İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELİPTİK İNTEGRALLER VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Anıl ÇİĞDEMDERE

Anabilim Dalı: Matematik-Bilgisayar
Programı: Matematik-Bilgisayar

Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr. Arzu ŞEN

OCAK 2006

ÖNSÖZ

Lisansüstü aşamasında yardımlarını benden esirgemeyen danışmanım Sayın Arzu ŞEN'e, çalışkanlığını ve disiplinliliğini her zaman örnek aldığım Sayın Yaşar POLATOĞLU'na, sabırlı bir şekilde bütün sorularımı yanıtlayan Sayın Adnan İLERÇİ'ye, katkılarından dolayı Sayın Mert ÇAĞLAR'a ve tezin bitim aşamasında yardımlarından ötürü Sayın Emel YAVUZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Haziran 2006 Anıl ÇİĞDEMDERE

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

$\operatorname{am} u$	: u nun genliği
$\operatorname{mod} u$	: u nun modülü
$K(k)$	: Birinci tür tam eliptik integral
$E(k)$	: İkinci tür tam eliptik integral
$F_1(k,x)$	: Birinci tür eliptik integraller için Jakobinin şekli
$E_1(k,x)$	: İkinci tür eliptik integraller için Jakobinin şekli
$\prod_1(k,n,x)$	: Üçüncü tür eliptik integraller için Jakobinin şekli
$a < b$	: a, b den küçüktür
$a > b$	: a, b den büyüktür
$a = b$	: a, b ye eşittir
$a \neq b$	: a, b ye eşit değildir
$n_1 w_1 + n_2 w_2$	: Çift periyotlu bir fonksiyonun periyodu
$\operatorname{Re} zf(z)$	: $f(z)$ fonksiyonunun rezidüsü
$\operatorname{Im} z$	: z kompleks sayısının imajiner kısmı
$\operatorname{Re} z$	: z kompleks sayısının reel kısmı
$\lvert z \rvert$	: z kompleks sayısının modülü
Γ	: $w = f(z)$ fonksiyonu ile yapılan tasvirde elde edilen eğri
$w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n, \ldots$	: pozitif terimli periyot dizisi
$\xi(z)$, $\sigma(z)$	: Weierstrass fonksiyonu
η_1, η_2	: Legendre Bağıntısı içinde yer alan sabitler

ÖZET

İntegral hesapta eliptik integraller, bir elips yay uzunluğunun hesaplanması problemiyle ortaya çıkmış ve ilk olarak Giulio Fagnano ve Leonhard Euler tarafından incelenmiştir.

Modern tanımıyla bir eliptik integral, R iki değişkenli rasyonel bir fonksiyon P üçüncü ya da dördüncü dereceden katlı kökü olmayan bir polinomun karekökü ve c bir sabit olmak üzere

$$f(x) = \int_c^x R(t, P(t))dt$$

biçiminde ifade edilebilen bir f fonksiyonudur.

Genel olarak eliptik integraller elemanter fonksiyonlar cinsinden ifade edilemezler. Bu durumun istisnaları P polinomunun katlı kökünün olması ya da $R(x,y)$ fonksiyonunun y değişkeninin tek kuvvetlerini içerdiği hallerdir. Buna karşın indirgeme formülleriyle her eliptik integral rasyonel fonksiyonların ve birinci, ikinci, üçüncü tür eliptik integraller olarak adlandırılan üç kanonik formun integralleri biçiminde ifade edilebilir.

Bu formlar dışında eliptik integraller "Legendre Formu" ve "Carlson Simetrik Formu" adı verilen biçimlerde de ifade edilebilirler. Belirsiz integral hakkında detaylı bilgi ise Schwarz-Christoffel dönüşümü incelenerek elde edilebilir.

Bu çalışmanın ilk bölümünde eliptik integrallerin tanımı ve şekilleri verilmiştir. İkinci bölüm ise eliptik integraller ve eliptik fonksiyonlar ile ilgili problemlerin çözümlerini içermekte olup üçüncü bölümde çift periyotlu fonksiyonlar ve bunların özellikleri incelenmiştir. Son bölümde ise elipste yalınkat fonksiyonlarla ilgili bir çalışma yer almaktadır.

SUMMARY

In integral calculus, elliptic integrals originally arose in connection with the problem of giving the arc length of an ellipse and were first studied by Giulio Fagnano and Leonhard Euler.

In the modern definition, an elliptic integral is any function f which can be expressed in the form

$$f(x) = \int_c^x R(t, P(t))dt$$

where R is a rational function of its two arguments, P is the square root of a polynomial of degree 3 or 4 (a cubic or quartic) with no repeated roots, and c is a constant.

In general, elliptic integrals cannot be expressed in terms of elementary functions; exceptions to this are when P does have repeated roots, or when $R(x,y)$ contains no odd powers of y. However, with appropriate reduction formula, every elliptic integral can be brought into a form that involves integrals over rational functions, and the three canonical forms (i.e. the elliptic integrals of the first, second and third kind).

Besides the forms given below, the elliptic integrals may also be expressed in Legendre form and Carlson symmetric form. Additional insight into the theory of the indefinite integral may be gained through the study of the Schwarz-Christoffel mapping.

The first part of this work contains of the definitions and form of elliptic integrals. The second part contains the solutions of problems on elliptic integrals and the third part includes doubly-periodic functions and their properties. The last part of the present work is devoted to a study on univalent on univalent functions in the ellipse.

GİRİŞ

Eliptik integral kavramı bir elips yayının uzunluğunun belirtilmesinde kullanılan bir yöntemdir. Normal integral ile yay uzunluğu bulmaya çalışırken elde ettiğimiz sonuç bize kesin uzunluğu vermemekte, hata payı içermektedir. Ancak eliptik integraller ile kesin sonuca ulaşılabilmektedir. Bunun sebebi ise seriye açarak sonuca ulaşılmasıdır.

Bu çalışmada

1. Eliptik integrallerin tanımları
2. Eliptik integraller ile ilgili problemler
3. Eliptik fonksiyonların tanımlanması ve özellikleri
4. Çift periyotlu fonksiyonların özellikleri
5. Elipste yalınkat fonksiyonlar

incelenmiştir.

1. ELİPTİK İNTEGRALLER

1.1 Birinci Tür Tam Olmayan Eliptik İntegraller

$$(1.1) \qquad u = F(k,\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad 0<k<1$$

şeklinde tanımlanır; ϕ ye $F(k,\phi)$ nin veya u nun *genliği* denir ve $\phi = \operatorname{am} u$ yazılır, k ya da u nun *modülü* denir ve $k = \operatorname{mod} u$ yazılır. Bu integrale *birinci tür eliptik integralin Legendre şekli* de denir.

Eğer $\phi = \pi/2$ ise integrale birinci tür tam integral denir ve $K(k)$ veya sadece K notasyonu ile gösterilir. Bütün amaçlar için k nın verilmiş bir sabit olduğu kabul edilecektir.

1.2 İkinci Tür Tam Olmayan Eliptik İntegraller

$$(1.2) \qquad E(k,\phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta \qquad 0<k<1$$

şeklinde tanımlanır. Buna *ikinci tür eliptik integralin Legendre şekli* de denir. Eğer $\phi = \pi/2$ ise integrale ikinci tür tam eliptik integral denir ve $E(k)$ veya sadece E notasyonu ile gösterilir. Bu integral bir elips yayının uzunluğunun belirtilmesinde ortaya çıkar ve eliptik integral teriminin kullanılmasının bir nedenini teşkil eder.

1.3 Üçüncü Tür Tam Olmayan Eliptik İntegraller

$$(1.3) \qquad \prod(k,n,\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad 0<k<1$$

şeklinde tanımlanır. Buna *üçüncü tür eliptik integralin Legendre şekli* de denir. Burada n sıfırdan farklı bir sabit kabul edilmektedir. Çünkü $n=0$ için (1.3) integrali (1.1) integraline indirgenmiş olur. Eğer $\phi = \pi/2$ ise integrale *üçüncü tür tam eliptik integral* denir.

1.4 Eliptik İntegraller İçin Jakobi Şekilleri

Yukarıdaki eliptik integrallerin Legendre şekillerinde $v = \sin\theta$ dönüşümü yapılırsa $x = \sin\phi$ olmak üzere, aşağıdaki integraller elde edilir. Bunlara sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü tür *eliptik integrallerin Jakobi şekilleri* denir ve $x = 1$ için tam integral elde edilir.

(1.4) $$F_1(k,x) = \int_0^x \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}$$

(1.5) $$E_1(k,x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2v^2}{1-v^2}}\,dv$$

(1.6) $$\prod\nolimits_1(k,n,x) = \int_0^x \frac{dv}{(1+nv^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}$$

Yukarıdaki integraller sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü tür *eliptik integralleri için Jakobinin şekillerini* gösterir.

1.5 Eliptik Tipe İndirgenebilen İntegraller

Eğer x ve y nin cebirsel rasyonel bir fonksiyonu yani x ve y cinsinden iki polinomun bölümü $R(x,y)$ ise, $\int R(x,y)dx$ integrali elemanter fonksiyonlar (cebirsel, trigonometrik, ters trigonometrik, üstel ve logaritmik fonksiyonlar) cinsinden hesaplanabilir. ($y = \sqrt{ax+b}$ veya $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$ için)

Eğer a, b, c, d, e verilen sabitler olmak üzere $y = \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}$ veya $y = \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}$ ise $\int R(x,y)dx$ integrali birinci, ikinci, üçüncü tür eliptik integraller cinsinden veya özel hallerde elemanter fonksiyonlar cinsinden hesaplanabilir.

Eğer $P(x)$ dörtten yüksek dereceli bir polinom olmak üzere $y = \sqrt{P(x)}$ ise $\int R(x,y)dx$ integrali hiper eliptik fonksiyonlar yardımıyla integrallenebilir.

1.6 Jakobi Eliptik Fonksiyonları

Birinci tür eliptik integralin Jakobi şeklindeki üst limit x, Legendre şeklindeki üst limit ϕ ye $x = \sin\phi$ bağıntısıyla bağlıdır. $\phi = \mathrm{am}\, u$ olduğundan $x = \sin(\mathrm{am}\, u)$ dur. Böylece eliptik fonksiyonların tanımına varmış oluruz:

(1.8) $\quad x = \sin(\mathrm{am}\, u) = \mathrm{sn}\, u$

(1.9) $\quad \sqrt{1 - x^2} = \cos(\mathrm{am}\, u) = \mathrm{cn}\, u$

(1.10) $\quad \sqrt{1 - k^2 x^2} = \sqrt{1 - k^2 \mathrm{sn}^2\, u} = \mathrm{dn}\, u$

(1.11) $\quad \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{cn}\, u} = \mathrm{tn}\, u$

Bu fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlarınkine benzeyen ve problemlerde gösterilecek olan pek çok önemli özelliğe sahiptirler.

Ters eliptik fonksiyonların tanımlanması da mümkündür. Örneğin $x = \mathrm{sn}\, u$ ise $u = \mathrm{sn}^{-1}\, x$ dir. u nun k ya bağımlı olduğuna dikkat ediniz. Bu bağımlılığı iyice belirtmek için bazen $u = \mathrm{sn}^{-1}(x, k)$ veya $u = \mathrm{sn}^{-1}\, x$, $\mathrm{mod}\, k$ yazılır.

Şimdi eliptik integralleri daha iyi kavrayabilmemiz için örnek problemleri inceleyelim.

2. ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

2.1 Eliptik İntegrallerle İlgili Problemler

1. Eğer $0 < k < 1$ ise

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 k^6 + \ldots \right\}$$

olduğunu ispat ediniz.

Öncelikle hazırlığımızı yapalım.

Bir (a,b) aralığında n inci mertebeden türevi mevcut $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada $a_i \ (i = 0,1,2,\ldots,n)$ sabitlerdir. Bu fonksiyonun n inci mertebeye kadar türevlerini hesaplayalım.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2}$$

bu şekilde devam edersek

$$f^{(n)}(x) = n! a_n$$

bulunur. Şimdi x yerine sıfır yazalım. Bu durumda;

$$f(0) = a_0$$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(0) = 2a_2$$

bu şekilde devam edersek

$$f^{(n)}(0) = n! a_n$$

olup buradan da a_i leri hesaplarsak,

$$a_0 = f(0)$$

$$a_1 = f'(0)$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

bu şekilde devam edersek

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

bulunur ki bu değerleri $f(x)$ fonksiyonunda sırasıyla yerine koyarsak

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

formülü elde edilir. Bu formüle Maclaurin Formülü denir. Şimdi $f(x) = (1+x)^n$ fonksiyonunu ele alalım. Buradan;

$$f(x) = (1+x)^n$$
$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$$
$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

bu şekilde devam edersek

$$f^{(n)}(x) = n!$$

ve burada bütün ifadelerde x=0 değerini koyarsak

$$f(0) = 1$$
$$f'(0) = n$$
$$f''(0) = n(n-1)$$

bu şekilde devam edersek

$$f^{(n)}(0) = n!$$

bulunur. Yukarıdaki değerleri de sırasıyla fonksiyonda yerine koyarsak

$$f(x) = (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + ... + x^n$$
$$f(-x) = (1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + ...(-1)^n x^n$$

olup burada $n = -\frac{1}{2}$ alırsak

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + ...$$

yazabiliriz ve $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\theta}} = \int_0^{\pi/2} (1-k^2 \sin^2\theta)^{-1/2} d\theta$ deyip $x = k^2 \sin^2\theta$ alırsak

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\theta}} = \int_0^{\pi/2} \left[1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2\theta + \frac{1.3}{2.4} k^4 \sin^4\theta + \frac{1.3.5}{2.4.6} k^6 \sin^6\theta + ...\right] d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + ...\right\}$$

sonucu çıkar.

2. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ integralini önce bir eliptik integrale dönüştürünüz sonra üç ondalıklı olarak hesaplayınız.

$x=\frac{\pi}{2}-y$ dönüşümünü yaparsak $dx=-dy$ olur ve integralin sınırları sırasıyla

$x=0 \Rightarrow y=\frac{\pi}{2}$

$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow y=0$

olur.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \int_{\pi/2}^{0} \frac{-dy}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{\cos y}}$$

yazabiliriz ve karekökten kurtulmak için de $\cos y=\cos^2 u$ dönüşümünü yaparsak

$-\sin y dy = -2\cos u \sin u du$

$$dy=\frac{2\cos u \sin u du}{\sin y}$$

olup $\sin^2 y+\cos^2 y=1$ eşitliğinden ve $\cos y=\cos^2 u$ yazılırsa

$$\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-\cos^4 u}=\sqrt{(1-\cos^2 u)(1+\cos^2 u)}$$

olur ve bu ifadeyi yukarıdaki denklemde yerine koyarsak

$$dy=\frac{2\cos u \sin u du}{\sin y}=\frac{2\cos u \sin u du}{\sqrt{(1-\cos^2 u)(1+\cos^2 u)}}=\frac{2\cos u du}{\sqrt{1+\cos^2 u}}$$

olup bunu integralde yerine koyarsak

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \int_{\pi/2}^{0} \frac{-dy}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{\cos y}}$$

$$=2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos u du}{\cos u\sqrt{1+\cos^2 u}}$$

$$=2\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1+\cos^2 u}}$$

$$=2\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{2-\sin^2 u}}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{2\left[1-(1/2)\sin^2 u\right]}}$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-(1/2)\sin^2 u}}$$

$$= \sqrt{2}F\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{2}\right)$$

bulunup ilk problemin sonucunda $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ konularak integral 2,622 değerini alır.

Başka bir metot:

$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ integralinde yine $x = \frac{\pi}{2} - y$ dönüşümünü yaparsak $dx = -dy$ ve integralin sınırları sırasıyla

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0$$

olur. Dolayısıyla;

$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \int_{\pi/2}^{0} \frac{-dy}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{\cos y}}$ olup $\cos y = 1 - 2\sin^2(y/2)$ yazarsak

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{\cos y}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{1-2\sin^2(y/2)}}$$

olup $\sqrt{2}\sin(y/2) = \sin\phi$ dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(y/2)dy = \cos\phi d\phi$$

$$dy = \frac{\sqrt{2}\cos\phi d\phi}{\cos(y/2)}$$

olur. Öte yandan

$\cos(y/2) = \sqrt{1-\sin^2(y/2)} = \sqrt{1-(1/2)\sin^2\phi}$ ifadesini yukarıda yerine koyarsak

$dy = \frac{\sqrt{2}\cos\phi d\phi}{\cos(y/2)} = \frac{\sqrt{2}\cos\phi d\phi}{\sqrt{1-(1/2)\sin^2\phi}}$ bulunur ki bunu da integralde yerine koyduğumuz vakit

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{\cos y}} = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-(1/2)\sin^2\phi}} = \sqrt{2}K\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

bulunur.

3. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}dx$ integralini eliptik integral cinsinden ifade ediniz.

Karekökten kurtulmak için $\cos x = \cos^2 u$ dönüşümünü yaparsak;

$$-\sin x dx = -2\cos u \sin u du$$
$$\sin x dx = 2\cos u \sin u du$$
$$dx = \frac{2\cos u \sin du}{\sin x}$$

bulunup $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-\cos^4 u} = \sqrt{(1-\cos^2 u)(1+\cos^2 u)} = \sin u\sqrt{1+\cos^2 u}$

eşitliğini yukarıda yerine koyalım.

$dx = \frac{2\cos u \sin u du}{\sin x} = \frac{2\cos u \sin u du}{\sin u\sqrt{1+\cos^2 u}} = \frac{2\cos u du}{\sqrt{1+\cos^2 u}}$ olur ve

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}dx &= \int_0^{\pi/2} \cos u\left(\frac{2\cos u}{\sqrt{1+\cos^2 u}}\right)du \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 u}{\sqrt{1+\cos^2 u}}du \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos^2 u - 1}{\sqrt{1+\cos^2 u}}du \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 u}du - 2\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1+\cos^2 u}} \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{2-\sin^2 u}du - 2\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{2-\sin^2 u}} \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{2\left(1-(1/2)\sin^2 u\right)}du - 2\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{2\left(1-(1/2)\sin^2 u\right)}} \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-(1/2)\sin^2 u}du - \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-(1/2)\sin^2 u}} \\
&= 2\sqrt{2}E\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{2}F\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

4. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+4\sin^2 x}dx$ integralini hesaplayınız**.**

Verilen integrali $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+4(1-\cos^2 x)}dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{5-4\cos^2 x}dx$ şeklinde yazıp

$x = \frac{\pi}{2} - y$ dönüşümünü yaparsak $dx = -dy$ olur integral sınırları da sırasıyla

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0$$

şekline dönüşür. Düzenleyip yazarsak;

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+4\sin^2 x}dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{5-4\cos^2 x}dx \\
&= \int_{\pi/2}^{0} \sqrt{5-4\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}(-dy) \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{5-4\sin^2 y}dy \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{5[1-(4/5)\sin^2 y]}dy \\
&= \sqrt{5}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-(4/5)\sin^2 y}dy \\
&= \sqrt{5}E\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

5. $\int_0^{x} \sqrt{1-4\sin^2 u}du$ integralini tam olmayan eliptik integraller cinsinden ifade ediniz.

$0 \le x \le \pi/6$ olduğu varsayılmaktadır.

