İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAXICAB GEOMETRİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seher Melike AYDOĞAN

Anabilim Dalı : Matematik Bilgisayar

Programı : Matematik Bilgisayar

HAZİRAN 2006

İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAXICAB GEOMETRİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seher Melike AYDOĞAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Haziran 2006
Tezin Savunulduğu Tarih : 21 Haziran 2006

Tez Danışmanı : **Yrd. Doç. Dr. Yaşar POLATOĞLU**

Diğer Jüri Üyeleri : **Yrd. Doç. Dr. Yaşar POLATOĞLU**

Yrd. Doç. Dr. Arzu ŞEN

Yrd. Doç. Dr. Müşerref YÜKSEL

HAZİRAN 2006

ÖNSÖZ

"Taxicab Geometri" adlı bu tez çalışmamızın kapsamında ağırlıklı olarak düzlemsel geometrinin genel tanımı için çeşitli uzaklıkların nasıl ölçüleceğini, taxicab trigonometrik oranlarını, kosinüs teoreminin ifadesini, üçgenlerde Harnack eşitsizliğini, kürelerde uzunluk hesabını,Heron formülünün taxicab geometrideki ifadesini, pisagor teoremini ve ikizkenar üçgenin çeşitli ifadeleri ele alınmıştır.

Tez kapsamında irdelenen olgular öklidyen geometri ile farklılıklar göstermektedir.Bununla birlikte taxicab geometrisi,öklidyen geometrisine çok yakındır.Sadece uzaklık fonksiyonu farklıdır. Bununla ilgili olan bilgiler tez kapsamına dahil edilmiştir.

Bu çalışmamız sırasında gerekli desteğini esirgemeyen, bana sabırla yaklaşan ve rahat bir çalışma ortamı hazırlayan Tez Danışmanım Yrd. Dr.Yaşar Polatoğlu'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

SEHER MELİKE AYDOĞAN
23/ 05/ 2006

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR

dE	: Öklidyen Uzaklık
dT	: Taxicab Uzaklık
dT(A,B)	:A ve B noktaları arasındaki taxicab uzaklığı
dE(A,B)	:A ve B noktaları arasındaki öklidyen uzaklığı
AB	:Yarım daire
dL	:Taxi dairesi
P	:Düzlem

ŞEKİL LİSTESİ

SİMGE LİSTESİ

A, B, C, C_1,...	: Nokta isimleri
$\leftrightarrow$	: Sınırsız doğru
$\rightarrow$	: Bir ucu sınırlı doğru
$\vert$	: Öyleki
$\cong$	: Yaklaşık olarak
$\leq$	: Küçük eşittir
$\geq$	: Büyük eşittir
$\surd$	: Karekök
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$=$	: Eşittir
π	: Pi
Δ	: Üçgen
$\equiv$	: Denktir
{}	: Parantez
$<$	:Küçüktür
$>$	:Büyüktür
$\cup$	:Birleşim
$\subset$	:Alt kümesidir
$\angle$	:Açı

ÖZET

TAXİCAB GEOMETRİ

Seher Melike AYDOĞAN

Bu tezde anlatılmak istenen;Taxicab geometrisinin,düzlemde Euclid Geometrisinden farklı olmasıdır.

Taxicab geometrisinde;

1)Euclid geometrisindeki doğrularla,Taxicab geometrisindeki doğrular aynıdır.
2)Taxicab geometrisindeki açılar,Euclid geometrisindeki açılarla aynı sistemle verilirler.Fakat Taxicab geometrisinde kullanılan Trigonometri farklılıklar içerir.
3)Taxicab geometrisinde kullanılan uzaklık fonksiyonu;

$P=(x_1,y_1)Q=(x_2,y_2)$ **noktaları veriliyor.**

dT(P,Q)=$|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ **şeklindedir;fakat Euclid Geometrisindeki uzaklık fonksiyonu genel olarak;**

dE(P,Q)=$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ **şeklindedir.**

Buna göre,Taxicab geometrisinden faydalanarak;kent coğrafyasına yönelik alıştırmalar kolayca çözülebilir.

Anahtar Kelimeler : Taxicab Geometri, Uzaklık, Öklid Geometri

ABSTRACT

TAXİCAB GEOMETRY

Seher Melike AYDOĞAN

The subject wanted to Express in this thesisis;the diffrence between Taxicab Geometry and Euclidien Geometry.

In Taxicab Geometry;

1)The lines in Euclidien Geometry and Taxicab Geometry are both same.
2)The angles in Euclidien Geometry and Taxicab Geometry are both same.But in Taxicab Geometry ,trigonometry is more diffrent than the other geometry.
3)In Taxicab Geometry distance function is;

$P=(x_1, y_1), Q=(x_2, y_2)$ **are the points given;**

dE(P,Q)=$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

So ,we can solve the urban geography problems with taxicab geometry,easily.

Keywords : Taxişcab Geometry, Distance, Eucklidien Geometry

1. GİRİŞ

Düzlemsel geometrinin haiz olduğu noktalar, koordinat düzleminin noktalarıdır. Taxicab geometrisi, öklidyen koordinat geometrisine çok yakındır. Noktalar doğrular ve açıların ölçülmesi aynıdır. Sadece uzaklık fonksiyonu farklıdır.

Böylece Taxicab Geometride çalışma alanları oluşması sağlanıyor. Öklidyen düzlem geometri aksiyomları incelendiğinde Taxicab Geometri ile ortak olarak on iki tanesinin sağlandığı sadece kenar açı kenar aksiyomunun taxicab geometri tarafından sağlanmadığı ortaya çıkıyor. Bir noktadan bir doğruya olan uzaklık, üçgenler, Heron formülü, düzlemde öklid uzaklığı, pisagor teoremi gibi çeşitli konuları taxicab geometride inceleniyor. Çeşitli alıştırmalarla daha anlaşılır olması amaçlanıyor.

2. TAXİCAB GEOMETRİ

Düzlemsel geometrinin genel tanımı için; nokta ve doğrunun tanımlarını; uzaklığın nasıl ölçüleceğini ve açı uzunluklarının nasıl belirleneceğini anlamak gerekir. Öklidyen geometrisine haiz noktalar, koordinat düzleminin noktalarıdır. Bu noktaların her biri, ya büyük harfle ya da bir reel sayı çifti ile gösterilir.

Örneğin P=(2,-1) ve Q=(1,3) noktalarıdır. Doğrular genel uzunluğunda, düzlüğünde, noktalar kümesi, açıların ölçüleri en doğru halde ölçülmüş ve uzaklıklar ise pisagor teoremi ile hesaplanır.

Örneğin P ile Q arasındaki uzaklık PQ uzaklığını hipotenüs olarak kabul eden doğru üçgenle bulunabilir. Daire dilimleri bu üçgenin ayaklarıdır.Bu ayakların uzunlukları 3 ve 4 birim ise Pisagor teoremine göre P den Q ya olan uzaklık 5 birim olacaktır. Öklidyen uzaklık fonksiyonuna göre dE sembolünü kullanmalıyız.Bizim örneğimize göre dE(P,Q)=5 şeklinde yazmalıyız.Örneğimizin okunuşu ise " P den Q ya olan öklidyen uzaklık 5 'tir " olmalıdır.

Taxicab geometrisi, öklidyen koordinat geometrisine çok yakındır.Noktalar,doğrular ve açıların ölçülmesi aynıdır.Sadece uzaklık fonksiyonu farklıdır.P den Q ya taxicab uzunluğu dT(P,Q) ile ifade edilir..Biz P den Q ya olan uzaklığı yatay ve dikey olarak kaç blok oldugunu sayacağız.Noktalı segmentler bir taxi rotası belirleyecek dT(P,Q)=7 " P den Q ya taxi uzaklığı, 7 birimdir. "şeklinde okunacaktır.

Koordinat düzlemindeki birçok noktanın iki tamsayı koordinatı olmayabilir. $A=(a_1,a_2) ve B=(b_1,b_2)$ noktaları veriliyor. C noktasının koordinatları nedir? AC uzunluğu için uzaklık fonksiyonundan faydalanarak:

(1) dT(A,B)= $|a_1-b_1|+|a_2-b_2|$; (2.1.)

(2) dT(A,B)= $\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$ (2.2)

Bu tanımları nadir kullanacağız. Bunları göstermemizin nedeni:

(1)Taxicab geometrinin güvenilir matematiksel esaslara dayandığının altını çizmek ,

(2)Sokağa ait olan ya da olmayan herhangi iki noktanın arasında belirli bir taxicab uzaklığının var olmasıdır.

2.1. ÖKLİDYEN DÜZLEM GEOMETRİ AKSİYOMLARI

Taxicab geometrisi genel olarak, öklidyen olmayan bir geometridir. Zira öklit geometrisindeki "Kenar,açı,kenar "aksiyomu bu geometride geçerli değildir. Öklidyen düzlem geometrinin aksiyomları genel olarak aşağıdaki gibidir.

1) Birbirinden farklı iki noktadan bir doğru geçer.(Birbirinden farklı iki nokta üzerinde bir doğru vardır.)

2) Birbirinden farklı iki noktada üzerinde en çok bir doğru vardır.

3) Her doğru üzerinde en az iki nokta dışında en az bir nokta vardır.

4) P noktasının A ve B noktaları arasında olduğunu [APB] yazılışı olarak gösterirsek;
[APB] ise [BPA] dır,denir.Ve A,P,B noktaları aynı doğru üzerindedir denir.

5) Farklı ve aynı doğru üzerinde olan üç noktadan ancak ve yalnız bir tanesi diğer ikisi arasındadır.

6) A ve B noktaları bir P doğrusu üzerinde farklı iki nokta ise P doğrusu üzerinde [APB] olacak şekilde bir P noktası vardır.

7) A,B,C noktaları aynı doğru üzerinde olmayan üç nokta olmak üzere ABC düzleminin A,B,C noktalarından hiçbirinden geçmeyen bir P doğrusu BC,CA,AB doğru parçalarından birini keserse diğer ikisinden birini de keser.

8) Bir [AB] doğru parçası ve [A1P herhangi bir ışın ise ,bir ucu A1 noktasında bulunan diğer ucu A1P ışını üzerinde olan ve [AB] doğru parçasına eşit bir tek [A1B1] doğru parçası vardır.

9) Doğru parçaları için eşitlik aksiyomu tranzitiftir. Yani

$$[AB]\approx[A_1B_1],[A_1B_1]\approx[C,D]\rightarrow[A,B]\approx[C,D] \qquad (2.3)$$

Yani, aynı doğru parçalarına eşit doğru parçaları birbirine eşittir.

10) Doğru parçaları için arada olma aksiyomu aşağıdaki şekilde ifade edilir.A ve B noktalarının oluşturduğu doğru parçası [AB] olsun.P noktası A ve B noktaları arasında ise benzer şekilde A1 ve B1 noktalarının oluşturduğu doğru parçası [A1B1] ve P1 noktası da A ve B noktaları arasında ise ;

$$[AP]\approx[A_1P_1],[PB]=[P_1B_1]\rightarrow[AB]\approx[A_1B_1] \qquad (2.4)$$

11) [pq] sembolü ile p ve q ışınlarının oluşturduğu açıyı gösterelim. Bu takdirde;

(i) [hk] ya eşit olan bir [h1k1] açısı vardır.

(ii) Açılar için eşitlik bağıntısı tranzitiftir. Yani;

$$[hk]\approx[h_1k_1],[h_1k1]\approx[h_2k_2]\rightarrow[hk]\approx[h_2k_2] \qquad (2.5)$$

(iii) $[hr]\approx[h_1r_1],[rk]\approx[r_1k_1]\rightarrow[hk]=[h_1k_1]$ (2.6)

12) (Kenar açı kenar aksiyomu).Karşılıklı verilen iki üçgende karşılıklı ikişer kenarları ve bu kenarlar arasındaki açıları eşit olan üçgenler benzer üçgenlerdir.

13) Birbirine benzer olan iki üçgende karşılıklı olarak taban açıları eşittir.

14) (Öklit paralellik aksiyomu)Bu aksiyom genellikle "Bir doğruya doğru dışında verilen bir noktadan ancak ve yalnız bir tek paralel çizilebilir."şeklindedir. Öklit dışı geometrilerde bu aksiyom ;"Bir doğruya doğrunun dışında verilen bir noktadan iki veya daha fazla sayıda paralel çizilebilir." Şeklindedir.

15) (Süreklilik aksiyomu) $[A_0B_O],[A_1B_1],[A_2B_2],\ldots,[AnBn]$ ler bir P doğrusu üzerinde iç içe doğru parçaları ise P üzerinde kendisine göre bütün $A_0,A_1,A_3,A_4,\ldots,An$ noktaları ile aynı tarafta ve bütün $B_0,B_1,B_2,\ldots,Bn$ noktaları ile ters tarafta bulunan bir P noktası vardır.

16) (Tamlık aksiyomu) Nokta, doğru ve düzlemlerin oluşturduğu sisteme yukarıda verilen ;

(i)Konum aksiyomları
(ii)Sıralama aksiyomları
(iii)Benzerlik ve eşitlik aksiyomları
(iv)Paralellik aksiyomları
(v)Süreklilik aksiyomları

Aksiyomlarının oluşturduğu bir sisteme, bu beş grup aksiyomun hepsine uyan yeni bir geometri oluşturacak şekilde başka elemanlar eklemek mümkün değildir.Başka değişle,

Bir geometrinin elemanları yukarıda sıralanan beş grup aksiyomu sağladığı sürece şüphe etmeyen bir sistem oluşturur.

Yukarıda saydığımız Öklit geometrisi aksiyomlarından 12.si olan (Kenar, Açı, Kenar) aksiyomu ile uzaklık fonksiyonu farklı olan geometriye TAXİCAB GEOMETRİ adı verilir.Yani

(i)Öklit geometrisindeki 12.aksiyom burada geçerli değildir.

(ii)Öklit geometrisindeki uzaklık fonksiyonu $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ ise

$$dE=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=dE(P,Q) \qquad (2.7)$$

şeklinde tanımlanmasına rağmen Taxicab Geometrisinde ;

$$d_T|x_2-x_1|+|y_2-y_1| = |x_1-x_2|+|y_1-y_2|=d_T(P,Q) \qquad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır.

2.2. TAXİCAB GEOMETRİSİNDEKİ UZUNLUK

Taxicab geometrisindeki uzunluk;

$$(1)\ d_T(P,Q)=|X_2-X_1|+|Y_2-Y_1| \qquad (2.9)$$

$$=|X_1-X_2|+|Y_1-Y_2|$$

Şeklinde verildiğini daha önce söyledik. Dolayısıyla bu uzunluğu bazı özellikleri göstermek için mutlak değer kavramının eşdeğer tanımına göz atarız.Bu tanım,x€ R için,

$$|X|=\begin{cases} X, & X>0 \\ 0, & X=0 \\ -X, & X<0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Şeklinde olduğu gibi tanımın eşdeğer tanımında;

$$(2)\quad |X|=\sqrt{x^2} \tag{2.11}$$

Şeklindedir.Diğer taraftan Öklit uzaklığı ise;

$$(3)\quad dE(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{2.12}$$

olduğu da göz önüne alınırsa;(3) tanımı;

$$\begin{aligned}(1)\qquad & dE(A,B)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ & =\sqrt{(y_2-y_1)^2}=|y_2-y_1|\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$(6)\, dE(B,C)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1| \tag{2.14}$$

Eşitlikleri bulunur. Öte yandan Taxicab uzunlığu ile;

(7) $dT(A,C)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|=dE(A,B)+dE(B,C)=$ (2.15)

$dT(A,C)=dE(A,B)+dE(B,C)$

Eşitliği bulunur.

(8) $dE(A,C)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ (2.16)

olduğu göz önüne alınırsa;

(9) $dT(A,C)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|\neq dE(A,C)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ (2.17)

bağıntısı da yazılabilir.

2.3. ALIŞTIRMALAR

1.dT(P,Q) ve dE(P,Q) uzaklıklarını bulunuz

a)P=(5,4) Q=(1,2) (2.18)

$dT(P,Q)=|5-1|+|4-2|.=4+2=6$

$dE(P,Q)=\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

b)P=(-4,3) Q=(3,2) (2.19)

dT(P,Q)= | -4-3 | + | 3-2 | =8

dE(P,Q)= $\sqrt{(-4-3)^2+(3-2)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

c)P=(-5,-4) Q=(1,-2) (2.20)

dT(P,Q)= | -5-1 | + | -4+2 | =8

dE(P,Q)= $\sqrt{(-5-1)^2+(-4+2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

d)P=(3,-1) Q=(-2,4) (2.21)

dT(P,Q)= | 3+2 | + | -1-4 | =10

dE(P,Q)= $\sqrt{(3+2)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

e)P=(4,-3) Q=(-2,-3) (2.22)

dT(P,Q)= | 4+2 | + | -3+3 | =6

dE(P,Q)= $\sqrt{(4+2)^2+(-3+3)^2}=\sqrt{36}=6$

2.a)Eğer dT(A,B)=dT(C,D) ise dE(A,B)=dE(C,D)

$$A=(a_1,a_2), B=(b_1,b_2), C=(c_1,c_2), D=(d_1,d_2) olsun$$

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|=|c_1-d_1|+|c_2-d_2| \tag{2.23}$$

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}=\sqrt{(c_1-d_1)^2+(c_2-d_2)^2}$$

Alıştırma 1 den faydalanırsak:

$A=(-4,3)$ $B=(3,2)$ $C=(-5,-4)$ $D=(1,-2)$ alınırsa,

$d_T(A,B)=d_T(C,D)=8$ bulmuştuk.

$d_E(A,B)=5\sqrt{2}$ eşit değildir. $d_E(C,D)=2\sqrt{10}$ (2.24)

b)Eğer $d_E(A,B)=d_E(C,D)$ ise $d_T(A,B)=d_T(C,D)$

Alıştırma 1 den faydalanırsak;

$A=(-4,3)$ $B=(3,2)$ $C=(3,-1)$ $D=(-2,4)$ (2.25)

$d_E(A,B)=d_E(C,D)=5\sqrt{2}$

$d_T(A,B)=8$ eşit değildir $d_T(C,D)=10$

3.$A=(-2,-1)$ ise $d_T(P,A)$ yı bulunuz.

a)$P=(1,-1)$ ise $d_T(P,A)=3$ (2.26)

b)$P=(-2,-4)$ ise $d_T(P,A)=3$ (2.27)

c)$P=(-1,-3)$ ise $d_T(P,A)=3$ (2.28)

d)$P=(0,-2)$ ise $d_T(P,A)=3$ (2.29)

e)$P=(1/2,-1\ 1/2)$ ise $d_T(P,A)=3$ (2.30)

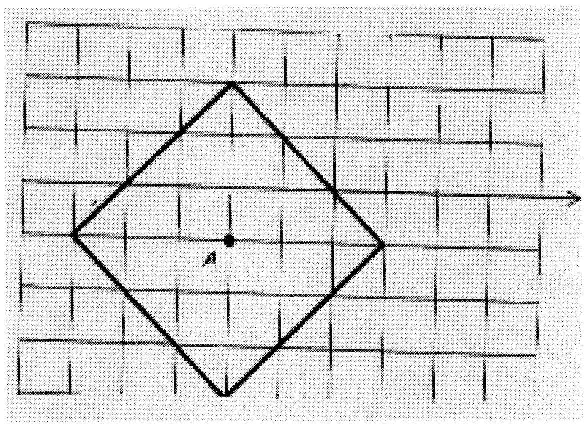
f)$P=(-1\ 1/2,-3\ 1/2)$ ise $d_T(P,A)=3$ (2.31) g)P=(0,0) ise dT(P,A)=3 (2.32)

h)P=(-2,2) ise dT(P,A)=3 (2.33)

4.a)A noktasından taxi uzaklığı 3 olan noktalara örnek bulunuz.

P=(0,0); G=(0,-2) ;.....

b)A dan taxi uzaklığı 3 olan tüm P noktalarının grafiğini çiziniz.



Şekil 2.1 Alıştırma

c)[P | dT(P,A)=3] için amacını içeren bir isim bulunuz.

A merkezli ,3 yarıçaplı taxi çemberi

d) Taxicab geometride,∏ için sayısal değer nedir?

Birim çember tanımından dolayı; yani:

| x | + | y | =1 tanımından yola çıkarak,∏ nin sayısal değerinin 4 olduğu bulunur.

