İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MOCANU-JANOWSKI TİPİNDE α-KONVEKS FONKSİYONLAR SINIFININ İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emel YAVUZ

Anabilim Dalı: Matematik-Bilgisayar

Programı: Matematik-Bilgisayar

ŞUBAT 2006

ÖNSÖZ

Bana gerçek bir bilim insanının nasıl olması gerektiğini çalışkanlığı, özveriliği ve baba sevgisiyle gösteren Sayın Yaşar POLATOĞLU'na, manevi desteğini her zaman hissettiğim ve takım olmanın güzelliğini paylaştığım güler yüzlü hocam Sayın Arzu ŞEN'e, Lisansüstü ders aşamasında yoğun ders programına rağmen bilgilerini bizimle paylaşan, emek veren pozitif insan Sayın Adnan İLERÇİ'ye, manevi desteğinin yanı sıra tezin son noktasının koyulmasındaki yardımlarından ötürü tanımaktan mutluluk duyduğum Sayın Mert ÇAĞLAR'a ve elbette sonsuz desteklerinden ve güvenlerinden ötürü aileme teşekkürlerimi sunuyorum.

ŞUBAT 2006 Emel YAVUZ

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ **iv**
SEMBOL LİSTESİ **v**
ÖZET **vii**
SUMMARY **viii**

GİRİŞ **1**

1. Subordinasyon Prensibi **2**

2. Pozitif Reel Kısma Haiz Fonksiyonlar **15**

3. Yalınkat Fonksiyonlar **55**

4. Yıldızıl Fonksiyonlar **72**

5. Janowski Yıldızıl Fonksiyonları **78**

6. Konveks Fonksiyonlar **85**

7. $C(A, B)$ Sınıfı ve Özellikleri **95**

8. Tasvir Eğrilerinin Özellikleri **100**

9. α-Konveks Fonksiyonlar **106**

10. Mocanu-Janowski Tipinde α-Konveks Fonksiyonlar **108**

KAYNAKLAR **126**

ÖZGEÇMİŞ **130**

ŞEKİL LİSTESİ

		Sayfa No
Şekil 1.1	Maksimum prensibine geometrik yaklaşım I	2
Şekil 1.2	Maksimum prensibine geometrik yaklaşım II	4
Şekil 1.3	Subordinasyon kavramının geometrik yorumu	8
Şekil 1.4	$w=\dfrac{1+z}{1-z}$ transformasyonunun geometrik yorumu	13
Şekil 1.5	Lindelöf prensibinde subordinasyonun geometrik yorumu	14
Şekil 2.1	$w=\dfrac{1+z}{1-z}$ transformasyonunun geometrik yorumu	16
Şekil 2.2	$w=\dfrac{1+Az}{1+Bz}$ transformasyonunun geometrik yorumu	44
Şekil 3.1	$w=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ transformasyonlarının geometrik yorumu	58
Şekil 3.2	Konform homomorfizmalara geometrik yaklaşım	66
Şekil 3.3	Genel halde bir bölgenin resmi	68
Şekil 4.1	Yıldızıl bölgelerin geometrik yorumu	72
Şekil 4.2	Yıldızıl eğriler	75
Şekil 6.1	Konveks bölgelerin geometrik yorumu	85
Şekil 6.2	Konveks olma koşulunda tasvir eğrilerinin kullanılması	86
Şekil 6.3	$w=1+z$ transformasyonunun geometrik yorumu	91
Şekil 6.4	$w=\log z$ transformasyonunun geometrik yorumu	92
Şekil 6.5	$f(z)=\dfrac{1}{1+z}$ transformasyonunun geometrik yorumu	93
Şekil 8.1	Bölgelerde açıların gösterilmesi	101
Şekil 8.2	Eğrilik	103
Şekil 9.1	α konveks fonksiyonlara geometrik yaklaşım	106

SEMBOL LİSTESİ

α	: $0 \le \alpha < 1$ koşuluna uyan reel sayı
$a < b$	: *a*, *b* den küçüktür
$a > b$	: *a*, *b* den büyüktür
$a = b$	: *a*, *b* ye eşittir
$a \neq b$	: *a*, *b* ye eşit değildir
$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, \ldots$	: Fonksiyonların Taylor açılımındaki katsayılar
$p_1, p_2, \ldots$	: Pozitif reel kısma haiz fonksiyonların Taylor açılımındaki katsayılar
r	: Çemberin yarıçapı
$z, \zeta, z_1, z_2, \ldots$	: Kompleks sayılar
A, B	: $-1 \le B < A \le 1$ koşulunu sağlayan reel sayılar
D	: Birim dairenin iç bölgesi
D_r	: *D* bölgesinin *r* yarıçaplı civarı
$C(r)$	: Analitik Jordan eğrisi
$\operatorname{Im} z$	: *z* kompleks sayısının sanal (imajiner) kısmı
$\operatorname{Re} z$	: *z* kompleks sayısının reel kısmı
$f(D)$	: *D* bölgesinin *f* tasviri altındaki resmi
$f(D) \subset g(D)$	: *D* bölgesinin, *g* tasviri altındaki resim bölgesi, *f* tasviri altındaki resim bölgesini kapsar
$f(z) \prec g(z)$	: *f*(*z*) fonksiyonu *g*(*z*) fonksiyonuna subordinedir
$\|z\|$	: *z* kompleks sayısının modülü
Γ	: $\|z\| = r$ çemberinin $w = f(z)$ fonksiyonu ile yapılan tasvirinde elde edilen eğri
$\varphi(z)$	: Schwarz lemmasının koşullarını sağlayan bir fonksiyon
P	: Pozitif reel kısma haiz fonksiyonlar sınıfı
$P\ (A, B)$	: Genelleştirilmiş pozitif reel kısma haiz fonksiyonlar sınıfı

S	: Yalınkat fonksiyonlar sınıfı
$S^{(m)}$	: m-fold simetri fonksiyonları sınıfı
$S^*(A, B)$	: Janowski yıldızıl fonksiyon sınıfı
$C(-1,1)$	: Konveks fonksiyonlar sınıfı
$C(A,B)$	: Janowski konveks fonksiyonlar sınıfı
$M(\alpha)$	: α-konveks fonksiyonlar sınıfı
$M(\alpha, A, B)$	: Mocanu-Janowski tipinde α-konveks fonksiyonlar

ÖZET

Yalınkat fonksiyonlar 1907 yılında Koebe tarafından tanımlandıktan sonra yalınkat fonksiyonlar üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. 1930'lu yıllarda W. Alexander ve J. Dieudonné konveks fonksiyonlar sınıfını tanımlayarak bu çalışmanın ana yapısını oluşturan bilgileri vermişlerdir. Bu çalışmanın ilk dokuz bölümde yalınkat fonksiyonlar teorisinin temelleri denebilecek önbilgiler verilmiş ve özel yalınkat fonksiyonlar sınıflarının genel özellikleri incelenmiştir. Onuncu bölümde ise 1969 yılında P.T. Mocanu tarafından tanımlanan ve daha sonra P.T. Mocanu, Maxwell O. Read ve S. Miller tarafından geliştirilen α-Konveks fonksiyonlar sınıfı genişletilmiştir. Bu fonksiyon sınıfına "Mocanu-Janowski Tipinde α-Konveks Fonksiyonlar" adı verilmiş ve fonksiyon sınıfına ait, genelleştirilmiş Marx-Strohhacker eşitsizlikleri, gösterilim teoremi, distorsiyon teoremi, konvekslik yarıçapı, katsayı eşitsizlikleri verilmiştir.

SUMMARY

Much has been done on univalent functions since they were defined in 1907 by Koebe. The central axis of this work is the class of convex functions defined by W. Alexander and J. Dieudonné around 1930's. The first nine parts of this work consists of basic knowledge of univalent functions and investigation of properties of special classes of univalent functions. In the tenth part the class of α-convex functions, which was defined by P.T. Mocanu and developed by P.T. Mocanu, Maxwell O. Read and S. Miller, has been generalized. This new class is named as "α-convex functions of Mocanu-Janowski type," and then generalized Marx-Strohhacker inequalities, representation theorem, distortion theorem, radius of convexity and coefficient inequalities for this class are given.

GİRİŞ

Birim çemberde analitik ve yalınkat olan tek kompleks değişkenli fonksiyonlar ilk olarak 1907 yılında Koebe tarafından incelenmiştir. 1930'lu yıllarda W. Alexander ve J. Dieudonné tarafından konveks fonksiyonlar sınıfı tanımlanmıştır. Daha sonra da çeşitli matematikçiler bu sınıfları genelleştirerek çeşitli yalınkat fonksiyon sınıfları ortaya koymuşlardır.

