **Gui, G. ve Liu, Y.** (2011). On the global existence and wave breaking criteria for thetwo-component Camassa–Holm system, *J.Funct. Anal., 258,* 4251-4278.

[64] **Zhu, M.** ve **Xu, J.** (2012). On the wave-breaking phenomena for the periodic two-component Dullin–Gottwald–Holm system, *J. Math. Anal. Appl., 391,* 415-428.

[65] **Yang, S.** ve **Xu, T.** (2019).Local-in-space blow-up and symmetric waves for a generalized two-component Camassa- Holm system, *Applied Mathematics and Computation, 347,* 514521.

[66] **Constantin, A.** ve **Lannes, D.** (2009). The hydrodynamical relevance of the Camassa-Holm and Degasperis-Procesi equations, *Arch. Ration. Mech. Anal., 192,* 165-186.

[67] **Johnson ,R, S.(**2002).Camassa-Holm, Korteweg-de Vries and related models for water waves, *J. Fluid Mech., 455*, 63-82.

[68] **Fokas, A.** ve **Fuchssteiner, B.** (1981). Symplectic structures, their Backlund transformation and hereditary symmetries, *Phys. D, 4,* 47–66.

[69] **Beals, R., Sattinger, D.** ve **Szmigielski, J.** (1998). Acoustic scattering and the extended Korteweg de Vries hierarchy, *Adv. Math., 140,* 190-206

[70] **Boutet de Monvel, A., Kostenko, A., Shepelsky, D.** ve **Teschl, G. (**2009). Long-time asymptotic for the Camassa-Holm equation, *SIAM J. Math. Anal. 41,*1559-1588.

[71] **Constantin, A.** ve **McKean, H. P.** (1999).A shallow water equation on the circle, *Comm. Pure Appl. Math., 52,* 949–982.

[72] **Constantin, A**. (2001). On the scattering problem for the Camassa - Holm equation, *Proc. Roy. Soc. London A, 457*, 953–970.

[73] **Bressan, A.** ve **Constantin. A.** (2007). Global dissipative solutions of the Camassa-Holm equation, *Anal. Appl., 5,* 1-27.

[74] **Constantin, A.** (2000) Existence of permanent and breaking waves for a shallow water equation: A geometric approach, *Ann. Inst. Fourier, 50,* 321–362.

[75] **Jiang, Z., Ni, L.** ve **Zhou, Y.** (2012) Wave breaking of the Camassa-Holm equation, *J. Nonlinear Sci., 22*, 235–245.

[76] **Constantin, A.** (2005). Finite propagation speed for the Camassa-Holm equation, *J. Math. Phys., 46,* 023506, 4pp.

[77] **Henry, D.** (2005). Compactly supported solutions of the Camassa-Holm equation, *J. Nonlinear Math.Phys., 12,* 342–347.

[78] **D. Henry.** (2009). Infinite propagation speed for a two component Camassa-Holm equation, *Discrete&Contin. Dyn.Syst.Ser.B, 12,* 597-606.

[79] **Henry, D.** (2009). Persistence properties for a family of nonlinear partial differential equations, *Nonlinear Anal.,70* , 1565–1573.

[80] **Himonas, A., Misiolek, G., Ponce, G.** ve **Zhou, Y.** (2007) Persistence properties and unique continuation of solutions of the Camassa-Holm equation, *Comm. Math. Phys., 271,* 511–522.

[81] **Zhou, Y**. ve **Chen H**. (2011). Wave breaking and propagation speed for the CammasHolm equation with $K \neq 0$, *Nonlinear Analysis: Real World Aplications, 12,* 1875-1882.

[82] **Dai, H.** (1998). Model equations for nonlinear dispersive waves in a compressible Mooney-Rivlin rod, *Acta Mech., 127,* 193–207.

[83] **Dai, Hui-Hui ve Huo, Yi.** (2000). Solitary shock waves and other travelling waves in a general compressible hyper elastic rod., *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 456, no. 1994,* 331–363.

[84] **Zhaoyang**, **Yin.** (2004) On the blow-up scenario for the generalized Camassa-Holm equation. *Comm. Partial Differential Equations 29, no. 5-6,* 867–877.

[85] **Zhaoyang**, **Yin. (**2004). Well-posedness, global solutions and blowup phenomena for a nonlinearly dispersive wave equation. J. *Evol. Equ. 4, no.3,* 391–419.

