İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİRİM DİSKTE KOMPLEKS MERTEBEDEN P-VALENT YILDIZIL FONKSİYONLAR SINIFI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşenur BERBEROĞLU

Anabilim Dalı : Matematik Bilgisayar

Programı : Matematik Bilgisayar

HAZİRAN 2005

İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİRİM DİSKTE KOMPLEKS MERTEBEDEN P-VALENT YILDIZIL FONKSİYONLAR SINIFI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşenur BERBEROĞLU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 03 Haziran 2005
Tezin Savunulduğu Tarih : 20 Haziran 2005

Tez Danışmanı : **Yard.Doç.Dr. Yaşar POLATOĞLU**

Diğer Jüri Üyeleri : **Yard.Doç.Dr. Metin BOLCAL**

Yard.Doç.Dr. Arzu ŞEN

HAZİRAN 2005

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezimi yöneten ve bu süreçte benden desteğini , ilgisini esirgemeyen hocam Yard.Doç.Dr.Yaşar POLATOĞLU'na , yardımları ve güleryüzüyle bana destek olan hocam Yard.Doç.Dr.Arzu ŞEN'e , sevgili arkadaşım Araş.Gör.Emel YAVUZ'a ve kilometrelerce uzakta olsalar da varlıklarını, desteklerini, sevgilerini daima içimde hissettiğim aileme sonzuz teşekkürler.

Haziran 2005 Ayşenur BERBEROĞLU

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ **iv**

ÖZET **vi**

SUMMARY **vii**

1. GİRİŞ **1**

2. YALINKAT FONKSİYONLAR **8**

3. YALINKAT FONKSİYONLAR İÇİN KLASİK DİSTORSİYON TEOREMLERİ **13**

4. SABORDİNASYON PRENSİBİ **24**

5. POZİTİF REEL KISMA HAİZ FONKSİYONLAR **38**

6. YILDIZIL FONKSİYONLAR **51**

7. KOMPLEKS MERTEBEDEN YILDIZIL FONKSİYONLAR **62**

8. BİRİM DİSKTE KOMPLEKS MERTEBEDEN P-VALENT YILDIZIL FONKSİYONLAR SINIFI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA **65**

KAYNAKLAR **85**

ÖZGEÇMİŞ **87**

SİMGE LİSTESİ

α	: $0 \le \alpha < 1$ koşuluna uyan bir sayı
b	: sıfırdan farklı bir kompleks sayı
$\mathbb{C}$	: kompleks sayılar cümlesi
C(r)	: analitik Jordan eğrisi
D	: birim dairenin içi
Δ	: birim dairenin dışı
$\partial D, \partial\Delta$	: birim dairenin sınırı
$d(x, y)$	: x ve y noktaları arasındaki uzaklık fonksiyonu
E , E(g)	: $g(z) \in \Sigma$ fonksiyonuyla yapılan tasvirde , resim bölgesinin kompakt tamamlayıcısı
ε	: pozitif bir reel sayı ve civarın yarıçapı
$\Gamma_{\varepsilon}(x)$	: iki boyutlu reel öklid uzayında bir x noktasının ε-civarı
$h(\xi)$	: z_0 noktasına göre f(z) fonksiyonunun Koebe transformasyonu
$\prec$	: subordine olma özelliği
$N_{\varepsilon}(x)$	: x noktasının ε-civarı
Ω	: bölge
P	: pozitif reel kısma haiz fonksiyonlar sınıfı (Caratheodory fonksiyonlar sınıfı)
P(A,B)	: Janowski fonksiyon sınıfı
P(1,-1)	: Caratheodory fonksiyonlar sınıfı (pozitif reel kısma haiz fonksiyonlar sınıfı)
Σ	: Δ'da yalınkat g(z) fonksiyonlar sınıfı
S	: D'de yalınkat f(z) fonksiyonlar sınıfı
S*	: yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
S*(1-α)	: α ncı mertebeden yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

S*(1-b)	: kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$S^*(1-e^{-i\lambda}\cos\lambda)$	: λ-spirallike fonksiyonlar sınıfı
$S^*((1-\alpha)e^{-i\lambda}\cos\lambda)$	: α ncı mertebeden λ-spirallike fonksiyonlar sınıfı
S*(A,B,b,p,q)	: kompleks mertebeden p-valent Janowski yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
X	: metrik uzay
Y	: metrik uzayın bir alt uzayı

ÖZET

Basit bağlantılı bir bölgede analitik olan bir fonksiyon injektif ise yalınkattır. Yalınkat fonksiyon ilk olarak 1907 yılında Koebe tarafından tanıtılmıştır.. Daha sonraki yıllarda diğer matematikçiler tarafından farklı yalınkat fonksiyon sınıfları tanıtılmıştır. Bir kompleks değişkenli analitik fonksiyonun bir sınıfı üzerine yapılan çalışmanın temel amacı, onun Taylor açılımındaki n. katsayısının modülü için bir üst sınır bulmaktır. Diğer temel amaç f(z) fonksiyonunun modülü için distorsiyon teoremlerini bulmak ve aynı sınıf için Koebe bölgesini tayin etmektir.
Biz bu çalışmada; 2001 yılında H.M.Srivastava ve O.Altıntaş tarafından tanıtılan kompleks mertebeden p-valent yıldızıl fonksionlar sınıfını genişletip kompleks mertebeden p-valent Janowski yıldızıl fonksiyonlar sınıfını tanımlayarak, bu sınıf için sabordinasyon prensibi ve 2004 yılının popüler lemması olan I.S. Jack Lemması kullanılarak gösterilim teoremini, bu teoremden yararlanarak sınıf için distorsiyon teoremini, genelleştirilmiş yıldızıllık yarıçapını, genelleştirilmiş konvekslik yarıçapını ve sınıfın özel durumunda katsayı eşitsizliğini vereceğiz.

SUMMARY

In a simply-connected domain, if an analytic function is injective, then it is also univalent. Univalent functions were firstly introduced by Koebe in 1907. In the following years, different classes of univalent functions are introduced by other mathematicians. The main aim of a study on a class of analytic functions which have complex variables, is to find an upper bound for the module of n^{th} coefficient in its Taylor expansion. The other main goal is to find distortion theorems for modules of f(z) function and to assign Koebe domain for the mentioned class.

In this thesis study, we define the complex-order p-valent starlike Janowski function class by expanding the complex-order p-valent starlike functions which are introduced by H.M. Srivastava and O.Altıntaş in 2001. Furthermore, using the subordination principle for this class and using the I.S. Jack Lemma, that was popular lemma of 2004, we define the representation theorem, and by the help of this theorem, we give distortion theorem, generalized starlikeness radius, generalized convexness radius and in this spacial case of the class, the coefficients inequality.

1.GİRİŞ

Birim çemberde analitik ve yalınkat olan tek kompleks değişkenli fonksiyonlar ilk olarak 1907 yılında Koebe tarafından incelenmiştir [1]. Daha sonra da çeşitli matematikçiler bu sınıfları genelleştirerek çeşitli yalınkat fonksiyon sınıfları ortaya atmışlar ve bu sınıfları incelemişlerdir. Tek kompleks değişkenli analitik fonksiyonların incelenmesinde temel amaç, ortaya atılan fonksiyon sınıfının Taylor açılımındaki a_n katsayısına ait modülün üst sınırını bulmak, fonksiyon sınıfına ait distorsiyon teoremlerini araştırmak ve Koebe bölgelerini ifade etmektir.

Biz bu çalışmada 2001 yılında H.M.Srivastava ve Osman Altıntaş tarafından [2] tanıtılan birim diskte p-valent kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyonların bir alt sınıfı olan fonksiyonlar için gösterilim teoremi, distorsiyon teoremi, genelleştirilmiş yıldızıllık yarıçapı, genelleştirilmiş konvekslik yarıçapı ve katsayı eşitsizliğini verdik.

Çalışma konumuzla ilgili daha fazla bilgi için tezin sonundaki kaynakçaya başvurulabilir.

Şimdi analitik fonksiyonların tanım bölgelerinden bahsetmek için, elemanter topolojik kavramların tanımlarını vermek faydalı olacaktır.

1.1 Tanım (Metrik Uzay) : X boştan farklı herhangi bir cümle olsun. X cümlesinin herhangi iki elemanı için $d(x,y)\in R$ reel sayısı, aşağıdaki aksiyomları sağlamak üzere verilmiş olsun.

(i) $\forall\, x,y\in X$, $x\neq y$ için $d(x,y)>0$

(ii) $\forall\, x,y\in X$, $x=y$ için $d(x,y)=0$ (İdantik özelliği)

(iii) $\forall\, x,y\in X$, $x\neq y$ için $d(x,y)=d(y,x)$ (Simetri özelliği)

(iv) $\forall\, x,y,z\in X$, $x\neq y\neq z$ için $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ (Üçgen eşitsizliği)

Bu taktirde

$d: X \times X \rightarrow R$ tasviri X cümlesi üzerinde bir metrik uzay yapısını belirtmiş olur. Yeni (X, d) sıralı ikilisine bir metrik uzay denir. Burada $x, y, z, ... \in X$ lere X metrik uzayının noktaları , $d(x, y)$ reel sayısına da x ve y noktaları arasındaki uzaklık fonksiyonu adı verilir. Burada belirtmek gerekir ki yukarıda sıralanan aksiyomlara metrik uzay aksiyomları denir. Eğer X cümlesi $\mathbb{C}$ olarak alınırsa , $(\mathbb{C}, d)$ sıralı ikilisi de bir metrik uzaydır.

1.2 Metrik Uzayın Alt Uzayları: X bir metrik uzay ve $Y \subset X$, X uzayının herhangi bir alt cümlesi olsun. X metrik uzay olduğundan, X uzayında bir uzaklık fonksiyonu verilmiştir. Y cümlesinin her elemanı aynı zamanda X uzayının elemanı olduğundan, X uzayında tanımlanan uzaklık fonksiyonu, Y alt cümlesinin elemanları için aynı zamanda metrik uzay aksiyomlarını gerçekler. Bundan dolayı bir metrik uzayın her alt cümlesi de bir metrik uzaydır.

1.3 Tanım: X herhangi bir metrik uzay olsun. $\varepsilon > 0$ reel sayısını ve $x \in X$ noktasını gözönüne alalım. X uzayı d uzaklık fonksiyonu ile donatılmış ise

$N_\varepsilon(x) = \{y \mid d(x, y) < \varepsilon \ , \ y \in R\}$

nokta cümlesine x noktasının ε-civarı adı verilir. Burada $\varepsilon > 0$ reel sayısına bu civarın yarıçapı denir.

1.4 Tanım: X herhangi bir metrik uzay ve A, X uzayının bir alt cümlesi olsun. $x \in A$ noktası için $N_\varepsilon(x) \subset A$ koşulunu sağlayan bir $N_\varepsilon(x)$ civarı varsa, $x \in A$ noktasına A cümlesinin bir iç noktası denir.

1.5 Tanım: X herhangi bir metrik uzay ve A, X uzayının bir alt cümlesi olsun. A noktasının her noktası bir iç nokta ise, A cümlesine bir açık cümle denir.

1.6 Tanım: X herhangi bir metrik uzay ve A, X uzayının bir alt cümlesi olsun. X uzayına ait bir x noktası için, x noktasının her $N_\varepsilon(x)$ civarında $x \neq y$, $y \in N_\varepsilon(x)$ olacak şekilde, A cümlesi hiç olmazsa bir y elemanı varsa, x noktasına A cümlesinin bir yığılma noktası veya limit noktası denir.

1.7 Tanım: X herhangi bir metrik uzay ve A, X metrik uzayının bir alt cümlesi olsun. A cümlesinin her yığılma noktası A cümlesinin bir noktası ise, A cümlesine kapalı cümle denir. (Yığılma noktasını içinde bulunduran kümeye kapalı küme denir.)

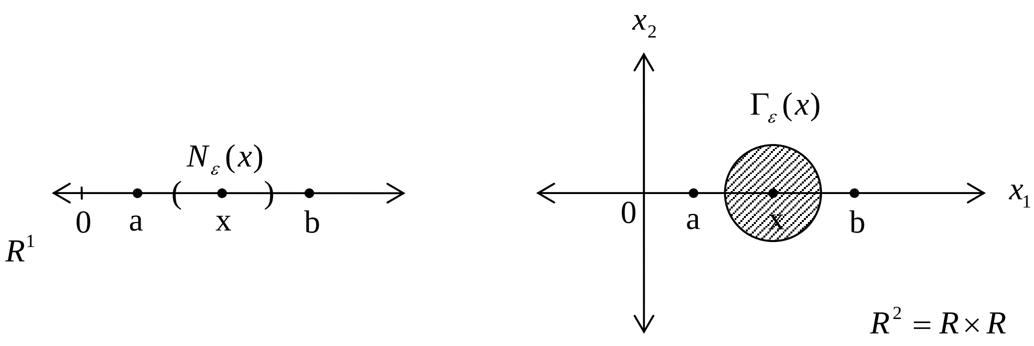
1.8 Alt Ve Üst Uzaylara Göre Açık Olma Durumu: X metrik uzayının içinde bulunan bir Y alt metrik uzayı verilmiş olsun. A açık cümlesi Y alt metrik uzayının içinde olsun. Ynin bir alt uzay olmasından dolayı, Y uzayındaki civar kavramı, Y uzayını ihtiva eden X metrik uzayındaki civar kavramından daha dardır. Bundan dolayı, Y uzayında açık olan A cümlesi, X uzayında açık olmayabilir.

Buna örnek olarak; (a,b) açık aralığı R^1 bir boyutlu reel euclid uzayında açık bir cümledir. Fakat $R^1 \subset R^2$ yani R^1 bir boyutlu reel euclid uzayı $R^2 = R \times R$ iki boyutlu reel euclid uzayının bir alt uzayıdır ve (a,b) açık aralığı R^2 uzayında, bir açık cümle değildir.

İspat: R^1 bir boyutlu reel euclid uzayında bir (a,b) açık aralığı

$(a, b) = \{x \mid a < x < b \ , \ x \in R^1\}$ nokta cümlesidir.

Her (a,b) açık aralığı R^1 bir boyutlu reel euclid uzayında açık bir cümledir. Şimdi bir boyutlu reel euclid uzayının bir iki boyutlu R^2 euclid uzayının içinde alındığını farzedelim. Burada ispatı basitleştirmek için, söz konusu R^1 uzayı R^2 uzayının içinde olan x_1 ekseni olarak alınmış olsun. Bu takdirde yukarıdaki aralık R^2 uzayında



Şekil 1.1

$(a, b) = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid a < x_1 < b \ , \ x_2 = 0\}$ şeklinde belirtilen nokta cümlesidir

Ve $\forall x \in (a,b) \subset R^2$ noktasının genel bir $\Gamma_\varepsilon(x)$ civarı

$$\Gamma_\varepsilon(x) = \{\ y \in R^2 \ \Bigg|\ \left[\sum_{i=1}^{2}(x_i - y_i)^2\right]^{1/2} < \varepsilon\ \}$$ nokta cümlesidir.

Fakat bu nokta cümlesi $y_2 \neq 0$ olacak şekilde y noktaları ihtiva ettiğinden (a,b) cümlesinin içinde bulunmaz. Bu halde (a,b) aralığının, R^2 uzayında düşünülmesi halinde, her x noktası için $\Gamma_\varepsilon(x) \subset (a,b)$ olacak şekilde tek bir $\Gamma_\varepsilon(x)$ bulunamaz. Yani (a,b) aralığı R^1 uzayında açık fakat R^2 uzayında açık değildir. İspat tamamlanmıştır.

Bu durumdan dolayı, alt ve üst uzaylara göre açık olma durumunu aşağıdaki ispatsız teoremle verebiliriz.

1.9 Teorem: X bir metrik uzay ve $Y \subset X$ alt metrik uzayını gözönüne alalım. Y alt metrik uzayında bulunan bir A alt cümlesinin Y uzayına göre açık olması için gerek ve yeter şart, B cümlesi X üst metrik uzayında açık bir cümle olmak üzere
$A = B \cap Y$
koşulunun gerçeklenmesidir.

1.10 Bağlantılı Olmak: X bir metrik uzay ve A bu uzayın bir alt cümlesi olsun. A cümlesi; boştan farklı, ayrık, iki açık alt cümlenin birleşimi olarak gösterilemezse, A cümlesine bağlantılıdır denir.

Yani bu demektir ki;

$B \neq \emptyset$ B açık, $B \subset A$

ve $B \cap C = \emptyset$ olmak üzere $A = B \cup C$

$C \neq \emptyset$ C açık, $C \subset A$

olacak şekilde B ve C cümleleri bulunamıyorsa, A cümlesi bağlantılıdır denir.

1.11 Tanım: Boştan farklı, açık, bağlantılı bir cümleye bölge denir.

1.12 Tanım: Sonsuz noktasının düzleme katılmasıyla meydana gelen düzleme genişletilmiş düzlem denir.

1.13 Tanım: Bir bölgenin tamamlayıcısı, genişletilmiş düzleme nazaran bağlantılı ise bu bölgeye basit bağlantılı bölge denir.

1.14 Tanım: Bir bölgenin bir O noktasını herhangi bir A noktasına birleştiren doğru parçası tamamı ile bölge içinde kalıyorsa, bu bölgeye O noktasına nazaran yıldız bölge denir.

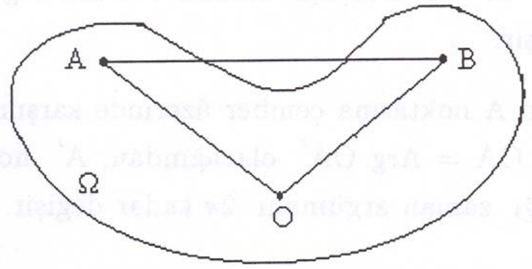
1.15 Tanım: Herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası tamamı ile bölge içinde kalıyorsa, bölgeye konveks bölge denir.

1.16 Tanım: Ω kompleks bir bölge olsun. Bu taktirde $0 \le t \le 1$ olmak üzere, $\forall z \in \Omega$ için $t \cdot z \in \Omega$ koşulu gerçekleniyorsa Ω bölgesine başlangıç noktasına nazaran yıldız bölge denir.

1.17 Tanım: Ω kompleks bir bölge olsun. $0 \le t \le 1$ olmak üzere, $\forall z_1, z_2 \in \Omega$ için $t \cdot z_1 + (1-t) \cdot z_2 \in \Omega$ oluyorsa, Ω bölgesine konveks bölge denir.

1.18 Özellik: Yıldız bölge tanımından dolayı, bir O noktasına nazaran yıldız olan bölge, bölgenin başka bir noktasına nazaran yıldız bölge olmayabilir.

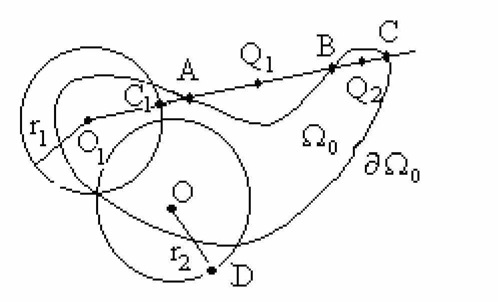
İspat: Şekil 1.2 O noktasına nazaran yıldız bir bölgedir, fakat A noktasına nazaran yıldız bölge değildir. O halde burada not etmek gerekir ki yıldız bölgeden bahsedildiği zaman, mutlaka sabit belirlenmiş bir noktadan bahsetmek lazımdır. Fakat konveks bölge tanımı gözönünde bulundurulacak olursa, konveks bölge her noktasına nazaran yıldız bölgedir.



Şekil 1.2

1.19 Özellik : $\Omega_0 \subseteq \mathbb{C}$ bölgesi O başlangıç noktasına göre yıldız bölge olsun. $|z|=r$ çemberlerini gözönüne alalım. Bu çemberler üzerindeki noktaları, başlangıç noktasına birleştiren doğrular bölgenin sınırını tam bir noktada keser.

İspat : İspatı geometrik düşünceyle yapmak yerinde olur. Ω_0 bölgesi O başlangıç noktasına göre yıldız bölge olsun. Başlangıç noktasını merkez kabul eden bir $z \in \Omega_0$ olmak üzere $|z| = r_2$ çemberini gözönüne alalım. Şayet bu çember üzerindeki bir D noktasını baslangıç noktasına birleştiren doğru $\partial\Omega_0$ sınırını bir noktada keser. Eğer $|z| = r_1$ çemberini gözönüne alırsak, çember üzerindeki bir C_1 noktasını O_1 başlangıç noktasına birleştiren doğru $\partial\Omega_0$ sınırını A ve B gibi iki noktada keser. Halbuki yıldız bölge tanımından dolayı O_1Q_1 doğrusu tamamiyle bölge içinde kalamaz. Bu da bir çelişkidir. (Şekil 1.3)



Şekil 1.3

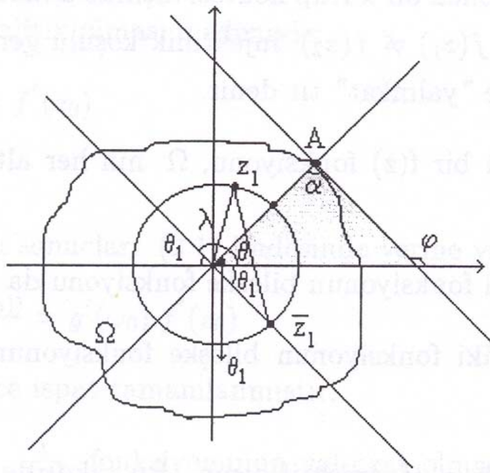
Not : İspatta çelişkiye varabilmek için Ω_0 bölgesi O_1 noktasına göre yıldız bölge farzedilmiştir.

1.20 Özellik: Ω bölgesi başlangıç noktasına göre yıldız bölge olsun. A noktası bölgenin sınırını bir kez dolaştığı zaman OA nın argümanı daima aynı yönde 2π kadar değişir.

İspat: Özellik 1.19.dan A noktasına çember üzerinde karşılık gelen nokta A' olsun. Bu halde $\operatorname{Arg} OA = \operatorname{Arg} OA'$ olacağından, A' noktası çember üzerinde 2π kadar dolaştığı zaman argümanı 2π kadar değişir. O halde $\operatorname{Arg} OA$ da 2π kadar değişir.

1.21 Özellik: Ω bölgesi konveks olsun. A noktası Ω bölgesinin sınırını bir kez dolaştığı zaman, teğetin argümanı da 2π kadar aynı yönde değişir.

İspat: Ω bölgesi konveks olsun. $\alpha = \lambda$ (iç ters açılar olduğundan) $\alpha + 180 - \varphi = \lambda + \theta_1$



Şekil 1.4

$\alpha + 180 - \varphi = \lambda + \theta_1 \Rightarrow \varphi = 180 - \theta_1 \Rightarrow$ $-\theta_1$, $\overline{z}_1$ nin argümanı olduğundan θ_1 , z_1 in argümanıdır. O halde $\varphi = 180 - \theta_1$ bağıntısı

$\varphi = 180 + \operatorname{Arg} \overline{z}_1 = 180 + \operatorname{Arg} \overline{z}_1 + 2\pi$ olarak yazılır.

O halde $\overline{z}_1$ noktası daire üzerinde pozitif yönde bir kez dolaştığı zaman, argümanı 2π kadar artacağından φ de 2π artar, bu da iddanın doğruluğunu gösterir.