5. A=(-2,-1) ve B=(3,2) veriliyor.

dT(A,B) yi hesaplayınız.

$$dT(A,B)=|-2-3|+|-1-2| \quad (2.34)$$
$$=5+3$$
$$=8$$

6. A=(-7,-3) ve B=(5,2) veriliyor.dE(A,B) yi hesaplayınız.

$$dE(A,B)=\sqrt{(-7-5)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13 \quad (2.35)$$

3. BAZI UYGULAMALAR

Taxicab geometri, kentsel geometri modeli olarak, öklidyen geometrisinden daha kullanışlıdır.Kolay aldanan kimseler için faydalıdır ki; postaneden ,müzeye olan öklit uzaklığı $\sqrt{9}=3$ birimken;postaneden, müzeye olan öklit uzaklığı $\sqrt{8}$ birimdir. Sokaklar boyunca yolculuk veya yürüyüş yapmaya zorlanan kimse için bu bilgi faydalıdır. Taxicab uzaklığı,"gerçek" uzaklıktır diyenler, içindir.

Kentsel geometride; Taxicab geometrisi, öklit geometrisinden daha iyi bir matematiksel modelken; mükemmel değildir. Şehir hakkında birçok basitleştirme varsayımları yapılmıştır. Tüm sokaklarda; kuzeye düz, güneye düz, doğu ve batıya; koşulduğu varsayılırsa; sokaklarında genişliğinin olmadığı, binaların nokta büyüklüğünde olduğu varsayılır... Bu varsayımlarla alt üst olmamalısınız. Doğrusu; hiçbir şehir bizim kafamızdaki gibi gerçekten ideal değildir. Hala birçok şehrin, birçok bölümü bundan farklı değildir. Kendi ideal modelimizle ilgili öğrendiğimiz şeyler; belirli gerçek kentsel durumlara göre değişir..

Matematiksel model yöntemleri oluştururken daima varsayımları basitleştirmeliyiz. Onlar olmadan çözümü zor olan matematik problemleri sonuç bulamaz. Daha sonraki bölümlerde, bazı matematiksel komplikasyonların neden kaynaklandığını ve durumu daha gerçekçi yapmak için ideal model oluşturmayı göreceğiz.

4. BAZI GEOMETRİK FİGÜRLER

Bazı geometrik figürlerin, Taxicab geometride neye dönüştüğünü gördük. Mesela daire Taxicab geometride karedir. Başka bir örnek olarak, Taxicab geometrisinde verilen A ve B noktalarından eşit uzaklıktaki tüm noktaların oluşturduğu küme, Öklidyen geometriden biraz farklı görülmektedir. Öklidyen geometride sadece AB yi dikey olarak eşit iki parçaya böler. Taxicab geometride çeşitli şekillere dönüşür. Fakat nadiren dikey olarak iki eşit parçaya bölerek AB uzunluğuna dönüşür.

Hem öklidyen hem de Taxicab geometrisinde kullanılan kullanışlı, farklı, başka geometrik figürler de tanımlanmıştır. Bunlarda biri elipstir. Elipsinde verilen iki noktadan oluşan tüm uzaklıkların toplamı olarak elipsin tanımını verebiliriz.

A=(-2,-1) ve B=(2,2) verilen iki nokta olup elipsin odakları adını alır. A ve B odaklı Öklidyen elipsini:

$$[P \mid dE(P,A)+dE(P,B)=6] \qquad (4.1.)$$

Bu sekil.4.1 deki sabit elipstir.Diğer A ,B odaklı Öklit elipsi:

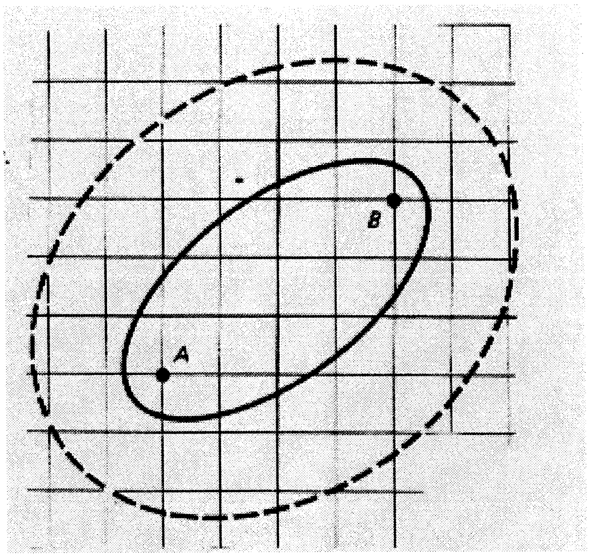
$$[P \mid dE(P,A)+dE(P,B)=9] \qquad (4.2)$$

Bu şekil 4.1 de noktalarla gösterilmiştir.

Bir elipsi çizerken örneğin:

$$[P \mid dE(P,A)+dE(P,B)=6] \tag{4.3}$$

A=(-2,-1) ve B=(2,2) odaklarıdır.



Şekil 4.1. Geometrik Figürler

A merkezli ,yarıçapı 4 olan ve B merkezli yarıçapı 2 olan iki daireyi pergel kullanarak çizeriz.A ve B noktalarından uzaklıkların toplamı 6' dır buda elipsin bir noktasıdır.

5. BİR NOKTADAN BİR DOĞRUYA OLAN UZAKLIK

Öklidyen geometride, A noktasından L doğrusuna olan uzaklığı bulurken standart bir metod vardır. (şekil5.1) A noktasından L_1 noktasına doğru oluşan doğru L doğrusuna dik olarak yerleşmiştir. B noktası L_1 ile L noktalarının kesişimidir. A dan B ye olan Öklidyen uzaklığı şu sembol ile gösterilir;

dE(A,L)=dE(A,B) (5.1)

Taxicab geometrisinde, bir noktadan bir doğruya olan uzaklığı bulurken, uygulanan prosedürün biraz farklı olduğunu söylemeliyiz.

5.1. ALIŞTIRMALAR

1)Şekil (5.1)' de A noktası ve L doğrusu gösteriliyor:

a)dT(A,B) bulunuz.

dT(A,B)=$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$ (5.2)

$= |6+1| + |5+7|$

$=7+12$

$=19$

b)dT(A,C) bulunuz.

dT(A,C)=$|6-3| + |5+1| = 3+6 = 9$

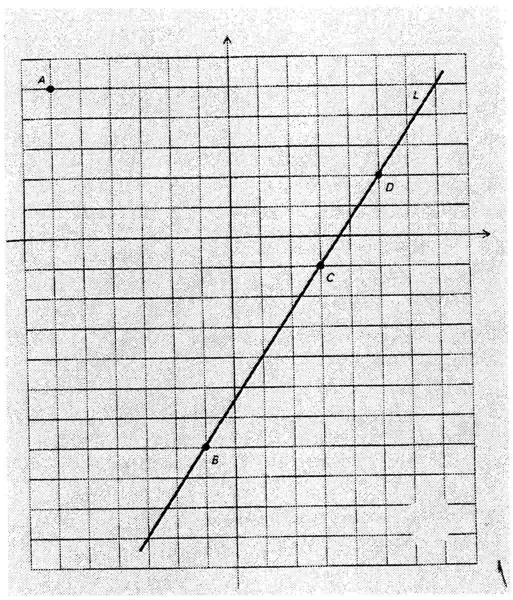
(5.3)

c)dT(A,D) bulunuz.

$$dT(A,D)=|6-5|+|5-2| \tag{5.4}$$

$$=1+3$$

$$=4$$



Şekil 5.1 : Bir Noktadan Bir Doğruya Olan Uzaklık

2) A =(-3,2) noktasını ve (-6,2) ve (0,0) noktalarından geçen L doğrusunu çiziniz. dT(A,L) hesaplayınız.

$$dT(A,L)=|-3+6|+|2-2|+|-3-0|+|2-0|=3+3=6 \tag{5.5}$$

3) Alıştırma 2' yi A=(-3,2) noktası ve (-2,-1) ve (2,3) noktalarından geçen L doğrusu için yapınız.

$$dT(A,L)=|-3+2|+|2+1|+|-3-2|+|2-3|=1+3+5+1=10 \tag{5.6}$$

4) Öklidyen geometrisinde ve Taxicab geometrisinde bir noktanın bir doğruya olan uzaklığını görmüştük. Fakat bir noktanın bir doğruya olan uzaklığının tanımının ne anlama geldiğini vermedik.

dE(A,L)=maxd T(A,P) dir. (5.7)

dT(A,L)=dT(A,P) nin en küçüğü ($P \in L$)

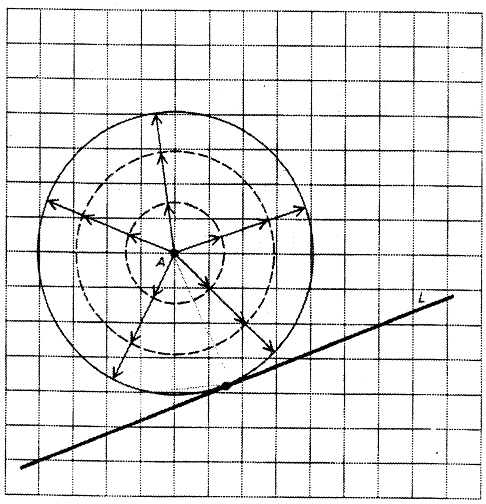
Şu şekilde kısaltılabilir;

dT(A,L)=min dT(A,P) (5.8)

5) dE(A,L) nin nasıl bulunacağına dair(şekil 5.2 yardımı ile) başka bir yol düşününüz.

A merkezinden L ye doğru olan şişirme daireyi düşününüz. Şimdi dE(A,L) yarıçaptır.Taxicab geometrisindeki çizilen daireleri hatırlayınız.

dE(A,L) dairelerini dikkate alırız.



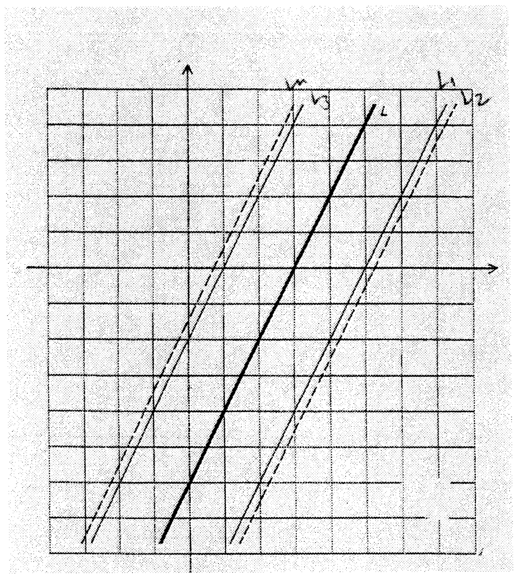
Şekil 5.2 : Alıştırma

6) Öklidyen metodunda dE(A,L) bulmak için şu yol izlenir; "A dan L ye olan uzaklığıkların ölçüsü diktir.Bunu formüle edebiliriz: dT(A,L) yi bulmak için bazı terminolojileri bilmek olayı pratikleştirir.Koordinat düzlemindeki herhangi bir P noktası için; P 'den geçen doğrular üç başlık altındadır:

(i)"45 derece" $L_1 ve L_2$ P 'den gecen 45 derecelik doğrulardır.

(ii)"dik doğrular" taralı bölgede , P'den geçen herhangi doğrulardır. L_3 dik doğrulara örnektir.

(iii)"kademeli doğrular" Taranmamış bölgede Pden geçen doğrulardır. L_4 kademeli doğrulara örnektir.



Şekil 5.3 : Alıştırma

6. ÜÇGENLER

Birinci bölümde A ve B gibi iki nokta aldık ve onlardan eşit uzaklıkta olan noktaları inceledik.Bize tanımlamamız için [P | dT(P,A)=dT(P,B)] A ve B nin taxicab yarım kümesi ve [P | dE(P,A)=dE(P,B)] A ve B nin öklidyen yarım kümesi verilmiştir.A ve B nin taxicab yarım kümesi çeşitli şekillerdeyken;A ve B nin öklidyen yarım kümesi AB uzaklığını eşit iki parçaya bölen şekle dönüşür.

Bölüm 4 'de bir F noktası,L doğrusu ve bunlardan eşit uzaklıktaki tüm noktaları incelemiştik.Kurala riayet edersek;[P | dE(P,F)=dE(P,L)] ye öklidyen parabolü ve [P | dT(P,F)=dT(P,L)] ye taxicab parabolü demiştik;fakat bu şekiller F öklidyen yarımkümesi ve F ve L taxicab yarım kümesi şekillerine dönüşür.

Bundan sonraki ilk adımımız; $L_1 ve L_2$ doğrusunu alalım ve onların yarım kümesini oluşturalım. $L_1 ve L_2$' nin öklidyen yarım kümesi [P | dE(P, L_1)=dE(P, L_2)] dir. $L_1 ve L_2$' nin taxicab yarım kümesi [P | dT(P, L_1)=dT(P, L_2)] dir. $L_1 ve L_2$ doğrularıyla verilen taxicab yarım kümesi bulunur. .Bu bize $L_1 ve L_2$ taxicab yarım kümesinin üzerinde 4 nokta verir. Şimdi [P | dT(P,L1)=4] ve [P | dT(P,L2)=4] bulunuz ve kesiştiriniz. Şekil 1' de bunlar noktalı şekilde gösterilmiştir. Bu bize $L_1 ve L_2$ taxicab yarım kümesinde 4' den fazla nokta verir. Şimdi taxicab yarım kümesinde bulduğunuz tüm noktaları en doğal yol ile birleştirelim. Bunlar noktalanmış olan doğrulardır. $L_1 ve L_2$ nin kesim noktası niçin bu yarım kümenin elemanıdır. Bu arka bakışı kullanarak [P | dT(P, L_1)=4] ve [P | dT(P, L_2)=4] çizmek gerekli midir?

$L_1 ve L_2$ nin öklidyen yarım kümesi aynı zamanda , $L_1 ve L_2$'nin kesişiminin doğru çiftidir. Birçok $L_1 ve L_2$ doğru çifti için , $L_1 ve L_2$' nin öklidyen yarım kümesi, $L_1 ve L_2$ nin taxicab yarım kümesinden farklıdır.

6.1. ALIŞTIRMALAR

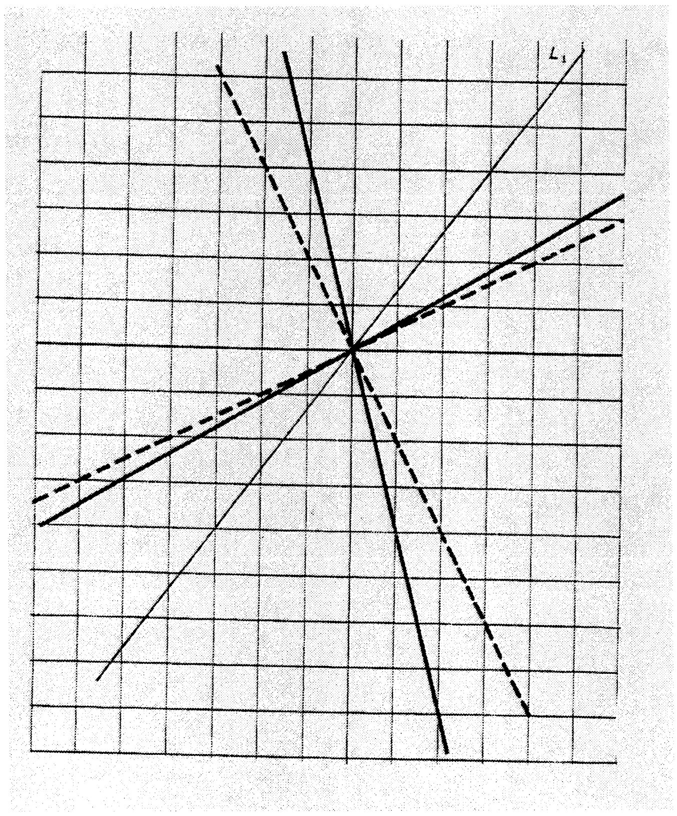
1) Bir grafik kağıdına (3,4) ve (0,0) den geçen L_1 doğrusunu ve (0,0) ve (3,0) dan geçen L_2 doğrusunu çiziniz.

a) [P | dT(P, L_1)=3] çiziniz.

b)[P | dT(P, L_2)=3] çiziniz.

c) $L_1 ve L_2$ oluşan taxicab yarım kümesini çiziniz.

d)Başka bir renk kullanarak; $L_1 ve L_2$ oluşan öklidyen yarım kümesini çiziniz.



Şekil 6.1: Alıştırma

2)(5,19) ve (3,4) noktaları için dE ve dT yi bulunuz.

dT=|5-3|+|19-4|

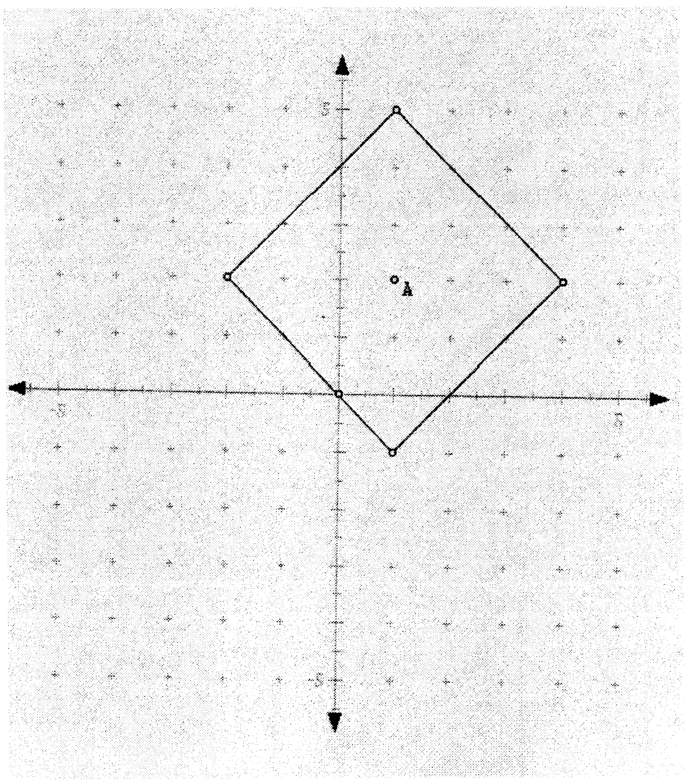
=17

dE= $\sqrt{(5-3)^2+(19-4)^2}=\sqrt{229}$

3)dT =dE hangi koşulda sağlanır?

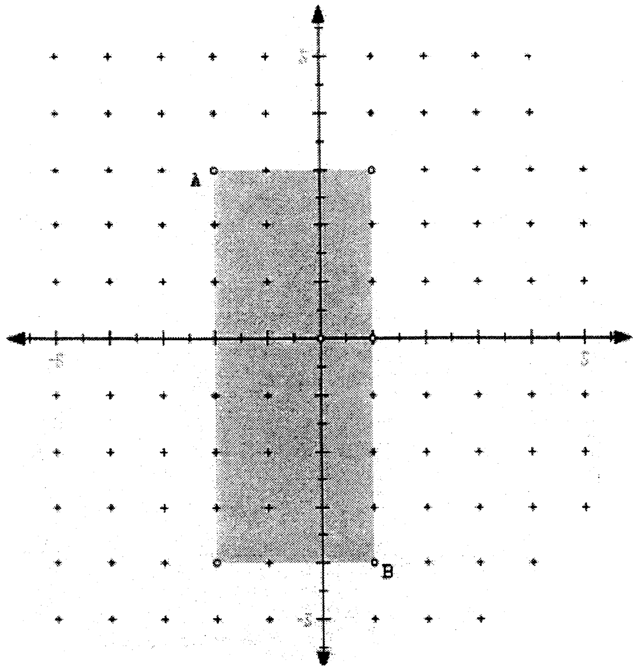
dT =dE eğer iki nokta yatay veya dikey olarak hizalanırsa sağlanır.

4)A=(1,2) ise dT(P,A)=3 grafiğini çiziniz.



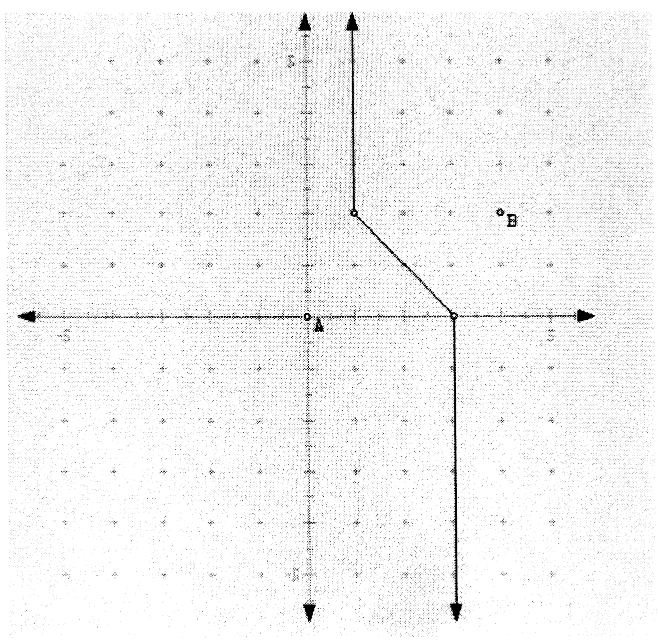
Şekil 6.2 : Alıştırma

5)A=(-2,3) ve B=(1,-4) veriliyor dT(A,B) nin grafiğini çiziniz.