Tek kompleks değişkenli analitik fonksiyonların incelenmesinde temel amaç; ortaya atılan fonksiyon sınıfının Taylor açılımındaki a_n katsayısına ait modülün üst sınırını bulmak, fonksiyon sınıfına ait distorsiyon teoremlerini, yıldızıllık ve konvekslik yarıçaplarını vermek, Schwarzian ve pre-Schwarzian türevlerini bulmak ve Koebe bölgelerini ifade etmektir.

Bu çalışmada Maconu-Janowski tipinde α-konveks fonksiyon sınıfı tanımlanarak bu sınıfa ait

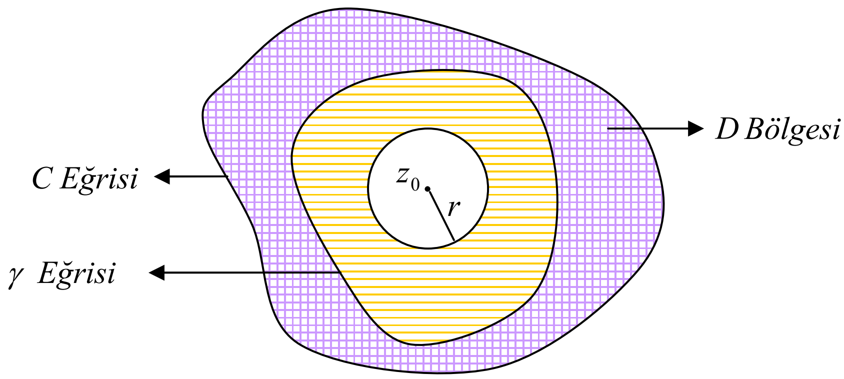
1. Genelleştirilmiş Marx-Strohhacker eşitsizlikleri,
2. Gösterilim teoremi,
3. Distorsiyon teoremleri,
4. Konvekslik yarıçapı,
5. Katsayı eşitsizlikleri

verilmiştir.

1. SUBORDİNASYON PRENSİBİ

TEOREM 1.1: (Maksimum Modül Teoremi) $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı kapalı C eğrisinin kapattığı D bölgesinde tanımlanmış, analitik, sabitten farklı bir fonksiyon olmak üzere $|f(z)|$ ifadesi maksimum değerini D bölgesinin sınırından alır.

İSPAT:



Şekil 1.1

Şekil 1.1'de görüldüğü gibi tamamen D bölgesinin içinde kalan düzgün, kapalı γ eğrisinin bir iç noktası z_0 olsun. z_0 noktasının, γ Jordan eğrisi (basit bağlantılı ve sürekli iki fonksiyon ile ifade edilebilen $x = x(t),\ y = y(t)$ gibi bir eğriye Jordan eğrisi adı verilir) içindeki r yarıçaplı uygun bir civarı bulunabilir. Mademki $f(z)$ fonksiyonu D bölgesinin her yerinde analitik ve tanımlanmıştır Cauchy-integral teoremine göre

(1.1) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

ifadesi yazılabilir. Yukarıda söylenenlerden dolayı (1.1) ifadesindeki γ eğrisi yerini z_0'ın uygun bir civarını sınırlayan $|\zeta - z_0| = r$ çemberini alabiliriz. Dolayısıyla (1.1) eşitliğinden

(1.2) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

ifadesi yazılabilir.

(1.3) $$|\zeta - z_0| = r \Rightarrow \zeta - z_0 = re^{i\theta} \Rightarrow \zeta = z_0 + re^{i\theta} \Rightarrow d\zeta = ire^{i\theta} d\theta .$$

(1.3) eşitlikleri (1.2) de kullanılırsa

(1.4) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

eşitliği elde edilir ki bu da Gauss ortalama değer teoremidir. (1.4) ifadesi bize merkezdeki fonksiyon değerlerinin, çevre değerlerinin aritmetik ortalaması olduğunu söyler.

1. Çalışma Hipotezi: $|f(z)|$ ifadesi maksimum değerini bir iç nokta olan z_0 da alsın. Bu durumda

$$\begin{cases} |f(z_0)| \geq |f(z_0 + re^{i\theta})| \Rightarrow |f(z_0)| - |f(z_0 + re^{i\theta})| \geq 0 \Rightarrow \\ \int_0^{2\pi} \left[|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{i\theta})| \right] d\theta \geq 0 \end{cases}$$

ifadesi geçerli olacaktır. Yani pozitif bir fonksiyonun belli aralıklar içindeki integrali de pozitiftir. Son ifadeden hareketle

$$0 \leq \int_0^{2\pi} \left[|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{i\theta})| \right] d\theta = \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta - \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \Rightarrow$$

$$0 \leq |f(z_0)| \theta \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta = 2\pi |f(z_0)| - \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \Rightarrow$$

(1.5) $$|f(z_0)| \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan (1.4) ifadesinden modül alınacak olursa

(1.6) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \Rightarrow |f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \right|$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca eğrisel integralin özelliklerinden

$$\left|\int_C f(z(t))dt\right| \le \int_C |f(z(t))|\,dt$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu ifadeyi (1.6)'da kullanırsak

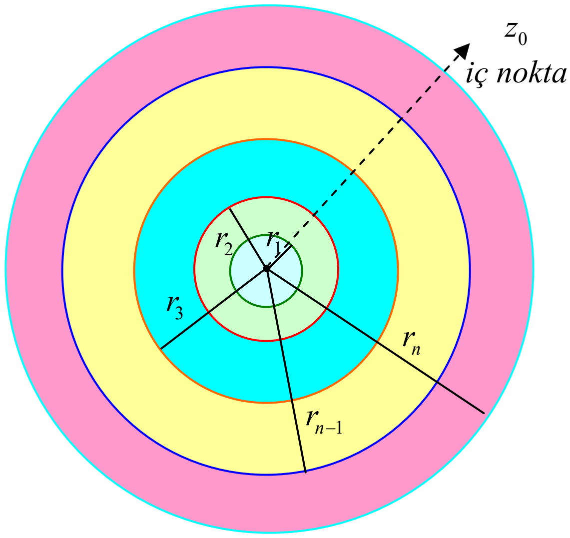
$$|f(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{i\theta})|d\theta \Rightarrow$$

(1.7) $$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{i\theta})|d\theta$$

eşitsizliğini elde ederiz. (1.5) ve (1.7) eşitsizliklerine dikkat edilecek olursa bir çelişki olduğu ortaya çıkar. Dolayısıyla bu çelişkiyi ortadan kaldırmak için çalışma hipotezinden vazgeçmek gerekir. Yani $|f(z)|$ maksimum değerini bir iç noktada alamaz.

2. Çalışma Hipotezi: Her θ argümanı için

(1.8) $$|f(z_0)| = |f(z_0+re^{i\theta})|$$



Şekil 1.2

eşitliğinin daima gerçeklendiğini kabul edelim. Böylece bir iç noktadaki değerin sınırdaki değere eşit olduğunu öne sürmüş oluyoruz. Bu çalışma hipotezi altında z_0 merkezli ve

$$r_1 < r_2 < r_3 < \ldots < r_{n-1} < r_n < \ldots$$

yarıçaplı çemberleri düşünürsek (1.8) eşitliği yarıçapları gittikçe küçülen çemberler üzerinde sürekli olarak gerçekleniyorsa göstermeliyiz ki $f(z)$ analitik fonksiyonu ancak sabittir. $|f(z_0)| = c$ (c sabit sayı) eşitliğinde z_0 noktası D bölgesinde seçilen herhangi bir nokta olduğuna göre bu eşitlik bölge içinde bulunan bütün noktalar için geçerlidir. Dolayısıyla $|f(z)| = c$ dır. Yani $w = f(z)$ fonksiyonu basit bir fonksiyondur. Gerçekten;

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \Rightarrow |f(z)| = \sqrt{(u(x,y))^2 + (v(x,y))^2} \Rightarrow$$

$$|f(z)|^2 = (u(x,y))^2 + (v(x,y))^2 = c^2. \tag{1.9}$$

Öte yandan $w = f(z)$ fonksiyonu D bilgesinde analitik olduğundan Cauchy-Riemann denklemlerini gerçekler. Yani $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ olmak üzere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{1.10}$$

eşitlikleri geçerlidir. Şimdi (1.9) ifadesinden x'e ve y'ye göre türev alalım ve bulunan ifadelerde Cauchy-Riemann denklemlerini kullanalım,

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ 2u\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow u\dfrac{\partial u}{\partial y} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v\dfrac{\partial u}{\partial x} - u\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

(1.11) denklem sisteminde $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ bilinmeyenler olarak kabul edildiğinde bu denklem sistemi lineer homojen denklem sistemine dönüşür ki, çözümünün olabilmesi için katsayılar determinantının sıfır olmasıdır. Yani,

$$\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow u^2 + v^2 = 0 \Rightarrow u = 0,\ v = 0 \Rightarrow$$

$$u(x,y) = 0,\ v(x,y) = 0.$$

Şimdi

$$u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ifadelerinde tekrar Cauchy-Riemann denklemleri kullanılırsa

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ v\frac{\partial v}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow u(x,y) = 0,\ v(x,y) = 0$$

bulunur. Bu sonuçlarda bize gösterir ki $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonları sabittir. Dolayısıyla $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ şeklinde ifade edilen fonksiyon da sabittir. Teoremin ifadesinde $f(z)$ fonksiyonunun D bölgesinde sabitten farklı analitik bir fonksiyon olduğunu söylemiştik. Bu çelişkiyi ortadan kaldırmak için çalışma hipotezinden vazgeçmek gerekir. Yani

$$|f(z_0)| \neq |f(z_0 + re^{i\theta})|$$

dır.