2.YALINKAT FONKSİYONLAR

2.1 Tanım: Bir f(z) fonksiyonu, genişletilmiş düzlemde bulunan, bir Ω basit bağlantılı bölgesinde varolabilen bir kutup noktası dışında analitik ve $z_1, z_2 \in \Omega$ olmak üzere $z_1 \neq z_2$ için $f(z_1) \neq f(z_2)$ injektiflik koşulu gerçeklenirse, f(z) fonksiyonuna Ω bölgesinde "yalınkat"tır denir.

Ω bölgesinde yalınkat olan bir f(z)fonksiyonu, Ω nın her alt bölgesinde de yalınkattır.

2.2 Özellik: Yalınkat iki fonksiyonun bileşke fonksiyonu da yalınkattır.

İspat: Önce, injektif iki fonksiyonun bileşke fonksiyonunun da injektif olduğunu göstermeliyiz.

$f: \Omega \to G$ injektif, $g: G \to H$ injektif olsun. Bu taktirde $g \circ f: \Omega \to H$ injektiftir.

Gerçekten $z_1, z_2 \in \Omega$ ise, f(z) fonksiyonunun injektifliğinden ; $z_1 \neq z \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$ dir.

Diğer taraftan g(z) fonksiyonu G de injektif olduğundan $f(z_1) \neq f(z_2)$ için $g(f(z_1)) \neq g(f(z_2))$ dir. Bu da bize gof fonksiyonunun injektif olduğunu gösterir.

Diğer taraftan ispatı tamamlamak için, analitik iki fonksiyonun bileşke fonksiyonunun da analitik olduğunu ispatlamak lazımdır.

f(z) ve g(z) fonksiyonları analitik iki fonksiyon olsun.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{f(z) - f(z_0)} \right]$$

$$= \lim_{z \to z_0} \left[\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right]$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad (2.1)$$

bulunur. Diğer taraftan $w = f(z)$ dersek $w_0 = f(z_0)$ olur. f(z) nin sürekliliğinden $z \to z_0$ olurken $w \to w_0$ olur ve g(z)nin analitik olması nedeniyle

$$\lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = g'(w_0) \tag{2.2}$$

dır. f(z) nin analitik olması nedeniyle

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \tag{2.3}$$

dır.

Bulduğumuz bu sonuçları (2.1) ifadesinde yerine yazarsak

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = g'(w_0) \cdot f'(z_0)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmıştır.

2.3 Özellik: $\dfrac{1}{f(z)}$ fonksiyonunun yalınkat olması için gerek ve yeter şart f(z) fonksiyonunun yalınkat olmasıdır.

İspat: Gereklik: $\dfrac{1}{f(z)}$ fonksiyonu yalınkat olsun bu taktirde

$g(z) = \dfrac{1}{z}$ yalınkat fonksiyonu alınırsa, 2.2 özelliğinden $g\left(\dfrac{1}{f(z)}\right)$ fonksiyonu da yalınkattır. (Yani $g\left(\dfrac{1}{f(z)}\right) = f(z)$ fonksiyonu yalınkattır.)

Yeterlik: f(z) fonksiyonu yalınkat olsun. $g(z) = \dfrac{1}{z}$ fonksiyonu alınırsa, 2.2 özelliğinden,

g(f(z)) fonksiyonu da yalınkattır. (Yani $g(f(z)) = \dfrac{1}{f(z)}$ fonksiyonu da yalınkattır.)

2.4 Tanım: Eğer bir $z_0 \in A$ noktasının en az bir civarında z_0 noktasından başka A cümlesine ait hiç bir nokta bulunmazsa, z_0 noktasına A cümlesinin bir “izole noktası” denir.

2.5 Özellik: Analitik bir fonksiyonun bir noktanın civarında injektif olması için gerek ve yeter şart bu noktada sıfır olmayan bir türeve sahip olmasıdır. Bu bize bir Ω bölgesinde analitik $f(z)$ fonksiyonunun yalınkat olması için $f'(z) \neq 0$ olduğunu gösterir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

2.6 Özellik: z_0 noktası f(z) yalınkat fonksiyonunun bir kutbu ise $\dfrac{1}{f(z)}$ fonksiyonu z_0 ın bir civarında yalınkattır.

İspat: z_0 noktası f(z) fonksiyonunun bir kutbu olduğundan $\dfrac{1}{f(z_0)} = 0$ dır. O halde 2.5 özelliğinden; z_0 noktası $\dfrac{1}{f(z)}$ fonksiyonunun basit bir sıfırıdır ve z_0'ın bir civarında injektiftir. Dolayısıyla z_0'ın bir civarında yalınkattır.

2.7 Özellik: $C : z(t) = x(t) + iy(t) \quad \alpha \le t \le \beta$ Ω da düzgün bir Jordan yayı ise (kırık olmayan, $z'(t) \neq 0$ ve z(t) sürekli) f(C) de f(Ω) da düzgün bir Jordan yayıdır. $z_0 = z(t_0)$ olmak üzere $f(z_0)$ noktasındaki f(C)'nin teğeti ile pozitif reel aksen arasındaki açı

$$\operatorname{Arg}\frac{df}{dt}(z_0) = \operatorname{Arg}\left(\frac{df}{dz}(z_0)\cdot\frac{dz}{dt}(t_0)\right) = \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg} z'(t_0)$$

ile belirtilir. ($z_0 = \infty$ ya da $f(z_0) = \infty$ durumları hariç). Bu ise iki eğri aynı bir z_0 noktasından geçtikleri zaman, bu iki eğri arasındaki açının, görüntü eğrileri arasındaki açıya eşit olduğunu gösterir. O halde yalınkat fonksiyonlar birer konform homeomorfizmalardır.

İspat: $C_1 : z(t)$, $C_2 : z(s)$ iki eğri olsun. Öyle ki $\alpha \le t \le \beta$, $\alpha_1 \le s \le \beta_1$ olsun. Üstelik $z_0 = z(t_0) = z(s_0)$ olsun. Yani C_1 ve C_2 eğrileri aynı bir z_0 noktasından geçsinler. $w = f(z)$ yalınkat olsun.

$w'(t_0) = f'(z_0)\cdot z'(t_0) \neq 0$ dır. ($f(C_1)$ düzgün Jordan yayı olduğundan.)

$w'(s_0) = f'(z_0)\cdot z'(s_0) \neq 0$ dır. ($f(C_2)$ düzgün Jordan yayı olduğundan.)

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \operatorname{Arg} w_t'(t_0) &= \operatorname{Arg} f'(z_0)\cdot z_t'(t_0) = \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg} z_t'(t_0) \\ \operatorname{Arg} w_s'(s_0) &= \operatorname{Arg} f'(z_0)\cdot z_s'(s_0) = \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg} z_s'(s_0) \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} w_t'(t_0) - \operatorname{Arg} w_s'(s_0) &= \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg} z_t'(t_0) \\ &\quad - \operatorname{Arg} f'(z_0) - \operatorname{Arg} z_s'(s_0) \\ &= \operatorname{Arg} z_t'(t_0) - \operatorname{Arg} z_s'(s_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Arg} w_t'(t_0) - \operatorname{Arg} w_s'(s_0) = \operatorname{Arg} z_t'(t_0) - \operatorname{Arg} z_s'(s_0)$$

bulunur ki bu da bize açıların korunduğunu gösterir.

2.8 Özellik: $A \subset \mathbb{C}$, Ω nın kompakt bir alt cümlesi olsun. Üstelik yalınkat f nin kutup noktasını ihtiva etmesin. Bu taktirde resminin Euclidyen alanı;

$$\text{Alan}\, f(A) = \iint_A |f'(z)|^2 \cdot d\Omega \quad \text{dır.}$$

İspat: f(z) , Ω da yalınkat olduğundan analitiktir. Dolayısıyla f(z) , Cauchy-Riemann denklemlerini gerçekler. Yani:

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\}$$

dir.

Dolayısıyla;

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow |f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} \tag{2.4}$$

bağıntısını yazabiliriz. Diğer taraftan ;

$$\text{Alan}\, f(A) = \iint_{f(A)} du \cdot dv \tag{2.5}$$

dir. Fakat çok katlı integrallerde değişken dönüşümü kuralı gözönünde bulundurulursa

$$\left. \begin{array}{l} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

den dolayı

$$du \cdot dv = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dx \cdot dy \tag{2.6}$$

dir. O halde (2.4) ve (2.6) bağıntıları karşılaştırılırsa;

$$du \cdot dv = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dx \cdot dy = | f'(z) |^2 \; dx \cdot dy \tag{2.7}$$

bulunur. $dx \cdot dy = d\Omega$ alan elemanı olarak yazılırsa ve (2.7) bağıntısı (2.5) bağıntısında yerine konursa;

$$\begin{aligned} \text{Alan}\, f(A) &= \iint_{f(A)} du \cdot dv = \iint_{A} \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| dx \cdot dy = \iint_{A} |f'(z)|^2\, dx \cdot dy \\ &= \iint_{A} |f'(z)|^2\, d\Omega \end{aligned}$$

bulunur. Yani neticede

$$\text{Alan}\, f(A) = \iint_{A} |f'(z)|^2\, d\Omega$$

bulunur.

3.YALINKAT FONKSİYONLAR İÇİN KLASİK DİSTORSİYON TEOREMLERİ

3.1 Gösterilimler:

$D = \{ z \mid |z| < 1 \}$ birim dairenin içi

$\Delta = \{ z \mid |z| > 1 \}$ birim dairenin dışı

$\partial D = \partial \Delta = \{ z \mid |z| = 1 \}$ birim dairenin sınırı

3.2 Tanım: $S = \{ f(z) \mid f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots, f'(0) = 1, f(0) = 0, f(z) \text{ D de yalınkat} \}$ cümlesini S sınıfı olarak adlandıracağız.

3.3 Tanım: $\Sigma = \{ g(z) \mid g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots, g(z) \ \Delta \text{ da yalınkat} \}$ cümlesini Σ sınıfı olarak adlandıracağız.

3.4 Özellik: $f(z) \in S$ olsun $f(z)=z+ a_2z^2+ a_3z^3\ldots$ $(|z|<1)$ dir. $f(z)$, $|z|<1$ de yalınkattır.

$f(z^2) = z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \ldots \Rightarrow \sqrt{f(z^2)} = \sqrt{z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \ldots}$

fonksiyonu S'de tek fonksiyondur. Gerçekten;

$\sqrt{f(z^2)} = \sqrt{z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \ldots} = \sqrt{z^2(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \ldots)} = z\sqrt{(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \ldots)}$

$1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \ldots$ ifadesi $1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots$ ifadesinin karesi olsun.

$1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \ldots = (1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots)^2 \Rightarrow$

$1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \ldots = 1 + \beta_1^2 z^2 + \beta_2^2 z^4 + \ldots + 2\beta_1 z + 2\beta_2 z^2 + \ldots + 2\beta_1\beta_2 z^3 + \ldots$

$1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \ldots = 1 + 2\beta_1 z + (\beta_1^2 + 2\beta_2) z^2 + 2\beta_1\beta_2 z^3 + \ldots$

katsayılar eşitlenirse,

$$2\beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = 0,\ \beta_1^2 + 2\beta_2 = a_2 \Rightarrow \beta_2 = \frac{1}{2}a_2$$

bulunur.

$$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = \sqrt{z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \ldots} = \sqrt{z^2(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \ldots)} \Rightarrow$$

$$F(z) = z\sqrt{(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \ldots)}$$

$$F(z) = z\sqrt{(1 + \frac{1}{2}a_2 z^2 + \ldots)^2} = z + \frac{1}{2}a_2 z^3 + \ldots \Rightarrow\ F(-z) = -F(z)$$

olduğundan tek fonksiyondur. $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$'dir.

$$F(z_1) = \sqrt{f(z_1^2)},\ F(z_2) = \sqrt{f(z_2^2)} \Rightarrow\ F(z_1) = F(z_2) \Rightarrow$$

$$\sqrt{f(z_1^2)} = \sqrt{f(z_2^2)} \Rightarrow\ f(z_1^2) = f(z_2^2)$$

f(z) yalınkat olduğundan injektiftir. $z_1 = \pm z_2$ fakat F(z) tek fonksiyon olduğundan $z_1 \neq -z_2$'dir. O halde $z_1 = z_2$ bulunur ki bu da F(z)'in D'de injektif olduğunu gösterir. F(z) fonksiyonunun $|z| < 1$'de analitik olduğu açıktır. O halde $F(z) = \sqrt{f(z^2)}$ fonksiyonu S'de tek fonksiyondur.

3.5 Teorem: $f \in S$ alalım. Buradan $|a_2| \leq 2$ dir ve $|a_2^2 - a_3| \leq 1$ dir. $|a_2| = 2$ olması ancak ve yalnız f(z) fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olması ile mümkündür. Dahası f(z) tek fonksiyonsa, buradan $|a_3| \leq 1$ dir. Eşitlik ancak ve yalnız

$$f(z) = z\left(1 - e^{2i\beta} z^2\right)^{-1}$$

olması ile mümkündür.

İspat: $f \in S$ olduğundan, S sınıfının tanımı gereği $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ dir.

$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{1}{2}a_2 z^3 + \ldots$ olduğundan, bu fonksiyon da S sınıfına aittir.

Dolayısıyla

$$g(z)=\frac{1}{F\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{z}+\frac{1}{2}a_2\frac{1}{z^3}+\ldots}=\frac{1}{\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{2}a_2z^{-2}+\ldots\right)}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}a_2z^{-2}+\ldots\right)}=z\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}a_2z^{-2}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{2}a_2z^{-2}+\ldots\right)^2-\ldots\right)$$

$$=z-\frac{1}{2}a_2z^{-1}+\ldots$$

fonksiyonu da Σ sınıfına ait olacaktır.

"$g\in\Sigma$ alalım. Buradan $|b_1|\le 1$dir. Eşitlik ancak ve yalnız $g(z)=z+b_0+e^{2i\beta}z^{-1}$ olması ile mümkünür."

O halde $|b_1|\le 1$ eşitsizliği bu fonksiyona ugulanırsa $\left|\frac{1}{2}a_2\right|\le 1\Rightarrow |a_2|\le 2$ bulunur. Bu da istenen şeydir.

Diğer taraftan $f(z)=z+a_2z^2+\ldots\in S$ ise

$$G(z)=\frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{z}+a_2\frac{1}{z^2}+\ldots}=\frac{1}{\frac{1}{z}\left(1+a_2\frac{1}{z}+\ldots\right)}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{1+a_2\frac{1}{z}+a_3\frac{1}{z^2}\ldots}=z\cdot\frac{1}{1+\left(a_2\frac{1}{z}+a_3\frac{1}{z^2}+\ldots\right)}$$

$$=z\left(1-a_2\frac{1}{z}-a_3\frac{1}{z^2}-\ldots+a_2^2\frac{1}{z^2}+a_3^2\frac{1}{z^4}+\ldots\right)$$

$$=z-a_2-a_3\frac{1}{z}-\ldots+a_2^2\frac{1}{z}+\ldots$$

$$=z-a_2+(a_2^2-a_3)z^{-1}+\ldots$$

fonksiyonu da Σ sınıfına aittir. Bu fonksiyona da $|b_1|\le 1$ eşitsizliği uygulanırsa ; $|a_2^2-a_3|\le 1$ bulunur. Bu da istenen şeydir.

Şimdi $|a_2|=2$ olması halini düşünelim. Bunun için aşağıdaki durumları göz önünde bulunduralım:

"$g\in\Sigma$ ve $w\in E=E(g)=\mathbb{C}\setminus g(\Delta)$ ise $g^*(z)=\sqrt{g(z^2)-w}=z+\frac{1}{2}(b_0-w)z^{-1}+\ldots$ fonksiyonu, Σ sınıfında tek ve yalınkat bir fonksiyondur."

“$g \in \Sigma$ alalım. $E \subset \{ | w - b_0 | \leq 2 \}$ dir. Eşitlik ancak ve yalnız E nin dört birim uzunluğunda bir parça olması halinde gerçeklenir.”

Bu ifadelerin ışığı altında;

$f \in S \Rightarrow f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots \Rightarrow F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{1}{2} a_2 z^3 + \cdots \in S$ ve tek fonksiyondu.

$g(z) = \frac{1}{F(z)} = z - \frac{1}{2} a_2 z^{-1} + \cdots \in \Sigma$ dır ve $\left| \frac{1}{2} a_2 \right| \leq 1 \Rightarrow |a_2| \leq 2$ dir.

Eşitlik ancak ve yalnız $g(z) = z - \frac{1}{2} a_2 z^{-1}$ olması ile mümkündür. O halde

$|a_2| = |b_0 - w| \Rightarrow |w - b_0| = 2 \Rightarrow w - b_0 = 2e^{i\beta}$ alabiliriz. $\Rightarrow b_0 = w - 2e^{i\beta}$

($g(z) = z + b_0 + b_1 z$ fonksiyonuyla karşılaştırarak.) Yukardaki sonucu kullanırsak;

$g^*(z) = z + b_0 + e^{2i\beta} z^{-1} \Rightarrow g^*(z) = z + (w - 2e^{i\beta}) + e^{2i\beta} z^{-1}$

Bulunur. Fakat $w \in E$ olduğundan w = 0 alabiliriz. O halde;

$$g^*(z) = z - 2e^{i\beta} + e^{2i\beta} z^{-1} = z\left(1 - \frac{2}{z} e^{i\beta} + e^{2i\beta} \frac{1}{z^2}\right)$$

$$= z\left(1 - e^{i\beta} \frac{1}{z}\right)^2$$

bulunur.

$$g^*(z) \in \Sigma \Rightarrow \frac{1}{g^*\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{z}\left(1 - e^{i\beta} z\right)^2} = \frac{z}{\left(1 - e^{i\beta} z\right)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n e^{i(n-1)\beta} \cdot z^n \in S \text{ dir.}$$

Bu da tanım gereği Koebe fonksiyonunun rotasyonudur.

$f \in S$ tek ise $|a_3| \leq 1$ olduğunu ispatlayalım:

$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots \Rightarrow \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{1}{2} a_2 z^3 + \cdots,$

S de tek fonksiyondur (bunu daha evvel ispatladık) ve ikinci teriminin katsayısı sıfırdır. O halde bunu da $|a_2^2 - a_3| \leq 1$ eşitsizliğinde kullanırsak

$a_2 = 0$ alınırsa $|0 - a_3| \leq 1 \Rightarrow |a_3| \leq 1$ bulunur. Başka bir ispat da;

$$F(z)=\sqrt{f(z^2)}=z+\frac{1}{2}a_2z^3+\cdots \qquad a_3=\frac{1}{2}a_2 \Rightarrow$$

$$|a_3|=\left|\frac{1}{2}a_2\right|\le 1 \Rightarrow |a_3|\le 1 \quad \text{bulunur.}$$

$|a_3|=1$ eşitliği ancak ve yalnız $f(z)=z\cdot\left(1-e^{2i\beta}\cdot z^2\right)^{-1}$ olması ile mümkündür.

Gerçekten;

$$\begin{aligned} f(z)&=z\cdot\frac{1}{1-e^{2i\beta}z^2}\\ &=z\left[1+e^{2i\beta}z^2+e^{4i\beta}z^4+\cdots\right]\\ &=z+e^{2i\beta}z^3+e^{4i\beta}z^5+\cdots \end{aligned}$$

$$|a_3|=\left|e^{2i\beta}\right|=1$$

dir.

3.6 Hazırlık: $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3\ldots\in S$ alalım.

$$f'(z)=1+2a_2z+3a_3z^2+\ldots \Rightarrow f'(0)=1$$

$$f''(z)=2a_2+6a_3z+\ldots \Rightarrow f''(0)=2a_2 \Rightarrow$$

$$|f''(0)|=2|a_2| \Rightarrow \frac{|f''(0)|}{2}=|a_2|\le 2 \Rightarrow \left|\frac{f''(0)}{2}\right|\le 2$$

buluruz. Bu düşüncenin sıfır noktasından herhangi bir $z_0\in D$ noktasına taşınması halinde,

$$f\left(\frac{\zeta+z_0}{1+\zeta\bar{z}_0}\right)=f(z_0)+(1-|z_0|^2)f'(z_0)\zeta+\frac{1}{2}\left[(1-|z_0|^2)^2f''(z_0)-2\bar{z}_0(1-|z_0|^2)\,f'(z_0)\right]\zeta^2$$

fonksiyonu da D bölgesinde analitik ve yalınkattır, fakat S sınıfına ait değildir. Zira normalize edilmemiştir. O halde bu fonksiyonun S sınıfına ait olabilmesi için normalize edilmesi gerekir.

$$h(\zeta)=\frac{f\left(\dfrac{\zeta+z_0}{1+\zeta z_0}\right)-f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}=\zeta+\left[\frac{1}{2}(1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}-\bar{z}_0\right]\zeta^2+\ldots$$

$h(\zeta)$ fonksiyonu $h(0)=0, h'(0)=1$ koşullarını gerçeklediğinden S sınıfına aittir. $h(\zeta)$ fonksiyonuna z_0 noktasına göre f(z) fonksiyonunun Koebe transformasyonu adı verilir.

3.7 Lemma: Eğer $f \in S$ ise buradan

$$\left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z_0|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z_0|^2}, \quad (|z|<1)$$

dir.

İspat: Hazırlık 'tan hareket edersek,

$$h(\zeta) = \frac{f\left(\dfrac{\zeta+z_0}{1+\zeta z_0}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)} = \zeta + \left[\frac{1}{2}(1-|z_0|^2)^2\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \bar{z}_0\right]\zeta^2 + \ldots$$

fonksiyonu S sınıfına ait olduğundan ikinci terimin katsayısı 2'den küçüktür.

$$\left| \frac{1}{2}\left(1-|z_0|^2\right)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \bar{z}_0 \right| \leq 2$$

bulunur ki bu ifadeyi de

$$\frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2} = \left|\frac{2z_0}{1-|z_0|^2}\right|$$

ile çarparsak,

$$\left| \frac{1}{2}\left(1-|z_0|^2\right)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \bar{z}_0 \right| \left|\frac{2z_0}{1-|z_0|^2}\right| \leq \frac{4|z_0|}{1-|z_0|^2} \Rightarrow$$

$$\left| \left(\frac{1}{2}(1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \bar{z}_0\right)\left(\frac{2z_0}{1-|z_0|^2}\right) \right| \leq \frac{4|z_0|}{1-|z_0|^2} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{1}{2}(1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\frac{2z_0}{1-|z_0|^2} - \bar{z}_0\frac{2z_0}{1-|z_0|^2} \right| \leq \frac{4|z_0|}{1-|z_0|^2} \Rightarrow$$

$$\left| z_0\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2|z_0|^2}{1-|z_0|^2} \right| \leq \frac{4|z_0|}{1-|z_0|^2}$$

bulunur. Bu ifadede z_0 ile z'i yer değiştirirsek,

$$\left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \le \frac{4|z|}{1-|z|^2}, \ (|z|<1)$$

elde edilir.

3.8 Teorem (1/4 Distorsiyon Teoremi) :

$w=f(z)=z+ a_2z^2+ a_3z^3\ldots \in S$

fonksiyonunun tasvirindeki sınır noktalarının w=0 noktasına olan uzaklıkları 1/4' den küçük olamaz.

