ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezimi yöneten ve çalışmalarımda bana her türlü desteği ve ilgiyi gösteren hocam Yard. Doç. Dr. Yaşar Polatoğlu’na, yardımlarını esirgemeyen hocam Yard. Doç. Dr. Arzu Şen’e ve her zaman yanımda olduklarını bana fazlasıyla hissettiren aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

α	**:** 0<α<1 kosuluna uyan bir sayı
b	**:** Sıfırdan farklı kompleks bir sayı
b_0	**:** $E(g)$ nin konform merkez
C(r)	**:** Analitik Jordan eğrisi
D	**:** Birim dairenin içi
Δ	**:** Birim dairenin dışı
$\partial D, \partial\Delta$	**:** Birim dairenin sınırı
$d(x,y)$	**:** x ve y noktaları arasındaki uzaklık fonksiyonu
$E, E(g)$	**:** $g(z) \in \sum$ fonksiyonuyla yapılan tasvirde, resim bölgesinin kompakt tamamlayıcısı
ε	**:** Pozitif bir reel sayı ve civarın yarıçapı
$\Gamma_{\varepsilon}(x)$	**:** İki boyutlu reel Öklid uzayında bir x noktasının ε-civarı
h(ξ)	**:** z_0 noktasına göre $f(z)$ fonksiyonunun Koebe transformasyonu
$\prec$	**:** Sabordine olma özelliği
$N_{\varepsilon}(x)$	**:** x noktasının ε-civarı
Ω	**:** D'de analitik, $w(0)=0$, $\lvert w(z)\rvert < 1$ koşullarına uyan fonksiyonların sınıfı
Ω_0	**:** Bölge

P	: Pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı
$\sum$	: Δ da yalınkat g(z) fonksiyonlar sınıfı
S	: D de yalınkat $f(z)$ fonksiyonlar sınıfı
S^*	: D de yıldızıl $f(z)$ fonksiyonlar sınıfı
X	: Metrik uzay
Y	: Metrik uzayın bir alt uzayı
$\rho(r)$	: Yarıçap
$C(r)$	: Merkez
D^*	: Birim dairede punctured bölge
$\sum_p$	: Birim diskte tanımlı, analitik, p-değerli fonksiyonlar sınıfı
$S_p^{\lambda}(A,B)$	: Meromorfik Janowski Yıldızıl Fonksiyonların Sınıfı
r_s	: Yıldızıllık yarıçapı

Üniversitesi : **İstanbul Kültür Üniversitesi**
Enstitüsü : **Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı : **Matematik-Bilgisayar**
Programı : **Matematik-Bilgisayar**
Tez Danışmanı : **Yard. Doç. Dr. Yaşar POLATOĞLU**
Tez Türü ve Tarihi : **Yükseklisans – Haziran 2005**

ÖZET

BİRİM DİSKTE ANALİTİK, P-DEĞERLİ FONKSİYONLAR ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Hatice Esra ÖZKAN

Bu çalışma iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda birim disk $D = \{z \ \|z| < 1\}$de tanımlanmış, analitik, yalınkat olan fonksiyonlar ve bunların özel sınıfları araştırılmış ve bu güne kadar bu sınıflar için yapılan araştırmalar incelenmiş ve sistematik olarak yalınkat fonksiyonlar teorisinde yazılmış büyük eserlere bağlı kalarak bu sınıfların gerçekledikleri genel özellikler verilmiştir. Yukarıda sözü edilen araştırmalar incelenirken referans bölümünde de belirtilen A. W. Goodman, C. H. Pommenenke, P. T. Duren, Glenn Schober tarafından yazılan yalınkat fonksiyonlar adlı eserler gözönünde tutulmuştur.

Tezin ikinci bölümünde birim diskin bir civarı olan $D^* = \{z \mid 0 < |z| < 1\}$ da tanımlanmış, analitik, $f(z) = \frac{1}{z^p} + \sum_{n=1-p}^{\infty} a_n z^n$ açılımına sahip ve

$$z.\frac{f'(z)}{f(z)} \prec -pe^{-i\lambda}\left[Cos\lambda \frac{1+Az}{1+Bz} + iSin\lambda\right]$$

sabordinasyonunu gerçekleyen fonksiyonların sınıfını ele alıp bu sınıf için genel olarak; yalınkat fonksiyonlar teorisinde bir sınıf için ele alınan öncelikli problemler olan; gösterilim teoremleri, yarıçap problemleri, distorsiyon özellikleri ve katsayı eşitsizlikleri incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler : **Yalınkat Fonksiyon, Sabordinasyon Prensibi, Gösterilim Teoremi, Yarıçap Problemi, Distorsiyon Teoremleri, Katsayı Eşitsizlikleri.**

Bilim Dalı Sayısal Kodu : 30C45

University	**:**	**Istanbul Kultur University**
Institute	**:**	**Institute of Sciences**
Science Programme	**:**	**Mathematics-Computer**
Programme	**:**	**Mathematics-Computer**
Supervisor	**:**	**Ass. Prof. Dr. Yaşar Polatoğlu**
Degree Awarded and Date	**:**	**MA – November 2004**

ABSTRACT

SOME RESULTS ON ANALYTİC, p-VALENT FUNCTİONS IN THE UNIT DISC

Hatice Esra ÖZKAN

This study consists of two parts. In the first part, analytic, univalent functions that are defined in unit disc $D = \{z \,\| z| < 1\}$ and their specific classes are inspected, and all the previous researches on these classes up to now are reviewed and the general properties that these classes satisfy are given systematically using the valuable work done on the univalent function theory. During the analysis of the researches that are mentioned above and also given in the reference section, the studies on univalent functions written by A.W. Goodman, C. H. Pommenenke, P. T. Duren, Glenn Schober are taken as base to our study.
In the second part of the thesis, after examining the classes of the functions that are defined in the punctured disc $D^* = \{z \mid 0 < |z| < 1\}$, analytic and that have the expansion $f(z) = \frac{1}{z^p} + \sum_{n=1-p}^{\infty} a_n z^n$ and satisfying the

$$z.\frac{f'(z)}{f(z)} \prec -pe^{-i\lambda}\left[Cos\lambda \frac{1+Az}{1+Bz} + iSin\lambda\right]$$

subordination, generally for this class, representation theorems, radius problems, distortion properties and coefficient inequalities are analyzed.

Key Words : Univalent Function, Subordination Principle, Representation Theorem, Radius Problem, Distortion Theorems, Coefficient Inequality.

Science Code : 30C45

1.GİRİŞ

Birim çemberde analitik ve yalınkat olan tek kompleks değişkenli fonksiyonlar ilk olarak 1907 yılında Koebe tarafından incelenmiştir. Daha sonra da çeşitli matematikçiler bu sınıfları genelleştirerek çeşitli yalınkat fonksiyon sınıfları ortaya atmışlar ve bu sınıfları incelemişlerdir. Tek kompleks değişkenli analitik fonksiyonların incelenmesinde temel amaç, ortaya atılan fonksiyon sınıfının Taylor açılımındaki a_n katsayısına ait modülün üst sınırını bulmak, fonksiyon sınıfına ait distorsiyon teoremlerini araştırmak ve Koebe bölgelerini ifade etmektir.

Bu çalışmada 2004 yılında V. Ravichandran, S. Sivaprasad Kumar ve G. Supramanian tarafından tanıtılan Meromorfik Janowski Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı için gösterilim teoremi, distorsiyon teoremi, yıldızıllık yarıçapı ve katsayı eşitsizliği verildi.

Analitik fonksiyonların tanım bölgelerinden bahsetmek için, öncelikle elemanter topolojik kavramların tanımlarını vermek faydalı olacaktır.

1.1 Tanım (Metrik Uzay **) :** X boştan farklı herhangi bir cümle olsun. X cümlesinin herhangi iki elemanı için $d(x,y) \in R$ reel sayısı, aşağıdaki aksiyomları sağlamak üzere verilmiş olsun.

(i) $\forall\ x,y \in X$, $x \neq y$ için $d(x,y) > 0$

(ii) $\forall\ x,y \in X$, $x = y$ için $d(x,y) = 0$ (İdantik özelliği)

(iii) $\forall\ x,y \in X$, $x \neq y$ için $d(x,y) = d(y,x)$ (Simetrik özelliği)

(iv) $\forall\ x,y,z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Üçgen eşitsizliği)

Bu takdirde

$d:\ X \times X \to$R

tasviri, X cümlesi üzerinde bir metrik uzay yapısını belirtmiş olur. Yani (X,d) sıralı ikilisine bir metrik uzay denir.
Burada $x, y, z, ... \in X$ lere X metrik uzayının noktaları, $d(x, y)$ reel sayısına da x ve y noktaları arasındaki uzaklık fonksiyonu adı verilir. Burada belirtilmesi gerekir ki yukarıda sıralanan aksiyomlara metrik uzay aksiyomları denir.

1.2 Tanım (Metrik Uzayların Alt Uzayları **) :** X bir metrik uzay ve $Y \subset X$, X uzayının herhangi bir alt cümlesi olsun. X metrik uzay olduğundan, X uzayında bir uzaklık fonksiyonu verilmiştir. Y cümlesinin her elemanı aynı zamanda X uzayının elemanı olduğundan, X uzayında tanımlanan uzaklık fonksiyonu, Y alt cümlesinin elemanları için aynı zamanda metrik uzay aksiyomlarını gerçekler. Bundan dolayı bir metrik uzayın her alt cümlesi de bir metrik uzaydır.

1.3.Tanım : X herhangi bir metrik uzay olsun . ε >0 reel sayısını ve $x \in X$ noktası gözönüne alınsın. X uzayı d uzaklık fonksiyonu ile donatılmış ise

$$N_\varepsilon(x) = \{y \mid d(x, y) < \varepsilon, y \in R\}$$

nokta cümlesine x noktasının ε -civarı adı verilir. Burada ε >0 reel sayısına bu civarın yarıçapı denir.

1.4 Tanım : X herhangi bir metrik uzay ve A, X uzayının bir alt cümlesi olsun. $x \in A$ noktası için $N_\varepsilon(x) \subset A$ koşulunu sağlayan en az bir $N_\varepsilon(x)$ civarı varsa, $x \in A$ noktasına A cümlesinin bir iç noktası denir.

1.5 Tanım : X herhangi bir metrik uzay ve A, X uzayının bir alt cümlesi olsun. A cümlesinin her noktası bir iç nokta ise, A cümlesine bir açık cümle denir.

1.6 Tanım : X herhangi bir metrik uzay ve A, X uzayının bir alt cümlesi olsun. X uzayına ait bir x noktası için, x noktasının her $N_\varepsilon(x)$ civarında $x \neq y$, $y \in N_\varepsilon(x)$ olacak şekilde, A cümlesinin en az bir y elemanı varsa, x noktasına A cümlesinin bir yığılma noktası veya limit noktası denir.

1.7 Tanım : X herhangi bir metrik uzay ve A, X metrik uzayının bir alt cümlesi olsun. A cümlesinin her yığılma noktası A cümlesinin bir noktası ise, A cümlesine kapalı cümle denir. (Yığılma noktalarını içinde bulunduran cümleye kapalı cümle denir.)

1.8 Tanım (Bağlantılı Olmak **) :** X bir metrik uzay ve A bu uzayın bir alt cümlesi olsun. A cümlesi; boştan farklı, ayrık, iki açık alt cümlenin birleşimi olarak gösterilemezse, A cümlesine bağlantılıdır denir.
Yani bu demektir ki ;

$B \neq \emptyset$, B açık, $B \subset A$

ve $B \cap C = \emptyset$ olmak üzere $A = B \cup C$

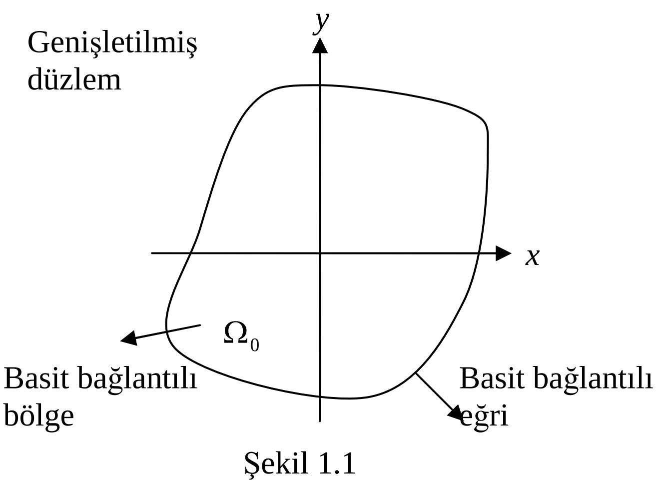
$C \neq \emptyset$, C açık, $C \subset A$

olacak şekilde B ve C cümleleri bulunamıyorsa, A cümlesi bağlantılıdır denir.

1.9 Tanım : Boştan farklı, açık, bağlantılı bir cümleye bölge denir.

1.10 Tanım : Sonsuz noktasının düzleme katılmasıyla meydana gelen düzleme genişletilmiş düzlem denir.

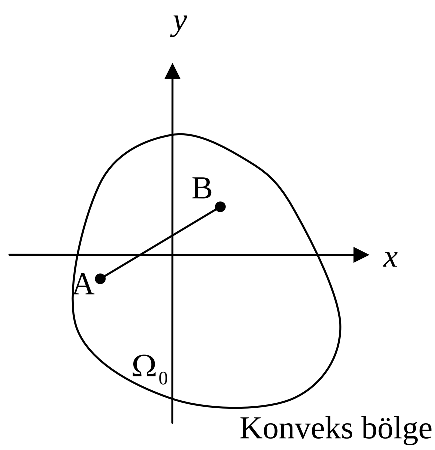
1.11 Tanım : Bir bölgenin tamamlayıcısı, genişletilmiş düzleme göre bağlantılı ise, bu bölgeye basit bağlantılı bölge denir.



Şekil 1.1

1.12 Tanım : Bir bölgenin bir O noktasını herhangi bir A noktasına birleştiren doğru parçası tamamı ile bölge içinde kalıyorsa, bu bölgeye O noktasına göre yıldız bölge denir. (Bir bölgenin bir O noktasından çizilen herhangi bir doğru parçası bölgenin sınırını tek bir noktada kesiyorsa bölgeye O noktasına göre yıldız bölge denir.)

1.13 Tanım : Bir bölgenin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası tamamı ile bölge içinde kalıyorsa, bölgeye konveks bölge denir.



Şekil 1.2

Şimdi de yıldız ve konveks bölge için analitik tanımlar verilsin.

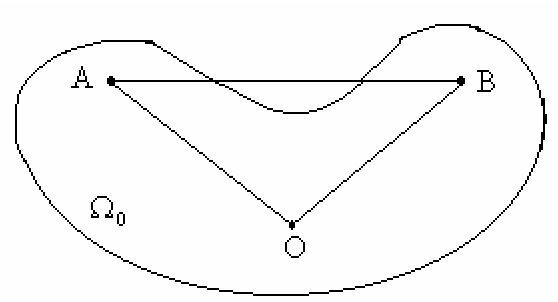
1.14 Tanım : Ω_0 bir bölge olsun. Bu takdirde $0 \le t \le 1$ olmak üzere, $z \in \Omega_0$ için $t.z \in \Omega_0$ koşulu gerçekleniyorsa Ω_0 bölgesine başlangıç noktasına göre yıldız bölge denir.

1.15 Tanım : Ω_0 bir bölge olsun. $0 \le t \le 1$ olmak üzere, $\forall \; z_1, z_2 \in \Omega_0$ için $t.z_1 + (1-t)z_2 \in \Omega_0$ oluyorsa, Ω_0 bölgesine konveks bölge denir.

1.16 Özellik : Yıldız bölge tanımından dolayı, bir O noktasına göre yıldız olan bölge, bölgenin bir başka noktasına göre yıldız bölge olmayabilir.

İspat : Şekil 1.3 O noktasına göre yıldız bir bölgedir, fakat A noktasına göre yıldız bölge değildir. Burada not etmek gerekir ki yıldız bölgeden bahsedildiği zaman, mutlaka sabit belirlenmiş bir noktadan bahsetmek lazımdır.

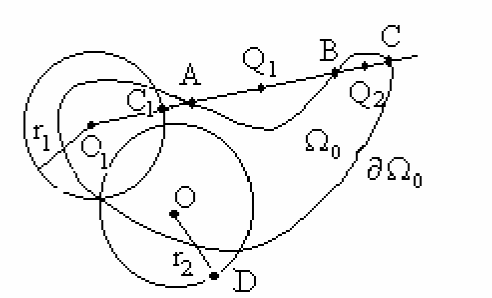
Fakat konveks bölge tanımı gözönünde bulundurulacak olursa, konveks bölge her noktasına göre yıldız bölgedir.



Şekil 1.3

1.17 Özellik : $\Omega_0 \subseteq C$ bölgesi O başlangıç noktasına göre yıldız bölge olsun. |z |=r çemberleri gözönüne alınsın. Bu çemberler üzerindeki noktaları, başlangıç noktasına birleştiren doğrular bölgenin sınırını tam bir noktada keser.

İspat : İspatı geometrik düşünceyle yapmak yerinde olacaktır. Ω_0 bölgesi O başlangıç noktasına göre yıldız bölge olsun. Başlangıç noktasını merkez kabul eden bir $z \in \Omega_0$ olmak üzere $|z| = r_2$ çemberi gözönüne alınsın. Şayet bu çember üzerindeki bir D noktasını baslangıç noktasına birleştiren doğru $\partial\Omega_0$ sınırını bir noktada keser. Eğer $|z| = r_1$ çemberi gözönüne alınırsa, çember üzerindeki bir C_1 noktasını O_1 başlangıç noktasına birleştiren doğru $\partial\Omega_0$ sınırını A ve B gibi iki noktada keser. Halbuki yıldız bölge tanımından dolayı O_1Q_1 doğrusu tamamiyle bölge içinde kalamaz. Bu da bir çelişkidir. (Şekil 1.4)



Şekil 1.4

Not : İspatta çelişkiye varabilmek için Ω_0 bölgesi O_1 noktasına göre yıldız bölge farzedilmiştir.

1.18 Özellik : Ω_0 bölgesi O başlangıç noktasına göre yıldız bölge olsun. A noktası bölgenin sınırını bir kez dolaştığı zaman OA nın argümanı daima aynı yönde 2π kadar değişir.

İspat : Özellik 1.17 den A noktasına çember üzerinde karşılık gelen nokta A' olsun. Bu halde Arg OA = Arg OA' olacağından, A' noktası çember üzerinde 2π kadar dolaştığı zaman argümanı 2π kadar değişir. O halde Arg OA da 2π kadar değişir.

2. YALINKAT FONKSİYONLAR

2.1 Tanım : Bir $f(z)$ fonksiyonu, genişletilmiş düzlemde bulunan, bir Ω_0 basit bağlantılı bölgesinde varolabilen bir kutup noktası dışında analitik ve $z_1, z_2 \in \Omega_0$ olmak üzere $z_1 \neq z_2$ için $f(z_1) \neq f(z_2)$ injektiflik koşulunu gerçeklerse, $f(z)$ fonksiyonuna Ω_0 bölgesinde "yalınkat" tır denir.

Ω_0 bölgesinde yalınkat olan bir $f(z)$ fonksiyonu, Ω_0 ın her alt bölgesinde de yalınkattır.

2.2 Özellik : Yalınkat iki fonksiyonun bileşke fonksiyonu da yalınkattır.

İspat : Önce, injektif iki fonksiyonun bileşke fonksiyonunun da injektif olduğu gösterilmelidir.

$f : \Omega_0 \to G$ injektif, $g : G \to H$ injektif olsun. Bu takdirde $gof : \Omega_0 \to H$ injektiftir.

Gerçekten ; $z_1, z_2 \in \Omega_0$ ise, $f(z)$ fonksiyonunun injektifliğinden; $z_1 \neq z_2 \Rightarrow$ $f(z_1) \neq f(z_2)$ dir.

Diğer taraftan $g(z)$ fonksiyonu G de injektif olduğundan, $f(z_1) \neq f(z_2)$ için $g(f(z_1)) \neq g(f(z_2))$ dir. Bu ise gof fonksiyonunun injektif olduğunu gösterir.

Diğer taraftan ispatın tamamlanması için, analitik iki fonksiyonun bileşke fonksiyonunun da analitik olduğununun ispatlanması lazımdır.

$f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları analitik iki fonksiyon olsun.

$$\lim_{z\to z_0}\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0}\cdot\frac{f(z)-f(z_0)}{f(z)-f(z_0)}\right]$$

$$=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)}:\frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}\right]$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)}.\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

(2.1)

bulunur. Diğer taraftan $w=f(z)$ dersek $w_0=f(z_0)$ olur. $f(z)$ nin sürekliliğinden $z\to z_0$ iken $w\to w_0$ olur ve $g(z)$ nin analitik olması nedeniyle

$$\lim_{w\to w_0}\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}=g'(w_0) \qquad (2.2)$$

dır. $f(z)$nin analitik olması nedeniyle;

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0) \qquad (2.3)$$

dır.
Bulunan bu sonuçlar (2.1) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\lim_{z\to z_0}\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0}=g'(w_0).f'(z_0)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.3 Özellik : $\frac{1}{f(z)}$ fonksiyonunun yalınkat olması için gerek ve yeter şart $f(z)$ nin yalınkat olmasıdır.

İspat : Gereklik : $\frac{1}{f(z)}$ fonksiyonu yalınkat olsun. Bu takdirde

$g(z)=\frac{1}{z}$ yalınkat fonksiyonu alınırsa, Özellik 2.2 den, $g\left(\frac{1}{f(z)}\right)$ fonksiyonu da yalınkattır. $g\left(\frac{1}{f(z)}\right)= f(z)$ fonksiyonu yalınkattır.

Yeterlik : $f(z)$ fonksiyonu yalınkat olsun. $g(z)=\frac{1}{z}$ yalınkat fonksiyonu alınırsa, Özellik 2.2 den $g(f(z))$ fonksiyonu da yalınkattır. $g(f(z))=\frac{1}{f(z)}$ fonksiyonu yalınkattır.

2.4 Tanım : Eğer bir $z_0 \in \mathrm{A}$ noktasının en az bir civarında z_0 noktasından başka A cümlesine ait hiçbir nokta bulunmazsa, z_0 noktasına A cümlesinin bir "izole noktası" denir.