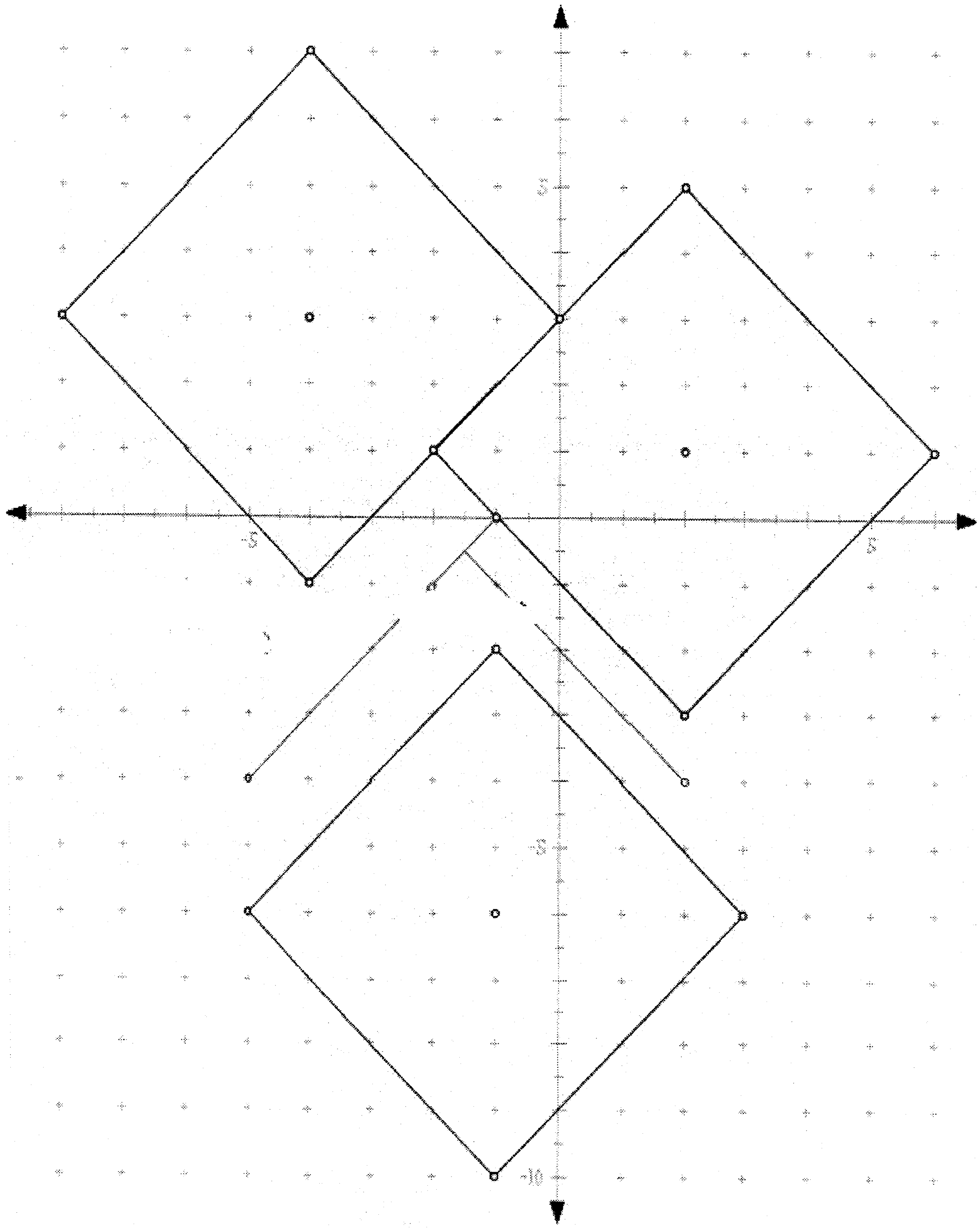
Şekil 6.3 :Alıştırma

6)A=(0,0) ve B=(4,2) dT(P,A)=dT(P,B) nin grafiğini çiziniz.



Şekil 6.4 : Alıştırma

7)Hangi nokta (-4,3),(2,1),(-1-6) noktalarından eşit taxi uzaklığındadır?

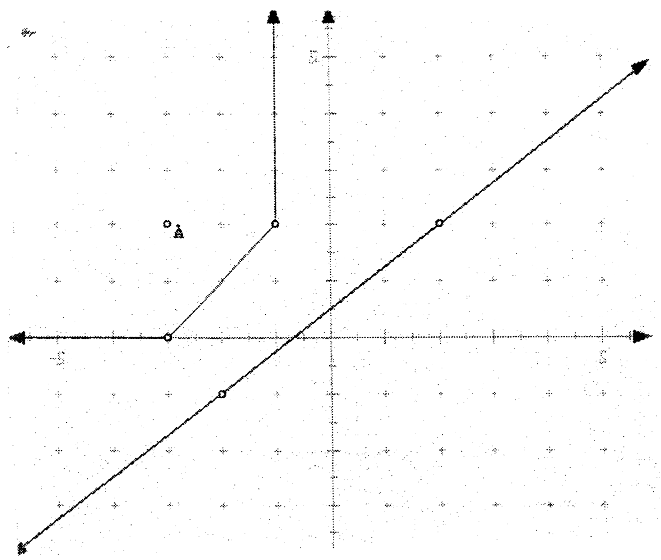


Şekil 6.5 : Alıştırma

8)A=(-3,2) ve (-2,-1) ,(2,3) noktalarından geçen L doğrusu veriliyor.A noktasının ,L doğrusuna uzaklığı nedir?

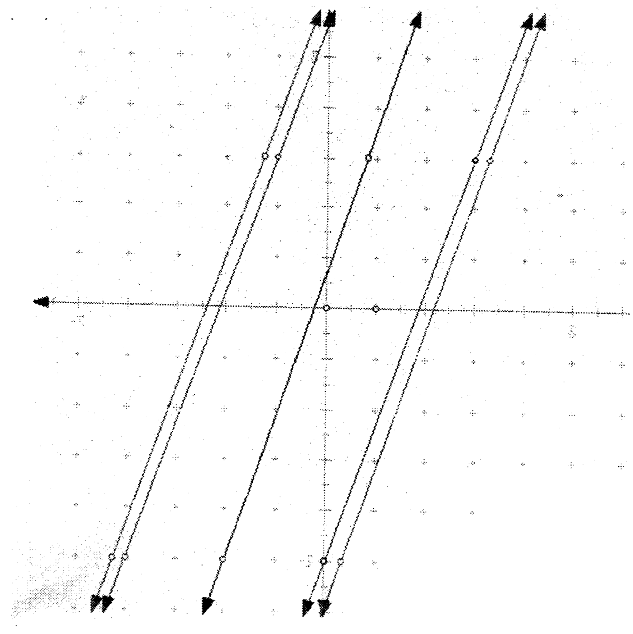
4 ' tür.

9)8.soru için noktadan doğruya olan uzaklıkların eşit olduğu kümeyi bulunuz.



Şekil 6.6: Alıştırma

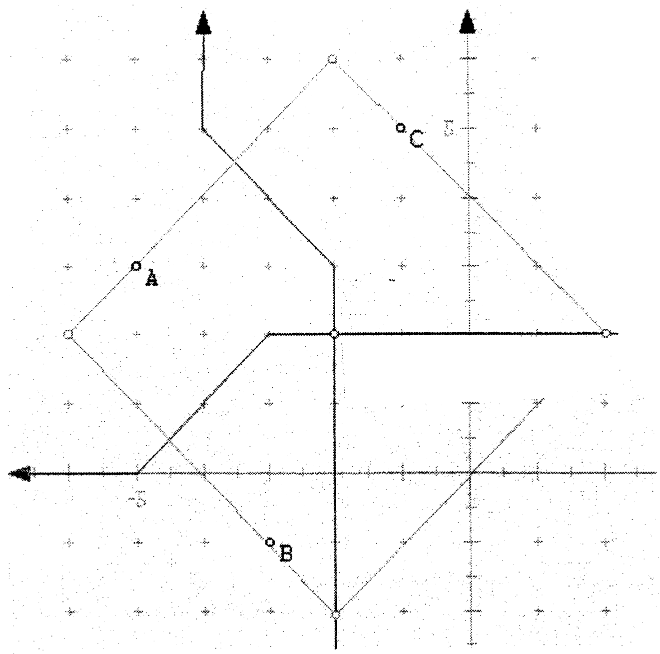
10)(1,3) ve (-2,-5) noktalarından geçen doğru için,dT(P,L)=2 ve dE(P,L)=2 nin grafiğini çiziniz.



Şekil 6.7: Alıştırma

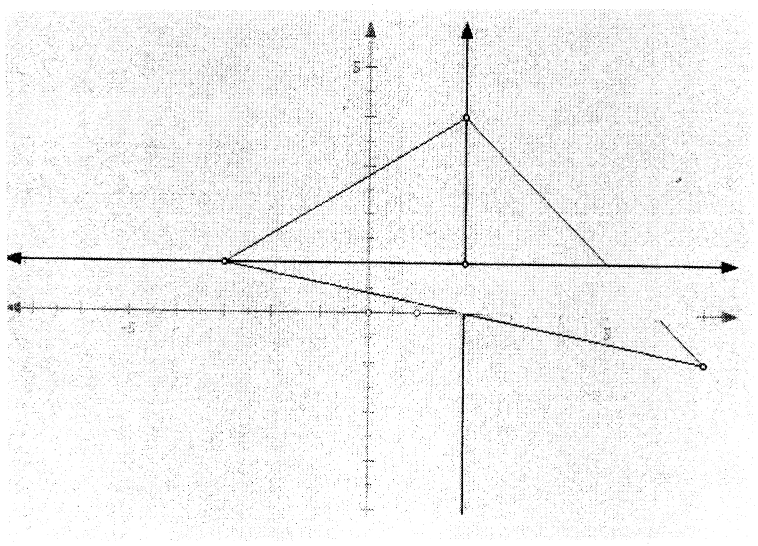
11)(-3,-1),(-1,5) ve (-5,3) noktalarından geçen üçgen için taxi dairesini çiziniz.

Bu soru aynen 7.soru gibidir.



Şekil 6.8 : Alıştırma

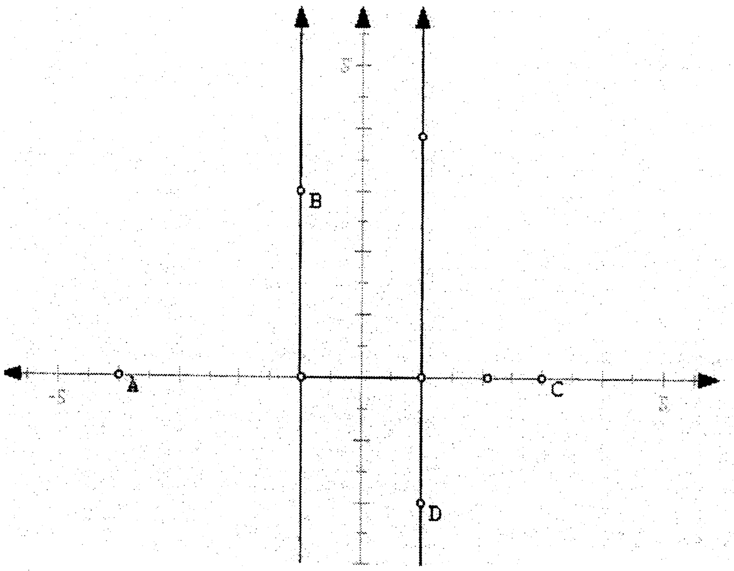
12)A=(2,4) ,B=(7,-1),C=(-3,1) noktaları veriliyor. dE(P,A)+dE(P,B)+dE(P,C) nin en küçük olacak şekli için bir P noktası bulunuz.



Şekil 6.9: Alıştırma

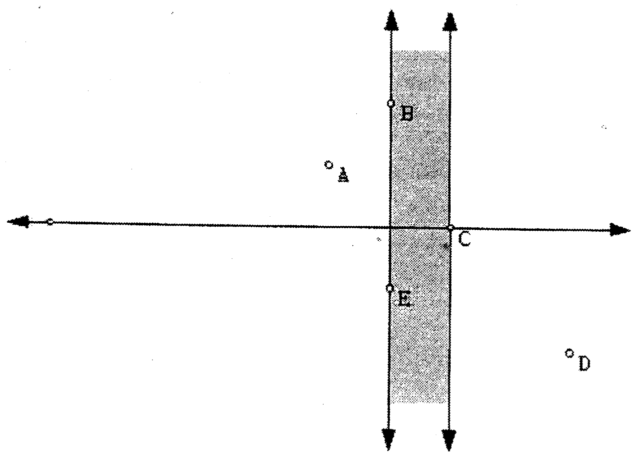
13)A=(0,1),B=(3,0),C=(1,-2),D=(-4,0) noktaları veriliyor.

dE(P,A)+dE(P,B)+dE(P,C)+dE(P,D) ‘nin en küçük olması için P bölgesi bulunuz.



Şekil 6.10 : Alıştırma

14)A=(0,1),B=(1,2),C=(2,0),D=(4,-2),E=(1,-1) noktaları veriliyor. dT(P,A)+dT(P,B)+dT(P,C)+dT(P,D)+dT(P,E)' nin en küçük olması için P bölgesi bulunuz.



Şekil 6.11 : Alıştırma

15)(4,3) noktasından (-1,-1) noktasına gidebilmek için uygun yolların sayısını bulunuz.

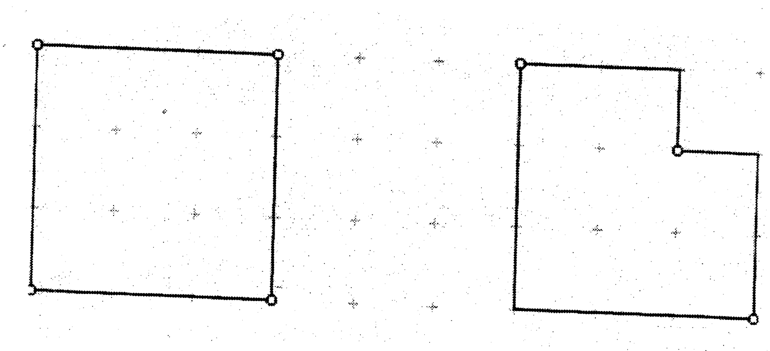
1	5	15	35	70	126
1	4	10	20	35	56
1	3	6	10	15	21
1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1

Pascal üçgenine göre 126 yol vardır.

16)6 yarıçaplı kaç tane taxi dairesi vardır? Pi sayısının taxi değeri kaçtır?

24 nokta vardır. Pi sayısı 4 'tür.

17)Kenar uzunluğu 3 olan iki farklı kare çiziniz.



Şekil 6.12 : Alıştırma

7. KENT COĞRAFYASINA İLİŞKİN İLAVE UYGULAMALAR

Kent coğrafyasına yönelik alıştırmaları çözmek için Taxicab geometri, öklidyen geometriye göre daha iyi bir matematiksel modeldir.Bazı yollardan dolayı, taxicab geometrisi daha basittir.Aşağıdaki problemleri inceleyiniz.

Problem 1-A=(2,4),B=(7,-1),C=(-3,1) veriliyor.

dE(P,A)+dE(P,B)+dE(P,C) nin mümkün olabilecek en küçük olabilmesi için bir P noktası bulunuz.

Problem 2-Aynı A,B,C noktaları veriliyor.

dT(P,A)+dT(P,B)+dT(P,C) nin en küçük olabilmesi için bir P noktası belirleyiniz.

İlk problem zor ve onu çözmeye teşebbüs edemeyiz.
İkinci problem dikkat çekecek şekilde basittir.

Şekil 1' de C 'den geçen yatay doğruyu ve A 'dan geçen düşey doğruyu çizdik..Diyelim ki; Q 'dan başladın, Q_1 'e bir birim yürü.Bunu yaparken A ya uzaklığını 1 birim azalt,B ve C den uzaklığını 1 birim artır.Böylece A,B,C noktalarına olan uzaklıkların toplamını artırmış olursun.:

$$dT(Q_1,A)+dT(Q_1,B)+dT(Q_1,C)>dT(Q,A)+dT(Q,B)+dT(Q,C) \qquad (7.1)$$

Gerçekte, doğrunun neresinden başlarsan başla, yukarıya ya da aşağıya;A,B,C ye olan uzaklıkların toplamını artırmış olursun.Çünkü daima daha fazla noktadan hareket ettiğinden ,daha fazla uzaklık katedilir.

Benzer olarak; herhangi yatay olarak uzaklaşan noktalanmış doğru; A ,B ve C den olan uzaklıkların toplamı artacaktır.Böylece,eğer,doğruların kesim noktasından başlayıp.istediğin herhangi bir yöne hareket et; A, B, C den olan uzaklıkların toplamı artacaktır.Bunu şu izler;

$$dT(P,A)+dT(P,B)+dT(P,C) \quad (7.2)$$

P noktası doğruların kesim noktası alınırsa, ifade minimize edilmiş olur. Problem 2' yi çözdük.

Benzer olarak; fakat daha zor bir problem olarak;

A=(-1,4),B=(3,1),C=(1,-1) ve D=(-4,1) noktaları veriliyor. En küçük olacak şekilde aşağıdaki tüm P noktalarını bulunuz.

$$dT(P,A)+dT(P,B)+dT(P,C)+dT(P,D) \quad (7.3)$$

D ve B noktalarından geçen yatay doğruları çizmeye başlayalım.(şekil 1) Önceki gibi bu doğrudan , herhangi dikey hareketle A, B, C ve D den olan uzaklıklar toplamı artacaktır.Şimdi dikey doğruyu çizerken, parçalanmamış kenarları A ve C den dikey şerit çizilir. Bu şeritteki (0,2) den ((1,2) ye hareket ederken , yatay hareketleri gözlemleyin.A.B,C ve D den olan uzaklıkların toplamı değişmez. (1,3) den (2,3) e giderken, bu şeritten uzağa doğru, yatay hareket vardır.Böylece tüm yatay doğruların ve dikey şeridin kesişimine ait P noktaları:

$$dT(P,A)+dT(P,B)+dT(P,C)+dT(P,D) \quad (7.4)$$

İfadesini en küçük yapar.

8. TAXİCAB GEOMETRİ VE ÖKLİDYEN GEOMETRİ İLE İLGİLİ İLAVE BİLGİLER

Genel olarak iki geometriyi inceledik: biri noktalar arasındaki uzaklığa dayalı; diğeri taxicab sürüşlerindeki uzaklığa dayalıdır. Her bir geometri de daha resmi şekilde, matematiksel olarak aşağıdakilerden oluşuyor:

1)P noktalarının kümesi,

2)L cümlesinin ,P doğrularıyla adlandırımış alt kümeleri,

3)m açı ölçüsünün fonksiyonu,

4)Alıştığımız geometride uzaklık fonksiyonu dE, Taxicab geometrisinde ise dT dir.

Alıştığımız geometride bilgilendirici sembol [P,L,dE,m] ve taxicab geometride onun yerini tutan sembol,[P,L,dT,m] dir.

[P,L,dE,m] sistemi öklit geometrisindedir,çünkü öklidyen düzlem geometrinin 13 aksiyomunu genel olarak sağlar.Biz [P,L,dT,m] nin tüm bu özellileri sağladığını gösteremeyeceğiz.Kanıtların bir çoğunun,gelişmiş ve ileri argümanlarla,aşikar ,gelişmiş doğru tanımlarına ve açı büyüklük fonksiyonu m ye ihtiyacı vardır.Onun yerine sırf özelliklerin durumunu ve [P,L,dE,m] nin bu özellikleri sağladığını varsayalım.Bu varsayımın temelleri üzerine ,hangi özelliklerin taxicab geometri için sağlanabileceğine karar verelim Sürpriz olarak Taxicab geometrinin bu 13 esaslı özelliği sağladığını göreceğiz.İlk 2 özellik,raslantısal özellikler olarak adlandırılır:

1)Herhangi verilen iki noktadan ,bir doğru geçer.

2)Bütün doğrular, en az iki noktadan oluşur; P düzlemi ise; doğrudaş olmayan en az üç noktadan oluşur.