İspat: c noktası D bölgesinin dışında bir nokta olsun.

$$\frac{c\,f(z)}{z-f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{c} \right) z^2 + \ldots$$

fonksiyonu da S sınıfına aittir. İkinci terimin katsayısının modülü 2'den küçük olacağına göre,

$$\left| a_2 + \frac{1}{c} \right| \le 2$$

dir. Diğer taraftan, $|a_2| \le 2$ 'dir ve

$$\left|\frac{1}{c}\right| = \left|\frac{1}{c} + a_2 - a_2\right| \le \left|\frac{1}{c} + a_2\right| + |-a_2| = \left|\frac{1}{c} + a_2\right| + |a_2| \le 2+2 \Rightarrow$$

$$\left|\frac{1}{c}\right| \le 4 \Rightarrow \ \frac{1}{|c|} \le 4 \Rightarrow \ |c| \ge \frac{1}{4}$$

bulunur. Buda bize teoremin ispatını verir.

3.9 Teorem: α ve β, D bölgesinin içinde $f(z) \in S$ fonksiyonunun alamadığı herhangi iki değer olsun. Bu taktirde,

$$F(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{\alpha}}$$

fonksiyonu da D'de yalınkat olup

$$\frac{\beta}{1-\frac{\beta}{\alpha}}$$

değerini alamaz.

İspat: f(z), D'de yalınkat olduğundan ve α değerini alamadığından $\frac{f(z)}{\alpha} \neq 1$'dır.

Dolayısıyla $1-\frac{f(z)}{\alpha} \neq 0$'dır. O halde F(z) fonksiyonu D'de analitiktir.

$$F(z_1)=F(z_2) \Rightarrow \frac{f(z_1)}{1-\frac{f(z_1)}{\alpha}} = \frac{f(z_2)}{1-\frac{f(z_2)}{\alpha}} \Rightarrow \alpha f(z_1) - f(z_1)f(z_2) = \alpha f(z_2) - f(z_1)f(z_2)$$

$$\Rightarrow \alpha f(z_1) = \alpha f(z_2) \Rightarrow f(z_1) = f(z_2)$$

dır. f(z), fonksiyonu D'de yalınkat olduğundan $z_1=z_2$ olur. O halde F(z), D'de injektiftir. Bununla birlikte F(z) fonksiyonunun D'de yalınkat olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi $\frac{\beta}{1-\frac{\beta}{\alpha}}$ sayısının tersinin modülünü düşünelim.

$$\left|\frac{1-\frac{\beta}{\alpha}}{\beta}\right| = \left|\frac{1}{\beta} - \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\beta}\right| = \left|\frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{\beta}\right| = \left|\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right|$$

buluruz. Fakat bir önceki teoremden dolayı,

$$\left|\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right| \leq 4$$

bulunur.Bu da bize teoremin ispatını verir.

3.10 Teorem: $f \in S$ ise,

(i) $$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

(ii) $$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

(iii) $$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le \left| z\frac{f'(z)}{f(z)} \right| \le \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

dir. Bu eşitsizliklerde eşitlik hali ancak ve ancak f(z) Koebe fonksiyonunun uygun bir rotasyonu ise gerçeklenir.

İspat: Lemma 3.7'de ispatladık ki

$$\left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \le \frac{4|z|}{1-|z|^2}, \qquad (|z|<1) \tag{3.1}$$

dir. Diğer taraftan bir kompleks reel kısmı ile modülü arasındaki

$$-|z| \le \operatorname{Re} z \le |z|$$

bağıntısından hareket edersek (3.1) bağıntısını

$$-\frac{4|z|}{1-|z|^2} \le \operatorname{Re}\left\{ z\frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \le \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

$$-\frac{4|z|}{1-|z|^2} + \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \le \operatorname{Re} z\frac{f''(z)}{f'(z)} \le \frac{4|z|}{1-|z|^2} + \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \Rightarrow$$

$$\frac{2|z|^2 - 4|z|}{1-|z|^2} \le \operatorname{Re} z\frac{f''(z)}{f'(z)} \le \frac{4|z| + 2|z|^2}{1-|z|^2} \tag{3.2}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan,

$$\operatorname{Re} z\frac{f''(z)}{f'(z)} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{\partial \log f'(z)}{\partial \log z} \right\} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{\partial \log f'(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \log z} \right\}$$

$$z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow dz = e^{i\theta} d\rho \Rightarrow \frac{dz}{d\rho} = e^{i\theta}, \ \log \rho e^{i\theta} = t \Rightarrow \frac{e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}} d\rho = dt, \ \frac{d\rho}{dt} = \rho$$

olduğundan,

$$\operatorname{Re}\left\{ z\frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{\partial \log f'(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \log z} \right\} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{\partial \log f'(z)}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\}$$

$$\operatorname{Re}\left\{ z\frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} = \operatorname{Re}\left\{ \rho \frac{\partial \log f'(z)}{\partial \rho} \right\} = \rho \operatorname{Re} \frac{\partial \log f'(z)}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \log|f'(z)|$$

bulunur. Bunları (3.2) eşitsizliğinde yerine koyarsak, (3.2) eşitsizliği,

$$\frac{2\rho^2 - 4\rho}{1-\rho^2} \le \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \log|f'(z)| \le \frac{4\rho + 2\rho^2}{1-\rho^2}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\Rightarrow \frac{2\rho-4}{1-\rho^2} \leq \frac{\partial}{\partial\rho}\log|f'(z)| \leq \frac{4+2\rho}{1-\rho^2}$$

Bu ifade 0'dan ρ'ya kadar integre edilirse,

$$\int_0^\rho \frac{2\rho-4}{1-\rho^2}d\rho \leq \int_0^\rho \frac{\partial}{\partial\rho}\log|f'(z)|d\rho \leq \int_0^\rho \frac{4+2\rho}{1-\rho^2}d\rho \Rightarrow \log\frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} \leq \log|f'(z)| \leq \log\frac{1+\rho}{(1+\rho)^3}$$

$$\frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+\rho}{(1+\rho)^3}, \ |z|=\rho$$

olduğundan,

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1+|z|)^3}$$

bulunur ki buda (i) eşitsizliğidir.

(ii) eşitsizliğini ispatlamak için (i) eşitsizliğinin sağ tarafı z ile orjini birleştiren doğru boyunca integre edilirse,

$$|f(z)| = \left|\int_0^{|z|} f'(z)dz\right| \leq \int_0^\rho |f'(z)|d\rho \leq \int_0^\rho \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}d\rho \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \qquad (3.3)$$

bulunur. f(z) noktası ile orjini birleştiren doğru parçasının $|z|<1$ içinde, tamamen f(z)'in değerleriyle örtülür. Bu şekilde $|f(z)|$ için bir alt sınır elde edilir. Eğer L, w=f(z) fonksiyonuyla bu doğru parçası üzerine tasvir edilen $|z|<1$'de bir yay ise, L boyunca $dw = f'(z)dz > 0$'dır. Böylece,

$$|f(z)| = \left|\int_L f'(z)dz\right| = \int_L |f'(z)|d\rho \geq \int_0^\rho \frac{1-\rho}{(1+\rho)^3}d\rho = \frac{\rho}{(1+\rho)^2} \qquad (3.4)$$

buluruz. (3.3) ve (3.4) ifadeleri birleştirilirse,

$$\frac{\rho}{(1+\rho)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

bulunur. $|z|=\rho$ alınırsa,

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

bulunur ki bu da (ii) eşitsizliğidir. Bundan önce,

$$h(\zeta)=\frac{f\left(\dfrac{\zeta+z_0}{1+\zeta\bar{z}_0}\right)-f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}=\zeta+\left[\frac{1}{2}(1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}-\bar{z}_0\right]\zeta^2+\ldots$$

fonksiyonunun S sınıfına ait olduğunu ispatlamıştık. Bu fonksiyonda $\zeta=-z_0$ alınırsa,

$$h(-z_0)=\frac{f\left(\dfrac{-z_0+z_0}{1-z_0\bar{z}_0}\right)-f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}=-\frac{1}{1-|z_0|^2}\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}$$

bulunur. Zira f(0)=0’dır.

$$-\frac{1}{(1-|z_0|^2)\,h(-z_0)}=z_0\frac{f'(z_0)}{f(-z_0)}\Rightarrow\left|z_0\frac{f'(z_0)}{f(-z_0)}\right|=\frac{1}{1-|z_0|^2}\left|\frac{z_0}{h(-z_0)}\right| \qquad (3.5)$$

buluruz. (ii) eşitsizliğinde $|f(z)|$ yerine $\dfrac{1}{1-|z_0|^2}\left|\dfrac{z_0}{h(-z_0)}\right|$ değeri koyulursa,

$$\frac{|z_0|}{(1+|z_0|)^2}\le\frac{1}{1-|z_0|^2}\left|\frac{z_0}{h(-z_0)}\right|\le\frac{|z_0|}{(1-|z_0|)^2}\Rightarrow\frac{\left(1-|z_0|^2\right)|z_0|}{(1+|z_0|)^2}\le\left|\frac{z_0}{h(-z_0)}\right|\le\frac{\left(1-|z_0|^2\right)|z_0|}{(1-|z_0|)^2}$$

$$\frac{(1-|z_0|)|z_0|}{1+|z_0|}\le\frac{|z_0|}{h(-z_0)}\le\frac{(1-|z_0|)|z_0|}{1-|z_0|}\Rightarrow\frac{1-|z_0|}{1+|z_0|}\le\left|\frac{1}{h(-z_0)}\right|\le\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.5) eşitliğinden dolayı,

$$\frac{1-|z_0|}{1+|z_0|}\le\left|z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right|\le\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$$

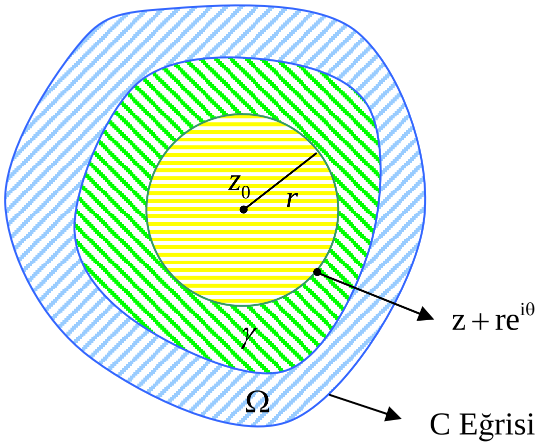
bulunur. z ile z_0 yer değiştirecek olursa,

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\le\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\le\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

eşitsizliği bulunur ki bu da (iii) eşitsizliğidir.

4.SABORDİNASYON PRENSİBİ

4.1 Maksimum Prensibi



Kompleks analizdeki maksimum prensibi aşağıdaki gerçeklere dayanır.

(I) Reel analizdeki Weierstrass teoremine göre: Bir (a,b) aralığında tanımlanmış f(x) fonksiyonu için aralık kapalı ise f(x) fonksiyonu maksimum değerini bu aralıkta bir fiil alır. Eğer f(x) fonksiyonunun bu aralıkta türevi var ve sıfırdan farklı ise f(x) fonksiyonu bu aralıkta monotondur. Dolayısıyla fonksiyon aralığın bir ucunda maksimum diğer ucunda minimum değerini alır.

(II) Eğer aralık açık ise, yani aralığın uç noktaları aralığa ait değilse fonksiyon bu aralıkta maksimum değerini alamaz.

Yukarıda açıklanan teoremin kompleks fonksiyonlar teorisindeki karşılığı Maksimum Prensibidir. Maksimum prensibinin ispatına geçmeden önce aşağıdaki açıklamaların yapılması prensibin daha anlaşılır olması bakımından gereklidir.

(III) f(z) fonksiyonu Ω bölgesinde sabitten farklı ve analitik bir fonksiyon olsun. Eğer z_0 noktası fonksiyonun sınır noktası değilse f(z) fonksiyonu merkezi z_0'da olan ve tamamen Ω bölgesinde bulunan bir daireyi merkezi $f(z_0)$'da olan katlı veya basit bir daireye dönüştürür. Dolayısıyla bu çember üzerinde öyle bir nokta vardır ki

$|f(z)| \geq |f(z_0)|$ eşitsizliği gerçeklenir.

4.2 Teorem (Maksimum Prensibi) : f(z) fonksiyonu basit bağlantılı kapalı C eğrisinin kapattığı basit bağlantılı Ω bölgesinde tanımlanmış ve analitik olsun. Bu takdirde $|f(z)|$ ifadesi maksimum değerini Ω'nın sınırından alır.

İspat: z_0 noktası Ω bölgesinde olsun. γ kapalı Jordan eğrisi de tamamen Ω bölgesinin içinde ve ζ noktası da γ kapalı Jordan eğrisinin içinde bir nokta olsun. Cauchy integral teoremine göre

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \qquad (4.1)$$

eşitliği yazılabilir.

(i) z_0 noktası bir iç nokta olduğundan dolayı z_0 noktasının uygun bir civarı γ kapalı eğrisinin kapattığı bölgede bulunur (Ya da bu civar tamamen Ω bölgesinde bulunur). Dolayısıyla z_0'ı merkez kabul eden r yarıçaplı bir çember γ kapalı eğrisinin kapattığı bölgede alınabilir. Dolayısıyla γ kapalı eğrisi yerine bu çember alınabilir. Buna göre yukarıda yazdığımız (4.1) ifadesini bu çember için de yazabiliriz. Yani,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \qquad (4.2)$$

ifadesini yazabiliriz. (4.2) eşitliği aynı zamanda

$$|\zeta - z_0| = r \Rightarrow \zeta - z_0 = re^{i\theta} \Rightarrow \zeta = z_0 + re^{i\theta} \Rightarrow d\zeta = ire^{i\theta} d\theta \qquad (4.3)$$

olduğu göz önüne alınarak

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \Rightarrow$$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta \tag{4.4}$$

eşitliği yazılabilir. (4.4) eşitliğinin anlamı, f(z) fonksiyonunun, z_0 merkezli r yarıçaplı çemberin merkezindeki değeri $f(z_0)$ olduğundan, merkezdeki bu değer, çember üzerindeki değerlerin aritmetik ortalamasına eşittir (Gauss Ortalama Değer Teoremi).

Şimdi (4.4) eşitliğinin ışığı altında Maksimum Prensibini ispatlamaya çalışalım.

Çalışma Hipotezi: Farzedelim ki $|f(z)|$ ifadesi maksimum değerini bir iç nokta olan z_0 noktasında alsın. Bu çalışma hipotezi

$$|f(z_0)| \geq |f(z_0+re^{i\theta})| \tag{4.5}$$

olarak ifade edilebilir (Yani iç noktadaki değer, sınır noktasındaki değerden büyüktür). (4.5) eşitsizliği, herhangi bir θ argümanı için gerçeklendiğinden ve $|f(z)|$ ifadesinin sürekliliğinden dolayı uzunluğu sıfırdan farklı her yay için bu eşitsizlik gerçeklenir. Dolayısıyla

$$\begin{cases} |f(z_0)| \geq |f(z_0+re^{i\theta})| \Rightarrow |f(z_0)|-|f(z_0+re^{i\theta})| \geq 0 \Rightarrow \\ \int_0^{2\pi}\Big[|f(z_0)|-|f(z_0+re^{i\theta})|\Big]d\theta \geq 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

eşitliği yazılabilir (Zira pozitif değerli bir fonksiyonun bir aralık boyunca alınan integrali pozitiftir). (4.6) eşitsizliği aynı zamanda

$$0 \leq \int_0^{2\pi}\Big[|f(z_0)|-|f(z_0+re^{i\theta})|\Big]d\theta = \int_0^{2\pi}|f(z_0)|d\theta - \int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|d\theta \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi}|f(z_0)|d\theta \geq \int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|d\theta \Rightarrow |f(z_0)|\,\theta\Big|_0^{2\pi} \geq \int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})| \Rightarrow$$

$$(2\pi-0)|f(z_0)| \geq \int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})| \Rightarrow 2\pi|f(z_0)| \geq \int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})| \Rightarrow$$

$$|f(z_0)| \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|d\theta \tag{4.7}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan Gauss Ortalama Değer Teoreminden modül alınacak olursa

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta \Rightarrow |f(z_0)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta\right| \tag{4.8}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca eğrisel integralin özelliklerinden

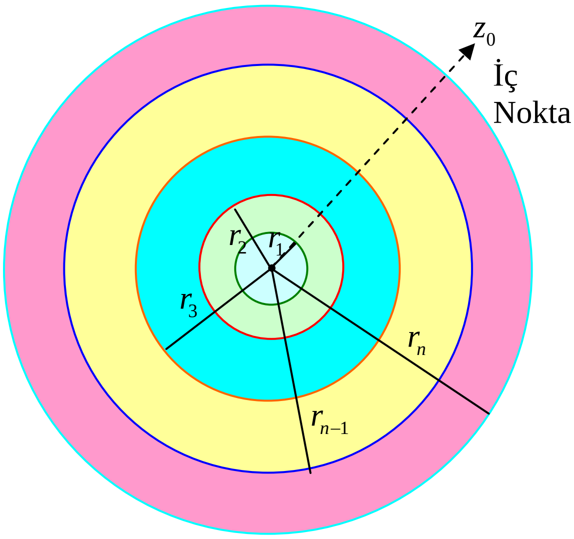
$$\left|\int_C f(z(t))dt\right| \le \int_C |f(z(t))|\,dt$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu ifadeyi (4.8)'de kullanırsak

$$|f(z_0)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{i\theta})|d\theta \Rightarrow$$

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{i\theta})|d\theta \Rightarrow \tag{4.9}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (4.7) ve (4.9) eşitsizliklerine dikkat edilecek olursa bir çelişki olduğu ortaya çıkar. Dolayısıyla bu çelişkiyi ortadan kaldırmak için çalışma hipotezinden vazgeçmek gerekir. Yani $|f(z)|$ maksimum değerini bir iç noktada alamaz.



Çalışma Hipotezi: Her θ argümanı için

$$|f(z_0)|=|f(z_0+re^{i\theta})| \tag{4.10}$$

olarak alalım. Yani bir iç noktadaki değerin sınırdaki değere eşit olduğunu kabul edelim. Bu çalışma hipotezi altında z_0 merkezli ve

$$r_1 < r_2 < r_3 < \ldots < r_{n-1} < r_n < \ldots \tag{4.11}$$

yarıçaplı çemberleri düşünürsek (4.10) eşitliği yarıçapları gittikçe küçülen çemberler üzerinde sürekli olarak gerçekleniyorsa göstermeliyiz ki f(z) analitik fonksiyonu ancak sabittir. Gerçekten,

$$\left.\begin{aligned} w &= f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \\ w_0 &= f(z_0) = u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0) \end{aligned}\right\}$$

olduğunu göz önüne alarak

$$|f(z_0)| = \sqrt{[u(x_0,y_0)]^2 + [v(x_0,y_0)]^2} \Rightarrow$$

$$|f(z_0)|^2 = [u(x_0,y_0)]^2 + [v(x_0,y_0)]^2 \qquad (4.12)$$

eşitliğini yazabiliriz. z_0 noktası herhangi bir nokta olduğundan (4.12) ifadesi bir sabite eşit olacaktır (Yani $f(z_0)$ bir z_0 noktasının bir civarında sabit kaldığından $|f(z_0)|$ ifadesi de sabit kalacaktır). Öte yandan z_0 noktası Ω bölgesinde keyfi nokta olduğundan (4.12) ifadesi aynı zamanda

$$|f(z_0)|^2 = [u(x_0,y_0)]^2 + [v(x_0,y_0)]^2 = u^2 + v^2 = c \qquad (4.13)$$

şeklinde olacaktır.

$$\left.\begin{aligned} &x\text{'e göre türetirsek:} \\ &2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ &y\text{'ye göre türetirsek:} \\ &2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.14)$$

Denklem sistemi elde edilir. Fakat f(z) Ω’da analitik olduğundan Cauchy Riemann denklemlerini gerçekler. Bu ise

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad (4.15)$$

bağıntılarıdır. (4.15) bağıntılarını (4.14) denklem sisteninde yerine koyarsak:

$$\left.\begin{aligned} &2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ &2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow -2u\frac{\partial v}{\partial x} + 2v\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.16)$$

sistemi elde edilir. Burada u(x,y) ve v(x,y) fonksiyonları bilinmeyen fonksiyonlar olarak kabul edilirse (4.16) lineer homojen denklem sisteminin çözümünün var olabilmesi için katsayılar determinantının sıfır olması lazımdır. Buradan:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = 0 \qquad (4.17)$$

bağıntısı elde edilir.

Tamamen benzer şekilde hareket ederek (4.14) denklem sisteminde Cauchy-Riemann denklemlerinin kullanılmasıyla:

$$\left.\begin{aligned} 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ 2u\frac{\partial v}{\partial y} - 2v\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.18)$$

sistemi elde edilir. Bu sistemde u(x,y) ve v(x,y) fonksiyonları bilinmeyen fonksiyonlar olarak kabul edilirse (4.16) lineer homojen denklem sisteminin çözümünün var olabilmesi için katsayılar determinantının sıfır olması lazımdır. Bu ise:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = 0 \qquad (4.19)$$

bulunur.

(4.17) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = 0$ ve (4.18) $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = 0$ ifadeleri u(x,y) ve v(x,y) fonksiyonlarının hem x'e hem y'ye bağlı olmadıklarını gösterir. Bu da u(x,y) ve v(x,y) fonksiyonlarının sabit olmaları demektir.

u(x,y) ve v(x,y) fonksiyonları sabit iseler f(z)= u(x,y)+iv(x,y) fonksiyonu da sabittir. Bu da bir noktanın civarında sabit kalan bir f(z) analitik fonksiyonunun sabitten ibaret olduğunu gösterir.

O halde başlangıçta sabitten farklı aldığımız f(z) analitik fonksiyonu $\left|f(z_0)\right| = \left|f(z_0 + re^{i\theta})\right|$ varsayımı altında bir sabite eşit oldu, bu da çelişkidir. O halde $\left|f(z_0)\right| \neq \left|f(z_0 + re^{i\theta})\right|$ dır.

Diğer taraftan |f(z)| fonksiyonu reel değişkenli bir fonksiyon olup Ω'da analitik, sürekli olduğundan |f(z)| fonksiyonu maksimum değerini Ω'da alır. Ancak yukarıda gösterildi ki bu nokta hiç bir zaman iç nokta olamayacaktır. O halde |f(z)| maksimum değerini ancak sınırda alır.

Bu da maksimum modül teoremini ispatlar.

4.3 Teorem (Schwarz Lemması) **:** $w(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu $D = \{z \big| |z| < 1\}$ de tanımlanmış ve analitik olsun. Ayrıca $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ koşullarını gerçeklesin. Bu durumda

$$|w(z)| \leq |z| \text{ ve } |w'(0)| \leq 1$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. Eşitlik hali ancak ve ancak $w(z) = kz$, $|k| = 1$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat: $$h(z) = \frac{w(z)}{z} = \frac{c_1 z + c_2 z^2 + \ldots}{z} = c_1 + c_2 z + \ldots \tag{4.20}$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu fonksiyon birim diskte tanımlı ve analitiktir. Maksimum prensibinden dolayı fonksiyon maksimum değerini sınırda alır. Yani

$$|h(z)| = \left|\frac{w(z)}{z}\right| \leq 1 \tag{4.21}$$

eşitsizliği geçerlidir. (4.21) ifadesinden aşağıdaki işlemleri yaparak

$$\frac{|w(z)|}{|z|} \leq 1 \Rightarrow |w(z)| \leq |z|$$

olduğunu görürüz. Şimdi türevin

$$h'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{h(z) - h(0)}{z - 0}$$

limit tanımını kullanırsak

$$|w'(0)| = \left|\lim_{z\to 0}\frac{w(z)-w(0)}{z-0}\right| = \left|\lim_{z\to 0}\frac{w(z)-0}{z}\right| = \left|\lim_{z\to 0}\frac{w(z)}{z}\right| = \lim_{z\to 0}\left|\frac{w(z)}{z}\right| \Rightarrow$$

$$\lim_{z\to 0}|h(z)| \le 1 \Rightarrow |w'(0)| \le 1$$

bulunur. Eşitlik hali

$$h(z) = \frac{w(z)}{z} \Rightarrow \left|\frac{w(z)}{z}\right| = 1 \Rightarrow \frac{w(z)}{z} = e^{i\theta} \Rightarrow w(z) = e^{i\theta}z$$

$$w(z) = e^{i\theta}z \equiv kz \Rightarrow w(z) \equiv kz \quad (|k| = 1)$$

olduğu görülür.