2.5 Özellik : Analitik bir fonksiyonun bir noktanın civarında injektif olması için gerek ve yeter şart bu noktada sıfır olmayan bir türeve sahip olmasıdır. Bu ise bir Ω_0 bölgesinde analitik $f(z)$ fonksiyonunun yalınkat olması için $f'(z)\neq 0$ olması gerektiğini gösterir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

2.6 Özellik : z_0 noktası yalınkat $f(z)$ fonksiyonunun bir kutbu ise $\frac{1}{f(z)}$ fonksiyonu z_0 ın bir civarında yalınkattır.

İspat : z_0 noktası $f(z)$ yalınkat fonksiyonunun bir kutbu olduğundan $\frac{1}{f(z_0)}=0$ dır. O halde z_0 noktası $\frac{1}{f(z)}$ fonksiyonunun basit bir sıfırıdır ve z_0 ın bir civarında injektiftir. Dolayısıyla z_0 ın bir civarında yalınkattır.

2.7 Özellik : $C : z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ olmak üzere Ω_0 da düzgün bir Jordan yayı ise (kırık olmayan, $z'(t) \neq 0$ ve $z(t)$ sürekli) $f(C)$ de $f(\Omega_0)$ da düzgün bir Jordan yayıdır. $z_0 = z(t_0)$ olmak üzere $f(z_0)$ noktasındaki $f(C)$ nin teğeti ile pozitif reel eksen arasındaki açı

$$Arg\frac{df}{dt}(z_0) = Arg\left(\frac{df}{dz}(z_0).\frac{dz}{dt}(t_0)\right) = Argf'(z_0) + Argz'(t_0)$$

ile belirtilir. ($z_0 = \infty$ ya da $f(z_0) = \infty$ durumları hariç) Bu ise iki eğri aynı bir z_0 noktasından geçtikleri zaman, bu iki eğri arasındaki açının, görüntü eğrileri arasındaki açıya eşit olduğunu gösterir. O halde yalınkat fonksiyonlar birer konform homeomorfizmalardır.

İspat : $C_1 : z(t)$, $C_2 : z(s)$ iki eğri olsun. Öyleki $\alpha \leq t \leq \beta$, $\alpha_1 \leq s \leq \beta_1$ olsun. Üstelik $z_0 = z(t_0) = z(s_0)$ olsun. Yani C_1 ve C_2 eğrileri aynı bir z_0 noktasından geçsinler. $w = f(z)$ yalınkat olsun.

$w'(t_0) = f'(z_0).z'(t_0) \neq 0$ dır. ($f(C_1)$ düzgün Jordan yayı olduğundan)

$w'(s_0) = f'(z_0).z'(s_0) \neq 0$ dır. ($f(C_2)$ düzgün Jordan yayı olduğundan)

$$\left.\begin{aligned} Argw'_t(t_0) &= Argf'(z_0).z'_t(t_0) = Argf'(z_0) + Argz'_t(t_0) \\ Argw'_s(s_0) &= Argf'(z_0).z'_s(s_0) = Argf'(z_0) + Argz'_s(s_0) \end{aligned}\right\}$$

$$Argw'_t(t_0) - Argw'_s(s_0) = Argf'(z_0).z'_t(t_0) - Argf'(z_0).z'_s(s_0) = Argz'_t(t_0) - Argz'_s(s_0)$$
$$\Rightarrow Argw'_t(t_0) - Argw'_s(s_0) = Argz'_t(t_0) - Argz'_s(s_0)$$

bulunur ki bu ise açıların korunduğunu gösterir.

2.8 Özellik : $A \subset C$, Ω_0 ın kompakt bir alt cümlesi olsun. Üstelik yalınkat f nin kutup noktasını ihtiva etmesin. Bu takdirde resminin Öklidyen alanı;

Alan $f(A) = \iint_A \left|f'(z)\right|^2 .d\Omega_0$

dır.

İspat : f(z), Ω_0 da yalınkat olduğundan analitiktir. Dolayısıyla $f(z)$, Cauchy-Riemann denklemlerini gerçekler. Yani;

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{array}$$

dir. Dolayısıyla ;

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\left|f'(z)\right|^2 = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2 = (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}.\frac{\partial u}{\partial y} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} \qquad (2.4)$$

bağıntısı yazılabilir. Diğer taraftan;

$$\text{Alan } f(A) = \iint\limits_{f(A)} du.dv \qquad (2.5)$$

şeklindedir. Fakat çok katlı integrallerde değişken dönüşümü kuralı gözönünde bulundurulursa

$$\left.\begin{array}{l} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

eşitliklerinden dolayı

$$du.dv = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dx.dy \qquad (2.6)$$

dir. O halde (2.4) ve (2.6) bağıntıları karşılaştırılırsa;

$$du.dv = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dx.dy = \left| f'(z) \right|^2 .\ dx.dy \tag{2.7}$$

eşitliği bulunur.

$$dx.dy = d\Omega_0$$

alan elemanı olarak yazılırsa ve (2.7) bağıntısı (2.5) bağıntısında yerine konulursa;

$$\text{Alan } f(A) = \iint_{f(A)} du.dv = \iint_A \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} dx.dy = \iint_A \left| f'(z) \right|^2 dx.dy = \iint_A \left| f'(z) \right|^2 d\Omega_0$$

bulunur. Yani neticede

$$\text{Alan } f(A) = \iint_A \left| f'(z) \right|^2 d\Omega_0$$

eşitliği bulunur.

3. YALINKAT FONKSİYONLAR İÇİN KLASİK DİSTORSİYON TEOREMLERİ

3.1 Gösterilimler :

$D = \{z \mid |z| < 1\}$ birim dairenin içi

$\Delta = \{z \mid |z| > 1\}$ birim dairenin dışı

$\partial D = \partial\Delta = \{z \mid |z| = 1\}$ birim dairenin sınırı

3.2 Tanım : $S = \{ f(z) \mid f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \ , \ f'(0) = 1, \ f(0) = 0, \ f(z) \ \ D$ de yalınkat $\}$ cümlesi S sınıfı olarak adlandırılır.

3.3 Tanım : $\sum = \{ g(z) \mid g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots, \quad g(z) \ \Delta$ da yalınkat $\}$ cümlesi $\sum$ sınıfı olarak adlandırılır ve E=E(g)=C $\setminus$g(Δ) da $g(z) \in \sum$ fonksiyonuyla yapılan tasvirde, resim bölgesinin kompakt tamamlayıcısıdır. Ayrıca b_0 katsayısına E(g) nin " konform merkezi " denir ve

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) d\theta$$

ifadesi ile verilir. $b_0 = 0$ alınarak $\sum$ sınıfından elde edilen sınıf da $\sum_0$ sınıfı olarak adlandırılır.

3.4 Teorem (Alan Teoremi **) :** $g \in \sum$ alalım. Buradan

$$Alan E = \pi(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2)$$

dir.

$$\pi(1-\sum_{n=1}^{\infty} n\left|b_n\right|^2) \geq 0$$

olduğundan

$$1-\sum_{n=1}^{\infty} n\left|b_n\right|^2 \geq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\left|b_n\right|^2 \leq 1$$

olur.

3.5 Sonuç : $g \in \sum$ alınsın. Buradan $|b_1| \leq 1$ dir. Bu eşitsizlikte eşitlik ancak ve yalnız $g(z) = z + b_0 + e^{2i\beta} z^{-1}$ ($b_0 \in \mathrm{C}, \beta \in \mathrm{R}$) olması ile mümkündür.

Ancak burada belirtilmesi gerekir ki, verilen bir eşitsizlikte eşitliği gerçekleyen fonksiyona "ekstremal fonksiyon" adı verilir.

İspat : Alan teoreminde $\sum_{n=1}^{\infty} n\left|b_n\right|^2 \leq 1$ ifadesinde $b_2 = ... = b_n = ... = 0$ alınırsa $|b_1| \leq 1$ bulunur. O halde $g \in \sum$ fonksiyonu $g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1}$ haline gelir. Fakat $|b_1| = 1$ ise $b_1 = e^{2i\beta}$ alınabilir. Zira $|b_1| = \left|e^{2i\beta}\right| = 1$ dir. Yine alan teoremi kullanılırsa $|b_1| = 1$ koşulu altında $g(z)$ fonksiyonu

$$g(z) = z + b_0 + e^{2i\beta} z^{-1}$$

haline gelir. Bu fonksiyon verilen bir eşitsizlikte, eşitliği gerçeklediği için ekstremal fonksiyondur. Bu fonksiyon $|z| > 1$ i gözönüne alınan düzlemde reel eksenle β açısı yapan doğrusal kesit üzerine resmeder.

Gerçekten;

$$g(z) = z + b_0 + e^{2i\beta} z^{-1}$$

fonksiyonunda b_0 sabiti şimdilik ihmal edilebilir. Zira bu fonksiyonla yapılan tasvirde, b_0 sabiti sadece bir paralel kayma verecektir. Dolayısıyla

$$g(z) = z + e^{2i\beta} z^{-1}$$

fonksiyonu incelenirse:

$z = e^{i\theta}$ alınsın.

$$g(e^{i\theta}) = e^{i\theta} + e^{2i\beta}\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta} + e^{2i\beta}.e^{-i\theta} = e^{i\theta} + e^{2i\beta - i\theta}$$

$$= e^{i\beta}(e^{i\theta}.e^{-i\beta} + e^{i\beta}.e^{-i\theta}) = 2e^{i\beta}(\frac{e^{i(\theta-\beta)} + e^{-i(\theta-\beta)}}{2})$$

$$= 2e^{i\beta}Cos(\theta - \beta) = e^{i\beta}.\underbrace{2.Cos(\theta - \beta)}_{-2\leq 2Cos(\theta-\beta)\leq 2}$$

olduğundan $|z| > 1$ bölgesini reel eksenle β açısı yapan doğrusal kesit üzerine resmeder. b_0 kadar kayma verilirse, asıl sonuç elde edilir.

3.6 Teorem : Eğer $g \in \sum$ ve $w \in E$ ise o halde

$$g^*(z) = \sqrt{g(z^2) - w} = z + \frac{1}{2}(b_0 - w)z^{-1} + ... \qquad (\ |z| > 1\ )$$

fonksiyonu $\sum$ da tek ve yalınkat bir fonksiyondur.

Eğer $f \in S$ ise $\sqrt{f(z^2)}$ S de tek ve yalınkat bir fonksiyondur.

İspat : $g \in \sum$ olduğundan dolayı ; ($|z| > 1$)

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.z^{-n} \Rightarrow g(z^2) - w = z^2 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.z^{-2n} - w \Rightarrow$$

$$g(z^2) - w = z^2 - w + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.z^{-2n} \Rightarrow$$

$$z^{-2}(g(z^2) - w) = 1 - wz^{-2} + z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n.z^{-2n}$$

$$= 1 - wz^{-2} + z^{-2}(b_0 + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-4} + b_3 z^{-6} + ...)$$

$$= 1 - wz^{-2} + b_0 z^{-2} + b_1 z^{-4} + b_2 z^{-6} + b_3 z^{-8} + ...$$

$$= 1 + (b_0 - w)z^{-2} + b_1 z^{-4} + b_2 z^{-6} + b_3 z^{-8} + ...$$

fonksiyonu Δ da analitik ve çift bir fonksiyondur.

Gerçekten açılımdan dolayı analitiktir, Δ da daima sıfırdan farklıdır ve çift fonksiyon oluşu da

$$F(z) = z^{-2}(g(z^2) - w) \Rightarrow$$

$$F(-z) = \frac{1}{(-z)^2}(g((-z)^2) - w) = \frac{1}{z^2}(g(z^2) - w) = z^{-2}(g(z^2) - w) = F(z)$$

$F(-z) = F(z)$ olduğundan dolayı iddianın doğruluğu gerçeklenmiş olur.

Şimdi de

$g^*(z) = z\left[\ z^{-2}(g(z^2) - w)\ \right]^{\frac{1}{2}}$ fonksiyonu düşünülsün. Bu fonksiyon

$1 < |z| < \infty$ da analitik ve ∞ da

$$g^*(z) = z\left[\ z^{-2}(g(z^2) - w)\ \right]^{\frac{1}{2}} = z + \frac{1}{2}(b_0 - w)z^{-1} + \ldots \qquad (\ |z| > 1\ )$$

açılımına sahiptir.

Gerçekten;

$$\left[\ z^{-2}(g(z^2) - w)\ \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\ 1 + (b_0 - w)z^{-2} + b_1 z^{-4} + b_2 z^{-6} + b_3 z^{-8} + \ldots\ \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (3.1)$$

olduğu ispatlanmıştı. Bu ifadede $z^{-2} = \varepsilon$ denilirse ikinci taraf

$$1 + (b_0 - w)\varepsilon + b_1\varepsilon^2 + b_2\varepsilon^3 + b_3\varepsilon^4 + \ldots = (1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3 + \ldots)^2$$

$$= 1 + c_1^{\,2}\varepsilon^2 + c_2^{\,2}\varepsilon^4 + c_3^{\,2}\varepsilon^6 + \ldots + 2c_1\varepsilon + 2c_2\varepsilon^2 + 2c_3\varepsilon^3 + \ldots$$

$$+ 2c_1c_2\varepsilon^3 + 2c_1c_3\varepsilon^4 + \ldots$$

$$= 1 + 2c_1\varepsilon + (c_1^{\,2} + 2c_2)\varepsilon^2 + \ldots$$

katsayıları karşılaştırılırsa;

$$b_0 - w = 2c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}(b_0 - w)$$

olur. Bu ifadeler (3.1) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\left[\ z^{-2}(g(z^2) - w)\ \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\ (1 + \frac{1}{2}(b_0 - w)z^{-2} + ...)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(b_0 - w)z^{-2} + ...$$

olur. Bulunan eşitlik de z ile çarpılırsa;

$$g^*(z) = z\left[\ z^{-2}(g(z^2) - w)\ \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g(z^2) - w} = z + \frac{1}{2}(b_0 - w)z^{-1} + ...$$

bulunur ki bu da iddianın doğruluğunu gösterir.

Bu fonksiyon tektir. Gerçekten;

$$g^*(z) = z\left[\ z^{-2}(g(z^2) - w)\ \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$g^*(-z) = (-z)\left[(-z)^{-2}(g((-z)^2) - w)\ \right]^{\frac{1}{2}} = -g^*(z)$$

olduğundan bu da iddianın doğruluğunu gösterir.

Şimdi fonksiyonun yalınkat olduğu gösterilsin: $1 < |z| < \infty$ bölgesi fonksiyonun hiçbir singülaritesini bulundurmaz. Dolayısıyla bu fonksiyon $|z| > 1$ de analitiktir.

İnjektiftir. Gerçekten;

$$g^*(z_1) = g^*(z_2) \Rightarrow z_1\sqrt{{z_1}^{-2}(g({z_1}^2) - w)} = z_2\sqrt{{z_2}^{-2}(g({z_2}^2) - w)}$$

$$\Rightarrow {z_1}^2({z_1}^{-2}(g({z_1}^2) - w)) = {z_2}^2({z_2}^{-2}(g({z_2}^2) - w))$$

$$\Rightarrow g({z_1}^2) - w = g({z_2}^2) - w$$

$$\Rightarrow g({z_1}^2) = g({z_2}^2)$$

ve $g(z)$ yalınkat olduğundan ${z_1}^2 = {z_2}^2 \Rightarrow z_1 = \mp z_2$ bulunur. Fakat

$$g^*(z_1) \neq g^*(-z_2) \Rightarrow z_1 \neq -z_2$$

dir. O halde $z_1 = z_2$ bulunur ki bu da iddianın doğruluğunu gösterir.

Buraya kadar bulunan neticeler toplanırsa $g^*(z)=\sqrt{g(z^2)-w}$ fonksiyonu $\sum$ da tek ve yalınkat bir fonksiyondur.

Şimdi ise ; $f\in S$ olsun. Bu halde $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+...$ ($|z|<1$) dir. $f(z)$, $|z|<1$de yalınkattır.

$$f(z^2)=z^2+a_2z^4+a_3z^6+... \Rightarrow \sqrt{f(z^2)}=\sqrt{z^2+a_2z^4+a_3z^6+...}$$

fonksiyonu S de tek fonksiyondur. Gerçekten,

$$\sqrt{f(z^2)}=\sqrt{z^2+a_2z^4+a_3z^6+...}$$

$$=\sqrt{z^2(1+a_2z^2+a_3z^4+...)}=z\sqrt{1+a_2z^2+a_3z^4+...}$$

$1+a_2z^2+a_3z^4+...$

ifadesi

$1+\beta_1z+\beta_2z^2+...$

ifadesinin karesi olsun.

$$1+a_2z^2+a_3z^4+...=(1+\beta_1z+\beta_2z^2+...)^2$$

$$=1+\beta_1^{\,2}z^2+\beta_2^{\,2}z^4+...+2\beta_1z+2\beta_2z^2+...+2\beta_1\beta_2z^3+...$$

$$=1+2\beta_1z+(\beta_1^{\,2}+2\beta_2)z^2+2\beta_1\beta_2z^3+...$$

Katsayılar eşitlenirse ;

$$0=2\beta_1\Rightarrow\beta_1=0$$

$$a_2=\beta_1^{\,2}+2\beta_2\Rightarrow\beta_2=\frac{1}{2}a_2$$

$$F(z)=\sqrt{f(z^2)}=z\sqrt{1+a_2z^2+...}=z\sqrt{(1+\frac{1}{2}a_2z^2+...)^2}=z+\frac{1}{2}a_2z^3+...$$

$F(z)=z+\frac{1}{2}a_2z^3+...\Rightarrow F(-z)=-F(z)$ olduğundan tek fonksiyondur. $F(0)=0$, $F'(0)=1$ dir.

$$F(z_1)=\sqrt{f(z_1{}^2)} \quad , \quad F(z_2)=\sqrt{f(z_2{}^2)}$$

$$\Rightarrow F(z_1)=F(z_2) \Rightarrow \sqrt{f(z_1{}^2)}=\sqrt{f(z_2{}^2)}$$

$$\Rightarrow f(z_1{}^2)=f(z_2{}^2)$$

olup $f(z)$ yalınkat olduğundan injektiftir.$\Rightarrow z_1=\mp z_2$ fakat $F(z)$ tek olduğundan $z_1\neq -z_2$ dir. O halde $z_1=z_2$ bulunur ki bu da $F(z)$ nin D de injektifliğini gösterir. $F(z)$ nin $|z|<1$ de analitik olduğu açıktır.

Buraya kadar bulunan neticeler toplanırsa da

$F(z)=\sqrt{f(z^2)}$ S de tek ve yalınkat bir fonksiyondur.

3.7 Lemma : $g\in\sum$ alınsın. Buradan $E\subset\{|w-b_0|\leq 2\}$ dir. Eşitlik ancak ve yalnız E dört birim uzunluğunda bir parça ise gerçeklenir.

İspat : Sonuç 3.5 deki durum $g^*(z)=\sqrt{g(z^2)-w}=z+\frac{1}{2}(b_0-w)z^{-1}+...$ $\sum$ da tek bir fonksiyon olduğundan $w\in E$ için bu fonksiyona uygulanırsa;

$$\left|\frac{1}{2}(b_0-w)\right|\leq 1\Rightarrow\frac{1}{2}|b_0-w|\leq 1\Rightarrow|b_0-w|\leq 2$$

bulunur.

Eşitlik durumu incelenirse:

Yine Sonuç 3.5 deki eşitlik durum buraya uygulanırsa

$$g(z)=z+\frac{1}{2}(b_0-w)z^{-1}$$

bulunur. Eşitlik durumu yazılırsa

$$\left|\frac{1}{2}(b_0 - w)\right| = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(b_0 - w) = -e^{i\beta}$$

alınabilir. Bu halde fonksiyon

$$g(z) = z - e^{i\beta} z^{-1}$$

haline gelir.
Fakat diğer taraftan

$$\left|\frac{1}{2}(b_0 - w)\right| = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(b_0 - w) = -e^{i\beta} \Rightarrow b_0 - w = -2e^{i\beta} \Rightarrow b_0 = w - 2e^{i\beta}$$

bulunur. Bu b_0 sabiti de Sonuç 3.5 deki eşitlik halinde bulunan fonksiyona uygulanırsa;

$$g(z) = z + b_0 + e^{2i\beta} z^{-1} \Rightarrow g(z) = z + (w - 2e^{i\beta}) + e^{2i\beta} z^{-1}$$

bulunur. Burada $b_0 = w - 2e^{i\beta}$ sabiti gözönüne alınmazsa ,

$$g(z) = z + e^{2i\beta} z^{-1}$$

bulunur. $z = e^{i\theta}$ denilirse;

$$g(e^{i\theta}) = e^{i\theta} + e^{2i\beta}.e^{-i\theta} = e^{i\theta} + e^{i\beta}.e^{i\beta}.e^{-i\theta}$$

$$= e^{i\beta}(e^{i\theta}.e^{-i\beta} + e^{i\beta}.e^{-i\theta}) = 2e^{i\beta}\left(\frac{e^{i(\theta-\beta)} + e^{-i(\theta-\beta)}}{2}\right)$$

$$= 2e^{i\beta}Cos(\theta-\beta) = e^{i\beta}.\underbrace{2.Cos(\theta-\beta)}_{-2\leq 2Cos(\theta-\beta)\leq 2}$$

eşitliğinden E dört birim uzunluğunda bir parça ise gerçeklendiğini gösterir.

3.8 Teorem : $f \in S$ alınsın. Buradan $|a_2| \le 2$ ve $|a_2{}^2 - a_3| \le 1$ dir. $|a_2| = 2$ olması ancak ve yalnız f(z) fonksiyonunun, Koebe Fonksiyonunun bir rotasyonu olması ile mümkündür. Dahası f(z) tek fonksiyonsa, buradan $|a_3| \le 1$dir. Eşitlik ancak ve yalnız

$$f(z) = z(1 - e^{2i\beta} z^2)^{-1}$$

olması ile mümkündür.

İspat : $f \in S$ olduğundan, S sınıfının tanımı gereği $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ dir.

$$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{1}{2} a_2 z^3 + ...$$

olduğundan, bu fonksiyon da S sınıfına aittir. Dolayısıyla

$$g(z) = \frac{1}{F(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\frac{1}{z} + \frac{1}{2} a_2 \frac{1}{z^3} + ...} = \frac{1}{\frac{1}{z}(1 + \frac{1}{2} a_2 z^{-2} + ...)} = \frac{1}{\frac{1}{z}} . \frac{1}{(1 + \frac{1}{2} a_2 z^{-2} + ...)}$$

$$= z(1 - (\frac{1}{2} a_2 z^{-2} + ...) + (\frac{1}{2} a_2 z^{-2} + ...)^2 - ...) = z - \frac{1}{2} a_2 z^{-1} + ...$$

fonksiyonu da $\sum$ sınıfına ait olacaktır. O halde $|b_1| \le 1$ eşitsizliği bu fonksiyona uygulanırsa

$$\left|\frac{1}{2} a_2\right| \le 1 \Rightarrow |a_2| \le 2$$

bulunur. Bu da istenen ifadedir.