Diğer dört aksiyom, uzaklık fonksiyonunun, "pozitif belirli","simetrik","üçgen eşitsizliğini" sağlayan ve "kuralcı özellik" sahibi olmasını ,iddia eder.Detayda,dE uzaklığı için,aşağıdaki dört özellik sağlanır:

1) Tüm (A,B) nokta çiftleri için, dE(A,B) negatif olmayan sayısını ifade eder. Bundan başka eğer A=B ise dE(A,B)=0 dır. (8.1)

2) dE(A,B)=dE(B,A) (8.2)

3) dE(A,B)+dE(B,C)≥dE(A,C) (8.3)

4) Herhangi verilen L doğrusu,bir tanesinden diğerine,L den R(reel sayılar) ye ,fL fonksiyonu üzerine,L üzerindeki B ve tüm A noktaları içindir.

| fL (A)-fL(B) | =dE(A,B) (8.4)

8.1. ALIŞTIRMALAR

1) $A=(a_1,a_2), B=(b_1,b_2)$ dT' nin aşikar olan tanımını kullanarak;

(8.1)

dT(A,B)=$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|$ ve mutlak değerle ilgili bildiğiniz her şeyi kullanarak , aşağıdakileri gösteriniz. (8.2)

a)dT(A,B)≥0

dT(A,B)=$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|$

$|a_1-b_1|\geq 0 ve |a_2-b_2|\geq 0$ o halde;

$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|\geq 0$ olacaktır. (8.3)

b)eğer dT(A,B)=0 , A=B dir.

dT(A,B)=$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|=0$

$|a_1-b_1|=|a_2-b_2|$

A=B (8.4)

c)eğer A=B ise dT(A,B)=0 dır.

$(a_1,a_2)=(b_1,b_2)$

$a_1=b_1, a_2=b_2$

$|a_1-b_1|=0, |a_2-b_2|=0$

$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|=0$

dT(A,B)=0 (8.5)

2) dT((A,B)=dT(B,A)

dT(A,B)=$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|$

dT(B,A)=$|b_1-a_1|+|b_2-a_2|$

dT(A,B)=dT(B,A) (8.6)

3) dT(A,B)+dT(B,C)≥dT(A,C) (ipucu:tüm x ,y değerleri için mutlak değer tanımın kullanınız.

$$|x+y| \leq |x| + |y| \tag{8.7}$$

[P,L,dT,m] nin özellik 6 yı sağladığını göstermek için,durumu ikiye ayıralım. Durum1:L dikeydir. Durum 2:L dikey değildir.

4) Tüm (x,y)∈L için fL$(x_1, x_2) = x_1$ tanımıyla verilen ifadede L dikeydir.

a)L den R ye olan fL fonksiyonu birebirdir, kontrol ediniz.

(x,x)∈L için fL$\left(x_1, x_1\right) = x_1$ 'dir. (8.8)

O halde fonksiyon birebirdir.

b)L üzerindeki tüm A,B noktaları için ;

| fL(A)-fL(B) | =dT(A,B) yi kontrol ediniz.

| fL(A)-fL(B) | $= |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$

=dT(A,B) 'dir. (8.9)

5) L' nin dikey olmadığı durumda, L 'nin belirli olan eğimi m olsun. A ve B gibi iki noktası belli olan L doğrusunun eğimi m ise,

$A = (a_1, a_2) B = (b_1, b_2) ise$

$$m = \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} \text{ olur.} \tag{8.10}$$

fL' yi şöyle tanımlayalım:

$fL(x_1,x_2)=(1+|m|).x_1$ tüm $(x_1,x_2)\in L$ için (8.11)

a)L den R ye olan fL fonksiyonunun, birebir olduğunu kontrol ediniz.

$fL(x_1,x_1)=(1+|m|).x_1$ tüm $(x_1,x_1)\in L$ olduğundan, birebirdir.

b)L doğrusu üzerindeki tüm A,B noktaları için:

$|fL(A)-fL(B)|=dT(A,B)$ (8.12)

$$|a_1-b_1|+|m.(a_1-b_1)|$$

$$|a_1-b_1|+|m|.|a_1-b_1| \qquad (8.13)$$

$$(1+|m|).|a_1-b_1|$$

(8.14)

$$dT(A,B)=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|$$

$$fL(A)-fL(B)$$

$$|(1+|m|)a_1-(1+|m|)b_1|$$

$$|1+|m||.|a_1-b_1|$$

$$(1+|m|).|a_1-b_1|$$

6) Düzlem ayırma özelliği diğer 13 özelliğin içindedir.

1_ Eğer L herhangi bir doğru ve P nin $H_1 ve H_2$ alt kümeleri varsa,

i) $H_1 ve H_2$ konvekstir.

ii) $H_1 \cup H_2$=P-L (8.15)

iii)eğer A$\in$ $H_1 ve B \in H_2$ ise $AB \cap L \neq \varnothing$ (8.16)

Bu özellik dE' yi içine almıyormuş gibi olsa da; eğer [P,L,dE,m] için doğru ise, [P,L,dT,m] için de doğru olmalıdır. Daha yakından incelersek,görüyoruz ki,uzaklık fonksiyonuyla ilgili olan daire parçası ve konvekslik de dahil olur.[P,L,dT,m] nin düzlem ayırımı özelliğini,daire dilimi ve konvekslik durumunu kontrol etmek için,ardı ardına gelen konseptin yol göstermesine ihtiyacımız vardır.

D uzaklık fonksiyonuyla ilgili her geometri şeklinde, arada olma tanımı hep şöyledir:

Eğer A, P, B ayrık noktalar ise, P ; A ve B 'nin arasındadır, şöyleki;

i)d(A,P)+d(P,B)=d(A,B) (8.17)

ii)A,P,B doğrudaştır.

Eğer d yi dE ile yer değiştirirsek, Öklid geometrisinin arada olma tanımını kullanırız. Eğer d ile dT yi yer değiştirirsek, Taxicab geometrisinden arada olma tanımını kullanmış oluruz.

6) A=(-2,-1) ve B=(3,2) veriliyor.

a)[P | dT(P,A)+dT(P,B)=dT(A,B)] gösteriniz.

$$P=(p_1,p_2) ise dT(P,A)=|p_1-a_1|+|p_2-a_2| \\ dT(P,B)=|p_1-b_1|+|p_2-b_2| \qquad (8.18)$$

$$dT(A,B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

$$|p_1 - a_1| + |p_2 - a_2| + |p_1 - b_1| + |p_2 - b_2| = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \quad (8.19)$$

dT(P,A)+dT(P,B)=dT(A,B) olur. (8.20)

b)[P | A,P,B doğrudaştır.]

c)[P | P ,A ile B nin taxi aralığındadır]

7) a)Arada olmanın tanımındaki ii) koşulu ,Öklit geometrisinde herhangi bir önem taşıyor mu? Evet.

b)Alıştırma 6'daki A ve B için,[P | P ,A ve B nin öklidyen aralığındadır.]

c)Öklidyen ve taxicab geometrideki arada olma aynı mıdır?Eğer P ;A ve B nin öklit ,arası ise aynı zamanda,P ; A ve B'nin taxi arası mıdır?

Evet.

8)a) AB yarım dairesi arada olma tanımı nasıldır?

| AB | =A,B ve A,B arasındaki tüm noktaların kümesi;

={A}∪{B}∪{P | A-P-B} (8.21)

b)Taxicab geometrisindeki yarım dairelerle,Öklidyen geometrideki yarım dairelerle aynı mıdır?

Evet.

c)Yarım daireler içim konvekslik nasıl tanımlanır?

$A \in S$ ve $B \in S$ ise $AB \subset S$ (8.22)

d)Konvekslik taxicab gometrisiyle,Öklit geometrisinde aynı anlamı taşır mı?Mesela eğer,P nin alt kümesi H taxi konveks ise ,aynı zamanda öklit konveks midir?

Evet.

9) [P,L,dE,m] nin düzlem ayırma özelliği varsa,[P,L,dT,m].nin de var mıdır?

Evet,vardır.

10) a) $\overrightarrow{AB}$ yayının arada olma tanımı nasıldır?

$$AB=\{A\}\cup\{P \mid A\text{-}P\text{-}B\}\cup\{B\}\cup\{Q \mid A\text{-}B\text{-}Q\} \qquad (8.23)$$

b)Karşılıklı her taxi yayı,bir öklit yayı mıdır?

Evet.

c) $\angle ABC$ yaylar vasıtasıyla nasıl tanımlanır?

AB yayı ile BC yayının birleşimidir.

d)Karşılıklı olarak,her taxi açısı,öklit açısı mıdır?

Evet.

11) a)Eğer $A \notin BC$,A nın tarafındaki BC nin yarım düzlemi,ne anlama gelir?

BC yarım düzleminde,A noktası haiz değildir.

b)Taxi geometrisindeki A nın tarafındaki BC ile ,Öklit geometrisindeki A nın tarafındaki BC aynı mıdır?

Evet.

c)Yarım düzlemlerde, $\angle ABC$ nin iç açısı nasıl tanımlanır?

AB yayı ile BC yayı arasındaki kısımdır.

d)İç açı tanımı, hem taxi hem de öklit geometrisinde aynı mıdır?

Evet.

Aşağıda 13 temel özelliğin listesinden,4 tanesi veriliyor:

1_ m açısının ölçüsü, 0 ile 180 arasındaki gerçel sayılardan olabilir.

2_ H yarım düzleminin kenarında verilen AB yayı,0 ile 180 derece arasında verilen bir r sayısı verilirse;P∈ H ,m $\langle PAB = r$ olacak şekilde $\overrightarrow{AP}$ vardır.

3_Eğer D, $\angle ABC$ nin iç açısı ise,

$$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC \tag{8.24}$$

4_Eğer B,A ve C nin arasında ise ve $D \notin ACyay\imath$,sonra:

$$m\angle ABD + m\angle DBC = 180 \tag{8.25}$$

İki geometride de aynı olarak ,açı büyüklük fonksiyonu m,"ışın","yarı düzlem","iç açı","arada olma" aynı anlama geliyorsa; bu özellikler,[P,L,dE,m] için doğruysa,[P,L,dT,m] için de doğrudur.

Diğer özellik,[P,L,dE,m] nin, "kenar-açı-kenar" özelliğidir.

5_ İki üçgenin tepe noktalarının kümesi verilsin. Eğer bu üçgenlerin tepe açıları aynı ise ve bu açıyı oluşturan kenarlar, benzer ise verilen bu iki üçgen de benzerdir denir.Bu [P,L,dE,m] nin basit bir özelliğidir. Ama [P,L,dT,m]' nin değildir.Aşağıdaki alıştırmalarla "kenar-açı-kenar" özelliğini inceleyeceğiz.
En son özellik,[P,L,dE,m] nin en ünlü paralellik özelliğidir.

6_ L doğrusunda olmayan P noktası verilsin,buna göre P den geçen L ye paralel olan bir doğru mutlaka vardır

Alıştırmaların devamı:

12) Şekil 1 de, $\Delta ABC ve A_1B_1C_1$ üçgenleri veriliyor.

a)dT(A,B)=dT(A_1, B_1) midir?

Evet. (8.26)

b)dT(A,C)=dT(A_1, C_1) midir?

Evet. (8.27)

c) $m\angle BAC = m\angle B_1A_1C_1$ midir?

Evet. (8.28)

d)A$\leftrightarrow$ A_1,B$\leftrightarrow$ B_1,C$\leftrightarrow$ C_1 benzerliğini kullanarak; (8.29)

üçgenlerinin " kenar-açı-kenar" özelliğini sağladığını gösteriniz.

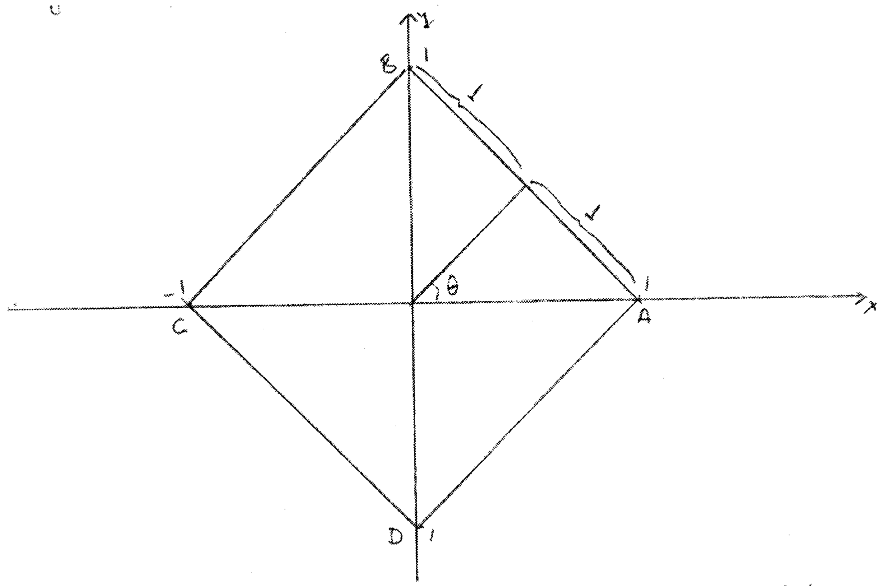
Yukarıdaki açıların benzerliğini kullanırsak, ABC ile $A_1B_1C_1$ üçgenleri benzerdir.

e)$\square ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ benzer midir? Neden veya neden değil?

Hayır. BC ve B_1C_1 benzerliği yoktur.

9. TAXİCAB TRİGONOMETRİ

Taxicab birim çember, $|x|+|y|=1$ denklemi ile verilen ve şekli aşağıda gösterilen eğridir. (Topolojide kullanılan eşdeğer civar kavramı gibi)



Şekil 9.1: Taxicab Geometri

Tanım : t raydan, başlangıç noktası taxicab çemberinin merkezinde ve taxicab birim çemberinden 1 uzunluğunda yayı kesen θ açısının büyüklüğüne denir. Ve taxicab açısının ölçüsü t-radyan cinsinden ölçülür.

Yukarıda taxicab birim çemberinin tanımından dolayı bu çemberin çevresi 8 tratyana eşittir.

Bu referans sisteminden dolayı $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ ve π Euclidyen açılarının ölçüleri Taxicab Trigonometride sırasıyla 1,2 ve 4'e eşittir.

Aşağıdaki teorem Euclidyen açıların Taxıcab Ölçülerini tanımlamamıza yardımcı olur.

TEOREM: ϕ_e Euclidyen dar açık olsun. Bu açının taxicab ölçüsü

$$(1) \quad \theta = 2 - \frac{2}{1+tg_e\phi_e} = \frac{2Sin_e\phi_e}{Sin_e\phi_e + Cos_e\phi_e} \tag{9.1}$$

eşitliği ile verilir.

İspat : ϕ_e Euclidyen açısının θ taxicab üçlüsü (1,0) noktasının $y=-x+1$ ve $y = xtg_e\phi_e$ doğrularının kesim noktasına olan taxibac uzaklığıdır. Dolayısıyla, bu doğruların kesim noktası

$$\left.\begin{array}{l} y=-x+1 \\ y = xtg_e\phi_e \end{array}\right\} \Rightarrow y=y \quad \Rightarrow \quad -x+1 = xtg_e\phi_e \quad \Rightarrow \quad 1 = xtg_e\phi_e + x \Rightarrow 1 = (1+tg_e\phi_e)x \quad \Rightarrow$$

$$(2) \quad x_0 = \frac{1}{1+\mathrm{tg}_e\phi_e} \tag{9.2}$$

olarak bulunur. y_0 koordinatı ise $y=-x+1$ den dolayı

$$y_0 = -x_0 + 1 = -\frac{1}{1+\mathrm{tg}_e\phi_e} + 1 = \frac{-1+1+\mathrm{tg}_e\phi_e}{1+\mathrm{tg}_e\phi_e} \tag{9.3}$$

$$y_0 = \frac{\mathrm{tg}_e\phi_e}{1+\mathrm{tg}_e\phi_e}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\left.\begin{array}{l} y=-x+1 \\ \\ y=(\mathrm{tg}_e\phi_e)x \end{array}\right\}$ doğrularının kesim noktası

$$A=\left(\frac{1}{1+\mathrm{tg}_e\phi_e},\frac{\mathrm{tg}_e\phi_e}{1+\mathrm{tg}_e\phi_e}\right) \tag{9.4}$$

olarak elde edilir. Bu A noktası ile $P(0,1)$ noktası arasındaki Taxibac uzunluğu ise,

$$\theta=d(A,P)=|1+x_0|+|y_0|=(1-x_0)+(y_0)=|-x_0-x_0+1|=2-2x_0 \tag{9.5}$$

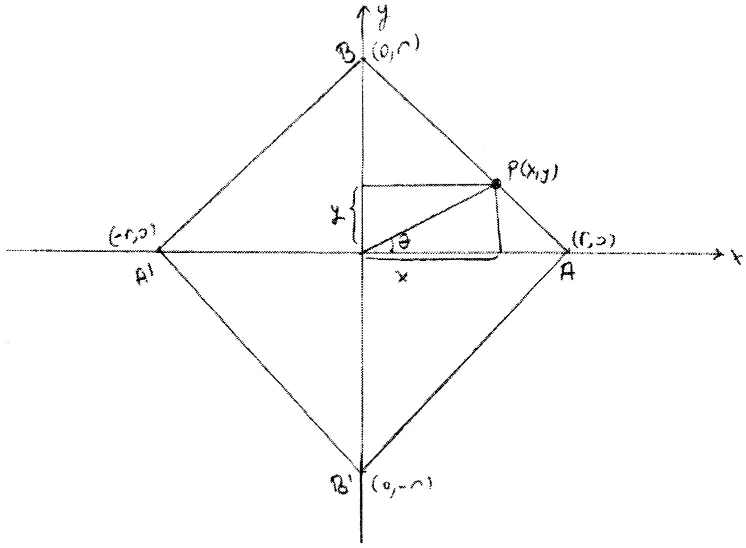
$$\text{(3)}\quad \theta=2-\frac{2}{1+\mathrm{tg}_e\phi_e}=\frac{2+2\mathrm{tg}_e\phi_e-2}{1+\mathrm{tg}_e\phi_e}=\frac{2\mathrm{tg}_e\phi_e}{1+\mathrm{tg}_e\phi_e} \tag{9.6}$$

$$=\frac{2\cdot\dfrac{Sin_e\phi_e}{Cos_e\phi_e}}{1+\dfrac{Sin_e\phi_e}{Cos_e\phi_e}}=\frac{\dfrac{2Sin_e\phi_e}{Cos_e\phi_e}}{\dfrac{Sin_e\phi_e+Cos_e\phi_e}{Cos_e\phi_e}}=\frac{2Sin_e\phi}{Sin_e\phi+Cos_e\phi_e}\quad\Rightarrow$$

$$\theta=2-\frac{2}{1+tg_e\phi_e}=\frac{2tg_e\phi_e}{1+tg_e\phi_e}=\frac{2Sin_e\phi_e}{Sin_e\phi_e+Cos_e\phi_e}$$

9.1. Taxicab Geometrisinde Kullanılan Trigonometrik Oranlar

Aşağıdaki taxicab geometrisinde kullanılan trigonometrik oranlar aşağıdaki şekilde tanımlanır.



Şekil 9.2 : Taxicab Geometrisinde Kullanılan Trigonometrik Oranlar

Yukarıdaki şekilde birim çemberi (Taxıcab birim çemberinin) denklemi

$$|x|+|y|=r \tag{9.7}$$

şeklinde tanımlayalım.

1. **DURUM :** θ açısı birinci dörtle bir bölgede olsun., bu durumda θ açısı

$$\theta=\frac{d_T(P,A)}{|x|+|y|}=\frac{d(P,A)}{r}=\frac{|x_2+x_1|+|y_2+y_1|}{r} \tag{9.8}$$

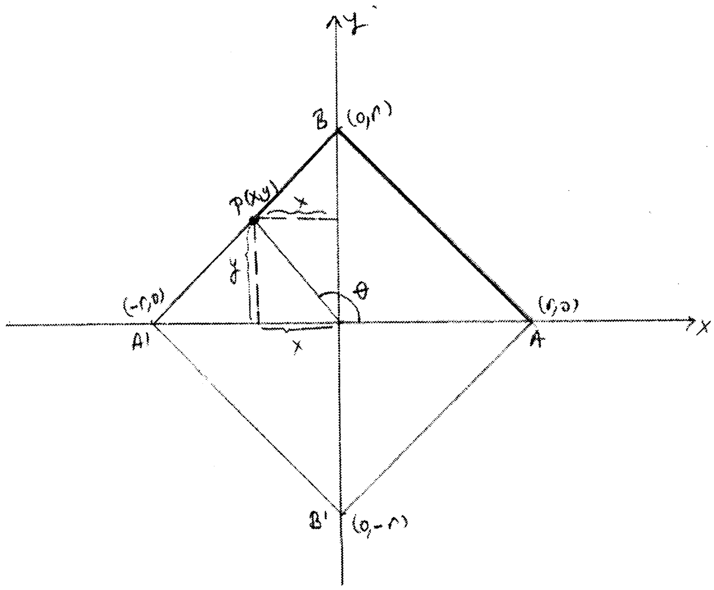
$$=\frac{|r-x|+|y-0|}{r}=\frac{|r-x|+|y|}{r} \quad \Rightarrow$$

(1) $$\theta=\frac{|r-y|+|y|}{r}$$

ifadesi ile verilir.