4.4 Tanım: f(z) ve g(z) fonksiyonları $D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ bölgesinde analitik iki fonksiyon olsun. Eğer

1. $\varphi(z)$, D'de analitik,
2. $\varphi(0) = 0$,
3. $|\varphi(z)| < 1$

koşullarını gerçekleyen bir $\varphi(z)$ fonksiyonu bulunabilir ve $f(z) = g(\varphi(z))$ bağıntısı gerçeklenirse, f(z) fonksiyonu g(z) fonksiyonuna Sabordine'dir denir. Bu prensip "$f(z) \prec g(z)$" ile gösterilir.

4.5 Açıklama: Sabordinasyon prensibi Schwarz lemmasının genelleştirilmiş halidir.

4.6 Teorem: $f(z) \prec g(z)$ olsun. Bu takdirde

$f(D) \subset g(D)$ ve f(0)=g(0)

dır.

İspat: $f(z) \prec g(z)$ olduğundan dolayı tanım gereği,

1. $\varphi(z)$ fonksiyonu D'de analitik,
2. $\varphi(0) = 0$,

3. $|\varphi(z)| < 1$,

koşullarını gerçekleyen bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır. Öyleki $f(z) = g(\varphi(z))$ dir. Burada $\varphi(z)$ fonksiyonu Schwarz lemmasının koşullarını gerçeklediğinden;

$$|\varphi(z)| \le |z|$$

eşitsizliği yazılır. Eşitlik hali yalnız ve yalnız $\varphi(z) = e^{i\theta} z$ olduğu zaman geçerlidir. O halde $z_1 \in \varphi(D)$ alalım. $z_1 = \varphi(z)$ olacak şekilde bir $z \in D$ vardır.

$$z_1 = \varphi(z) \Rightarrow |z_1| = |\varphi(z)| \Rightarrow |z_1| = |\varphi(z)| \le |z| < 1 \Rightarrow |z_1| < 1 \Rightarrow z_1 \in D$$

bulunur. O halde, $z_1 \in \varphi(D) \Rightarrow z_1 \in D \Rightarrow \varphi(D) \subset D$ dir. g(z) ve f(z) fonksiyonları D'de analitik, $f(z) \prec g(z)$ ve $\varphi(D) \subset D$ olduğundan

$$f(D) = g(\varphi(D)) \subset g(D) \Rightarrow f(D) \subset g(D)$$

bulunur. Aynı zamanda

$$\varphi(0) = 0 \text{ ve } f(z) = g(\varphi(z)) \Rightarrow f(0) = g(\varphi(0)) = g(0) \Rightarrow f(0) = g(0)$$

koşulunu da bulmuş oluruz.

4.7 Teorem: $f(z) \prec g(z)$ olsun. Bu takdirde

$$\{f(z) \,|\, |z| < r\} \subset \{g(z) \,|\, |z| < r\} \; (0 < r < 1) \quad \text{dir.}$$

İspat: $f(z) \prec g(z)$ olsun. Bu takdirde tanımdan dolayı D'de yalınkat olması gerekmeyen ve

1. $\varphi(z)$ D'de analitik,
2. $\varphi(0) = 0$,
3. $|\varphi(z)| < 1$,

koşullarını gerçekleyen bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır. $\varphi(z)$ Schwarz lemmasının koşullarını gerçeklediğinden $|\varphi(z)| \le |z|$'dir. O halde $|\varphi(z)| \le |z| < r < 1$'dir.

$z_1 \in \varphi(D_r)$ alalım. Bu durumda $z_1 = \varphi(z)$ olacak şekilde en az bir $z \in D_r$ vardır.

$$z_1 = \varphi(z) \Rightarrow |z_1| = |\varphi(z)| \le |z| < r < 1 \Rightarrow z_1 \in D_r$$

dolayısıyla $\varphi(D_r) \subset D_r$ 'dir. Fakat aynı zamanda $f(z) \prec g(z)$ olduğundan $f(z) = g(\varphi(z))$ 'dir. Buradan

$$\{f(z) \| z| < r\} = \{g(\varphi(z)) \| z| < r\}$$

yazılabilir.

$\varphi(D_r) \subset D_r$ olduğundan, g(z)'de D_r 'de analitik olduğundan $g(\varphi(D_r)) \subset g(D_r)$ 'dir.

(0<r<1) $\Rightarrow$

$$\{f(z) \| z| < r\} = \{g(\varphi(z)) \| z| < r\} = \{g(\varphi(D_r)) \| z| < r\} \subset \{g(D_r) \| z| < r\} = \{g(z) \| z| < r\} \Rightarrow$$

$$\{f(z) \| z| < r\} \subset \{g(z) \| z| < r\} \ (0 < r < 1)$$

bulunur ki buda ispatı istenen ifadedir.

4.8 Teorem: $f(z) \prec g(z)$ olsun. Bu takdirde

$$\underset{|z| \le r}{\operatorname{Max}} |f(z)| \le \underset{|z| \le r}{\operatorname{Max}} |g(z)|$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: $f(D_r) \subset g(D_r)$ olduğunu ispatladık ve aynı zamanda f(z) ve g(z) fonksiyonları D_r 'de analitik olduklarından maksimum modül teoremini kullanırsak; $|f(z)|$ ve $|g(z)|$ maksimum değerini ancak sınırda alabilirler. Aynı zamanda $f(D_r) \subset g(D_r)$ olduğundan, $\underset{|z| \le r}{\operatorname{Max}} |f(z)| \le \underset{|z| \le r}{\operatorname{Max}} |g(z)|$ sonucu yazılabilir.

4.9 Lemma: $\varphi(z)$ aşağıdaki koşulları gerçekleyen analitik bir fonksiyon olsun,

1. $\varphi(z)$, $|z| < 1$ için analitik,
2. $\varphi(z)$, $|z| < 1$ için $|\varphi(z)| < 1$

Bu takdirde,

$$(1 - |z|^2)|\varphi'(z)| \le 1 - |\varphi(z)|^2$$

dir.

İspat: $\varphi(z)$, $|z|<1$ de analitik ve $|\varphi(z)|<1$ olduğundan $|\zeta|<1$ olmak üzere

$$\phi(z)=\frac{\varphi(z)-\varphi(\zeta)}{1-\varphi(z)\overline{\varphi(\zeta)}}$$

fonksiyonu da $|z|<1$ de analitik ve $\phi(z)$, $z=\zeta$ için sıfırdır. Dolayısıyla

$$h(z)=\frac{\phi(z)}{\dfrac{z-\zeta}{1-z\overline{\zeta}}}$$

fonksiyonu da $z=\zeta$ noktasında analitiktir. Ayrıca

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{|z|\to 1}|\varphi(z)|=1\\ \text{ve } |z|=1 \text{ için}\\ \left|\dfrac{z-\zeta}{1-z\overline{\zeta}}\right|=1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ maksimum prensibine göre } |h(z)|\le 1\text{'dir.}$$

dir. Buna göre,

$$h(z)=\frac{\phi(z)}{\dfrac{z-\zeta}{1-z\overline{\zeta}}}=\frac{\varphi(z)-\varphi(\zeta)}{1-\varphi(z)\overline{\varphi(\zeta)}}\frac{1-z\overline{\zeta}}{z-\zeta}=\frac{\varphi(z)-\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\,\frac{1-z\overline{\zeta}}{1-\varphi(z)\overline{\varphi(\zeta)}}$$

$$|h(z)|=\left|\frac{\varphi(z)-\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\,\frac{1-z\overline{\zeta}}{1-\varphi(z)\overline{\varphi(\zeta)}}\right|=\left|\frac{\varphi(z)-\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\right|\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{1-\varphi(z)\overline{\varphi(\zeta)}}\right|\le 1$$

yazılabilir. $z=\zeta$ değeri yerine koyulursa

$$|\varphi'(\zeta)|\frac{1-|\zeta|^2}{1-|\varphi(\zeta)|^2}\le 1\Rightarrow |\varphi'(\zeta)|\le\frac{1-|\varphi(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}\Rightarrow |\varphi'(\zeta)|\left(1-|\zeta|^2\right)\le 1-|\varphi(\zeta)|^2$$

bulunur. Fakat ζ keyfi olduğundan,

$$|\varphi'(z)|(1-|z|^2)\le 1-|\varphi(z)|^2$$

elde edilir.

4.10 Teorem: $f(z)\prec g(z)$ olsun. Bu taktirde

$$\operatorname*{Max}_{|z|\le r}\left(\left|1-|z|^2\right|\right)|f'(z)|\le \operatorname*{Max}_{|z|\le r}\left(\left|1-|z|^2\right|\right)|g'(z)| \qquad \text{dir.}$$

İspat: $f(z) \prec g(z)$ olduğundan dolayı

1. $\varphi(z)$ fonksiyonu $|z|<1$ de analitik,
2. $\varphi(z)$, $|z|<1$ de $\varphi(0)=0$,
3. $\varphi(z)$, $|z|<1$ de $|\varphi(z)|<1$,

koşullarını gerçekleyen bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır ve Lemma4.9'dan dolayı

$$(1-|z|^2)|\varphi'(z)| \leq 1-|\varphi(z)|^2 \qquad (4.22)$$

eşitliğini gerçekler ve aynı zamanda $f(z) \prec g(z) \Rightarrow f(z)=g(\varphi(z))$ ifadesinden türev alınırsa,

$$f'(z)=g'(\varphi(z))\varphi'(z) \Rightarrow |f'(z)|=|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)| \Rightarrow (1-|z|^2)>0 \Rightarrow$$
$$(1-|z|^2)|f'(z)|=(1-|z|^2)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)|$$

dır. Bu adımda (4.22) bağıntısı kullanılırsa,

$$(1-|z|^2)|f'(z)|=(1-|z|^2)|g'(\varphi)||\varphi'(z)| \leq (1-|\varphi(z)|^2)|g'(\varphi)| \qquad (4.23)$$

bulunur. Fakat $\varphi(z)$ fonksiyonu Schwarz lemmasının koşullarını gerçeklediğinden $|\varphi(z)| \leq |z|$ dir. Bunu da en son (4.23) te kullanıp maksimum teoremini uygularsak,

$$\underset{|z|\leq r}{\mathrm{Max}}\left|1-|z|^2\right||f'(z)| \leq \underset{|z|\leq r}{\mathrm{Max}}\left|1-|z|^2\right||g'(z)| \quad , \quad (0 \leq r < 1)$$

bağıntısını elde ederiz. Bu da ispatı istenen ifadedir.

4.11 Teorem: $f(z) \prec g(z)$ olsun. Bu taktirde $|f'(0)| \leq |g'(0)|$ dır.

İspat: $f(z) \prec g(z) \Rightarrow |z|<1$ de analitik, $\varphi(0)=0$, $|\varphi(z)|<1$ koşullarını gerçekleyen bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır ve $f(z)=g(\varphi(z))$ dir.

$$f'(z)=\varphi'(z)g'(\varphi(z)) \Rightarrow |f'(z)|=|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)| \Rightarrow |f'(0)|=|g'(\varphi(0))||\varphi'(0)|$$

bulunur. $|\varphi'(0)| \leq 1$ ve $\varphi(0)=0$ ($\varphi(z)$ Schwarz lemmasının koşullarını sağladığından) koşullarından dolayı

$$|f'(0)|=|g'(\varphi(0))||\varphi'(0)| \leq |g'(\varphi(0))|=|g'(0)|$$
$$\Rightarrow |f'(0)| \leq |g'(0)|$$

bulunur ki bu da ispatı istenen şeydir.

4.12 Lemma: g(z) , D de yalınkat olsun. Ancak ve yalnız f(0)=g(0) ve $f(D)\subset g(D)$ ise $f(z)\prec g(z)$ dir.

İspat:

$f(z)\prec g(z)$ ve g(z), D de yalınkat olsun bu taktirde

(i) $|z|<r$ de analitik

(ii) $|z|<r$ de $\varphi(0)=0$

(iii) $|z|<r$ de $|\varphi(z)|<1$

koşullarını gerçekleyen bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır. Ayrıca $\varphi(z)$, Schwarz Lemmasının koşullarını gerçeklediğinden $|\varphi(z)\leq|z|$ dir. Dolayısıyla $z_1\in\varphi\left(D_r\right)\Rightarrow z_1=\varphi\left(z\right)$ olacak şekilde en az bir $z\in D_r$ vardır.

$z_1=\varphi(z)\Rightarrow|z_1|=|\varphi(z)|\leq|z|<r\Rightarrow|z_1|<r\Rightarrow z_1\in D_r\Rightarrow\varphi(D_r)\subset D_r$ dir.

g(z) , D de yalınkat olduğundan $g\left(\varphi\left(D_r\right)\right)\subset g\left(D_r\right)$ dir.

$$\left.\begin{array}{l} f(z)=g\left(\varphi(z)\right) \\ g\left(\varphi\left(D_r\right)\right)\subset g\left(D_r\right) \\ f\left(D_r\right)=g\left(\varphi\left(D_r\right)\right) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$f\left(D_r\right)\subset g\left(D_r\right)$ bulunur. $r\to1$ olunca $f(D)\subset g(D)$ bulunur.

$f(z)\prec g(z)\Rightarrow f(z)=g(\varphi(z))\Rightarrow f(0)=g(\varphi(0))=g(0)$ dır. Yani sonuç olarak f(0)=g(0) bulunur.

Karşıt olarak g(z) fonksiyonu D bölgesinde yalınkat, $f(0)=g(0)$ ve $f(D)\subset g(D)$ olsun. Gösteremeliyiz ki $f(z)\prec g(z)$ dir.

$g(z)$, D de yalınkat olduğundan

$w=g(z)\Leftrightarrow z=g^{-1}(w)$

fonksiyonunun $g(D)$ de analitik ve yalınkat olduğunu söyleyebiliriz. Diğer yandan $f(D)\subset g(D)$ olduğundan $z=g^{-1}(w)$ fonksiyonu aynı zamanda $f(D)$ de yalınkattır. Şimdi

$$\varphi(z)=g^{-1}(f(z)) \tag{4.24}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. (4.24) şeklinde tanımlanan fonksiyon yukarıda söylediklerimizden ötürü $g(D)$ de analitiktir. $f(D) \subset g(D)$ olduğundan $\varphi(z)$ fonksiyonu $f(D)$ 'de de analitiktir. Ayrıca

$$f(0) = g(0) \Rightarrow 0 = g^{-1}(f(0))$$

bulunur ki bu bağıntı bize

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(z) = g^{-1}(f(z)) \\ g^{-1}(f(0)) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(0) = 0$$

eşitliğini verir. Ayrıca $\varphi(z) = g^{-1}(f(z))$ fonksiyonuna ait bütün değerler $z = g^{-1}(w)$ fonksiyonu ile verilebileceğinden $\varphi(z) = g^{-1}(f(z))$ fonksiyonu D'de analitiktir ve $|\varphi(z)| < 1$ koşulunu gerçekler. Sonuç olarak $\varphi(z)$, D de analitik, $\varphi(0) = 0$, $|\varphi(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen fonksiyon olmak üzere

$$\varphi(z) = g^{-1}(f(z)) \Rightarrow f(z) = g(\varphi(z))$$

şeklinde yazılabilir ki bu da subordinasyon tanımından dolayı

$$f(z) \prec g(z)$$

olduğunu gösterir.

5.POZİTİF REEL KISMA HAİZ FONKSİYONLAR

5.1 Tanım:

(i) p(0)=1

(ii) Re p(z) > 0 (|z| <1)

(iii) p(z), D ={ z | |z| < 1 } de analitik

özelliklerine gerçekleyen fonksiyonların sınıfını P ile gösterelim.

5.2 Özellik: $w=\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu gözönüne alınsın.

$$\operatorname{Re} w=\frac{1}{2}\left(w+\overline{w}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1+z}{1-z}+\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{(1+z)\cdot(1-\overline{z})+(1+\overline{z})\cdot(1-z)}{(1-z)\cdot(1-\overline{z})}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\overline{z}+z-|z|^2+1-z+\overline{z}-|z|^2}{|1-z|^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2-2|z|^2}{|1-z|^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(1-|z|^2)}{|1-z|^2}=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

$\Rightarrow \operatorname{Re} w=\dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ bulunur. $|z|<1 \Rightarrow |z|^2<1 \Rightarrow 1-|z|^2>0$ ve $|1-z|^2>0$ dan

$\operatorname{Re} w=\dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}>0 \Rightarrow \operatorname{Re} w>0$ bulunur.

(Yani birim dairede Rew > 0 dır.)

Diğer taraftan bu fonksiyon;

$$\left.\begin{array}{l} z=0 \text{ noktasını } w=\dfrac{1+z}{1-z}=\dfrac{1+0}{1-0}=1 \Rightarrow w=1 \text{ noktasına} \\ z=1 \text{ noktasını } w=\infty \text{ noktasına} \\ z=\infty \text{ noktasını } w=-1 \text{ noktasına} \end{array}\right\}$$

tasvir eder.

Bu fonksiyon aynı zamanda ;

$$|w|^2 = w\overline{w} = \left|\frac{1+z}{1-z}\right|^2 = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)\left(\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}\right) = \frac{1+\overline{z}+z+|z|^2}{1-\overline{z}-z+|z|^2}$$

$$= \frac{1+2\operatorname{Re}z+|z|^2}{1-2\operatorname{Re}z+|z|^2} = \frac{1+2\operatorname{Re}z+|z|^2+4\operatorname{Re}z-4\operatorname{Re}z}{1-2\operatorname{Re}z+|z|^2}$$

$$= \frac{1+2\operatorname{Re}z+|z|^2-4\operatorname{Re}z}{1-2\operatorname{Re}z+|z|^2} + \frac{4\operatorname{Re}z}{1-2\operatorname{Re}z+|z|^2}$$

$$= \frac{1-2\operatorname{Re}z+|z|^2}{1-2\operatorname{Re}z+|z|^2} + \frac{4\operatorname{Re}z}{1-2\operatorname{Re}z+|z|^2} = 1+4\frac{\operatorname{Re}z}{1-2\operatorname{Re}z+|z|^2}$$

Yani sonuç olarak ; $|w|^2 = 1+4\dfrac{\operatorname{Re}z}{1-2\operatorname{Re}z+|z|^2}$ bulunur. O halde

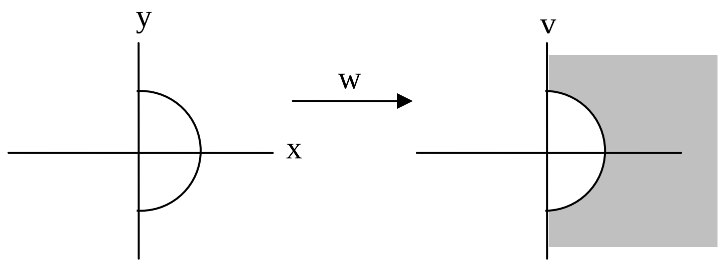
$$\operatorname{Re}w = \frac{1+|z|^2}{|1+z|^2} \tag{5.1}$$

$$|w|^2 = 1+4\frac{\operatorname{Re}z}{1-2\operatorname{Re}z+|z|^2} \tag{5.2}$$

sonuçlarından hareket edilirse;

a) $|z|<1$ ve Rez > 0 olsun. Bu demektir ki (5.1) ve (5.2) sonuçlarından

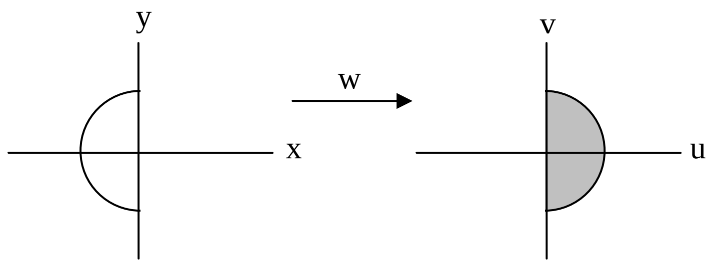
Rew > 0 , $|w| > 1$ bulunur.



Şekil 5.1

b) $|z|<1$ ve $\mathrm{Re}z < 0$ olsun. Bu demektir ki (5.1) ve (5.2) sonuçlarından

$\mathrm{Re}w > 0$, $|w| < 1$ bulunur.



Şekil 5.2

(a) ve (b) sonuçlarından elde edilen, birim dairenin sağ yarım düzleme tasvir edildiğidir. O halde buraya kadar yaptığımız işlemlerle w fonksiyonunun birim dairede pozitif reel kısma sahip olduğu ve birim daireyi sağ yarım düzleme tasvir ettiği görülmüştür.

5.3 Lemma : p(z) fonksiyonu yalnız ve yalnız

$$p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$$

ise P sınıfına aittir.

İspat: $p(z) \prec \dfrac{1+z}{1-z}$ olsun. Bu halde öyle bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır ki bu fonksiyon

1. D'de analitik
2. $|\varphi(z)| < 1$
3. $\varphi(0) = 0$

koşullarını gerçekler ve $g(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ farz edersek $p(z) \prec g(z)$ olduğundan

$$p(z) = g(\varphi(z)) = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$$

dir. Buradan hareket edersek,

$$p(0) = \frac{1+\varphi(0)}{1-\varphi(0)} = \frac{1+0}{1-0} = 1 \Rightarrow p(0) = 1$$

$$\operatorname{Re} p(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)} + \frac{1+\overline{\varphi(z)}}{1-\overline{\varphi(z)}}\right) = \frac{1-|\varphi(z)|^2}{|1-\varphi(z)|^2}$$

bulunur. Ayrıca $|\varphi(z)| \le 1$ koşulunu gerçeklediğinden ve

$$1-|\varphi(z)|^2 > 0, \quad |1-\varphi(z)|^2 > 0$$

olduğundan

$$\operatorname{Re} p(z) = \frac{1-|\varphi(z)|^2}{|1-\varphi(z)|^2} > 0$$

olur. O halde $\varphi(z)$ D'de analitik olduğundan $p(z) = \dfrac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$ fonksiyonu da D'de analitiktir. O halde, $p(0) = 1$, $\operatorname{Re} p(z) \ge 0$, $p(z)$ D'de analitik olduğundan $p(z) \in P$'dir.