Diğer taraftan $f(z) = z + a_2 z^2 + ... \in$ S ise

$$G(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} + ...} = \frac{1}{\frac{1}{z}(1 + a_2 \frac{1}{z} + ...)} = \frac{1}{\frac{1}{z}} . \frac{1}{1 + a_2 \frac{1}{z} + a_3 \frac{1}{z^2} + ...}$$

$$= z.\frac{1}{1+(a_2\frac{1}{z}+a_3\frac{1}{z^2}+...)} = z(1-a_2\frac{1}{z}-a_3\frac{1}{z^2}+...+a_2{}^2\frac{1}{z^2}+a_3{}^2\frac{1}{z^4}+...)$$

$$= z-a_2-a_3\frac{1}{z}-...+a_2{}^2\frac{1}{z}+... = z-a_2+(a_2{}^2-a_3)z^{-1}+...$$

fonksiyonu da $\sum$ sınıfına aittir. Bu fonksiyona da alan teoreminin sonucu $|b_1| \le 1$ eşitsizliği uygulanırsa ; $|a_2{}^2 - a_3| \le 1$ bulunur. Bu da istenen ifadedir.

Şimdi $|a_2| = 2$ olması hali ele alınsın. Bunun için aşağıdaki durumlar gözönünde bulundurulsun:

" Sonuç 3.5 : g$\in\sum$ alınsın. Buradan $|b_1| \le 1$ dir. Bu eşitsizlikte eşitlik ancak ve yalnız $g(z) = z + b_0 + e^{2i\beta} z^{-1}$ ($b_0 \in$ C, β $\in$ R) olması ile mümkündür.”

" Teorem 3.6 : Eğer $g \in \sum$ ve $w \in E$ ise o halde

$$g^*(z) = \sqrt{g(z^2) - w} = z + \frac{1}{2}(b_0 - w)z^{-1} + ... \qquad (|z| > 1)$$

fonksiyonu $\sum$ da tek ve yalınkat bir fonksiyondur. Eğer $f \in S$ ise $\sqrt{f(z^2)}$ S de tek ve yalınkat bir fonksiyondur."

" Lemma 3.7 : $g \in\sum$ alalım. E $\subset\{|w - b_0| \le 2\}$ dir. Eşitlik ancak ve yalnız E nin dört birim uzunluğunda bir parça olması halinde gerçeklenir.
Bu ifadelerin ışığı altında ;

$$f \in S \quad \Rightarrow \quad f(z) = z + a_2 z^2 + ... \quad \Rightarrow \quad F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{1}{2}a_2 z^3 + ... \in S$$ ve tek

fonksiyondu.

$$g(z) = \frac{1}{F(\frac{1}{z})} = z - \frac{1}{2}a_2 z^{-1} + ... \in \sum \text{ dır ve } \left|\frac{1}{2}a_2\right| \le 1 \Rightarrow |a_2| \le 2 \text{ dir.}$$

Eşitlik ancak ve yalnız ispatlandı ki $g(z)=z-\frac{1}{2}a_2 z^{-1}$ olması ile mümkündür. O halde

$|a_2|=|b_0-w|\Rightarrow|w-b_0|=2\Rightarrow w-b_0=2e^{i\beta}$ alınabilir. Buradan $b_0=w-2e^{i\beta}$ ($g(z)=z+b_0+b_1z^{-1}$ fonksiyonuyla karşılaştırarak) dır. Yukarıdaki sonuç kullanılırsa ;

$$g^*(z)=z+b_0+e^{2i\beta}z^{-1}\Rightarrow g^*(z)=z+(w-2e^{i\beta})+e^{2i\beta}z^{-1}$$

bulunur. Fakat $w\in$E olduğundan $w=0$ alınabilir. O halde

$$g^*(z)=z-2e^{i\beta}+e^{2i\beta}z^{-1}=z(1-\frac{2}{z}e^{i\beta}+e^{2i\beta}\frac{1}{z^2})=z(1-e^{i\beta}\frac{1}{z})^2$$

bulunur.

$g^*(z)\in\sum\Rightarrow\dfrac{1}{g^*(\frac{1}{z})}=\dfrac{1}{\frac{1}{z}(1-e^{i\beta}z)^2}=\dfrac{z}{(1-e^{i\beta}z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{i(n-1)\beta}.z^n\in S$ dir. Bu da tanım gereği Koebe Fonksiyonunun rotasyonudur.

$f\in S$ tek ise $|a_3|\le 1$ olduğunun ispatı:

$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\Rightarrow\sqrt{f(z^2)}=z+\frac{1}{2}a_2z^3+\ldots$, S de tek fonksiyondur

(Bu daha önce ispatlandı) ve ikinci teriminin katsayısı sıfırdır. O halde bu ifade de $|a_2{}^2-a_3|\le 1$ eşitsizliğinde kullanılarak $a_2=0$ alınırsa $|0-a_3|\le 1\ \Rightarrow\ |a_3|\le 1$ bulunur. Bir başka ispatla:

$|a_3|=\left|\frac{1}{2}a_2\right|\le 1\ \Rightarrow\ |a_3|\le 1$ bulunur.

$$|a_3|=1$$

eşitliği ancak ve yalnız

$$f(z)=z(1-e^{2i\beta}.z^2)^{-1}$$

olması ile mümkündür.

Gerçekten;

$$f(z) = z.\frac{1}{1-e^{2i\beta}z^2} = z.\left[1+e^{2i\beta}z^2+e^{4i\beta}z^4+...\right] = z+e^{2i\beta}z^3+e^{4i\beta}z^5+...$$

$|a_3| = |e^{2i\beta}| = 1$ dır.

3.9 Hazırlık : $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + ... \in S$ alınsın.

$$f'(z) = 1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + ... \quad \Rightarrow \; f'(0) = 1$$

$$f''(z) = 2a_2 + 6a_3z + ... \quad \Rightarrow \; f''(0) = 2a_2$$

$f''(0) = 2a_2 \;\Rightarrow\; |f''(0)| = 2|a_2| \;\Rightarrow\; \dfrac{|f''(0)|}{2} = |a_2| \le 2 \;\Rightarrow\; \dfrac{|f''(0)|}{2} \le 2$ bulunur.

Bu düşüncenin sıfır noktasından herhangi bir $z_0 \in D$ noktasına taşınması halinde

$$f\left(\frac{\varepsilon + z_0}{1+\varepsilon\overline{z_0}}\right) = f(z_0) + (1-|z_0|^2)f'(z_0)\varepsilon + \frac{1}{2}\left[(1-|z_0|^2)^2 f''(z_0) - 2\overline{z_0}(1-|z_0|^2)f'(z_0)\right]\varepsilon^2 + ...$$

fonksiyonu da D de analitik ve yalınkattır. Fakat S sınıfına ait değildir. Zira normalize edilmemiştir. O halde bu fonksiyonun S sınıfına ait olması için normalize edilmesi gerekir. Bunun için de;

$$h(\varepsilon) = \frac{f\left(\dfrac{\varepsilon + z_0}{1+\varepsilon\overline{z_0}}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)} = \varepsilon + \left[\frac{1}{2}(1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \overline{z_0}\right]\varepsilon^2 + ...$$

fonksiyonu $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$ koşullarını gerçeklediğinden S sınıfına aittir. $h(\varepsilon)$ fonksiyonu z_0 noktasına göre $f(z)$ fonksiyonunun Koebe Transformasyonu olarak adlandırılır.

3.10 Lemma : Eğer $f \in S$ ise buradan

$$\left| z.\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|} \right| \le \frac{4|z|}{1-|z|^2} \qquad (\;|z| < 1\;)$$

dir.

İspat : Yukarıdaki hazırlıktan yola çıkılarak,

$$h(\varepsilon)=\frac{f\left(\dfrac{\varepsilon+z_0}{1+\varepsilon\overline{z_0}}\right)-f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}=\varepsilon+\left[\frac{1}{2}(1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}-\overline{z_0}\right]\varepsilon^2+\ldots$$

fonksiyonu S sınıfına ait olduğundan ikinci terimin katsayısı 2 den küçüktür.

$$\left|\frac{1}{2}(1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}-\overline{z_0}\right|\le 2$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki tarafı

$$\frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2}=\left|\frac{2z_0}{1-|z_0|^2}\right|>0$$

ile çarpılırsa;

$$\left|\frac{1}{2}(1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}-\overline{z_0}\right|.\left|\frac{2z_0}{1-|z_0|^2}\right|\le\frac{4|z_0|}{1-|z_0|^2}$$

$$\Rightarrow\left|\left(\frac{1}{2}(1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}-\overline{z_0}\right)\left(\frac{2z_0}{1-|z_0|^2}\right)\right|\le\frac{4|z_0|}{1-|z_0|^2}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{1}{2}(1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}.\frac{2z_0}{1-|z_0|^2}-\overline{z_0}\frac{2z_0}{1-|z_0|^2}\right|\le\frac{4|z_0|}{1-|z_0|^2}$$

$$\Rightarrow\left|z_0\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}-\frac{2|z_0|^2}{1-|z_0|^2}\right|\le\frac{4|z_0|}{1-|z_0|^2}$$

bulunur. Bu ifadede z_0 yerine z yazılırsa;

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right|\le\frac{4|z|}{1-|z|^2}\qquad(\ |z|<1\ )$$

elde edilir.

3.11 Teorem ($\frac{1}{4}$ Distorsiyon Teoremi) : $w = f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \in S$ fonksiyonunun tasvir bölgesi dışındaki noktalarının $w = 0$ noktasına olan uzaklıkları $\frac{1}{4}$ den küçük olamaz.

İspat : c noktası $f(z)$ fonksiyonunun birim dairesinin tasvir bölgesi dışında bir nokta olsun.

$$\frac{cf(z)}{c - f(z)} = z + (a_2 + \frac{1}{c})z^2 + \ldots$$

fonksiyonu da S sınıfına aittir. İkinci terimin katsayısının modülü 2 den küçük olacağına göre

$$\left| a_2 + \frac{1}{c} \right| \leq 2$$

dir. Diğer taraftan

$$|a_2| \leq 2$$

dir ve

$$\left|\frac{1}{c}\right| = \left|\frac{1}{c} + a_2 - a_2\right| \leq \left|\frac{1}{c} + a_2\right| + |-a_2| = \left|\frac{1}{c} + a_2\right| + |a_2| \leq 2 + 2 \Rightarrow$$

$$\left|\frac{1}{c}\right| \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{|c|} \leq 4 \Rightarrow |c| \geq \frac{1}{4}$$

bulunur ki bu da iddianın doğruluğunu gösterir.

3.12 Teorem : α ve β, D nin içinde $f(z) \in S$ fonksiyonunun alamadığı herhangi iki değer olsun. Bu halde

$$F(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{\alpha}}$$

fonksiyonu da D de yalınkat olup

$$\frac{\beta}{1-\frac{\beta}{\alpha}}$$

değerini alamaz.

İspat : $f(z)$ D de yalınkat olduğundan ve α değerini alamadığından $\frac{f(z)}{\alpha} \neq 1$ dir.

Dolayısıyla $1-\frac{f(z)}{\alpha} \neq 0$ dır. O halde $F(z) = \frac{f(z)}{1-\frac{f(z)}{\alpha}}$ fonksiyonu D de

analitiktir.

$$F(z_1) = F(z_2) \Rightarrow \frac{f(z_1)}{1-\frac{f(z_1)}{\alpha}} = \frac{f(z_2)}{1-\frac{f(z_2)}{\alpha}} \Rightarrow \quad f(z_1) = f(z_2)$$

$f(z)$, D de yalınkat olduğundan $z_1 = z_2$ olur. O halde

$F(z) = \frac{f(z)}{1-\frac{f(z)}{\alpha}}$ fonksiyonu D de injektiftir. Bununla $F(z)$ fonksiyonunun D de

yalınkat olduğu ispatlanmış olur.

$$\frac{\beta}{1-\frac{\beta}{\alpha}}$$

sayısının tersinin modülü düşünülsün:

$$\left|\frac{1-\frac{\beta}{\alpha}}{\beta}\right| = \left|\frac{1}{\beta} - \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\beta}\right| = \left|\frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{\beta}\right| = \left|\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right|$$

bulunur. Fakat bir önceki teoremden dolayı,

$$\left|\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right| \leq 4$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını verir.

3.13 Teorem : $f \in S$ ise

(i) $\dfrac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \dfrac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$

(ii) $\dfrac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \dfrac{|z|}{(1-|z|)^2}$

(iii) $\dfrac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left| z\dfrac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \dfrac{1+|z|}{1-|z|}$

dir. Bu eşitsizliklerde eşitlik ancak ve yalnız $f(z)$, Koebe Fonksiyonunun uygun bir rotasyonu ise gerçeklenir.

İspat : Lemma 3.10 da ispatlandı ki;

$$\left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2} \tag{3.2}$$

dir. Diğer taraftan bir kompleks sayının reel kısmı ile modülü arsındaki $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$ bağıntısından hareket edilirse, (3.2) bağıntısı;

$$-\frac{4|z|}{1-|z|^2} \leq \operatorname{Re}\left\{ z.\frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$\Rightarrow -\frac{4|z|}{1-|z|^2} + \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \leq \operatorname{Re}\left\{ z.\frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2} + \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}$$

$$\frac{2|z|^2 - 4|z|}{1-|z|^2} \leq \operatorname{Re}\left\{ z.\frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} \leq \frac{2|z|^2 + 4|z|}{1-|z|^2} \tag{3.3}$$

yazılabilir. Diğer taraftan ;

$$\mathrm{Re}\left\{z.\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}=\frac{\partial\log|f'(z)|}{\partial\log z}$$

$$z=\rho e^{i\theta}\Rightarrow dz=e^{i\theta}d\rho\Rightarrow\ \frac{dz}{d\rho}=e^{i\theta}$$

$$\log\rho e^{i\theta}=t\Rightarrow\frac{e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}}d\rho=dt\Rightarrow\ \frac{d\rho}{dt}=\rho$$

olduğundan

$$\mathrm{Re}\left\{z.\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}=\frac{\partial\log|f'(z)|}{\partial\log z}=\frac{\partial\log|f'(z)|}{\partial\rho}.\frac{\partial\rho}{\partial t}=\rho.\frac{\partial\log|f'(z)|}{\partial\rho}$$

$$=\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\log|f'(z)|$$

bulunur. Bunlar (3.3) eşitsizliğinde yerine yazılırsa, (3.3) eşitsizliği;

$$\frac{2\rho^2-4\rho}{1-\rho^2}\le\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\log|f'(z)|\le\frac{2\rho^2+4\rho}{1-\rho^2}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\Rightarrow\frac{2\rho-4}{1-\rho^2}\le\frac{\partial}{\partial\rho}\log|f'(z)|\le\frac{2\rho+4}{1-\rho^2}$$

Bu ifade 0 dan ρ ya kadar integre edilirse;

$$\int_0^{\rho}\frac{2\rho-4}{1-\rho^2}d\rho\le\int_0^{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\log|f'(z)|d\rho\le\int_0^{\rho}\frac{2\rho+4}{1-\rho^2}d\rho$$

$$\Rightarrow\log\frac{1-\rho}{(1+\rho)^3}\le\log|f'(z)|\le\log\frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}$$

$$\Rightarrow\frac{1-\rho}{(1+\rho)^3}\le|f'(z)|\le\frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}\qquad,\quad|z|=\rho$$

olduğundan

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

bulunur ki, bu da (i) eşitsizliğidir.

(i) nin sağ tarafı , z ile orijini birleştiren doğru boyunca integre edilirse;

$$|f(z)| = \left| \int_0^{|z|} f'(z)dz \right| \le \int_0^{\rho} |f'(z)|dz \le \int_0^{\rho} \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3} d\rho$$

$$|f(z)| \le \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \tag{3.4}$$

bulunur. $|f(z)|$ için bir alt sınır elde etmek üzere, $f(z)$ noktası ile orijini birleştiren doğru parçası $|z|<1$ içinde tamamen $f(z)$ nin değerleriyle örtülür. Eğer L, $w = f(z)$ fonksiyonuyla bu doğru parçası üzerine tasvir edilen $|z|<1$ de bir yay ise L boyunca $dw = f'(z)dz > 0$ dır.

Böylece

$$|f(z)| = \left| \int_L f'(z)dz \right| \ge \int_L |f'(z)|dz \ge \int_0^{\rho} \frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} d\rho = \frac{\rho}{(1+\rho)^2} \tag{3.5}$$

bulunur. (3.4) ve (3.5) ifadeleri birleştirilirse;

$$\frac{\rho}{(1+\rho)^2} \le |f(z)| \le \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

bulunur. $|z| = \rho$ alınırsa

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

bulunur ki, bu da (ii) eşitsizliğidir.

Son olarak ise , bundan önce Hazırlık 3.9 da

$$h(\varepsilon)=\frac{f(\frac{\varepsilon+z_0}{1+\varepsilon\overline{z_0}})-f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}=\varepsilon+\left[\frac{1}{2}(1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}-\overline{z_0}\right]\varepsilon^2+...$$

fonksiyonunun S sınıfına ait olduğu ispatlanmıştı. Bu fonksiyonda $\varepsilon=-z_0$ alınırsa;

$$h(-z_0)=\frac{f(\frac{-z_0+z_0}{1+(-z_0)\overline{z_0}})-f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}=-\frac{1}{1-|z_0|^2}\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}$$

bulunur.

$$h(-z_0)=-\frac{1}{1-|z_0|^2}\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}\in S$$

dir.

$f\in S$ için (ii) de $\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\le|f(z)|\le\frac{|z|}{(1-|z|)^2}$ olduğu ispatlandı. $h(\varepsilon)\in S$ olduğundan $\varepsilon=-z_0$ için bulunan $h(-z_0)\in S$ dir ve (ii) eşitsizliğini gerçekler.

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\le|h(-z_0)|\le\frac{|z|}{(1-|z|)^2}\Rightarrow$$

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\le\left|\frac{1}{(1-|z_0|^2)}.\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}\right|\le\frac{|z|}{(1-|z|)^2}\Rightarrow$$

$$\left|\frac{(1-|z_0|^2).z}{(1+|z|)^2}\right|\le\left|\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}\right|\le\left|\frac{(1-|z_0|^2).z}{(1-|z|)^2}\right|\Rightarrow$$

$$\left|\frac{(1-|z_0|^2)}{(1+|z|)^2}\right|\le\left|\frac{f(z_0)}{z.f'(z_0)}\right|\le\left|\frac{(1-|z_0|^2)}{(1-|z|)^2}\right|\Rightarrow$$

$$\left|\frac{(1-|z|)^2}{(1-|z_0|^2)}\right| \leq \left|\frac{z.f'(z_0)}{f(z_0)}\right| \leq \left|\frac{(1+|z|)^2}{(1-|z_0|^2)}\right| \Rightarrow$$

$$\left|\frac{(1-|z|)(1-|z|)}{(1-|z_0|)(1+|z_0|)}\right| \leq \left|\frac{z.f'(z_0)}{f(z_0)}\right| \leq \left|\frac{(1+|z|)(1+|z|)}{(1-|z_0|)(1+|z_0|)}\right| \Rightarrow$$

z_0 yerine z yazılırsa;

$$\left|\frac{(1-|z|)(1-|z|)}{(1-|z|)(1+|z|)}\right| \leq \left|\frac{z.f'(z)}{f(z)}\right| \leq \left|\frac{(1+|z|)(1+|z|)}{(1-|z|)(1+|z|)}\right| \Rightarrow$$

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left|z.\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

bulunur ki, bu da (iii) eşitsizliğidir.

4. SABORDİNASYON PRENSİBİ

4.1 Tanım : $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları D de analitik olsun. Eğer

(i) D de analitik

(ii) $\ell(0)=0$

(iii) $|z|<1$ için $|\ell(z)|<1$

koşullarını gerçekleyen bir $\ell(z)$ fonksiyonu bulunabilir ve $f(z)=g(\ell(z))$ bağıntısı gerçeklenirse, o takdirde $f(z)$ fonksiyonu, $g(z)$ fonksiyonuna “sabordine“ dir denir ve $f(z)\prec g(z)$ ile gösterilir.

4.2 Lemma (Schwarz Lemması**):** $w(z)=c_1z+c_2z^2+...$ fonksiyonu $D=\{z \mid |z|<1\}$ de tanımlanmış, analitik bir fonksiyon olsun ve $w(0)=0$, $|w(z)|<1$ eşitsizliklerini gerçeklesin. Bu halde $|w(z)|\leq|z|$ ve $|w'(0)|\leq 1$ eşitsizlikleri gerçeklenir. Eşitsizliklerde eşitlik hali ancak $w(z)$ fonksiyonunun $w(z)=kz$, $|k|=1$ olması ile gerçeklenir.

İspat : $h(z)=\dfrac{w(z)}{z}=\dfrac{c_1z+c_2z^2+....}{z}=c_1+c_2z+...$

fonksiyonu gözönüne alınsın. $w(0)=0$ olduğundan

$$w'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{w(z+0)-w(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{w(z)}{z}$$

olur. $h(z)$ fonksiyonu $z=0$ da analitiktir. Buradan

$$h(z)=\frac{w(z)}{z}=\frac{c_1z+c_2z^2+....}{z}$$

fonksiyonunun $D=\{z \mid |z|<1\}$ basit bağlantılı bölgesinin her yerinde analitik olduğu söylenebilir. Bu ise maksimum prensibinden dolayı $\frac{w(z)}{z}$ fonksiyonunun maksimum değerini ancak ve yalnız D nin sınırında alacağını gösterir.