$\sqrt{4\sin^2 u} = 2\sin u = \sin\phi$ dönüşümü yapılırsa

$$2\cos u du = \cos\phi d\phi$$

$$du = \frac{\cos\phi d\phi}{2\cos u}$$

olup $\cos u$ yu ϕ cinsinden yazmak için

$\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{1-(1/4)\sin^2\phi}$ eşitliğini kullanmamız gerekir. Bu da yukarıda yerine yazılırsa;

$$du = \frac{\cos\phi d\phi}{2\cos u} = \frac{\cos\phi d\phi}{2\sqrt{1-(1/4)\sin^2\phi}}$$

olup sınırlar için de $\phi = \sin^{-1}(2\sin u)$ gerçeği altında

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sqrt{1-4\sin^2 u}\,du &= \int_0^\phi \cos\phi \frac{\cos\phi}{2\sqrt{1-(1/4)\sin^2\phi}} d\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\phi \frac{1-\sin^2\phi}{\sqrt{1-(1/4)\sin^2\phi}} d\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\phi \frac{-3+4-\sin^2\phi}{\sqrt{1-(1/4)\sin^2\phi}} d\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\phi \frac{-3+4\left[1-(1/4)\sin^2\phi\right]}{\sqrt{1-(1/4)\sin^2\phi}} d\phi \\
&= -\frac{3}{2}\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-(1/4)\sin^2\phi}} + 2\int_0^\phi \sqrt{1-(1/4)\sin^2\phi}\,d\phi \\
&= -\frac{3}{2}F\left(\frac{1}{2},\phi\right) + 2E\left(\frac{1}{2},\phi\right)
\end{aligned}$$

elde edilir

6. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2-\cos x}}$ integralinin eliptik türden integrale indirgenebildiğini gösteriniz.

$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$ eşitliğinden faydalanırsak

$2-\cos x = 3 - 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ olup verilen integral

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{3-2\cos^2(x/2)}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{3\left[1-(2/3)\cos^2(x/2)\right]}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2/3)\cos^2(x/2)}}
\end{aligned}$$

olup burada $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - u$ dönüşümü yapılırsa $dx = -2du$ olur. Bunu yukarıda kullanırsak

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2/3)\cos^2(x/2)}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{-du}{\sqrt{1-(2/3)\sin^2 u}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{du}{\sqrt{1-(2/3)\sin^2 u}}$$

şeklini alır.

7. $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{2-\cos x}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[F(\sqrt{2/3},\pi/2)-F(\sqrt{2/3},\pi/4)\right]$ olduğunu ispatlayınız.

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-u$ dönüşümünü yaparsak $dx=-2du$ olup integral sınırları sırasıyla

$$x=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{2}$$
$$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=\frac{\pi}{4}$$

haline dönüşürler ve Problem 6 dan yaralanarak

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{2-\cos x}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\pi/2}^{\pi/4}\frac{du}{\sqrt{1-(2/3)\sin^2 u}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-(2/3)\sin^2 u}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-(2/3)\sin^2 u}}-\int_0^{\pi/4}\frac{du}{\sqrt{1-(2/3)\sin^2 u}}\right\}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{F(\sqrt{2/3},\pi/2)-F(\sqrt{2/3},\pi/4)\right\}$$

sonucuna varılır.

8. $y=\sin x,\quad 0\le x\le\pi$ eğrisinin yay uzunluğunu bulunuz.

Yay uzunluğu$=\int_0^{\pi}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_0^{\pi}\sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx$

olup $y=\sin x\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\cos x$

Yay uzunluğu $=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$

$$=2\int_0^{\pi/2}\sqrt{2-\sin^2 x}\,dx$$
$$=2\int_0^{\pi/2}\sqrt{2\left[1-(1/2)\sin^2 x\right]}\,dx$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-(1/2)\sin^2 x}dx$$

$$= 2\sqrt{2}E\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$$

bulunur.

9. $x = a\sin\phi$**,** $y = b\cos\phi$ 0<b<a elipsinin yay uzunluğunu bulunuz.

Elipsin yay uzunluğu$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ dir.

$$x = a\sin\phi \Rightarrow dx = a\cos\phi d\phi$$
$$y = b\cos\phi \Rightarrow dy = -b\sin\phi d\phi$$

olup bunları yay uzunluğu formülünde yerine koyarsak

Elipsin yay uzunluğu$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}d\phi$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2(1-\sin^2\phi)+b^2\sin^2\phi}d\phi$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\phi)}d\phi$$

$$=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}d\phi$$

bulunur ki burada $0<e^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}<1$ olup e^2 elipsin eksantirisitesinin karesidir.

10. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ elipsinin çevre uzunluğunu bulunuz.

Bu elipsin parametrik denklemleri $x=3\sin\theta$, $y=2\cos\theta$ olup

$dx=3\cos\theta d\theta$ ve $dy=-2\sin\theta d\theta$ dır.

Elipsin yay uzunluğu$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9\cos^2\theta+4\sin^2\theta}d\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9(1-\sin^2\theta)+4\sin^2\theta}d\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9-5\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9[1-(5/9)\sin^2\theta]}\,d\theta$$

$$=12\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-(5/9)\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=12E\left(\sqrt{\frac{5}{9}},\frac{\pi}{2}\right)$$

bulunur.

11. $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\sin^2 x+2\cos^2 x}}$ integralini eliptik integraller cinsinden yazınız.

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$ eşitliğini kullanırsak

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\sin^2 x+2\cos^2 x}}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\sin^2 x+2(1-\sin^2 x)}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{2-\sin^2 x}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{2[1-(1/2)\sin^2 x]}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-(1/2)\sin^2 x}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$$

bulunur.

12. $\int_0^{t}\frac{dx}{\sqrt{1-3\sin^2 x}}$ integralini eliptik integraller cinsinden ifade ediniz.

$\sqrt{3}\sin x=\sin u$ dönüşümünü yaparsak

$\sqrt{3}\cos x dx=\cos u du$

$$dx=\frac{\cos u du}{\sqrt{3}\cos x}=\frac{\cos u du}{\sqrt{3}\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

$$=\frac{\cos u du}{\sqrt{3}\sqrt{1-(1/3)\sin^2 u}}$$

$$=\frac{\cos u du}{\sqrt{3-\sin^2 u}}$$

olup $\phi = \sin^{-1}(\sqrt{3}\sin t)$ bağıntıyla da ϕ, t ye bağlı olacak şekilde integral sınırlarımız değişir. Dolayısıyla;

$$\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-3\sin^2 x}} = \int_0^{\phi} \frac{\cos u du}{\cos u\sqrt{3-\sin^2 u}}$$

$$= \int_0^{\phi} \frac{du}{\sqrt{3-\sin^2 u}}$$

$$= \int_0^{\phi} \frac{du}{\sqrt{3\left[1-(1/3)\sin^2 u\right]}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\phi} \frac{du}{\sqrt{1-(1/3)\sin^2 u}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} F\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \phi\right)$$

olarak eliptik integraller cinsinden ifade edilir.

13. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)(9-x^2)}}$ integralini eliptik integraller cinsinden ifade ediniz.

1.Yol: $x = 2\sin t$ dönüşümünü yaparsak

$dx = 2\cos t dt$ olup integral sınırları

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 2 \Rightarrow t = \pi/2$

olacak şekilde değişir. Dolayısıyla;

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)(9-x^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos t dt}{\sqrt{(4-4\ \sin^2 t)(9-4\sin^2 t)}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos t dt}{\sqrt{4(1-\sin^2 t)(9-4\sin^2 t)}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{9-4\sin^2 t}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{9\left(1-(4/9)\sin^2 t\right)}}$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-(4/9)\sin^2 t}}$$

$$= \frac{1}{3} F\left(\frac{2}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$$

bulunur.

2.Yol: $x = 3\sin t$ dönüşümünü yaparsak $dx = 3\cos t dt$ olup integralin sınır değerleri x=0 için t=0 ve x=2 için t=$\arcsin\frac{2}{3}$ haline dönüşür. Burada $x = 3\sin t \Rightarrow \frac{x}{3} = \sin t \Rightarrow \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) = t$ bağıntısı ile x in t ye bağlı olarak sınırları değişmiştir.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)(9-x^2)}} = \int_0^{\arcsin 2/3} \frac{3\cos t dt}{\sqrt{(4-9\ \sin^2 t)(9-9\sin^2 t)}}$$

$$= \int_0^{\arcsin 2/3} \frac{dt}{\sqrt{4\left(1-(9/4)\sin^2 t\right)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\arcsin 2/3} \frac{dt}{\sqrt{1-(9/4)\sin^2 t}}$$

olup burada $\frac{3}{2}\sin t = \sin\phi$ dönüşümünü yaparsak $\frac{3}{2}\cos t dt = \cos\phi d\phi$ bulunur ki;

$$dt = \frac{2\cos\phi d\phi}{3\cos t} = \frac{2\cos\phi d\phi}{3\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{2\cos\phi d\phi}{3\sqrt{1-(4/9)\sin^2\phi}} = \frac{2\cos\phi d\phi}{\sqrt{9-4\sin^2\phi}}$$ eşitliği çıkar.

İntegral sınırları ise $\phi = \arcsin\left(\frac{3}{2}\sin t\right)$ bağıntısına bağlı olarak

$t = 0 \Rightarrow \phi = 0$

$t = \arcsin(2/3) \Rightarrow \phi = \pi/2$

şeklinde değişir. O halde;

$$\frac{1}{2}\int_0^{\arcsin 2/3} \frac{dt}{\sqrt{1-(9/4)\sin^2 t}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\phi d\phi}{\cos\phi\sqrt{9-4\sin^2\phi}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{9\left(1-(4/9)\sin^2\phi\right)}}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-(4/9)\sin^2\phi}}$$

$$= \frac{1}{3}F\left(\sqrt{\frac{4}{9}}, \frac{\pi}{2}\right)$$

bulunur.

14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+2x^2)}}$ integralini eliptik integraller cinsinden ifade ediniz.

$x=\tan u$ dönüşümünü yaparsak $dx=\sec^2 u du$ olup integral sınırları olan $x=0$ ve x=1 sırasıyla $u=0$ ve $u=\dfrac{\pi}{4}$ e dönüşür. Dolayısıyla;

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+2x^2)}} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 u du}{\sqrt{(1+\tan^2 u)(1+2\tan^2 u)}}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\cos u \sec^2 u du}{\sqrt{1+2\tan^2 u}}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{du}{\cos u\sqrt{1+2\tan^2 u}}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{du}{\sqrt{\cos^2 u+2\sin^2 u}}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{du}{\sqrt{\cos^2 u+2(1-\cos^2 u)}}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{du}{\sqrt{2-\cos^2 u}}$$

olup $u=\dfrac{\pi}{2}-t$ dönüşümünü yaparsak $du=-dt$ ve integralin de sınırları sırasıyla

$u=0 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$

$u=\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$

haline dönüşür. Düzenleyip yazarsak;

$$\int_0^{\pi/4} \frac{du}{\sqrt{2-\cos^2 u}} = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{-dt}{\sqrt{2-\sin^2 t}}$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{2-\sin^2 t}}$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{2\left(1-(1/2)\sin^2 t\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-(1/2)\sin^2 t}} - \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\sqrt{1-(1/2)\sin^2 t}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{F\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

15. $\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1+k^2\sin^2\phi}}$ integralini eliptik integraller cinsinden ifade ediniz.

$k\sin\phi = \tan u$ dönüşümünü yaparsak $k\cos\phi d\phi = \sec^2 u du$ ve böylelikle

$$d\phi = \frac{\sec^2 u du}{k\cos\phi} = \frac{\sec^2 u du}{k\sqrt{1-\sin^2\phi}}$$

$$= \frac{\sec^2 u du}{k\sqrt{1-\frac{\tan^2 u}{k^2}}}$$

$$= \frac{\sec^2 u du}{\sqrt{k^2-\tan^2 u}}$$

olur. Düzenleyip baştan yazarsak;

$$\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1+k^2\sin^2\phi}} = \int_0^{u} \frac{\cos u \sec^2 u du}{\sqrt{k^2-\tan^2 u}}$$

$$= \int_0^{u} \frac{du}{\cos u\sqrt{k^2-\tan^2 u}}$$

$$= \int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{k^2\cos^2 u-\sin^2 u}}$$

$$= \int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{k^2(1-\sin^2 u)-\sin^2 u}}$$

$$= \int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{k^2-(k^2+1)\sin^2 u}}$$

$$= \int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{k^2\left[1-\left(\frac{k^2+1}{k^2}\right)\sin^2 u\right]}}$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{1-\left(\frac{k^2+1}{k^2}\right)\sin^2 u}}$$

olup burada $\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}\sin u = \sin x$ dersek $\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}\cos u du = \cos x dx$ ve buradan

$$du = \frac{k\cos x dx}{\sqrt{k^2+1}\cos u} = \frac{k\cos x dx}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{1-\sin^2 u}}$$

$$= \frac{k\cos x dx}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{1-\left(\frac{k^2}{k^2+1}\right)\sin^2 x}}$$

ve sonuçta da

$$\frac{1}{k}\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\left(\frac{k^2+1}{k^2}\right)\sin^2 u}} = \frac{1}{k}\int_0^x \frac{k\cos x dx}{(\cos x)\sqrt{k^2+1}\sqrt{1-\left(\frac{k^2}{k^2+1}\right)\sin^2 x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} F\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}, x\right)$$

bulunur. Yapılan işlemlerde geriye doğru gidilerek son integralde üst limit x in ilk integraldeki üst limit ϕ ye $x = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{k^2+1}\sin\phi}{\sqrt{1+k^2\sin^2\phi}}\right)$ eşitliği ile bağlı bulunduğu görülür.

16. $\int_4^6 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}}$ integralini eliptik integraller cinsinden ifade ediniz.

$x = u^2 + 3$ dönüşümünü yaparsak $dx = 2udu$ olup integral sınırları

$x = 4 \Rightarrow u = 1$

$x = 6 \Rightarrow u = \sqrt{3}$

haline dönüşür. Dolayısıyla;

$$\int_4^6 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2udu}{\sqrt{(u^2+2)(u^2+1)u^2}}$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{\sqrt{(u^2+2)(u^2+1)}}$$

ve bu son integralde $u = \tan t$ dönüşümünü kullanırsak $du = \sec^2 t dt$ olup integralin sınır değerleri;

$u = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ ve $u = \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$ olur. Buradan;

$$\int_4^6 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}} = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{\sqrt{(u^2+2)(u^2+1)}}$$

$$= 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec^2 t dt}{\sqrt{(2+\tan^2 t)(1+\tan^2 t)}}$$

$$= 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\cos t\sqrt{2+\tan^2 t}}$$

$$= 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\sqrt{2\cos^2 t+\sin^2 t}}$$

$$= 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\sqrt{2(1-\sin^2 t)+\sin^2 t}}$$

$$= 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\sqrt{2-\sin^2 t}}$$

$$= 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\sqrt{2\left(1-(1/2)\sin^2 t\right)}}$$

$$= \sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\sqrt{1-(1/2)\sin^2 t}}$$

$$= \sqrt{2}\left\{\int_{0}^{\pi/3} \frac{dt}{\sqrt{1-(1/2)\sin^2 t}} - \int_{0}^{\pi/4} \frac{dt}{\sqrt{1-(1/2)\sin^2 t}}\right\}$$

$$= \sqrt{2}\left\{F\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{\pi}{3}\right) - F\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

şekline girer.

Genel olarak, $P_3(x)$ reel köklü üçüncü dereceden bir polinom ise $\int \frac{dx}{\sqrt{P_3(x)}}$ integrali işaret edilen metotla bir eliptik integrale dönüştürülebilir.

17. $\int_1^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}$ integralini hesaplayınız.

Burada $u = \sec t$ dönüşümünü yaparsak $du = \sec t \tan t dt$ olup integral sınırları olan $u = 1$ ve $u = \infty$ sırasıyla t=0 ve $t = \frac{\pi}{2}$ ye dönüşür. Dolayısıyla;

$$\int_1^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec t \tan t dt}{\sqrt{(\sec^2 t-1)(\sec^2 t+3)}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\cos t\sqrt{\sec^2 t+3}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1+3\cos^2 t}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1+3(1-\sin^2 t)}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{4-3\sin^2 t}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{4\left(1-(3/4)\sin^2 t\right)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-(3/4)\sin^2 t}}$$

$$= \frac{1}{2} F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

sonucu bulunur.

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}}$ integralinin eliptik integraller cinsinden nasıl hesaplanabileceğini gösteriniz.

$x = \frac{at+b}{ct+d}$ kesirli lineer dönüşümünü yapalım ve a,b,c,d yi öyle tarzda seçelim ki x=1,2,3 değerleri için t=0,1,∞ değerlerine karşılık gelsin. Yani;

$x = 1$ için $t = 0$ hali:

Bu durumda $1 = \frac{b}{d}$ olur.

$x = 2$ için t=1 hali:

Bu durumda $2 = \frac{a+b}{c+d}$ olur.

$x = 3$ için $t = \infty$ hali:

Bu durumda $3 = \frac{t\left(a+\frac{b}{t}\right)}{t\left(c+\frac{d}{t}\right)} = \frac{a}{c}$ olur ve buradan gerekli işlemler yapılırsa $a = 3d$, $b = d$, $c = d$ elde edilir. Böylece $x = \frac{3t+1}{t+1}$ sonucuna varılır. Bu dönüşümü kullanırsak $dx = \frac{2dt}{(t+1)^2}$ bulunup bunları integralde yerine koyarsak aşağıdaki işlemler çıkar. O halde;

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}} = \int \frac{2dt}{(t+1)^2\sqrt{\left(\frac{2t}{t+1}\right)\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\left(\frac{-2}{t+1}\right)\left(\frac{-t-3}{t+1}\right)}}$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t+3)}}$$

ve burada da $t = u^2$ dönüşümünü yaparsak $dt = 2udu$ olup

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t+3)}} = \int \frac{2udu}{\sqrt{u^2(u^2-1)(u^2+3)}}$$

$$= 2\int \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}$$

haline integralimiz dönüşmüş olur ki biz bir önceki problemde bu integrali çözmüştük. Bundan sonraki işlemler aynen bir önceki problemde yaptığımız gibi devam edip sonuca ulaşılır.

Genel olarak eğer $P_4(x)$ reel köklü dördüncü dereceden bir polinom ise $\int \frac{dx}{\sqrt{P_4(x)}}$ integrali işaret edilen metotla eliptik bir integrale dönüştürülebilir.

19. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+10)(x^2+x+7)}}$ integralini eliptik integraller cinsinden ifade ediniz.

Öncelikle kök altındaki polinomun reel kökünün bulunup bulunmadığını inceleyelim.

$x^2 - 2x + 10 = x^2 - 2x + 1 + 9 = (x+1)^2 + 9 = 0$ olup reel kökü yoktur.

$x^2 + x + 7 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{27}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} = 0$ olup reel kök yoktur.