Daha sonra θ açısı hakkında $Sin\theta$, $Cos\theta$ gibi trigonometrik oranları ele alacağız.

2. **DURUM** : θ açısı ikinci dörtte bir bölgede ise,



Şekil 9.3: Taxicab Geometrisinde Kullanılan Trigonometrik Oranlar

İlkönce $|AP|_T$ uzunluğunu bulalım.

$$|AP|_T = |AB|_T + |BT|_T \tag{9.9}$$

olduğu hatırda tutularak

$$|AP|_T = \left[|r-0| + |0-r|\right] + \left[|0-x| + |r-y|\right] = 2r + |x| + |r-y| \tag{9.10}$$

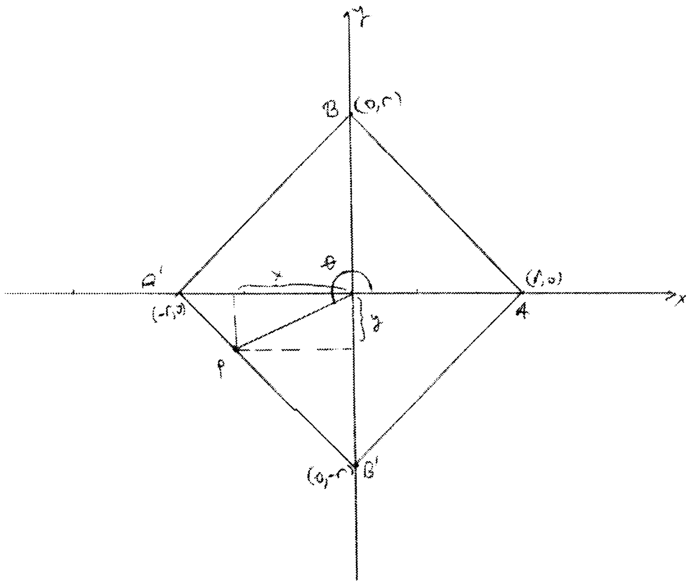
olarak bulunur. Dolayısıyla θ açısının ikinci dörtte bir bölgede θ açı ölçüsü

$$\theta = \frac{|AP|_T}{r} = \frac{2r + |x| + |r-y|}{|x| + |y|} \tag{9.11}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde hareket edilerek θ açısının üçüncü dörtte bir bölgede olması halinde,

3. DURUM:



Şekil 9.4 : Taxicab Geometrisinde Kullanılan Trigonometrik Oranlar

$$|AP|_T = |AB|_T + |BA'|_T + |A'P|_T \tag{9.12}$$

$$= \frac{|r-0|+|0-r|}{|AB|_T} + \frac{|0+r|+|r-0|}{|BA'|_T} + \frac{|x+r|+|y-0|}{|A'P|_T} \tag{9.13}$$

$$= 4r + |x+r| + y$$

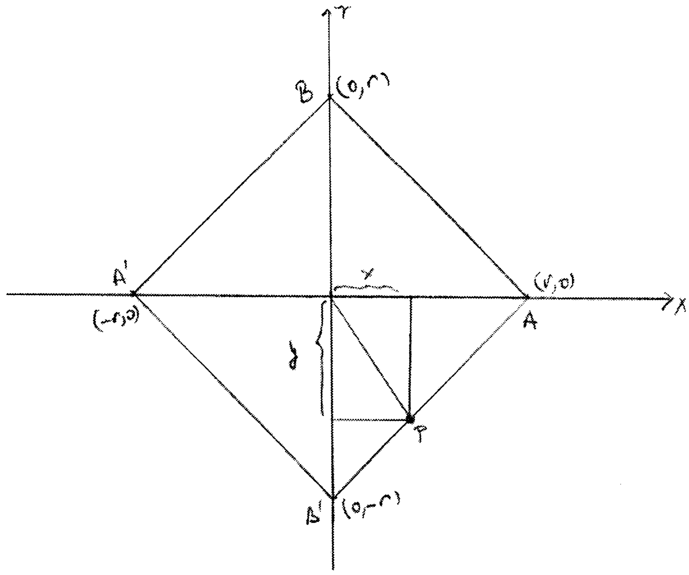
$$|AP|_T = 4r + |x+r| + y \tag{9.14}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla θ açısının ölçüsü

$$\theta = \frac{|AP|_T}{r} = \frac{4r+|x+r|+y}{|x|+|y|} \tag{9.15}$$

şeklinde bulunur.

4. DURUM :



Şekil 9.5 : Taxicab Geometrisinde Kullanılan Trigonometrik Oranlar

$$|AP|_T = |AB|_T + |BA'|_T + |A'B'|$$

$$= \frac{|r-0|+|0-r|}{|AB|_T} + \frac{|0+r|+|r-0|}{|BA'|_T} + \frac{|-r+0|+|0+r|}{|A'B'|_T} + \frac{|0+x|+|y+r|}{|B'P|_T}$$

$$= 6r + |x| + |y+r| \qquad (9.16)$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla θ açısının ölçüsü

$$\theta = \frac{|AP|_T}{r} = \frac{6r+|x|+|y+r|}{|x|+|y|} \qquad (9.17)$$

şeklinde elde edilir.

9.2. Trigonometrik Oran Fonksiyonları

Bu bölümde de θ açısına karşılık gelen $Cos\theta$, $SinC, tg\theta,...$ gibi trigonometrik oran fonksiyonlarının genel ifadelerini elde etmeye çalışınız. Bu oran fonksiyonları genel olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

θ açısının Kosinüsü $Cos(\theta)_T = \frac{x}{r}$ şeklinde tanımlanır.

Diğer yandan θ açısı üst yarı düzlemde ise

$$(1) \quad \theta = \frac{d_T(P,A)}{r} = \frac{|x-r|+|y|}{|x|+|y|} = \frac{|x-r|+|y|}{x+y} \quad (\theta \in [0,2))$$

(9.18)

$$(2) \quad \theta = \frac{2r + d(P,B)}{r} = \frac{2r+|x|+|y-r|}{-x+y} \quad (\theta \in [2,4))$$

(9.19)

Şimdi (1) ve (2) denklemlerinden x'i çözersek,

(1) Denkleminden

$$\theta = \frac{|x-r|+|y|}{r} = \frac{|x-(x+y)|+|y|}{r} = \frac{|y|+|y|}{r} = \frac{2y}{r} \quad (9.20)$$

$\theta = \frac{2y}{r}$ (üst yarı düzlemde $y>0$ do. $|y| = y$)

$$2y = r\theta \Rightarrow y = \frac{1}{2} r\theta$$

$$r+x+y \;\Rightarrow\; r=x+\frac{1}{2}r\theta \;\Rightarrow\; r-\frac{\theta}{2}r=x \tag{9.21}$$

$$x=r\left(1-\frac{\theta}{2}\right)$$

buluruz. Benzer şekilde hareket edersek,

$$r=-x+y$$

$$\theta=\frac{2r+d_T(P,B)}{r}=\frac{2r+|x|+|y-r|}{r} \tag{9.22}$$

$$=\frac{2r+|x|+|y-(-x+y)|}{r}=\frac{2r+|x|+|x|}{r}$$

$$=\frac{2r+2|x|}{r} \;\Rightarrow\; \theta r=2r+2|x| \quad \theta\text{r-2r=2}|\text{x}|$$

$$|x|=r\left(\frac{\theta}{2}-1\right) \;\Rightarrow\; |x|=\text{r}\left(\frac{\theta}{2}-1\right) \tag{9.23}$$

$$|x|=r\left|1-\frac{\theta}{2}\right| \;\Rightarrow\; x=1-\frac{\theta}{2}$$

bulunur. Dolayısıyla θ açısı üst yarı düzlemde ise yani (θ açısı $[0,2)$ ya da $[2,4)$ de ise)

$$\left.\begin{aligned}\theta&=\frac{d_T(P,A)}{r}\\ \theta&=\frac{2r+d_T(P,B)}{r}\end{aligned}\right\} \text{denklem çiftinin aynı çözümü} \tag{9.24}$$

$$(\ast) \quad x = r\left(1 - \frac{\theta}{2}\right) \tag{9.25}$$

dir.

Diğer taraftan θ açısı $[4,6)$ ya da $[6,8)$ bölgelerinde ise

$$(3)\begin{cases} \theta = \dfrac{4r + d_T(P, A')}{r} \\ r = -x - y \end{cases} \quad \text{ya da} \quad (4)\begin{cases} \theta = \dfrac{6r + d_T(P, B')}{r} \\ r = x - y \end{cases} \tag{9.26}$$

denklemleri aynı anda gerçeklenir. (3) denkleminden

$$\theta = \frac{4r + d_T(P, A')}{r} = \frac{4r + |x + r| + |y|}{r} \tag{9.27}$$

$$= \frac{4r + |-x - x - y| + |y|}{r} = \frac{4r + |y| + |y|}{r} = \frac{4r + 2|y|}{r}$$

$$\theta r = 4r + 2|y| \;\Rightarrow\; r(\theta - 4) = 2|y| \;\Rightarrow$$

$$|y| = r\left(\frac{\theta}{2} - 4\right) \;\Rightarrow\; |y| = r|-4-| \tag{9.28}$$

$$r = -x + y \;\Rightarrow\; r = -x - r\left(\frac{\theta}{2} - 4\right) \;\Rightarrow\; x = -r - r\left(\frac{\theta}{2} - 4\right)$$

$$\Rightarrow\; x = -r\left[1 + \frac{\theta}{2} - 4\right] \;\Rightarrow \tag{9.29}$$

$$x=-3+\frac{\theta}{2} \tag{9.30}$$

bulunur. Benzer şekilde hareket

$$\left.\begin{array}{l}\theta=\dfrac{6r+d_T\left(P,B'\right)}{r}=\dfrac{6r+|x|+|y+r|}{r}\\ r=x-y\end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözümü

$$\theta=\frac{6r+|x|+|y+x-y|}{r}=\frac{6r+2|x|}{r} \quad\Rightarrow\quad r\theta=Gr+2|x| \tag{9.31}$$

$$r\theta-6r=2|x| \quad\Rightarrow\quad |x|=\left(-3+\frac{\theta}{2}\right)r \quad\Rightarrow$$

$$x=-3+\frac{\theta}{2}$$

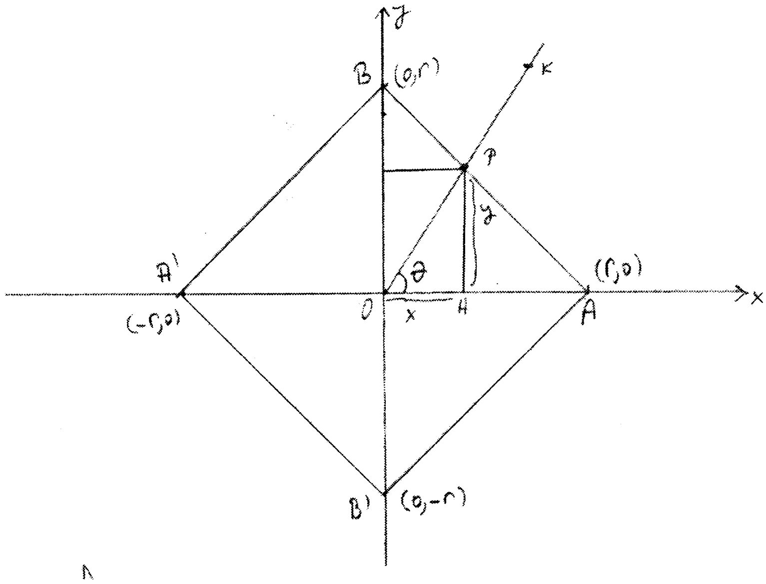
bulunur.

Dolayısıyla $Cos(\theta)_T$ fonksiyonu (TRİGONOMETRİK ORAN FONKSİYONU)

$$Cos(\theta)_T=\frac{x}{r}=\begin{cases}1-\dfrac{\theta}{2} & \theta\in\{[0,2)\cup[2,4)\}\Rightarrow\theta\in[0,4) \text{ ise}\\ -3+\dfrac{\theta}{2} & \theta\in\{[4,6)\cup[6,8)\}\Rightarrow\theta\in[4,8) \text{ ise}\end{cases} \tag{9.32}$$

şeklinde tanımlanır.

9.2.1. $Sin(\theta)_T$ Oran Fonksiyonunun Bulunması:



Şekil 9.6 : $Sin(\theta)_T$ Oran Fonksiyonunun Bulunması:

$\overset{\triangle}{OHP}$ dik üçgeninden

$$Sin(\theta)_T = \frac{y}{r} \tag{9.33}$$

olarak tanımlanır. Fakat θ açısının durumu,

$$\theta \in [0,2), \quad \theta \in [2,6), \quad \theta \in [6,8) \tag{9.34}$$

olması halinde

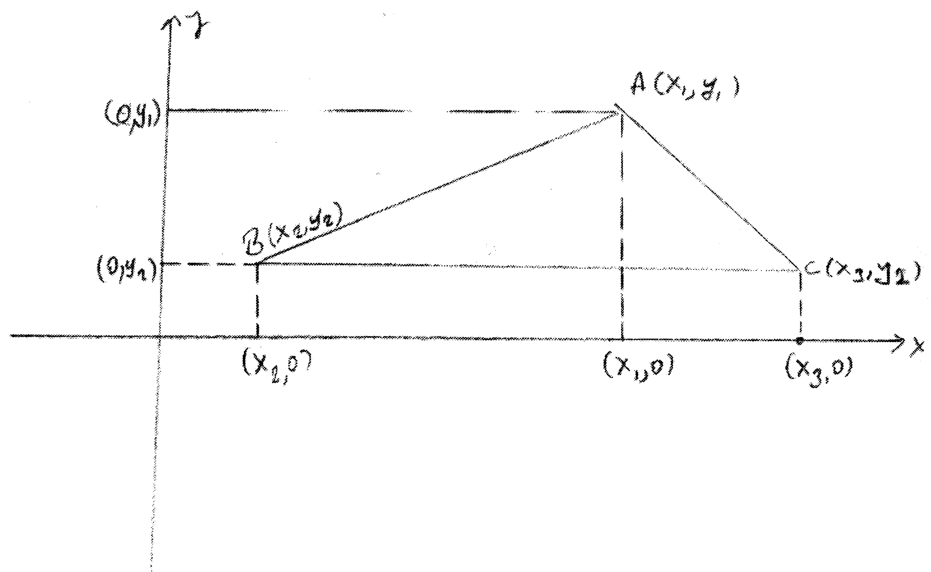
$$Sin(\theta)_T = \begin{cases} \frac{\theta}{2} & \theta \in [0,2) \text{ ise} \\ 2-\frac{\theta}{2} & \theta \in [0,2) \text{ ise} \\ -4+\frac{\theta}{2} & \theta \in [0,2) \text{ ise} \end{cases} \qquad (9.35)$$

şeklinde bulunur.

Euclidyen trigonometride olduğu gibi

$$tg(\theta)_T = \frac{Sin(\theta)_T}{Cos(\theta)_T} = \frac{y}{x}$$

$$Cotg(\theta)_T = \frac{Cos(\theta)_T}{Sin(\theta)_T} = \frac{x}{y} \qquad (9.36)$$



Şekil 9.7. Euclidyen trigonometri

$$\frac{a_T - b_T}{a_T + b_T} \le \frac{(a_T)^2 - (b_T)^2}{(c_T)^2} \le \frac{(a_T + b_T)}{(a_T - b_T)}$$

(9.37)

$$a_T = d_T(B,C) = |x_3 - x_2| + |y_2 - y_2| \quad \Rightarrow$$

$$(1) \quad a_T = |x_3 - x_2|$$

$$b_T = d_T(A,C) = |x_3 - x_1| + |y_1 - y_2|$$

$$c_T = d_T(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

$$\left.\begin{aligned} a_T - b_T &= |x_3 - x_2| - |x_3 - x_1| - |y_3 - y_1| \\ a_T + b_T &= |x_3 - x_2| + |x_3 - x_1| + |y_3 - y_1| \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

(9.38)

$$\frac{(b_T - c_T)}{(b_T + c_T)} \leq \frac{(b_T)^2 - (c_T)^2}{(a_T)^2} \leq \frac{(b_T + c_T)}{(b_T - c_T)}$$

$$\frac{|x_3 - x_1| - |x_1 - x_2|}{|x_3 - x_1| + |x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2|} \leq$$

$$Sec(\theta)_T = \frac{1}{Cos(\theta)_T} = \frac{r}{x} \qquad (9.39)$$

$$Co\sec(\theta)_T = \frac{1}{Sin(\theta)_T} = \frac{r}{y} \qquad (9.40)$$

şeklinde tanımlanırlar. Fakat burada

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2abcCosA$$

$$(d_E(B,C))^2 = (d_T(A,B))^2 + (d_T(A,C))^2 - 2(d_T(A,C))^2 (d_T(A,B))^2 CosA$$

$$-2\left[\left(x_1x_2+x_2x_3+2y_1y_2\right)\right]+2\left(x_1y_2+y_1x_3\right)$$

(9.41)

$$h_{T_a}=\frac{1}{2}\left(b_T+c_T-a_T\right)$$

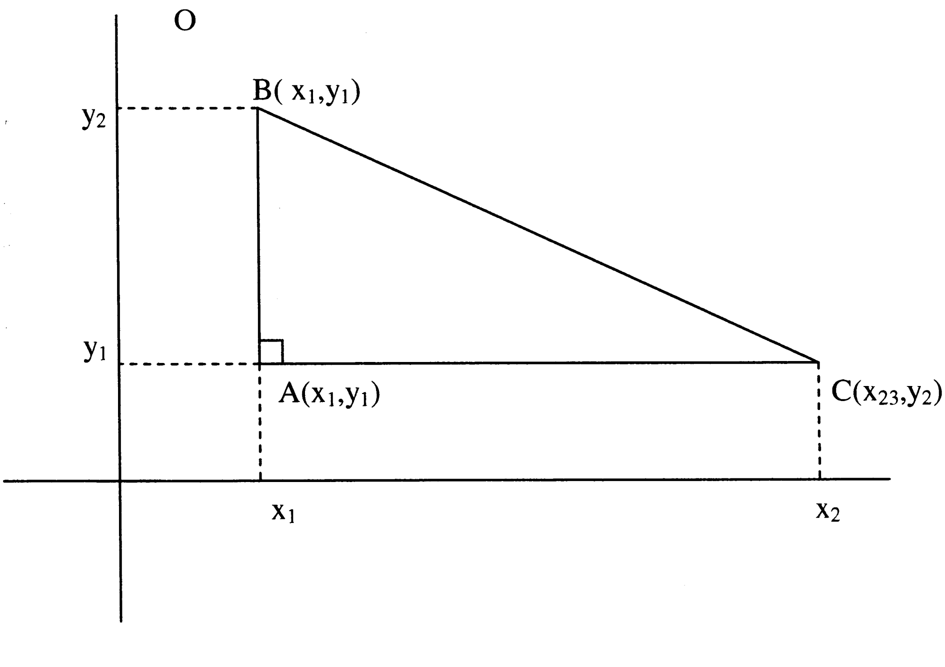
$$h^2_{T_a}=\frac{1}{4}\left(b_T+c_T-a_T\right)^2$$

$A\left(x_1,y_1\right)$, $\mathrm{B}\left(x_2,y_2\right)$, $\mathrm{C}\left(x_3,y_2\right)$

$$2\left[\left(x_1x_2+y_1y_2\right)-\left(x_1y_2+y_1x_2\right)\right]$$

$$2\left[\left(x_1x_3+y_1y_2\right)-\left(x_1y_2+y_1x_3\right)\right]$$

$a=a_T$
$b=b_T$
$c=c_T$
$h_{a_T}=h_a$



Şekil 9.8. Euclidyen trigonometri

10. KOSİNÜS TEOREMİNİN TAXİCAB GEOMETRİDE İFADESİ:

R_T^2 taxicab düzlemi ile □ ^{2} öklidyen düzlemi hemen hemen aynıdır. Noktalar, doğrular, açıların ölçülmesi, aynıdır. Buna göre;

Önerme 1 : Taxicab düzlemde verilen ABC üçgeninin kenarlarının uzunlukları;

$a_T = d_T(B,C), b_t = d_T(A,C) ve C_T = d_T(A,B)$ olsun. Eğer ABC üçgeninin bir kenarı, BC'ye paralel ise ; $\hat{B} ve \hat{C}$ geniş açı değilse;

$$(b_T)^2 + (c_T)^2 = (a'_T)^2 + (a''_T)^2 + 2h_{Ta}(a_T + h_{Ta})$$

$$(b_T)^2 + (c_T)^2 = \left[(a_T)^2 + (a''_T)^2 - 2a'_T a''_T CosA\right] + 2h_{Ta}(a_T + h_{Ta})(1 - CosA)$$

$$-2\ (b_T)(c_T).CosA \qquad (10.1)$$

$$h_{Ta} = d_T(A,B,C), a'_T = d_T(B,H), a''_T = d_T(H,C)$$

İspat: Alacağımız ABH ve AHC üçgenleri için;

$$a_T = d_T(B,C) = |x_2 - x_3|, b_T = d_T(A,C) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|$$

$$c_T = d_T(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \qquad (10.2)$$

$$h_{Ta} = d_T(A,B,C) = |y_1 - y_2|$$

$$a_T^{'} = d_T(B,H) = |x_1 - x_2|$$

$$a_T^{''} = d_T(H,C) = |x_1 - x_3|$$

Bu eşitsizliklerden ;

$$b_T = a_T^{''} + h_{Ta}, \quad c_T = a_T^{'} + h_{Ta} \quad \text{ve } a_T = a_T^{'} + a_T^{''}$$

(10.3)

$$(b_T)^2 + (c_T)^2 = (a_T^{'})^2 + (a_T^{''})^2 = 2h_{Ta}(a_T^{''} + h_{Ta})$$

olacaktır. Diğer taraftan ;

$$(b_T)^2 + (c_T)^2 = 2(b_T)(c_T).CosA = \left[(a_T^{'})^2 + (a_T^{''})^2 - 2(a_T^{'}) \ + (a_T^{''}).CosA\right] +$$

$$= \left[2h_{Ta}(a_T + h_{Ta}).(1 - CosA)\right] \qquad (10.4)$$

açıkça görülüyor.