$|z|<\rho<1$ için $\rho\to 1$ alınırsa

$$|h(z)|=\left|\frac{w(z)}{z}\right|\le 1 \Rightarrow \frac{|w(z)|}{|z|}\le 1 \Rightarrow |w(z)|\le |z|$$

bulunur. Böylece ilk eşitsizlik ispatlanmış olur. Öte yandan $\frac{w(z)}{z}$ fonksiyonu $w'(0)$ türevi varolduğundan dolayı $z=0$ da analitiktir. $z=0$ noktası civarında Taylor Açılımı düşünülecek olursa

$$w(z)=w(0)+\frac{w'(0)}{1!}z+\frac{w''(0)}{2!}z^2+...=\frac{w'(0)}{1!}z+\frac{w''(0)}{2!}z^2+...$$

eşitliği yazılabilir. Diğer taraftan

$$w'(z)=\lim_{z\to 0}\frac{w(z+0)-w(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{w(z)}{z}$$

olduğu da gözönüne alınarak

$$\left|\frac{w(z)}{z}\right|=|w'(0)|$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$\left|\frac{w(z)}{z}\right|\le 1$$

olduğu da düşünülürse son iki bağıntıdan

$$|w'(0)| \leq 1$$

bulunur. Bu ise ikinci eşitsizliktir.
Yine maksimum prensibinden dolayı sınırdaki bir z noktası için daima

$$\left|\frac{w(z)}{z}\right| = 1 \Rightarrow \frac{w(z)}{z} = 1.e^{i\theta} \Rightarrow w(z) = z.e^{i\theta} \quad , \quad k = e^{i\theta}$$

bulunur. Bu da eşitlik halini verir..

4.3 Teorem : $f(z) \prec g(z)$ olsun. Bu takdirde $f(D) \subset g(D)$ ve $f(0) = g(0)$ dır.

İspat : $f(z) \prec g(z)$ olduğundan dolayı tanım gereği; Dde

(i) analitik

(ii) $\ell(0) = 0$

(iii) $|\ell(z)| < 1$

koşullarını gerçekleyen bir $\ell(z)$ fonksiyonu vardır. Öyle ki

$$f(z) = g(\ell(z))$$

dir. Burada $\ell(z)$ fonksiyonu Schwarz Lemmasının koşullarını gerçeklediğinden;

$$|\ell(z)| \leq |z|$$

dir.
Eşitlik ancak ve yalnız

$$\ell(z) = e^{i\theta} z$$

olduğu zaman geçerlidir. O halde $z_1 \in \ell(D)$ alalım. Buradan $z_1 = \ell(z)$ olacak şekilde bir $z \in D$ bulunur.

$$z_1 = \ell(z) \Rightarrow |z_1| = |\ell(z)| \leq |z| < 1 \Rightarrow |z_1| < 1 \Rightarrow z_1 \in D$$

O halde

$$z_1 \in \ell(D) \text{ için } z_1 \in D \Rightarrow \ell(D) \subset D$$

dir.

$g(z)$ ve $f(z)$ fonksiyonları D de analitik olduğundan, $f(z) \prec g(z)$ ve $\ell(D) \subset D$ bağıntısından

$$f(D) = g(\ell(D)) \subset g(D) \Rightarrow f(D) \subset g(D)$$

bulunur.

Aynı zamanda

$\ell(0) = 0$ ve $f(z) = g(\ell(z)) \Rightarrow f(0) = g(\ell(0)) = g(0) \Rightarrow f(0) = g(0)$ dır.

4.4 Teorem: $f(z) \prec g(z)$ olsun. Bu takdirde

$$\{f(z) \mid |z| < r\} \subset \{g(z) \mid |z| < r\} \qquad (0 < r < 1)$$

dir.

İspat : $f(z) \prec g(z)$ olsun. Bu takdirde tanımdan dolayı D de ; yalınkat olması gerekmeyen ve yine D de

(i) analitik
(ii) $\ell(0) = 0$
(iii) $|\ell(z)| < 1$

koşullarını gerçekleyen bir $\ell(z)$ fonksiyonu vardır. $\ell(z)$, Schwarz Lemmasının koşullarını gerçeklediğinden $|\ell(z)| \le |z|$ dir. O halde $|\ell(z)| \le |z| < r < 1$ dir. $z_1 \in \ell(D_r)$ alınsın. Bu takdirde $z_1 = \ell(z)$ olacak şekilde en az bir $z \in D_r$ vardır. $z_1 = \ell(z) \Rightarrow |z_1| = |\ell(z)| \le |z| < r < 1 \Rightarrow z_1 \in D_r$ olup $\ell(D_r) \subset D_r$ dir. Ancak aynı zamanda $f(z) \prec g(z)$ olduğundan $f(z) = g(\ell(z))$ dir.

Buradan $\{f(z) \mid |z|<r\} = \{g(\ell(z)) \mid |z|<r\}$ yazılabilir. $\ell(D_r) \subset D_r$ olduğundan $g(z)$ de D_r de analitik olduğundan $g(\ell(D_r)) \subset g(D_r)$ dir. $(0<r<1)$

$$\Rightarrow \{f(z) \mid |z|<r\} = \{g(\ell(z)) \mid |z|<r\} = \{g(\ell(D_r)) \mid r<1\}$$
$$\subset \{g(D_r) \mid r<1\} = \{g(z) \mid |z|<r\}$$

$$\Rightarrow \{f(z) \mid |z|<r\} \subset \{g(z) \mid |z|<r\}$$

bulunur ki bu da istenen ifadedir.

4.5 Teorem : $f(z) \prec g(z)$ olsun. Bu takdirde

$$\max_{|z|\le r} |f(z)| \le \max_{|z|\le r} |g(z)|$$

dir.

İspat : Teorem 4.3 de $f(D) \subset g(D)$ olduğu ispatlandı ve aynı zamanda $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları D de analitik olduklarından maksimum modül teoremi kullanılırsa ;

$|f(z)|$ maksimum değerini ancak sınırda alabilir

$|g(z)|$ maksimum değerini ancak sınırda alabilir ve $f(D) \subset g(D)$

olduğundan

$$\max_{|z|\le r} |f(z)| \le \max_{|z|\le r} |g(z)|$$

sonucuna varılabilir.

4.6 Lemma : $\ell(z)$ aşağıdaki koşulları gerçekleyen analitik bir fonksiyon olsun.

(i) $|z|<1$ için analitik

(ii) $|z|<1$ için $|\ell(z)|<1$.

Bu takdirde $(1-|z|^2)|\ell'(z)| \le 1-|\ell(z)|^2$ dir.

İspat : z_0 , birim dairede bir nokta olsun. $w_0 = \ell(z_0)$ noktası da z_0 noktasına $|w| < 1$ de karşılık gelen nokta olsun. $|z| < 1$ dairesinde $t = e^{i\theta} \dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$ transformasyonu z_0 noktasını $t = 0$ noktasına dönüştürür. $W = e^{i\phi} \dfrac{w - w_0}{1 - \overline{w_0} w}$ transformasyonu da w_0 noktasını $W = 0$ noktasına dönüştürür.

$$t = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \Rightarrow t - \overline{z_0}.z.t = e^{i\theta}.z - e^{i\theta}.z_0$$

$$\Rightarrow e^{i\theta} z_0 + t = e^{i\theta} z + \overline{z_0}.z.t \Rightarrow t + e^{i\theta} z_0 = z(e^{i\theta} + \overline{z_0} t)$$

$$\Rightarrow z = \frac{t + e^{i\theta} z_0}{e^{i\theta} + \overline{z_0} t}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$W = e^{i\phi} \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0} w} = e^{i\phi} \frac{\ell(z) - \ell(z_0)}{1 - \overline{\ell(z_0)} \ell(z)}$$

ifadesinde z değişkeni yerine değeri yazılacak olursa

$$W = e^{i\phi} \frac{\ell\left(\dfrac{t + e^{i\theta} z_0}{e^{i\theta} + \overline{z_0} t}\right) - \ell(z_0)}{1 - \overline{\ell(z_0)} \ell\left(\dfrac{t + e^{i\theta} z_0}{e^{i\theta} + \overline{z_0} t}\right)}$$

Bu fonksiyon Schwarz Lemmasının koşullarını gerçekleyen bir fonksiyondur.
Gerçekten ; $t = 0$ için

$$W = e^{i\phi} \frac{\ell\left(\dfrac{t + e^{i\theta} z_0}{e^{i\theta} - \overline{z_0} t}\right) - \ell(z_0)}{1 - \overline{\ell(z_0)} \ell\left(\dfrac{t + e^{i\theta} z_0}{e^{i\theta} + \overline{z_0} t}\right)} = e^{i\phi} \frac{\ell(z_0) - \ell(z_0)}{1 - \overline{\ell(z_0)} \ell(z_0)} = 0$$

$|t| \le 1$ için $W(t)$ fonksiyonu $|z| < 1$ de analitiktir. Zira

$$t=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \quad , \quad W=e^{i\phi}\frac{w-w_0}{1-\overline{w_0}w}=e^{i\phi}\frac{\ell(z)-\ell(z_0)}{1-\overline{\ell(z_0)}\ell(z)}$$

olduğundan $\ell(z)$ de $|z|<1$ de analitik olduğundan $W=W(t)$ de analitiktir.

(Lineer transformasyonla elde edilmişti.)

$|t|\leq 1$ için $|W(t)|\leq 1$ dir. Bu da açıktır. Zira

$$W=e^{i\phi}\frac{w-w_0}{1-\overline{w_0}w}=e^{i\phi}\frac{\ell(z)-\ell(z_0)}{1-\overline{\ell(z_0)}\ell(z)}=e^{i\phi}\frac{\ell\left(\dfrac{t+e^{i\theta}z_0}{e^{i\theta}+\overline{z_0}t}\right)-\ell(z_0)}{1-\overline{\ell(z_0)}\ell\left(\dfrac{t+e^{i\theta}z_0}{e^{i\theta}+\overline{z_0}t}\right)}$$

olduğundan ;

$|w|=1$ ise $w=\ell(z)\Rightarrow|\ell(z)|=1$

ve

$|z|=1$ ise

$$t=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\Rightarrow|t|=\left|e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|$$

$$=\left|e^{i\theta}\right|\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|=\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|$$

$|z|=1$ olduğundan $z=e^{i\ell}$ alınırsa ;

$$|t|=\left|\frac{e^{i\ell}-z_0}{1-e^{i\ell}\overline{z_0}}\right|=\left|\frac{e^{i\ell}-z_0}{e^{i\ell}(e^{-i\ell}-\overline{z_0})}\right|=\left|\frac{1}{e^{i\ell}}\right|\left|\frac{e^{i\ell}-z_0}{e^{-i\ell}-\overline{z_0}}\right|$$

$$=\left|\frac{e^{i\ell}-z_0}{\overline{e^{i\ell}-z_0}}\right|=1$$

bulunur. Fakat $t=e^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$, $|z|<1$ de analitik olduğundan ve sınırdaki değeri 1 e eşit olduğundan dolayı maksimum prensibine göre $|z|<1$ için $|t|<1$ olur.

O halde

$$z=\frac{t+e^{i\theta}z_0}{e^{i\theta}+\overline{z_0}t}\Rightarrow z=z(t),|t|\leq 1$$

$$W=e^{i\phi}\frac{w-w_0}{1-\overline{w_0}w}=e^{i\phi}\frac{\ell(z)-\ell(z_0)}{1-\overline{\ell(z_0)}\ell(z)}$$

$|W(t)|\leq 1$ olacaktır.

O halde $W=W(t)$ fonksiyonu birim dairede analitik, $W(0)=0$, $|W(t)|\leq 1$ koşullarını gerçekler. Yani Schwarz Lemmasının koşullarını gerçekler. O halde $|W(t)|\leq |t|$ dir.

Ayrıca $W(t)$ fonksiyonu Schwarz Lemmasının koşullarını gerçeklediğinden

$|W'(0)|\leq 1$

dir.

Şimdi

$$t=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\Rightarrow\frac{dt}{dz}=e^{i\theta}\frac{1-\overline{z_0}z+\overline{z_0}(z-z_0)}{(1-\overline{z_0}z)^2}=e^{i\theta}\frac{1-\overline{z_0}z+\overline{z_0}z-z_0\overline{z_0}}{(1-\overline{z_0}z)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{dt}{dz}=e^{i\theta}\frac{1-|z_0|^2}{(1-\overline{z_0}z)^2}$$

bulunur.

$$W=e^{i\phi}\frac{\ell(z)-\ell(z_0)}{1-\overline{\ell(z_0)}\ell(z)}\Rightarrow$$

$$\frac{dW}{dz}=e^{i\phi}\frac{\ell'(z)(1-\overline{\ell(z_0)}.\ell(z))+\ell'(z)\overline{\ell(z_0)}(\ell(z)-\ell(z_0))}{(1-\overline{\ell(z_0)}.\ell(z))^2}$$

$$=e^{i\phi}\frac{\ell'(z)-\ell'(z)\ell(z)\overline{\ell(z_0)}+\ell'(z)\ell(z)\overline{\ell(z_0)}-\ell'(z)\ell(z_0)\overline{\ell(z_0)}}{(1-\ell(z).\overline{\ell(z_0)})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dz} = e^{i\phi}\frac{\ell'(z)(1-|\ell(z_0)|^2)}{(1-\ell(z).\overline{\ell(z_0)})^2}$$

bulunur.

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dt}.\frac{dt}{dz} \Rightarrow e^{i\phi}\frac{\ell'(z)(1-|\ell(z_0)|^2)}{(1-\ell(z).\overline{\ell(z_0)})^2} = e^{i\theta}\frac{dW}{dt}.\frac{1-|z_0|^2}{(1-\overline{z_0}z)^2} \Rightarrow$$

$z = z_0$ yazılırsa ;

$$e^{i\phi}\frac{\ell'(z_0)(1-|\ell(z_0)|^2)}{(1-|\ell(z_0)|^2)^2} = e^{i\theta}\frac{dW}{dt}.\frac{1-|z_0|^2}{(1-|z_0|^2)^2} \Rightarrow$$

$$e^{i\phi}\ell'(z_0)\frac{1}{1-|\ell(z_0)|^2} = e^{i\theta}\frac{dW}{dt}.\frac{1}{1-|z_0|^2}$$

modül alınırsa ;

$$|\ell'(z_0)|\frac{1}{1-|\ell(z_0)|^2} = \left|\frac{dW}{dt}\right|\frac{1}{1-|z_0|^2}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $|W'(t)| \le 1$ bağıntısı kullanılırsa

$$\frac{|\ell'(z_0)|}{1-|\ell(z_0)|^2} \le \frac{1}{1-|z_0|^2} \Rightarrow (1-|z_0|^2)|\ell'(z_0)| \le 1-|\ell(z_0)|^2$$

bulunur. Ancak z_0 keyfi olduğundan

$$(1-|z|^2)|\ell'(z)| \le 1-|\ell(z)|^2$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da ispatı istenen ifadedir.

4.7 Teorem : $f(z) \prec g(z)$ olsun. Bu takdirde

$$\max_{|z|\le r}(1-|z|^2)|f'(z)| \le \max_{|z|\le r}(1-|z|^2)|g'(z)|$$

dir.

İspat : $f(z) \prec g(z)$ olduğundan dolayı $|z| < 1$ de

(i) analitik

(ii) $\ell(0) = 0$

(iii) $|\ell(z)| < 1$

koşullarını gerçekleyen bir $\ell(z)$ fonksiyonu vardır ve Lemma 4.6 dan dolayı

$$(1 - |z|^2)|\ell'(z)| \leq 1 - |\ell(z)|^2 \tag{4.1}$$

eşitsizliğini gerçekler.
Aynı zamanda $f(z) \prec g(z) \Rightarrow f(z) = g(\ell(z))$ ifadesinden türev alınırsa

$$f'(z) = g'(\ell).\ell'(z) \Rightarrow |f'(z)| = |g'(\ell)|.|\ell'(z)| \ , \ (1 - |z|^2) > 0$$

olduğundan;

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| = (1 - |z|^2)|g'(\ell)|.|\ell'(z)|$$

dir. Bu adımda da (4.1) bağıntısı kullanılırsa ;

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| = (1 - |z|^2)|g'(\ell)|.|\ell'(z)| \leq (1 - |\ell(z)|^2)|g'(\ell)| \tag{4.2}$$

bulunur. Fakat $\ell(z)$, Schwarz Lemmasının koşullarını gerçeklediğinden $|\ell(z)| \leq |z|$ dir. Bu eşitsizlik de en son (4.2) de kullanılıp maksimum teoremi uygulanırsa

$$\max_{|z| \leq r}(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq \max_{|z| \leq r}(1 - |z|^2)|g'(z)| \qquad (0 \leq r < 1)$$

bağıntısı elde edilir. Bu da ispatı istenen ifadedir.

4.8 Teorem : $f(z) \prec g(z)$ olsun. Bu takdirde $|f'(0)| \leq |g'(0)|$ dır.

İspat : $f(z) \prec g(z) \Rightarrow |z| < 1$ de analitik, $\ell(0) = 0$, $|\ell(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen bir $\ell(z)$ fonksiyonu vardır ve $f(z) = g(\ell(z))$ dir.

$$f'(z)=\ell'(z)g'(\ell(z))$$

$$\Rightarrow |f'(z)|=|g'(\ell(z))|.|\ell'(z)| \Rightarrow |f'(0)|=|g'(\ell(0))|.|\ell'(0)|$$

bulunur. Fakat $|\ell'(0)|\leq 1$ ($\ell(z)$ Schwarz Lemmasının koşullarını gerçeklediğinden) ve $\ell(0)=0$ olduğundan dolayı

$$|f'(0)|=|g'(\ell(0))|.|\ell'(0)|\leq |g'(\ell(0))|=|g'(0)|$$

$$\Rightarrow |f'(0)|\leq |g'(0)|$$

bulunur ki bu da ispatı istenen ifadedir.

Ancak sabordine fonksiyonlar yalınkat fonksiyonlar oldukları zaman çok daha önemli durumlar ortaya çıkmaktadır.

4.9 Lemma : $g(z)$, D de yalınkat olsun. Ancak ve yalnız $f(0)=g(0)$ ve $f(D)\subset g(D)$ ise $f(z)\prec g(z)$ dir.

İspat : $f(z)\prec g(z)$ ve $g(z)$, D de yalınkat olsun. Bu takdirde $|z|<1$ de

(i) analitik

(ii) $\ell(0)=0$

(iii) $|\ell(z)|<1$

koşullarını gerçekleyen bir $\ell(z)$ fonksiyonu vardır. Ayrıca $\ell(z)$ Schwarz Lemmasının koşullarını gerçeklediğinden $|\ell(z)|\leq |z|$ dir.

Dolayısıyla

$z_1\in \ell(D_r)\Rightarrow z_1=\ell(z)$

olacak şekilde en az bir $z\in D_r$ vardır ve

$$z_1=\ell(z)\Rightarrow |z_1|=|\ell(z)|\leq |z|<r \Rightarrow |z_1|<r \Rightarrow z_1\in D_r \Rightarrow$$

$\ell(D_r)\subset D_r$ dir. $g(z)$; D de yalınkat olduğundan $g(\ell(D_r))\subset g(D_r)$

$$\left.\begin{array}{l} f(z)=g(\ell(z)) \\ g(\ell(D_r))\subset g(D_r) \\ f(D_r)=g(\ell(D_r)) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$f(D_r)\subset g(D_r)$ bulunur. $r\to 1$ olunca da $f(D)\subset g(D)$ bulunur.

$f(z)\prec g(z)\Rightarrow f(z)=g(\ell(z))\Rightarrow f(0)=g(\ell(0))=g(0)$ dır. Sonuç olarak $f(0)=g(0)$ bulunur.

Karşıt olarak $g(z)$, D de yalınkat, $f(0)=g(0)$, $f(D)\subset g(D)$ olsun. $w=g(z)$, D de yalınkat olduğundan analitik ve injektiflikten dolayı $z=g^{-1}(w)$ da $g(D)$ de analitiktir. $f(D)\subset g(D)$ ve $f(0)=g(0)$ olduğundan $z=g^{-1}(w)$ $f(D)$ de de analitiktir. Bu durumda $f(z)$ de D de analitiktir.

$\ell(z)=g^{-1}(f(z))$ fonksiyonunu tanımlayalım. $g(z)$ yalınkat olduğundan g^{-1} fonksiyonu da analitiktir. $f(z)$ de analitik olduğundan $\ell(z)=g^{-1}(f(z))$ bileşke fonksiyonu da D de analitiktir. Yine $g(z)$, D de yalınkat olduğundan

$$\ell(0)=g^{-1}(f(0))\Rightarrow f(0)=g(\ell(0))=g(0)\Rightarrow \ell(0)=0$$

koşulunu gerçekler ve aynı zamanda $|z|<1$ deki bütün değerler $w=f(z)$ analitik fonksiyonu tarafından alınırlar.

$\ell(z)$; $|z|<1$ de analitiktir ve $\ell(0)=0$ koşulunu $|z|<1$ de gerçekleyen bir fonksiyon olur. Diğer taraftan $\ell(z)=g^{-1}(f(z))$ D de regüler, analitik olduğundan bunun bütün değerleri $z=g^{-1}(w)$ fonksiyonu vasıtasıyla verilir. Zira $f(D)\subset g(D)$ dir. O halde $|\ell(z)|<1$ dir. Bu durumda $f(z)\prec g(z)$ dir.

5. POZİTİF REEL KISMA SAHİP FONKSİYONLAR

5.1 Tanım : (i) $p(z)$, $D=\{z \mid |z|<1\}$ de analitik ,

(ii) $|z|<1$ için $\operatorname{Re} p(z)>0$,

(iii) $p(0)=1$

özelliklerini gerçekleyen fonksiyonların sınıfı P ile gösterilir.

5.2 Özellik : $w=\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu gözönüne alınsın.

$$\operatorname{Re} w=\frac{1}{2}(w+\overline{w})=\frac{1}{2}\left(\frac{1+z}{1-z}+\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{(1+z)(1-\bar{z})+(1+\bar{z})(1-z)}{(1-z)(1-\bar{z})}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\bar{z}+z-|z|^2+1-z+\bar{z}-|z|^2}{|1-z|^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2-2|z|^2}{|1-z|^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{2(1-|z|^2)}{|1-z|^2}=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} w=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

bulunur. $|z|<1 \Rightarrow |z|^2<1 \Rightarrow 1-|z|^2>0$ ve $|1-z|^2>0$ dan

$$\operatorname{Re} w=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}>0 \Rightarrow \operatorname{Re} w>0$$

bulunur. (Yani birim dairede $\operatorname{Re} w>0$ dır.)