Sonuçta kök altındaki polinomun hiçbir reel kökü bulunmadığından problem 18 deki metot uygulanamaz. Aşağıdaki tarzda hareket ediyoruz.

a bir sabit olmak üzere $x = y + a$ dönüşümünü yapalım. Buradan $dx = dy$ olup düzenlersek;

$$I = \int \frac{dy}{\sqrt{\{(y+a)^2 - 2(y+a) + 10\}\{(y+a)^2 + (y+a) + 7\}}}$$

$$= \int \frac{dy}{\sqrt{\{y^2 + 2ay + a^2 - 2y - 2a + 10\}\{y^2 + 2ay + a^2 + y + a + 7\}}}$$

$$= \int \frac{dy}{\sqrt{\{y^2+(2a-2)y+a^2-2a+10\}\{y^2+(2a+1)y+a^2+a+7\}}}$$

şeklini alır.

a yı öyle tarzda seçelim ki kuadratik ifadelerden her birindeki sabit terimler eşit olsun. Yani $a^2-2a+10=a^2+a+7$ eşitliği sağlansın. Buradan $a=1$ elde edilir. Böylece;

$$I = \int \frac{dy}{\sqrt{(y^2+9)(y^2+3y+9)}}$$

olur. Şimdi ise β pozitif bir sabit olmak üzere $y=\beta u$ dönüşümünü yapalım. Buradan $dy=\beta du$ olup integralimiz

$$I = \beta \int \frac{du}{\sqrt{(\beta^2 u^2+9)(\beta^2 u^2+3\beta u+9)}}$$

olur. β yı öyle tarzda seçelim ki kuadratik terimlerden her birinde β^2 katsayısı sabit terime eşit olsun. Yani $\beta^2=9$ olsun. Buradan $\beta=3$ elde edilir ve integral

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{(u^2+1)(u^2+u+1)}}$$

şekline girer. Şimdi $u=\dfrac{1+t}{1-t}$ yazalım $du=\dfrac{2dt}{1-t^2}$ olur ve

$$I = \sqrt{2}\int \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+3)}}$$

ve en son olarak $t=\tan\theta$ dersek $dt=\sec^2\theta d\theta$ olup

$$I = \sqrt{2}\int \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+3)}} = \sqrt{2}\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{(1+\tan^2\theta)(3+\tan^2\theta)}}$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{\cos\theta d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{3+\tan^2\theta}}$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{d\theta}{\cos\theta\sqrt{3+\tan^2\theta}}$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{d\theta}{\sqrt{3\cos^2\theta+\sin^2\theta}}$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{d\theta}{\sqrt{3(1-\sin^2\theta)+\sin^2\theta}}$$

$$= \sqrt{2} \int \frac{d\theta}{\sqrt{3 - 2\sin^2\theta}}$$
$$= \sqrt{2} \int \frac{d\theta}{\sqrt{3[1 - (2/3)\sin^2\theta]}}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (2/3)\sin^2\theta}}$$

sonucu bulunur.

20. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 2x + 10)(x^2 - 2x + 7)}}$ integralini bir eliptik integraller cinsinden ifade ediniz.

Aynen bir önceki problemde olduğu öncelikle kök içindeki polinomların reel kökünün olup olmadığını araştıralım.

$x^2 - 2x + 10 = x^2 - 2x + 1 + 9 = (x-1)^2 + 9 = 0$ olup reel kök yoktur.

$x^2 - 2x + 7 = x^2 - 2x + 1 + 6 = (x-1)^2 + 6 = 0$ olup reel kök yoktur.

Şimdi $x = y + a$ dönüşümü yaparsak $dx = dy$ olup

$$I = \int \frac{dy}{\sqrt{\{(y+a)^2 - 2(y+a) + 10\}\{(y+a)^2 - 2(y+a) + 7\}}}$$
$$= \int \frac{dy}{\sqrt{\{y^2 + 2ay + a^2 - 2y - 2a + 10\}\{y^2 + 2ay + a^2 - 2y - 2a + 7\}}}$$
$$= \int \frac{dy}{\sqrt{\{y^2 + (2a-2)y + a^2 - 2a + 10\}\{y^2 + (2a-2)y + a^2 - 2a + 7\}}}$$

şekline girer.

Bu aşamada sabit terimleri birbirine eşitlersek yani

$a - 2a + 10 = a - 2a + 7$ gibi imkansız bir denklem elde ederiz ki bu bize $x - 1 = y$ dönüşümünün kullanılması gerektiğini gösterir. Buradan $dx = dy$ bulunup yerine koyarsak

$I = \int \frac{dy}{\sqrt{(y^2 + 9)(y^2 + 6)}}$ integrali elde edilir ve burada da son olarak

$y = \sqrt{6}\tan u$ dönüşümünü yaparsak $dy = \sqrt{6}\sec^2 u du$ olur .Dolayısıyla;

$$I = \int \frac{dy}{\sqrt{(y^2 + 9)(y^2 + 6)}} = \sqrt{6} \int \frac{\sec^2 u du}{\sqrt{(6\tan^2 u + 9)(6\tan^2 u + 6)}}$$

$$=\int \frac{du}{\cos u\sqrt{6\tan^2 u+9}}$$
$$=\int \frac{du}{\sqrt{9\cos^2 u+6\sin^2 u}}$$
$$=\int \frac{du}{\sqrt{9(1-\sin^2 u)+6\sin^2 u}}$$
$$=\int \frac{du}{\sqrt{9-3\sin^2 u}}$$
$$=\int \frac{du}{\sqrt{9\left[1-(1/3)\sin^2 u\right]}}$$
$$=\frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{1-(1/3)\sin^2 u}}$$

sonucu elde edilir.

21. $\int_1^\infty \frac{du}{(3u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}$ integralini hesaplayınız.

$u=\sec\varphi$ konursa $du=\sec\varphi\tan\varphi d\varphi$ olup integral sınırları olan $u=1$ ve $u=\infty$ sırasıyla $\varphi=0$ ve $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ye dönüşür. Dolayısıyla;

$$\int_1^\infty \frac{du}{(3u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}=\int_0^{\pi/2} \frac{\sec\varphi\tan\varphi d\phi}{(3\sec^2\varphi+1)\sqrt{(\sec^2\varphi-1)(\sec^2\varphi+3)}}$$
$$=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{(3+\cos^2\varphi)\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}$$
$$=\int_0^{\pi/2} \frac{\left(3+\cos^2\varphi\right)-3}{(3+\cos^2\varphi)\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}d\varphi$$
$$=\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}-3\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(3+\cos^2\varphi)\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(3/4)\sin^2\varphi}}-\frac{3}{8}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1-(1/4)\sin^2\varphi)\sqrt{1-(3/4)\sin^2\varphi}}$$
$$=\frac{1}{2}F\left(\sqrt{3}/2,\pi/2\right)-\frac{3}{8}\prod(\sqrt{3}/2,-1/4,\pi/2)$$

şeklini alır. Burada ikinci integral üçüncü tür tam integraldir.

22. $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}}$ integralinin eliptik integraller cinsinden nasıl hesaplanabileceğini gösteriniz.

Problem 19 daki gibi işlem yapalım ve $x=\frac{at+b}{ct+d}$ kesirli lineer dönüşümünü düşünelim ve a,b,c,d yi öyle tarzda seçelim ki x=1,2,3 değerleri için t=0,1,∞ değerlerine karşılık gelsin. Yani;

$x=1$ için $t=0$ hali:

Bu durumda $1=\frac{b}{d}$ olur.

$x=2$ için t=1 hali:

Bu durumda $2=\frac{a+b}{c+d}$ olur.

$x=3$ için $t=\infty$ hali:

Bu durumda $3=\frac{t\left(a+\frac{b}{t}\right)}{t\left(c+\frac{d}{t}\right)}=\frac{a}{c}$ olur ve buradan gerekli işlemler yapılırsa $a=3d$, $b=d$, $c=d$ elde edilir. Böylece $x=\frac{3t+1}{t+1}$ sonucuna varılır. Bu dönüşümü kullanırsak $dx=\frac{2dt}{(t+1)^2}$ bulunup bunları integralde yerine koyalım.

$$I=\int \frac{dx}{x\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}}=\int \frac{2dt}{(t+1)^2\left(\frac{3t+1}{t+1}\right)\sqrt{\left(\frac{2t}{t+1}\right)\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\left(\frac{-2}{t+1}\right)\left(\frac{-t-3}{t+1}\right)}}$$

$$=\int \frac{(t+1)dt}{(3t+1)\sqrt{t(t-1)(t+3)}}$$

şekline dönüşür. Şimdi $t=u^2$ yazalım $dt=2udu$ ve dolayısıyla;

$$I=\int \frac{(t+1)dt}{(3t+1)\sqrt{t(t-1)(t+3)}}=2\int \frac{(u^2+1)du}{(3u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}$$

$$=2\int \frac{(1/3)(3u^2+1)+2/3}{(3u+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}du$$

$$=\frac{2}{3}\int \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}+\frac{4}{3}\int \frac{du}{(3u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}$$

olup $u=\sec w$ dersek $du=\sec w\tan w dw$ olur. Dolayısıyla;

$$I=\frac{2}{3}\int\frac{\sec w\tan w dw}{\sqrt{(\sec\ \ w-1)(\sec^2 w+3)}}+\frac{4}{3}\int\frac{\sec w\tan w dw}{(3\sec^2 w+1)\sqrt{(\sec^2 w-1)(\sec^2 w+3)}}$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{dw}{\sqrt{3\cos^2 w+1}}+\frac{4}{3}\int\frac{\cos^2 w dw}{(3+\cos^2 w)\sqrt{3\cos^2 w+1}}$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{dw}{\sqrt{3\cos^2 w+1}}+\frac{4}{3}\int\frac{(3+\cos^2 w-3)dw}{(3+\cos^2 w)\sqrt{3\cos^2 w+1}}$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{dw}{\sqrt{3(1-\sin^2 w)+1}}+\frac{4}{3}\left\{\int\frac{dw}{\sqrt{3(1-\sin^2 w)+1}}-3\int\frac{dw}{\left[3+(1-\sin^2 w)\right]\sqrt{3(1-\sin^2 w)+1}}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{dw}{\sqrt{4-3\sin^2 w}}+\frac{4}{3}\left\{\int\frac{dw}{\sqrt{4-3\sin^2 w}}-3\int\frac{dw}{(4-\sin^2 w)\sqrt{4-3\sin^2 w}}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dw}{\sqrt{1-(3/4)\sin^2 w}}+\frac{4}{3}\left\{\frac{1}{2}\int\frac{dw}{\sqrt{1-(3/4)\sin^2 w}}-\frac{3}{8}\int\frac{dw}{\left[1-(1/4)\sin^2 w\right]\sqrt{1-(3/4)\sin^2 w}}\right\}$$

bulunur.

23. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1+x)}}$ integralini hesaplayınız.

$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1+x)}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}$ deyip $x=\sin t$ dersek $dx=\cos t dt$ olup integral sınırları olan $x=0$ ve $x=1$ sırasıyla $t=0$ ve $t=\frac{\pi}{2}$ ye dönüşür. Dolayısıyla;

$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t dt}{\sqrt{\sin t(1-\sin^2 t)}}=\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{\sin t}}$ olup şimdi de $t=\frac{\pi}{2}-u$ dersek $dt=-du$ ve sınırların değişmesini de dikkate alırsak;

$\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{\sin t}}=\int_{\pi/2}^0\frac{-du}{\sqrt{\cos u}}=\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{\cos u}}$ olup $\cos u=\cos^2 y$ dönüşümü ile de

$$du=\frac{2\cos y\sin y dy}{\sin u}=\frac{2\cos y\sin y dy}{\sqrt{1-\cos^2 u}}$$

$$=\frac{2\cos y\sin y dy}{\sqrt{1-\cos^4 y}}$$

$$=\frac{2\cos y\sin y dy}{\sqrt{(1-\cos^2 y)(1+\cos^2 y)}}$$

$$= \frac{2\cos y dy}{\sqrt{1+\cos^2 y}}$$

olup bunları yerine koyarsak;

$$\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{\cos u}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos y dy}{\cos y\sqrt{1+\cos^2 y}}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{1+(1-\sin^2 y)}}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{2\left(1-(1/2)\sin^2 y\right)}}$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{1-(1/2)\sin^2 y}}$$

$$= \sqrt{2}F\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{2}\right)$$

bulunur.

24. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^4+4x^2+3}}$ integralini hesaplayınız.

$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^4+4x^2+3}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+3)}}$ olup $x = \tan u$ dersek $dx = \sec^2 u du$ olup integral sınırları olan $x = 1$ ve $x = \sqrt{3}$ sırasıyla $u = \dfrac{\pi}{4}$ ve $u = \dfrac{\pi}{3}$ e dönüşür. Düzenlersek;

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+3)}} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec^2 u du}{\sqrt{(1+\tan^2 u)(3+\tan^2 u)}}$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{du}{\cos u\sqrt{3+\tan^2 u}}$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{du}{\sqrt{3\cos^2 u+\sin^2 u}}$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{du}{\sqrt{3(1-\sin^2 u)+\sin u}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{du}{\sqrt{1-(2/3)\sin^2 u}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\int_0^{\pi/3}\frac{du}{\sqrt{1-(2/3)\sin^2 u}}-\int_0^{\pi/4}\frac{du}{\sqrt{1-(2/3)\sin^2 u}}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{F\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{\pi}{3}\right)-F\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

sonucu bulunur.

25. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ olduğunu gösteriniz.

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}=\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(x^2+1)}}$ yazıp $x=\sec u$ dersek $dx=\sec u\tan u\,du$ olup integral sınırları $x=1$ ve $x=\infty$ için sırasıyla $u=0$ ve $u=\frac{\pi}{2}$ ye dönüşür. Dolayısıyla;

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sec u\tan u\,du}{\sqrt{(\sec^2 u-1)(\sec^2 u+1)}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1+\cos^2 u}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1+(1-\sin^2 u)}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{2\left(1-(1/2)\sin^2 u\right)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

bulunur.

26. $\int_0^{2}\frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)(25-x^2)}}$ integralini eliptik integraller cinsinden ifade ediniz.

Burada $x=4\sin t$ dersek $dx=4\cos t\,dt$ olup integral sınırları olan $x=0$ ve $x=2$ sırasıyla $t=0$ ve $t=\frac{\pi}{2}$ ye dönüşür. Düzenlersek;

$$\int_0^{2}\frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)(25-x^2)}}=\int_0^{\pi/2}\frac{4\cos t\,dt}{\sqrt{16(1-\sin^2 t)(25-16\sin^2 t)}}$$

$$=\frac{1}{5}\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-(16/25)\sin^2 t}}$$

$$=\frac{1}{5}F\left(\frac{4}{5},\frac{\pi}{2}\right)$$

bulunur.

27. $\int_0^1 \sqrt{\frac{3-x^2}{1-x^2}}\,dx$ integralini eliptik integraller cinsinden yazınız.

$\int_0^1 \sqrt{\frac{3-x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ olup $x=\sin t$ dersek $dx=\cos t\,dt$ olup integral sınırları $x=0$ için $t=0$ ve $x=1$ için $t=\frac{\pi}{2}$ ye dönüşür. Dolayısıyla;

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t\sqrt{3-\sin^2 t}}{\cos t}\,dt$$

$$=\sqrt{3}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-(1/3)\sin^2 t}\,dt$$

$$=\sqrt{3}E\left(\sqrt{\frac{1}{3}},\frac{\pi}{2}\right)$$

sonucu bulunur.

28. $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{(x^2-9)(25-x^2)}}$ integralini eliptik integraller cinsinden ifade ediniz.

Burada $x=5\sin t$ dönüşümünü yaparsak $dx=5\cos t\,dt$ olup integral sınırları olan $x=3$ ve $x=5$, $\arcsin\left(\frac{x}{5}\right)=t$ bağıntısına bağlı olarak sırasıyla $t=\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$ ve $t=\frac{\pi}{2}$ ye dönüşür. Dolayısıyla;

$$\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{(x^2-9)(25-x^2)}} = \int_{\arcsin\frac{3}{5}}^{\pi/2} \frac{5\cos t\,dt}{\sqrt{(25\sin^2 t-9)25(1-\sin^2 t)}}$$

$$=\int_{\arcsin\frac{3}{5}}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{25\sin^2 t-9}}$$

olup $t=\frac{\pi}{2}-u$ dersek $dt=-du$ ve buna bağlı olarak integraldeki sınır değişimini de dikkate alırsak;

$$= \int_{\arcsin\frac{3}{5}}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{25\sin^2 t - 9}} = \int_{\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{5}}^{0} \frac{-du}{\sqrt{25\cos^2 u - 9}}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{5}} \frac{du}{\sqrt{25(1-\sin^2 u) - 9}}$$

$$= \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{5}} \frac{du}{\sqrt{1-(25/16)\sin^2 u}}$$

olup $\frac{5}{4}\sin u = \sin w$ dersek

$$\frac{5}{4}\cos u du = \cos w dw$$

$$du = \frac{4\cos w dw}{5\cos u}$$

$$= \frac{4\cos w dw}{5\sqrt{1-\sin^2 u}}$$

$$= \frac{4\cos w dw}{\sqrt{25-16\sin^2 w}}$$

olup düzenlersek;

$$= \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{5}} \frac{du}{\sqrt{1-(25/16)\sin^2 u}} = \frac{1}{4}\int_{0}^{\pi/2} \frac{4\cos w dw}{5\cos w\sqrt{1-(16/25)\sin^2 w}}$$

$$= \frac{1}{5}\int_{0}^{\pi/2} \frac{dw}{\sqrt{1-(16/25)\sin^2 w}}$$

$$= \frac{1}{5} F\left(\frac{4}{5}, \frac{\pi}{2}\right)$$

sonucu bulunur. En son inetgraldeki sınır değişiminin $\sin u = \frac{4\sin w}{5}$ bağıntısına bağlı olarak değiştirildiğine dikkat edelim. Buna göre $u = 0$ için $w = 0$ ve $u = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{5}$ için

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{5}) = \cos(\arcsin\frac{3}{5}) = \frac{4\sin w}{5} \Rightarrow w = \frac{\pi}{2}$$ bulunmuştur.

29. $\int_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt{(x^4+16)(x^4+25)}}$ integralini eliptik integraller cinsinden ifade ediniz.

$x^2 = 4\tan u$ dönüşümünü yaparsak $2xdx = 4\sec^2 udu$ olup integral sınırları olan $x=0$ ve $x=\infty$ sırasıyla $u=0$ ve $u=\frac{\pi}{2}$ ye dönüşür. Düzenlersek;

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt{(x^4+16)(x^4+25)}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{4\sec^2 udu}{\sqrt{(16+16\tan^2 u)(25+16\tan^2 u)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\cos u\sqrt{25+16\tan^2 u}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{25\cos^2 u+16\sin^2 u}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{25(1-\sin^2 u)+16\sin^2 u}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{du}{5\sqrt{1-(9/25)\sin^2 u}}$$

$$= \frac{1}{10}F\left(\frac{3}{5},\frac{\pi}{2}\right)$$

bulunur.

30. $I = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2-4x+5)(x^2-4x+10)}}$ integralini hesaplayınız.

Öncelikle kök içindeki ifadenin reel kökünün bulunup bulunmadığını inceleyelim.

$x^2-4x+5 = x^2-4x+4+1 = (x-2)^2+1 = 0$ olup reel kök yoktur.

$x^2-4x+10 = x^2-4x+4+6 = (x-2)^2+6 = 0$ olup reel kök yoktur.

Burada $x = y+a$ dönüşümünü yaparsak $dx = dy$ olur ve verilen integrali bu dönüşüm değişimine göre baştan düzenlersek;

$$I = \int_{1-a}^\infty \frac{dy}{\sqrt{\{(y+a)^2-4(y+a)+5\}\{(y+a)^2-4(y+a)+10\}}}$$

$$= \int_{1-a}^\infty \frac{dy}{\sqrt{\{y^2+2ay+a^2-4y-4a+5\}\{y^2+2ay+a^2-4y-4a+10\}}}$$

$$= \int_{1-a}^\infty \frac{dy}{\sqrt{\{y^2+(2a-4)y+a^2-4a+5\}\{y^2+(2a-4)y+a^2+-4a+10\}}}$$

ifadesi elde edilir. Burada kök içindeki sabit terimleri birbirine eşitlersek çözümü imkansız olan $a^2-4a+5=a^2-4a+10$ eşitliği bulunur ki bu da bize $x-2=u$ dönüşümünü yapmamızı söyler. Buradan $dx=du$ olup sınırlardaki değişimi de göz önünde bulundurursak;

$I=\int_{-1}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{(1+u^2)(6+u^2)}}$ bulunup son olarak $u=\tan t$ dersek $du=\sec^2 t dt$ ve dolayısıyla;

$$
\begin{aligned}
I=\int_{-1}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{(1+u^2)(6+u^2)}} &= \int_{-(\pi/4)}^{\pi/2}\frac{\sec^2 t dt}{\sqrt{(1+\tan^2 t)(6+\tan^2 t)}} \\
&= \int_{-(\pi/4)}^{\pi/2}\frac{dt}{\cos t\sqrt{6+\tan^2 t}} \\
&= \int_{-(\pi/4)}^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{6\cos^2 t+\sin^2 t}} \\
&= \int_{-(\pi/4)}^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{6(1-\sin^2 t)+\sin^2 t}} \\
&= \int_{-(\pi/4)}^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{6-5\sin^2 t}} \\
&= \int_{-(\pi/4)}^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{6[1-(5/6)\sin^2 t]}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\int_{0}^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-(5/6)\sin^2 t}}-\int_{0}^{-(\pi/4)}\frac{dt}{\sqrt{1-(5/6)\sin^2 t}}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{F\left(\sqrt{\frac{5}{6}},\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\sqrt{\frac{5}{6}},\frac{7\pi}{4}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

sonucu çıkar.