$f(z)$ fonksiyonu reel değişkenli D'de analitik ve sürekli olduğundan $|f(z)|$ maksimum değerini D'de alır. Ancak yukarıda gösterildi ki bu nokta hiç bir zaman iç nokta olamayacaktır. O halde $|f(z)|$ maksimum değerini ancak sınırda alır. Bu da maksimum modül teoremini ispatlar.

LEMMA 1.1: (Schwarz Lemması) $w(z) = c_1 z + c_2 z^2 + ...$ fonksiyonu birim disk $D = \{z \mid |z| < 1\}$ de tanımlanmış ve analitik olsun. Ayrıca $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ koşullarını gerçeklesin. Bu durumda

$$|w(z)| \leq |z| \text{ ve } |w'(0)| \leq 1$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. Eşitlik hali ancak ve ancak $w(z) = kz$, $|k| = 1$ fonksiyonu için geçerlidir.

İSPAT:

(1.12) $$h(z) = \frac{w(z)}{z} = \frac{c_1 z + c_2 z^2 + ...}{z} = c_1 + c_2 z + ...$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon birim diskte tanımlı ve analitiktir. Teorem 1.2'den dolayı fonksiyon maksimum değerini sınırda alır. Yani

(1.13) $$|h(z)| = \left|\frac{w(z)}{z}\right| \leq 1$$

eşitsizliği geçerlidir. (1.13) ifadesinden aşağıdaki işlemleri yaparak

$$\frac{|w(z)|}{|z|} \leq 1 \Rightarrow |w(z)| \leq |z|$$

olduğunu görürüz. Şimdi limitin

$$h'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{h(z+0)-h(0)}{z-0}$$

tanımını kullanırsak

$$|w'(0)| = \left|\lim_{z\to 0} \frac{w(z+0)-w(0)}{z-0}\right| = \left|\lim_{z\to 0} \frac{w(z)-0}{z}\right| = \left|\lim_{z\to 0} \frac{w(z)}{z}\right| = \lim_{z\to 0} \left|\frac{w(z)}{z}\right| \Rightarrow$$

$$\lim_{z\to 0} |h(z)| \leq 1 \Rightarrow |w'(0)| \leq 1$$

bulunur. Eşitlik hali

$$h(z) = \frac{w(z)}{z} \Rightarrow \left|\frac{w(z)}{z}\right| = 1 \Rightarrow \frac{w(z)}{z} = |1| \Rightarrow w(z) = |1|.z \Rightarrow$$

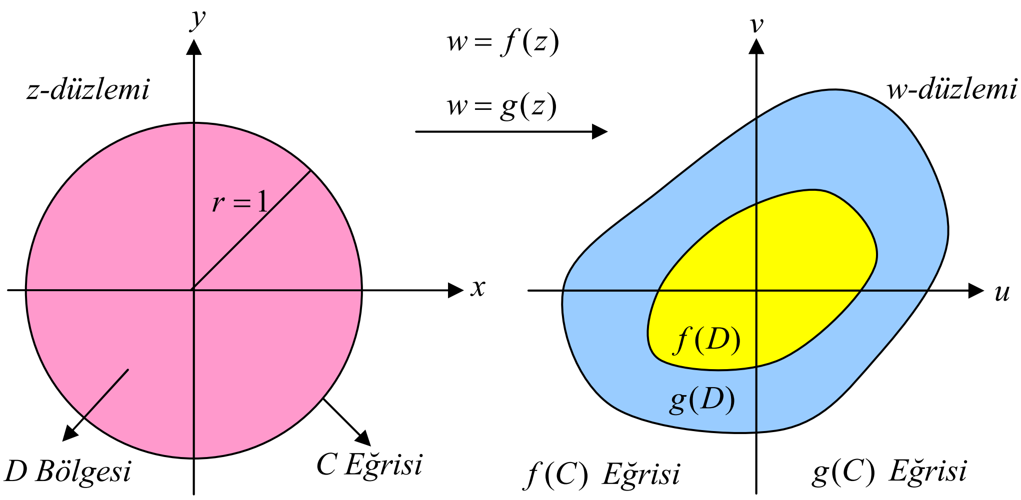
$$w(z) = kz \quad (k = |1|)$$

olduğu görülür.

TANIM 1.1: (Subordinasyon Prensibi) $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları $D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ bölgesinde tanımlanmış, analitik iki fonksiyon olsun. $w(z)$ fonksiyonu D de tanımlı, analitik ve $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere $f(z) = g(w(z))$ şeklinde ifade edilebiliyorsa, $f(z)$ fonksiyonu $g(z)$ fonksiyonuna "Subordine" dir denir ve $f(z) \prec g(z)$ olarak yazılır.

Subordinasyon prensibi Schwarz lemmasının genelleştirilmişidir. $w(z) = z$ olarak alındığında ($w(z) = z$ fonksiyonu $|k| = 1 \Rightarrow k = 1$ hali için Schwarz lemmasında eşitlik halini veren fonksiyondur) subordinasyon prensibi Schwarz lemmasına indirgenir.
Subordinasyon prensibinin genel özellikleri aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

TEOREM 1.2: $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları D birim diskinde tanımlanmış analitik iki fonksiyon olsun. Eğer $f(z) \prec g(z)$ ise $f(D) \subset g(D)$ dir.



Şekil 1.3

İSPAT: Teoremin ispatına geçmeden önce geometrik yorumunu yapalım. Şekil 1.3 de gösterildiği gibi, D birim diskinin $f(z)$ fonksiyonu altındaki resim bölgesi $f(D)$, $g(z)$ fonksiyonu altındaki resim bölgesi $g(D)$ ise $f(D)$ bölgesi $g(D)$ bölgesinin alt cümlesidir.

Subordinasyon prensibinin Schwarz lemmasının genelleştirilmiş hali olduğunu Tanım 1.1'de belirtmiştik. Dolayısıyla Subordinasyon, Schwarz lemmasının koşullarını gerçekler. Bu gerçekten hareketle

(1.14) $\quad |w(z)| \le |z| \Rightarrow |w(z)| = |z| \Leftrightarrow w(z) = kz, \ |k| = 1$

ifadesini yazabiliriz. Öte yandan

(1.15) $$\begin{cases} z_1 \in w(D) \Rightarrow z_1 = w(z) \text{ olacak şekilde bir } z \in D \text{ vardır.} \\ z_1 = w(z) \Rightarrow |z_1| = |w(z)| \le |z|, \ |z| < 1 \Rightarrow |z_1| = |w(z)| \le |z| < 1 \Rightarrow \\ |z_1| < 1 \Rightarrow z_1 \in D \text{ bulunur.} \end{cases}$$

Yani, $z_1 \in w(D)$ ise $z_1 \in D$ olur. Bu ise bize

(1.16) $\quad w(D) \subset D$

olduğunu gösterir. Diğer taraftan $f(z) \prec g(z)$ subordinasyonunun (1.16) ifadesinde kullanılması ile

$$f(z) = g(w(z)) \Rightarrow f(D) = g(w(D)) \subset g(D) \Rightarrow$$

$$f(D) \subset g(D)$$

buluruz ki bu da ispatlanması istenen ifadedir.

SONUÇ 1.1: $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, $g(z) = z + b_2 z^2 + \ldots$ açılımlarına sahip $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları

$$f(0) = 0,\; f'(0) = 1 \text{ ve } g(0) = 0,\; g'(0) = 1$$

olacak şekilde normalize edilmiş olsunlar. Eğer $f(z) \prec g(z)$ ise

$$f(0) = g(0)$$

eşitliği gerçeklenir.