Önerme 2: Eğer ABC üçgenin bir kenarı, BC kenarına paralel ise $\hat{B}$ ve $\hat{C}$ açıları dar açı değillerse;

$$a_T = d_T(B,C) = |x_2 - x_3|, b_T = d_T(A,C) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_2|$$

$$c_T = d_T(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \qquad (10.5)$$

$$h = |y_1 - y_2| \quad ,a_T^{'} = |x_1 - x_2| \quad ,a_T^{''} = |x_1 - x_3|$$

İspat : Bu eşitsizliklerden ;

$$b_T = a''_T + h_{Ta},\quad c_T = a'_T + h_{Ta} \quad \text{ve } a_T = a'_T - a''_T \tag{10.6}$$

ve

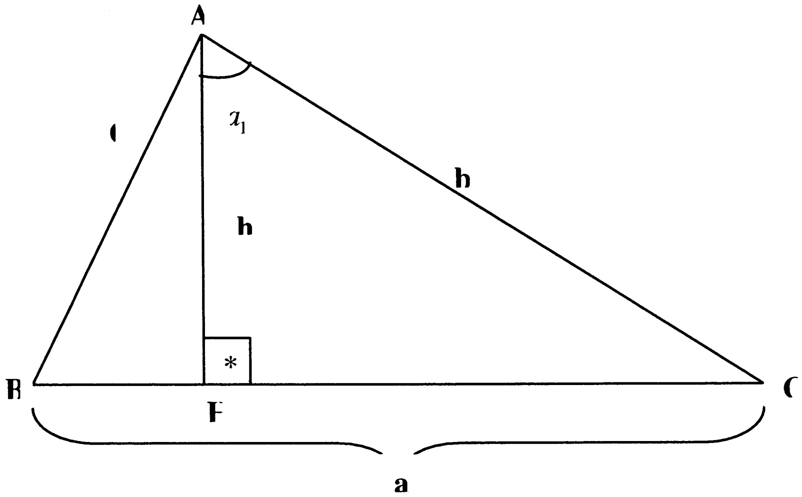
$$\left(b_T\right)^2 + \left(c_T\right)^2 = \left(a'_T\right)^2 + \left(a''_T\right)^2 + 2h_{Ta}\left(a'_T + a''_T + h_{Ta}\right)$$

$$\begin{aligned}\left(b_T\right)^2 + \left(c_T\right)^2 \text{-}2\ \left(b_T\right)\left(c_T\right).CosA = \left(a_T\right)^2 + \left(a''_T\right)^2 - 2(a'_T)(a''_T)CosA \\ + 2h_{Ta}\left(a'_T + a''_T + h_{Ta}\right).\left(1 - CosA\right)\end{aligned} \tag{10.7}$$

olduğu görülür.

Önerme 3: Öklidyen geometrik kosinüs teoriminin, Taxicab geometrisinde eksenlerden birine paralel olan kenar ve bu kenara ait yüksekliği ile yüksekliğin bu kenar üzerinde ayırdığı parçalar cinsinden ifade edildiğini gösterir.

İspat :



Şekil 10.1 : Önerme 3

$$|BH|^2 + h^2 = c^2$$

$$|HC|^2 + h^2 = b^2 \qquad (10.8)$$

$$c^2 - |BH|^2 = b^2 - |HC|^2$$

$$(b^2 + c^2) = 2h^2 + |BH|^2 + |HC|^2 \qquad (10.9)$$

$\cos a_1 = \dfrac{h}{b}$ $h=b.\mathrm{Cos}A_1$ olduğu açıkça görülür.

11. ÜÇGENLERDE HARNACK EŞİTSİZLİĞİNİN TAXİCAB GEOMETRİDE İFADESİ

Önerme 1: Taxicab düzlemde, ABC üçgenin kenarlarının uzunlukları;

$a_T = d_E(B,C), b_t = d_E(A,C) ve C_T = d_E(A,B)$ ise;

(1^0) $\hat{B}$ ve $\hat{C}$ dar açılar olmak üzere eğer $\overset{\square}{ABC}$ üçgeninin bir kenarı, BC kenarına paralel ise;

$$(b_T)^2+(c_T)^2=(a''_T)^2+(a'_T)^2+2h_{Ta}[a_T+h_{Ta}]$$

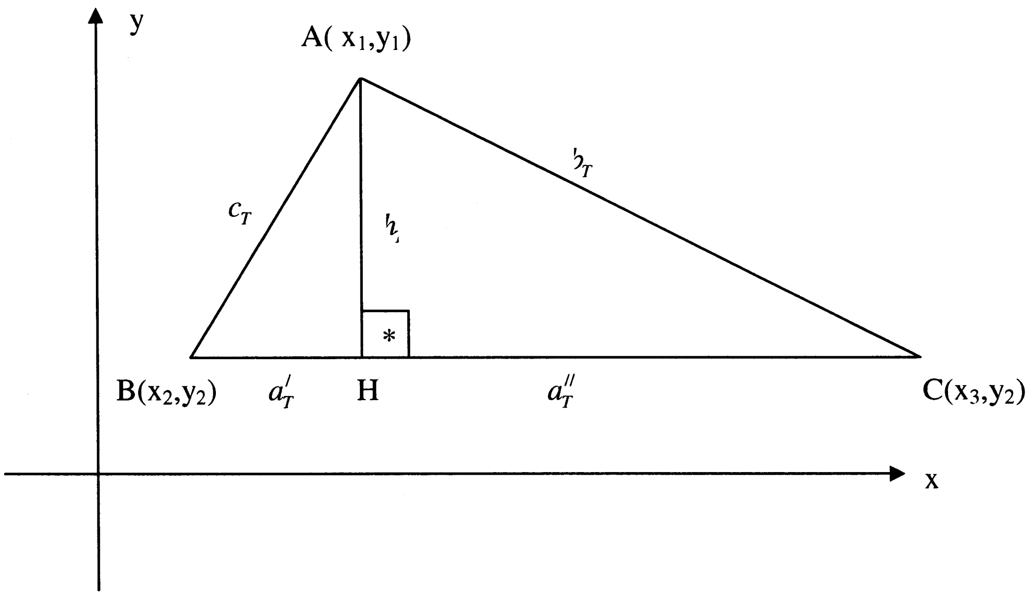
$$(b_T)^2+(c_T)^2 - 2\,(b_T)(c_T).CosA=\left[(a'_T)^2+(a''_T)^2-2a'_T a''_T+CosA\right]$$

$$+2h_{Ta}(a_T+h_{Ta}).(1-CosA) \qquad (11.1)$$

$h_{Ta}=d_T(A,B,C)$, $a'_T=d_T(B,H)$, $a''_T=d_T(H,C)$

dir.

İspat :



Şekil 11.1 Üçgenlerde Harnack Eşitsizliğinin Taxicab Geometride İfadesi

Alacağımız $\overset{\triangle}{ABC}$ ve $\overset{\triangle}{AHC}$ üçgenleri için

$$a_T = d_T(B,C) = |x_2 - x_3|, b_T = d_T(A,C) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|$$

$$c_T = d_T(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

$$h_{Ta} = d_T(A,B,C) = |y_1 - y_2| \quad , a_T^{'} = d_T(B,H) = |x_1 - x_2| \quad , \tag{11.2}$$

$$a_T^{''} = d_T(H,C)|x_1 - x_3|$$

Bu eşitlikler;

$$b_T = a_T^{'''} + h_{Ta}, \quad c_T = a_T^{'} + h_{Ta} \text{ ve } a_T = a_T^{'} + a_T^{''} \tag{11.3}$$

ve

$$(b_T)^2 + (c_T)^2 = (a'_T)^2 + (a''_T)^2 + 2h_{Ta}(a_T + h_{Ta}) \tag{11.4}$$

Diğer yandan bu eşitliklerden faydalanarak;

$$-2\ (b_T)(c_T).CosA = -2\left[a'_T a''_T + h_{Ta}(a_T + h_{Ta})\right].CosA \qquad (11.5)$$

Basit hesaplamalardan sonra ispat tamamlanmış olur. Öklidyen trigonometrisinin

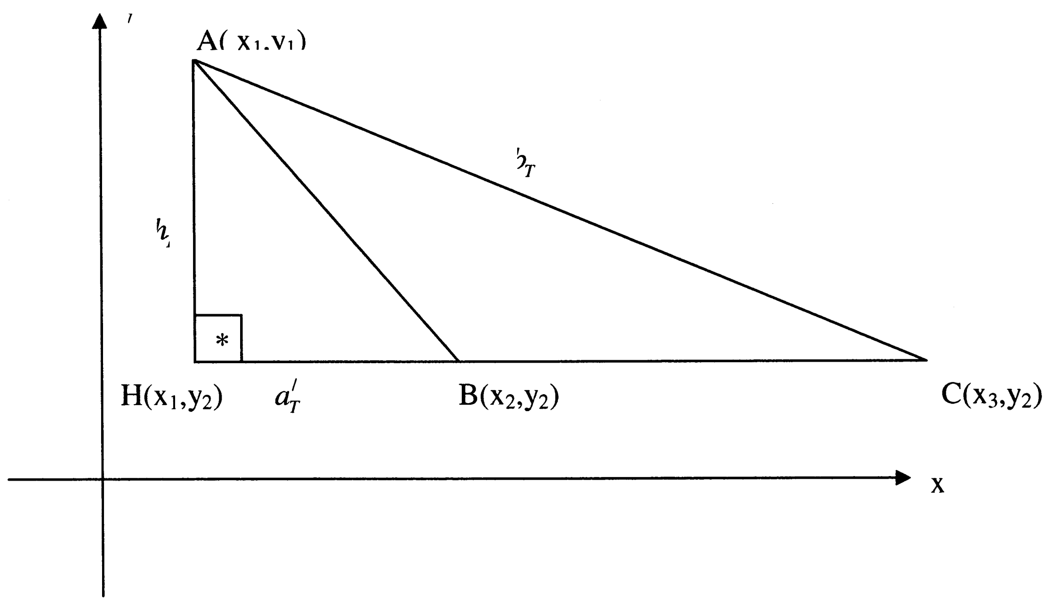
$-1 \leq \cos A \leq 1$ özelliğini

$$(a'_T - a''_T) \leq (a'_T)^2 - (a''_T)^2 - 2(a'_T)(a''_T + \cos A) \leq (a_T)^2 \qquad (11.6)$$

ifadesi için kullandık. Bu ifadeye "taxicab geometride harnock eşitsizliği" denir.

Önerme 2: Eğer $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin bir kenarı BC kenarına paralelse, $s(\hat{B})$ = 90^0 ise

Â açısı ve $\hat{C}$ açısı dar açılar ise,



Şekil 11.2 :Üçgenlerde Harnack Eşitsizliğinin Taxicab Geometride İfadesi

İspat : Bu üçgen için;

$$a_T = d_T(B,C) = |x_2 - x_3| + |y_2 - y_1| = |x_2 - x_3|$$

$$b_T = d_T(A,C) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_2|$$

$$c_T = d_T(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

$$h_{Ta} = d_T(A,B,C) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |y_1 - y_2| \tag{11.7}$$

$$a_T^{'} = d_T(H,B) = |x_1 - x_2| + |y_2 - y_2| = |x_2 - x_1|$$

$$a_T^{''} = d_T(H,C) = |x_3 - x_1| + |y_1 - y_1| = |x_3 - x_1|$$

Bu eşitsizliklerden ;

$$b_T = d_T(A,C) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_2| = a^{''}_T + h_{Ta}$$

$$c_T = (A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = a^{'}_T + h_{Ta} \tag{11.8}$$

$$a_T = a_T^{''} - a_T^{'}$$

ve

$$(b_T)^2 + (c_T)^2 = (a^{''}_T)^2 + 2h_{Ta}(a^{'}_T + h_{Ta})^2$$

$$= (a^{'}_T)^2 + (a^{''}_T)^2 - 2a^{''}_T.h_{Ta} + 2a^{'}_T.h_a + 2(h_{Ta})^2 \tag{11.9}$$

$$= (a^{'}_T)^2 + (a^{''}_T)^2 + 2h_{Ta}\left[a^{''}_T + a^{'}_T + h_{Ta}\right]$$

ve

$$-2\ (b_T)(c_T).CosA = -2\left(a^{''}_T + h_{Ta}\right)\left(a^{'}_T + h_{Ta}\right).CosA$$

$$= -2\left[a^{'}_T a^{''}_T + a^{'}_T h_{Ta} + a^{''}_T h_{Ta} + h_{Ta}\right]^2.CosA \qquad (11.10)$$

$$= -2\left[a^{'}_T a^{''}_T + h_{Ta}(a^{'}_T + a^{''}_T h_{Ta}\right]^2.CosA$$

Bu eşitsizlikleri kullanarak;

$$(b_T)^2+(c_T)^2-2(b_T).(c_T).\cos A=\left(a^{'}_T\right)^2+\left(a^{''}_T\right)^2-2h_{Ta}\left[a^{''}_T+a^{'}_T+h_{Ta}\right]-$$

$$-2\left(a^{'}_T\right).\left(a^{''}_T\right).\cos A-2h_{Ta}\left[a^{''}_T+a^{'}_T+h_{Ta}\right].\cos A \qquad (11.11)$$

$$=\left[(a^{'}_T)^2+(a^{''}_T)^2-2(a^{'}_T)(a^{''}_T).\cos A\right]+2h_{Ta}(a^{'}_T+a^{''}_T+h_{Ta})(1-\cos A)$$

olur.

Sonuçta (2,3).....eşitliği, $-1 \le \cos A \le 1$ olmak üzere, Öklidyen trigonometrisindeki, Kosinüs teoremini verir ve sonra biz

$$(\mathrm{a_T})^2 \le (\mathrm{a}^{'}_{\mathrm{T}})^2+(\mathrm{a}^{''}_{\mathrm{T}})^2-2(\mathrm{a}^{'}_{\mathrm{T}})(\mathrm{a}^{''}_{\mathrm{T}})\cos A \le (\mathrm{a}^{'}_{\mathrm{T}}+\mathrm{a}^{''}_{\mathrm{T}})^2 \qquad (11.12)$$

olarak taxicab geometrisindeki , harnock eşitsizliğini buluruz.

12. KÜRELERDE TAXICAB UZAKLIĞININ BULUNMASI:

Geçen yüzyılın başlarında düzlemsel geometriler için metrik aileleri, taxicab metriğini de içine alarak incelenmiştir. Sonra taxicab düzlemsel geometrisi ve uzunluğu geliştirildi. Bilindiği üzere; $|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ taxicab uzaklığı yerine;

(x_1-y_1) ve (x_2-y_2) noktalarının arasındaki uzaklık:

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ öklit uzaklığı olarak kullanılmıştır.

Taxicab geometriye bağlı problemler, $[1,2,3,6,9,10,11,12,13,15]$ sayı grubu ile çalışılmıştır. Öklidyen geometri doğal dünyada iyi bir model gibi gözükürken; taxicab geometrinin daha iyi bir model olduğu (suni kentsel dünyada) düşünülmüştür.

Dünya yüzeyi, küre yüzeyine benzetildiğinden beri, akla küresel taxicab geometrinin, düzlemsel geometriden daha anlamlı geldiğini fikrine varılmıştır.

Bu nedenle, bu çalışmada, küre yüzeyindeki taxicab uzunluğunu vereceğiz.

12.1. İki Nokta Arasındaki Küresel Taxicab Uzaklığı:

u ve v, P noktasının üzerinde bulunduğu kürede sırayla enlem ve boylam olsun. Bu sıralı (u, ϑ) nokta çifti, P noktasının "coğrafik koordinatları" adını alır.

Eğer $-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$ ve $-\pi \le v \le \pi$ için P noktası kuzey yarımkürede ise,

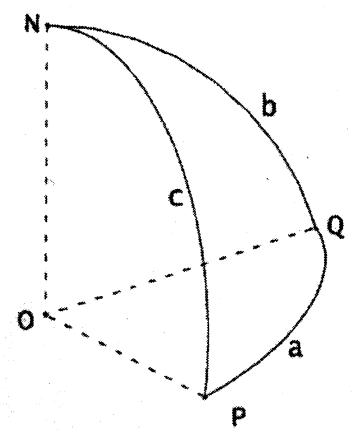
Eğer $0 \le u \le \frac{\pi}{2}$ ve P noktası güney yarımkürede ise $-\frac{\pi}{2} \le u \le 0$ olur.

Benzer olarak, P noktası doğuya ait yarım kürede ise $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ve P batıya ait yarımkürede ise $-\pi < \vartheta < 0$ olur.

Böylece kuzey kutup noktası $N = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ iken ; P=(u, ϑ) ve Q = (u_2, ϑ_2) küre üzerindeki herhangi iki ayrı noktadır.

NPQ küresel üçgenini dikkate alırsak;

$a =< PO = Q\widehat{PQ}$, b= <QON =$\widehat{QN}$ ve c= <PON = $\widehat{PN}$



Şekil 12.1 :İki Nokta Arasındaki Küresel Taxicab Uzaklığı:

NPQ üçgeninin açıları, küresel açıların N, P, Q kesişim noktalarına göre düzenlenmiştir.

NPQ iki büyük kürenin noktaları olup kesişim noktalarının arasındaki açıya teğettir. Benzer şekilde a,b,c ve $\hat{N}, \hat{P}, \hat{Q}$ küresel açılarının oluşturduğu NPQ üçgeni geçerlidir.

$$\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos N$$
$$\cos b = \cos a.\cos c + \sin a.\sin c.\cos P \qquad (12.1)$$
$$\cos c = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b.\cos Q.....(1)$$

Şimdi P noktasından, Q noktasına olan uzaklığın (1)'de hesaplanmış olan haline bakalım;

$$\cos P\widehat{Q} = \cos N\widehat{P}.\cos NQ + \sin N\widehat{P}.\sin N\widehat{Q}.\cos \widehat{N} \qquad (12.2)$$

$$\widehat{N} = \begin{cases} |v_1 - v_2| \ \text{eğer} |v_1 - v_2| \le \pi \\ 2\pi - |v_1 - v_2| \text{eğer} |v_1 - v_2| \le \pi \end{cases}$$

$$\cos P\widehat{Q} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u_1\right).\cos\left(\frac{\pi}{2} - u_2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - u_1\right).\sin\left(\frac{\pi}{2} - u_2\right) \qquad (12.3)$$

$$ve \ \ P\widehat{Q} = \arccos\left(\sin u_1.\sin u_2 + \cos u_1.\cos u_2.\cos(v_1 - v_2)\right).....(2)$$

Böylece küresel arc uzaklığı $d_s(P,Q)$, P noktasından, Q noktasına olan, r yarıçaplı küresel uzaklık;

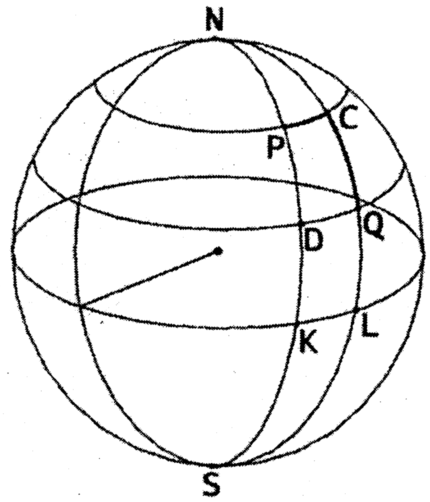
$$d_s(P,Q) = |P\widehat{Q}| = r.\text{arc} \ \ \cos\left(\sin u_1.\sin u_2 + \cos u_1.\cos u_2.\cos\left[|v_1 - v_2|\right]\right).(3)$$

(12.4)

$$[| v_1 - v_2 |] = \begin{cases} |v_1 - v_2| \ \text{eğer} |v_1 - v_2| \le \pi \\ 2\pi - |v_1 - v_2| \text{eğer} |v_1 - v_2| \le \pi \end{cases} \qquad (12.5)$$

12.2. Küre Üzerindeki İki Nokta Arasındaki Taxicab Uzaklığının Bulunması

r yarıçaplı $P = (u_1, v_1)$ eğer Q =(u_2, v_2) koordinatlarıyla verilen kürede; P enlemli Q boylamlı kesişim noktasının C olduğu ve D noktasının ise Q'ya ve P'ye paralel olan doğruların kesim noktası olduğunu düşünelim.