31. $I=\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-4x+5)(x^2-4x+10)}}$ integralini hesalayınız.

Öncelikle kök içindeki ifadenin reel kökünün bulunup bulunmadığını inceleyelim.

$x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1=0$ olup reel kök yoktur.

$x^2-4x+10=x^2-4x+4+6=(x-2)^2+6=0$ olup reel kök yoktur.

Burada $x=y+a$ dönüşümünü yaparsak $dx=dy$ olup

$$I=\int_{1-a}^{\infty}\frac{dy}{\sqrt{\left\{(y+a)^2-4(y+a)+5\right\}\left\{(y+a)^2-4(y+a)+10\right\}}}$$

$$=\int_{1-a}^{\infty}\frac{dy}{\sqrt{\left\{y^2+2ay+a^2-4y-4a+5\right\}\left\{y^2+2ay+a^2-4y-4a+10\right\}}}$$

$$=\int_{1-a}^{\infty}\frac{dy}{\sqrt{\left\{y^2+(2a-4)y+a^2-4a+5\right\}\left\{y^2+(2a-4)y+a^2+-4a+10\right\}}}$$

olup burada kök içindeki sabit terimleri birbirine eşitlersek çözümü imkansız olan $a^2-4a+5=a^2-4a+10$ eşitliği bulunur ki bu da bize $x-2=u$ dönüşümünü yapmamızı söyler. Buradan $dx=du$ olup sınırlardaki değişimi de göz önünde bulundurursak;

$I=\int_{-1}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{(1+u^2)(6+u^2)}}$ bulunup son olarak $u=\tan t$ dersek $du=\sec^2 t dt$ ve dolayısıyla;

$$I=\int_{-1}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{(1+u^2)(6+u^2)}}=\int_{-(\pi/4)}^{\pi/2}\frac{\sec^2 t dt}{\sqrt{(1+\tan^2 t)(6+\tan^2 t)}}$$

$$=\int_{-(\pi/4)}^{\pi/2}\frac{dt}{\cos t\sqrt{6+\tan^2 t}}$$

$$=\int_{-(\pi/4)}^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{6\cos^2 t+\sin^2 t}}$$

$$=\int_{-(\pi/4)}^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{6(1-\sin^2 t)+\sin^2 t}}$$

$$=\int_{-(\pi/4)}^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{6-5\sin^2 t}}$$

$$=\int_{-(\pi/4)}^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{6\left[1-(5/6)\sin^2 t\right]}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\int_{0}^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-(5/6)\sin^2 t}}-\int_{0}^{-(\pi/4)}\frac{dt}{\sqrt{1-(5/6)\sin^2 t}}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{F\left(\sqrt{\frac{5}{6}},\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\sqrt{\frac{5}{6}},\frac{7\pi}{4}\right)\right\}$$

bulunur.

2.2 Eliptik Fonksiyonlarla İlgili Problemler

32. (a) $\dfrac{d}{du}(\text{sn}\,u) = (\text{cn}\,u)(\text{dn}\,u)$

(b) $\dfrac{d}{du}(\text{cn}\,u) = -(\text{sn}\,u)(\text{dn}\,u)$

olduğunu ispat ediniz.

Tanım gereğince $u = \displaystyle\int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$ olduğundan $\dfrac{du}{d\phi} = \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$ ve

dolayısıyla $\dfrac{d\phi}{du} = \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}$ dir.

$\text{sn}\,u = \sin\phi = \sin(\text{am}\,u)$ ve $\text{cn}\,u = \cos\phi = \cos(\text{am}\,u)$ olduğunu biliyoruz.

O halde;

(a) $\dfrac{d}{du}(\text{sn}\,u) = \dfrac{d}{du}(\sin\phi) = \dfrac{d}{d\phi}(\sin\phi)\dfrac{d\phi}{du} = \cos\phi\dfrac{d\phi}{du} = \text{cn}\,u\sqrt{1-k^2\text{sn}^2\,\phi})$

$= (\text{cn}\,u)(\text{dn}\,u)$

(b) $\dfrac{d}{du}(\text{cn}\,u) = \dfrac{d}{du}(\cos\phi) = \dfrac{d}{d\phi}(\cos\phi)\dfrac{d\phi}{du} = -\sin\phi\dfrac{d\phi}{du} = -\text{sn}\,u\sqrt{1-k^2\text{sn}^2\,\phi}$

$= -(\text{sn}\,u)(\text{dn}\,u)$

bulunur.

33. (a) $\dfrac{d}{du}(\text{dn}\,u) = -k^2(\text{sn}\,u)(\text{cn}\,u)$

(b) $\dfrac{d}{du}(\text{tn}\,u) = \dfrac{\text{dn}\,u}{\text{cn}^2\,u}$

olduğunu ispat ediniz.

(a) $x = \text{sn}\,u$ ve $\sqrt{1-k^2x^2} = \text{dn}\,u$ olmak üzere;

$$\frac{d}{du}(\text{dn}\,u) = \frac{d}{du}\left(\sqrt{1-k^2x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-k^2x^2}\right)\frac{dx}{du}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-k^2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2k^2x)\frac{dx}{du}$$

$$= \frac{-k^2x}{\sqrt{1-k^2x^2}}\frac{dx}{du}$$

olup $x = \text{sn}\,u$ için $\dfrac{dx}{du} = \dfrac{d}{du}(\text{sn}\,u) = (\text{cn}\,u)(\text{dn}\,u)$ olduğunu biraz önce göstermiştik. O halde bunları yerine koyarsak;

$$\frac{d}{du}(\,\mathrm{dn}\,u) = \frac{-k^2(\mathrm{sn}\,u)}{\mathrm{dn}\,u}(\mathrm{cn}\,u)(\mathrm{dn}\,u) = -k^2(\mathrm{sn}\,u)(\mathrm{cn}\,u)$$

bulunur.

(b) $\dfrac{d}{du}(\mathrm{tn}\,u) = \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\dfrac{dx}{du} = \dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\dfrac{dx}{du}$

şeklinde yazarsak ve $\sqrt{1-x^2} = \mathrm{cn}\,u$ ve $\dfrac{dx}{du} = (\mathrm{cn}\,u)(\mathrm{dn}\,u)$ eşitliklerini yukarıda kullanırsak;

$$\frac{d}{du}(\mathrm{tn}\,u) = \frac{(\mathrm{cn}\,u)(\mathrm{dn}\,u)}{\mathrm{cn}^3\,u} = \frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}^2\,u}$$

bulunur.

34. (a) $\mathrm{sn}\,(-u) = -\mathrm{sn}\,u$

(b) $\mathrm{cn}\,(-u) = \mathrm{cn}\,u$

(c) $\mathrm{dn}\,(-u) = \mathrm{dn}\,u$

(d) $\mathrm{tn}\,(-u) = -\mathrm{tn}\,u$

olduğunu ispat ediniz.

(a) $u = \displaystyle\int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$ ve $v = \displaystyle\int_0^{-\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$ olarak tanımlayalım.

$\mathrm{sn}\,u = \sin\phi$ olduğunu biliyoruz. Aynı mantıkla

$\mathrm{sn}\,v = \sin(-\phi) = -\sin\phi = -\mathrm{sn}\,u$ yazabiliriz. Şimdi ikinci integralde $\theta = -w$ koyarsak $d\theta = -dw$ olup bu integral $v = \displaystyle\int_0^{-\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^{\phi} \frac{-dw}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}} = -u$ şeklini alır ve bu eşitliği yukarıda yerine koyarsak $\mathrm{sn}\,(-u) = -\mathrm{sn}\,u$ olduğu görülür.

(b) $\mathrm{cn}\,u = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}$ olduğundan $\mathrm{cn}\,(-u) = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,(-u)} = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u} = \mathrm{cn}\,u$

(c) $\mathrm{dn}\,u = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2\,u}$ olduğundan $\mathrm{dn}\,(-u) = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2\,(-u)} = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2\,u} = \mathrm{dn}\,u$

(d) $\mathrm{tn}\,(-u) = \dfrac{\mathrm{sn}\,(-u)}{\mathrm{cn}\,(-u)} = -\dfrac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u} = -\mathrm{tn}\,u$

sonucu çıkar.

35. Eğer $K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$ ise

(a) $\mathrm{sn}\,(u+2K) = -\mathrm{sn}\,u$

(b) $\mathrm{cn}\,(u+2K) = -\mathrm{cn}\,u$

(c) $\mathrm{dn}\,(u+2K) = \mathrm{dn}\,u$

(d) $\mathrm{tn}\,(u+2K) = \mathrm{tn}\,u$

olduğunu gösteriniz.

(a) $u = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$ olmak üzere

$$\int_0^{\phi+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} + \int_{\pi}^{\phi+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \text{ dir.}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafındaki iki integrali de ayrı ayrı inceleyelim.

$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = 2K$ olur. Öte yandan ikinci integral için $\theta = \pi + w$ dönüşümünü yaparsak

$$\int_{\pi}^{\phi+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^{\phi} \frac{dw}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}} = u$$

yazabiliriz. Sonuçta $\int_0^{\phi+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = u + 2K$ dır. Yani

$\mathrm{sn}\,(u+2K) = \sin(\phi+\pi) = -\sin\phi = -\mathrm{sn}\,u$ bulunur.

(b) $\mathrm{cn}\,(u+2K) = \cos(\phi+\pi) = -\cos\phi = -\mathrm{cn}\,u$

(c) $\mathrm{dn}\,(u+2K) = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2\,(u+2K)} = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2\,u} = \mathrm{dn}\,u$

(d) $\mathrm{tn}\,(u+2K) = \frac{\mathrm{sn}\,(u+2K)}{\mathrm{cn}\,(u+2K)} = \frac{-\mathrm{sn}\,u}{-\mathrm{cn}\,u} = \mathrm{tn}\,u$

36. $\mathrm{sn}\,u$ ve $\mathrm{cn}\,u$ fonksiyonlarının $4K$ periyotlu, $\mathrm{dn}\,u$ ve $\mathrm{tn}\,u$ fonksiyonlarının $2K$ periyotlu olduklarını ispat ediniz.

Problem 34 de u yerine u+$2K$ konularak

$\mathrm{sn}\,(u+4K) = \mathrm{sn}\,(u+2K+2K) = -\mathrm{sn}\,(u+2K) = -(-\mathrm{sn}\,u) = \mathrm{sn}\,u$

$\mathrm{cn}\,(u+4K) = \mathrm{cn}\,(u+2K+2K) = -\mathrm{cn}\,(u+2K) = -(-\mathrm{cn}\,u) = \mathrm{cn}\,u$

Bir önceki problemden $\mathrm{dn}\,(u+2K) = \mathrm{dn}\,u$ ve $\mathrm{tn}\,(u+2K) = \mathrm{tn}\,u$ eşitlikleri de $\mathrm{dn}\,u$ ve $\mathrm{tn}\,u$ fonksiyonlarının $2K$ periyotlu olduğunu gösterir.

37. (a) $\dfrac{d}{dx} sn^{-1}(x,k) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$

(b) $\displaystyle\int_0^x \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} = sn^{-1}(x,k) = F(k, \sin^{-1} x)$

olduğunu ispat ediniz.

(a) k modülüne bağımlılık kendiliğinden anlaşılmış olmak üzere $\mathrm{sn}^{-1}(x,k)$ yerine $\mathrm{sn}^{-1} x$ yazacağız. $x = \mathrm{sn}\, u$ ise $u = \mathrm{sn}^{-1} x$ dir.

$$\frac{dx}{du} = \frac{d}{du}(\mathrm{sn}\, u) = (\mathrm{cn}\, u)(\mathrm{dn}\, u) = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

olur ve buradan da $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{d}{dx}(\mathrm{sn}^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$

bulunur.

(b) $u = \mathrm{sn}^{-1} x = \displaystyle\int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$ olmak üzere $v = \sin\theta$ dönüşümü yaparsak $dv = \cos\theta d\theta$ ve buradan da

$$u = \mathrm{sn}^{-1} x = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^x \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}$$

elde edilir.

Burada k=0 için $\displaystyle\int_0^x \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \sin^{-1} x$ olup trigonometrik fonksiyonlar ile benzerliğine dikkat ediniz. Eliptik fonksiyonlar trigonometrik fonksiyonların genelleştirilmesidir.

3. PERİYODİK FONKSİYONLAR

Tanım 3.1. $W(z)$ fonksiyonu için $W(z+w)=W(z)$ eşitliğini sağlayan w kompleks sayısına *periyot* denir. Tanımın ilk sonuçları olarak w periyot ise $2w$ nun da periyot olduğu anlaşılır. Çünkü $W(z+2w)$ fonksiyonu için w periyot olduğundan;

$W(z+2w)=W(z+w+w)=W(z+w)=W(z)$ yazabiliriz. Dolayısıyla;

$W(z+2w)=W(z)$ eşitliğinden $2w$ nun da periyot olduğu anlaşılır. Bu ifadeyi genelleştirirsek her n doğal sayısı için nw nun da periyot olduğu gerçeğine ulaşılır. w periyot olduğundan $W(z)$ fonksiyonu için z nin w kadar artışı fonksiyonda tekrar kendisine tekabül edeceğinden $W(z-w)$ fonksiyonu için $W(z-w)=W[z+(-w)]=W(z)$ yazabiliriz. Bu ise bize w nun periyot olma durumunda $-w$ nun da aynı şekilde fonksiyonun periyodu olduğunu gösterir. Bunu yukarıdaki ifadeyle birleştirdiğimiz taktirde şu sonuç ortaya çıkar;

w periyot ise nw da periyottur. Burada n herhangi bir tamsayıdır.

Teorem 3.1. Bütün periyot değerlerinin bir pozitif alt sınırı vardır.

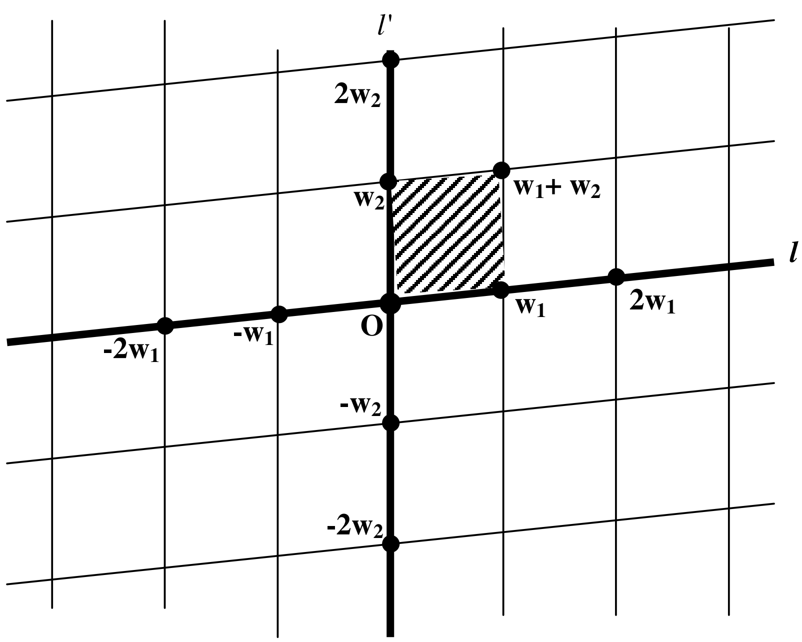
İspat: Teoremi ispatlamak için iddianın doğru olmadığını varsayalım. Yani periyot değerlerinin bir pozitif alt sınırı olmasın. Bunu şu şekilde de ifade edebiliriz. $w_1, w_2, w_3, ..., w_n, ...$ pozitif terimli dizinin eğer pozitif alt sınırı yoksa $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ dır. Çünkü eğer sıfıra eşit olmasaydı pozitif bir alt sınırı olurdu. Şimdi z_0 düzgün noktasını düşünelim. w_n ler periyot olduğundan $W(z_0)=W(z_0+w_n)$ yazabiliriz. (n=1,2,…) Şimdi $W(z)-W(z_0)$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon $z=z_0+w_n$ (n=1,2,…) noktalarında sonsuz defa sıfır değerini alır. Çünkü $W(z)-W(z_0)$ fonksiyonu $z=z_0+w_n$ (n=1,2,…) noktalarında $W(z_0+w_n)-W(z_0)$ haline dönüşür ve w_n ler periyot olduğundan bu ifade sıfıra eşittir. O halde z_0 noktası bir yığılma noktasıdır. Bu nedenledir ki $W(z)-W(z_0)$ özdeş olarak sıfıra eşittir. Yani $W(z)\equiv W(z_0)=sabit$ sonucuna varılır ki bu da fonksiyonun periyodik olduğuyla çelişir. Yani teorem doğrudur.

Tanım 3.2. $w_1, w_2, w_3, ..., w_n, ...$ lerin alt sınırına *esas periyot* ya da *ilkel periyot* denir.

Teorem 3.2. Periyotlar hiçbir sonlu noktada yığılmazlar.

İspat: $w_1, w_2, w_3, ..., w_n, ...$ periyotlar olsunlar. $n_1, n_2, n_3, ..., n_n, ...$ ler de doğal sayılar olsunlar. Bu taktirde $n_1 w_1 + n_2 w_2 + n_3 w_3 + ... n_m w_n$ toplamı da periyottur. Çünkü;

w_1 periyot ise $n_1 w_1$ de periyottur. w_2 periyot ise $n_2 w_2$ de periyottur. Bu şekilde devam edersek w_n periyot ise $n_n w_n$ de periyottur.O halde $n_1 w_1, n_2 w_2, \ldots, n_n w_n$ terimleri ayrı ayrı esas periyodun bir tamsayı katıdır. Sonuçta bunların toplamı da esas periyodun bir tamsayı katı olacağından $n_1 w_1 + n_2 w_2 + n_3 w_3 + ... n_n w_n$ toplamı da periyottur. Şimdi periyotların sonlu bir z_0 noktasında yığıldıklarını farz edelim. Yani z_0 merkezli istenildiği kadar küçük $\varepsilon \geq 0$ yarıçaplı dairenin içinde diziye ait sonuz eleman, dairenin dışında da sonlu eleman vardır. Şimdi bu dairenin içinde w_1, w_2 noktalarını alalım. Dairenin yarıçapı ε olduğundan w_1 in w_2 ye uzaklığı mutlaka çaptan küçük olacaktır. Yani $|w_1 - w_2| < 2\varepsilon$ yazabiliriz. Bu ifadeyi her ε için düşünürsek bu periyodu istediğimiz kadar küçültebiliriz anlamına gelir. Oysa periyot değerlerinin bir pozitif alt sınırı olduğundan istediğimiz kadar küçültemeyiz. Yani periyotlar hiçbir sonlu noktada yığılmazlar.