İSPAT: Gerçekten,

$$\left. \begin{array}{l} f(z) \prec g(z) \Rightarrow f(z) = g(w(z)) \\ w(0) = 0 \Rightarrow f(0) = g(w(0)) \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = g(0)$$

sonucu elde edilir.

SONUÇ 1.2: $0 < r < 1$ olmak üzere $f(z) \prec g(z)$ subordinasyonu varsa

$$\{f(z) \,|\, |z| < r\} \subset \{g(z) \,|\, |z| < r\}$$

bağıntısı gerçeklenir. Yani

$$f(D_r) \subset g(D_r)$$

dir.

SONUÇ 1.3: $f(z) \prec g(z)$ subordinasyonu geçerli ise

$$\underset{|z| \le r}{Max} |f(z)| \le \underset{|z| \le r}{Max} |g(z)|$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İSPAT: Gerçekten, $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları $D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ bölgesinde tanımlanmış analitik fonksiyonlar olduklarından maksimum modül teoreminden dolayı maksimum değerlerini *D* bölgesinin sınırında alır. Teorem 1.2 den dolayı

(1.17) $\qquad f(D) \subset g(D)$

bağıntısının gerçeklendiğini biliyoruz. Teorem 1.1 ve (1.17) ifadelerinden

$$\underset{|z|\le r}{Max}\left|f(z)\right| \le \underset{|z|\le r}{Max}\left|g(z)\right|$$

eşitsizliği elde edilir.

SONUÇ 1.4: $f(z) \prec g(z)$ subordinasyonu geçerli ise

$$\underset{|z|\le r}{Max}\left((1-|z|^2)\left|f'(z)\right|\right) \le \underset{|z|\le r}{Max}\left((1-|z|^2)\left|g'(z)\right|\right)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İSPAT: Gerçekten, $f(z) \prec g(z)$ olduğundan, $w(z)$ fonksiyonu Schwarz lemmasının koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere

(1.18) $\quad f(z) = g(w(z))$ (Subordinasyonun tanımından)

(1.19) $\quad |w(z)| \le |z|$ (Schwarz Lemmasından)

(1.20) $\quad (1-|z|^2)\left|f'(z)\right| \le (1-|z|^2)\left|w'(z)\right|\left|g'(w(z))\right|$ (Schwarz Lemmasından)

bağıntıları yazılabilir. (1.18) eşitliğinden

(1.21) $\quad (1-|z|^2)\left|f'(z)\right| = (1-|z|^2)\left|w'(z)\right|\left|g(w(z))\right|$

ifadesine ulaşılır. (1.21) bağıntısına Schwarz lemması uygulanacak olursa

$$(1-|z|^2)\left|f'(z)\right| = (1-|z|^2)\left|w'(z)\right|\left|g(w(z))\right| \le (1-|w(z)|^2)\left|g'(w(z))\right| \Rightarrow$$

(1.22) $\quad (1-|z|^2)\left|f'(z)\right| \le (1-|w(z)|^2)\left|g'(w(z))\right|$

elde edilir. (1.22) eşitsizliğinde (1.19) kullanılırsa

(1.23) $\quad (1-|z|^2)\left|f'(z)\right| \le (1-|z|^2)\left|g'(z)\right|$

eşitsizliğini elde ederiz. (1.23) ifadesinde maksimum modül teoremi kullanılırsa

(1.24) $\quad \underset{|z|\le r}{Max}\left((1-|z|^2)\left|f'(z)\right|\right) \le \underset{|z|\le r}{Max}\left((1-|z|^2)\left|g'(z)\right|\right), \quad (0<r<1)$

bulunur ki bu da ispatı istenen ifadedir.

SONUÇ 1.5: $f(z) \prec g(z)$ subordinasyonu geçerli ise

$$\left|f'(0)\right| \le \left|g'(0)\right|$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İSPAT: Gerçekten, Sonuç 1.4'ün ispatında

(1.25) $\qquad (1-|z|^2)|f'(z)| \le (1-|w(z)|^2)|g'(w(z))|$

eşitsizliğini elde etmiştik. (1.25) ifadesinde $w(0)=0$ olduğunu kullanırsak

$$|f'(0)| \le |g'(0)|$$

eşitsizliğine ulaşılır.

TEOREM 1.3: $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları D birim diskinde tanımlanmış analitik fonksiyonlar olsunlar. $g(z)$ fonksiyonu D bölgesinde yalınkat ise $f(z)$ fonksiyonunun, $g(z)$ fonksiyonuna subordine olması için gerek ve yeter şart

$$f(0)=g(0) \text{ ve } f(D) \subset g(D)$$

olmasıdır.

İSPAT: (Gereklilik) $g(z)$ fonksiyonu D bölgesinde yalınkat ve $f(z) \prec g(z)$ olsun. 3. bölümde verilen yalınkat olmanın tanımından dolayı

(1.26) $\qquad z_1 \ne z_2 \Rightarrow g(z_1) \ne g(z_2)$

dir. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonu, $g(z)$ fonksiyonuna subordine olduğundan

(1.27) $\qquad w(z)$, D de analitik

(1.28) $\qquad w(0)=0, \ (|z|<1\text{'de})$

(1.29) $\qquad |z|<1$ için $|w(z)|<1$

olacak şekilde bir $w(z)$ fonksiyonu vardır. (1.26), (1.27), (1.28) ve (1.29) ifadelerinin birlikte düşünülmesi ile aşağıdaki sonuca varılabilir.

$z_1 \in w(D_r)$ $(0<r<1)$ için $z_1 = w(z)$ olacak şekilde bir $z \in D_r$ vardır. Dolayısıyla

$$z_1 = w(z) \Rightarrow |z_1| = |w(z)| < 1 \Rightarrow |z_1| < 1 \Rightarrow z_1 \in D_r$$

buluruz. Bu ise bize

(1.30) $\qquad w(D_r) \subset D_r$

olduğunu gösterir. (1.26) eşitliği (1.30) ifadesi ile birlikte düşünülürse

(1.31) $\qquad g(w(D_r)) \subset g(D_r)$

bağıntısı elde edilir. Diğer taraftan

(1.32) $\qquad f(z) \prec g(z) \Rightarrow f(z) = g(w(z)) \Rightarrow f(D_r) = g(w(D_r))$

eşitliğini de göz önüne alırsak (1.31) ve (1.32) ifadelerinden

(1.33) $f(D_r) \subset g(D_r)$

yazılabilir. (1.33) bağıntısında $r \to 1$ alınırsa

(1.34) $f(D) \subset g(D)$

buluruz. Öte yandan verilen tanımları kullanarak

$$\left.\begin{array}{l} f(z) \prec g(z) \Rightarrow f(z) = g(w(z)) \\ w(0) = 0 \Rightarrow f(0) = g(w(0)) \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = g(0)$$

elde ederiz.

(Yeterlilik) $g(z)$ fonksiyonu D bölgesinde yalınkat, $f(0) = g(0)$ ve $f(D) \subset g(D)$ olsun. Göstermeliyiz ki $f(z) \prec g(z)$ dir.

$g(z)$, D de yalınkat olduğundan (1.26) bağıntısını kullanarak

$$w = g(z) \Leftrightarrow z = g^{-1}(w)$$

fonksiyonunun $g(D)$ de analitik ve yalınkat olduğunu söyleyebiliriz. Diğer yandan $f(D) \subset g(D)$ olduğundan $z = g^{-1}(w)$ fonksiyonu aynı zamanda $f(D)$ de yalınkattır. Şimdi

(1.35) $w(z) = g^{-1}(f(z))$

fonksiyonunu tanımlayalım. (1.35) şeklinde tanımlanan fonksiyon yukarıda söylediklerimizden ötürü $g(D)$ de analitiktir. $f(D) \subset g(D)$ olduğundan $w(z)$ fonksiyonu $f(D)$'de de analitiktir. Ayrıca

$$f(0) = g(0) \Rightarrow 0 = g^{-1}(f(0))$$

bulunur ki bu bağıntı bize

$$\left.\begin{array}{l} w(z) = g^{-1}(f(w)) \\ g^{-1}(f(0)) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow w(0) = 0$$

eşitliğini verir. Ayrıca $w(z) = g^{-1}(f(z))$ fonksiyonuna ait bütün değerler $z = g^{-1}(w)$ fonksiyonu ile verilebileceğinden $w(z) = g^{-1}(f(z))$ fonksiyonu D'de analitiktir ve $|w(z)| < 1$ koşulunu gerçekler. Sonuç olarak $w(z)$, D de analitik, $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen fonksiyon olmak üzere

$$w(z) = g^{-1}(f(z)) \Rightarrow f(z) = g(w(z))$$

şeklinde yazılabilir ki bu da subordinasyon tanımından dolayı

$$f(z) \prec g(z)$$

olduğunu gösterir.