Şekil 12.2 : Küre Üzerindeki İki Nokta Arasındaki Taxicab Uzaklığının Bulunması

$$d_{TS}(P,Q)=\min\left\{\left|P\widehat{C}\right|+\left|C\widehat{Q}\right|,\left|P\widehat{D}\right|+\left|D\widehat{Q}\right|\right\}.....(4)$$

(12.6)

ifadesine P ve Q noktaları arasındaki "küresel taxicab uzaklığı" denir.

C enlemi; C noktasının, P paraleliyle aynı olduğundan beri u_1 dir. Benzer şekilde;D boylamı da D noktasının Q ile paralel olduğundan beri v_1 dir. $K\widehat{L}$ ekvator üzerindedir.

$$\left|P\widehat{C}\right|=\left|K\widehat{L}\right|.\text{cosu}_1=\begin{cases} r.\left|v_1-v_2\right|.\text{cosu}_1 & \text{eğer}\left|v_1-v_2\right|\leq\pi \\ \text{r.}(2\pi-\left|v_1-v_2\right|).\text{cosu}_1 & \text{eğer}\left|v_1-v_2\right|\leq\pi \end{cases} \qquad (12.7)$$

C noktasının enlemi u_1 dir.Aynı P noktası, C noktasına paraleldir.

$$\left|D\widehat{Q}\right|=\left|K\widehat{L}\right|.\text{cosu}_2=\begin{cases} r.\left|v_1-v_2\right|.\text{cosu}_2 & \text{eğer}\left|v_1-v_2\right|\leq\pi \\ \text{r.}(2\pi-\left|v_1-v_2\right|).\text{cosu}_2 & \text{eğer}\left|v_1-v_2\right|\leq\pi \end{cases} \qquad (12.8)$$

$$\left|C\widehat{Q}\right|=\left|P\widehat{D}\right|=r.(u_1-u_2) \qquad (12.9)$$

şimdi de P noktası ile Q noktası arasındaki küresel taxicab uzaklığını aşağıdaki gibi formüle edelim:

$$d_{ST}(P,Q)=\left\{\begin{array}{l} r.(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|.\cos u_1),|v_1-v_2|\leq\pi \quad \text{ve}|u_1|\geq|u_2| \\ \\ r.(|u_1-u_2|+|2\pi|v_1-v_2|\cos u_1|.),|v_1-v_2|>\pi \quad \text{ve}|u_1|\geq|u_2| \\ \\ r.(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|.\cos u_2),|v_1-v_2|\leq\pi \quad \text{ve}|u_1|\geq|u_2| \\ \\ r.(|u_1-u_2|+|2\pi|v_1-v_2|\cos u_2|.),|v_1-v_2|>\pi \quad \text{ve}|u_1|\geq|u_2| \end{array}\right\}...(6)$$

(12.10)

son olarak, aşağıdaki formül şekline kısaltılabilir.

$$d_{ST}(P,Q)=\{r.(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|.\cos u_i),|v_1-v_2|\leq\pi \quad \text{ve}|u_1|\geq|u_2| \ \},$$

$$\text{u}_\text{i}=\max\{|u_1|,|u_2|\}....(7)$$

(12.11)

$$[|v_1-v_2|]=\left\{\begin{array}{l} |v_1-v_2| \quad \text{eğer}|v_1-v_2|\leq\pi \\ \\ 2\pi|v_1-v_2|\text{eğer}|v_1-v_2|>\pi \end{array}\right.$$

Aşağıdaki önerme; taxicab uzaklık fonksiyonun pozitif, belirli ve simetrik olduğunu fakat üçgen eşitsizliğini sağlamadığını ifade edecektir.

Önerme1: a) Küre üzerindeki (P,Q) sıralı ikililerinden her biri $d_{ST}=(P,Q)$ negatif olmayan ifadesini belirler.

b) $d_{ST}=0$ ise P=Q

c) $d_{ST}(P,Q) = d_{ST}(Q,P)$ olur.

d) $d_{ST}(P,Q) + d_{ST}(Q,R) \geq d_{ST}(\text{P,R})$ eşitsizliği sağlanmaz.

İspat : a, b, ve c ifadeleri d_{ST}'nin tanımından anlaşıldığı üzere geçerli olur. Öte yandan,

d_{ST} üçgen eşitsizliğini sağlamadığı görüldüğünde;

$$PQR \quad \text{P}=\left(\frac{\pi}{12},0\right) \text{ , Q}=\left(\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right) \text{ ve } (0,\pi) \tag{12.12}$$

Şimdi şu soruyu cevaplayalım:

Küresel taxicab geometride cetvel önermesi benzer şekilde nasıl verebiliriz?
R yarıçaplı, tüm noktaların kümesinin işareti P olsun.

PQ yörüngelerin birleşimini, P den Q'ya küresel taxicab uzaklığının bulunmasını da, arc hesabı için kullanalım. Küre üzerindeki XY kısımlarına 1 diyelim.

$L = \{XY$ yörüngesi : X ve Y küre üzerinde herhangi iki noktadır$\}$

Böylece P noktalar kümesini ve XY'nin 1 yörüngesi (P,L) geometrik yapısını göz önüne alırsak;

$f(u)$ fonksiyonu
$f(u) = (2u + \pi.\cos u).r$

en uzun uzaklığın hesabında kullanılır.Burada u kutuplara yakın olup, P ve Q noktalarının enlemi u'dur.

f'nin maximumu için;

$$u \cong 39,54022374781019541269901555902610^{0}$$

$$\cong 39^{0}32'24''$$

$$\cong 0,21966790971005664118166119755014 5\pi$$

$$\cong 0,69010709137453995200437790907039 5$$

(12.13)

ve k değeri için f 'nin maximum değeri;

$$k \cong 1,21051366235301868432776943516072\pi r$$

$$\cong 3,80294082871831896417830842653785\ r$$

Bundan dolayı;

$$0 \le \mathrm{f(u)} \le \mathrm{k} \Rightarrow \max_{\mathrm{dST}}(\mathrm{P,Q}) \le \mathrm{k}$$

(12.14)

Küre üzerindeki $P\widehat{C}$ ve $C\widehat{Q}$ arc uzunluklarının bileşimi olarak verilen PQ küre üzerindedir. P noktasının kutuplara en yakın olacak şekilde belirlenebilmesi için φ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\varphi : PQ \rightarrow [0, d_{ST}(P,Q)]$$

(12.15)

$$(u,v) \rightarrow \varphi(u,v) = \begin{cases} [\,|v-v_0|\,]\cos u_0 & \text{eğer } (u,v),\ P\widehat{C} \text{ üzerinde ise} \\ |u-u_0| + |v-v_0|.\cos u_0 & \text{eğer } (u,v),\ C\widehat{Q} \text{ üzerinde ise} \end{cases}$$

$$[\ |v-v_0|\ ] = \begin{cases} |v-v_0| & \text{eğer } |v-v_0| \le \pi \\ 2\pi - |v-v_0|, & \text{eğer } |v-v_0| > \pi \end{cases} \qquad (12.16)$$

φ uzaklık fonksiyonu , X ve Y ise PQ üzerindeki herhangi iki nokta ise,

$$|\varphi(X) - \varphi(Y)| = d_{ST}(X,Y) \tag{12.17}$$

ifadesi sağlanır.

12.3. Küresel Daire ve Küresel Taxicab Dairesi

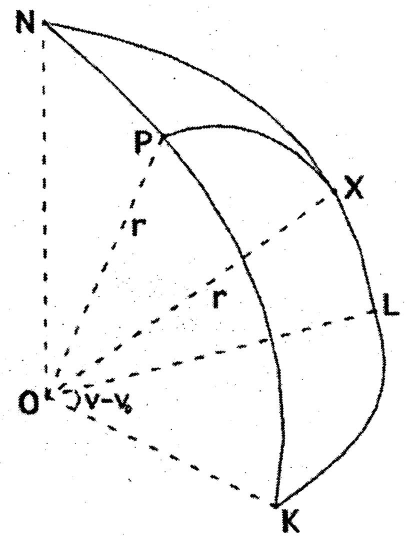
a)Coğrafik koordinatları ve merkezi küre üzerinde verilen küresel daire denklemi:

Açıkça düzlem ve kürenin kesişimleri dairedir.

Küresel daire, "küre üzerinde verilen sabit bir noktadan eşit uzaklıkta, yer alan noktalar kümesidir" şeklinde tanımlanır. Şimdi r yarıçaplı ve küre üzerindeki $P = (u_0, v_0)$ noktalı küreyi göz önüne alalım.

P noktasından geçen ve P noktasından hareketle, P noktası boyunca ölçülen büyük dairelerden k birim uzaklıktaki oluşabilecek küresel dairelerin denklemini bulalım. Eğer $x = (u,v)$ bu küresel dairenin üzerinde ise;

$x = (u,v)$ küresel dairenin üzerinde ve $|\widehat{PX}| = k$ olacak şekilde;



Şekil 12.3 : Küresel Daire ve Küresel Taxicab Dairesi

$$\cos P\widehat{X} = \cos N\widehat{P}.\cos N\widehat{X} + \sin N\widehat{P} \sin N\widehat{X}.\cos \widehat{N}$$

$$\cos\frac{k}{r} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-u_0\right).\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right).\cos(v-v_0) \qquad (12.18)$$

$$k = r\arccos(\sin u_0.\sin u + \cos u_0.\cos u.\cos(v-v_0), \quad \mathrm{k} \leq \pi r.......(8)$$

12.4. Küresel Taxicab Dairesi:

Küresel taxicab dairesini, küre üzerinde verilen sabit noktadan, verilen değişmez noktalar kümesinin, küresel taxicab uzaklığı olarak tanımlarız.

$P=(u_0,v_0)$ merkezli, r yarıçaplı küre üzerinde, k yarıçaplı $\mathrm{k} \leq \pi r, k \in \square$, küresel taxicab dairesinin denklemini bulalım:

$d_{ST}(P,Q)=k, \quad k \leq \pi r$

$$k=\begin{cases} r\left(\left|v-v_0\right|.\cos u+\left|u-u_0\right|\right), \left|v-v_0\right| \leq \pi \ \text{ ve } \ |\mathrm{u}| \geq \left|u_0\right| \\ r\left((2\pi-\left|v-v_0\right|)\cos u+\left|u-u_0\right|\right), \left|v-v_0\right| > \pi \ \text{ ve} |\mathrm{u}| \geq \left|u_0\right| \\ r\left(\left|v-v_0\right|.\cos u+\left|u-u_0\right|\right), \left|v-v_0\right| \leq \pi \ \text{ ve } \ |\mathrm{u}| < \left|u_0\right| \\ r\left((2\pi-\left|v-v_0\right|)\cos u+\left|u-u_0\right|\right), \left|v-v_0\right| > \pi \ \text{ ve} |\mathrm{u}| < \left|u_0\right| \end{cases} \qquad \begin{matrix}(12.19)\\ .....(9)\end{matrix}$$

Önerme: Küresel daire ve k yarıçaplı küresel taxicab daire kutupta ortak merkezleri varsa, denk olurlar.

Kanıt: Kuzey kutup $(u_0, v_0)=\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ iki dairenin merkezi olsun.

$$k=r.\arccos(\sin u), k \leq \pi r \qquad (12.20)$$

küresel dairenin denklemi olsun.

$$k=r\left(\frac{\pi}{2}-u\right), k \leq \pi r \qquad (12.21)$$

k yarıçaplı küresel taxicab dairenin (9) daki denklemleri kullanarak bulunabilecek denklemi için;

$$k = r\left(|v|.\cos\frac{\pi}{2} + \left|u - \frac{\pi}{2}\right|\right), |v| \leq \pi, |u| < \frac{\pi}{2}$$

$$k = r\left|u - \frac{\pi}{2}\right|, |v| \leq \pi, |u| < \frac{\pi}{2} \qquad (12.22)$$

$$k = r\left|u - \frac{\pi}{2}\right|, k \leq \pi r$$

Benzer olarak eğer $(u_0, v_0) = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ verildiğinde her iki durumda da $k = r.\left(\frac{\pi}{2} + u\right), k \leq \pi r$ sağlanıyor. Genelde, taxicab küresel daireler, öklidyen daireler değildir. Yalnızca merkezi kutupta olanlar hariç tutulur. Aynı zamanda bunlar dairesel arc uzunlukları ve düzlemsel eğrilerin kombinasyon oluşturmadıkları görülüyor.

13. EUCLID GEOMETRİSİNDEKİ ÜÇGENİN ALAN FORMÜLÜ

Eksenlere paralel uzunluklar alındığında TAXICAB UZUNLUĞU ile EUCLİD UZUNLUKLARI EŞİTTİR:

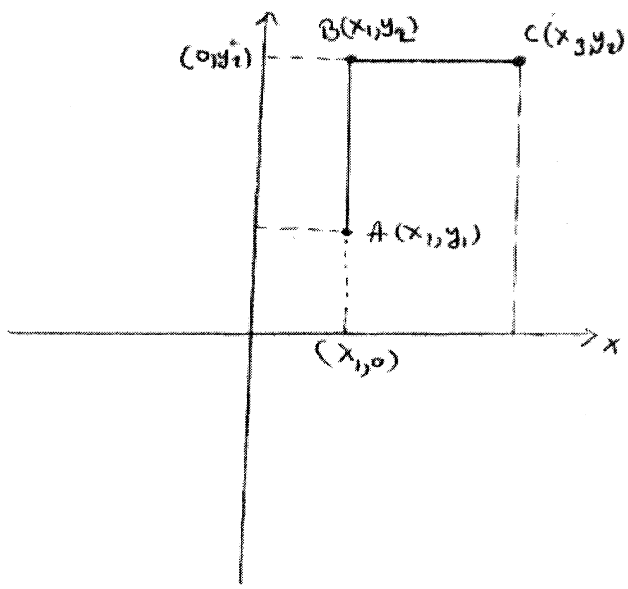
İspat: İspatı mutlak değerin eşdeğer ikinci tanımını vererek yaparız. X herhangi bir reel sayı olsun. Bu reel sayının mutlak değeri

$$(1) \qquad |x| = \begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x & x<0 \end{cases} \qquad (13.1)$$

Şeklinde tanımlandığı gibi aynı zamanda

$$(2) \qquad |x| = +\sqrt{x^2} \qquad (13.2)$$

Eşitliği ile tanımlanır.



Şekil 13.1 Euclid Geometrisindeki Üçgenin Alan Formülü

$$\text{AB} \,//\, \text{OY} \Rightarrow \mathrm{d_E}(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

(3) (13.3)

$$\sqrt{(y - y_1)^2} = | y_2 - y_1 | = d_T(A,B)$$

$$\text{BC} \,//\, \text{OX} \Rightarrow \mathrm{d_E}(B,C) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2} =$$

(4) (13.4)

$$\sqrt{(x_3 - x_1)^2} = | x_3 - x_1 | = d_T(B,C)$$

Bulunur. Dolayısıyla (3) ve (4) eşitlikleri lemmayı ispatla.

14. HERON FORMÜLÜNÜN TAXİCAB GEOMETRİSİNDEKİ İFADESİ

14.1. Eksenlere Paralel Uzunluklar Alındığında Taxicab Uzunluğu İle Euclid Uzunlukları Eşittir.

Düzlemde Euclid uzaklığı ile Taksicab uzaklığı arasında,

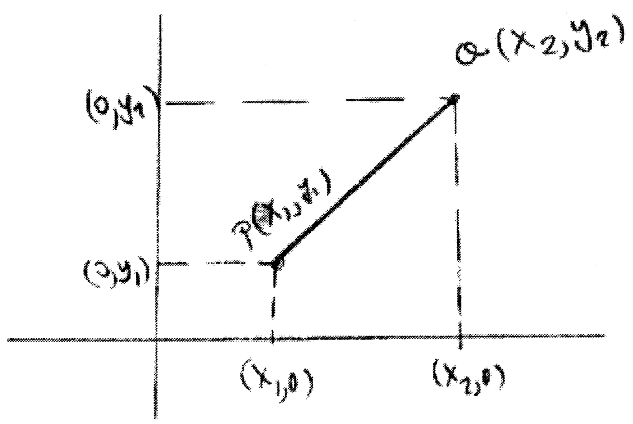
$$\mathrm{d_E}(P,\varphi)=\left[(d_T(P,\varphi))^2-2\left[(x_1y_1+x_2y_2)-(x_1y_2+y_2x_1)\right]\right]^2 \qquad (14.1)$$

Bağıntısı vardır.

İspat : İspatı yine mutlak değerin eşdeğer tanımını kullanarak yaparız.
P veQ noktaları arasındaki uzaklık

$$(1) \qquad \begin{cases} Taksikab \quad uzunluğu \\ d_T(P,\varphi)=\mid x_2-x_1\mid+\mid y_2-y_1\mid \end{cases} \qquad (14.2)$$

Şekildedir. Mutlak değerin ikinci eşdeğer tanımı kullanılırsa (1) eşitliği



Şekil 14.1 Heron Formülünün Taxicab Geometrisindeki İfadesi

(2) $\mathrm{d_T}(P,\varphi)=\sqrt{(x_2-x_1)^2}+\sqrt{(y_2-y_1)^2}=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$ (14.3)

Şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan bu noktalar arasındaki Euclidyen uzaklık

(3) $\mathrm{d_E}(P,\varphi)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ (14.4)

İfadesi ile verilir. (2) ve (3) bağıntılarından

$$(\mathrm{d_T}(P,\varphi))^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=2\sqrt{(x_2-x_1)^2}\sqrt{(y_2-y_1)^2}$$

(14.5)

$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2\sqrt{(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2}$$

(4) $(d_T(P,\varphi))^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)$ (14.6)

Eşitliği bulunur. Diğer yandan (3) bağıntısından hareket edersek

(5) $(d_T(P,\varphi))^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ (14.7)

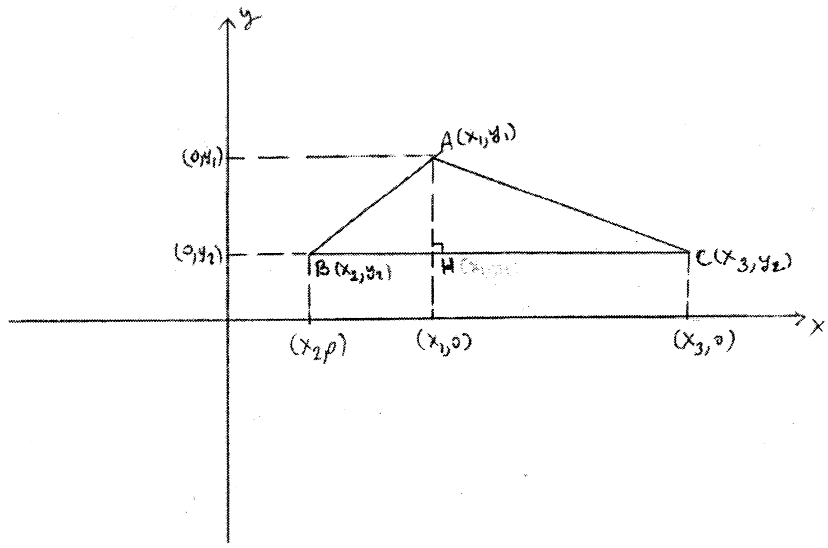
Eşitliği elde edilir. (4) ve (5) eşitliklerinde.

$$
(6)\begin{cases}
(d_T(P,\varphi))^2 = (d_E(P,\varphi))^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \\
\\
\Leftrightarrow (d_E(P,\varphi))^2 \neq \sqrt{(d_T(P,\varphi))^2 - 2[(y_1 + x_2y_2) - (x_1y_2 + y_1x_2)]}
\end{cases} \tag{14.8}
$$

Eşitliği bulunur.