Tersine $p \in P$ olsun. Bu halde $p(0) = 1$, $p(z)$ D'de analitik, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ koşullarını gerçekler.

$$g(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın.

$$g(0)=\frac{1+0}{1-0}=1 \Rightarrow g(0)=1 \text{ ve } p(0)=1 \Rightarrow g(0)=p(0)$$

koşulu sağlanır. $w \in p(D)$ alalım. $w=p(z)$ olacak şekilde bir $z \in D$ vardır. $\operatorname{Re} p(z)=\operatorname{Re}(w)>0$ olduğundan w noktası sağ yarım düzlemdedir. Diğer yandan $g(z)$ fonksiyonu D'den sağ yarım düzleme yalınkat bir fonksiyon olduğundan $w=g(z')$ olacak şekilde bir $z' \in D$ vardır. Gerçekten,

$$w=g(z')=\frac{1+z'}{1-z'} \Rightarrow z'=\frac{w-1}{w+1} \Rightarrow |z'| \leq 1$$

ve

$$|z'|^2=1-4\frac{\operatorname{Re} w}{|1+w|^2}=1-4\frac{\operatorname{Re} w}{|w|+2\operatorname{Re} w+1} \quad , \quad \operatorname{Re} w>0$$

olduğundan $z' \in D$'dir.

$$w=g(z') \Rightarrow w \in g(D)$$

dir. Böylece

$$p(D) \subset g(D)$$

olur. Lemma 4.10'da "g(z) D de yalınkat olsun. $f(z) \prec g(z)$ dir. Ancak ve yalnız f(0)=g(0) ve $f(D) \subset g(D)$ ise" olduğunu gösterdik. Buradan,

$$f(z) \prec g(z)$$

bulunur.

5.4 Hazırlık: $w_1=\frac{w-1}{w+1}$ fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyon,

w=0	noktasını $w_1=-1$ noktasına,	
w=i	noktasını $w_1=i$	noktasına,
$w=\infty$	noktasını $w_1=1$	noktasına

tasvir eder. Dolayısıyla bu fonksiyon Rew>0 sağ düzlemi $|w_1| \leq 1$dairesi üzerine resmeder ve $w_1(1)=0$ koşulunu gerçekler.

Şimdi $\operatorname{Ref}(z) \geq 0$ olsun. f(z) D'de analitik ise $g(z)=\frac{f(z)-1}{f(z)+1}$ fonksiyonu $|g(z)|<1$ koşulunu gerçekler. Bundan dolayı herhangi bir pozitif reel kısma haiz fonksiyon; g(z), D'de analitiktir, g(0)=0, $|g(z)| < 1$ olmak

üzere $f(z) = \dfrac{1+g(z)}{1-g(z)}$ şeklinde yazılabilir. Bu halde f(0)=1'dir.

$$|a| < 1 \quad \text{ise} \quad \left|\frac{1+a}{1-a}\right| \le \frac{1+|a|}{1-|a|} \tag{5.3}$$

dır. Gerçekten, $|1+a| \le 1+|a|$ (üçgen eşitsizliğinden)

$$1 = |1| = |1+a-a| = |1-a+a| \le |1-a| + |a| \Rightarrow 1-|a| \le |1-a|$$

$$\left.\begin{array}{l} |1+a| \le 1+|a| \\ 1-|a| \le |1-a| \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|1+a|}{|1-a|} \le \frac{1+|a|}{1-|a|} \Rightarrow \left|\frac{1+a}{1-a}\right| \le \frac{1+|a|}{1-|a|}$$

bulunur. O halde herhangi bir pozitif reel kısma haiz fonksiyon f(z), $|g(z)| \le 1$ koşulunu gerçekleyen fonksiyon olmak üzere

$$f(z) = \frac{1+g(z)}{1-g(z)}$$

şeklinde yazılabiliyordu. O halde, (5.3) eşitsizliğinden dolayı

$$|f(z)| \le \frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{5.4}$$

eşitsizliğini gerçekler. Ayrıca, $\operatorname{Re} f(z) > 0$ olsun. Bu halde

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{f(z)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{\overline{f(z)}}{|f(z)|^2}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{f(z)}{|f(z)|^2}\right\} > 0$$

olduğundan (5.4) eşitsizliğinden,

$$\frac{1}{|f(z)|} \le \frac{1+|z|}{1-|z|} \Rightarrow |f(z)| \ge \frac{1-|z|}{1+|z|} \tag{5.5}$$

bulunur. Dolayısıyla (5.4) ve (5.5) eşitlikleri birleştirilirse,

$$\left.\begin{array}{l} |f(z)| \le \dfrac{1+|z|}{1-|z|} \\ \\ |f(z)| \ge \dfrac{1-|z|}{1+|z|} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1-|z|}{1+|z|} \le |f(z)| \le \frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{5.6}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Dolayısıyla aşağıdaki özelliği yazabiliriz.

5.5 Özellik: $p(z) \in P$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le |p(z)| \le \frac{1+|z|}{1-|z|} \text{ ve } |p'(z)| \le \frac{2}{(1-|z|)^2} \quad , \quad |p(0)| \le 2$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

İspat: Hazırlık 5.4'ten ve $p(z) \in P$ olduğundan $\operatorname{Re} p(z) \ge 0$, p(0)=1 koşulları gerçeklenir ve $\varphi(z)$ D'de analitik, $\varphi(0) = 0$ ve $|\varphi(z)| \le 1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere,

$$p(z) = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$$

şeklinde yazılabilir. Hazırlık 5.4'ten ve (5.6) eşitsizliğinden dolayı

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le |p(z)| \le \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

yazabiliriz.

$$p(z) = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)} \Rightarrow p'(z) = \frac{\varphi'(z)(1-\varphi(z)) + \varphi'(z)(1+\varphi(z))}{(1-\varphi(z))^2} \Rightarrow$$

$$p'(z) = \frac{\varphi'(z) - \varphi'(z)\varphi(z) + \varphi'(z) + \varphi'(z)\varphi(z)}{(1-\varphi(z))^2} \Rightarrow p'(z) = \frac{2\varphi'(z)}{(1-\varphi(z))^2} \Rightarrow |p'(z)| = \frac{2|\varphi'(z)|}{|1-\varphi(z)|^2}$$

bulunur. Fakat $\varphi(z)$ Schwarz Lemmasının koşullarını gerçeklediğinden ve Lemma 4.9'dan dolayı;

$$|\varphi'(z)| \le \frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}$$

olur. Bu ifadeyi $|p'(z)|$ de kullanırsak,

$$|p'(z)| = \frac{2|\varphi'(z)|}{|1-\varphi(z)|^2} \le \frac{2\left(\dfrac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}\right)}{|1-\varphi(z)|^2} = \frac{2(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)|1-\varphi(z)|^2} \Rightarrow$$

$$|p'(z)| \le \frac{2(1-|\varphi(z)|)(1+|\varphi(z)|)}{(1-|z|)(1+|z|)|1-\varphi(z)|^2} \le \frac{2(1+|\varphi(z)|)}{(1-|z|)(1+|z|)|1-\varphi(z)|} \Rightarrow$$

$$|p'(z)| \le \frac{2(1+|\varphi(z)|)}{(1-|z|)(1+|z|)(1-|\varphi(z)|)}$$

$|\varphi(z)| \le |z|$ olduğundan $1+|\varphi(z)| \le 1+|z| \Rightarrow \dfrac{1+|\varphi(z)|}{1+|z|} \le 1$ eşitsizliği

kullanılırsa

$$|p'(z)| \le \frac{1+|\varphi(z)|}{1+|z|}\frac{2}{(1-|z|)(1-|\varphi(z)|)} \le \frac{2}{(1-|z|)(1-|\varphi(z)|)} \le \frac{2}{(1-|z|)(1-|z|)} = \frac{2}{(1-|z|)^2}$$

bulunur. Yeni netice

$$|p'(z)| \le \frac{2}{(1-|z|)^2}$$

bulunur. z=0 koyarsak

$$|p'(0)| \le 2$$

bulunur.

5.6 Teorem : $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu *D* de analitik olsun. Bu takdirde aşağıdaki üç koşul eşdeğerdir:

(i) $p(z) \in P$

(ii) $p(z) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}.d\gamma(t)$, $\gamma(2\pi)-\gamma(0)=1$

gerçeklenecek şekilde artan $\gamma(t)$ fonksiyonu vardır. ($0 \le t \le 2\pi$)

(iii) $m = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{p=0}^{m} c_{k-p}\lambda_k\overline{\lambda_p} \ge 0 \qquad (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in C) \quad \text{dir.} \quad c_0 = 2 \quad \text{ve} \quad c_{-k} = \overline{c_k}$$

($k \ge 1$)

kabul edilmiştir.

İspat : (i) koşulu gerçeklenmiş olsun. Bu takdirde Schwarz Formülüne göre;

“ Schwarz Formülü: $f(z)$, $|z| < R$ de analitik olsun. Bu takdirde

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\varepsilon|=R} \frac{\varepsilon+z}{\varepsilon-z}.u(\varepsilon).\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + ic$$

dir. Burada c keyfi reel sabittir ve

$$u(z)=\operatorname{Re}\left[\ \frac{1}{2\pi i}\int_{|\varepsilon|=R}\frac{\varepsilon+z}{\varepsilon-z}.u(\varepsilon).\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\ \right] \quad \text{ise}$$

$f(z)$ nin reel kısmıdır. “

O halde bu formülden;

$$p(z)=\left[\ \frac{1}{2\pi i}\int_{|\varepsilon|=r}\frac{\varepsilon+z}{\varepsilon-z}.\operatorname{Re}p(\varepsilon).\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\ \right]$$

$$\left(\ \varepsilon=re^{it}\Rightarrow d\varepsilon=ire^{it}dt\Rightarrow\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{ire^{it}dt}{re^{it}}=idt\ \right)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}.\operatorname{Re}p(re^{it}).idt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}.\operatorname{Re}p(re^{it}).dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}.d\gamma(t,r) \qquad (\ |z|<r<1\ )$$

burada $\gamma(t,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\operatorname{Re}p(re^{it})dt \quad (\ 0\le t\le 2\pi\ )$.

$\operatorname{Re}p(z)>0$ olduğundan $\gamma(t,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}p(re^{it})dt>0$ dır. O halde $0\le t_1\le t_2\le 2\pi$ olmak üzere $0\le t_2-t_1\le 2\pi$ olduğundan;

$$\gamma(t_2,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{t_2}\operatorname{Re}p(re^{it})dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{t_1}\operatorname{Re}p(re^{it})dt+\frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\operatorname{Re}p(re^{it})dt>0$$

$$\Rightarrow\gamma(t_2,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{t_2}\operatorname{Re}p(re^{it})dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{t_1}\operatorname{Re}p(re^{it})dt+\frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\operatorname{Re}p(re^{it})dt>$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{t_1}\operatorname{Re}p(re^{it})dt$$

$0\le t_1\le t_2\le 2\pi$ için $\gamma(t_1,r)\le\gamma(t_2,r)$ dir. Yani fonksiyon $0\le t\le 2\pi$ de artandır.

Diğer taraftan

$$p(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}.\operatorname{Re}p(re^{it}).dt$$

ifadesinde $z=0$ yazılırsa $p(0)=1$ olduğundan

$$p(0)=1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+0}{re^{it}-0}.\operatorname{Re}p(re^{it}).dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}p(re^{it}).dt = \gamma(2\pi, r)$$

Yani sonuç olarak $\gamma(2\pi, r)$ =1 bulunur. Aynı zamanda

$$\gamma(t,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{t}\operatorname{Re}p(re^{it})dt$$ ifadesinden

$$\gamma(0,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{0}\operatorname{Re}p(re^{it})dt=0$$

bulunur.

“ **Helly Seçme Teoremi :** [25]. $[a,b]$ aralığında sonsuz elemana sahip bir $F=\{f(x)\}$ ailesi tanımlanmış olsun. Ailenin bütün fonksiyonları ve ailenin her fonksiyonunun toplam varyasyonu sınırlı ise yani $|f(x)|\leq K$ ve $\overset{b}{\underset{a}{\vee}}(f)\leq K$ ise F ailesinden bir $(f_n(x))$ dizisi seçmek mümkündür. Öyle ki dizi $[a,b]$ nin her noktasında sonlu bir $\varphi(x)$ fonksiyonuna yakınsar. “

n’ ye göre limiti 1 olan ($n\to\infty$ için $r_n \to 1$) öyle bir (r_n) dizisi bulunabilir ki $\gamma(t, r_n)$ bütün süreklilik noktaları için artan bir $\gamma(t)$ fonksiyonuna yakınsar. Böylece

$$p(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}.\operatorname{Re}p(re^{it}).dt = \int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}.d\gamma(t,r)$$

ifadesinden limite geçilirse

$$p(z)=\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}(1+zr^{-1}e^{-it})}{re^{it}(1-zr^{-1}e^{-it})}.d\gamma(t,r) = \int_0^{2\pi}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}.d\gamma(t)$$

bulunur. Bu (ii) ifadesidir. ((i)$\Rightarrow$(ii))

(ii) koşulu gerçeklenmiş olsun. Katsayılar

$$c_k = 2\int_0^{2\pi} e^{-ikt}d\gamma(t)$$

ile ifade edilirler.

Gerçekten;

$$p(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}.d\gamma(t)=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z+e^{-it}z-e^{-it}z}{1-ze^{-it}}.d\gamma(t)$$

$$=\int_0^{2\pi}(\frac{1-e^{-it}z}{1-e^{-it}z}+\frac{2e^{-it}z}{1-e^{-it}z})d\gamma(t)=\int_0^{2\pi}(1+\frac{2e^{-it}z}{1-e^{-it}z})d\gamma(t)$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[1+2e^{-it}z(1+e^{-it}z+e^{-2it}z^2+...)\right]d\gamma(t)$$

$$=\int_0^{2\pi}d\gamma(t)+2\int_0^{2\pi}e^{-it}zd\gamma(t)+2\int_0^{2\pi}e^{-2it}z^2d\gamma(t)+...$$

olduğundan dolayı katsayılar

$$c_k=2\int_0^{2\pi}e^{-ikt}d\gamma(t)\quad,\qquad(\ k=1,2,...\ )$$

ile ifade edilirler. $k\le 0$ için de bu formül geçerlidir.(Öyle ki $c_0=2$, $c_{-k}=\overline{c_k}$, $k\ge 1$ koşulu altında) Böylece

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{m}\lambda_k e^{-ikt}\right|^2 d\gamma(t)$$

$$=\int_0^{2\pi}(\lambda_0+\lambda_1e^{-it}+\lambda_2e^{-2it}+...+\lambda_me^{-mit})(\overline{\lambda_0}+\overline{\lambda_1}e^{it}+\overline{\lambda_2}e^{2it}+...+\overline{\lambda_m}e^{mit})d\gamma(t)$$

$$=\int_0^{2\pi}(\sum_{k=0}^{m}\lambda_ke^{-ikt})(\sum_{p=0}^{m}\overline{\lambda_p}e^{ipt})d\gamma(t)$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\sum_{p=0}^{m}\lambda_k\overline{\lambda_p}\int_0^{2\pi}e^{-i(k-p)t}d\gamma(t)\tag{5.7}$$

olur. Ancak

$$c_k=2\int_0^{2\pi}e^{-ikt}d\gamma(t)\quad,\qquad(\ k=0,1,2,...\ )$$

olduğundan ve

$$\frac{1}{2}c_{k-p}=\int_0^{2\pi}e^{-i(k-p)t}d\gamma(t)$$

olur. Bu da (5.7) deki ifadede yerine yazılırsa ve $d\gamma(t)>0$ olduğundan;

$$0 \le \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{m} \lambda_k e^{-ikt} \right|^2 d\gamma(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m} \sum_{p=0}^{m} \lambda_k \overline{\lambda_p} c_{k-p} \quad \Rightarrow \sum_{k=0}^{m} \sum_{p=0}^{m} \lambda_k \overline{\lambda_p} c_{k-p} \ge 0$$

bulunur. Bu da (iii) ifadesidir. ((ii)$\Rightarrow$(iii))

Son olarak (iii) koşulu gerçeklenmiş olsun. $k = 0,1,2,...,m$ için $\lambda_k = z^k$

($|z| < 1$) seçelim ve $m \to \infty$ olsun. Bu halde

$$0 \le \sum_{k=0}^{m} \sum_{p=0}^{m} \lambda_k \overline{\lambda_p} c_{k-p} \quad \Rightarrow \sum_{k=0}^{m} \sum_{p=0}^{m} c_{k-p} z^k (\bar{z})^p$$

ifadesini elde ederiz.Bu halde bu toplamda üç terim vardır:

$$k = p \text{ olanlar: } \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_0 z^p (\bar{z})^p = 2\sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} \tag{5.8}$$

$k > p$ olanlar: $k = p + n$, ($n = 1,2,...$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_{k-p} z^k (\bar{z})^p = \sum_{k=p+n}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_n z^{p+n} (\bar{z})^p$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n |z|^{2p} \qquad (k - p = n \ , \ n = 1,2,...) \tag{5.9}$$

$k < p$ olanlar: $p = k + n$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_{k-p} z^k (\bar{z})^p = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=k+n}^{\infty} c_{-n} z^k (\bar{z})^k (\bar{z})^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} |z|^{2k} (\bar{z})^n \qquad (p - k = n \ , \ n = 1,2,...) \tag{5.10}$$

Sonuç olarak;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_{k-p} z^k (\bar{z})^p = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n z^n |z|^{2p}}$$

yazılabilir. (5.8), (5.9), (5.10) terimleri taraf tarafa toplanırsa;

$$0 \le \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_{k-p} z^k (\bar{z})^p = 2\sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} + \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n |z|^{2p} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n z^n |z|^{2p}}}_{2\operatorname{Re}\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n |z|^{2p}}$$

$$= 2\sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} + 2\operatorname{Re} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n |z|^{2p} = 2\sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} + 2\operatorname{Re} \sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

$$= 2\sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} + 2\sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} . \underbrace{\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n}_{\operatorname{Re} p(z) - 1} = \frac{2}{1 - |z|^2} + \frac{2}{1 - |z|^2} (\operatorname{Re} p(z) - 1)$$

$$= \frac{2}{1-|z|^2}(1+\operatorname{Re} p(z)-1) = \frac{2}{1-|z|^2}\operatorname{Re} p(z)$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{2}{1-|z|^2}\operatorname{Re} p(z) \quad \Rightarrow \quad |z|<1 \quad \Rightarrow \quad |z|^2<1 \quad \Rightarrow \quad 1-|z|^2>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{1-|z|^2}>0$$

olduğundan $\operatorname{Re} p(z)>0$ bulunur. $p(z)\in P$ olur. Yani (i) gerçeklenmiş olur.

($(iii)\Rightarrow(i)$)

O halde sonuç olarak ;

$$\left.\begin{array}{l}(i)\Rightarrow(ii)\\(ii)\Rightarrow(iii)\\(iii)\Rightarrow(i)\end{array}\right\}\Rightarrow(i)\Leftrightarrow(ii)\Leftrightarrow(iii) \qquad \text{olur.}$$

5.7 Sonuç : $p(z)=1+c_1z+...\in P$ olsun. Bu takdirde $|c_n|\le 2$ ($n=1,2,...$) dir.

6.YILDIZIL FONKSİYONLAR

6.1 Tanım (Yıldızıl Fonksiyon **) :** $f(z) = z + a_2z^2 + ...$ fonksiyonu $D = \{z \mid |z| < 1\}$ içinde yalınkat ve $F = f(D)$ tasvir bölgesi O başlangıç noktasına göre yıldız bölge ise yani
$w \in F$ için, $0 \le t \le 1$ olmak üzere $tw \in F$ ise $f(z)$ fonksiyonuna " yıldızıl fonksiyon " denir. Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı S^* ile gösterilir.

6.2 Teorem: Analitik f(z) fonksiyonunun $D = \{z \| z| < 1\}$ de yıldızıl olması için gerek ve yeter koşul

$$P(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} \in P$$

olmasıdır.

İspat: f(z) D'de yıldızıl olsun. Bu takdirde aşağıda yazacağımız üç koşul yıldızıl fonksiyon tanımından dolayı gerçeklenir.

1. f(z) fonksiyonu $D = \{z \| z| < 1\}$'de yalınkattır.
2. f(D)=F tasvir bölgesi O'ya göre yıldızıl bölgedir. Yani, $w \in F$ ve $0 \le t \le 1$ olmak üzere $tw \in F$ dir.
3. $f(z) = z + a_2z^2 + ...$ ise f(0)=0 dır ve $0 \in F = f(D)$ 'dir.

Şimdi aşağıdaki iddiaların ışığında ispatı yapalım.

İdda 1: $g(z) = tf(z)$ fonksiyonu $(0 \le t \le 1)$ f(z) fonksiyonuna sabordinedir.

İspat: $f(z) = z + a_2z^2 + ... \Rightarrow$ f(0)=0

$g(z) = tf(z) \Rightarrow g(0) = tf(0) = t0 = 0 \Rightarrow f(0) = g(0)$

$$w \in g(D) \Rightarrow tf(z) = w \qquad (6.1)$$

olacak şekilde bir $z \in D$ vardır. f(z) yıldızıl fonksiyon olduğundan $\forall z \in D$ için $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$tf(z) \in f(D) \tag{6.2}$$

dir. O halde netice (6.1) ve (6.2) ifadelerinden

$w \in g(D) \Rightarrow w = tf(z) \in f(D)\,\text{dir.} \Rightarrow g(D) \subset f(D)$

elde edilir.Diğer taraftan f(z) D'de yalınkat olduğundan daha önce ispatladığımız Lemma 4.12'de "G(z), D'de yalınkat olsun. $F(z) \prec G(z)$ dir. Ancak ve yalnız G(0)=F(0) ve $F(D) \subset G(D)$ ise" yeterliliğine göre $tf(z) \prec f(z)$ olur. Diğer taraftan,

İdda 2: Burada sabordinasyon prensibini kullanacak olursak $0 < r < 1$ olmak üzere $g(D_r) \subset f(D_r)$ sonucunu buluruz. Bunun anlamı

$\{tf(z) \| z| < r\} \subset \{f(z) \| z| < r\},\ (0 \le t \le 1,\ 0 < r < 1)$

dir.

İdda 3: Aynı zamanda $\{f(z) \| z| < r\} = f(D_r)$ bölgesi bir yıldız bölgedir. Gerçekten,

$w_0 \in f(D_r) \Rightarrow w_0 = f(z_0)$

olacak şekilde bir $z_0 \in D_r$ vardır. $0 \le t \le 1$ olmak üzere

$tw_0 = tf(z_0) \in g(D_r)$ dir. $\Rightarrow g(D_r) \subset f(D_r) \Rightarrow tw_0 \in f(D_r)$

Buluruz ki bu da bize iddianın doğruluğunu gösterir. Ohalde f(z), D_r'de yıldızıl bir fonksiyondur neticesine varırız.

İdda 4: Geometrik varsayımlar gösterir ki

$\operatorname{Arg} f(re^{i\theta}),\ 0 \le \theta \le 2\pi$

de θ'nın artan bir fonksiyonudur.

İspat: İddia 3'de gösterdikki f(z), (D_r)'de yıldız bir fonksiyondur. θ nın pozitif yönde 2π kadar artması halinde $\operatorname{Arg} f(re^{i\theta})$ da aynı yönde 2π kadar artar. Buda $\operatorname{Arg} f(re^{i\theta})$ nın θ nın artan fonksiyon olduğunu gösterir. Yani,

$$\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{Arg} f(re^{i\theta})\right] > 0 \tag{6.3}$$

dır.