PROBLEM 1.1: (Lindelöf Prensibi) Subordinasyon prensibini kullanarak $w = f(z)$ fonksiyonu için

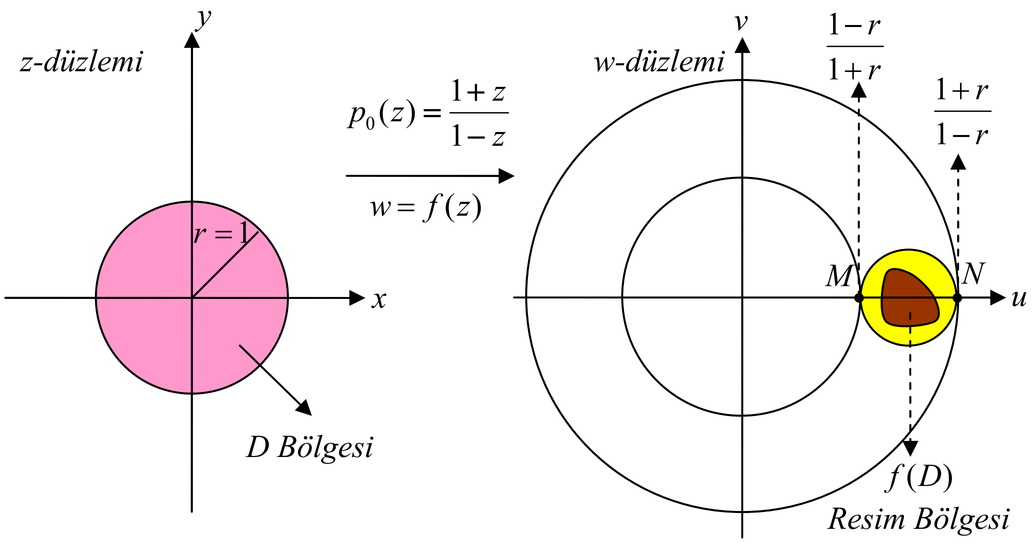
$$M_2(r) \le |f(z)| \le M_1(r)$$

eşitsizliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

ÇÖZÜM: Problemin çözümü için aşağıdaki şekilde hareket edilir.

$f(z) \prec \dfrac{1+z}{1-z}$ olsun. Bu durumda $p_0(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonunun $|z| = r$ çemberini nasıl çemberler üzerine resmettiğini bulalım. $D = \{z \| z| < 1\}$ birim diskinin resmi, subordinasyon prensibinden dolayı, $f(D) \subset p_0(D)$ olacağından $f(z)$ resim çemberinin içinde olacaktır.

Örneğin, Teorem 2.1'den dolayı $p_0(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu $|z| = r$ çemberini merkezi $c(r) = \dfrac{1+r^2}{1-r^2}$, yarıçapı $\rho(r) = \dfrac{2r}{1-r^2}$ olan çemberler üzerine resmeder. Dolayısıyla aşağıdaki şekil çizilebilir.



Şekil 1.4

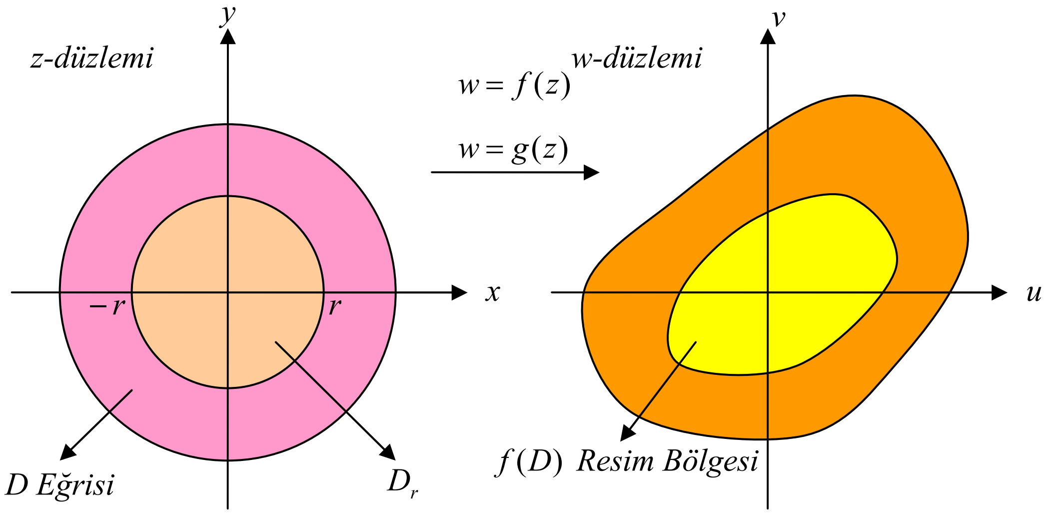
Bu ise çapın uç noktalarının

$$M = \frac{1-r}{1+r}, \quad N = \frac{1+r}{1-r}$$

olduğunu gösterir. Şekil 1.4 de görüldüğü gibi $f(D)$ bölgesi bu çemberin içinde olacağından

$$\frac{1-r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Dolayısıyla Lindelöf Prensibine göre $f(z) \prec g(z)$ ise $f(D_r) \subset g(D_r)$ dir. Buna ait şekil aşağıdaki gibidir.



Şekil 1.5

2. POZİTİF REEL KISMA HAİZ FOKSİYONLAR

Birim diskte analitik pozitif reel kısma haiz fonksiyonlar sınıfı Carathedory tarafından inşa edilmiştir. Bu sınıf yalınkat fonksiyonlar teorisinde çok önemli yere sahiptir.

TANIM 2.1: (Pozitif Reel Kısma Haiz Fonksiyonlar Sınıfı) $D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ bölgesinde tanımlanmış analitik ve $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + ...$ Taylor açılımına sahip, $p(0) = 1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ koşullarını gerçekleyen $p(z)$ fonksiyonlarından oluşan cümleye "Pozitif Reel Kısma Haiz Fonksiyon Sınıfı" denir. Bu sınıf ayrıca "Carathedory Sınıfı" olarak da adlandırılır ve "P" ile gösterilir.

TEOREM 2.1: $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu $|z| = r$ çemberini merkezi $C(r) = \dfrac{1+r^2}{1-r^2}$ de bulunan ve yarıçapı $\rho(r) = \dfrac{2r}{1-r^2}$ olan çemberler üzerine resmeder.

İSPAT:

$$w = \frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow w - wz = 1 + z \Leftrightarrow w - 1 = wz + z \Leftrightarrow w - 1 = z(1+w) \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{w-1}{w+1} \Rightarrow |z| = r = \left|\frac{w-1}{w+1}\right| \Rightarrow |z|^2 = r^2 = \frac{|w-1|^2}{|w+1|^2} \Rightarrow r^2 = \frac{|u+iv-1|^2}{|u+iv+1|^2} \Rightarrow$$

$$r^2 = \frac{|(u-1)+iv|^2}{|(u+1)+iv|^2} \Rightarrow r^2 = \frac{(u-1)^2+v^2}{(u+1)^2+v^2} = \frac{u^2-2u+1+v^2}{u^2+2u+1+v^2} \Rightarrow$$

$$u^2 + v^2 - 2u + 1 = r^2u^2 + r^2v^2 + 2ur^2 + r^2 \Rightarrow$$

$$u^2 + v^2 - 2u + 1 - u^2r^2 - v^2r^2 - 2ur^2 - r^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(1-r^2)u^2+(1-r^2)v^2-2u(1+r^2)+(1-r^2)u^2=0 \Rightarrow$$

(2.1) $$u^2+v^2-2\frac{1+r^2}{1-r^2}u+1=0$$

çember denklemini buluruz $(x^2+y^2+Ax+By+C=0)$. Bu çemberin merkezi

$$\left.\begin{aligned} a&=-\frac{A}{2}=\frac{2\frac{1+r^2}{1-r^2}}{2}=\frac{1+r^2}{1-r^2} \\ b&=-\frac{B}{2}=\frac{0}{2}=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C(r)=\left(\frac{1+r^2}{1-r^2},\,0\right)$$

yarıçapı

$$\rho(r)=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}=\frac{\sqrt{\left(-2\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2+0-4.1}}{2}=\frac{\sqrt{4\frac{(1+r^2)^2}{(1-r^2)^2}-4}}{2}\Rightarrow$$

$$\rho(r)=\frac{2\sqrt{\frac{(1+r^2)^2}{(1-r^2)^2}-1}}{2}=\sqrt{\frac{(1+r^4+2r^2)-(1+r^4-2r^2)}{(1-r^2)^2}}\Rightarrow$$

$$\rho(r)=\sqrt{\frac{1+r^4+2r^2-1-r^4+2r^2}{(1-r^2)^2}}=\sqrt{\frac{4r^2}{(1-r^2)^2}}\Rightarrow$$

$$\rho(r)=\frac{2r}{1-r^2}$$

olarak bulunur. Bu ifade aynı zamanda

$$\left|f(z)-\frac{1+r^2}{1-r^2}\right|\le\frac{2r}{1-r^2}$$

olarak da yazılabilir.