Şekil 2.1

Yukarıdaki şekilde çift periyotlu fonksiyonlar için w_1 birinci tür periyotların bir pozitif alt sınırı, w_2 ise ikinci tür periyotların bir pozitif alt sınırı olsun. l ve l' doğrularına paraleller çizerek düzlemi periyot paralelkenarlarına ayıralım. $0,\ w_1,\ w_2,\ w_1+w_2$ köşeli taralı paralelkenar ilkel (esas) periyot paralelkenarıdır. Paralelkenarların köşe noktaları en genel haliyle $n_1w_1+n_2w_2 \quad (n_1,n_2 \in Z)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.3. Sabit olmayan bir fonksiyon en çok iki periyotlu olabilir. w_1 ve w_2 periyotlarının birbirine oranı reel değildir. Çift periyotlu fonksiyonlara eliptik fonksiyonlar denir.

İspat: $periyot = n_1w_1+n_2w_2 \quad (n_1,n_2 \in Z)$

olduğundan

$$W(z+n_1w_1+n_2w_2)=W(z)$$

olup $\operatorname{Re}\dfrac{w_1}{w_2}=0$ olamayacağını gösterelim.

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{w_1\overline{w_2}}{w_2\overline{w_2}}=\frac{(\operatorname{Re}w_1+i\operatorname{Im}w_1)(\operatorname{Re}w_2-i\operatorname{Im}w_2)}{|w_2|^2}$$

$$\frac{\operatorname{Re}w_1}{\operatorname{Im}w_1}=-\frac{\operatorname{Im}w_2}{\operatorname{Re}w_2}$$

$$\frac{\operatorname{Re}w_1}{\operatorname{Im}w_1}=\frac{1}{\tan\varphi_1}$$

$$\frac{\operatorname{Im}w_2}{\operatorname{Re}w_2}=\tan\varphi_2$$

olduğundan $\tan\varphi_1\tan\varphi_2=-1$ olur ki bu bize eğimlerin çarpımının değerini vermektedir. Yani $m_1m_2=-1$ bulunur. Bu ise bize bu iki açının birbirine dik olduğunu gösterir. Dolayısıyla paralelkenarımız dikdörtgen olur.

Tanım 3.3. Sonluda hiçbir süngüler noktası olmayan fonksiyonlara *tam fonksiyon* denir. Örnek olarak polinomlar, çok terimliler, üstel fonksiyonları verebiliriz. Yani $w=a_0+a_1z+a_2z^2+...+a_nz^n$ ya da $w=e^z$ fonksiyonları tam fonksiyondur.

Genel olarak tam fonksiyon=$e^{h(z)}f(z)$ şeklinde verilir. Burada $f(z)$ sonsuz sıfır yerleri olan bir fonksiyondur. Sonsuz çarpım şeklinde gösterilebilir.

Tanım 3.4. Singüler noktaları yalnız kutup noktaları olan fonksiyonlara *meromorf fonksiyon* denir. Rasyonel fonksiyonlar bunların özel bir halidir. Basit periyotlu fonksiyonlar olarak $\sin z, \cos z, \tan z, \cot zi, e^{iz}$ gösterilebilir.

Bu fonksiyonları e^{iz} nin rasyonel fonksiyonları olarak ifade edebiliriz. Şöyle ki;

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$e^{-iz} = \cos(-z) + i\sin(-z) = \cos z - i \sin z$$

yazabiliriz çünkü $\cos(z)$ fonksiyonu çift fonksiyon olduğundan $\cos(-z) = \cos(z)$ ve $\sin(z)$ fonksiyonu tek fonksiyon olduğundan $\sin(-z) = -\sin(z)$ dir. Dolayısıyla e^{iz} ve e^{-iz} fonksiyonlarını taraf tarafa toplamak ve çıkarmak suretiyle

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$ olur ve bunlara bağlı olarak ta

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

sonuçlarına ulaşılmış olur.

Bunun dışında
$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z \\ &= \cos(z + 2n\pi) + i\sin(z + 2n\pi) \qquad (n \in Z) \\ &= e^{i(z+2n\pi)} \\ &= e^{iz}e^{i2n\pi} \end{aligned}$$

fonksiyonunun periyodunun $2n\pi$ olduğu anlaşılır. Burada $n \in Z$ dir. Dolayısıyla ilkel periyodu 2π dir.

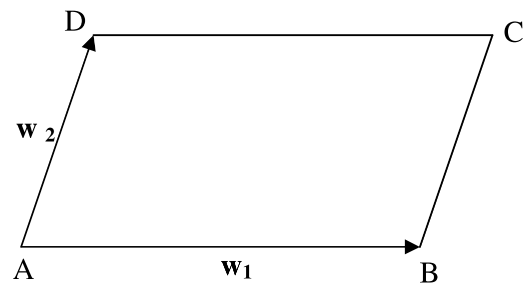
Başka bir örnek olarak $e^{\alpha z}$ fonksiyonunun periyodunu bulmaya çalışalım. x fonksiyonun periyodu ise $e^{\alpha z} = e^{\alpha(z+x)} = e^{\alpha z}e^{\alpha x}$ yazabiliriz. Buradan $e^{\alpha x} = 1 = e^{2n\pi i}$ bulunur ki x i çekersek $x = \frac{2n\pi i}{\alpha}$ olup ilkel periyot $\frac{2\pi i}{\alpha}$ çıkar.

3.1 Çift Periyotlu Fonksiyonların Özellikleri

$W(z + n_1w_1 + n_2w_2) = W(z)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.4. Çift periyotlu bir fonksiyonun periyot paralelkenarlarına ait kutuplarının rezidüleri toplamı sıfırdır.

İspat:



Şekil 2.2

Bu paralelkenarın çevresine P diyelim

Rezidü teoremi gereğince;

$\int_P W(z)dz = 2\pi i \sum \operatorname{Re} zidü$ dir.

$n_1 w_1 + n_2 w_2$ toplamı da periyot olduğundan $W(z) = W(z + n_1 w_1 + n_2 w_2)$ yazabiliriz. O halde;

$\int_P W(z)dz = \int_{AB} W(z)dz + \int_{BC} W(z)dz + \int_{CD} W(z)dz + \int_{DA} W(z)dz$ olup bu toplamın değerlerini bulmaya çalışalım.

$\int_{AB} W(z)dz = \int_{DC} W(z + w_2)dz = \int_{DC} W(z)dz = -\int_{CD} W(z)dz$ ve dolayısıyla da

(1) $\int_{AB} W(z)dz + \int_{CD} W(z)dz = 0$

bulunur. Benzer mantıkla

$\int_{BC} W(z)dz = \int_{AD} W(z + w_1)dz = \int_{AD} W(z)dz = -\int_{DA} W(z)dz$ yazabiliriz. Buradan da

(2) $\int_{BC} W(z)dz + \int_{DA} W(z)dz = 0$

bulunur. (1) ve (2) ifadelerini toplarsak

$\int_P W(z)dz = \int_{AB} W(z)dz + \int_{BC} W(z)dz + \int_{CD} W(z)dz + \int_{DA} W(z)dz = 0$

bulunur. Başka deyişle

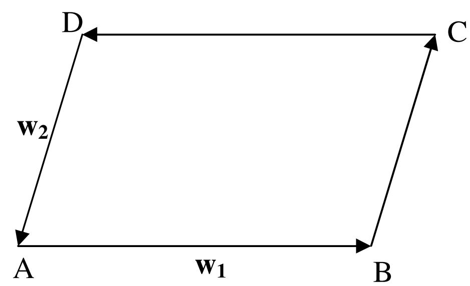
$\sum \operatorname{Re} zidü = 0$ elde edilir. Bu nedenledir ki $W(z)$ fonksiyonunun basit kutbu olamaz.

Teorem 3.5. Çift periyotlu bir fonksiyonun periyot paralelkenarı içinde a_j sıfır noktaları, b_j kutup noktaları olduğuna göre

$$\sum_{j=1}^{m} a_j - \sum_{j=1}^{n} b_j = w$$

dir. Burada w periyottur. Yani $w = n_1 w_1 + n_2 w_2$ $(n \in Z)$ ve a_j, b_j mertebeleri ile alınmışlardır.

İspat:



Şekil 2.3

ABCD paralelkenarının çevresine P diyelim

$\int_P z \frac{W'(z)}{W(z)} dz = 2\pi i \sum \operatorname{Re} zidü$ olduğunu biliyoruz.

Şimdi $z \frac{W'(z)}{W(z)}$ fonksiyonuna rezidüler teoremini uygulayalım.

$W(z) = A \frac{(z - a_j)^{m_j}}{(z - b_j)^{n_j}}$ olup her iki tarafın logaritması alınırsa

$\log W(z) = \log A + m_j \log(z - a_j) - n_j \log(z - b_j)$ olur. Türev alırsak

$\frac{W'(z)}{W(z)} = \frac{m_j}{z - a_j} - \frac{n_j}{z - b_j}$ olur. $z \frac{W'(z)}{W(z)}$ fonksiyonuna ulaşmak için z ile genişletelim

$z \frac{W'(z)}{W(z)} = \frac{z m_j}{z - a_j} - \frac{z n_j}{z - b_j}$ olup sıfır eklersek

$$z \frac{W'(z)}{W(z)} = \frac{(z - a_j + a_j) m_j}{z - a_j} - \frac{(z - b_j + b_j) n_j}{z - b_j} = m_j + \frac{a_j m_j}{z - a_j} - n_j - \frac{n_j b_j}{z - b_j}$$

olur ve a_j noktasındaki rezidü$= \operatorname*{Re}_{z \to a_j} z \left\{ z \frac{W'(z)}{W(z)} \right\} = a_j m_j = a_j$

b_j noktasındaki rezidü= $\operatorname*{Re}_{z \to b_j} z\left\{ z\dfrac{W'(z)}{W(z)} \right\} = -n_j b_j = -b_j$

bulunur. $\sum \mathrm{Re}\, zidü = \left(\sum_{j=1}^{m} a_j - \sum_{j=1}^{n} b_j \right)$ olup $\int_P z\dfrac{W'(z)}{W(z)}dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{m} a_j - \sum_{j=1}^{n} b_j \right)$

bulunur. Öte yandan

$\int_P z\dfrac{W'(z)}{W(z)}dz = \int_{AB} z\dfrac{W'(z)}{W(z)}dz + \int_{BC} z\dfrac{W'(z)}{W(z)}dz + \int_{CD} z\dfrac{W'(z)}{W(z)}dz + \int_{DA} z\dfrac{W'(z)}{W(z)}dz$ şeklinde

yazıp bu toplamı bulmaya çalışalım.

$$\int_{CD} z\frac{W'(z)}{W(z)}dz = \int_{BA} (z+w_2)\frac{W'(z+w_2)}{W(z+w_2)}dz = \int_{BA} (z+w_2)\frac{W'(z)}{W(z)}dz$$

$$= -\int_{AB} (z+w_2)\frac{W'(z)}{W(z)}dz$$

$$= -\int_{AB} z\frac{W'(z)}{W(z)}dz - \int_{AB} w_2\frac{W'(z)}{W(z)}dz$$

olduğundan;

(1) $$\int_{CD} z\frac{W'(z)}{W(z)}dz + \int_{AB} z\frac{W'(z)}{W(z)}dz = w_2 \int_{BA} \frac{W'(z)}{W(z)}dz = w_2 \log W(z)\Big|_{BA} = 2\pi i n_2 w_2$$

sonucu cıkar. Aynı mantıkla;

$$\int_{DA} z\frac{W'(z)}{W(z)}dz = \int_{CB} (z+w_1)\frac{W'(z+w_1)}{W(z+w_1)}dz = \int_{CB} (z+w_1)\frac{W'(z)}{W(z)}dz$$

$$= -\int_{BC} (z+w_1)\frac{W'(z)}{W(z)}dz$$

$$= -\int_{BC} z\frac{W'(z)}{W(z)}dz - \int_{BC} w_1\frac{W'(z)}{W(z)}dz$$

(2) $$\int_{DA} z\frac{W'(z)}{W(z)}dz + \int_{BC} z\frac{W'(z)}{W(z)}dz = w_1 \int_{CB} \frac{W'(z)}{W(z)}dz = w_1 \log W(z)\Big|_{BA} = 2\pi i n_1 w_1$$

bulunur. (1) ve (2) eşitliklerini birleştirdiğimiz taktirde

$$\int_P z\frac{W'(z)}{W(z)}dz = \int_{AB} z\frac{W'(z)}{W(z)}dz + \int_{BC} z\frac{W'(z)}{W(z)}dz + \int_{CD} z\frac{W'(z)}{W(z)}dz + \int_{DA} z\frac{W'(z)}{W(z)}dz$$

$$= 2\pi i(n_1 w_1 + n_2 w_2)$$

$$= 2\pi i w$$

$$= 2\pi i\left(\sum a_j - \sum b_j\right)$$

elde edilir ki buradan da $w = \sum a_j - \sum b_j$ sonucu çıkar.

3.2 $\sigma(z)$ Fonksiyonunun İncelenmesi

$\xi(z)=\frac{1}{z}+\sum_{w}\left\{\frac{1}{z-w}+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}\right\}$ olarak tanımlanır. $\sigma(z)$ fonksiyonu da

$$\xi'(z)=\frac{d^2}{dz^2}\log\sigma(z)$$

eşitliğine bağlı olarak tanımlanır.

$\xi'(z)=\frac{d^2}{d^2z}\left[\log\sigma(z)\right]$ ifadesinden türev almakla

$\xi(z)=\frac{\sigma'}{\sigma}=\frac{1}{z}+\sum\left\{\frac{1}{z-w}+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}\right\}$ bulunur. Bu son ifadeyi integre ettiğimizde logaritma fonksiyonu geleceğinden $\xi(z)$ fonksiyonu tek değerli değildir.

$$\xi(z)=\frac{1}{z}+\sum_{|w|\le\rho}\left\{\frac{1}{z-w}+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}\right\}+\sum_{|w|>\rho>z}\left\{\frac{1}{z-w}+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}\right\}$$

ifadesinde sağ taraftaki ikinci toplam $|z|\le\rho$ dairesinde düzgün yakınsaktır. O halde terim terime integre edebiliriz.

$$\int_0^z\left\{\frac{1}{z-w}+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}\right\}dz=\log(z-w)+\frac{z}{w}+\frac{z^2}{2w^2}\Bigg|_0^z$$

$$=\log(z-w)-\log(-w)+\frac{z}{w}+\frac{z^2}{2w^2}$$

$$=\log\left(1-\frac{z}{w}\right)+\frac{z}{w}+\frac{z^2}{2w^2}$$

olur. Sağ taraftaki birinci toplamdaki rasyonel fonksiyonları integre edersek uygun bir sabit seçmek suretiyle

$$f(z)=\int\xi(z)dz$$

$$=\log z+\sum_{|w|\le\rho}\left\{\log\left(1-\frac{z}{w}\right)+\frac{z}{w}+\frac{z^2}{2w^2}\right\}+\sum_{|w>\rho|}\left\{\log\left(1-\frac{z}{w}\right)+\frac{z}{w}+\frac{z^2}{2w^2}\right\}$$

bulunur. $|z|\le\rho\le|w|$ olduğundan $\frac{|z|}{|w|}<1$ dir. Bu toplam w değerleri istisna edilirse $|z|\le\rho$ için tek değerli ve düzgündür.

$f(z)=\int\xi(z)dz=\log\sigma(z)$ olduğundan $\sigma(z)=e^{f(z)}$ olarak tanımlanan σ fonksiyonu tek değerlidir.

$f(z)=\log z+P(z)$ $\quad P(0)=0$ olmak üzere

$$P(z) = P(0) + zP'(0) + \frac{z^2}{2!}P''(0) + ...$$

Öte yandan $\sigma(z) = e^{f(z)}$ olduğundan

$$= e^{\log z + P(z)}$$

$$= z\left\{ e^{P(0)+zP'(0)+\frac{z^2}{2!}P''(0)+...} \right\}$$

$$= z \cdot e^{P(0)+[z]^2}$$

bulunur. Burada $zP'(0) + \frac{z^2}{2!}P''(0) + ... = [z]^2$ olarak alınmıştır. $\sigma(0) = 0$ olduğundan σ nun başlangıçta bir sıfır noktası vardır. Aynı şeyi w lar için de söyleyebiliriz. Demek ki her w da bir sıfır noktası vardır.

$$\sigma(z) = e^{f(z)} = e^{\log z + \sum\limits_{|w|\le\rho} + \sum\limits_{|w|>\rho}} = z \cdot e^{\sum\left\{\log\left(1-\frac{z}{w}\right)+\frac{z}{w}+\frac{z^2}{2w^2}\right\}} = z \cdot e^{\sum \log\left(1-\frac{z}{w}\right)} e^{\sum\frac{z}{w}} e^{\sum\frac{z^2}{2w^2}}$$

$$= z \cdot \prod_w \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w}+\frac{z^2}{2w^2}}$$

bulunur.

3.3 Weierstrass $\xi(z)$ ve $\sigma(z)$ Fonksiyonları

$\xi(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_w \left\{ \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right\}$ olarak tanımlanır. $\sigma(z)$ fonksiyonu da

$$\xi'(z) = \frac{d^2}{dz^2}\log\sigma(z)$$

eşitliğine bağlı olarak tanımlanır. Buradan;

$$\xi(z) = \frac{d}{dz}\log\sigma(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$$

sonucuna varılır. $\xi(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_w \left\{ \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right\}$ ifadesinde bu serini mutlak yakınsak olduğunu gösterelim. $|w| > |z|$ olduğu halde serinin mutlak yakınsak olduğunu göstermek için genel terimini alalım.

$\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} = \frac{w^2 + w(z-w) + z(z-w)}{(z-w)w^2} = \frac{z^2}{(z-w)w^2}$ olup $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$ olduğunu kullanırsak;

$$\left|\frac{1}{z-w}+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}\right|=\left|\frac{z^2}{w^2}\frac{1}{w\left(\frac{z}{w}-1\right)}\right|=\frac{1}{|z|}\left|\frac{z}{w}\right|^3\left\{1+\left|\frac{z}{w}\right|+\left|\frac{z}{w}\right|^2+\ldots\right\}$$ bulunur.

$\sum_w\left|\frac{z}{w}\right|^3$ serisi yakınsaktır. O halde $\sum_w\left(\frac{1}{z-w}+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}\right)$ serisi $z\neq w$ için mutlak ve düzgün yakınsaktır. $\xi(z)=\frac{1}{z}+\sum_w\left\{\frac{1}{z-w}+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}\right\}$ kutup noktaları $z=0$ ve $z=w=m_1w_1+m_2w_2$ noktalarıdır. Burada $z=w=m_1w_1+m_2w_2$ noktaları basit kutup noktalarıdır. Şimdi iddia ediyoruz ki $\xi(z)$ fonksiyonu çift periyotlu bir fonksiyon değildir. Çünkü $\xi(z)$ in $z=w$ noktası civarındaki Laurent açılımı

$$\xi(z)=\frac{1}{z-w}+P(z-w)$$

Şeklinde olup $\operatorname*{Re}_{z=w} z\,\xi(z)=1$ dir. Oysa çift periyotlu fonksiyonlarda rezidüler toplamı sıfır olduğundan ξ fonksiyonu çift periyotlu değildir. Dolayısıyla $\xi(z+w_i)-\xi(z)$ fonksiyonu için

$$\xi(z+w_1)=\xi(z)+2\eta_1$$

$\xi(z+w_2)=\xi(z)+2\eta_2$ yazabiliriz. Burada $\eta_1=\eta_2=0$ olamayacağını gördük. Bu ξ fonksiyonuna *iki defa aditif periyodik* denir.