Şimdi bu iddiaların ışığı altında teoremi inceleyelim.

$$\log f(z) = \log\left|f(z)\right| + i\mathrm{Arg} f(z)$$

bağıntısında $z = re^{i\theta}$ koyarsak

$$\log f(re^{i\theta}) = \log\left|f(re^{i\theta})\right| + i\mathrm{Arg} f(re^{i\theta})$$

buluruz. θ ya göre türetirsek

$$\Rightarrow ire^{i\theta}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\log\left|f(re^{i\theta})\right|\right\} + i\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\mathrm{Arg} f(re^{i\theta})\right\}$$

$$\Rightarrow re^{i\theta}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} = -i\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\log\left|f(re^{i\theta})\right|\right\} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\mathrm{Arg} f(re^{i\theta})\right\}$$

$$\mathrm{Re}\left\{re^{i\theta}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right\} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\mathrm{Arg} f(re^{i\theta})\right\} \tag{6.4}$$

buluruz. Diğer taraftan

$$\log f(z) = \log\left|f(z)\right| + i\mathrm{Arg} f(z) \Rightarrow$$

ifadesinden dolayı

$$\mathrm{im}\{\log f(z)\} = \mathrm{Arg}\{f(z)\}$$

yazabiliriz. Fakat diğer taraftan

$$z=re^{i\theta} \Rightarrow \mathrm{im}\{\log f(re^{i\theta})\} = \mathrm{Arg}\{f(re^{i\theta})\} \Rightarrow$$

ifadesini θ'ya göre türetsek

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\mathrm{im}\log f(re^{i\theta})\right\} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\mathrm{Arg} f(re^{i\theta})\right\} \tag{6.5}$$

bulunur. (6.4) ve (6.5) bağıntılarından

$$\mathrm{Re}\left\{re^{i\theta}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right\} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\mathrm{Arg} f(re^{i\theta})\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\mathrm{im}\log f(re^{i\theta})\right\} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\mathrm{Arg} f(re^{i\theta})\right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left\{re^{i\theta}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right\} = \frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{im}\left\{\log f(re^{i\theta})\right\} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\mathrm{Arg} f(re^{i\theta})\right\}$$

buluruz. (6.3) bağıntısını burada kullanacak olursak

$$\mathrm{Re}\left\{re^{i\theta}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right\} = \frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{im}\left\{\log f(re^{i\theta})\right\} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\mathrm{Arg} f(re^{i\theta})\right\} \geq 0$$

durumunu elde ederiz. O halde biz bu bağıntıyı

$$\operatorname{Re}\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}\geq 0$$

şeklinde ifade ederiz. $p(z)=z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ ve f(z) D'de yalınkat (yıldızıl olduğundan);

$$p(z)=z\frac{(z+a_2z^2+\cdots)'}{(z+a_2z^2+\cdots)}=\frac{z+2a_2z^2+\cdots}{z+a_2z+\cdots}=\frac{z(1+2a_2z+\cdots)}{z(1+a_2z+\cdots)}\Rightarrow$$

$$p(0)=\frac{1+0+\cdots}{1+0+\cdots}=1\Rightarrow p(0)=1$$

bulunur. f(z) D'de yalınkat olduğundan $\forall z\neq 0\in D$ için $f(z)\neq 0$ ve $f'(0)\neq 0$'dır. O halde

$$p(z)=z\frac{f'(z)}{f(z)}$$

D'de analitik,

$$\operatorname{Re}p(z)=\operatorname{Re}\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}\geq 0\Rightarrow \operatorname{Re}p(z)\geq 0$$

dır. O halde $p(z)\in P$ dir.

Şimdi tersine hareket edelim. Yani $p(z)=z\dfrac{f'(z)}{f(z)}\in P$ olsun. Bu takdirde f(z), D'de $f(z)\neq 0$ koşulunu gerçekler. Eğer gerçeklemeseydi p(z)'in D'de kutbu olacaktı. Buda p(z)'in D'de analitik olmasına aykırılık teşkil edecekti. Eğer a_m katsayısı f(z) in sıfırdan farklı ilk katsayısı ise $f(z)=a_mz^m+\cdots$ olacaktı.

$$\Rightarrow f'(z)=ma_mz^{m-1}+\cdots$$

$$p(z)=z.\frac{f'(z)}{f(z)}=z\frac{ma_mz^{m-1}+\cdots}{a_mz^m+\cdots}=\frac{ma_mz^m+\cdots}{a_mz^m+\cdots}=\frac{a_mz^m(m+...)}{a_mz^m(1+...)}=\frac{m+\cdots}{1+\cdots}\Rightarrow$$

$$p(z)\in P\Rightarrow p(0)=1$$

dir. O halde

$$p(0)=\frac{m}{1}=m=1$$

olmak zorundadır. O halde sıfırdan farklı ilk katsayı a_1'dir. Yani,

$f(z)=a_1z+\cdots$, $a_1=1$ alınırsa $\Rightarrow f(0)=0,\ f'(0)=1\neq 0$

koşulunu gerçekler.

$$p(z)=z\frac{f'(z)}{f(z)}\in P$$

olduğundan ve ayrıca

$$\operatorname{Re}\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}=\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{im}\left\{\log f(re^{i\theta})\right\}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\operatorname{Arg}f(re^{i\theta})\right\}\geq 0$$

özelliğinden dolayı $\operatorname{Arg}f(re^{i\theta})$ $0\leq\theta\leq 2\pi$ 'de artandır. O halde bu artımın toplamı

$$z=re^{i\theta}\Rightarrow dz=ire^{i\theta}d\theta\Rightarrow d\theta=\frac{1}{i}\frac{dz}{z}$$

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{Arg}f(re^{i\theta})d\theta=\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left[re^{i\theta}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right]d\theta$$

$$\operatorname{Re}\int_{|z|=r}\left[z\frac{f'(z)}{f(z)}\frac{1}{i}\frac{dz}{z}\right]=\operatorname{Re}\int_{|z|=r}\left[\frac{1}{i}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right]$$

$$\operatorname{Re}[\frac{1}{i}2\pi i(\sum \text{ Sıfırlar- } \sum \text{ Rezidüler })]=\operatorname{Re}[2\pi]=2\pi$$

olarak bulunur (Burada sıfırlar toplamı 1, rezidüler toplamı 0’dır). O halde f(z), $|z|=r$ dairesini bire bir olarak yıldızıl analitik eğri üzerine tasvir eder.

“ Lemma : $f(z)$, $\overline{D}$ de analitik, ∂D de injektif ise bu takdirde $f(z)$, D de yalınkattır ve D yi $j=f(\partial D)$ kapalı Jordan eğrisinin iç bölgesi üzerine tasvir eder.(Lemma1.1 Bölüm 1 (Bazı Temel Sonuçlar) Chr.Pommerenke sayfa 13) ile $f(z)$ nin $D_r=\{z \mid |z|<r\}$ de yalınkat olduğu ve $f(D_r)$ nin yıldızıl bir bölge olduğu D_r yi $f(D_r)$ nin içine tasvir ettiği görülmüştür. O halde $\{f(z) \mid |z|<r\}$ yıldızıl bir bölgedir ve her $0<r<1$ için bu işlem doğru olacağından

$f(z)$, $D_r=\{z \| z|<r<1\}$ de yalınkattır ve yıldızıl bir fonksiyondur. “

Şimdi de yıldızıl fonksiyonlar için bir gösteriliş çıkarılacak olursa ;

6.3 Teorem : $f(z)=z+a_2z^2+...$ fonksiyonunun $D_r=\{z \mid |z|<r\}$ de yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $\gamma(2\pi)-\gamma(0)=1$ i gerçekleyen artan bir $\gamma(t)$ fonksiyonu için ;

$$f(z)=z.\mathrm{Exp}\left[\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)\right] \qquad (\ |z|<1\ )$$

olmasıdır.

İspat : “ Teorem 5.6 : $p(z)=1+c_1z+...$ fonksiyonu D de analitik olsun. Bu takdirde aşağıdaki üç koşul eşdeğerdir :

(i) $p(z)$ fonksiyonu P sınıfına aittir.

(ii) $p(z)=\left[\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)\right] \quad ; \quad \gamma(2\pi)-\gamma(0)=1$

gerçeklenecek şekilde artan $\gamma(t)$ fonksiyonu vardır. $(0\le t\le 2\pi)$

(iii) $m=1,2,...$ için

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{p=0}^{m}c_{k-p}\lambda_k\overline{\lambda_p}\ge 0 \qquad (\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_m\in C \text{ dir.}) . “$$

“ Teorem 6.2 : $f(z)=z+a_2z^2+...$ analitik fonksiyonunun D de yıldızıl olması için gerek ve yeter şart

$$p(z)=z.\frac{f'(z)}{f(z)}\in P$$

olmasıdır.”

Yukarıda yazılan son iki teoreme göre ;

$$p(z)=z.\frac{f'(z)}{f(z)}=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)$$

yazılabilir. Burada $\gamma(t)$ fonksiyonu istenilen özelliklere sahiptir. O halde buradan ;

$$p(z)=z.\frac{f'(z)}{f(z)}=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z+e^{-it}z-e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1-e^{-it}z+2e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-e^{-it}z}{1-e^{-it}z}+\frac{2e^{-it}z}{1-e^{-it}z}\right)d\gamma(t)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{2e^{-it}z}{1 - e^{-it}z}\right) d\gamma(t)$$

elde edilir. Yani sonuç olarak ;

$$z.\frac{f'(z)}{f(z)} = \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{2e^{-it}z}{1 - e^{-it}z}\right) d\gamma(t)$$

Her iki taraf z ye bölünürse ;

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{z} + \frac{2e^{-it}}{1 - e^{-it}z}\right) d\gamma(t)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{z} d\gamma(t) + \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{1 - e^{-it}z} d\gamma(t) = \frac{1}{z}\int_0^{2\pi} d\gamma(t) + \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{1 - e^{-it}z} d\gamma(t)$$

$$= \frac{1}{z}\underbrace{\left[\gamma(2\pi) - \gamma(0)\right]}_{1} + \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{1 - e^{-it}z} d\gamma(t) = \frac{1}{z} + \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{1 - e^{-it}z} d\gamma(t) \Rightarrow$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{1 - e^{-it}z} d\gamma(t)$$

$$= \int_0^{2\pi} 2e^{-it}\left[\frac{1}{1 - e^{-it}z}\right] d\gamma(t) = 2\int_0^{2\pi} e^{-it}\left[1 + e^{-it}z + e^{-2it}z^2 + ...\right] d\gamma(t)$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left(e^{-it} + e^{-2it}z + +e^{-3it}z^2 + ...\right) d\gamma(t)$$

$$= \int_0^{2\pi} 2e^{-it} d\gamma(t) + 2\int_0^{2\pi} \left(e^{-2it}z + +e^{-3it}z^2 + ...\right) d\gamma(t) \Rightarrow$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z} = \int_0^{2\pi} 2e^{-it} d\gamma(t) + 2\int_0^{2\pi} \left(e^{-2it}z + +e^{-3it}z^2 + ...\right) d\gamma(t)$$

$$\log f(z) - \log z = -2\int_0^{2\pi} \log\left(1 - e^{-it}z\right) d\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \log \frac{f(z)}{z} = -2\int_0^{2\pi} \log\left(1-e^{-it}z\right) d\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \log \frac{f(z)}{z} = 2\int_0^{2\pi} \log\left(1-e^{-it}z\right)^{-1} d\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \log \frac{f(z)}{z} = 2\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\left(1-e^{-it}z\right)} d\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \frac{f(z)}{z} = \mathrm{Exp}\left[2\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\left(1-e^{-it}z\right)} d\gamma(t)\right]$$

$$\Rightarrow f(z) = z\mathrm{Exp}\left[2\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\left(1-e^{-it}z\right)} d\gamma(t)\right]$$

bulunur.

Şimdi tersine hareket edilirse;

$$f(z) = z.\mathrm{Exp}\left[2\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\left(1-e^{-it}z\right)} d\gamma(t)\right]$$

ifadesinden logaritma alınırsa ;

$$\Rightarrow \log f(z) = \log z + 2\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\left(1-e^{-it}z\right)} d\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \log f(z) = \log z + 2\int_0^{2\pi} \log\left(1-e^{-it}z\right)^{-1} d\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \log f(z) = \log z - 2\int_0^{2\pi} \log\left(1-e^{-it}z\right) d\gamma(t)$$

Türev alınıp yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa ;

$$p(z)=z.\frac{f'(z)}{f(z)}=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)$$

bulunur ki, bu da Teorem 5.6 gereğince $p(z)\in P$ dir ve Teorem 6.4 gereğince $f(z)$, D de yıldızıldır.

6.4 Teorem : Eğer $f(z)=z+a_2z^2+...$ fonksiyonu D de yıldızıl ise $|a_n|\le n$ dir.($n=1,2,3,...$) Eşitlik ancak ve yalnız sırasıyla

$$f(z)=\frac{z}{(1-e^{i\beta}z)^2}\quad,\quad f(z)=\frac{z}{1-e^{2i\beta}z^2}\quad,\quad f(z)=\frac{z}{1-e^{i\beta}z}\qquad(\beta\in R)$$

fonksiyonları için gerçeklenir.

İspat : Eğer $f(z)$ yıldızıl fonksiyon ise

$$p(z)=z.\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{z.(1+2a_2z+...)}{z+a_2z^2+...}=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n$$

fonksiyonu Teorem 6.2 vasıtasıyla P sınıfına aittir.

$$p(z)=z.\frac{f'(z)}{f(z)}\Rightarrow z.f'(z)=f(z).p(z)$$

eşitliği ele alınsın. Bunların katsayıları karşılaştırılacak olursa

$$z.f'(z)=z.(1+2a_2z+3a_3z^2+...)=(z+2a_2z^2+3a_3z^3+...)\ (1+c_1z+c_2z^2+...)$$

$$=f(z).p(z)$$

$$z+2a_2z^2+3a_3z^3+...=(z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n)(1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n)$$

$$=(z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n)(1+c_1z+\sum_{n=2}^{\infty}c_nz^n)=z+c_1z^2+z.\sum_{n=2}^{\infty}c_nz^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n+c_1z\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$$

$$+(\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n)\ (\sum_{n=2}^{\infty}c_nz^n)$$

Sonuçta katsayılar karşılaştırılırsa;

$$a_n = \frac{1}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1} c_{n-\nu} a_\nu \qquad (n = 2,3,...)$$

rekürans bağıntısı bulunur. Sonuç 5.7 den dolayı $|c_n| \le 2$ dir.

$$a_n = \frac{1}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1} c_{n-\nu} a_\nu \Rightarrow |a_n| = \left| \frac{1}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1} c_{n-\nu} a_\nu \right|$$

$$\le \frac{1}{n-1}\left| \sum_{\nu=1}^{n-1} c_{n-\nu} a_\nu \right| \le \frac{1}{n-1}\left| \sum_{\nu=1}^{n-1} 2a_\nu \right| = \frac{2}{n-1}\left| \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu \right| \le \frac{2}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1} |a_\nu|$$

Yani sonuç olarak;

$$|a_n| \le \frac{2}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1} |a_\nu| \qquad (n = 2,3,...)$$

bulunur. $|a_1| \le 1$ olduğundan $|a_n| \le n$ olduğunu indüksiyonla ispatlamaya çalışırsak;

$n = 1$ için $|a_1| \le 1$ dir.

$n = 2$ için $|a_2| \le \frac{2}{2-1}\sum_{\nu=1}^{2-1} |a_\nu| = 2\sum_{\nu=1}^{1} |a_\nu| = 2|a_1| \le 2.1 = 2$

Yani sonuçta $|a_2| \le 2$ bulunur.

$n = k-1$ için doğru olsun. Yani $|a_{k-1}| \le k-1$ doğru olsun. (İndüksiyon hipotezi)

$n = k$ için doğruluk ispatı : (İndüksiyon hipotezinden)

$$|a_k| \le \frac{2}{k-1}\sum_{\nu=1}^{k-1} |a_\nu| = \frac{2}{k-1}(|a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_{k-1}|)$$

$$\le \frac{2}{k-1}(1 + 2 + 3 + ... + (k-1)) = \frac{2}{k-1}.(\frac{(k-1)k}{2}) = k$$

(Zira $1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$)

$\Rightarrow |a_k| \le k$

bulunur. O halde indüksiyon tamamlanmıştır. Yani $|a_n| \le n$ dir. Şimdi eşitliklerin ancak ve yalnız

$$f(z)=\frac{z}{(1-e^{i\beta}z)^2} \quad , \quad f(z)=\frac{z}{1-e^{2i\beta}z^2} \quad , \quad f(z)=\frac{z}{1-e^{i\beta}z} \qquad (\beta\in R)$$

olması halinde mevcut oldukları gösterilsin:

$$f(z)=\frac{z}{(1-e^{i\beta}z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n.e^{i(n-1)\beta}z^n \Rightarrow$$

$$|a_n|=\left|n.e^{i(n-1)\beta}\right|=n$$

Yani

$$|a_n|=n \Leftrightarrow f(z)=\frac{z}{(1-e^{i\beta}z)^2}$$

dir.

$$f(z)=\frac{z}{1-e^{2i\beta}z^2} = z+e^{2i\beta}z^3+e^{4i\beta}z^5+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2i(n-1)\beta}z^{2n-1}$$

$$|a_n|=\left|e^{2i(n-1)\beta}\right|=1 \quad , \quad n=1,2,\ldots$$

olarak iddia doğrulanır.

$$f(z)=\frac{z}{1-e^{i\beta}z} = z+e^{i\beta}z^2+e^{2i\beta}z^3+\ldots$$

$$|a_n|=\left|e^{i(n-1)\beta}\right|=1 \quad , \quad n=1,2,\ldots$$

olarak iddia doğrulanır.

6.5 Tanım (Konvekslik Yarıçapı) : Her r>0 için, $D_r=\{z \mid |z|<r\}$ yarıçapı r olan bir açık disk olsun. Her $f\in S$ için konvekslik yarıçapı, $f(D_r)$ ı konveks yapan tüm r sayılarının supremumudur.

6.6 Tanım (Yıldızıllık Yarıçapı) : Her f e S için yıldızıllık yarıçapı, $f(D_r)$ ı merkeze göre yıldızıl yapan tüm r sayılarının supremumudur.

7.KOMPLEKS MERTEBEDEN YILDIZIL FONKSİYONLAR

7.1 Tanım: $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ fonksiyonu D de tanımlı analitik bir fonksiyon olsun. $\dfrac{f(z)}{z}\neq 0$ ve $b\neq 0$ kompleks bir sayı olmak üzere;

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{1}{b}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right)\right)>0$$

koşulunu gerçeklerse, $f(z)$ fonksiyonuna "kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyon" denir ve bu sınıf S*(1-b) ile gösterilir. Bu sınıf M.A. Nasr ve M.K. Auof tarafından tanıtılmıştır. [22] , [23]

7.2 Özel Hal 1: $b=1$ için: $\operatorname{Re}\left(z\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right)>0$ elde edilir ki bu "yıldızıl fonksiyon"dur. [9]

7.3 Özel Hal 2: $b=1-\alpha$ $0\leq\alpha<1$ için: $\operatorname{Re}\left(z\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right)>\alpha$ elde edilir ki bu "αncı mertebeden yıldızıl fonksiyon"dur. [29]

7.4 Özel Hal 3: $b=e^{-i\lambda}\cos\lambda$, $|\lambda|<\dfrac{\pi}{2}$ için: $\operatorname{Re}\left(e^{i\lambda}\cdot z\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right)>0$ elde edilir ki bu "λ-spirallike fonksiyon"dur. [33]

7.5 Özel Hal 4: $b=(1-\alpha)e^{-i\lambda}\cos\lambda$, $0\leq\alpha<1$, $|\lambda|<\dfrac{\pi}{2}$ için: $\operatorname{Re}\left(e^{i\lambda}\cdot z\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right)>\alpha$ elde edilir ki bu "αncı mertebeden λ-spirallike fonksiyon"dur. [9]

7.6 Açıklama: Dolayısıyla kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyonlar sınıfı; yıldızıl, α ncı mertebeden yıldızıl, λ-spirallike , α ncı mertebeden λ-spirallike fonksiyonlar sınıfını içerir.

7.7 Temel Teorem: $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ fonksiyonu D de tanımlı analitik bir fonksiyon olsun. Bu taktirde f(z) nin kompleks mertebeden yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $f(z) = z \cdot \left(\frac{f_1(z)}{z} \right)^b$ denklemini gerçekleyen $f_1(z)$ fonksiyonunun yıldızıl olmasıdır.

Burada $\left(\frac{f_1(z)}{z} \right)^b$ nin z = 0 da değeri 1 olan Riemenn Dalı seçilir.

(Zira $\left(\frac{f_1(z)}{z} \right)^b = \left(\frac{z + a_2 z^2 + \cdots}{z} \right)^b = \left(1 + a_2 z + \cdots\right)^b_{z=0} = (1)^b$ nin, b kompleks olduğundan Riemann yaprakları vardır. Bunlardan sadece değerin 1 olduğu Riemann yaprağı alınır.)

İspat: $\Leftarrow$: $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ fonksiyonu D de tanımlı analitik bir fonksiyon olsun. Ayrıca $f(z) = z \cdot \left(\frac{f_1(z)}{z} \right)^b$ denklemini gerçekleyen $f_1(z)$ fonksiyonunun yıldızıl fonksiyon olsun.

Son eşitlikte her iki tarafın logaritmik türevi alınırsa:

$$\log f(z) = \log z + b \cdot \log f_1(z) - b \cdot \log z$$

$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + b \cdot \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} - b \cdot \frac{1}{z} \Rightarrow$$

şimdi eşitliğin her iki tarafı $|z| < 1$ olan z ile çarpılırsa:

$$z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} = 1 + b \cdot z \cdot \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} - b \Rightarrow$$

$$z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 = b \cdot z \cdot \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} - b \Rightarrow$$

Her iki taraf $b \neq 0$ kompleks sayısı ile bölünürse:

$$\frac{1}{b}\left(z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right)=z\cdot\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}-1\Rightarrow$$

$$1+\frac{1}{b}\left(z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right)=z\cdot\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\Rightarrow$$

$f_1(z)$ yıldızıl fonksiyon olduğundan ; $\operatorname{Re} z\frac{f_1'(z)}{f_1(z)} > 0$ dır.

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(1+\frac{1}{b}\left(z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right)\right)=\operatorname{Re}\left(z\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\right) > 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(1+\frac{1}{b}\left(z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right)\right) > 0$$

bulunur ki, bu $f(z)$ nin "kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyon" olduğunu gösterir.

$\Rightarrow$: $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ fonksiyonu D de tanımlı analitik bir fonksiyon olsun. $f(z)$ kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyon yani

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{1}{b}\left(z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right)\right) > 0$$

olsun. O taktirde $f(z)=z\cdot\left(\frac{f_1(z)}{z}\right)^b$ denklemini gerçekleyen $f_1(z)$ fonksiyonu yıldızıldır. Gerçekten $f(z)=z\cdot\left(\frac{f_1(z)}{z}\right)^b$ ifadesinin logaritmik türevi alınır ve bir takım işlemler uygulanırsa:

$$1+\frac{1}{b}\left(z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right)=z\cdot\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{1}{b}\left(z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right)\right)=\operatorname{Re}\left(z\cdot\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\right)$$

bulunur.

Son eşitlikte sol taraf pozitif olduğundan sağ taraf da pozitif olur ki bu $f_1(z)$ nin yıldızıl fonksiyon olduğunu gösterir.

8. BİRİM DİSKTE KOMPLEKS MERTEBEDEN P-VALENT YILDIZIL FONKSİYONLAR SINIFI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

8.1 Özet : Bu bölümde 2001 yılında H.M.Srivastava ve Osman Altıntaş tarafından [2] tanıtılan birim diskte p-valent kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyonların bir alt sınıfı olan fonksiyonlar için gösterilim teoremi, distorsiyon teoremi, genelleştirilmiş yıldızıllık yarıçapı, genelleştirilmiş konvekslik yarıçapı ve katsayı eşitsizliğini verdik.