TEOREM 2.2: $w=\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu $D=\{z\,|\,|z|<1\}$ birim diskini $\operatorname{Re} w>0$ sağ yarım düzlemi üzerine resmeder.

İSPAT: w fonksiyonunun tanımından hareketle

$$w=\frac{1+z}{1-z}\Leftrightarrow w-wz=1+z\Leftrightarrow w-1=wz+z\Leftrightarrow$$

$$w-1=z(1+w)\Leftrightarrow z=\frac{w-1}{w+1}\Leftrightarrow 1>|z|=\frac{|w-1|}{|w+1|}\Rightarrow$$

$$|w+1| > |w-1|$$

elde edilir. Burada $w = u + iv$ olduğu kullanılırsa

$$|u+iv+1| > |u+iv-1| \Rightarrow |(u+1)+iv| > |(u-1)+iv| \Rightarrow$$

$$(u+1)^2 + v^2 > (u-1)^2 + v^2 \Rightarrow u^2 + 2u + 1 + v^2 > u^2 - 2u + 1 + v^2 \Rightarrow$$

$$2u > -2u \Rightarrow 4u > 0 \Rightarrow u > 0 \Rightarrow$$

(2.2) $\qquad u = \operatorname{Re} w > 0$

bulunur. Ayrıca

$$w = \frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow z = \frac{w-1}{w+1} \Leftrightarrow 1 = |z| = \frac{|w-1|}{|w+1|} \Rightarrow |w+1| = |w-1|$$

$$|(u+1)+iv|^2 = |(u-1)+iv|^2 \Rightarrow u^2 + 2u + 1 + v^2 = u^2 - 2u + 1 + v^2 \Rightarrow$$

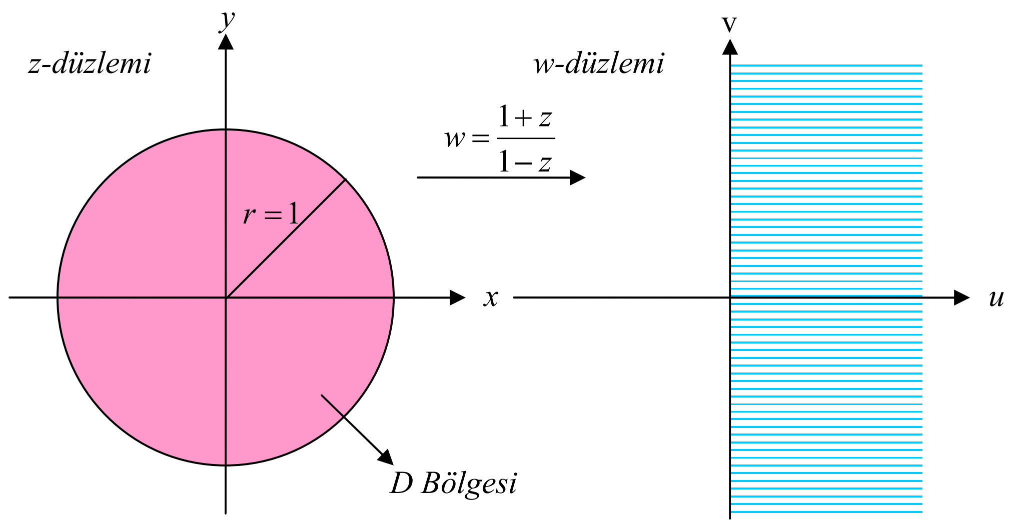
$$2u = -2u \Rightarrow 4u = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow$$

(2.3) $\qquad \operatorname{Re} w = u = 0$

yazılabilir.

(2.3) eşitliği bize $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonunun $|z| = 1$ çemberini w-düzleminde $\operatorname{Re} w = u = 0$ doğrusu (sanal eksen) üzerine resmettiğini gösterir.

(2.2) eşitsizliği ise $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonunun $D = \{z \mid |z| < 1\}$ bölgesini w-düzleminde $\operatorname{Re} w = u > 0$ sağ yarım düzlemi üzerine resmettiğini gösterir.



Şekil 2.1

NOT 2.1: Yukarıda incelenen $w = f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonun *P* sınıfına aittir ve extremal fonksiyondur.

TEOREM 2.3: $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + ...$ fonksiyonu $D = \{z \| z| < 1\}$ de tanımlanmış, analitik $p(0) = 1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $p(z)$ fonksiyonu, $w(z)$, D de analitik $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere

$$p(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)}$$

şeklinde yazılabilir.

İSPAT:

(2.4) $$w = w(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

Şeklinde tanımlanan fonksiyonu Teorem 2.2 de incelemiştik ve $D = \{z \| z| < 1\}$ bölgesini $\operatorname{Re} w > 0$ sağ yarı düzlem üzerine resmettiğini gördük. Diğer yandan Teorem 1.2 den biliyoruz ki "$f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları D birim diskinde tanımlanmış analitik fonksiyonlar olsunlar. $g(z)$ fonksiyonu D bölgesinde yalınkat ise $f(z)$ fonksiyonunun, $g(z)$ fonksiyonuna subordine olması için gerek ve yeter şart $f(0) = g(0)$ ve $f(D) \subset g(D)$ olmasıdır".

Dolayısıyla,

(i) $p(0) = 1$, verilen hipotez şartı

(ii) $w(0) = \dfrac{1+0}{1-0} = 1$, $\left(w = \dfrac{1+z}{1-z} \right)$ lineer transformasyonu

(iii) $w(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, Mobius transformasyonu yalınkattır

(iv) $\operatorname{Re} p(0) > 0$, $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1+z}{1-z} \right) > 0$, ($p(D) \subset w(D)$ demektir)

ifadeleri subordinasyon prensibinin koşullarının gerçeklendiğini gösterir. Yani

(2.5) $$p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$$

ifadesini yazabiliriz. Subordinasyon prensibi tanımı kullanılırsa

(2.6) $$p(z) \prec \frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow p(z) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)}$$

yazılır ki bu da teoremin ispatını verir.

TEOREM 2.4: $p(z)$ fonksiyonu P sınıfına ait ise

$$\frac{1-r}{1+r} \leq |p(z)| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

dir.

İSPAT: Sonuç 1.2 de gösterdik ki "$0 < r < 1$ olmak üzere $f(z) \prec g(z)$ subordinasyonu varsa $\{f(z) \| z| < r\} \subset \{g(z) \| z| < r\}$ bağıntısı gerçeklenir."

Ayrıca Teorem 2.1 den dolayı

"$w = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu $|z| = r$ çemberini merkezi $C(r) = \frac{1+r^2}{1-r^2}$ de bulunan ve yarıçapı $\rho(r) = \frac{2r}{1-r^2}$ olan çemberler üzerine resmeder."

sonucunu yazabiliriz ve yine Teorem 2.3 te ispatladık ki

"$p(z) \in P$ ise $p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$ dir."

ifadesi geçerlidir. Bu üç ifadeden dolayı

(2.7) $$\left| p(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{2r}{1-r^2}$$

eşitsizliği yazılabilir. Diğer yandan herhangi iki z_1 ve z_2 kompleks sayısı için yazılabilen

(2.8) $$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

ifadesi (2.7) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$|p(z)| - \left| \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| \leq \left| p(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{2r}{1-r^2} \Rightarrow$$

$$|p(z)| \leq \frac{2r}{1-r^2} + \frac{1+r^2}{1-r^2} = \frac{r^2+2r+1}{1-r^2} = \frac{(1+r)^2}{(1+r)(1-r)} = \frac{1+r}{1-r} \Rightarrow$$

(2.9) $$|p(z)| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi aşağıdaki yardımcı teoremi ispatlayalım.

Eğer $p(z)$ fonksiyonu P sınıfına ait ise $\dfrac{1}{p(z)}$ fonksiyonu da P sınıfına aittir.