3.4 Legendre Bağıntısı

$$\xi(z)=\frac{1}{z}+\sum_w\left\{\frac{1}{z-w}+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}\right\}$$

olmak üzere $z=0$ kutup noktası periyot paralelkenarlarının ortak noktası olsun. $z=0$ noktasındaki rezidü $\operatorname*{Re}_{z=0} z\,\xi(z)=1$ olup

$$\int_{ABCDA}\xi(z)dz=2\pi i\sum\operatorname{Re}z=2\pi i \text{ dir.}$$

$$\int_{ABCDA}\xi(z)dz=\int_{AB}\xi(z)dz+\int_{BC}\xi(z)dz+\int_{CD}\xi(z)dz+\int_{DA}\xi(z)dz \text{ eşitliği için}$$

$$\int_{CD}\xi(z)dz=\int_{BA}\xi(z+w_2)dz=\int_{BA}[\xi(z)+2\eta_2]dz=\int_{BA}\xi(z)dz+2\eta_2z\Big|_{BA}=\int_{BA}\xi(z)dz-2\eta_2w_1$$

ve buradan da

$\int_{CD} \xi(z)dz + \int_{AB} \xi(z)dz = -2\eta_2 w_1$ elde edilir. Benzer şekilde;

$$\int_{BC} \xi(z)dz = \int_{AD} \xi(z+w_1)dz = \int_{AD} [\xi(z)+2\eta_1]dz = \int_{AD} \xi(z)dz + 2\eta_1 z\Big|_{AD} = \int_{AD} \xi(z)dz + 2\eta_1 w_2$$

ve buradan da

$\int_{BC} \xi(z)dz + \int_{DA} \xi(z)dz = 2\eta_1 w_2$ elde edilir. Bu eşitlikleri birleştirdiğimiz taktirde

$\int_{ABCDA} \xi(z)dz = 2(\eta_1 w_2 - \eta_2 w_1) = 2\pi i$ ve sonuçta $\eta_1 w_2 - \eta_2 w_1 = \pi i$ eşitliği elde edilir ki bu bağıntıya *Legendre Bağıntısı* denir. Burada paralelkenarlarda aldığımız sıranın izlenmesi için $\mathrm{Im}\dfrac{w_2}{w_1} > 0$ olmalıdır.

$\mathrm{Im}\dfrac{w_2}{w_1} = \mathrm{Im}\dfrac{(w_2)_1 + i(w_2)_2}{(w_1)_1 + i(w_1)_2}$ olup

$$\mathrm{Im}\frac{w_2}{w_1}\frac{\overline{w_1}}{\overline{w_1}} = \mathrm{Im}\frac{[(w_2)_1 + i(w_2)_2][(w_1)_1 - i(w_1)_2]}{|w_1|^2}$$

$$= \frac{(w_2)_2(w_1)_1 - (w_1)_2(w_2)_1}{|w_1|^2} > 0 \quad \text{olması için} \quad \frac{(w_2)_2}{(w_2)_1} > \frac{(w_1)_2}{(w_1)_1} \quad \text{yani} \quad \varphi_2 > \varphi_1$$

olmalıdır.

3.5 η_1 ve η_2 Sabitlerinin ξ Fonksiyonu Tarafından Belirlenmesi

Öncelikle $\xi(z)$ fonksiyonunun tek ya da çift fonksiyon olup olmadığını bulalım.

$\xi(z) = \dfrac{1}{z} + \sum\left\{\dfrac{1}{z-w} + \dfrac{1}{w} + \dfrac{z}{w^2}\right\}$ fonksiyonu için

$$\xi(-z) = -\frac{1}{z} + \sum\left\{\frac{1}{-z-w} + \frac{1}{w} + \frac{-z}{w^2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{z} - \sum\left\{\frac{1}{z+w} - \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2}\right\}$$

olup w periyot olduğundan $-w$ da periyot olur. Bunu kullanırsak

$$\xi(-z) = -\left[\frac{1}{z} + \sum\left\{\frac{1}{z+w} - \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2}\right\}\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{z} + \sum\left\{\frac{1}{z-w} - \frac{1}{(-w)} + \frac{z}{(-w)^2}\right\}\right] = -\xi(z)$$

bize $\xi(z)$ fonksiyonunun tek fonksiyon olduğunu gösterir. Şimdi $z = \frac{w_1}{2}$ alalım.

Daha önce

$\xi(z + w_1) = \xi(z) + 2\eta_1$ bulmuştuk.

$$\xi\left(\frac{w_1}{2}\right) = \xi\left(-\frac{w_1}{2} + w_1\right) = \xi\left(-\frac{w_1}{2}\right) + 2\eta_1 = -\xi\left(\frac{w_1}{2}\right) + 2\eta_1$$

$$\Rightarrow 2\xi\left(\frac{w_1}{2}\right) = 2\eta_1$$

$$\Rightarrow \eta_1 = \xi\left(\frac{w_1}{2}\right)$$

olur. Benzer şekilde $\eta_2 = \xi\left(\frac{w_2}{2}\right)$ sonucuna ulaşılır.

3.6 Tam Fonksiyonların Weierstrass Çarpım Formülü

$\sigma(z)$ hiçbir singüler noktası olmayan tam fonksiyon olsun. $\sigma(z)$ in sonsuz sayıda sıfır noktaları vardır. Bu sıfır noktaları z=0 ve $z = w = m_1 w_1 + m_1 w_2$ dir. Şimdi z nin w_1 ya da w_2 kadar attığı zaman $\sigma(z)$ nin nasıl değiştiğini inceleyelim.

(1) $F(z) = f(z + w_1) - f(z)$

(2) $\sigma(z) = e^{f(z)}$

(3) $f(z) = \int_0^z \xi(z)$

ifadelerini kullanarak

$F'(z) = f'(z + w_1) - f'(z) \Rightarrow f'(z) = \xi(z)$ elde edilir. Bunu (1) ve (3) ifadelerinin türevini alarak elde ettik. Dolayısıyla;

$$\begin{aligned} F'(z) &= \xi(z + w_1) - \xi(z) \\ &= \xi(z) + 2\eta_1 - \xi(z) \\ &= 2\eta_1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu son ifadeyi integre edelim. O zaman $F(z) = 2\eta_1 z + C_1$ yazabiliriz. Bunu da (1) eşitliğinde yerine koyarsak;

$f(z + w_1) = f(z) + 2\eta_1 z + C_1$ elde edilir.

Öte yandan $\sigma(z) = e^{f(z)}$ idi. O halde;

$\sigma(z + w_1) = e^{f(z + w_1)}$

$$= e^{f(z)+2\eta_1 z + C_1}$$

$$= e^{f(z)+2\eta_1 z} e^{C_1}$$

ifadesiyle de w_1 kadar artırım olduğunda fonksiyondaki değişim ile ilgili ilk adım atılmış olur. Şimdi $\sigma(z)$ nin tek fonksiyon olduğunu gösterelim;

$\sigma(z) = z \cdot \prod_w \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}}$ olduğundan;

$\sigma(-z) = (-z) \cdot \prod_w \left(1 + \frac{z}{w}\right) e^{\frac{-z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}}$ yazılabilir. *w* periyot iken –*w* da periyot olduğundan yerine koyarsak;

$\sigma(-z) = (-z) \cdot \prod_w \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{-z}{-w} + \frac{z^2}{2w^2}} = -\sigma(z)$ bulunur ki bu da tek fonksiyon olduğunu gösterir.

Şimdi $z = -\frac{w_1}{2}$ alalım. Bu takdirde;

$$\sigma(\frac{w_1}{2}) = \sigma(-\frac{w_1}{2}) e^{-2\eta_1 \frac{w_1}{2} + c_1} = e^{-\eta_1 w_1 + c_1} \sigma(-\frac{w_1}{2})$$

$= -\sigma(\frac{w_1}{2}) e^{-\eta_1 w_1 + c_1}$ bulunup tek fonksiyon olma özelliğini kullanıp sadeleştirme yaparsak;

$1 = -e^{-\eta_1 w_1} e^{c_1} \Rightarrow e^{c_1} = -e^{\eta_1 w_1}$ sonucu çıkar. O halde

$\sigma(z + w_1) = \sigma(z) e^{2\eta_1 z + \eta_1 w_1}$ ifadesinde $e^{c_1} = -e^{\eta_1 w_1}$ sonucunu kullanırsak

$\sigma(z + w_1) = -\sigma(z) e^{\eta_1 (2z + w_1)} = -\sigma(z) e^{2\eta_1 (z + \frac{w_1}{2})}$ ve benzer şekilde de

$\sigma(z + w_2) = -\sigma(z) e^{2\eta_2 (z + \frac{w_2}{2})}$ bulunur. Yani *z* nin w_1 ya da w_2 kadar attığı zaman $\sigma(z)$ nin nasıl değiştiğini bulmuş olduk.

4. ELİPSTE YALINKAT FONKSİYONLAR

Teorem 4.1. $w = f(z) = \frac{a+b}{2} z + \frac{a-b}{2} \bar{z}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon birim diskte injektiftir.

İspat: $z_1 = z_2 \Rightarrow x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$

ifadelerinden

(1) $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

eşitlikleri elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \frac{a+b}{2} z_1 + \frac{a-b}{2} \bar{z}_1 = \frac{a+b}{2}(x_1 + iy_1) + \frac{a-b}{2}(x_1 - iy_1) \\ &= \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \right) x_1 + i \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \right) y_1 \\ &= ax_1 + iby_1 \end{aligned}$$

(2) $f(z_1) = ax_1 + iby_1$

bulunur. Benzer tarzda hareket edersek

(3) $f(z_2) = ax_2 + iby_2$

eşitliği elde edilir. (1), (2) ve (3) eşitliklerinden

$f(z_1) = f(z_2) \Leftrightarrow ax_1 + iby_1 = ax_2 + iby_2$

$x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$

bulunur ki bu da iddianın doğruluğunun ispatıdır.

Lemma 4.1. $w = \frac{a+b}{2} z + \frac{a-b}{2} \bar{z}$ şeklinde tanımlandığına göre z ve $\bar{z}$ ifadelerini bulunuz.

$\frac{a+b}{2}$ ve $\frac{a-b}{2}$ ifadelerinin reel sayılar olduğu göz önüne alınırsa

(1) $w = \frac{a+b}{2} z + \frac{a-b}{2} \bar{z}$

için $\bar{w}$ ifadesi

(2) $\quad \bar{w} = \dfrac{a-b}{2} z + \dfrac{a+b}{2} \bar{z}$

eşitliği ile gösterilir. Ayrıca

$$w = \frac{a+b}{2} z + \frac{a-b}{2} \bar{z} \Rightarrow (a+b)w = \frac{(a+b)^2}{2} z + \frac{(a+b)(a-b)}{2} \bar{z}$$

$$\bar{w} = \frac{a-b}{2} z + \frac{a+b}{2} \bar{z} \Rightarrow (a-b)\bar{w} = \frac{(a-b)^2}{2} z + \frac{(a-b)(a+b)}{2} \bar{z}$$

olduğundan bu eşitlikleri düzenleyip yazarsak

(3) $\quad (a+b)w = \dfrac{a^2+2ab+b^2}{2} z + \dfrac{a^2-b^2}{2} \bar{z}$

(4) $\quad (a-b)\bar{w} = \dfrac{a^2-2ab+b^2}{2} z + \dfrac{a^2-b^2}{2} \bar{z}$

eşitlikleri elde edilir. (3) ve (4) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned}(a+b)w-(a-b)\bar{w} &= \frac{a^2+2ab+b^2}{2} z - \frac{a^2-2ab+b^2}{2} z \\ &= 2abz\end{aligned}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2ab}\left[(a+b)w-(a-b)\bar{w}\right] \\ &= \frac{1}{ab}\left[\frac{(a+b)}{2} w - \frac{(a-b)}{2} \bar{w}\right]\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\bar{z} = \frac{1}{ab}\left[\frac{(a+b)}{2} \bar{w} - \frac{(a-b)}{2} w\right]$$

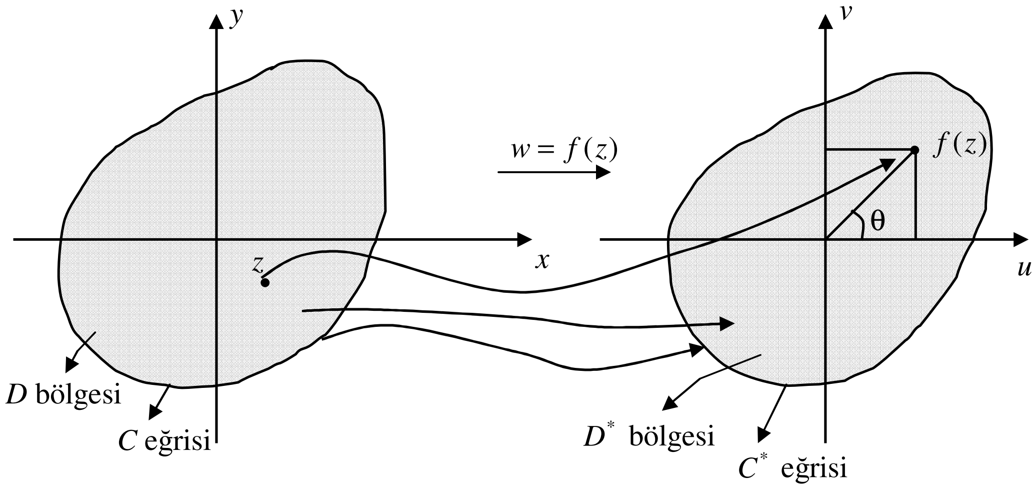
eşitliği bulunur.

Teorem 4.2. $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ fonksiyonu basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış analitik ve yalınkat olsun. Bu taktirde

$$\operatorname{Re} z \frac{f'(z)}{f(z)} = r \frac{\partial}{\partial r} \log\left|f\left(re^{i\phi}\right)\right|$$

eşitliği vardır.

İspat:



Şekil 4.1

Şekilde gösterildiği gibi $z-$düzlemindeki bir z noktası $w-$düzleminde bir $w = f(z)$ noktasına resmedilsin. Benzer şekilde $w = f(z)$ fonksiyonu vasıtasıyla C eğrisi C^* eğrisine, D bölgesi de D^* bölgesine resmedilsin. Bu taktirde bir kompleks sayının yazılışından dolayı

(1) $\quad f(z) = |f(z)|e^{i\theta}$

yazılışını elde ederiz ($w-$düzleminde). Diğer yandan $z-$düzleminde kutupsal koordinatlar $z = re^{i\phi}$ şeklindeyse bu durumda (1) eşitliği her iki tarafın logaritmasının da alınmasıyla

(2) $\quad \log f\left(re^{i\phi}\right) = \log\left(\left|f\left(re^{i\phi}\right)\right|e^{i\theta}\right)$

şeklinde yazılabilir. (2) yazılışından hareket edersek

(3) $\quad \log f\left(re^{i\phi}\right) = \log\left|f\left(re^{i\phi}\right)\right| + i\theta$

eşitsizliğini elde ederiz. (3) eşitsizliğinin r ye göre türevini alırsak

(4) $\quad \dfrac{e^{i\phi} f'\left(re^{i\phi}\right)}{f\left(re^{i\phi}\right)} = \dfrac{\partial}{\partial r}\log\left|f\left(re^{i\phi}\right)\right|$

eşitsizliği elde edilir. (4) eşitsizliğinin her iki tarafı r iler çarpılırsa

(5) $\quad r\dfrac{e^{i\phi} f'\left(re^{i\phi}\right)}{f\left(re^{i\phi}\right)} = r\dfrac{\partial}{\partial r}\log\left|f\left(re^{i\phi}\right)\right|$

eşitsizliğini elde ederiz ve buradan da

$$(6) \qquad \mathrm{Re}\left(re^{i\phi} \frac{f'\left(re^{i\phi}\right)}{f\left(re^{i\phi}\right)} \right) = \mathrm{Re}\left(r \frac{\partial}{\partial r} \log\left| f\left(re^{i\phi}\right) \right| \right)$$

elde edilir. (6) eşitsizliğinin sağ tarafı hep reel olduğundan $re^{i\phi} = z$ alınarak

$$\mathrm{Re}\left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) = r \frac{\partial}{\partial r} \log\left| f\left(re^{i\phi}\right) \right|$$

ya da

$$\mathrm{Re}\left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) = r \frac{\partial}{\partial r} \log\left| f(z) \right|$$

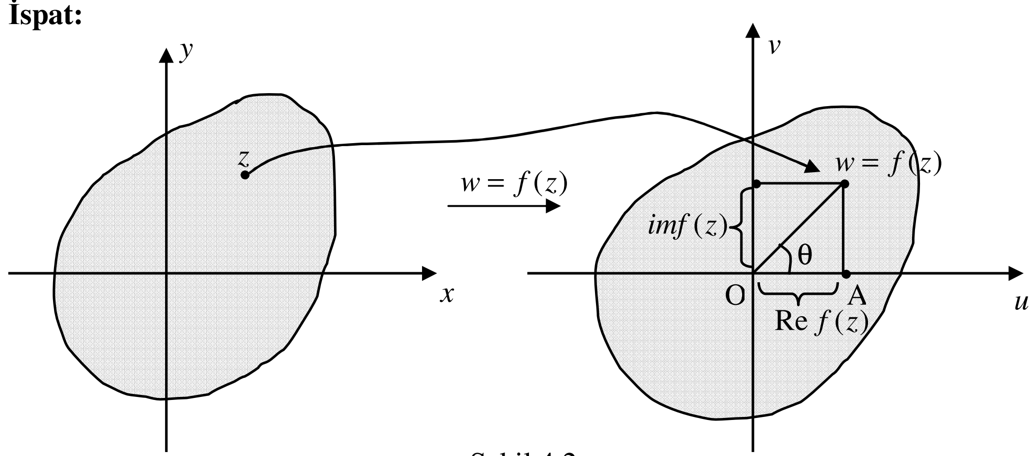
şeklinde yazılabilir.

Teorem 4.3. $w = f(z)$ fonksiyonu $E = \left\{ x + iy \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}$ de tanımlanmış $f(0) = 0$ ve E de sıfırdan farklı her z için $f(z) \neq 0$ ve $f'(z) \neq 0$ koşullarını gerçeklesin. Bu taktirde

$$\frac{\mathrm{Re}\left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right)}{\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} \right|} = \cos\left[Arg\left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \right]$$

eşitsizliği vardır.