Diğer taraftan bu fonksiyon ;

$z = 0$ noktasını $\quad w = \dfrac{1+z}{1-z} = \dfrac{1+0}{1-0} = 1 \Rightarrow w = 1$ noktasına

$z = 1$ noktasını $\quad w = \infty$ noktasına

$z = \infty$ noktasını $\quad w = -1$ noktasına

tasvir eder. Bu fonksiyon aynı zamanda;

$$|w|^2 = w.\bar{w} = \left|\frac{1+z}{1-z}\right|^2 = \left(\frac{1+z}{1-z}\right).\left(\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}\right) = \frac{1+\bar{z}+z+|z|^2}{1-\bar{z}-z+|z|^2}$$

$$= \frac{1+2\operatorname{Re} z+|z|^2}{1-2\operatorname{Re} z+|z|^2} = \frac{1+2\operatorname{Re} z+|z|^2+4\operatorname{Re} z-4\operatorname{Re} z}{1-2\operatorname{Re} z+|z|^2}$$

$$= \frac{1+2\operatorname{Re} z+|z|^2-4\operatorname{Re} z}{1-2\operatorname{Re} z+|z|^2} + \frac{4\operatorname{Re} z}{1-2\operatorname{Re} z+|z|^2}$$

$$= \frac{1-2\operatorname{Re} z+|z|^2}{1-2\operatorname{Re} z+|z|^2} + \frac{4\operatorname{Re} z}{1-2\operatorname{Re} z+|z|^2} = 1+4\frac{\operatorname{Re} z}{1-2\operatorname{Re} z+|z|^2}$$

Sonuç olarak;

$$|w|^2 = 1+4\frac{\operatorname{Re} z}{1-2\operatorname{Re} z+|z|^2}$$

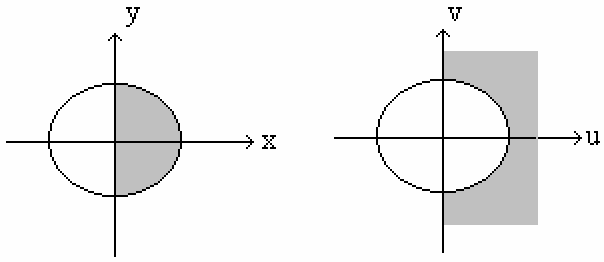
bulunur. O halde

$$\operatorname{Re} w = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \tag{5.1}$$

$$|w|^2 = 1+4\frac{\operatorname{Re} z}{1-2\operatorname{Re} z+|z|^2} \tag{5.2}$$

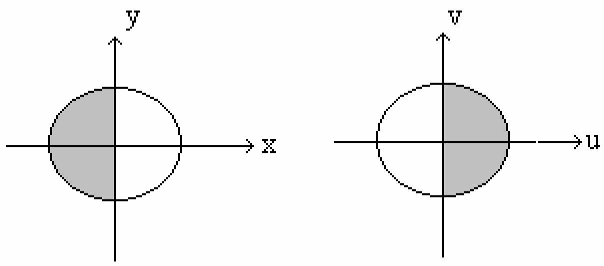
sonuçlarından hareket edilirse;

a) $|z| < 1$ ve $\operatorname{Re} z > 0$ olsun. Bu demektir ki: (5.1) ve (5.2) sonuçlarından $\operatorname{Re} w > 0$, $|w| > 1$ bulunur.



Şekil 5.1

b) $|z| < 1$ ve $\operatorname{Re} z < 0$ olsun. Bu demektir ki: (5.1) ve (5.2) sonuçlarından $\operatorname{Re} w > 0$, $|w| < 1$ bulunur.



Şekil 5.2

a) ve b) sonuçlarından elde edilen, birim dairenin sağ yarım düzleme tasvir edildiğidir. O halde buraya kadar yapılan işlemlerle w fonksiyonunun birim dairede pozitif reel kısma sahip olduğu ve birim daireyi sağ yarım düzleme tasvir ettiği görülmüştür.

5.3 Lemma : $p(z)$ fonksiyonu ancak ve yalnız $p(z) \prec \dfrac{1+z}{1-z}$ ise P sınıfına aittir.

İspat : $p(z) \prec \dfrac{1+z}{1-z}$ olsun. Bu halde öyle bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır ki bu fonksiyon

(i) D de analitik

(ii) $|\varphi(z)| < 1$

(iii) $\varphi(0) = 0$

koşullarını gerçekler ve $g(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ farzedilirse $p(z)\prec g(z)$ olduğundan

$$p(z)=g(\varphi(z))=\frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$$

dir. Buradan

$$p(0)=\frac{1+\varphi(0)}{1-\varphi(0)}=\frac{1+0}{1-0}=1 \Rightarrow p(0)=1$$

dir.

$w=\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonunun incelenmesinde görüldüğü gibi

$$\operatorname{Re} p(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}+\frac{1+\overline{\varphi(z)}}{1-\overline{\varphi(z)}}\right)=\frac{1-|\varphi(z)|^2}{|1-\varphi(z)|^2}$$

$|\varphi(z)|<1$ koşulunu gerçeklediğinden $1-|\varphi(z)|^2>0$ ve $|1-\varphi(z)|^2>0$ olduğundan

$$\operatorname{Re} p(z)=\frac{1-|\varphi(z)|^2}{|1-\varphi(z)|^2}>0$$

olur.

$\varphi(z)$, D de analitik olduğundan

$$p(z)=\frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$$

fonksiyonu da D de analitiktir. O halde $p(0)=1$, $\operatorname{Re} p(z)>0$, $p(z)$ D de analitik olduğundan $p(z)\in P$ dir.

Tersine $p(z)\in P$ olsun. Bu halde $p(0)=1$, $p(z)$ D de analitik, $\operatorname{Re} p(z)>0$ koşulları gerçeklenir.

$$g(z)=\frac{1+z}{1-z}$$

fonksiyonu gözönüne alınsın.

$$g(0)=\frac{1+0}{1-0}\Rightarrow\ g(0)=1 \text{ ve } p(0)=1 \text{ den } \ p(0)=g(0)$$

koşulu sağlanır.
$w\in p(D)$ alınsın. Bu halde $w=p(z)$ olacak şekilde bir $z\in D$ vardır.
$\operatorname{Re} p(z)=\operatorname{Re} w>0$ olduğundan w noktası sağ yarım düzlemdedir.
Diğer yandan $g(z)$ fonksiyonu D den sağ yarım düzleme yalınkat bir fonksiyon olduğundan $w=g(z')$ olacak şekilde $z'\in D$ vardır.
Gerçekten ;

$$w=g(z')=\frac{1+z'}{1-z'}\ \Rightarrow\ z'=\frac{w-1}{w+1}\ \Rightarrow\ |z'|\le 1 \quad \text{ve}$$

$$|z'|^2=1-4\frac{\operatorname{Re} w}{|1+w|^2}=1-4\frac{\operatorname{Re} w}{|w|^2+2\operatorname{Re} w+1}\ ,\ \operatorname{Re} w>0$$

olduğundan $z'\in D$ dir. Buna göre $w=g(z')$ den $w\in g(D)$ dir. Böylece $p(D)\subset g(D)$ olur. O halde Lemma 4.9 dan; “ $g(z)$, D de yalınkat olsun. Ancak ve yalnız $f(0)=g(0)$ ve $f(D)\subset g(D)$ ise $f(z)\prec g(z)$ dir. ” olduğundan $p(z)\prec g(z)$ olur.

5.4 Hazırlık : $w_1=\dfrac{w-1}{w+1}$ fonksiyonu düşünülsün. Bu fonksiyon

$w=0$ noktasını $w_1=-1$ noktasına
$w=\xi$ noktasını $w_1=\xi_1$ noktasına
$w=\infty$ noktasını $w_1=1$ noktasına

tasvir eder. Dolayısıyla bu fonksiyon $\operatorname{Re} w>0$ sağ yarım düzlemi $|w_1|\le 1$ dairesi üzerine resmeder ve $w_1(1)=0$ koşulunu gerçekler.

Şimdi $\operatorname{Re} f(z) > 0$ olsun. $f(z)$, D de analitik ise $g(z) = \dfrac{f(z)-1}{f(z)+1}$ fonksiyonu, $|g(z)| < 1$ koşulunu gerçekler. Bundan dolayı herhangi bir pozitif reel kısma sahip bir fonksiyon; $g(z)$, D de analitik ve $g(0) = 0$, $|g(z)| < 1$ olmak üzere $f(z) = \dfrac{1+g(z)}{1-g(z)}$ şeklinde yazılabilir. Bu halde $f(0) = 1$ dir.

$|a| < 1$ ise

$$\left|\frac{1+a}{1-a}\right| \leq \frac{1+|a|}{1-|a|} \tag{5.3}$$

dir.Gerçekten, $|1+a| \leq 1+|a|$ (Üçgen Eşitsizliğinden)

$$1 = |1| = |1+a-a| = |1-a+a| \leq |1-a| + |a|$$

$$\Rightarrow \quad 1-|a| \leq |1-a|$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} |1+a| \leq 1+|a| \\ 1-|a| \leq |1-a| \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{|1+a|}{|1-a|} \leq \frac{1+|a|}{1-|a|} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1+a}{1-a}\right| \leq \frac{1+|a|}{1-|a|}$$

bulunur. O halde herhangi bir pozitif reel kısma sahip fonksiyon $f(z)$, $|g(z)| < 1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere; $f(z) = \dfrac{1+g(z)}{1-g(z)}$ şeklinde yazılabilirdi. Buna göre (5.3) eşitsizliğinden dolayı;

$$|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{5.4}$$

eşitsizliğini gerçekler. Ayrıca $\operatorname{Re} f(z) > 0$ olsun. Bu halde

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{f(z)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{\overline{f(z)}}{|f(z)|^2}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{f(z)}{|f(z)|^2}\right\} > 0$$

olduğundan, (5.4) eşitsizliğinden;

$$\frac{1}{|f(z)|} \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \Rightarrow |f(z)| \geq \frac{1-|z|}{1+|z|} \tag{5.5}$$

bulunur. Dolayısıyla (5.4) ve (5.5) eşitsizlikleri birleştirilirse;

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{5.6}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

5.5 Özellik : $p(z) \in P$ olsun. Bu takdirde;

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |p(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \quad \text{ve} \quad |p'(z)| \leq \frac{2}{(1-|z|)^2}, \quad |p'(0)| \leq 2$$

dir.

İspat : Hazırlık 5.4 den dolayı ve $p(z) \in P$ olduğundan $\operatorname{Re} p(z) > 0$, $p(0) = 1$ koşullarını gerçekler. Ayrıca $\varphi(z)$, D de analitik, $\varphi(0) = 0$ ve $|\varphi(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere;

$$p(z) = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$$

şeklinde yazılabilir. Hazırlık 5.4 den ve (5.6) eşitsizliğinden;

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |p(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

yazılabilir.

$$p(z) = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)} \Rightarrow p'(z) = \frac{\varphi'(z)(1-\varphi(z)) + \varphi'(z)(1+\varphi(z))}{(1-\varphi(z))^2}$$

$$= \frac{\varphi'(z) - \varphi'(z)\varphi(z) + \varphi'(z) + \varphi(z)\varphi'(z)}{(1-\varphi(z))^2}$$

$$\Rightarrow p'(z)=\frac{2\varphi'(z)}{(1-\varphi(z))^2} \Rightarrow |p'(z)|=\frac{2|\varphi'(z)|}{|\ 1-\varphi(z)\ |^2}$$

Ancak $\varphi(z)$ Schwarz Lemmasının koşullarını gerçeklediğinden ve Lemma 4.6 dan dolayı;

$|\varphi'(z)|\leq\dfrac{1-|\varphi'(z)|^2}{1-|\ z\ |^2}$ dir. Bu ifade $|p'(z)|$ de kullanılırsa;

$$|p'(z)|=\frac{2|\varphi'(z)|}{|\ 1-\varphi(z)\ |^2}\leq\frac{2.\dfrac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}}{|1-\varphi(z)|^2}=\frac{2(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)|\ 1-\varphi(z)\ |^2}$$

$$=\frac{2(1-|\varphi(z)|)(1+|\varphi(z)|)}{(1-|z|)(1+|z|)|\ 1-\varphi(z)\ |^2}\Rightarrow$$

$$|p'(z)|\leq\frac{2(1+|\varphi(z)|)}{(1-|z|)(1+|z|)(1-|\varphi(z)|)}=\frac{1+|\varphi(z)|}{(1+|z|)}\cdot\frac{2}{(1-|z|)(1-|\varphi(z)|)}$$

$|\varphi(z)|\leq|z|$ olduğundan $1+|\varphi(z)|\leq 1+|z| \Rightarrow \dfrac{1+|\varphi(z)|}{(1+|z|)}\leq 1$ ifadesi kullanılırsa

$$|p'(z)|\leq\frac{2}{(1-|z|)(1-|\varphi(z)|)}\leq\frac{2}{(1-|z|)(1-|z|)}=\frac{2}{(1-|z|)^2}$$

Sonuç olarak;

$$|p'(z)|\leq\frac{2}{(1-|z|)^2}$$

bulunur. $z=0$ yazılırsa $|p'(0)|\leq 2$ bulunur.

5.6 Teorem : $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + ...$ fonksiyonu D de analitik olsun. Bu takdirde aşağıdaki üç koşul eşdeğerdir:

(i) $p(z) \in P$

(ii) $p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} . d\gamma(t)$, $\gamma(2\pi) - \gamma(0) = 1$

gerçeklenecek şekilde artan $\gamma(t)$ fonksiyonu vardır. ($0 \le t \le 2\pi$)

(iii) $m = 1,2,3,...$ için

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{p=0}^{m} c_{k-p} \lambda_k \overline{\lambda_p} \ge 0 \quad (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in C) \text{ dir. } c_0 = 2 \text{ ve } c_{-k} = \overline{c_k} \quad (k \ge 1)$$

kabul edilmiştir.

İspat : (i) koşulu gerçeklenmiş olsun. Bu takdirde Schwarz Formülüne göre;

“ Schwarz Formülü: $f(z)$, $|z| < R$ de analitik olsun. Bu takdirde

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varepsilon|=R} \frac{\varepsilon + z}{\varepsilon - z} . u(\varepsilon) . \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + ic$$

dir. Burada c keyfi reel sabittir ve

$$u(z) = \text{Re}[\ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varepsilon|=R} \frac{\varepsilon + z}{\varepsilon - z} . u(\varepsilon) . \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\ ] \quad \text{ise}$$

$f(z)$ nin reel kısmıdır. “

O halde bu formülden;

$$p(z) = [\ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varepsilon|=r} \frac{\varepsilon + z}{\varepsilon - z} . \text{Re}\, p(\varepsilon) . \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\ ]$$

$$(\ \varepsilon = re^{it} \Rightarrow d\varepsilon = ire^{it} dt \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{ire^{it} dt}{re^{it}} = idt\ )$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}.\operatorname{Re} p(re^{it}).idt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}.\operatorname{Re} p(re^{it}).dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}.d\gamma(t,r) \qquad (\ |z|<r<1\ )$$

burada $\gamma(t,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{t}\operatorname{Re} p(re^{it})dt$ ($0 \le t \le 2\pi$) .

$\operatorname{Re} p(z) > 0$ olduğundan $\gamma(t,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} p(re^{it})dt > 0$ dır. O halde $0 \le t_1 \le t_2 \le 2\pi$ olmak üzere $0 \le t_2 - t_1 \le 2\pi$ olduğundan;

$$\gamma(t_2,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{t_2}\operatorname{Re} p(re^{it})dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{t_1}\operatorname{Re} p(re^{it})dt + \frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\operatorname{Re} p(re^{it})dt > 0$$

$$\Rightarrow \gamma(t_2,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{t_2}\operatorname{Re} p(re^{it})dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{t_1}\operatorname{Re} p(re^{it})dt + \frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\operatorname{Re} p(re^{it})dt >$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{t_1}\operatorname{Re} p(re^{it})dt$$

$0 \le t_1 \le t_2 \le 2\pi$ için $\gamma(t_1,r) \le \gamma(t_2,r)$ dir. Yani fonksiyon $0 \le t \le 2\pi$ de artandır.

Diğer taraftan

$$p(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}.\operatorname{Re} p(re^{it}).dt$$

ifadesinde $z = 0$ yazılırsa $p(0) = 1$ olduğundan

$$p(0)=1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+0}{re^{it}-0}.\mathrm{Re}\,p(re^{it}).dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,p(re^{it}).dt=\gamma(2\pi,r)$$

Yani sonuç olarak $\gamma(2\pi,r)$=1 bulunur. Aynı zamanda

$\gamma(t,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{t}\mathrm{Re}\,p(re^{it})dt$ ifadesinden

$$\gamma(0,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{0}\mathrm{Re}\,p(re^{it})dt=0$$

bulunur.

“ **Helly Seçme Teoremi :** (Natanson p.223 veya Feller p.267) $[a,b]$ aralığında sonsuz elemana sahip bir $F=\{f(x)\}$ ailesi tanımlanmış olsun. Ailenin bütün fonksiyonları ve ailenin her fonksiyonunun toplam varyasyonu sınırlı ise yani $|f(x)|\leq K$ ve $\overset{b}{\underset{a}{\vee}}(f)\leq K$ ise F ailesinden bir $(f_n(x))$ dizisi seçmek mümkündür. Öyle ki dizi $[a,b]$ nin her noktasında sonlu bir $\varphi(x)$ fonksiyonuna yakınsar. “

n’ ye göre limiti 1 olan ($n\to\infty$ için $r_n\to 1$) öyle bir (r_n) dizisi bulunabilir ki $\gamma(t,r_n)$ bütün süreklilik noktaları için artan bir $\gamma(t)$ fonksiyonuna yakınsar. Böylece

$$p(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}.\mathrm{Re}\,p(re^{it}).dt=\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}.d\gamma(t,r)$$

ifadesinden limite geçilirse

$$p(z)=\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}(1+zr^{-1}e^{-it})}{re^{it}(1-zr^{-1}e^{-it})}.d\gamma(t,r)=\int_0^{2\pi}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}.d\gamma(t)$$

bulunur. Bu (ii) ifadesidir. ((i)$\Rightarrow$(ii))

(ii) koşulu gerçeklenmiş olsun. Katsayılar

$$c_k=2\int_0^{2\pi}e^{-ikt}d\gamma(t)$$

ile ifade edilirler.

Gerçekten;

$$p(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}.d\gamma(t)=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z+e^{-it}z-e^{-it}z}{1-ze^{-it}}.d\gamma(t)$$

$$=\int_0^{2\pi}(\frac{1-e^{-it}z}{1-e^{-it}z}+\frac{2e^{-it}z}{1-e^{-it}z})d\gamma(t)=\int_0^{2\pi}(1+\frac{2e^{-it}z}{1-e^{-it}z})d\gamma(t)$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[1+2e^{-it}z(1+e^{-it}z+e^{-2it}z^2+\ldots)\right]d\gamma(t)$$

$$=\int_0^{2\pi}d\gamma(t)+2\int_0^{2\pi}e^{-it}zd\gamma(t)+2\int_0^{2\pi}e^{-2it}z^2d\gamma(t)+\ldots$$

olduğundan dolayı katsayılar

$$c_k=2\int_0^{2\pi}e^{-ikt}d\gamma(t)\quad,\qquad(\ k=1,2,\ldots\ )$$

ile ifade edilirler. $k\le 0$ için de bu formül geçerlidir.(Öyle ki $c_0=2$, $c_{-k}=\overline{c_k}$, $k\ge 1$ koşulu altında)

Böylece

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{m}\lambda_k e^{-ikt}\right|^2 d\gamma(t)$$

$$=\int_0^{2\pi}(\lambda_0+\lambda_1e^{-it}+\lambda_2e^{-2it}+\ldots+\lambda_me^{-mit})(\overline{\lambda_0}+\overline{\lambda_1}e^{it}+\overline{\lambda_2}e^{2it}+\ldots+\overline{\lambda_m}e^{mit})d\gamma(t)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{m} \lambda_k e^{-ikt}\right)\left(\sum_{p=0}^{m} \overline{\lambda_p} e^{ipt}\right) d\gamma(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \sum_{p=0}^{m} \lambda_k \overline{\lambda_p} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-p)t} d\gamma(t) \tag{5.7}$$

olur. Ancak

$$c_k = 2\int_0^{2\pi} e^{-ikt} d\gamma(t) \quad , \qquad (k = 0,1,2,...)$$

olduğundan ve

$$\frac{1}{2} c_{k-p} = \int_0^{2\pi} e^{-i(k-p)t} d\gamma(t)$$

olur. Bu da (5.7) deki ifadede yerine yazılırsa ve $d\gamma(t) > 0$ olduğundan;

$$0 \le \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{m} \lambda_k e^{-ikt} \right|^2 d\gamma(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m} \sum_{p=0}^{m} \lambda_k \overline{\lambda_p} c_{k-p} \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{m} \sum_{p=0}^{m} \lambda_k \overline{\lambda_p} c_{k-p} \ge 0$$

bulunur. Bu da (iii) ifadesidir. ((ii)$\Rightarrow$(iii))

Son olarak (iii) koşulu gerçeklenmiş olsun. $k = 0,1,2,...,m$ için $\lambda_k = z^k$ ($|z| < 1$) seçelim ve $m \to \infty$ olsun. Bu halde

$$0 \le \sum_{k=0}^{m} \sum_{p=0}^{m} \lambda_k \overline{\lambda_p} c_{k-p} \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{m} \sum_{p=0}^{m} c_{k-p} z^k (\bar{z})^p$$

ifadesi elde edilir. Bu halde bu toplamda üç terim vardır:

$$k = p \text{ olanlar: } \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_0 z^p (\bar{z})^p = 2\sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} \tag{5.8}$$

$k > p$ olanlar: $k = p + n$, ($n = 1,2,...$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_{k-p} z^k (\bar{z})^p = \sum_{k=p+n}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_n z^{p+n} (\bar{z})^p$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n |z|^{2p} \qquad (k - p = n,\ n = 1,2,...\ ) \qquad (5.9)$$

$k < p$ olanlar: $p = k + n$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_{k-p} z^k (\bar{z})^p = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=k+n}^{\infty} c_{-n} z^k (\bar{z})^k (\bar{z})^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} |z|^{2k} (\bar{z})^n \qquad (\ p - k = n,\ n = 1,2,...\ ) \qquad (5.10)$$

Sonuç olarak;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_{k-p} z^k (\bar{z})^p = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n z^n |z|^{2p}}$$

yazılabilir. (5.8), (5.9), (5.10) terimleri taraf tarafa toplanırsa;

$$0 \le \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_{k-p} z^k (\bar{z})^p = 2\sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} + \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n |z|^{2p} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n z^n |z|^{2p}}}_{2\,\mathrm{Re} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n |z|^{2p}}$$

$$= 2\sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} + 2\,\mathrm{Re} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n |z|^{2p} = 2\sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} + 2\,\mathrm{Re} \sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

$$=2\sum_{p=0}^{\infty}|z|^{2p} + 2\sum_{p=0}^{\infty}|z|^{2p}.\underbrace{\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n}_{\operatorname{Re} p(z)-1} = \frac{2}{1-|z|^2} + \frac{2}{1-|z|^2}(\operatorname{Re} p(z)-1)$$

$$= \frac{2}{1-|z|^2}(1+\operatorname{Re} p(z)-1) = \frac{2}{1-|z|^2}\operatorname{Re} p(z)$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{2}{1-|z|^2}\operatorname{Re} p(z) \;\Rightarrow\; |z|<1 \;\Rightarrow\; |z|^2<1 \;\Rightarrow\; 1-|z|^2>0 \;\Rightarrow\; \frac{2}{1-|z|^2}>0$$

olduğundan $\operatorname{Re} p(z) > 0$ bulunur. $p(z) \in P$ olur. Yani (i) gerçeklenmiş olur.