15.TAXICAB GEOMETRİDE PİSAGOR TEOREMİNİN İFADESİ

$$(d_T(B,C))^2 = (d_T(A,C))^2 + (d_T(A,B))^2 +$$
$$2[2x_1y_1 + y_1x_2 + x_1y_2] - 2[x_1^2 + y_1^2 + x_1x_2 + y_1y_2] \qquad (15.1)$$



Şekil 15.1 Taxicab Geometride Pisagor Teoreminin İfadesi

$$a_T = d_T(B,C) = |x_2 - x_3|$$

$$b_T = d_T(A,C) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_2|$$

$$c_T = d_T(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \qquad (15.2)$$

$$h_{T_a} = d_T(A,B,C) = |y_1 - y_2|$$

$$a_T = d_T(B,H) = | x_1 - x_2 |$$

$$a''_T = d_T(H,C) = | x_1 - x_3 | \tag{15.3}$$

$$b_T = d_T(A,C) = | x_1 - x_3 | + | y_1 - y_2 | \ = a''_T + h_{T_a} \Rightarrow$$

$$* \quad b_T - a''_T = h_{T_a}$$

$$c_T = d_T(A,B) = | x_1 - x_2 | + | y_1 - y_2 | \ = a'_T + h_{T_a} \Rightarrow$$

$$** \quad c_T - a'_T = h_{T_a}$$

$$(b_T)^2 + (c_T)^2 = (a''_T + h_{T_a})^2 (a'_T + h_{T_a})^2$$

$$= (a''_T)^2 + (a'_T)^2 + 2(a''_T h_a + a'_T h_a) + 2(h_{T_a})^2$$

$$(b_T)^2 + (c_T)^2 = (a''_T)^2 + (a'_T)^2 + 2h_{T_a}(a''_T + a') + 2(h_{T_a})^2$$

$$(b_T)^2 + (c_T)^2 = (a''_T)^2 + (a'_T)^2 + 2h_{T_a}\left[\begin{array}{c} a''_T + a'_T + h_{T_a} \\ \overline{aP} \end{array}\right] \tag{15.4}$$

$$\boxed{(b_T)^2 \ + (c_T)^2 = (a''_T)^2 + (a'_T)^2 + 2h_{T_a}\left[a_T + h_{T_a}\right]} \tag{15.5}$$

$$-2h_{T_a}(b_T)(c_T) = -2(a''_T + h_{T_a})(a'_T + h_{T_a})$$

$$= -2\left[a''_T a'_T + a''_T h_{T_a} + h_{T_a} a' + (h_{T_a})^2\right]$$

$$= -2\left[a''_T a'_T + h_{T_a}(a''_T + a') + (h_{T_a})^2\right] \tag{15.6}$$

$$= -2\left[a''_T a'_T + h_{T_a}(a_T + a' h_{T_a})\right] \Rightarrow$$

$$-2(b_T)(c_T) = -2a''_T a' - 2h_{T_a}(a_T + h_{T_a})$$

$$(b_T)^2+(c_T)^2-2(b_T)(c_T)=(a''_T)^2+(a'_T)^2-2a'_Ta''_T)\Rightarrow$$

$$(b_T-c_T)^2=(a''_T-a'_T)^2 \tag{15.7}$$

$$b_T-c_T=a''_T-a'_T$$

$$-2(b_T)(c_T).CosA=-2\left[a''_Ta'_T+h_{T_a}(a_T+h_{T_a})\right]CosA$$

$$(b_T)^2+(c_T)^2-2(b_T)(c_T).CosA$$

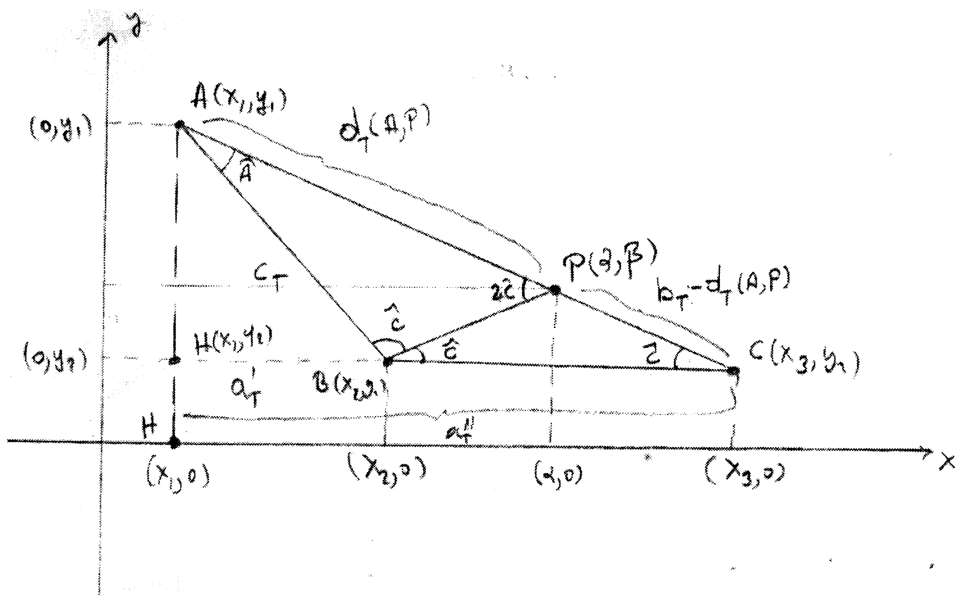
$$=\text{-}2(a'_T)^2+(a''_T)^2+2h_{T_a}\left[a_T+h_{T_a}\right]-2\left[a''_Ta'_T+h_{T_a}(a_T+h_{T_a})^2\right]CosA \tag{15.8}$$

$$=(a'_T)^2(a''_T)^2+2h_{a_T}(a_T+h_{T_a})-2a''_Ta'_TCosA-2h_{T_a}(a_T+h_{T_a})CosA$$

$$=((a'_T)^2+(a''_T)^2-2a'_Ta''_TCosA)+2h_{T_a}(a_T+h_{T_a})(1-CosA)$$

$$(b_T)^2+(c_T)^2-2(b_T)(c_T).CosA$$

$$=\left[(a'_T)^2+(a''_T)^2+2a'_Ta''_TCosA\right]+2h_{T_a}(a_T+h_{T_a})(1-CosA) \tag{15.9}$$



Şekil 15.2 Taxicab Geometride Pisagor Teoreminin İfadesi

$$A\overset{\Delta}{B}C \cong B\overset{\Delta}{P}C$$

$$d_T(B,P)+b_T-d_T(A,P)$$
$$d_T(A,P)=X_T$$

$$\frac{a_T}{d_T-d_T(A,P)}=\frac{b_T}{c_T}=\frac{c_T}{d_T(A,P)} \Rightarrow \frac{a_T}{b_T-x_T}=\frac{b_T}{c_T}=\frac{c_T}{x_T} \tag{15.10}$$

$$\left.\begin{array}{l}(b_T)^2-b_Tx_T=a_Tc_T\\ \\ b_T.x_T=(c_T)^2\end{array}\right\} \Rightarrow (b_T)^2-(c_T)^2=a_Tc_T \tag{15.11}$$

$$\boxed{(b_T)^2=(c_T)^2+a_Tc_T}$$

$$\left.\begin{aligned}(b_T)^2 &= (c_T)^2 + a_T c_T \\ (c_T)^2 &= b_T x_T\end{aligned}\right\} \Rightarrow (b_T)^2 + (c_T)^2 = a_T c_T + 2b_T x_T \qquad (15.12)$$

$$b^2 = c^2 + ac \,//$$

$$\left.\begin{aligned}
& d_T(A,H) = h_{T_a} = | y_2 - y_1 | \\
& a_T = | x_2 - x_3 | \\
& b_T = | x_1 - x_3 | + | y_2 - y_1 | \Rightarrow b_T = a''_T + h_{T_a} \\
& c_T = | x_1 - x_2 | + | y - y_1 | \Rightarrow c_T = a'_T + h_{T_a} \\
& a'_T = | x_2 - x_1 | \\
& a''_T = | x_2 - x_1 |
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
& (a''_T)^2 + 2a''_T h_{T_a} + (h_{T_a})^2 \\
& = (a'_T)^2 + 2x'_T h_{T_a} + (h_{T_a})^2 + a_T(a'_T + h_{T_a}) \\
& (a''_T)^2 + 2a''_T h_{T_a} = (a'_T)^2 + 2a'_T h_{T_a} + a_T a'_T \\
& (a''_T)^2 - (a'_T)^2 = 2h_{T_a}(a'_T - a''_{T_a})^2 \\
& + a_T a'_T + a_T h_{T_a}
\end{aligned}$$

$$(a''_T)^2 - (a'_T)^2 = a_T a'_T - a_T h_{T_a} = a_T(a'_T - h_{T_a})$$

(15.13)

Taxibal geometrisinde de

(1) $-1 \leq CosA \leq 1$

Olduğunu kullanırsak ve $a'_T, a''_T, h_{T_a}, a_T$ uzunlukları pozitif uzunluklar olduğundan (1) den

$$-2a'_T a_T \leq -2a'_T \text{-} a'' CosA \leq +2a'_T a''_T =$$

$$(a'_T)^2 + (a''_T)^2 - 2a'_T a''_T \leq (a'_T)^2 + (a''_T)^2 - 2a'_T a''_T CosA \leq (a'_T)^2 + (a''_T)^2 + 2a'_T a''_T \qquad (15.14)$$

$$\Rightarrow (3) \quad (a'_T - a''_T)^2 \leq (a'_T)^2 + (a''_T)^2 - 2a'_T a''_T CosA \leq (a'_T + a''_T)^2$$

Bulunur. Diğer yandan

$$2h_{T_a}(a_T + h_{T_a})(1 - CosA > 0$$

Olduğunu göz önüne alınarak

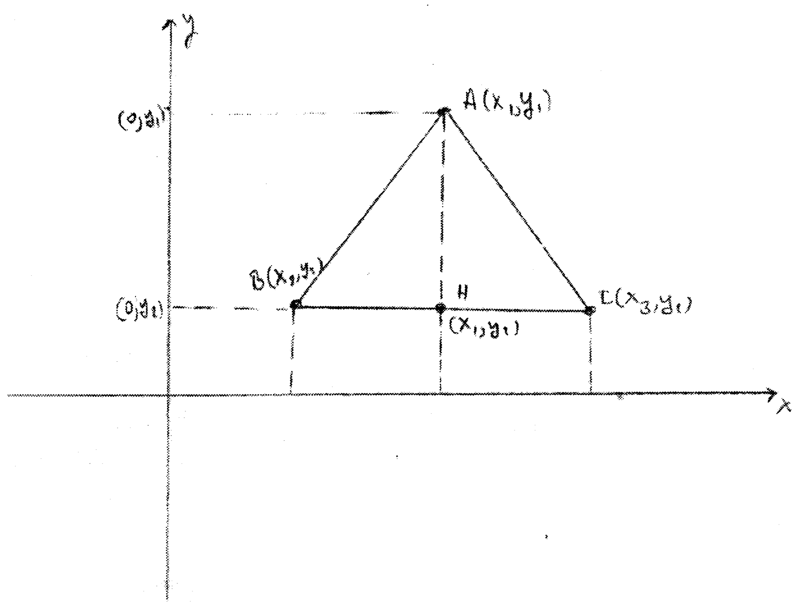
$$\begin{aligned}(a'_T - a''_T)^2 + 2h_{T_a}(a_T + h_{T_a})(1 - CosA) &\leq (a'_T)^2 + (a''_T)^2 - 2a'_T a''_T CosA \\ &\quad + 2h_{T_a}(a_T + h_{T_a})(1 - CosA) \\ &\leq (a'_T + a''_T)^2 + 2h_{T_a}(a_T + h_{T_a})(1 - CosA)\end{aligned} \tag{15.15}$$

$$\begin{aligned}&(a'_T + a''_T)^2 + 2h_{T_a}(a_T + h_{T_a})(1 - CosA) \leq (b_T)^2 + (c_T)^2 - 2(b_T)(c_T)CosA \\ &\leq (a_T)^2 + 2h_{T_a}(a_T + h_{T_a})(1 - CosA)\end{aligned} \tag{15.16}$$

$$\begin{aligned}&(a'_T - a''_T)^2 + 2h_{T_a}(a_T + h_{T_a})(1 - CosA) \leq (b_T)^2 + (c_T)^2 - 2(b_T)(c_T)CosA \\ &\leq (a'_T + a''_T)^2 + 2h_{T_a}(a_T + h_{T_a})(1 - CosA)\end{aligned} \tag{15.17}$$

$$\begin{aligned}&(a'_T - a''_T)^2 \leq (b_T)^2 + (c_T)^2 - 2(b_T)(c_T) \leq (a'_T + a''_T)^2 \\ &(a'_T + a''_T)^2 \leq (b_T - c_T)^2 \leq (a'_T + a''_T)^2 \\ &a'_T - a''_T \leq b_T - c_T \leq a'_T - a''_T\end{aligned} \tag{15.18}$$

16. TAKSİCAB GEOMETRİSİNDE İKİZKENAR ÜÇGEN



Şekil 16.1 Taksicab Geometrisinde İkizkenar Üçgen

$$a_T = d_T(B,C) = |x_3 - x_2| + |y_2 - y_1| \;\Rightarrow\; a_T = |x_3 - x_2|$$

$$b_T = d_T(A,C) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_2|$$

$$c_T = d_T(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \qquad (16.1)$$

$$a'_T = d_T(B,H) = |x_1 - x_2| + |y_2 - y_2| \;\Rightarrow\; a'_T = |x_1 - x_2|$$

$$a''_T = d_T(H,C) = |x_3 - x_1| + |y_1 - y_2| \;\Rightarrow\; a''_T = |x_3 - x_1|$$

$$\left.\begin{array}{l} b_T = d_T(A,B) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_2| \\ c_T d_T(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \end{array}\right\} \Rightarrow b_T = c_T \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |x_1 - x_3| + |y_1 - y_2| \\ = \; |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underbrace{|x_1 - x_3|}_{a''_T} = \underbrace{|x_1 - x_2|}_{a'_T} \Rightarrow a''_T = a'_T \Rightarrow (a'_T + a''_T = a_T) \tag{16.2}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_T = d_T(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = a''_T + |y_1 - y_2| \\ h_{T_a} = d_T(A,H) = |y_1 - y_2| \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a'_T = \dfrac{a_T}{2} \\ a''_T = \dfrac{a_T}{2} \end{array} \tag{16.3}$$

$$\boxed{c_T = a''_T + h_{T_a} \quad \Rightarrow \quad c_T = \frac{a_T}{2} + h_{T_a}}$$

$$b_T = d_T(A,C) = \underbrace{|x_1 - x_3|}_{a''_T} = \underbrace{|x_1 - x_2|}_{a'_T} = a'_T - h_{T_a}) \tag{16.4}$$

$$\boxed{b_T = a'_T + h_{T_a} \quad \Rightarrow \quad b_T = \frac{a_T}{2} + h_{T_a}}$$

SONUÇ

Bu çalışmada matematiğin orijininde yer alan iki temel alandan Geometrinin, farklı biri dalı olan Taxicab Geometriye değindik. Bilindiği gibi bilim tarihi içinde matematiksel gelişmelerin yeri ve önemi büyüktür. Yıllarca geometrinin gelişimi incelenmiş ve değişik geometri dalları matematikçilere gündem oluşturmuştur.

İlk bölümde Taxicab geometri nedir? Sorusunun cevabına yönelik çalışmalar bulunmaktadır. Öklidyen düzlem geometrinin sağladığı aksiyomlar ve yalnızca bir tanesi olan kenar açı kenar aksiyomunun sağlanmaması, taxicab geometrinin türetilmesine sebep olduğu üzerinde durulmuştur. Öklit 'in elementlerindeki aksiyomlarda var olan bazı belirsizlikler ve eksiklikler, uzun yıllar boyunca bilinmesine karşın aynen kullanılmışlardır. Bu aksiyomların incelenmesi sonucu Taxicab Geometri oluşmuş ve gelişmiştir.

Gelişme bölümünde ,Krause düzenlemesindeki paralellik aksiyomu dahil 12 aksiyomun hepsini sağlayan fakat sadece KAK (Üçgenlerde Eşlik) Aksiyomunu sağlamayan bir geometri çeşidi olmasının doğurduğu sonuçlara yönelik durumlar detaylı olarak incelenmiştir.Bu bağlamda,üçgenlerde taxicab geometri;taxicab trigonometri;Kosinüs Teoreminin taxicab geometride ifadeleri ve çeşitli uygulamalar irdelenmiştir.

Sonuç bölümünde Euclid geometrisinde üçgenin alan formülü, kürelerde taxicab uzaklığının bulunması, Heron formülünü taxicab geometrisi vasıtasıyla ifadesi, Pisagor teoreminin Taxicab geometride ifadesi ve taxicab geometride ikizkenar üçgenin incelenmiştir.

KAYNAKÇA

Kitaplar

[1] **Dray Tevion and by THOMPSON Kevin** 20001. Taxicab Angles and Trigonometry .

[2] **Kaya, RÜSTEM.** 2004 *Geçmişten Günümüze Geometri Öğretimi Ve Önemi Öklid Dışı Geometrilerin Öğretimdeki Yeri Ve Önemi.*

[3] **KRAUSE F. Eugene .**2004. An Adventure in Non – Euclidean Geometry

[4] **MİNKOWSKİ, Herman.** 2003. Tacicab Geometry

Makaleler

[5] **Brandley. M,** 1970.Square circles. *Pentagon,* Fail, p. 8-15.

[6] **Brisbin, R. and P. Artola**, 1985. Taxicab trigonometry, *Pi Mu Epsilon Journal,* 8, 89-95.

[7] **Byrkit. R..** 1971 Taxicab geometry - A Non-Euclidean geometry of lattice pomts, *Math. Teacher,* 64, 418-422.

[8] **Gardner. M**. 1997. The Last Recreations, *Springer-Verlag,*

[9] **Golland. L.. Kari.** 1990 Menger and taxicab geometry, *Mathematics Magazine,* 63, 326-327.

[10] **Iny. D.** 1984. Taxicab geometry: another look at conic sections, *Pi Mu Epsilon Journal,* 7, 645-647.

[11] **KAYA, Rüstem ve AKÇA, Ziya.** 2004. *On the Taxicab Distance*, On a Sphere, M JMS

[12] **Laatsch, R.** 1982. Pyramidal sections intaxicab geometry, *Math. Magazine*, 55, 205–212.

[13] **Mertens, L..** 1987. A fourth dimensional look into taxicab geometıy, *J. of Undergraduate Mathematics*, 19, 29-33.

[14] **Moser, J. and F. Kramer, 1982.** Lines and parabolas in taxicab geometry, *Pi Mu Epsilon Journal.* 7, 441–448.

[15] **Reynolds, B.,** 1980. Taxicab geometry, *Pi Mu Epsilon Journal,* 7, 77-88.

[16] **Schattschneider, D.,** 1984. The taxicab group. *Amer. Math. Monthly,* 91, 423–428.

[17] **Sheid, F.,** 1961. Square circles, *Math. Teacher* 54 (1961) 307-312.

[18] **Sowell, K.** 1989. Taxicab geometry - A new slant, *Mathematics Magazine,* 62, 238-248.

ÖZGEÇMİŞ

01\01\1980 yılında İstanbul 'da doğdum.1985–1990 yıllarında Şişli Ondokuz Mayıs İlkokullunda eğitimimi gördüm Ardından 1990–1997 yıllarında Şişli Terakki Lisesinde eğitim gördüm.1997–2001 yıllarında İstanbul Üniversitesi Matematik bölümünü bitirdim.2001 yılında Prestige Kolejinde 1 yıl matematik öğretmenliği yaptım.2002–2003 te Başarılı kolejinde matematik öğretmenliği yaptım.2003 yılında Bahçelievler Çoban çeşme Lisesine matematik öğretmenliğine ilk atama ile başladım. Halen orada kadrolu matematik öğretmeniyim.2004 yılından beri İstanbul Kültür Üniversitesi Matematik Bilgisayar bölümünde tezli yüksek lisans öğrencisiyim.2006 yılında yüksek lisansımı tamamlamak üzereyim.

SEHER MELİKE AYDOĞAN