İspat:



Şekil 4.2

Şekilde görüldüğü gibi z noktası $w = f(z)$ fonksiyonu ile $w = f(z)$ noktasına resmedilir. Dolayısıyla

$$(1) \qquad \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}\, f(z)}{\left| f(z) \right|}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (1) eşitsizliğinden

(2) $\quad \theta = Arc\cos\left(\frac{\operatorname{Re} f(z)}{|f(z)|}\right)$

eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca θ açısının $w = f(z)$ noktasının primitif argümanı olduğundan (1) yazılışı aynı zamanda

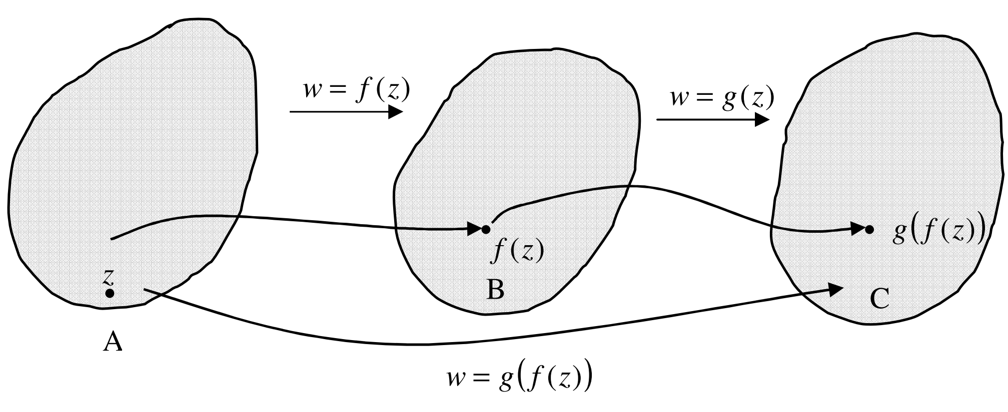
(3) $\quad \cos(Argf(z)) = \frac{\operatorname{Re} f(z)}{|f(z)|}$

şeklinde de yazılabilir. Yukarıdaki $w = f(z)$ noktası için yapılanlar $z\frac{f'(z)}{f(z)}$ içinde yapılırsa

$$\cos\phi = \cos\left[Arg\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\right] = \frac{\operatorname{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)}{\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.4. $g(z)$ fonksiyonu $D = \{z \| z| < 1\}$ tanımlanmış analitik ve injektif olsun. $f(z) = \frac{a+b}{2}z + \frac{a-b}{2}\bar{z}$ şeklinde tanımlansın. Bu taktirde $g(f(z))$ fonksiyonu birim diskte injektiftir.



Şekil 4.3

İspat: $w = f(z)$ injektif olduğundan

(1) $\quad z_1 = z_2 \Rightarrow f(z_1) = f(z_2) \qquad$ (A da injektif)

$w=g(z)$ injektif olduğundan

(2) $\quad f(z_1)=f(z_2)\Rightarrow g\big(f(z_1)\big)=g\big(f(z_2)\big)$ $\quad$ (B de injektif)

eşitlikleri yazılabilir. (1) ve (2) eşitliklerinden

$z_1=z_2\Rightarrow f(z_1)=f(z_2)\Rightarrow g\big(f(z_1)\big)=g\big(f(z_2)\big)$

sonucu bulunur ki bu da $g\big(f(z)\big)$ fonksiyonunun injektif olduğunu gösterir. Biz $w=f(z)$ fonksiyonunun injektif olduğunu göstermiştik. $g(z)$ fonksiyonu da injektif olduğundan $g\big(f(z)\big)$ fonksiyonu da injektif olur.

Lemma 4.2. $w=f(z)=\dfrac{a+b}{2}re^{i\theta}+\dfrac{a-b}{2}re^{-i\theta}$ şeklinde ifade edilen fonksiyon $|z|=r<1$ birim diskini $\dfrac{u^2}{a^2}+\dfrac{v^2}{b^2}<1$ bölgesi üzerine resmeder.

İspat: $f(z)=\dfrac{a+b}{2}re^{i\theta}+\dfrac{a-b}{2}re^{-i\theta}$

$$=\frac{a+b}{2}r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{a-b}{2}r(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)r\cos\theta+ir\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)\sin\theta$$

$$=ar\cos\theta+ibr\sin\theta$$

şeklinde yazalım. Buradan

$$u=u(r,\theta)=ar\cos\theta\Rightarrow\frac{u}{a}=r\cos\theta\Rightarrow\frac{u^2}{a^2}=r^2\cos^2\theta$$

$$v=v(r,\theta)=br\sin\theta\Rightarrow\frac{v}{b}=r\sin\theta\Rightarrow\frac{v^2}{b^2}=r^2\sin^2\theta$$

ve böylece

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2<1$$

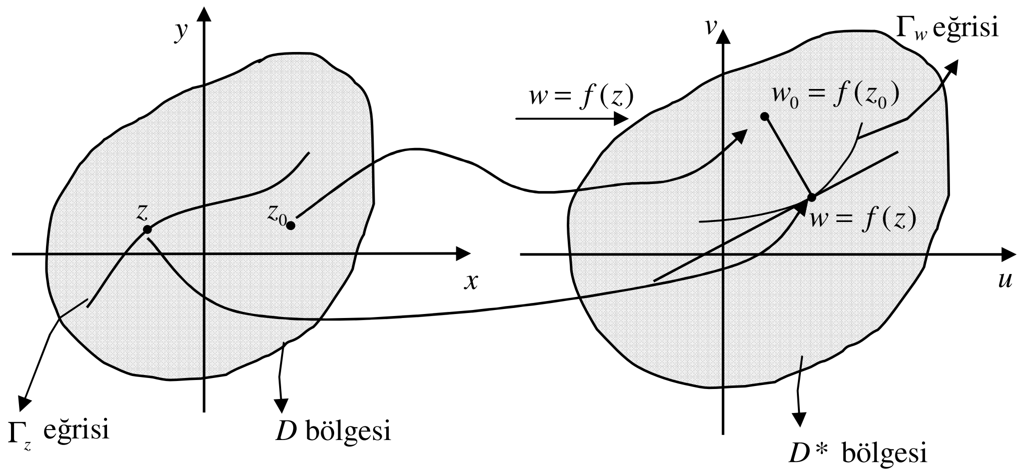
elde edilir. bu bize $w=f(z)=\dfrac{a+b}{2}re^{i\theta}+\dfrac{a-b}{2}re^{-i\theta}$ fonksiyonunun $|z|=r<1$ bölgesini $\dfrac{u^2}{a^2}+\dfrac{v^2}{b^2}<1$ bölgesi üzerine resmettiğini gösterir.

Teorem 4.5. $w=f(z)$ fonksiyonu Γ_z eğrisi üzerinde tanımlanmış, analitik ve Γ_z eğrisinin $w=f(z)$ fonksiyonu altındaki resmi Γ_w olsun. w_0 noktası Γ_w resim eğrisi üzerinde olmayan bir nokta olmak üzere Γ_w eğrisinin w_0 noktasına göre yıldızıl olması için

$$im\left[\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}\,z'(t)\right]\geq 0 \qquad a\leq t\leq b$$

eşitsizliğinin gerçeklenmesi gerekir.

İspat:



Şekil 4.4

Γ_z nin kendi kendini kesmeyen bir eğri olduğunu düşünüyoruz. Dolayısıyla

(1) $\quad z(t)=x(t)+iy(t) \quad a\leq t\leq b$

şeklinde ifade edilebilir. Aynı zamanda Γ_z eğrisinin yönlendirilmiş bir eğri olduğunu da not edebiliriz. Dolayısıyla bir resim eğrisinin bir w_0 noktasına göre yıldızıl olma tanımı “$w_0 = f(z_0)$ noktası Γ_w resim eğrisinin üzerinde azalan olmayan bir nokta olmak üzere

(2) $\quad Arg(w-w_0)=Arg[f(z)-f(z_0)]$

ifadesi t nin $[a,b]$ aralığındaki değerleri için t nin azalmayan bir fonksiyonu olması halinde Γ_w resim eğrisi yıldızıldır. ” denir. Bu tanım aynı zamanda

(3) $\quad \frac{d}{dt}\left(Arg(w-w_0)\right)=\frac{d}{dt}\left(Arg[f(z)-f(z_0)]\right)\geq 0 \quad a\leq t\leq b$

şeklinde ifade edilebilir. Aynı zamanda z kompleks sayısının

$z=|z|e^{i\phi}\Rightarrow \log z=\log|z|+i\phi$

yazılışından dolayı

(4) $\quad Argz=im(\log z)$

şeklinde yazılabilir. (4) eşitliğini (2) eşitliğinde kullanırsak

(5) $\quad Arg(w-w_0) = Arg[f(z)-f(z_0)] = im[\log(f(z)-f(z_0))]$

eşitliği elde edilir. (3) eşitliğindeki türevler (6) eşitliğine uygulanırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(Arg(w-w_0)) &= \frac{d}{dt}(Arg(f(z)-f(z_0))) \\ &= \frac{d}{dt}[im(\log(f(z)-f(z_0)))] \\ &= im\left[\frac{d}{dt}(\log(f(z)-f(z_0)))\right] \\ &= im\left[\frac{f'(z)}{f(z)-f(z_0)}z'(t)\right] \geq 0 \qquad (a \leq t \leq b)\end{aligned}$$

bulunur ki bu da iddianın ispatıdır. Şimdi eğrinin çember olması durumunda ifadenin alacağı şekli inceleyelim.

(6) $\quad |z| = r \Rightarrow z = re^{it} \Rightarrow z'(t) = ire^{it} = iz$

yazabiliriz. Buradan da

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(Arg(w-w_0)) &= im\left[\frac{f'(z)}{f(z)-f(z_0)}z'(t)\right] \\ &= im\left[\frac{f'(z)}{f(z)-f(z_0)}iz\right] \\ &= \mathrm{Re}\left[z\frac{f'(z)}{f(z)-f(z_0)}\right] \geq 0\end{aligned}$$

şekline girer. $w_0 = f(z_0) = 0$ olarak alınırsa başlangıç noktasına karşı gelen yıldızıllık çember durumunda

(7) $\quad \mathrm{Re}\left[z\frac{f'(z)}{f(z)}\right] \geq 0$

şeklinde ifade edilir.

Lemma 4.3. $w = f(z)$ fonksiyonu $E = \left\{x+iy \,\middle|\, \frac{x^2}{(1+\alpha)^2} + \frac{y^2}{(1-\alpha)^2} < 1\right\}$ de tanımlanmış analitik olsun. $f(0) = 0$ ve $\forall z \in (E-\{0\})$ için $f(z) \neq 0$ ve $f'(z) \neq 0$ koşullarını gerçeklesin. Bu taktirde $w = f(z)$ fonksiyonu E de yıldızıl ise

$$\mathrm{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} - \alpha\bar{z}\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geq 0$$

eşitsizliğini gerçekler.

Bir daha önce $w = f(z)$ fonksiyonunun aynı koşulları gerçeklemesi halinde yıldızıllık koşununun

(1) $$im\left(z'(\theta)\frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq 0$$

olduğunu göstermiştik ve göstermiştik ki

(2) $$z(\theta) = re^{i\theta} + \alpha re^{-i\theta}$$

fonksiyonu birim çemberi bir elips üzerine resmeder. Dolayısıyla

(3) $$z'(\theta) = ire^{i\theta} - i\alpha re^{-i\theta} = i\left(re^{i\theta} - \alpha re^{-i\theta}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla (3) eşitliği (1) de yerine konursa

$$\begin{aligned} 0 \leq im\left(z'(\theta)\frac{f'(z)}{f(z)} \right) &= im\left(i\left(re^{i\theta} - \alpha re^{-i\theta}\right)\frac{f'(z)}{f(z)} \right) \\ &= im\left(i\left(re^{i\theta}\frac{f'(z)}{f(z)} \right) - i\left(\alpha re^{-i\theta}\frac{f'(z)}{f(z)} \right) \right) \\ &= im\left(i\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} - \alpha \bar{z}\frac{f'(z)}{f(z)} \right) \right) \\ &= \operatorname{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} - \alpha \bar{z}\frac{f'(z)}{f(z)} \right) \end{aligned}$$

ve buradan da

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} - \alpha \bar{z}\frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq 0$$

bulunur ki bu da iddianın doğruluğunu gösterir.

Lemma 4.4. $w = f(z)$ fonksiyonu $E = \left\{ x + iy \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1,\ a > b > 0 \right\}$ de tanımlanmış ve analitik olsun. $\forall z \in \left(E - \{0\}\right)$ için $f(z) \neq 0$ ve $f'(z) \neq 0$ koşullarını gerçeklesin. Bu taktirde $w = f(z)$ nin yıldızıl olma koşulunu bulunuz.

Daha önce $f(z)$ nin yıldızıllık koşulunun

(1) $$im\left(z'(\theta)\frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq 0$$

olduğunu bulmuştuk. Ayrıca

(2) $$z(\theta) = \frac{a+b}{2}re^{i\theta} + \frac{a-b}{2}re^{-i\theta}$$

fonksiyonunun $|z| = r < 1$ bölgesini $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} < 1$ elipsel bölge üzerine resmettiğini gösterdik. Dolayısıyla

(3) $\quad z'(\theta) = i\frac{a+b}{2} re^{i\theta} - i\frac{a-b}{2} re^{-i\theta}$

bulunur. (3) eşitliği (1) de kullanılırsa

$$0 \le im\left(z'(\theta)\frac{f'(z)}{f(z)} \right) = im\left[i\left(\frac{a+b}{2} re^{i\theta} - \frac{a-b}{2} re^{-i\theta} \right)\frac{f'(z)}{f(z)} \right]$$

$$= im\left[i\left(\frac{a+b}{2} re^{i\theta}\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{a-b}{2} re^{-i\theta}\frac{f'(z)}{f(z)} \right) \right]$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{a+b}{2} z\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{a-b}{2} \bar{z}\frac{f'(z)}{f(z)} \right)$$

olduğundan

(4) $\quad \mathrm{Re}\left(\frac{a+b}{2} z\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{a-b}{2} \bar{z}\frac{f'(z)}{f(z)} \right) \ge 0$

sonucu çıkar. (4) eşitsizliği aynı zamanda

$$\frac{a+b}{2}\mathrm{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} \right) - \frac{a-b}{2}\mathrm{Re}\left(\bar{z}\frac{f'(z)}{f(z)} \right) \ge 0$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Lemma 4.5. $w = f(z)$ fonksiyonu $E = \left\{ x+iy \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1,\ a > b > 0 \right\}$ de tanımlanmış analitik, $f(0) = 0$ ve $\forall z \in (E - \{0\})$ için $f(z) \ne 0$ ve $f'(z) \ne 0$ koşullarını gerçeklesin. Bu taktirde

$$\frac{a+b}{2}\cos\left(Arg\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} \right) \right) \ge \frac{a-b}{2}\cos\left(Arg\left(\bar{z}\frac{f'(z)}{f(z)} \right) \right)$$

eşitsizliğinin daima gerçeklendiğini gösteriniz.

Biz bundan önce

(1) $\quad \frac{a+b}{2}\mathrm{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} \right) - \frac{a-b}{2}\mathrm{Re}\left(\bar{z}\frac{f'(z)}{f(z)} \right) \ge 0$

olduğunu bulmuştuk. Bu eşitsizlik ise

(2) $\quad \frac{a+b}{2}\mathrm{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} \right) \ge \frac{a-b}{2}\mathrm{Re}\left(\bar{z}\frac{f'(z)}{f(z)} \right)$

şeklinde ifade edilir. Öte yandan

$$\left|\bar{z}\frac{f'(z)}{f(z)}\right| = |\bar{z}|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| = |z|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| = \left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|$$

olduğundan

(3) $$\left|\bar{z}\frac{f'(z)}{f(z)}\right| = \left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|$$

eşitliğini elde ederiz. (2) ve (3) denklemlerinden

(4) $$\frac{a+b}{2}\frac{\mathrm{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)}{\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|} \geq \frac{a-b}{2}\frac{\mathrm{Re}\left(\bar{z}\frac{f'(z)}{f(z)}\right)}{\left|\bar{z}\frac{f'(z)}{f(z)}\right|}$$

eşitsizliği bulunur ki (4) eşitsizliği aynı zamanda

$$\frac{a+b}{2}\cos\left(Arg\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\right) \geq \frac{a-b}{2}\cos\left(Arg\left(\bar{z}\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\right)$$

şeklinde de gösterilebilir. Bu da istenen ispattır.

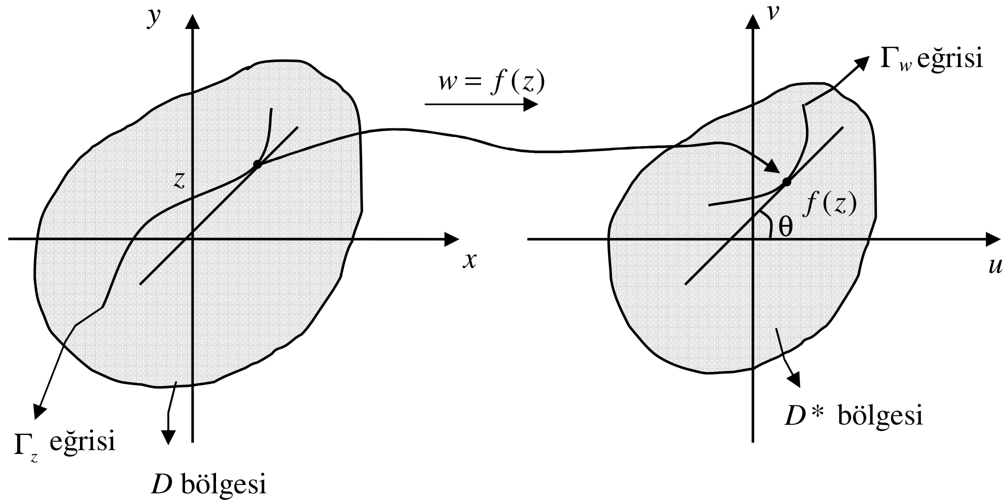
Teorem 4.6. Γ_z $z-$düzleminde kendi kendini kesmeyen yönlendirilmiş bir eğri olmak üzere $w = f(z)$ fonksiyonu da Γ_z eğrisi üzerinde tanımlanmış ve analitik olsun. Γ_z eğrisinin $w = f(z)$ fonksiyonu altındaki resmi Γ_w olsun. "$a \leq t \leq b$ olmak üzere Γ_w resim eğrisinin bir $w = f(z)$ noktasındaki teğetinin argümanı t nin azalmayan bir fonksiyonu ise Γ_w resim eğrisi konveks bir eğridir denir." Tanımından yararlanarak Γ_w resim eğrisinin konveks olma koşulunun aynı zamanda

(1) $$im\left(\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(z)}{f'(z)}z'(t)\right) \geq 0 \qquad a \leq t \leq b$$

ya da

(2) $$im\left[i\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right] = \mathrm{Re}\left(\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right) \geq 0$$

olduğunu gösteriniz.