((iii)$\Rightarrow$(i))

O halde sonuç olarak ;

$$\left.\begin{array}{l}(i) \Rightarrow (ii)\\ (ii) \Rightarrow (iii)\\ (iii) \Rightarrow (i)\end{array}\right\} \Rightarrow (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \qquad \text{olur.}$$

5.7 Sonuç : $p(z) = 1 + c_1 z + ... \in P$ olsun. Bu takdirde $|c_n| \le 2$ ($n = 1,2,...$) dir.

6. YILDIZIL FONKSİYONLAR

6.1 Tanım (Yıldızıl Fonksiyon**) :** $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ fonksiyonu $D = \{z \mid |z| < 1\}$ içinde yalınkat ve $F = f(D)$ tasvir bölgesi O başlangıç noktasına göre yıldız bölge ise yani $w \in F$ için, $0 \le t \le 1$ olmak üzere $tw \in F$ ise $f(z)$ fonksiyonuna " yıldızıl fonksiyon " denir. Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı S^* ile gösterilir.

6.2 Teorem : $f(z)$ analitik fonksiyonunun $D = \{z \mid |z| < 1\}$de yıldızıl olması için gerek ve yeter şart

$$p(z) = z.\frac{f'(z)}{f(z)} \in P$$

olmasıdır.

İspat : $f(z)$ D de yıldızıl olsun . Bu takdirde aşağıda yazılan üç koşul yıldızıl fonksiyon tanımından dolayı gerçeklenir:

(i) $f(z)$ fonksiyonu $D = \{z \mid |z| < 1\}$ de yalınkattır.

(ii) $f(D) = F$ tasvir bölgesi O başlangıç noktasına göre yıldızıl bölgedir. Yani $w \in F$ ve $0 \le t \le 1$ olmak üzere $tw \in F$ dir.

(iii) $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ ise $f(0) = 0$ ve $0 \in F = f(D)$ dir.

İddia 1 : $g(z) = t.f(z)$ fonksiyonu $(0 \le t \le 1)$ $f(z)$ fonksiyonuna sabordinedir.

İspat : $f(z) = z + a_2 z^2 + ... \Rightarrow f(0) = 0$

$$g(z)=t.f(z)\Rightarrow g(0)=t.f(0)=t.0=0\Rightarrow f(0)=g(0)$$

$$w\in g(D)\Rightarrow t.f(z)=w \qquad (6.1)$$

olacak şekilde bir $z\in D$ vardır. $f(z)$ yıldızıl fonksiyon olduğundan $\forall\ z\in D$ için ve

$t\in[0,1]\leftrightarrow 0\le t\le 1$ olmak üzere

$$t.f(z)\in f(D) \qquad (6.2)$$

dir. O halde (6.1) ve (6.2) ifadelerinden $w=t.f(z)\in f(D)$ dir. Buradan $g(D)\subset f(D)$ elde edilir.

Diğer taraftan $f(z)$, D de yalınkat olduğundan

"Lemma 4.10: $G(z)$, D yalınkat olsun. Ancak ve yalnız $G(0)=F(0)$ ve $F(D)\subset G(D)$ ise $F(z)\prec G(z)$ dir."

Bu lemmanın gerekliğine göre $t.f(z)\prec f(z)$ olur. Diğer taraftan ;

İddia 2 : Burada sabordinasyon prensibi kullanılacak olursa : $0<r<1$ olmak üzere $g(D_r)\subset f(D_r)$ sonucu bulunur. Bunun anlamı

$$\{tf(z)|\ |z|<r\}\subset\{f(z)|\ |z|<r\} \qquad (0\le t\le 1,\ 0<r<1)$$

dir.

İddia 3 : Ancak aynı zamanda $\{f(z)|\ |z|<r\}=f(D_r)$ bölgesi yıldızıl bir bölgedir.

İspat : Gerçekten $w_0\in f(D_r)\Rightarrow w_0=f(z_0)$ olacak şekilde bir $z_0\in D_r$ vardır. $0\le t\le 1$ olmak üzere $tw_0=tf(z_0)\in g(D_r)$ dir. $g(D_r)\subset f(D_r)\Rightarrow tw_0\in f(D_r)$ bulunur ki, bu iddianın doğruluğunu gösterir. O halde $f(z)$ nin, D_r de yıldızıl bir fonksiyon olduğu sonucuna varılır.

İddia 4 : Geometrik varsayımlar gösterir ki $Argf(re^{i\theta})$; $0 \le \theta \le 2\pi$ de θ nın artan bir fonksiyonudur.

İspat : İddia 3 de, $f(z)$ nin D_r de yıldızıl bir fonksiyon olduğu gösterilmişti. Özellik 1.18 den dolayı, θ nın pozitif yönde 2π kadar artması halinde $Argf(re^{i\theta})$ da aynı yönde 2π kadar artar. Bu da $Argf(re^{i\theta})$ nın, θ nın artan fonksiyonu olduğunu gösterir. Yani ;

$$\frac{d}{d\theta}\left[Argf(re^{i\theta})\right] > 0 \quad (6.3)$$

dir.

Şimdi bu iddiaların ışığı altında teorem incelenirse ;

$\log f(z) = \log|f(z)| + iArgf(z)$ bağıntısında $z = re^{i\theta}$ yazılırsa

$\log f(re^{i\theta}) = \log|f(re^{i\theta})| + iArgf(re^{i\theta})$

bulunur. θ ya göre türetilirse ;

$$\Rightarrow ire^{i\theta}.\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\log\left|f(re^{i\theta})\right|\right\} + i\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{Argf(re^{i\theta})\right\}$$

$$\Rightarrow re^{i\theta}.\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} = -i\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\log\left|f(re^{i\theta})\right|\right\} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{Argf(re^{i\theta})\right\}$$

$$\mathrm{Re}\left\{re^{i\theta}.\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right\} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{Argf(re^{i\theta})\right\} \quad (6.4)$$

bulunur. Diğer taraftan ;

$\log f(z) = \log|f(z)| + iArgf(z)$ eşitliğinden dolayı

$im\{\log f(z)\} = Arg\{f(z)\}$

yazılabilir. Ancak diğer yandan $z = re^{i\theta} \Rightarrow im\{\log f(re^{i\theta})\} = Arg\{f(re^{i\theta})\}$ ifadesi θ ya göre türetilirse;

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{im\log f(re^{i\theta})\right\}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{Argf(re^{i\theta})\right\} \tag{6.5}$$

(6.4) ve (6.5) bağıntılarından ;

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Re}\left\{re^{i\theta}.\dfrac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right\}=\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left\{Argf(re^{i\theta})\right\}\\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left\{im\log f(re^{i\theta})\right\}=\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left\{Argf(re^{i\theta})\right\}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}\left\{re^{i\theta}.\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right\}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{im\log f(re^{i\theta})\right\}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{Argf(re^{i\theta})\right\}$$

bulunur. Burada, iddia 4 ‘ün sonucu olan (6.3) bağıntısı kullanılacak olursa ;

$$\operatorname{Re}\left\{re^{i\theta}.\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right\}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{im\log f(re^{i\theta})\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{Argf(re^{i\theta})\right\}>0$$

elde edilir. O halde bu bağıntı $\operatorname{Re}\left\{z.\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right\}>0$ şeklinde ifade edilebilir.

$p(z)=z.\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ ve $f(z)$; D de yalınkattır (yıldızıl olduğundan). Bunun sonucunda;

$$p(z)=z\frac{\left(z+a_2z^2+...\right)'}{z+a_2z^2+...}=\frac{z+2a_2z^2+...}{z+a_2z^2+...}=\frac{z(1+2a_2z+...)}{z(1+a_2z+...)}$$

$$p(0)=\frac{1+0+...}{1+0+...}=1\Rightarrow p(0)=1$$

bulunur.

$f(z)$ D de yalınkat olduğundan $\forall z \neq 0 \in D$ için $f(z) \neq 0 = f(0)$ ve $f'(z) \neq 0$ dır. O halde $p(z) = z.\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, D de analitik ve $\operatorname{Re}\, p(z) = \operatorname{Re}\left\{ z.\dfrac{f'(z)}{f(z)} \right\} > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\, p(z) > 0$ dır. O halde $p(z) \in P$ dir.

Tersine $p(z) = z.\dfrac{f'(z)}{f(z)} \in P$ olsun. Bu takdirde $f(z)$, D de $f(z) \neq 0$ koşulunu gerçekler. Eğer gerçeklemeseydi $p(z)$ nin D de kutbu olacaktı. Bu da $p(z)$ nin D de analitik olmasına aykırılık teşkil edecekti. Eğer a_m katsayısı, $f(z)$ nin sıfırdan farklı ilk katsayısı ise ; $f(z) = a_m z^m + ...$ olacaktır.

$$f'(z) = m.a_m z^{m-1} + ...$$

$$p(z) = z.\frac{f'(z)}{f(z)} = z.\frac{m.a_m z^{m-1} + ...}{a_m z^m + ...} = \frac{m a_m z^m + ...}{a_m z^m + ...}$$

$$= \frac{a_m z^m (m + ...)}{a_m z^m (1 + ...)} = \frac{m + ...}{1 + ...}$$

$p(z) \in P \Rightarrow p(0) = 1$ dir. O halde $p(0) = \dfrac{m}{1} = m = 1$ olmak zorundadır.

O halde sıfırdan farklı ilk katsayı a_1 dir. Yani;

$f(z) = a_1 z + ... \Rightarrow a_1 = 1$ alınırsa ; $f(0) = 0, f'(0) = 1 \neq 0$ koşulunu gerçekler.

$p(z) = z.\dfrac{f'(z)}{f(z)} \in P$ olduğundan

$$\operatorname{Re}\left\{ re^{i\theta}.\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right\} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left\{ im \log f(re^{i\theta}) \right\} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left\{ Argf(re^{i\theta}) \right\} > 0$$

olduğundan dolayı $Argf(re^{i\theta})$; $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ de artandır. O halde bu artımın toplamı;

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\theta} Argf(re^{i\theta})d\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left[re^{i\theta}.\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right] d\theta$$

$$(z = re^{i\theta} \Rightarrow dz = ire^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{1}{i}\frac{dz}{z})$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \int_{|z|=r} \left[z.\frac{f'(z)}{f(z)}.\frac{1}{i}.\frac{dz}{z} \right] = \operatorname{Re} \int_{|z|=r} \left[\frac{1}{i}.\frac{f'(z)}{f(z)}.dz \right]$$

$$= \operatorname{Re}\left[\frac{1}{i}.2\pi i(\sum \underbrace{sıfırlar}_{1} - \sum \underbrace{rezidüler}_{0}) \right] = \operatorname{Re}[2\pi] = 2\pi$$

dir. O halde $f(z)$ fonksiyonu $|z| = r$ dairesini (1-1) olarak yıldızıl analitik eğri üzerine tasvir eder. O halde ;

“ Lemma : $f(z)$, $\overline{D}$ de analitik, ∂D de injektif ise bu takdirde $f(z)$, D de yalınkattır ve D yi $j = f(\partial D)$ kapalı Jordan eğrisinin iç bölgesi üzerine tasvir eder.(Lemma 1.1 Bölüm 1 (Bazı Temel Sonuçlar) Chr.Pommerenke sayfa 13)

$f(z)$ nin $D_r = \{z \mid |z| < r\}$ de yalınkat olduğu ve $f(D_r)$ nin yıldızıl bir bölge olduğu D_r yi $f(D_r)$ nin içine tasvir ettiği görülmüştür. O halde $\{f(z) \mid |z| < r\}$ yıldızıl bir bölgedir ve her $0 < r < 1$ için bu işlem doğru olacağından $f(z)$, $D_r = \{z| \ |z| < r < 1\}$ de yalınkattır ve yıldızıl bir fonksiyondur. “

Şimdi de yıldızıl fonksiyonlar için bir gösteriliş çıkarılacak olursa ;

6.3 Teorem : $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ fonksiyonunun $D_r = \{z \mid |z| < r\}$ de yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $\gamma(2\pi) - \gamma(0) = 1$ i gerçekleyen artan bir $\gamma(t)$ fonksiyonu için ;

$$f(z) = z.Exp\left[\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{1 - e^{-it}z} d\gamma(t) \right] \qquad (|z| < 1)$$

olmasıdır.

İspat : “ Teorem 5.6 : $p(z)=1+c_1z+...$ fonksiyonu D de analitik olsun. Bu takdirde aşağıdaki üç koşul eşdeğerdir :

(i) $p(z)$ fonksiyonu P sınıfına aittir.

(ii) $p(z)=\left[\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)\right]$; $\gamma(2\pi)-\gamma(0)=1$

gerçeklenecek şekilde artan $\gamma(t)$ fonksiyonu vardır. $(0\le t\le 2\pi)$

(iii) $m=1,2,...$ için

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{p=0}^{m}c_{k-p}\lambda_k\overline{\lambda_p}\ge 0 \qquad (\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_m\in C \text{ dir.}) \text{ . “}$$

“ Teorem 6.2 : $f(z)=z+a_2z^2+...$ analitik fonksiyonunun D de yıldızıl olması için gerek ve yeter şart

$$p(z)=z.\frac{f'(z)}{f(z)}\in P$$

olmasıdır.”

Yazılan son iki teoreme göre ;

$$p(z)=z.\frac{f'(z)}{f(z)}=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)$$

yazılabilir. Burada $\gamma(t)$ fonksiyonu istenilen özelliklere sahiptir. O halde buradan ;

$$p(z)=z.\frac{f'(z)}{f(z)}=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z+e^{-it}z-e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1-e^{-it}z+2e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-e^{-it}z}{1-e^{-it}z} + \frac{2e^{-it}z}{1-e^{-it}z} \right) d\gamma(t)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{2e^{-it}z}{1-e^{-it}z} \right) d\gamma(t)$$

elde edilir. Yani sonuç olarak ;

$$z.\frac{f'(z)}{f(z)} = \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{2e^{-it}z}{1-e^{-it}z} \right) d\gamma(t)$$

Her iki taraf z ye bölünürse ;

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{z} + \frac{2e^{-it}}{1-e^{-it}z} \right) d\gamma(t)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{z} d\gamma(t) + \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{1-e^{-it}z} d\gamma(t) = \frac{1}{z}\int_0^{2\pi} d\gamma(t) + \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{1-e^{-it}z} d\gamma(t)$$

$$= \frac{1}{z}\underbrace{\left[\gamma(2\pi) - \gamma(0)\right]}_{1} + \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{1-e^{-it}z} d\gamma(t) = \frac{1}{z} + \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{1-e^{-it}z} d\gamma(t) \Rightarrow$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{1-e^{-it}z} d\gamma(t)$$

$$= \int_0^{2\pi} 2e^{-it} \left[\frac{1}{1-e^{-it}z} \right] d\gamma(t) = 2\int_0^{2\pi} e^{-it} \left[1 + e^{-it}z + e^{-2it}z^2 + \ldots \right] d\gamma(t)$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left(e^{-it} + e^{-2it}z + e^{-3it}z^2 + \ldots \right) d\gamma(t)$$

$$= \int_0^{2\pi} 2e^{-it} d\gamma(t) + 2\int_0^{2\pi} \left(e^{-2it}z + e^{-3it}z^2 + \ldots \right) d\gamma(t) \Rightarrow$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z} = \int_0^{2\pi} 2e^{-it} d\gamma(t) + 2\int_0^{2\pi} \left(e^{-2it}z + e^{-3it}z^2 + \ldots \right) d\gamma(t)$$

$$\log f(z) - \log z = -2\int_0^{2\pi} \log\left(1 - e^{-it}z\right) d\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \log \frac{f(z)}{z} = -2\int_0^{2\pi} \log\left(1 - e^{-it}z\right) d\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \log \frac{f(z)}{z} = 2\int_0^{2\pi} \log\left(1 - e^{-it}z\right)^{-1} d\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \log \frac{f(z)}{z} = 2\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\left(1 - e^{-it}z\right)} d\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \frac{f(z)}{z} = Exp\left[2\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\left(1 - e^{-it}z\right)} d\gamma(t)\right]$$

$$\Rightarrow f(z) = zExp\left[2\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\left(1 - e^{-it}z\right)} d\gamma(t)\right]$$

bulunur.

Şimdi tersine hareket edilirse;

$$f(z) = z.Exp\left[2\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\left(1 - e^{-it}z\right)} d\gamma(t)\right]$$

ifadesinden logaritma alınırsa ;

$$\Rightarrow \log f(z) = \log z + 2\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\left(1 - e^{-it}z\right)} d\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \log f(z) = \log z + 2\int_0^{2\pi} \log\left(1 - e^{-it}z\right)^{-1} d\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \log f(z) = \log z - 2\int_0^{2\pi} \log\left(1 - e^{-it}z\right) d\gamma(t)$$

Türev alınıp yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa ;

$$p(z) = z.\frac{f'(z)}{f(z)} = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\gamma(t)$$

bulunur ki, bu da Teorem 5.6 gereğince $p(z) \in P$ dir ve Teorem 6.2 gereğince $f(z)$, D de yıldızıldır.

6.4 Teorem : Eğer $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ fonksiyonu D de yıldızıl ise $|a_n| \leq n$ dir.($n = 1,2,3,...$) Eşitlik ancak ve yalnız sırasıyla

$$f(z) = \frac{z}{(1-e^{i\beta}z)^2} \;\;,\;\; f(z) = \frac{z}{1-e^{2i\beta}z^2} \;\;,\;\; f(z) = \frac{z}{1-e^{i\beta}z} \quad (\beta \in R)$$

fonksiyonları için gerçeklenir.

İspat : Eğer $f(z)$ yıldızıl fonksiyon ise

$$p(z) = z.\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{z.(1+2a_2 z + ...)}{z + a_2 z^2 + ...} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

fonksiyonu Teorem 6.2 vasıtasıyla P sınıfına aittir.

$$p(z) = z.\frac{f'(z)}{f(z)} \Rightarrow z.f'(z) = f(z).p(z)$$

eşitliği ele alınsın. Bunların katsayıları karşılaştırılacak olursa

$$z.f'(z) = z.(1+2a_2 z + 3a_3 z^2 + ...) = (z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ...)\;(1 + c_1 z + c_2 z^2 + ...)$$

$$= f(z).p(z)$$

$$z + 2a_2 z^2 + 3a_3 z^3 + ... = (z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n)(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n)$$

$$= (z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n)(1 + c_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n) = z + c_1 z^2 + z.\sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + c_1 z \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

$$+ (\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n)\;(\sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n)$$

Sonuçta katsayılar karşılaştırılırsa;

$$a_n = \frac{1}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1} c_{n-\nu} a_\nu \qquad (n = 2,3,...)$$

rekürans bağıntısı bulunur. Sonuç 5.7 den dolayı $|c_n| \leq 2$ dir.

$$a_n = \frac{1}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1} c_{n-\nu} a_\nu \;\Rightarrow\; |a_n| = \left| \frac{1}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1} c_{n-\nu} a_\nu \right|$$

$$\leq \frac{1}{n-1}\left| \sum_{\nu=1}^{n-1} c_{n-\nu} a_\nu \right| \leq \frac{1}{n-1}\left| \sum_{\nu=1}^{n-1} 2a_\nu \right| = \frac{2}{n-1}\left| \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu \right| \leq \frac{2}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1} |a_\nu|$$

Yani sonuç olarak;

$$|a_n| \leq \frac{2}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1} |a_\nu| \qquad (n = 2,3,...)$$

bulunur. $|a_1| \leq 1$ olduğundan $|a_n| \leq n$ olduğu indüksiyonla ispatlanırsa;

$n = 1$ için $|a_1| \leq 1$ dir.

$n = 2$ için $|a_2| \leq \frac{2}{2-1}\sum_{\nu=1}^{2-1} |a_\nu| = 2\sum_{\nu=1}^{1} |a_\nu| = 2|a_1| \leq 2.1 = 2$

Yani sonuçta $|a_2| \leq 2$ bulunur.

$n = k-1$ için doğru olsun. Yani $|a_{k-1}| \leq k-1$ doğru olsun. (İndüksiyon hipotezi)

$n = k$ için doğruluk ispatı : (İndüksiyon hipotezinden)

$$|a_k| \leq \frac{2}{k-1}\sum_{\nu=1}^{k-1} |a_\nu| = \frac{2}{k-1}(|a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_{k-1}|)$$

$$\leq \frac{2}{k-1}(1 + 2 + 3 + ... + (k-1)) = \frac{2}{k-1}.(\frac{(k-1)k}{2}) = k$$

(Zira $1+2+3+...+(n-1)+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$)

$$\Rightarrow |a_k| \le k$$

bulunur. O halde indüksiyon tamamlanmıştır. Yani $|a_n| \le n$ dir. Şimdi eşitliklerin ancak ve yalnız

$$f(z)=\frac{z}{(1-e^{i\beta}z)^2} \;\;,\;\; f(z)=\frac{z}{1-e^{2i\beta}z^2} \;\;,\;\; f(z)=\frac{z}{1-e^{i\beta}z} \quad (\beta \in R)$$

olması halinde mevcut oldukları gösterilsin:

$$f(z)=\frac{z}{(1-e^{i\beta}z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n.e^{i(n-1)\beta}z^n \Rightarrow$$

$$|a_n|=\left|n.e^{i(n-1)\beta}\right|=n$$

O halde;

$$|a_n|=n \Leftrightarrow f(z)=\frac{z}{(1-e^{i\beta}z)^2}$$

dir.

$$f(z)=\frac{z}{1-e^{2i\beta}z^2}=z+e^{2i\beta}z^3+e^{4i\beta}z^5+...=\sum_{n=1}^{\infty} e^{2i(n-1)\beta}z^{2n-1}$$

$$|a_n|=\left|e^{2i(n-1)\beta}\right|=1 \quad , \quad n=1,2,...$$

olarak iddia doğrulanır.

$$f(z)=\frac{z}{1-e^{i\beta}z}=z+e^{i\beta}z^2+e^{2i\beta}z^3+...$$

$$|a_n|=\left|e^{i(n-1)\beta}\right|=1 \quad , \quad n=1,2,...$$

olarak iddia doğrulanır.