8.2 Tanım: $f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + a_{p+2}z^{p+2} + \cdots$

fonksiyonu $D = \{z \mid |z| < 1\}$ birim diskte tanımlanmış, analitik ve p değerli olsun. Bu fonksiyonun sınıfını A_p ile gösterelim. Eğer $f(z) \in A_p$ ise ve eğer, $b \neq 0$ kompleks bir sayı ve $-1 \leq B < A \leq 1$ olmak üzere

$$1 + \frac{1}{b}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)} - p + q \right) = \frac{1 + Aw(z)}{1 + Bw(z)}$$

eşitliği gerçeklenirse bu tür fonksiyonlara p-değerli kompleks mertebeden yıldızıl Janowski fonksiyonları adı verilir ve bu sınıf S*(A,B,b,p,q) ile gösterilir. Bu sınıf H.M.Srivastava ve Osman Altıntaş tarafından tanıtılmıştır. [2]
w(z) fonkiyonu Schwarz Lemması'nın koşullarını gerçekleyen fonksiyondur.

Burada $f^{(q)}(z)$, f(z)'nin z'ye göre q'uncu mertebeden türevini göstermektedir ve $f^{(0)}(z)$ =f(z) dir.

8.3 Lemma (I.S.Jack Lemması) **:** $w(z)$ fonksiyonu birim diskte tanımlanmış sabitten farklı bir fonksiyon olsun. Eğer $|w(z)|$ maksimum değerini $|z| = r$ çemberi üzerinde bir noktada alıyorsa bu noktada $z_0 w'(z_0) = kw(z_0)$, $k \geq 1$ eşitliği vardır. Bu lemma I.S. Jack tarafından ispatlanmıştır [12].

8.4 Lemma : A ve B; $-1 \le B < A \le 1$ koşulunu gerçekleyen reel sayılar olmak üzere, $b \ne 0$ kompleks sayı olsun.

$$w = \begin{cases} \dfrac{b(A-B)z}{1+Bz} & B \ne 0 \\ bAz & B = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu $|z| = r$ çemberlerini, merkezi $c(r)$, yarıçapı $\rho(r)$ olan

$$\begin{cases} c(r) = \dfrac{bB(B-A)r^2}{1-B^2r^2} \quad , \quad \rho(r) = \dfrac{|b|(A-B)r}{1-B^2r^2} & B \ne 0 \\ c(r) = 0 \quad , \quad \rho(r) = |b \cdot A|\, r & B = 0 \end{cases}$$

çemberler üzerine resmeder.

İspat:

$B \ne 0$ olsun:

$$w = \frac{b(A-B)z}{1+Bz} \Rightarrow z = \frac{w}{b(A-B)-Bw} \tag{8.1}$$

$$|z|^2 = r^2 = \frac{|w|^2}{|b(A-B)-Bw|^2} \Rightarrow$$

$w = u + iv \quad b = x + iy$ olacak şekilde;

$$r^2 = \frac{u^2+v^2}{B^2u^2 + B^2v^2 - 2Bx(A-B)u - 2By(A-B)v + (A-B)^2|b|^2} \Rightarrow$$

$$u^2 + v^2 + \frac{2Bxr^2(A-B)}{1-B^2r^2}u + \frac{2Byr^2(A-B)}{1-B^2r^2}v - \frac{(A-B)^2|b|^2 r^2}{1-B^2r^2} = 0 \tag{8.2}$$

(8.2) adımından hareket ederek

Merkez $c(r) = \left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$, Yarıçap $\rho(r) = \dfrac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$ ifadesinden hesaplanırsa:

$$c(r) = \frac{bB(B-A)r^2}{1-B^2r^2} \quad , \quad \rho(r) = \frac{|b|(A-B)r}{1-B^2r^2} \tag{8.3}$$

bulunur. Burada (8.2) denklemi $u^2 + v^2 + Au + Bv + C = 0$ çember denklemi şeklinde düşünülmüştür.

$B=0$ olsun:

$$w = bAz \Rightarrow z = \frac{w}{bA} \tag{8.4}$$

$$|z|^2 = r^2 = \frac{|w|^2}{|bA|^2} \Rightarrow$$

$w = u + iv$ olacak şekilde;

$$r^2 = \frac{u^2 + v^2}{A^2 |b|^2} \Rightarrow$$

$$u^2 + v^2 - A^2 |b|^2 r^2 = 0 \tag{8.5}$$

(8.5) adımından hareket ederek

Merkez $c(r) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, Yarıçap $\rho(r) = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$ ifadesinden hesaplanırsa:

$$c(r) = 0 \qquad , \qquad \rho(r) = |b \cdot A|\, r \tag{8.6}$$

bulunur. Burada (8.5) denklemi $u^2 + v^2 + Au + Bv + C = 0$ çember denklemi şeklinde düşünülmüştür.

(8.3) ve (8.6) ifadeleri birlikte düşünülürse ispatı verir.

8.5 Teorem: $f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + a_{p+2}z^{p+2} + \cdots$ fonksiyonu $D = \{ z \,|\, |z| < 1 \}$ de tanımlanmış analitik olsun. $f(z)$ fonksiyonu eğer

$$\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)} - p + q \right) \prec \begin{cases} \dfrac{b(A-B)z}{1+Bz} = F_1(z) & B \neq 0 \\ bAz = F_2(z) & B = 0 \end{cases} \tag{8.7}$$

sabordinasyonunu gerçeklerse $f(z)$ fonksiyonu $S^*(A, B, b, p, q)$ sınıfına aittir.

İspat: $f(z)$ fonksiyonu yardımıyla $w(z)$ fonksiyonu

$$\left(\frac{f^{(q)}(z)}{z^{p-q}} \right) = \begin{cases} (1 + Bw(z))^{\frac{b(A-B)}{B}} & B \neq 0 \\ e^{bAw(z)} & B = 0 \end{cases} \tag{8.8}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $(1 + Bw(z))^{\frac{b(A-B)}{B}}$ nin z = 0 daki değeri 1'e eşit olacak şekilde Riemann dalı alınmıştır. Bu taktirde $w(0) = 0$, $w(z)$ D'de analitiktir ((8.8) tanımından dolayı). Şimdi göstermeliyiz ki $|w(z)|<1$ dir. Bunun için (8.8) ifadesinden logaritmik türev alınır, gerekli işlemler yapılırsa;

$$\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}-p+q\right)=\begin{cases}\dfrac{b(A-B)zw'(z)}{1+Bw(z)} & B\neq 0\\ bAzw'(z) & B=0\end{cases} \qquad (8.9)$$

bulunur. Burada sabordinasyon prensibinin $|w(z)|<1$ koşulu için, tersine hareket edip $|w(z_1)|=1$ olacak şekilde $z_1\in D$ var kabul edersek, $|w(z)|$ için bir maksimum değer belirlemiş oluruz. Bu taktirde I.S.Jack lemmasından dolayı

$$z_1w'(z_1)=kw(z_1) \quad , \quad k\geq 1 \qquad (8.10)$$

eşitliği yazılabilir. (8.10) eşitliğinin (8.9) eşitliğinde kullanılması halinde (8.9) eşitliği

$$\left(z_1\frac{f^{(q+1)}(z_1)}{f^{(q)}(z_1)}-p+q\right)=\begin{cases}k\dfrac{b(A-B)w(z_1)}{1+Bw(z_1)}=kF_1(w(z_1)) & B\neq 0\\ kbAw(z_1)=kF_2(w(z_1)) & B=0\end{cases}$$

(8.11)

şeklinde ifade edilir. Oysa ki $k\geq 1$ olduğundan (8.11) yazılışı

$$\left(z_1\frac{f^{(q+1)}(z_1)}{f^{(q)}(z_1)}-p+q\right)=\begin{cases}k\dfrac{b(A-B)w(z_1)}{1+Bw(z_1)}=kF_1(w(z_1))\notin F_1(D) & B\neq 0\\ kbAw(z_1)=kF_2(w(z_1))\notin F_2(D) & B=0\end{cases}$$

(8.12)

ifadesini elde ederiz ($k\neq 1$ için). Bu ise bir çelişkidir. Çelişkiye düşme nedenimiz $|w(z_1)|=1$ olacak şekilde bir $z_1\in D$ bulabileceğimiz idi. O halde çelişkiyi ortadan kaldırmak için $|w(z)|$<1 olmalıdır.

Dolayısıyla (8.7) sabordinasyonundan hareketle

$$\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}-p+q\right)=\begin{cases}\dfrac{b(A-B)w(z)}{1+Bw(z)} & B\neq 0\\ bAw(z) & B=0\end{cases} \qquad (8.13)$$

şeklinde yazılabilir. (8.13) yazılışında

$$\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}-p+q\right)=\begin{cases}\dfrac{b(A-B)w(z)}{1+Bw(z)} & B\neq 0\\ bAw(z) & B=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{b}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}-p+q\right)=\begin{cases}\dfrac{(A-B)w(z)}{1+Bw(z)} & B\neq 0\\ Aw(z) & B=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$1+\frac{1}{b}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}-p+q\right)=\begin{cases}1+\dfrac{(A-B)w(z)}{1+Bw(z)} & B\neq 0\\ 1+Aw(z) & B=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$1+\frac{1}{b}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}-p+q\right)=\begin{cases}\dfrac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)} & B\neq 0\\ 1+Aw(z) & B=0\end{cases}\tag{8.14}$$

(8.14) eşitliği $f(z)$ nin $S^*(A,B,b,p,q)$ sınıfına ait olduğunu gösterir.

8.6 Sonuç: $f(z)\in S^*(A,B,b,p,q)$ ise

$$f^{(q)}(z)=\begin{cases}z^{p-q}(1+Bw(z))^{\frac{b(A-B)}{B}} & B\neq 0\\ z^{p-q}e^{bAw(z)} & B=0\end{cases}$$

ve q=0 alınması halinde $f^{(0)}(z)$ =f(z) olduğundan,

$$\Rightarrow f(z)=\begin{cases}z^{p}(1+Bw(z))^{\frac{b(A-B)}{B}} & B\neq 0\\ z^{p}e^{bAw(z)} & B=0\end{cases}$$

şeklinde bir gösterilime sahip olur.

8.7 Lemma : A ve B; $-1\leq B<A\leq 1$ koşulunu gerçekleyen reel sayılar olmak üzere

$$w(z)=\begin{cases}\dfrac{1+Az}{1+Bz} & B\neq 0\\ 1+Az & B=0\end{cases}$$

fonksiyonu $|z|=r$ çemberlerini, merkezi $c(r)$, yarıçapı $\rho(r)$ olan

$$\begin{cases}c(r)=\dfrac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\quad , \quad \rho(r)=\dfrac{(A-B)r}{1-B^2r^2} & B\neq 0\\ c(r)=1\quad , \quad \rho(r)=|A|r & B=0\end{cases}$$

çemberler üzerine resmeder.

İspat:

$B \neq 0$ olsun:

$$w = \frac{1+Az}{1+Bz} \Rightarrow z = \frac{w-1}{A-Bw} \tag{8.15}$$

$$|z|^2 = r^2 = \frac{|w-1|^2}{|A-Bw|^2} \Rightarrow$$

$w = u + iv$ olacak şekilde;

$$r^2 = \frac{(u-1)^2 + v^2}{B^2u^2 + B^2v^2 - 2ABu + A^2} \Rightarrow$$

$$u^2 + v^2 + \frac{2ABr^2 - 2}{1-B^2r^2}u - \frac{A^2r^2 - 1}{1-B^2r^2} = 0 \tag{8.16}$$

(8.16) adımından hareket ederek

Merkez $c(r) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, Yarıçap $\rho(r) = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$ ifadesinden hesaplanırsa:

$$c(r) = \frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2} \quad , \quad \rho(r) = \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2} \tag{8.17}$$

bulunur. Burada (8.16) denklemi $u^2 + v^2 + Au + Bv + C = 0$ çember denklemi şeklinde düşünülmüştür.

$B = 0$ olsun:

$$w = 1 + Az \Rightarrow z = \frac{w-1}{A} \tag{8.18}$$

$$|z|^2 = r^2 = \frac{|w-1|^2}{|A|^2} \Rightarrow$$

$w = u + iv$ olacak şekilde;

$$r^2 = \frac{(u-1)^2 + v^2}{A^2} \Rightarrow$$

$$u^2 + v^2 - 2u + 1 - A^2r^2 = 0 \tag{8.19}$$

(8.19) adımından hareket ederek

Merkez $c(r)=\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$, Yarıçap $\rho(r)=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}$ ifadesinden hesaplanırsa:

$$c(r)=1\,,\qquad \rho(r)=|A|\,r \tag{8.20}$$

bulunur. Burada (8.19) denklemi $u^2+v^2+Au+Bv+C=0$ çember denklemi şeklinde düşünülmüştür.

(8.17) ve (8.20) ifadeleri birlikte düşünülürse ispatı verir.

8.8 Lemma: $f(z)\in S^*(A,B,b,p,q)$ olsun bu taktirde

$B\neq 0$ için:

$$\frac{p-q-|b|(A-B)r-(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b)Br^2}{1-B^2r^2}\leq \operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right)$$

$$\leq\frac{p-q+|b|(A-B)r-(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b)Br^2}{1-B^2r^2}$$

B = 0 için:

$$-|b||A|r+(p-q)\leq \operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right)\leq |b||A|r+(p-q)$$

eşitsizliği vardır.

Bu sonuç kesindir zira extremal fonksiyon; (Bakınız sonuç 8.6)

$$f_*^{(q)}(z)=\begin{cases} z^{p-q}(1+Bz)^{\frac{b(A-B)}{B}} & B\neq 0\\ z^{p-q}e^{bAz} & B=0\end{cases}$$

sınırlarda eşitlik halini verir.

İspat:

$B\neq 0$ olsun : Lemma 8.7 ve S*(A,B,b,p,q) sınıfının tanımından dolayı

$$\left|\left(1+\frac{1}{b}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}-p+q\right)\right)-\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right|\leq\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}$$

$$\Rightarrow\left|z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}-p+q+\frac{b(A-B)Br^2}{1-B^2r^2}\right|\le\frac{|b|(A-B)r}{1-B^2r^2}$$

eşitsizliği yazılabilir.

$-|z|\le \operatorname{Re} z\le |z|$ kullanılırsa: b=x+iy olmak üzere,

$$\Rightarrow -\frac{|b|(A-B)r}{1-B^2r^2}\le\left|z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}-p+q+\frac{x(A-B)Br^2}{1-B^2r^2}+i\frac{y(A-B)Br^2}{1-B^2r^2}\right|$$

$$\le \operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}-p+q+\frac{x(A-B)Br^2}{1-B^2r^2}+i\frac{y(A-B)Br^2}{1-B^2r^2}\right)$$

$$=\operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right)-p+q+\frac{x(A-B)Br^2}{1-B^2r^2}$$

$$\le\left|z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}-p+q+\frac{x(A-B)Br^2}{1-B^2r^2}+i\frac{y(A-B)Br^2}{1-B^2r^2}\right|\le\frac{|b|(A-B)r}{1-B^2r^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{|b|(A-B)r}{1-B^2r^2}\le \operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right)-p+q+\frac{x(A-B)Br^2}{1-B^2r^2}\le\frac{|b|(A-B)r}{1-B^2r^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{|b|(A-B)r}{1-B^2r^2}+p-q-\frac{x(A-B)Br^2}{1-B^2r^2}\le \operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right)$$

$$\le\frac{|b|(A-B)r}{1-B^2r^2}+p-q-\frac{x(A-B)Br^2}{1-B^2r^2}$$

$$\Rightarrow\frac{p-q-|b|(A-B)r-(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b)Br^2}{1-B^2r^2}\le \operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right)\qquad(8.21)$$

$$\le\frac{p-q+|b|(A-B)r-(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b)Br^2}{1-B^2r^2}$$

eşitsizliği elde edilir.

B = 0 olsun: Lemma 8.7 ve S*(A,B,b,p,q) sınıfının tanımından dolayı;

$$\left|\left(1+\frac{1}{b}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}-p+q\right)\right)-1\right|\le|A|r$$

$$\Rightarrow\left|z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}-p+q\right|\le|b||A|r$$

$-|z|\le \operatorname{Re} z\le|z|$ kullanılırsa :

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}-p+q\right)\le\left|z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}-p+q\right|\le|b||A|r$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right) \le |b||A|r + p - q \tag{8.22}$$

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)} - p + q\right) \ge -\left|z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)} - p + q\right| \ge -|b||A|r$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right) \ge -|b||A|r + p - q \tag{8.23}$$

(8.22) ve (8.23) ifadeleri birlikte düşünülürse:

$$-|b||A|r + (p-q) \le \operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right) \le |b||A|r + (p-q) \tag{8.24}$$

eşitsizliği elde edilir.

(8.21) ve (8.24) eşitsizliklerinin birlikte düşünülmesi ispatı verir.

8.9 Teorem: $f(z) \in S^*(A,B,b,p,q)$ olsun bu taktirde

$B \neq 0$ için:

$$\left(\frac{1-Br}{1+Br}\right)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}} \cdot r^{p-q} \cdot \left(1-B^2r^2\right)^{\frac{\operatorname{Re} b(A-B)}{2B}} \le \left|f^{(q)}(z)\right| \le \left(\frac{1+Br}{1-Br}\right)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}} \cdot r^{p-q} \cdot \left(1-B^2r^2\right)^{\frac{\operatorname{Re} b(A-B)}{2B}}$$

$B = 0$ için:

$$r^{p-q}e^{-|b||A|r} \le |f^{(q)}(z)| \le r^{p-q}e^{|b||A|r}$$

eşitsizliği vardır.

İspat:

$B \neq 0$ olsun:

(Reb=x olmak üzere) Lemma 8.8'de ispatladığımız

$$\Rightarrow -\frac{|b|(A-B)r}{1-B^2r^2} + p - q - \frac{x(A-B)Br^2}{1-B^2r^2} \le \operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right)$$

$$\le \frac{|b|(A-B)r}{1-B^2r^2} + p - q - \frac{x(A-B)Br^2}{1-B^2r^2}$$

eşitsizliğinde

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right) = r\frac{\partial}{\partial r}\log\left|f^{(q)}(z)\right|$$ eşitliği kullanılırsa

$$\Rightarrow -\frac{|b|(A-B)r}{1-B^2r^2}+p-q-\frac{x(A-B)Br^2}{1-B^2r^2}\le r\frac{\partial}{\partial r}\log\left|f^{(q)}(z)\right|$$

$$\le \frac{|b|(A-B)r}{1-B^2r^2}+p-q-\frac{x(A-B)Br^2}{1-B^2r^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{|b|(A-B)}{1-B^2r^2}+\frac{p-q}{r}-\frac{x(A-B)Br}{1-B^2r^2}\le \frac{\partial}{\partial r}\log\left|f^{(q)}(z)\right|$$

$$\le \frac{|b|(A-B)}{1-B^2r^2}+\frac{p-q}{r}-\frac{x(A-B)Br}{1-B^2r^2} \qquad (8.25)$$

eşitsizliği elde edilir. (8.25) ifadesinden integral alınırsa:

$$\Rightarrow -\int\frac{|b|(A-B)}{1-B^2r^2}dr+\int\frac{p-q}{r}dr-\int\frac{x(A-B)Br}{1-B^2r^2}dr\le \log\left|f^{(q)}(z)\right|$$

$$\le \int\frac{|b|(A-B)}{1-B^2r^2}dr+\int\frac{p-q}{r}dr-\int\frac{x(A-B)Br}{1-B^2r^2}dr$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-Br}{1+Br}\right)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}}\cdot r^{p-q}\cdot\left(1-B^2r^2\right)^{\frac{\mathrm{Re}\,b(A-B)}{2B}}\le\left|f^{(q)}(z)\right|$$

$$\le \left(\frac{1+Br}{1-Br}\right)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}}\cdot r^{p-q}\cdot\left(1-B^2r^2\right)^{\frac{\mathrm{Re}\,b(A-B)}{2B}} \qquad (8.26)$$

eşitsizliği elde edilir.

Özel olarak q=0 alınarak

$$\left(\frac{1-Br}{1+Br}\right)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}}\cdot r^{p}\cdot\left(1-B^2r^2\right)^{\frac{\mathrm{Re}\,b(A-B)}{2B}}\le\left|f(z)\right|\le\left(\frac{1+Br}{1-Br}\right)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}}\cdot r^{p}\cdot\left(1-B^2r^2\right)^{\frac{\mathrm{Re}\,b(A-B)}{2B}}$$

eşitsizliği elde edilir.

$B=0$ olsun :

Lemma 8.8'de ispatladığımız

$$-|b||A|r+(p-q)\le \mathrm{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right)\le|b||A|r+(p-q)$$

eşitsizliğinde

$$\mathrm{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right)=r\frac{\partial}{\partial r}\log\left|f^{(q)}(z)\right|$$ eşitliği kullanılırsa

$$-|b||A|r+(p-q)\le r\frac{\partial}{\partial r}\log\left|f^{(q)}(z)\right|\le|b||A|r+(p-q)$$

$$\Rightarrow -|b||A|+\frac{p-q}{r}\leq \frac{\partial}{\partial r}\log\left|f^{(q)}(z)\right|\leq |b||A|r+\frac{p-q}{r} \qquad (8.27)$$

eşitsizliği elde edilir. (8.27) ifadesinden integral alınırsa:

$$-|b||A|r+\log r^{p-q}\leq \log\left|f^{(q)}(z)\right|\leq |b||A|r+\log r^{p-q}$$

$$\Rightarrow r^{p-q}\cdot e^{-|b||A|r}\leq |f^{(q)}(z)|\leq r^{p-q}\cdot e^{|b||A|r} \qquad (8.28)$$

eşitsizliği elde edilir.

Özel olarak q=0 alınarak

$$\Rightarrow r^{p}e^{-|b||A|r}\leq |f(z)|\leq r^{p}e^{|b||A|r}$$

eşitsizliği elde edilir.

(8.26) ve (8.28) eşitsizliklerinin birlikte düşünülmesi ispatı verir.

8.10 Teorem: S*(A,B,b,p,q) sınıfının genelleştirilmiş yıldızıllık yarıçapı:

$B\neq 0$ için :

$$r_S=\frac{2(p-q)}{|b|(A-B)+\sqrt{|b|^2\,(A-B)^2+4B(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b)(p-q)}}$$

$B=0$ için :

$$r_S=\frac{p-q}{|b||A|}$$

dır.

İspat:

$B\neq 0$ olsun :

Lemma 8.8'de

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right)\geq \frac{p-q-|b|(A-B)r-(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b)Br^2}{1-B^2r^2}$$

eşitsizliğini göstermiştik. Burdan hareket edersek:

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right)\geq \frac{p-q-|b|(A-B)r-(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b)Br^2}{1-B^2r^2}=0$$

olması için:

$$p-q-|b|(A-B)r-(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b)Br^2=0$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = \frac{|b|(A-B) \pm \sqrt{|b|^2 (A-B)^2 + 4B(pB-qB+A\,\mathrm{Re}\,b-B\,\mathrm{Re}\,b)(p-q)}}{-2B(pB-qB+A\,\mathrm{Re}\,b-B\,\mathrm{Re}\,b)}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{|b|(A-B) + \sqrt{|b|^2 (A-B)^2 + 4B(pB-qB+A\,\mathrm{Re}\,b-B\,\mathrm{Re}\,b)(p-q)}}{-2B(pB-qB+A\,\mathrm{Re}\,b-B\,\mathrm{Re}\,b)}$$

(8.29)

$$\Rightarrow r_2 = \frac{|b|(A-B) - \sqrt{|b|^2 (A-B)^2 + 4B(pB-qB+A\,\mathrm{Re}\,b-B\,\mathrm{Re}\,b)(p-q)}}{-2B(pB-qB+A\,\mathrm{Re}\,b-B\,\mathrm{Re}\,b)}$$

(8.30)

“ $r_2 < r_1$ olduğundan tanım gereği genelleştirilmiş yıldızıllık yarıçapı r_2 dir.”