Şekil 4.5

Konveks olmanın yukarıdaki tanımı kullanılacak olursa $\theta(t)$ fonksiyonu için $a \le t \le b$ için t nin azalmayan bir fonksiyonudur. Yani

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\big(\theta(t)\big) \ge 0$$

eşitsizliği gerçeklenir. Diğer taraftan Γ_z eğrisi

$$(4) \qquad z = z(t) = x(t) + iy(t) \qquad a \le t \le b$$

şeklinde parametrelenebilir. Diğer yandan Γ_z yönlendirilmiş eğri olduğundan Γ_z eğrisinin teğetinin doğrultusu

$$(5) \qquad Arg z'(t) = \text{teğetin doğrultusu}$$

şeklinde ifade edilir ve $w = f(z)$ fonksiyonu bu teğet vektörünü

$$(6) \qquad Arg f'(z) = Arg\big(f\big(z(t)\big)\big)' = Arg\big(z'(t) f'\big(z(t)\big)\big)$$

açısı üzerinde döndürür. Dolayısıyla Γ_w eğrisinin konveks olması için

$$(7) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} Arg\big(z'(t) f'\big(z(t)\big)\big) \ge 0 \qquad a \le t \le b$$

ifadesi gerçeklenmelidir. Dolayısıyla (7) ifadesi aynı zamanda

$$(8) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} Arg\big(z'(t) f'\big(z(t)\big)\big) = \frac{d}{dt}\big(Arg z'(t) + Arg f'\big(z(t)\big)\big) \ge 0$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan herhangi bir nokta için

$$(9) \qquad f(z) = |f(z)| e^{i\phi} \qquad \big(Arg f(z) \ne 0\big)$$

şeklindeki yazılış göz önüne alınırsa

$$\log f(z) = \log|f(z)|e^{i\phi}$$
$$= \log|f(z)| + \log e^{i\phi}$$
$$= \log|f(z)| + i\phi$$

(10) $\log f(z) = \log|f(z)| + iArgf(z)$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla (10) eşitliğinden

(11) $Argf(z) = im(\log f(z))$

eşitliği yazılabilir. Bu yazılıştan dolayı (8) yazılışı

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d}{dt} Arg(z'(t)f'(z)) = \dfrac{d}{dt}\left(Argz'(t) + Argf'(z(t))\right) \\ \quad = \dfrac{d}{dt}\left[im(\log z'(t)) + im(\log f'(z))\right] \\ \quad = \dfrac{d}{dt}\left[im(\log z'(t) + \log f'(z))\right] \\ \quad = im\left[\dfrac{d}{dt}(\log z'(t) + \log f'(z))\right] \\ \quad = im\left[\dfrac{z''(t)}{z'(t)} + \dfrac{f''(z)z'(t)}{f'(z)}\right] \geq 0 \end{cases}$$

eşitsizliğini elde ederiz ki bu da lemmada sözü geçen ilk eşitsizliktir. Eğer Γ_z eğrisi C_R çemberi ise

$$(13)\quad \begin{cases} |z| = R \Rightarrow z = \mathrm{Re}^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \Rightarrow z'(t) = i\,\mathrm{Re}^{it} = iz \\ z'' = i^2\,\mathrm{Re}^{it} = -\mathrm{Re}^{it} = -z \end{cases}$$

eşitlikleri yazılır. (13) eşitlikleri (12) eşitliklerinde kullanılırsa

$$0 \leq im\left[\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(z)}{f'(z)}z'(t)\right] = im\left[\frac{-z}{iz} + iz\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]$$
$$= im\left[\frac{-1}{i} + iz\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]$$
$$= im\left[i + iz\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]$$
$$= im\left[i\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right]$$

(14) $im\left[i\left(1 + z\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right] \geq 0$

eşitsizliğini elde ederiz. Diğer yandan z bir kompleks sayı olmak üzere

(15) $\quad im(iz) = im[i(x+iy)] = im(ix-y) = x = \operatorname{Re} z$

olduğu göz önüne alınırsa (14) eşitsizliği

$$im\left[i\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right] = \operatorname{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geq 0$$

şeklinde yazılır ki bu da lemmada sözü geçen ikinci eşitsizliktir.

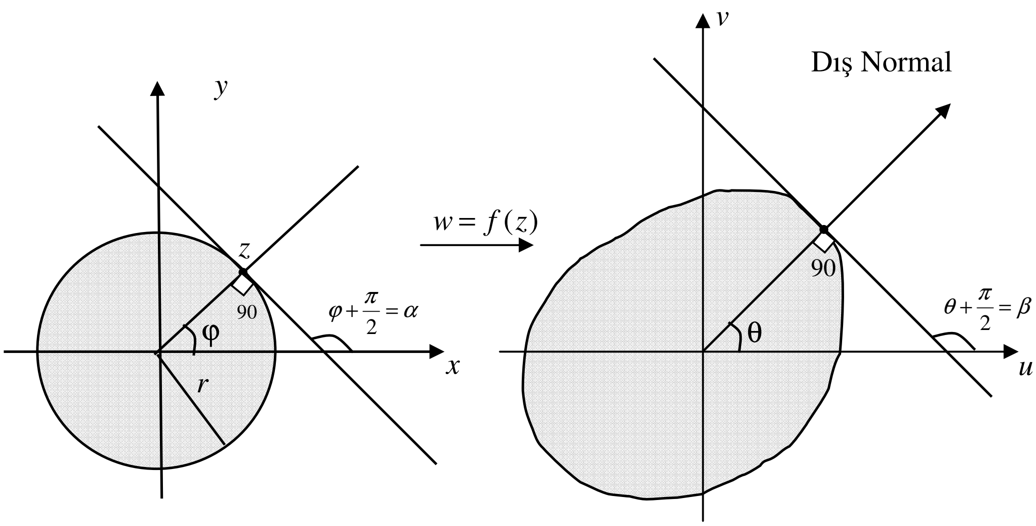
Teorem 4.7. $w = f(z)$ fonksiyonu $|z| = r$ çemberi üzerinde ve çemberin sınırladığı $|z| < r$ bölgesinde tanımlanmış analitik ve yalınkat olsun. Eğer $|z| = r$ çemberinin $w = f(z)$ fonksiyonu ile yapılan tasvirde elde edilen eğri $\Gamma = f(|z| = r)$ ise bu durumda

(i) Teğetin $x-$ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının $(izf'(z))$

(ii) Yukarıdaki şıkta teğete çizilen dış normalin $(-izf'(z))$

ifadeleri ile verilebilir.

İspat:



Şekil 4.6

Yarıçap teğete değme noktasında diktir ve bir üçgende bir dış açı kendisine komşu olmayan iki iç açının toplamına eşittir gerçeklerinden hareket ederek

(1) $\quad \alpha = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$

(2) $\quad \beta = \theta + \dfrac{\pi}{2}$ (Dış normalden dolayı)

yazabiliriz. Diğer yandan teğetin değme noktasındaki eğimi

(3) $m = f'(z)$

şeklinde ifade elde edilir. Bu ise aynı zamanda

$w = f(z) \Rightarrow dw = f'(z)dz \Rightarrow Argdw = Argf'(z) + Argdz$

ifadesinden faydalanarak

(4) $Argdw = Argf'(z) + Argdz$

eşitliği yazılabilir. (1), (2) ve (4) eşitliklerinden

(5) $Argdw = \beta = \theta + \dfrac{\pi}{2}$

(6) $Argdz = \alpha = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$

ifadelerini yazabiliriz. Diğer yandan

(7) $Argz = \varphi$

(8) $\dfrac{\pi}{2} = Argi$

olduklarını da (4) ve (6) bağıntılarında kullanırsak

(9) $Argdw = Argz + Argi + Argf'(z)$

eşitliği bulunur. (9) eşitliği aynı zamanda

(10) $Argdw = Argizf'(z)$

şeklinde de yazılabilir. (10) eşitliğinden

(11) $dw = izf'(z)$

eşitliği elde edilir. (11) ifadesi bize teğetin ($izf'(z)$) vektörü ile verildiğini gösterir. Öte yandan teğet ve normal birbirlerine dik olduklarından m_1 normalin eğimi olduğundan

$m_1 m = f'(z)m_1 = -1$

olur ki buradan da

(12) $m_1 = -\dfrac{1}{f'(z)}$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan

$w = f(z) \Rightarrow dw = f'(z)dz$

ifadesinden

(13) $\dfrac{1}{dw} = -\dfrac{1}{f'(z)dz}$

eşitliği bulunur. (13) eşitliğinden

$$Arg\left(\frac{1}{dw}\right) = -Arg\left(\frac{1}{f'(z)dz}\right)$$

yazılabilir ve buradan da

(14) $\quad Arg1 - Argdw = -[Arg1 - Argf'(z) - Argdz]$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$Arg1 = 0$$

olduğunu da (14) eşitliğinde kullanırsak

$$-Argdw = Argf'(z) + Argdz$$

eşitliği elde edilir ki biz bu eşitliği de

(16) $\quad -Argdw = Argf'(z)dz \Rightarrow dw = -izf'(z)$

eşitliği elde edilir ki bu da problemin çözümüdür.

Teorem 4.8. $w = f(z)$ fonksiyonu $|z| = r$ çemberi üzerinde ve onun kapattığı $|z| < r$ dairesel bölgesinde tanımlanmış analitik ve yalınkat olsun. $|z| = r$ çemberinin $w = f(z)$ fonksiyonu altındaki resmi $\Gamma = f(|z| = r)$ olsun. Γ eğrisinin eğriliği

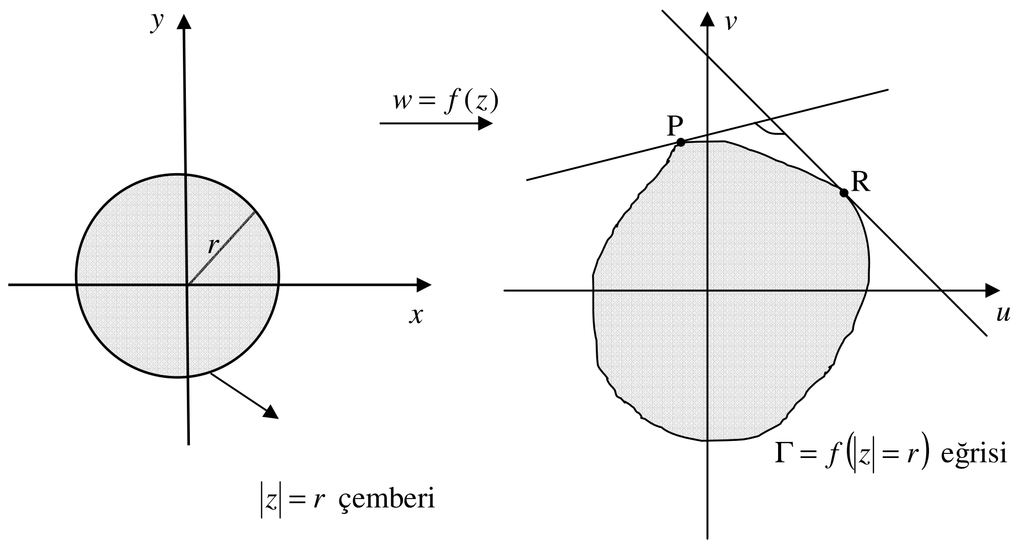
$$\rho = \frac{\operatorname{Re}\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)}{|zf'(z)|}$$

dir.

İspat: Bir eğrinin eğrilik tanımı

(1) Eğrilik = ρ $= \dfrac{\text{Teğet açısının } \varphi \text{ ye göre türevi}}{\text{Görüntü eğrisinin } \varphi \text{ ye göre türevi}}$

şeklindedir.



Şekil 4.7

Diğer taraftan $w-$düzlemindeki bir kompleks sayının kutupsal koordinatlardaki yazılışı göz önüne alınırsa

(2) $\quad f'(z) = |f'(z)| e^{iArgf'(z)}$

şeklindedir. Şimdi z kompleks sayısının kutupsal koordinatlardaki yazılışını kullanırsak (2) bağıntısı

(3) $\quad f'\left(re^{i\varphi}\right) = \left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right| e^{iArgf'(re^{i\varphi})}$

eşitliği yazılabilir. (3) ifadesinden hareketle

$$\log f'\left(re^{i\varphi}\right) = \log\left(\left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right| e^{iArgf'(re^{i\varphi})}\right)$$

$$= \log\left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right| + \log e^{iArgf'(re^{i\varphi})}$$

$$= \log\left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right| + iArgf'\left(re^{i\varphi}\right)$$

düzenleyip yazarsak

(4) $\quad \log f'\left(re^{i\varphi}\right) = \log\left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right| + iArgf'\left(re^{i\varphi}\right)$

eşitliği elde edilir. (4) ifadesinin her iki tarafının sanal kısımları düşünülürse

(5) $\quad im\left(\log f'(re^{i\varphi})\right) = Argf'(re^{i\varphi})$

eşitliği elde edilir. (5) eşitliğinin φ ye göre türevi alınırsa

(6) $\quad \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(im\left(\log f'(re^{i\varphi})\right)\right) = \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(Argf'(re^{i\varphi})\right)$

elde edilir. (6) eşitliğinin her iki tarafına 1 eklersek

$$(7)\qquad 1+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(im\left(\log f'(re^{i\varphi})\right)\right)=1+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(Argf'(re^{i\varphi})\right)$$

bulunur. Diğer taraftan bundan önceki problemde bulunan teğet açısının φ ye göre türevi

$$(8)\qquad \theta=\theta(\varphi)=\varphi+Argf'(z)+\frac{\pi}{2}=Arg\left(izf'(z)\right)$$

ifadesinden türev alınırsa

$$(9)\qquad \theta'(\varphi)=1+\frac{\partial}{\partial\varphi}Argf'(re^{i\varphi})$$

bulunur. (7) ve (9) ifadelerinin karşılaştırılmasıyla

$$(10)\qquad \theta'(\varphi)=1+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(im\left(\log\ f'(re^{i\varphi})\right)\right)=1+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(Argf\ '(re^{i\varphi})\right)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi

$$\log f'\left(re^{i\varphi}\right)=\log\left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right|+iArgf'\left(re^{i\varphi}\right)$$

ifadesinin φ ye göre türevini alırsak

$$(11)\qquad ire^{i\varphi}\frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right|\right)+i\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(Argf'\left(re^{i\varphi}\right)\right)$$

eşitliğini elde ederiz. (11) eşitliğinin her iki tarafının i ile bölünmesi ile

$$re^{i\varphi}\frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})}=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right|\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(Argf'\left(re^{i\varphi}\right)\right)$$

eşitliği ya da

$$re^{i\varphi}\frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})}=\frac{i}{i^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right|\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(Argf'\left(re^{i\varphi}\right)\right)$$

başka bir deyişle de

$$(12)\qquad re^{i\varphi}\frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})}=-i\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right|\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(Argf'\left(re^{i\varphi}\right)\right)$$

eşitliğini elde ederiz. (12) eşitliğinin her iki tarafına 1 eklenerek

$$(13)\qquad 1+re^{i\varphi}\frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})}=-i\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right|\right)+1+\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(Argf'\left(re^{i\varphi}\right)\right)\right)$$

eşitliğini elde ederiz. (10) ve (13) eşitliklerinden

$$(14)\qquad \mathrm{Re}\left(1+re^{i\varphi}\frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})}\right)=\left(1+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(Argf'\left(re^{i\varphi}\right)\right)\right)$$

eşitliği elde edilir. (14) ve (10) eşitliklerinin karşılaştırılmasıyla

$$(15)\qquad \begin{cases} \theta'(\varphi) = \operatorname{Re}\left(1 + re^{i\varphi}\dfrac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})}\right) = \left(1 + \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(Argf'\left(re^{i\varphi}\right)\right)\right) \\ \qquad = 1 + \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(im\left(\log f'\left(re^{i\varphi}\right)\right)\right) \end{cases}$$

eşitliği elde edilir. Demek ki teğet açısının φ ye göre türevi (15) eşitliğinden görüldüğü gibi

$$(16)\qquad \theta'(\varphi) = \operatorname{Re}\left(1 + re^{i\varphi}\frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})}\right)$$

eşitliği ile verilir. Buradan görüntü eğrisinin φ ye göre türevinin uzunluğunu bulmak kalıyor. Bu ise

$$w = f(z) \Rightarrow w = f\left(re^{i\varphi}\right) \Rightarrow dw = ire^{i\varphi} f'\left(re^{i\varphi}\right)$$

$$|dw| = \left|ire^{i\varphi} f'\left(re^{i\varphi}\right)\right| = |i|\left|re^{i\varphi} f'\left(re^{i\varphi}\right)\right|$$

$$|dw| = \left|re^{i\varphi} f'\left(re^{i\varphi}\right)\right|$$

ya da

$$(17)\qquad |dw| = |zf'(z)|$$

eşitliği ile verilir. Eğrilik tanımında (16) ve (17) ifadeleri kullanılırsa

$$\rho = \frac{\operatorname{Re}\left(1 + z\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\right)}{|zf'(z)|}$$

eşitliği elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] **Ahlfors, L.**, Complex Anallysis**,** 1965, International Student Edition in Pure and Applied Mathematics, McGraw Hill, USA.

[2] **Bernardi, S.D.**, Bibliography of Schlicht Functions, Mariner Pub. Comp. Inc, Florida.

[3] **Bajpai, S.K. and Mehrok, J.S.**, 1973. On the coefficient structure and growth theorem for the functions $f(z)$ for which $zf'(z)$ is λ-spirallike, *Publ. Inst. Math. N.S.*, **16** (30), 5-12.

[4] **Chichra, P.N.**, 1975. Regular functions for which $zf'(z)$ is λ-spirallike, *Proc, Amer. Math. Soc.*, **49**, 151-160.

[5] **Duren, P.L.**, 1983. Univalent Function, Springer-Verlag, New York.

[6] **Goodman, A.W.**, 1983. Univalent functions Volume I and Volume II, Mariner Publishing Comp., Florida.

[7] **Goodman, A.W.**, 1972. Coefficients for the area theorem, *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, **33**, 438-444.

[8] **Hayman, W.K.**, 1994. Multivalent Functions, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[9] **Jack, I.S.**, 1971. Functions starlike and convex of order α, *J. London Math. Soc.*, **3** (2), 469-474.

[10] **Kulshrestha, P.K.**, 1976. Bounded Robertson Functions, *Rend. Math.*, **9** (6), 137-150.

[11] **Libera, R.J. and Ziegler, M.R.**, 1972. Regular functions $f(z)$ for which $zf'(z)$ is α-spiral, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **166**, 361-370.

[12] **Miller, S.S.**, 1973. Distortion Properties of Alpha-Starlike Functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (38), 311-318.

[13] **Nasr, M.A. and Auof, M.K.**, 1973. *Starlike Function of Complex Order, Journal Natural Scien. and Math.*, **1** (25), 1-12.

[14] **Z. Nahari**, 1958, Conformal of Mapping, Dover Publication, New York.

[15] **Polatoğlu, Y., Bolcal, M., and Şen, A.**, 2002. Koebe domain of starlike functions of complex order with Montel Normalization, *Glasnik Matematicki*, **37** (57), 89-92.

[16] **Polatoğlu, Y.**, 1995. The Radius Problem for Convex Functions of Complex Order, *Turk. Jour. of Math.*, **3** (19), 283-289.

[17] **Polatoğlu, Y., Bolcal, M., Şen, A.**, 2002. Koebe Domain of Starlike Functions of Complex Order with Montel Normalizations, *Glasnic Math.*, 37 (57), 89-92.

[18] **Pommerenke,** 1975. Univalent Functions, Vanlenhoeck&Ruprecht, Götingen.

[19] **Robertson, M.S.**, 1936. On the theory of univalent functions, *Ann. of Math.*, **37**, 374-408.

[20] **Robertson, M.S.**, 1969. Univalent functions $f(z)$ for which $z.f'(z)$ is λ-spirallike, *Michigan Math. J.*, **16**, 97-101.

[21] **Wiatrowski, P.**, 1971. The coefficients of certain family of holomorphic functions, *Zeszyty Nauk. Univ. Todzk. Nauki Math. Przyrod. Ser. II, Zeszyt Math*, **39**, 75-85.

SONUÇ

Elipste yalınkat fonksiyonlar bölümünde en önemli olan nokta, tanım kümesinin birim çember yerine bir elips olarak alınmasıdır. Bunun üzerine çalışmalar yapılmıştır. Bundan önceki bölümlerde ise eliptik fonksiyonların kompleks olan başka periyotlara da sahip bulundukları için eliptik fonksiyonlara bazen çift periyotlu fonksiyonlar da denir gerçeği altında çift periyotlu fonksiyonlar ve özellikleri ve bunlarla bağlantılı olarak ta eliptik integral ile eliptik fonksiyonlar kavramı incelenmiş bulunmaktadır.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında İstanbul'da doğdu. 1990 yılında Ömer Seyfettin İlkokulunu, 1997 yılında Bahçelievler Anadolu Lisesini, 2004 yılında da İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. Aynı yıl İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalında Yüksek Lisans Programına kaydoldu. Halen bu bölümde yüksek lisansını sürdürmektedir.