7.BİRİM DİSK CİVARINDA ANALİTİK VE p-DEĞERLİ FONKSİYONLAR SINIFI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

7.1 Özet : Bu bölümde 2004 yılında V. Ravichandran, S. Sivaprasad Kumar ve G. Supramanian [14] tarafından tanıtılan Meromorfik Janowski Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı için gösterilim teoremi, distorsiyon teoremi, yıldızıllık yarıçapı ve katsayı eşitsizliğini veririz.

7.2 Tanım : $w(z)$ fonksiyonu $D = \{z \mid |z| < 1\}$ de tanımlanmış, analitik, $w(0) = 0$ **,** $|w(z)| < 1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonların sınıfı Ω ile gösterilir.

7.3 Tanım : $D^* = \{z \mid z \in C \text{ ve } 0 < |z| < 1\}$ de regüler ve p - değerli

$$f(z) = \frac{1}{z^p} + \sum_{n=1-p}^{\infty} a_n z^n$$

fonksiyonlarının sınıfı $\sum_p$ ile gösterilir.

7.4 Tanım : $\left\{ f \in \sum_p \;\middle|\; z\frac{f'(z)}{f(z)} \prec -pe^{-i\lambda}\left(Cos\lambda\frac{1+Az}{1+Bz} + iSin\lambda\right), \quad -1 \le B < A \le 1 \right\}$

şeklinde tanımlanan sınıfa $S_p^{\lambda}(A,B)$ sınıfı denir. ($|\lambda| < \frac{\pi}{2}$, $p \in N$)

Bu sınıf $\sum_p$ sınıfının bir alt sınıfıdır.

7.5 Lemma : $w(z) \in \Omega$ olsun. Eğer $|z| < 1$ de bulunan bir z_0 noktası için $|w(z)|$ maksimum değerini alıyorsa, bu takdirde $k \geq 1$ olmak üzere $z_0 w'(z_0) = kw(z_0)$ bağıntısı gerçeklenir. Bu lemma I. S. Jack tarafından ispatlanmıştır [5].

7.6 Tanım (Sabordinasyon Prensibi**) :** $w(z) \in \Omega$ olmak üzere $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları birim diskte tanımlanmış, analitik fonksiyonlar olsun. Eğer $f(z) = g(w(z))$ bağıntısı gerçeklenirse bu takdirde $f(z)$ fonksiyonu $g(z)$ fonksiyonuna sabordinedir denir ve $f(z) \prec g(z)$ ile gösterilir. Sabordinasyon tanımı gereği aşikar olarak; $g(z)$ yalınkat bir fonksiyon ise $f(D) \subset g(D)$ bağıntısı vardır.

7.7 Lemma :

$$w = \begin{cases} \dfrac{-p\left[e^{-i\lambda}(ACos\lambda + iBSin\lambda) - B\right]z}{1+Bz} & , B \neq 0 \\ \\ -pe^{-i\lambda} ACos\lambda z & , B = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu $|z| = r$ çemberlerini $C(r)$ merkez ve $\rho(r)$ yarıçap olmak üzere

$$\begin{cases} C(r) = \left(\dfrac{Bp\left[e^{-i\lambda}(ACos\lambda + iBSin\lambda) - B\right]r^2}{1 - B^2 r^2}, 0\right) & , \rho(r) = \dfrac{p(A-B)Cos\lambda . r}{1 - B^2 r^2} & , B \neq 0 \\ \\ C(r) = (0,0) & , \rho(r) = |A| pCos\lambda r & , B = 0 \end{cases}$$

olan çemberler üzerine resmeder.

İspat : $B \neq 0$ için ;

$$w = \frac{-p\left[e^{-i\lambda}(ACos\lambda + iBSin\lambda) - B\right]z}{1+Bz} = \frac{Mz}{1+Bz}, \quad M = -p\left[e^{-i\lambda}(ACos\lambda + iBSin\lambda) - B\right]$$

yazılarak

$$w=\frac{Mz}{1+Bz}\Leftrightarrow z=\frac{w}{M-wB} \ , \ z=x+iy \ , \ w=u+iv \ , \ |z|^2=r^2=\frac{|w|^2}{|M-Bw|^2}$$

eşitliklerinden hareket ederek basit elemanter hesaplamalar sonucu

$$u^2+v^2+\frac{2MBr^2}{1-B^2r^2}.u-\frac{M^2r^2}{1-B^2r^2}=0$$

çember denklemi elde edilir. Bu denklemden de merkez koordinatları

$$C(r)=(\frac{-MBr^2}{1-B^2r^2},0)=(\frac{Bp\left[e^{-i\lambda}(ACos\lambda+iBSin\lambda)-B\right]r^2}{1-B^2r^2},0)$$

olarak bulunur, aynı denklemden yarıçap ise

$$\rho(r)=\frac{|M|r}{1-B^2r^2}=\frac{(A-B)pCos\lambda r}{1-B^2r^2}$$

şeklinde bulunur.

$B=0$ için;

$w=-pe^{-i\lambda}ACos\lambda z$ ifadesinden $z=\dfrac{1}{-pe^{-i\lambda}ACos\lambda}w$ şeklinde yazılarak benzer hesaplamalar sonucu mekez orijin, yarıçap ise $\rho(r)=|A|pCos\lambda r$ şeklinde bulunur. $(|\lambda|<\dfrac{\pi}{2})$.

7.8 Teorem : $f(z)=\dfrac{1}{z^p}+\sum\limits_{n=1-p}^{\infty}a_nz^n$, D^* birim diskinde tanımlanmış, analitik bir fonksiyon olmak üzere

$$(z\frac{f'(z)}{f(z)}+p)\prec\begin{cases}\dfrac{-p\left[e^{-i\lambda}(ACos\lambda+iBSin\lambda)-B\right]z}{1+Bz}=F_1(z) & ,B\neq 0\\ -pe^{-i\lambda}ACos\lambda.z=F_2(z) & ,B=0\end{cases}$$

sabordinasyonu sağlanıyorsa $f(z)\in S_p^{\lambda}(A,B)$ dir.

İspat : $w(z)$ fonksiyonunu $f(z)=\frac{1}{z^p}+\sum_{n=1-p}^{\infty}a_n z^n$ olmak üzere

$$\frac{f(z)}{z^{-p}}=\begin{cases}(1+Bw(z))^{-p\frac{\left[e^{-i\lambda}(ACos\lambda+iBSin\lambda)-B\right]}{B}} & ,B\neq 0\\ e^{-pe^{-i\lambda}ACos\lambda w(z)} & ,B=0\end{cases}\tag{7.1}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $(1+Bw(z))^{-p\frac{\left[e^{-i\lambda}(ACos\lambda+iBSin\lambda)-B\right]}{B}}$ ifadesinin $z=0$ daki değeri 1 e eşit olacak şekilde Riemann Yüzeyi seçilsin. Bu durumda sabordinasyon koşulları;

$w(z)$ tanımından dolayı D de analitiktir, $w(0)=0$ (seçilen yüzeyden dolayı) dır.

Şimdi ise $f(z)$ fonksiyonu (7.1) eşitliğinden düzenlenip logaritmik türev alınır, gerekli işlemler yapılırsa;

$$(z\frac{f'(z)}{f(z)}+p)=\begin{cases}\frac{-p\left[e^{-i\lambda}(ACos\lambda+iBSin\lambda)-B\right]zw'(z)}{1+Bw(z)} & ,B\neq 0\\ -pe^{-i\lambda}ACos\lambda zw'(z) & ,B=0\end{cases}$$

eşitliği bulunur. Burada sabordinasyon prensibinin $|w(z)|<1$ koşulu için, tersine hareket edip $|w(z_1)|=1$ olacak şekilde $z_1\in D$ var kabul edilirse, $|w(z)|$ için bir maksimum değer belirlenmiş olur. Bu ifadeden lemma 7.5 e göre de

$$(z_1\frac{f'(z_1)}{f(z_1)}+p)=\begin{cases}\frac{-p\left[e^{-i\lambda}(ACos\lambda+iBSin\lambda)-B\right]kw(z_1)}{1+Bw(z_1)} & ,B\neq 0\\ -pe^{-i\lambda}ACos\lambda kw(z_1) & ,B=0\end{cases}$$

bağıntısı yazılabilir. Burada $k\geq 1$ dir. Bu durumda lemma 7.7 den

$$(z_1\frac{f'(z_1)}{f(z_1)}+p)=F_1(w(z_1))\notin F_1(D)\quad ,\quad B\neq 0$$

$$(z_1\frac{f'(z_1)}{f(z_1)}+p)=F_2(w(z_1))\notin F_2(D)\quad ,\quad B=0$$

olduğu elde edilir. ($k \neq 1$ için) Bu ise bir çelişkidir. Çelişkiye düşülme nedeni $|w(z_1)| = 1$ olacak şekilde bir $z_1 \in D$ bulunabileceğidir. Bu durumda $|w(z)| < 1$ olan tüm $z \in D$ ler için bu sabordinasyon gerçeklenir. Bu sabordinasyondan hareketle;

$$\begin{cases} (z\dfrac{f'(z)}{f(z)} + p) \prec \dfrac{-p\left[e^{-i\lambda}(ACos\lambda + iBSin\lambda) - B\right]z}{1+Bz} \Leftrightarrow (z\dfrac{f'(z)}{f(z)} + p) = \dfrac{-p\left[e^{-i\lambda}(ACos\lambda + iBSin\lambda) - B\right]w(z)}{1+Bw(z)} \\ \Leftrightarrow z\dfrac{f'(z)}{f(z)} \prec -pe^{-i\lambda}(Cos\lambda\dfrac{1+Az}{1+Bz} + iSin\lambda), B \neq 0 \\ (z\dfrac{f'(z)}{f(z)} + p) \prec -pe^{-i\lambda}ACos\lambda z \Leftrightarrow (z\dfrac{f'(z)}{f(z)} + p) = -pe^{-i\lambda}ACos\lambda w(z) \\ \Leftrightarrow z\dfrac{f'(z)}{f(z)} \prec -pe^{-i\lambda}(Cos\lambda(1+Az) + iSin\lambda), B = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(z) \in S_p^{\lambda}(A,B)$ olduğu bulunur.

7.9 Sonuç : $f(z) \in S_p^{\lambda}(A,B)$ ise

$$f(z) = \begin{cases} z^{-p}(1+Bw(z))^{-p\frac{\left[e^{-i\lambda}(ACos\lambda + iBSin\lambda) - B\right]}{B}} & , B \neq 0 \\ z^{-p}e^{-pe^{-i\lambda}ACos\lambda w(z)} & , B = 0 \end{cases}$$

şeklinde bir gösterilime sahip olur.

7.10 Lemma : $p_0(z) = -p\dfrac{1+e^{-i\lambda}(ACos\lambda + iBSin\lambda)z}{1+Bz}$ fonksiyonu $|z| = r$ çemberlerini merkez $C(r)$ ve yarıçap $\rho(r)$ olmak üzere

$$\begin{cases} C(r) = (-p.\dfrac{1-B\left[(A-B)Cos\lambda e^{-i\lambda} + B\right]r^2}{1-B^2r^2}, 0) \; , \rho(r) = \dfrac{p(A-B)Cos\lambda r}{1-B^2r^2} & , B \neq 0 \\ C(r) = (-p, 0) \; , \rho(r) = |A| pCos\lambda.r & , B = 0 \end{cases}$$

şeklindeki çemberler üzerine resmeder. Bunun gösterilmesi için

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} \prec -pe^{-i\lambda}(Cos\lambda\frac{1+Az}{1+Bz} + iSin\lambda) = P_0(z)$$

sabordinasyonundan yararlanılır.

İspat : $B \neq 0$ için;

$$w = p_0(z) = -p.\frac{1+e^{-i\lambda}(ACos\lambda + iBSin\lambda)z}{1+Bz} = -p.\frac{1+Nz}{1+Bz} \Leftrightarrow z = -\frac{w+p}{Np+Bw}$$

$$N = e^{-i\lambda}(ACos\lambda + iBSin\lambda)$$

yazılarak ve lemma 7.7 deki aynı işlemler uygulanarak

$$u^2 + v^2 + \frac{\left[2p(1-BNr^2)\right]}{1-B^2r^2}.u + p^2\,\frac{(1-N^2r^2)}{1-B^2r^2} = 0$$

şeklinde çember denklemi elde edilir. Buradan da basit hesaplamalarla merkez

$$C(r) = (-p\,\frac{(1-BNr^2)}{1-B^2r^2},0) = (-p\,\frac{1-B\left[(A-B)Cos\lambda e^{-i\lambda} + B\right]r^2}{1-B^2r^2},0)$$

bulunur ve aynı denklemden yarıçap ise

$$\rho(r) = p\,\frac{|B-N|.r}{1-B^2r^2} = \frac{p(A-B)Cos\lambda r}{1-B^2r^2}$$

elde edilir.

$B = 0$ için;

$$w = -p(1+e^{-i\lambda}ACos\lambda z) \Leftrightarrow z = -\frac{w+p}{pe^{-i\lambda}ACos\lambda}$$

yazılıp aynı işlemler tekrarlanırsa merkez $C(r) = (-p,0)$ olarak yarıçap ise $\rho(r) = p|A|Cos\lambda r$ şeklinde bulunur.

7.12 Teorem : $f(z)\in S_p^{\lambda}(A,B)$ ise

$$\begin{cases} \left[\dfrac{r\left|1-B^2r^2\right|^{\frac{(A-B)Cos^2\lambda}{2B}}}{\left|\dfrac{1+Br}{1-Br}\right|^{\frac{-(A-B)Cos\lambda}{2B}}}\right]^{-p} \le \left|f(z)\right| \le \left[\dfrac{r\left|1-B^2r^2\right|^{\frac{(A-B)Cos^2\lambda}{2B}}}{\left|\dfrac{1+Br}{1-Br}\right|^{\frac{(A-B)Cos\lambda}{2B}}}\right]^{-p} & ,B\neq 0 \\ \dfrac{e^{-p|A|Cos\lambda r}}{r^p} \le \left|f(z)\right| \le \dfrac{e^{p|A|Cos\lambda r}}{r^p} & ,B=0 \end{cases}$$

distorsiyonu vardır. Bu sonuç kesindir. Zira ekstremal fonksiyon; (Bakınız sonuç 7.9)

$$f_*(z)=\begin{cases} z^{-p}(1+Bz)^{\frac{-(pe^{-i\lambda}(ACos\lambda+iBSin\lambda)-Bp)}{B}} & ,B\neq 0 \\ z^{-p}e^{-Ape^{-i\lambda}Cos\lambda.z} & ,B=0 \end{cases}$$

sınırlarda eşitlik halini verir.

İspat : Lemma 7.10 ve $S_p^{\lambda}(A,B)$ sınıfının tanımından dolayı

$$\begin{cases} \left|z\dfrac{f'(z)}{f(z)}+p\dfrac{1-B\left[(A-B)e^{-i\lambda}Cos\lambda+B\right].r^2}{1-B^2r^2}\right| \le \dfrac{p(A-B)Cos\lambda r}{1-B^2r^2} & ,B\neq 0 \\ \left|z\dfrac{f'(z)}{f(z)}+p\right| \le p|A|Cos\lambda.r & ,B=0 \end{cases}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Burada $-|z|\le \operatorname{Re} z\le |z|$ eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{cases} -p\left[1+\dfrac{(A-B)Cos\lambda r}{1-B^2r^2}-\dfrac{B(A-B)Cos^2\lambda r^2}{1-B^2r^2}\right]\le \operatorname{Re} z\dfrac{f'(z)}{f(z)}\le -p\left[1-\dfrac{(A-B)Cos\lambda r}{1-B^2r^2}-\dfrac{B(A-B)Cos^2\lambda r^2}{1-B^2r^2}\right] & ,B\neq 0 \\ -p-p|A|Cos\lambda r\le \operatorname{Re} z\dfrac{f'(z)}{f(z)}\le -p+p|A|Cos\lambda r & ,B=0 \end{cases} \qquad (7.2)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizliklerde ise

$$\operatorname{Re} z \frac{f'(z)}{f(z)} = r \frac{\partial}{\partial r} \log|f(z)|$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{cases} -p\left[\dfrac{1}{r} + \dfrac{(A-B)Cos\lambda}{1-B^2r^2} - \dfrac{B(A-B)Cos^2\lambda r}{1-B^2r^2}\right] \le \dfrac{\partial}{\partial r}\log|f(z)| \le -p\left[\dfrac{1}{r} - \dfrac{(A-B)Cos\lambda}{1-B^2r^2} - \dfrac{B(A-B)Cos^2\lambda r}{1-B^2r^2}\right] & , B \neq 0 \\ -p(|A|Cos\lambda + \dfrac{1}{r}) \le \dfrac{\partial}{\partial r}\log|f(z)| \le p(|A|Cos\lambda - \dfrac{1}{r}) & , B = 0 \end{cases}$$

ifadeleri elde edilir. Bulunan bu ifadelerde her taraf integre edilir ve düzenlenirse

$B \neq 0$ için

$$\left(\frac{r|1-B^2r^2|^{\frac{(A-B)Cos^2\lambda}{2B}}}{\left|\frac{1+Br}{1-Br}\right|^{-\frac{(A-B)Cos\lambda}{2B}}}\right)^{-p} \le |f(z)| \le \left(\frac{r|1-B^2r^2|^{\frac{(A-B)Cos^2\lambda}{2B}}}{\left|\frac{1+Br}{1-Br}\right|^{\frac{(A-B)Cos\lambda}{2B}}}\right)^{-p}$$

şeklinde

$B = 0$ için ise

$$\frac{e^{-p|A|Cos\lambda r}}{r^p} \le |f(z)| \le \frac{e^{p|A|Cos\lambda r}}{r^p}$$

distorsiyonu bulunur ki bulunan son iki eşitsizlik bize teoremin ispatını verir.

7.13 Sonuç : $S_p^{\lambda}(A,B)$ sınıfı için yıldızıllık yarıçapı

$$\begin{cases} r_s = \left|\dfrac{2}{-(A-B)Cos\lambda + \sqrt{(A-B)^2 Cos^2\lambda + 4[B(A-B)Cos^2\lambda + B^2]}}\right| & , B \neq 0 \\ r_s = \left|-\dfrac{1}{|A|Cos\lambda}\right| & , B = 0 \end{cases}$$

şeklinde verilir.

İspat : Daha önce yazılan (7.2) eşitsizliklerinden

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z\dfrac{f'(z)}{f(z)} \geq -p\left[1+\dfrac{(A-B)Cos\lambda r}{1-B^2r^2}-\dfrac{B(A-B)Cos^2\lambda r^2}{1-B^2r^2}\right] & , B\neq 0 \\ \operatorname{Re} z\dfrac{f'(z)}{f(z)} \geq -p-p|A|Cos\lambda r & , B=0 \end{cases}$$

şeklinde yazılır. Bu iki eşitsizliğin de çözümlenerek köklerinin bulunmasıyla yıldızıllık yarıçapı elde edilir.

7.14 Tanım : A ve B , $-1\leq B<A\leq 1$ şeklinde verilen sayılar , $p\in\{1,2,3,...\}$ ve $|\lambda|<\dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere D de regüler $p(z)=-p+p_1z+p_2z^2+...=-p+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n$ fonksiyonlarının sınıfı $P_p^{\lambda}(A,B)$ ile gösterilir. Bununla birlikte $\forall z\in D$ için $w(z)\in\Omega$ olmak üzere $p(z)\in P_p^{\lambda}(A,B)$ ise

$$p(z)=-p.\frac{1+e^{-i\lambda}(ACos\lambda+iBSin\lambda)w(z)}{1+Bw(z)}$$

şeklinde ifade edilir.

7.15 Lemma : $a,\ b,\ c,\ d$ kompleks sayılar olmak üzere birim disk $D=\{z\ |\ |z|<1\}$ de tanımlanmış olan

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

Mobius Transformasyonu'nun Taylor açılmındaki n. katsayısının modülü

$$\left|\frac{c}{d}\right|^n\frac{1}{|b.d|}\leq 1\ ,\ \left|\frac{b}{d}\right|=1$$

koşulu gerçeklenirse

$$|a_n| \leq \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| = |a.d - b.c|$$

eşitsizliğini gerçekler.

İspat : $w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = (az+b)\dfrac{1}{cz+d} = (az+b)\dfrac{1}{d(\frac{c}{d}z+1)} \Rightarrow$

$$w = f(z) = \frac{1}{d}(az+b)\frac{1}{\frac{c}{d}z+1} \tag{7.3}$$

şeklinde yazılabilir. (7.3) yazılışında $\left|\dfrac{c}{d}z\right| < 1$ olarak alınırsa bu yazılış yakınsak geometrik seri' ye açılabilir.

$$w = f(z) = \frac{1}{d}(az+b)\frac{1}{\frac{c}{d}z+1}$$

$$= \frac{1}{d}(az+b)\left[1 - \frac{c}{d}z + \frac{c^2}{d^2}z^2 - \frac{c^3}{d^3}z^3 + \frac{c^4}{d^4}z^4 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{c^{n-1}}{d^{n-1}}z^{n-1} + (-1)^n\frac{c^n}{d^n}z^n - \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{d}(\left[az - \frac{ac}{d}z^2 + \frac{ac^2}{d^2}z^3 - \frac{ac^3}{d^3}z^4 + \frac{ac^4}{d^4}z^5 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{ac^{n-1}}{d^{n-1}}z^n + (-1)^n\frac{ac^n}{d^n}z^{n+1} - \ldots\right] +$$

$$\left[b - \frac{bc}{d}z + \frac{bc^2}{d^2}z^2 - \frac{bc^3}{d^3}z^3 + \frac{bc^4}{d^4}z^4 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{bc^{n-1}}{d^{n-1}}z^{n-1} + (-1)^n\frac{bc^n}{d^n}z^n - \ldots\right])$$

$$f(z) = \frac{1}{d}\left[b + (a - \frac{bc}{d})z - (\frac{ac}{d} - \frac{bc^2}{d^2})z^2 + (\frac{ac^2}{d^2} - \frac{bc^3}{d^3})z^3 + \ldots + ((-1)^{n-1}\frac{ac^{n-1}}{d^{n-1}} + (-1)^n\frac{bc^n}{d^n})z^n + \ldots\right]$$

$$\frac{d}{b}f(z) = \left[1 + \frac{d}{b}(\frac{a}{d} - \frac{bc}{d^2})z - \frac{d}{b}(\frac{ac}{d^2} - \frac{bc^2}{d^3})z^2 + \frac{d}{b}(\frac{ac^2}{d^3} - \frac{bc^3}{d^4})z^3 + \ldots + \frac{d}{b}((-1)^{n-1}\frac{ac^{n-1}}{d^n} + (-1)^n\frac{bc^n}{d^{n+1}})z^n + \ldots\right]$$

$$a_n = \frac{d}{b}\left[(-1)^{n-1}\frac{ac^{n-1}}{d^n} + (-1)^n \frac{bc^n}{d^{n+1}}\right] = (-1)^{n-1}\frac{d}{b}\left[\frac{ac^{n-1}}{d^n} - \frac{bc^n}{d^{n+1}}\right] = (-1)^{n-1}.\left[\frac{ac^{n-1}}{bd^{n-1}} - \frac{c^n}{d^n}\right]$$

$$|a_n| = \left|\frac{c^{n-1}}{d^{n-1}}\right| . \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right| = \left|\frac{c}{d}\right|^{n-1} . \left|\frac{ad-bc}{bd}\right| = \left|\frac{c}{d}\right|^{n-1} . \left|\frac{1}{bd}\right| |ad-bc|$$

olur.Eğer

$$\left|\frac{c}{d}\right|^{n-1} \frac{1}{|b.d|} \leq 1$$

koşulu gerçeklenirse;

$$|a_n| \leq \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| = |a.d - b.c|$$

olur.