(8.30) ifadesi $|b|(A-B) + \sqrt{|b|^2 (A-B)^2 + 4B(pB-qB+A\,\mathrm{Re}\,b-B\,\mathrm{Re}\,b)(p-q)}$ ifadesi ile genişletilirse:

$$r_S = \frac{2(p-q)}{|b|(A-B) + \sqrt{|b|^2 (A-B)^2 + 4B(pB-qB+A\,\mathrm{Re}\,b-B\,\mathrm{Re}\,b)(p-q)}} \quad (8.31)$$

olarak bulunur.

Özel olarak q=0 alınacak olursa $f(z) \in S^*(A,B,b,p,q)$ fonksiyonunun yıldızıllık yarıçapı

$$r_S = \frac{2p}{|b|(A-B) + \sqrt{|b|^2 (A-B)^2 + 4Bp(pB+A\,\mathrm{Re}\,b-B\,\mathrm{Re}\,b)}}$$

şeklinde elde edilir.

p = 1 , A = 1 , B = -1 alındığında

$$r_s = \frac{1}{|b| + \sqrt{|b|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,b + 1}}$$

elde edilir ki bu da M.K.Aouf tarafından bulunan bir sonuç olup [22] kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyonlar için yıldızıllık yarıçapıdır.

B = 0 olsun :

Lemma 8.8’de $\mathrm{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)} \right) \geq -|b||A|r + (p-q)$

eşitsizliğini göstermiştik. Burdan hareket edersek:

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right)\geq -|b||A|r+(p-q)=0$$

olması için:

$$-|b||A|r+(p-q)=0$$

$$\Rightarrow r_S=\frac{p-q}{|b||A|} \tag{8.32}$$

elde edilir.

Özel olarak q=0 alınacak olursa $f(z)\in S^*(A,B,b,p,q)$ fonksiyonunun yıldızıllık yarıçapı

$$r_S=\frac{p}{|b||A|}$$

şeklinde elde edilir.

(8.31) ve (8.32) eşitsizliklerinin birlikte düşünülmesi ispatı verir.

8.11 Teorem: S*(A,B,b,p,q) sınıfının genelleştirilmiş konvekslik yarıçapı:

$B\neq 0$ için:

$$r_C=\frac{2(1+p-q)}{|b|(A-B)+\sqrt{|b|^2(A-B)^2+4B(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b+B)(1+p-q)}}$$

$B=0$ için:

$$r_C=\frac{1+p-q}{|b||A|}$$

dır.

İspat:

$B\neq 0$ olsun:

Lemma 8.8'de

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right)\geq\frac{p-q-|b|(A-B)r-(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b)Br^2}{1-B^2r^2}$$

eşitsizliğini göstermiştik. Burdan hareket edersek:

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right)\geq\frac{p-q-|b|(A-B)r-(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b)Br^2}{1-B^2r^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(1+z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right)\geq 1+\frac{p-q-|b|(A-B)r-(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b)Br^2}{1-B^2r^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(1+z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right)\geq \frac{1+p-q-|b|(A-B)r-(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b+B)Br^2}{1-B^2r^2}$$

$$\operatorname{Re}\left(1+z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right)\geq \frac{1+p-q-|b|(A-B)r-(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b+B)Br^2}{1-B^2r^2}=0$$

olması için:

$$1+p-q-|b|(A-B)r-(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b+B)Br^2=0$$

$$\Rightarrow r_{1,2}=\frac{|b|(A-B)\pm\sqrt{|b|^2\,(A-B)^2+4B(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b+B)(1+p-q)}}{-2B(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b+B)}$$

$$\Rightarrow r_1=\frac{|b|(A-B)+\sqrt{|b|^2\,(A-B)^2+4B(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b+B)(1+p-q)}}{-2B(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b+B)} \quad (8.33)$$

$$\Rightarrow r_2=\frac{|b|(A-B)-\sqrt{|b|^2\,(A-B)^2+4B(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b+B)(1+p-q)}}{-2B(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b+B)} \quad (8.34)$$

“ $r_2 < r_1$ olduğundan tanım gereği genelleştirilmiş konvekslik yarıçapı r_2 dir.”

(8.34) ifadesi

$|b|(A-B)+\sqrt{|b|^2\,(A-B)^2+4B(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b+B)(1+p-q)}$ ifadesi ile genişletilirse:

$$r_C=\frac{2(1+p-q)}{|b|(A-B)+\sqrt{|b|^2\,(A-B)^2+4B(pB-qB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b+B)(1+p-q)}} \quad (8.35)$$

elde edilir.

Özel olarak q=1 alınacak olursa $f(z)\in S^*(A,B,b,p,q)$ fonksiyonunun konvekslik yarıçapı

$$r_C=\frac{2p}{|b|(A-B)+\sqrt{|b|^2\,(A-B)^2+4Bp(pB+A\operatorname{Re}b-B\operatorname{Re}b)}}$$

şeklinde elde edilir.

p = 1 , A = 1 , B = -1 alındığında

$$r_C = \frac{1}{|b| + \sqrt{|b|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,b + 1}}$$

elde edilir ki bu da M.K.Aouf tarafından bulunan bir sonuç olup [23] kompleks mertebeden konveks fonksiyonlar için konvekslik yarıçapıdır.

B = 0 olsun :

Lemma 8.8'de $\mathrm{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)} \right) \geq -|b||A|r + (p-q)$ eşitsizliğini göstermiştik.

Buradan hareket edersek:

$$\mathrm{Re}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)} \right) \geq -|b||A|r + (p-q)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(1 + z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)} \right) \geq (1+p-q) - |b||A|r$$

$$\mathrm{Re}\left(1 + z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)} \right) = (1+p-q) - |b||A|r = 0$$

olması için:

$$(1+p-q) - |b||A|r = 0$$

$$\Rightarrow r_C = \frac{1+p-q}{|b||A|} \tag{8.36}$$

olarak bulunur.

Özel olarak q=1 alınacak olursa $f(z) \in S^*(A,B,b,p,q)$ fonksiyonunun konvekslik yarıçapı

$$r_C = \frac{p}{|b||A|}$$

şeklinde elde edilir.

(8.35) ve (8.36) eşitsizliklerinin birlikte düşünülmesi ispatı verir.

8.12 Hazırlık:

$$p(z)=1+p_1z+p_2z^2+...+p_nz^n+...$$

açılımına sahip, D de tanımlı, analitik p(z) fonksiyonunun A,B, $-1\le B<A\le 1$ olmak üzere, P(A,B) sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart; p(z) fonksiyonunun w(z) Schwarz Lemması'nın koşullarını sağlamak üzere

$$p(z)\prec\frac{1+Az}{1+Bz}\Leftrightarrow p(z)=\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}$$

sabordinasyonunu sağlamasıdır. Burada $p_i\ (i\in\mathbb{N})$ katsayıları için $|p_i|\le(A-B)\quad(i\in\mathbb{N})$ dir. Bu sınıf W. Janowski tarafından tanıtılmıştır. [13]

8.13 Teorem: (Katsayı Eşitsizliği) $f(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+...$ fonksiyonu $S^*(A,B,b,p,q)$ sınıfına ait olsun.

S(n);

$$r_1+2r_2+3r_3+...nr_n=\sum_{i=1}^{n}ir_i=n\qquad,\qquad\sum_{i=1}^{n}r_i=m$$

olacak şekilde negatif olmayan $(r_1,r_2,...,r_n)$ tamsayılarının tüm n-liler kümesi olsun. Bu taktirde

$$\left|a_{p+n}\right|\le\sum_{S(n)}\frac{|b|^m\cdot|c_1|^{r_1}\cdot|c_2|^{r_2}\cdots|c_n|^{r_n}}{1^{r_1}2^{r_2}\cdots n^{r_n}\cdot r_1!r_2!\cdots r_n!}\le\sum_{S(n)}\frac{|(A-B)b|^m}{1^{r_1}2^{r_2}\cdots n^{r_n}\cdot r_1!r_2!\cdots r_n!}$$

dir. Buradaki toplam S(n)'deki tüm n-liler üzerinden alınmıştır.

İspat:

Bu katsayı eşitsizliğinde A.W. Goodman tarafından geliştirilen tekniği kullanırız [10].

w(z) fonksiyonu Schwarz Lemmasının koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$1+\frac{1}{b}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}-p+q\right)=\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{b}\left(z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}-p+q\right)=p(z)\in P(A,B)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow z\dfrac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)} = b\left(\dfrac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}-1\right)+p-q \\ \Rightarrow \dfrac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)} = p(z) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \qquad (|c_n| \le (A-B) \quad n=1,2,...)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)} = b\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n\right)+p-q$$

şeklindedir. q=0 alınırsa:

$$\Rightarrow z\frac{f^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)} = b\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n\right)+p \tag{8.37}$$

şeklinde yazılabilir. (8.37) eşitliği $c_0 = \dfrac{p}{b}$ şeklinde tanımlanarak

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = b\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right) = b\cdot g^*(z) \qquad (|c_n| \le (A-B) \quad n=1,2,...) \tag{8.38}$$

şeklinde ifade edilebilir.

f(z) fonksiyonu, $a_p = 1$ olacak şekilde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p+n} z^{p+n}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda $f'(z)$ fonksiyonu

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (p+n)\, a_{p+n}\, z^{p+n-1}$$

şeklindedir.

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = b\cdot g^*(z) \Rightarrow z\cdot f'(z) = b\cdot g^*(z)\cdot f(z)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (p+n)\, a_{p+n}\, z^{p+n} = b\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{p+n} z^{p+n}\right)$$

Burada Cauchy katsayı eşitliğini kullanırsak:

$$(p+n)\, a_{p+n} = b\sum_{k=0}^{n} a_{p+k}\cdot c_{n-k}$$

$$\Rightarrow (p+n)\, a_{p+n} = p\, a_{p+n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{p+k}\cdot b\cdot c_{n-k} \Rightarrow n\, a_{p+n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{p+k}\cdot b\cdot c_{n-k}$$

$$a_{p+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_{p+k} \cdot b \cdot c_{n-k} \tag{8.39}$$

elde edilir.

Her n tamsayısı için, a_{p+n} katsayısı (8.39) denklemini gerçeklemek üzere teoremin ispatı indüksiyon yöntemiyle aşağıdaki şekilde yapılabilir.

Her $k = 1,2,3...,(n-1)$ için;

$$a_{p+1} = b\frac{c_1}{1!}$$

$$a_{p+2} = b^2\frac{c_1^2}{2!} + b\frac{c_2}{2}$$

$$a_{p+3} = b^3\frac{c_1^3}{3!} + \frac{1}{2}b^2c_1c_2 + \frac{1}{3}bc_3$$

$$a_{p+4} = b^4\frac{c_1^4}{4!} + b^3\frac{c_1^2c_2}{4} + b^2\frac{c_2^2}{8} + b^2\frac{c_1c_3}{3} + b\frac{c_4}{4}$$

$$a_{p+5} = b\ \frac{c_1^5}{5!} + b^4\frac{c_1^3c_2}{12} + b^3\frac{c_1c_2^2}{8} + b^3\frac{c_1^2c_3}{6} + b^2\frac{c_2c_3}{6} + b^2\frac{c_1c_4}{4} + b\frac{c_5}{5}$$

$$a_{p+6} = b^6\frac{c_1^6}{6!} + b^5\frac{c_1^4c_2}{48} + b^4\frac{c_1^2c_2^2}{16} + b^4\frac{c_1^3c_3}{18} + b^3\frac{c_2^3}{48} + b^3\frac{c_1c_2c_3}{6} + b^3\frac{c_1^2c_4}{8} +$$
$$b^2\frac{c_3^2}{18} + b^2\frac{c_2c_4}{8} + b^2\frac{c_1c_5}{5} + b\frac{c_6}{6}$$

$$a_{p+7} = b^7\frac{c_1^7}{7!} + b^6\frac{c_1^5c_2}{240} + b^5\frac{c_1^3c_2^2}{48} + b^5\frac{c_1^4c_3}{72} + b^4\frac{c_1c_2^3}{48} + b^4\frac{c_1^2c_2c_3}{12} + b^4\frac{c_1^3c_4}{24} +$$
$$b^3\frac{c_2^2c_3}{24} + b^3\frac{c_1c_3^2}{18} + b^3\frac{c_1c_2c_4}{8} + b^3\frac{c_1^2c_5}{10} + b^2\frac{c_3c_4}{12} + b^2\frac{c_2c_5}{10} + b^2\frac{c_1c_6}{6} + b\frac{c_7}{7}$$
$$\vdots$$

$$a_{p+k} = \sum_{S(k)}\frac{b^j \cdot c_1^{r_1} \cdot c_2^{r_2} \cdots c_k^{r_k}}{1^{r_1}2^{r_2}\cdots k^{r_k} \cdot r_1!r_2!\cdots r_k!} = \sum_{S(k)}\frac{(bc_1)^{r_1} \cdot (bc_2)^{r_2} \cdots (bc_k)^{r_k}}{1^{r_1}2^{r_2}\cdots k^{r_k} \cdot r_1!r_2!\cdots r_k!} \tag{8.40}$$

olsun. Burada $j = \sum_{i=1}^{k} r_i$ dir ve toplam, $\sum_{i=1}^{k} ir_i = k$ için tüm negatif olmayan $(r_1, r_2,..., r_k)$ k-lılar kümesi S(k) üzerinde alınmıştır.

Şimdi de; k < n ise uygun miktarda sıfırlar ekleyerek k-lılar n-lilere genişletilebilir. O taktirde negatif olmayan tamsayılarda

$$\sum_{i=1}^{n} i r_i = k \qquad , \quad k < n$$

ifadesinin bir çözümü i = k+1, k+2,...,n için $r_i = 0$ olarak verilmelidir.

(8.40) denklemindeki $\dfrac{(bc_i)^{r_i}}{i^{r_i} \cdot r_i\,!}$ çarpanlarının dahil edilmesi ile i = k+1, k+2,...,n için bu çarpanlar 1 olduğundan, değer değişmez.

Böylece (8.40) denklemi

$$a_{p+k} = \sum_{S(k)} \frac{(bc_1)^{r_1} \cdot (bc_2)^{r_2} \cdots (bc_n)^{r_n}}{1^{r_1} 2^{r_2} \cdots n^{r_n} \cdot r_1\,! r_2\,! \cdots r_n\,!} \qquad k < n \tag{8.41}$$

şeklinde ifade edilebilir.

(8.41) denklemini (8.39) denkleminin sağ tarafında kullanırsak;

$$a_{p+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{S(k)} \frac{bc_{n-k} \cdot (bc_1)^{r_1} \cdot (bc_2)^{r_2} \cdots (bc_n)^{r_n}}{1^{r_1} 2^{r_2} \cdots n^{r_n} \cdot r_1\,! r_2\,! \cdots r_n\,!} \tag{8.42}$$

dir.

$(y_1, y_2, ...y_n)$, $S(n)$ içinde

$\sum_{i=1}^{n} i y_i = n$ olacak şekilde herhangi sabit n-liler olsun.

(8.42) denkleminde $(bc_1)^{y_1} \cdot (bc_2)^{y_2} \cdots (bc_n)^{y_n}$ 'nin C katsayısı tanımlanır. Bu katsayı toplamdaki çeşitli terimlerin birleştirilmesiyle oluşur Gerçekte bu tür terimler ancak ve ancak $bc_{n-k} \cdot (bc_1)^{r_1} \cdot (bc_2)^{r_2} \cdots (bc_n)^{r_n} = (bc_1)^{y_1} \cdot (bc_2)^{y_2} \cdots (bc_n)^{y_n}$ ise elde edilir.

Özel olarak a, $y_a \geq 1$ ifadesinin indisi olsun. $i \neq a$ için $r_i = y_i$ ve $r_a = y_a - 1$ olsun. (8.42) denkleminde n-k =a olsun.

A, $y_a \neq 0$ olan a'ların kümesi ise, o taktirde

$$C = \frac{1}{n} \sum_{a \in A} \frac{1}{1^{r_1} 2^{r_2} \cdots n^{r_n} \cdot r_1\,! r_2\,! \cdots r_n\,!} \tag{8.43}$$

dir.

Bu denklemin pay ve paydasına $a \cdot y_a$ çarpımını yazarsak;

$$C = \sum_{a \in A} \frac{a \cdot y_a}{n \cdot 1^{y_1} 2^{y_2} \cdots n^{y_n} \cdot y_1\,! y_2\,! \cdots y_n\,!}$$

$$= \frac{1}{n \cdot 1^{y_1} 2^{y_2} \cdots n^{y_n} \cdot y_1! y_2! \cdots y_n!} \sum_{a \in A} a \cdot y_a$$

A’nın tanımı gereği $\sum_{a \in A} a y_a = \sum_{i=1}^{n} i y_i = n$ dir.

$$\Rightarrow C = \frac{1}{1^{y_1} 2^{y_2} \cdots n^{y_n} \cdot y_1! y_2! \cdots y_n!}$$

denklemi elde edilir ki (8.43) denkleminin sağ tarafında istenen $(bc_1)^{y_1} \cdot (bc_2)^{y_2} \cdots (bc_n)^{y_n}$ kesin katsayıları her sabit $(y_1, y_2, ... y_n)$ için sağlanacağından ve $|c_n| \leq (A - B) \quad (n = 1, 2, ...)$ olduğundan ispat tamamlanmıştır.

KAYNAKLAR

1. **Ahlfors L.V.**, “Sufficient conditions for quasiconformal extensions”, *Annals of Mathematics Studies*, 79, *Princeton, N.J.* , 1974.
2. **Altintas O. and Srivastava H.M**., “Some majorization problems associated with p-valently starlike and convex functions of complex order”, *East Asian Mathç J.* 17(2001) , 175-183.
3. **Aouf M.K**., “p-valent classes related to convex functions of complex order”, *Rocky Mountain of Mathematics* , Vol.15 , Number 4 , (1985) , 853-863.
4. **Bajpai S.K. and Mehrok T.J.S.**, “On the coefficient structure and growth theorem for the functions f(z) for wich $zf'(z)$ is spirallike”, *Publ. Inst. Math. (Beorgad.)* N.S. , 16(30) , 1973 , 5-12.
5. **Chichra P.N.**, “Regular functions for which $zf'(z)$ is α-spirallike” , *Proc, Amer. Math. Soc.* , 49 # 1 , 1975, 151-160.
6. **Clunie J**., “On meromorphic schlicht functions” , *J. London Math. Soc.* , 34(1959) , 215-216.
7. **Eenigenburg P.J. and Keogh F.R**., “The Hardy class of some univalent functions and their derivatives”, *Michigan Math. J.* , 17(1970) , 335-346.
8. **Goodman A.W**., “On the Schwarz-Christoffel transformation and p-valent functions”, *Trans. of the Amer. Math. Soc.* 68(1950) , 204-223.
9. **------------** , “Univalent functions Volume I and Volume II” , *Marinen publishing Comp. Tampa Florida* , (1984)
10. ------------ , “Coefficients for the area theorem” , *Proc. of the Amer. Math. Soc.* , Vol.33 , Number 2 (1972) p.438-444 .
11. **Hardy G.H. and Littlewood J.E.** , “Some properties of fractional integrals II” , *Math. Z.* 34,(1932) 403-439.
12. **Jack I.S.** , “Functions starlike and convex of order α” , *J.London Math.Soc.* , (2)3 (1971), 469-474
13. **Janowski W**., “Some external problems for certain families of analytic functions” , *Ann. Polon. Math.*, 28(1973), 297-326.
14. **Kaplan W**. , “Close-to-convex schlicht functions” , *Michigan Math. J.* 1(1952) , 169-185. MR 14#966.
15. **Keogh F.R. and Merkes E.P**; “A coefficient inequality for certain classes of analytic functions”, *Proe. Amer. Math. Soc*. 20(1969) , 8-12.
16. **Krzyz’ J**. , “The radius of close-convexity within the family of univalent functions” , *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 10 , 4(1962), 201-204.
17. **Kulshrestha P.K.** , “Bounded Robertson functions” , *Rend. Mat.* , (6)9 (1976), no. 1, 137-150.
18. **------------**, “Distortion of spiral-like mappings”, *Proc: Royal Irish Acad*. 73 A (1973) , 1-5.
19. **Libera R.J. and Ziegler M.R.** , “Regular functions f(z) for wich $zf'(z)$ is α-spiral” , *Trans. Amer. Math. Soc.* , 166(1972) , 361-370.
20. **Libera R.J**., “Univalent α-spiral functions”, *Canad. J. Math.* , 19(1967) , 449-456.

21. **Miller S.S.** , Mocanu P.T. and Reade M.O. , "α-convex function and derivatives in Nevalinna class" , *Studia , Babes-Bolyal, Mathematica* , 20 (1975) , 35-40.
22. **Nasr M.A. and Auof M.K**. , "Starlike functions of complex order" , (*Submitted in J. of Natural Science and Maths. Pakistan)*.
23. **------------ and ------------** , "On convex functions of complex order" , *Mansoura Science Bulletin , Egypt* 9(1982) , 565-582.
24. **------------ and ------------** , "Radius of convexity for the classes of starlike functions of complex order" , *Assiut Univ. Bull. of the Faculty of Science section (A). Natural Science (to appear)*
25. **Natanson I.P.** , "Konstructive Funktionentheorie", (translated from Russian) , Berlin: Akademie Verlag (1955)
26. Pinchuk B. , "On starlike and convex functions of order α" , *Duke Math. , J.* 35(1968) , 721-734.
27. **Pommerenke C**. , "On starlike and convex functions" , *J.L. Math. Soc.* , 1962, 37, 209-224.
28. **Priwalow I.I**. , "Randeigenshaften analytisc her funktionen" , *Veb, Deutscher Verl. Wissensch Berlin*, 1965.
29. **Robertson M.S.** , "On the theory of univalent functions" , *Ann. of Math.* , 37 , (1936) , 374-408.
30. **------------** , "Radii of star-likeness and close-to-convexity" , *Proc. Amer. Math. Soc.* , 16(1956) , 847-852. MR 31#5971.
31. **------------**, "Univalent functions f(z) for wich $zf'(z)$ is spirallike", *Michigan Math. J.* 16(1969) , 97-101. MR 39#5785.
32. **Sizuk P.I.**, "Regular functions $f'(z)$ for wich $zf'(z)$ is θ-spirallike shaped of order α" , *Sibirsk. Math. Z.* , 16(1975) , 1286-1290 , 1371. MR 54#14264.
33. **Spacek L.** , "Prispeek k teorii funki" , *Prostych, Casopis Pest. Math. Fys.* 62(1933) , 12-19.
34. **Wiatrowski P.** , "The coefficients of certain family of holomorphic functions" , *Zeszyty Nauk. Univ. todzk. Nauki Math. Przyrod. Ser. II , Zeszyt (39) Math.* (1971) , 75-85. , MR #3115.

Ayşenur BERBEROĞLU

1982 yılında Bayburt'ta doğdu. Orta öğrenimini İzmir Bornova Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 1999 yılında İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü'ne kaydolarak 2003 yılında bölüm 3.lüğü ile mezun oldu. Aynı yıl İ.K.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans programına kaydoldu ve İ.K.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu görevini sürdürmektedir.