Gerçekten, $p(z)$ fonksiyonu P sınıfına ait olsun. Şimdi

$$q(z) = \frac{1}{p(z)}$$

fonksiyonunu tanımlayalım ve $q(z)$ fonksiyonunun pozitif reel kısma haiz fonksiyonlar sınıfının özelliklerini sağladığını gösterelim.

$$q(0) = \frac{1}{p(0)} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$$

(2.10) $\qquad q(0) = 1$

$$q(z) = \frac{1}{p(z)} = \frac{\overline{p(z)}}{p(z)\overline{p(z)}} = \frac{\overline{p(z)}}{|p(z)|^2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} q(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{p(z)}}{|p(z)|^2}\right) = \frac{1}{|p(z)|^2}\operatorname{Re}\left(\overline{p(z)}\right) \Rightarrow$$

(2.11) $\qquad \operatorname{Re} q(z) = \dfrac{1}{|p(z)|^2}\operatorname{Re}\left(\overline{p(z)}\right) \Rightarrow$

Son eşitlikte, bir kompleks sayının ve eşleniğinin reel kısımlarının eşit olduğu, yani

(2.12) $\qquad \operatorname{Re}(p(z)) = \operatorname{Re}\overline{p(z)} \Rightarrow$

ifadesi kullanılırsa

$$\operatorname{Re} q(z) = \frac{1}{|p(z)|^2}\operatorname{Re}\left(\overline{p(z)}\right) = \frac{1}{|p(z)|^2}\operatorname{Re} p(z) \Rightarrow$$

(2.13) $\qquad \operatorname{Re} q(z) = \dfrac{1}{|p(z)|^2}\operatorname{Re} p(z)$

eşitliği elde edilir. Öte yandan

$$\frac{1}{|p(z)|^2} > 0, \ \operatorname{Re} p(z) > 0$$

eşitsizlikleri (2.13) de kullanılırsa

(2.14) $\qquad \operatorname{Re} q(z) > 0$

elde edilir.

$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu D de analitik olduğundan $q(z)$ fonksiyonu da D de analitiktir. Dolayısıyla bulduğumuz bu özelliklerden dolayı $q(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ fonksiyonunun da P sınıfına ait olduğunu göstermiş oluruz.

Yardımcı teoremden hareketle

$$q(z) = \frac{1}{p(z)} \Rightarrow |q(z)| = \left|\frac{1}{p(z)}\right| \le \frac{1+r}{1-r} \Rightarrow$$

(2.15) $$|p(z)| \ge \frac{1-r}{1+r}$$

buluruz. (2.9) ve (2.15) ifadeleri birlikte düşünülürse

$$\frac{1-r}{1+r} \le |p(z)| \le \frac{1+r}{1-r}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da bize teoremin ispatını verir.

LEMMA 2.1: (I.S. Jack Lemması) $w(z)$ fonksiyonu birim diskte ($D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ 'de) tanımlanmış, analitik $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|w(z)|$, $|z| = r$ çemberi üzerinde bir z_1 noktasında maksimum değerini alırsa, $k \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ olmak üzere

$$z_1 w'(z_1) = k w(z_1)$$

eşitliği gerçeklenir ([14]).

İSPAT: $|z| = r$ çemberi üzerinde $|w(z)|$ 'nün maksimum değerini $M(r,w)$ ile gösterelim. $\log M(r,w)$ fonksiyonunun sürekli ve konveks, ayrıca $w(0) = 0$ eşitliğinden $\log r$ 'nin artan bir fonksiyonu olduğunu biliyoruz.

$|z| = r$ çemberi üzerinde herhangi bir noktada

(2.16) $$|w(z)| = M(r,w)$$

olsun. $z = re^{i\theta}$ ve $w(z) = Re^{i\phi}$ ($R \ne 0$) olmak üzere maksimum alma durumundan dolayı

$$(w(z) = Re^{i\phi},\ z = re^{i\theta} \Rightarrow |w(z)| = |Re^{i\phi}| \Rightarrow |w(z)| = R \Rightarrow |w(z)| = R(r,\theta))$$

(2.17) $$\frac{\partial R}{\partial \theta}=0$$

eşitliği yazılabilir. Diğer yandan

(2.18) $$\frac{\partial}{\partial \theta}(\log R(r,\phi))=\frac{\frac{\partial R}{\partial \theta}}{R(r,\theta)}=\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta}=0$$

bulunur. Ayrıca

(2.19) $$\log w(z)=\log(Re^{i\phi})=\log R+\log e^{i\phi}=\log R+i\phi$$

yazılışı göz önüne alınırsa

(2.20) $$\mathrm{Re}(\log w(z))=\log R(r,\theta)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla (2.18) ve (2.20) eşitlikleri birlikte düşünülürse

(2.21) $$0=\frac{\partial}{\partial \theta}(\log(R,\phi))=\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta}=\mathrm{Re}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\log w(z))\right)$$

ifadesi bulunur. Diğer taraftan

$$\log w(z)=\log\left(\left|w(z)\right|e^{i\phi}\right)=\log\left|w(z)\right|+i\phi=\log R(r,\theta)=\log w(re^{i\theta})\Rightarrow$$

(2.22) $$\log w(z)=\log\left(w(re^{i\theta})\right)$$

olduğu düşünülürse ve (2.22) eşitliğinden her iki tarafın θ'ya göre türevi alınırsa

(2.23) $$ire^{i\theta}\frac{w'(re^{i\theta})}{w(re^{i\theta})}=\frac{\frac{\partial R}{\partial \theta}}{R}=\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta}$$

eşitliği elde edilir. (2.23) aynı zamanda

(2.24) $$re^{i\theta}\frac{w'(re^{i\theta})}{w(re^{i\theta})}=Z=X+iY$$

olduğunu düşünerek her iki tarafını i ile çarparsak

(2.25) $$ire^{i\theta}\frac{w'(re^{i\theta})}{w(re^{i\theta})}=iZ=iX-Y$$

eşitliği elde edilir. (2.20), (2.21), (2.22), (2.23), (2.24) ve (2.25) ifadelerinden

(2.26) $$-\mathrm{Im}\left(re^{i\theta}\frac{w'(re^{i\theta})}{w(re^{i\theta})}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\log w(z)\right)$$

bulunur. Dolayısıyla yukarıdaki eşitliklerden

(2.27) $$0=\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta}=\frac{\partial}{\partial \theta}(\log R)=\mathrm{Re}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\log w(z)\right)=-\mathrm{Im}\left(re^{i\theta}\frac{w'(re^{i\theta})}{w(re^{i\theta})}\right)$$

bulunur. Bu ise

(2.28) $$-\operatorname{Im}\left(re^{i\theta} \frac{w'(re^{i\theta})}{w(re^{i\theta})} \right) = 0$$

olduğunu gösterir. (2.28) bize $k(r) = k(|z_1|)$ olmak üzere $w(z)$ fonksiyonunun $|z| = r$ çemberi üzerinde bir z_1 noktasında maksimum değerini alması durumunda

(2.29) $$z_1 \frac{w'(z_1)}{w(z_1)} = k(|z_1|)$$

şeklinde bir reel değere eşit olduğunu gösterir.

Şimdi $k \geq 1$ olduğunu gösterelim. $w(z)$ fonksiyonu $w(0) = 0$ koşulunu gerçeklediğinden $w(z)$ fonksiyonunun $z = 0$ civarındaki Taylor açılımı

(2.30) $$w(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

şeklindedir. Yani $w(z)$ fonksiyonunun sabit terimi sıfırdır. Diğer yandan (2.30) ifadesinden türev alıp z ile çarparsak

(2.31) $$w'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots$$

(2.32) $$zw'(z) = a_1 z + 2a_2 z^2 + \ldots$$

sonuçları elde edilir. (2.29) ifadesinin

$$z_1 \frac{w'(z_1)}{w(z_1)} = k(|z_1|) \Leftrightarrow z_1 w'(z_1) = w(z_1) k(|z_1|) \Rightarrow$$

(2.33) $$a_1 z + 2a_2 z^2 + 3a_3 z^3 + \ldots + na_n z^n + \ldots = ka_1 z + ka_2 z^2 + ka_3 z^3 + \ldots + ka_n z^n + \ldots$$

şeklinde yazılabileceği göz önüne alınırsa $k = n$ olduğu görülür. Burada n, $w(z)$ fonksiyonunun $z = 0$ noktası civarında Taylor açılımındaki n'inci katsayıyı göstermektedir. Yukarıda söylenenlerden dolayı bu açılımda sabit terim sıfırdır olduğundan $n \geq 1$ dir. Yani $k \geq 1$ dir. Eğer $k(|z_1|) = k(r)$ fonksiyonunun r'nin artan fonksiyonu olduğunu gösterirsek $n \geq 1$ eşitsizliğini göstermiş oluruz.