Örnekler 1. $p(z) = \dfrac{1+z}{1-z} = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n + \ldots \Rightarrow$

$$|p_n| \leq \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Bu sınıf Caratheodory Sınıfıdır [3].

2. $p(z) = \dfrac{1+Az}{1+Bz} = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n + \ldots \quad (-1 \leq B < A \leq 1) \Rightarrow$

$$|p_n| \leq \begin{vmatrix} A & 1 \\ B & 1 \end{vmatrix} = (A - B)$$

Bu sınıf W. Janowski Sınıfı'dır [9,4].

$$\textbf{3. } p(z) = \frac{p + (pB + (A-B)(p-\alpha))w(z)}{1 + Bw(z)} = p + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n + \ldots$$

$$|p_n| \le \begin{vmatrix} (A-B)(p-\alpha) + Bp & p \\ B & 1 \end{vmatrix} = (A-B)(p-\alpha)$$

Bu sınıf M. K. Aouf tarafından tanıtıldı [2].

7.16 Teorem : $h(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ D de $H(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* z^n$ fonksiyonuna sabordinedir. Eğer $H(z)$ D de yalınkat ve $H(D)$ konveks ise $|c_n| \le |c_1^*|$ dir [4].

7.17 Lemma : $p(z) = -p + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n + \ldots \in P_p^{\lambda}(A,B)$ ise

$|p_n| \le p(A-B)$ dir.

İspat :Eğer $p(z) \in P_p^{\lambda}(A,B)$ ise

$$p(z) \prec -p.\frac{1 + e^{-i\lambda}(ACos\lambda + iBSin\lambda)z}{1 + Bz} = -p.p_0(z) = -p(1 + p_1^* z + p_2^* z^2 + \ldots)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$|p_n^*| \le \left| \begin{vmatrix} e^{-i\lambda}(ACos\lambda + iBSin\lambda) & 1 \\ B & 1 \end{vmatrix} \right| \le (A-B)$$

dir. Diğer yandan $P_0(D)$ konveks olup lemma 7.15 deki

$$\left|\frac{c}{d}\right|^n \frac{1}{|b.d|} \le 1 \ , \ \left|\frac{d}{b}\right| = 1 \Rightarrow |B|^{n-1} \le 1$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu durumda lemma 7.15 ve teorem 7.16 dan istenilen sonuç elde edilir.

7.18 Teorem : $f(z) = z^{-p} + a_{1-p}z^{1-p} + a_{2-p}z^{2-p} + a_{3-p}z^{3-p} + ... + a_{k-p}z^{k-p} + ...$

fonksiyonu $S_p^{\lambda}(A,B)$ sınıfına ait bir fonksiyon olmak üzere

$$|a_{k-p}| \leq \begin{cases} \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{n=1}^{k}(p(A-B)+(n-1)|B|) & ,B \neq 0 \\ \displaystyle\prod_{n=1}^{k}\dfrac{p|A|}{n} & ,B = 0 \end{cases} \tag{7.4}$$

şeklinde katsayı eşitsizliği gerçeklenir.

İspat : $$f(z) = \begin{cases} z^{-p}(1+Bz)^{-p\frac{\left[e^{-i\lambda}(ACos\lambda + iBSin\lambda)-B\right]}{B}} & ,B \neq 0 \\ z^{-p}e^{-pe^{-i\lambda}ACos\lambda z} & ,B = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu yani;

$$\begin{cases} \dfrac{z^{-p}}{(1-B\delta z)^{\frac{pe^{-i\lambda}(A-B)Cos\lambda}{B}}} & |\delta| = 1,\ B \neq 0 \\ z^{-p}e^{-pe^{-i\lambda}ACos\lambda z} & ,B = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu katsayı teoremi için ekstremal fonksiyondur.

$$f_*(z) = \begin{cases} \dfrac{z^{-p}}{(1-B\delta z)^{\frac{pe^{-i\lambda}(A-B)Cos\lambda}{B}}} & |\delta| = 1,\ B \neq 0 \\ z^{-p}e^{-pe^{-i\lambda}ACos\lambda z} & ,B = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} z^{-p} + \sum_{n-p=2}^{\infty} \left(\prod_{m=0}^{n-p-2} \frac{pe^{-i\lambda}(A-B)Cos\lambda + Bm}{m+1} . z^{n-1-p} \right) & , B \neq 0 \\ z^{-p} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-Ape^{-i\lambda}Cos\lambda z)^n}{n!} \right) & , B = 0 \end{cases}$$

şeklinde yazılır.

$B \neq 0$ için:

$S_p^{\lambda}(A,B)$ sınıfının tanımını kullanarak

$$z.\frac{f'(z)}{f(z)} = p(z)$$

eşitliği yazılabilir. $f(z)$ ve $p(z)$ nin Taylor Açılımlarını kullanarak bu eşitlik

$$z.f'(z) = p(z).f(z) \Rightarrow$$

$$-p.z^{-p} + (1-p)a_{1-p}z^{1-p} + (2-p)a_{2-p}z^{2-p} + (3-p)a_{3-p}z^{3-p} + ... + (k-p)a_{k-p}z^{k-p} + ... =$$

$$(-p + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + ...).\ (z^{-p} + a_{1-p}z^{1-p} + a_{2-p}z^{2-p} + a_{3-p}z^{3-p} + ... + a_{k-p}z^{k-p} + ...)$$

$$-p.z^{-p} + (1-p)a_{1-p}z^{1-p} + (2-p)a_{2-p}z^{2-p} + (3-p)a_{3-p}z^{3-p} + ... + (k-p)a_{k-p}z^{k-p} + ... =$$

$$-pz^{-p} - pa_{1-p}z^{1-p} - pa_{2-p}z^{2-p} - pa_{3-p}z^{3-p} - ... - pa_{k-p}z^{k-p} - ... + p_1 z^{1-p} + p_1 a_{1-p}z^{2-p} +$$

$$p_1 a_{2-p}z^{3-p} + ... + p_1 a_{k-1-p}z^{k-p} + ... + p_2 z^{2-p} + p_2 a_{1-p}z^{3-p} + p_2 a_{2-p}z^{4-p} + ... + p_2 a_{k-2-p}z^{k-p} + ...$$

$$+ p_3 z^{3-p} + p_3 a_{1-p}z^{4-p} + ... + p_3 a_{k-3-p}z^{k-p} + ... \qquad (7.5)$$

şeklinde ifade edilir. (7.5) eşitliğinde z^{k-p} nin katsayıları karşılaştırılırsa

$$\left|a_{k-p}\right| \leq \frac{1}{k}\left(\left|p_1\right|\left|a_{k-1-p}\right| + \left|p_2\right|\left|a_{k-2-p}\right| + \left|p_3\right|\left|a_{k-3-p}\right| + ... + \left|p_k\right|\right)$$

şeklinde olur.

Diğer yandan lemma 7.17 den

$$|p_n| \leq p(A-B)$$

olduğu kullanılırsa;

$$|a_{k-p}| \leq \frac{p}{k}(A-B)(|a_{k-1-p}| + |a_{k-2-p}| + |a_{k-3-p}| + \ldots + 1) = \frac{p}{k}(A-B)\sum_{n=1}^{k}|a_{k-n-p}| \Rightarrow$$

$$|a_{k-p}| \leq \frac{p}{k}(A-B)\sum_{n=1}^{k}|a_{k-n-p}| \qquad (7.6)$$

bulunur. (7.4) ü göstermek için matematiksel indüksiyon prensibi kullanılsın. (7.6) ve

$$|a_{k-p}| \leq \frac{1}{k!}\prod_{n=1}^{k} p(A-B) + (n-1)|B| \qquad (7.7)$$

eşitsizliği incelensin. Buradan hareketle (7.6) ve (7.7) eşitsizliklerinin sağ yanlarının eşit olduğu matematiksel indüksiyonla gösterilsin:

$k=1$ için :

$$|a_{1-p}| \leq \frac{1}{1!}\prod_{n=1}^{1} p(A-B) + (n-1)|B| = \frac{1}{1!}p(A-B) = p(A-B) \Rightarrow$$

$$|a_{1-p}| \leq p(A-B)$$

$$|a_{1-p}| \leq \frac{p}{1}(A-B)\sum_{n=1}^{1}|a_{1-n-p}| = p(A-B)|a_{-p}| = p(A-B) \Rightarrow$$

$$|a_{1-p}| \leq p(A-B)$$

$k=2$ için :

$$|a_{2-p}| \leq \frac{1}{2!}\prod_{n=1}^{2} p(A-B) + (n-1)|B| = \frac{1}{2!}(p(A-B))(p(A-B) + |B|)$$

$$|a_{2-p}| \leq \frac{1}{2!}(p(A-B))(p(A-B) + 1)$$

$$\left|a_{2-p}\right| \le \frac{p}{2}(A-B)\sum_{n=1}^{1}\left|a_{2-n-p}\right| = \frac{p(A-B)}{2}(\left|a_{1-p}\right| + \left|a_{-p}\right|)$$

$$\le \frac{p(A-B)}{2}(p(A-B)+1) = \frac{1}{2!}p(A-B)(p(A-B)+1)$$

$$\left|a_{2-p}\right| \le \frac{1}{2!}p(A-B)(p(A-B)+1)$$

Bu adımdan sonra $p(A-B) = x > 0$ ifadesi kullanılsın.

$k = 3$ için :

$$\left|a_{3-p}\right| \le \frac{1}{3!}\prod_{n=1}^{3} x + (n-1)\left|B\right| = \frac{1}{3!}x(x+\left|B\right|)(x+2\left|B\right|) \Rightarrow$$

$$\left|a_{3-p}\right| \le \frac{1}{3!}x(x+1)(x+2)$$

$$\left|a_{3-p}\right| \le \frac{x}{3}\sum_{n=1}^{3}\left|a_{3-n-p}\right| = \frac{x}{3}(\left|a_{2-p}\right| + \left|a_{1-p}\right| + \left|a_{-p}\right|)$$

$$\le \frac{x}{3}(\frac{x}{2!}(x+1) + x + 1) = \frac{x(x+1)(x+2)}{3!} \Rightarrow$$

$$\left|a_{3-p}\right| \le \frac{x(x+1)(x+2)}{3!}$$

$k = 4$ için :

$$\left|a_{4-p}\right| \le \frac{1}{4!}\prod_{n=1}^{4} x + (n-1)\left|B\right| = \frac{1}{4!}x(x+\left|B\right|)(x+2\left|B\right|)(x+3\left|B\right|) \Rightarrow$$

$$\left|a_{4-p}\right| \le \frac{1}{4!}x(x+1)(x+2)(x+3)$$

$$\left|a_{4-p}\right| \le \frac{x}{4}\sum_{n=1}^{4}\left|a_{4-n-p}\right| = \frac{x}{4}(\left|a_{3-p}\right| + \left|a_{2-p}\right| + \left|a_{1-p}\right| + \left|a_{-p}\right|)$$

$$\le \frac{x}{4}(\frac{1}{3!}x(x+1)(x+2) + \frac{x}{2!}(x+1) + x + 1) \Rightarrow$$

$$\left|a_{4-p}\right| \leq \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{4!}$$

Bu şekilde devam edilir ve en genel bir t için doğru kabul edip t+1 için doğruluğu araştırılırsa:

$$\left|a_{t-p}\right| \leq \frac{1}{t!}\prod_{n=1}^{t} x+(n-1)|B| = \frac{1}{t!}x(x+|B|)(x+2|B|)...(x+(t-1)|B|) \Rightarrow$$

$$\left|a_{t-p}\right| \leq \frac{1}{t!}x(x+1)(x+2)...(x+(t-1)) \tag{7.8}$$

$$\left|a_{t-p}\right| \leq \frac{x}{t}\sum_{n=1}^{t}\left|a_{t-n-p}\right| = \frac{x}{t}(\left|a_{t-1-p}\right|+\left|a_{t-2-p}\right|+...+\left|a_{-p}\right|) \Rightarrow$$

$$\left|a_{t-p}\right| \leq \frac{x}{t}(\left|a_{t-1-p}\right|+\left|a_{t-2-p}\right|+...+1) \tag{7.9}$$

$k=t$ için doğru kabul edildiğinden son yazılan (7.8) ve (7.9) ifadelerinin sağ yanları eşit olacaktır.

$$\frac{x}{t}(\left|a_{t-1-p}\right|+\left|a_{t-2-p}\right|+\left|a_{t-3-p}\right|+...+1) = \frac{x}{t!}(x+1)(x+2)...(x+(t-1)) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{t}(\left|a_{t-1-p}\right|+\left|a_{t-2-p}\right|+\left|a_{t-3-p}\right|+...+1) = \frac{1}{t!}(x+1)(x+2)...(x+(t-1)) \Rightarrow$$

$$\frac{x+t}{t+1} > 0$$

$$\frac{x+t}{(t+1)t}(\left|a_{t-1-p}\right|+\left|a_{t-2-p}\right|+\left|a_{t-3-p}\right|+...+1) = \frac{x+t}{(t+1)!}(x+1)(x+2)...(x+(t-1)) \Rightarrow$$

$$\frac{x+t}{t(t+1)}(\left|a_{t-1-p}\right|+\left|a_{t-2-p}\right|+\left|a_{t-3-p}\right|+...+1) = \frac{1}{(t+1)!}(x+1)(x+2)...(x+(t-1))(x+t) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{t+1}\left[\frac{x}{t}(|a_{t-1-p}|+|a_{t-2-p}|+|a_{t-3-p}|+...+1)\right]+\frac{1}{t+1}(|a_{t-1-p}|+|a_{t-2-p}|+|a_{t-3-p}|+...+1)=$$

$$\frac{1}{(t+1)!}\ (x+1)(x+2)...(x+(t-1))(x+t)\Rightarrow$$

$$\frac{|a_{t-p}|}{t+1}+\frac{1}{t+1}(|a_{t-1-p}|+|a_{t-2-p}|+|a_{t-3-p}|+...+1)=\frac{1}{(t+1)!}\ (x+1)(x+2)...(x+(t-1))(x+t)$$

$$\frac{1}{t+1}(|a_{t-p}|+|a_{t-1-p}|+|a_{t-2-p}|+|a_{t-3-p}|+...+1)=\frac{1}{(t+1)!}\ (x+1)(x+2)...(x+(t-1))(x+t)$$

$$\frac{x}{t+1}(|a_{t-p}|+|a_{t-1-p}|+|a_{t-2-p}|+|a_{t-3-p}|+...+1)=\frac{x}{(t+1)!}\ (x+1)(x+2)...(x+(t-1))(x+t)$$

elde edildiğinden t+1 için de doğru olduğu görülür.

$B=0$ için :

$$f_*(z)=z^{-p}e^{-Ape^{-i\lambda}Cos\lambda z}=z^{-p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-Ape^{-i\lambda}Cos\lambda z)^n}{n!}$$

$$=z^{-p}\left[1+\frac{(-Ape^{-i\lambda}Cos\lambda)}{1!}.z+\frac{(-Ape^{-i\lambda}Cos\lambda)^2}{2!}.z^2+\frac{(-Ape^{-i\lambda}Cos\lambda)^3}{3!}.z^3\right.$$
$$\left.+\frac{(-Ape^{-i\lambda}Cos\lambda)^4}{4!}.z^4+...+\frac{(-Ape^{-i\lambda}Cos\lambda)^k}{k!}.z^k+...\right]\Rightarrow$$

$$f_*(z)=z^{-p}+\frac{(-Ape^{-i\lambda}Cos\lambda)^1}{1!}.z^{1-p}+\frac{(-Ape^{-i\lambda}Cos\lambda)^2}{2!}.z^{2-p}+\frac{(-Ape^{-i\lambda}Cos\lambda)^3}{3!}.z^{3-p}$$
$$+\frac{(-Ape^{-i\lambda}Cos\lambda)^4}{4!}.z^{4-p}+...+\frac{(-Ape^{-i\lambda}Cos\lambda)^k}{k!}.z^{k-p}+...$$

dir. $f_*(z)$ fonksiyonu $S_p^{\lambda}(A,B)$ sınıfına ait en genel fonksiyonla karşılaştırılırsa;

$|a_{-p}|=1$ olmak üzere

$$|a_{1-p}|=\left|-Ape^{-i\lambda}Cos\lambda\right| = p\left|ACos\lambda\right| \le \frac{1}{1!}p|A| \Rightarrow$$

$$|a_{1-p}| \le \frac{1}{1!}p|A|$$

$$|a_{2-p}| = \left|\frac{(-Ape^{-i\lambda}Cos\lambda)^2}{2!}\right| \le \frac{1}{2!}|A|^2 p^2 |Cos\lambda|^2 \le \frac{1}{2!}p^2|A|^2 \Rightarrow$$

$$|a_{2-p}| \le \frac{1}{2!}p^2|A|^2$$

$$|a_{3-p}| = \left|\frac{(-Ape^{-i\lambda}Cos\lambda)^3}{3!}\right| \le \frac{1}{3!}|A|^3 p^3 |Cos\lambda|^3 \le \frac{1}{3!}p^3|A|^3 \Rightarrow$$

$$|a_{3-p}| \le \frac{1}{3!}p^3|A|^3$$

bu şekilde devam edilirse;

$$|a_{4-p}| \le \frac{1}{4!}p^4|A|^4$$

$$|a_{5-p}| \le \frac{1}{5!}p^5|A|^5$$

olur. En genel k için ise

$$|a_{k-p}| \le \frac{1}{k!}p^k|A|^k \Rightarrow$$

$$|a_{k-p}| \le \prod_{n=1}^{k}\frac{p|A|}{n}$$

olduğu bulunur.

Bulunan sonuçlar toplanırsa katsayı eşitsizliği;

$$
\left|a_{k-p}\right| \leq \begin{cases} \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{n=1}^{k}\left(p(A-B)+(n-1)\left|B\right|\right) & ,B \neq 0 \\ \displaystyle\prod_{n=1}^{k}\dfrac{p\left|A\right|}{n} & ,B = 0 \end{cases}
$$

olarak bulunur. Bu durumda ispat tamamlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] **Aouf, M. K.,** 1987. On a class of p-valent starlike functions of order α, *Internat. J. Math. Math Sci.* Vol. 10, No. 4, 733-744.

[2] **Aouf, M. K. and Sristava, H. M.,** 1997. A new criterion for meromorphically p-valent convex functions of order α, *Math. Sci. Res. Hot. Line,* 1(8), 7-12.

[3] **Duren, P. L.,** 1983. Univalent Functions, In Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd., Volume 259, Springer-Verlag, New York.

[4] **Goodman, A. W.,** 1983. Univalent functions, Vol. I and Vol. II, *Mariner Pub. Comp. Inc.,* Tampa Florida.

[5] **Jack. I. S.,** 1971. Functions starlike and convex of order α, *J. London Math. Soc.*, (2)3 , 469-474.

[6] **Janowski, W.,** 1973. Some external problems for certain families of analytic functions, *Ann. Polon. Math.,* 28, 297-326.

[7] **Joshi, S. B. and Sristava, H. M.,** 1999. A certain family of meromorphically multivalent functions, *Computers Math. Appl.* 38(3/4), 201-211.

[8] **Liu., J.-L., and Owa, S.,** On a class of meromorphic p-valent functions involving certain linear operators, Internat. J. Math. Math. Sci., 32(2002), 271-180.

[9] **Liu., J.-L., and Sristava, H. M.,** 2001. A linear operator and associated families of meromorphically multivalent functions, *J. Math Anal. Appl.,* 259, 566-581.

[10] **Liu., J.-L., and Sristava, H. M.,** 2003. Some convollution conditions for starlikeness and convexity of meromorphically multivalent functions, *Applied Math. Letters,* 16, 13-16.

[11] **Owa, S. and Darwish, H. E. and Aouf, M. K.,** 1997. Meromorphic multivalent functions with positive and fixed second coefficients, *Math.Japon.*, 46, 231-236.

[12] **Pommerenke, C. H.,** 1973. Univalent Functions. *Vandenhoeck, Ruprecht in Göttingen.*

[13] **Schober Glenn,** 1974. Univalent Functions-Selected Topics. *Springer Verlag Berlin-Heideberg New York.*

[14] **Ravichandran, V., Sivaprasad Kumar, S. and Subramanian, K. G.,** 2004. Convolution conditions for spirallikeness of certain meromorphic p-valent functions, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. Volume 5, Issue 1, Article 11.

[15] **Silverman, H., Silvia, E. M. and Telage, D.,** 1978. Convolution conditions for convexity , starlikeness and spiral-lieness, Math. Zeitschr., 162, 125-130.

[16] **Sristava, H. M., Hossen, H. M. and Aouf, M. K.,** 1999. A unified presentation of some classes of meromorphiccally multivalent functions, Computers Math. Appl. 38(11/12), 63-70.

H. Esra ÖZKAN

1982 yılında İstanbul'da doğdu. Orta öğrenimini Bahçelievler Kemal Hasoğlu Lisesi'nde tamamladı. 1999 yılında İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü'ne kaydolarak 2003 yılında bölüm 1.liği ile mezun oldu. Aynı yıl İ.K.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans programına kaydoldu ve İ.K.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu görevini sürdürmektedir