[86] **Yong, Zhou**. (2005). Local well-posedness and blow-up criteria of solutions for a rod equation. *Math. Nachr. 278, no. 14,* 1726–1739.

[87] **Tian, Changan., Yan, Wei., Zhang**, **Haixia.** (2014). The Cauchy problem for the generalized hyperelastic rod wave equation. *Math. Nachr. 287, no. 17-18,* 2116–2137.

[88] **Brandolese, Lorenzo. (**2014). Local-in-space criteria for blowup in shallow water and dispersive rod equations. *Comm. Math. Phys. 330, no. 1,* 401–414.

[89] **Novruzov**, **Emil.** (2017). Local-in-space blow-up criteria for a class of nonlinear dispersive wave equations. *J. Differential Equations 263, no. 9,* 5773–5786.

[90] **Brandolese, Lorenzo.** ve **Cortez, Manuel Fernando. (**2014). Blowup issues for a class of nonlinear dispersive wave equations. *J. Differential Equations 256, no. 12,* 3981–3998.

[91] **Brandolese, Lorenzo**. ve **Cortez, Manuel Fernando.** (2014). On permanent and breaking waves in hyperelastic rods and rings. *J. Funct. Anal. 266, no. 12,* 6954–6987.

[92] **Adams, R**. (1975) *Sobolev Spaces,* Academic Press, New York.

[93] **Evans, L. C.** (1998). *Partial Differential Equations,* Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, AMS, Rhode Island.

[94] **Kesevan, S**. (1989 ). *Topics in Functional Analysis and Applications,* John Wiley and Sons, India.

[95] **Sun, Ming-guang**. (1986). The stress boundary layers of a slender riser in a steady flow, *Adv. Hydrodyn., 4,* 32-43.

[96] **Evans, L. C.** (1997). *Partial Differantial Equations,* Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society.

[97] **Lyons, T. (**2014). Particle trajectories in extreme Stokes waves over infinite depth. *Discrete&Contin. Dyn. Syst. 34, no. 8*, 3095–3107.

[98] **Bayrak, Vural.**, **Novruzov, Emil. ve Ozkol, Ibrahim.** (2019). Local-in-space blow-up criteria for two-component nonlinear dispersive wave system. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - A, 39 (10)* : 6023-6037.

**ÖZGEÇMİŞ**

**Ad-Soyad** : Vural Bayrak

**Doğum Tarihi ve Yeri** : 01.12.1968 – Horasan / Erzurum

**E-posta** : vuralbayrak@me.com

**ÖĞRENİM DURUMU:**

- **Lisans** : 1990, Yıldız Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü
- **Yükseklisans** : 1992, Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı, Matematik Mühendisliği Programı

**MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:**

- 1991-1992 yılları arasında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü – Araştırma Görevlisi.
- 1992-1999 yılları arasında Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümü – Araştırma Görevlisi.
- 1999-2000 yılları arasında Bayındırlık ve İskan Bakanlığı, İstanbul İl Müdürlüğü – Müdür Yardımcısı
- 2000-2017 yılları arasında Şahsuvaroğlu Dış Ticaret LTD. ŞTİ., Sırasıyla: – Satış Müdürü, Genel Md. Yrd., Genel Md., ve Group CEO' su
- 2018-2019 yılları arasında Kartal Belediye Başkanlığı
- – Mühendis,
- 2019-…. yılları arasında Çevre ve Şehircilik Bakanlığı, İstanbul İl Müdürlüğü
- – Mühendis,

## DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

1. **Bayrak, V.** ve Can, M., 1997. Global nonexistence of solutions of the quasilinear hyperbolic equation of the vibrations of a riser, *Math. and Comp. Appl. 2 (1), 4552.*
2. **Bayrak, V.,** Can, M. ve Aliyev, F., 1998. Nonexistence of global solutions of a quasilinear hyperbolic equation, *Math. Inequalities and Appl. 1 (3), 367-374,*
3. **Bayrak, V.** ve Can, M., 1999. Nonexistence of global solutions of a quasilinear bihyperbolic equation with dynamical boundary conditions, *EJQTDE. No: 3, 1-10.*
4. **Bayrak, V.,** Novruzov E. ve Ozkol I., 2019. Local-in-space blow-up criteria for two-component nonlinear dispersive wave system. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - A, 39 (10) : 6023-6037.*