$\log M(r, w)$ fonksiyonu $(\log r)$'nin konveks fonksiyonu olduğundan

(2.34) $$\frac{d(\log M(r, w))}{d(\log r)} = r \frac{M'(r, w)}{M(r, w)}$$

ifadesini yazabiliriz. (2.34) eşitliği bize $\left(r \dfrac{M'(r, w)}{M(r, w)} \right)$ ifadesinin, $(\log r)$'nin ve aynı zamanda r'nin artan fonksiyonu olduğunu gösterir. Ayrıca

$$\frac{d(\log M(r,w))}{d(\log r)}$$

türevi bu tür noktalarda vardır. Türevin bu tür noktalarda olmadığını farz etmemiz halinde; sağ ve sol türevlerin bu tür noktalarda var olduğunu biliyoruz ve yine biliyoruz ki bu tür noktalarda sol türev sağ türevi geçemez. Böyle herhangi bir durumda $\left(r\frac{M'(r,w)}{M(r,w)} \right)$ artandır. Buna karşın r'nin fonksiyonunun sürekli olması gerekmez. Fakat

$$k(r) = z_1 \frac{w'(z_1)}{w(z_1)} = \mathrm{Re}\left(z_1 \frac{w'(z_1)}{w(z_1)} \right) = r\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial}{\partial r}(\log w(z))\Big|_{z=z_1} \right) =$$

$$= r\frac{\partial \log R}{\partial r}\Bigg|_{z=z_1} = r\frac{\frac{\partial R}{\partial r}}{R}\Bigg|_{z=z_1} \quad , \; R\big|_{z=z_1} = M(r,w)$$

olduğu göz önüne alınırsa $k \geq 1$ olduğu görülür.

TEOREM 2.5: $p(z)$ fonksiyonu $D = \{z \| z| < 1\}$ bölgesinde analitik, $\mathrm{Re}\, p(z) > 0$ ve $p(0) = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta > 0$ ve reel sayı) koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

(2.35) $\qquad q(z) = \frac{1}{\alpha}(p(z) - i\beta)$

şeklinde tanımlanan fonksiyon P sınıfına aittir.

İSPAT: $p(z)$ fonksiyonu D de analitik olduğundan, fonksiyonun bir pozitif reel sayı ile çarpılması ve paralel kaydırmaya tabi tutulması analitikliğini bozmaz. Dolayısıyla

(2.36) $\qquad p(z) - i\beta \qquad$ (paralel kaydırma)

(2.37) $\qquad \frac{1}{\alpha}(p(z) - i\beta) \qquad$ (reel sayıyla çarpma)

fonksiyonları da analitik olacaktır. Buna göre (2.35) şeklinde tanımlanan fonksiyon D de analitiktir. Diğer yandan

$$q(0) = \frac{1}{\alpha}(p(0) - i\beta) = \frac{1}{\alpha}(\alpha + i\beta - i\beta) = \frac{1}{\alpha}(\alpha) = 1 \Rightarrow$$

$$q(0) = 1$$

koşulunu gerçekler. Ayrıca

$$\operatorname{Re} q(z) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\alpha}(p(z) - i\beta)\right] = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha}p(z)\right) = \frac{1}{\alpha}\operatorname{Re} p(z) > 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} q(z) > 0$$

sonucuna ulaşılır ki bu bize $q(z)$ fonksiyonunun P sınıfına ait olduğunu gösterir.

TEOREM 2.6: $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + ... + p_n z^n + ...$ fonksiyonu birim disk $D = \{z \| z| < 1\}$ de tanımlanmış ve analitik olsun. $p(z)$ fonksiyonunun P sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart, $w(z)$ fonksiyonu D de analitik, $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere,

$$p(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)}$$

şeklinde ifade edilmesidir.

İSPAT: (Gereklilik) $p(z) \in P$ olsun, dolayısıyla aşağıdaki üç koşul gerçeklenir.

(2.38) $p(z)$ fonksiyonu D de analitiktir.

(2.39) $p(0) = 1$ dir.

(2.40) $\operatorname{Re} p(z) > 0$ dir.

Diğer yandan,

(2.41) $$w(z) = \frac{z - 1}{z + 1}$$

lineer kesirsel transformasyonu $\operatorname{Re} z > 0$ sağ yarım düzlemini birim disk içine resmeder. Dolayısıyla (2.40) koşulu (2.41) eşitliğinde kullanılırsa

(2.42) $$w(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1}$$

fonksiyonunda sağ yarım düzlemini birim disk içine resmeder. Şimdi (2.42) fonksiyonundaki durumları inceleyelim.

$$w(0) = \frac{p(0) - 1}{p(0) + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0 \Rightarrow$$

(2.43) $w(0) = 0$

dır. Diğer yandan sağ yarım düzlem birim disk içine resmedildiğinden

(2.44) $\quad |w(z)| < 1$

koşulu gerçeklenir. Öte yandan $w(z) = \dfrac{p(z)-1}{p(z)+1}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon göz önüne alındığında, $p(z)$ analitik olduğundan $\dfrac{p(z)-1}{p(z)+1}$ Mobius transformasyonu da analitiktir. Yani sonuç olarak (2.42) eşitliği ile tanımlanan $w(z)$ fonksiyonu $D = \{z \| z| < 1\}$ de analitiktir.

$$w(z) = \frac{p(z)-1}{p(z)+1} \Leftrightarrow p(z) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)}$$

eşitliği elde edilir.

(Yeterlilik) $w(z)$ fonksiyonu $D = \{z \| z| < 1\}$ de tanımlanmış

(i) $\quad w(0) = 0$

(ii) $\quad |w(z)| < 1$

(iii) $\quad w(z)$, $D = \{z \| z| < 1\}$ de analitik

koşullarını gerçekleyen fonksiyon olsun. $w(z)$ fonksiyonu yardımıyla

(2.45) $$f(z) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. (2.45) ifadesindeki fonksiyon bir lineer transformasyon olduğundan, $f(z)$, $D = \{z \| z| < 1\}$ de analitiktir ve

$$f(0) = \frac{1+w(0)}{1-w(0)} = \frac{1+0}{1-0} = 1 \Rightarrow$$

(2.46) $\quad f(0) = 1$

koşulunu sağlar. Ayrıca

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2}\left[f(z) + \overline{f(z)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1+w(z)}{1-w(z)} + \overline{\left(\frac{1+w(z)}{1-w(z)}\right)}\right] \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1+w(z)}{1-w(z)} + \frac{\overline{1+w(z)}}{\overline{1-w(z)}}\right] \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{(1+w(z))(\overline{1-w(z)}) + (\overline{1+w(z)})(1-w(z))}{(1-w(z))(\overline{1-w(z)})}\right] \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} f(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1-\overline{w(z)}+w(z)-|w(z)|^{2}+1-w(z)+\overline{w(z)}-|w(z)|^{2}}{(1+w(z))(\overline{1+w(z)})}\right]\Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} f(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{2-2|w(z)|^{2}}{|1-w(z)|^{2}}\right]=\frac{1-|w(z)|^{2}}{|1-w(z)|^{2}}>0\Rightarrow$$

(2.47) $\operatorname{Re} f(z)>0$

koşulu gerçeklenir. (2.45), (2.46) ve (2.47) yazılışları bize $f(z)=\dfrac{1+w(z)}{1-w(z)}$ fonksiyonunun P sınıfına ait olduğunu gösterir.

TEOREM 2.7: $w=f(z)$ fonksiyonu P sınıfına ait ise

$$\frac{1-r}{1+r}\leq \operatorname{Re} f(z)\leq \frac{1+r}{1-r}$$

distorsiyonu gerçeklenir.

İSPAT: Teorem 2.1'de $w=f(z)$ fonksiyonu P sınıfına ait ise

(2.48) $\left|f(z)-\dfrac{1+r^{2}}{1-r^{2}}\right|\leq \dfrac{2r}{1-r^{2}}$

eşitsizliğini gerçekleneceğini göstermiştik. Ayrıca herhangi bir z kompleks sayısı için

(2.49) $-|z|\leq \operatorname{Re} z\leq |z|$

bağıntısı vardır. Eğer $w=f(z)-\dfrac{1+r^{2}}{1-r^{2}}$ alınırsa

(2.50) $-\left|f(z)-\dfrac{1+r^{2}}{1-r^{2}}\right|\leq \operatorname{Re}\left(f(z)-\dfrac{1+r^{2}}{1-r^{2}}\right)\leq \left|f(z)-\dfrac{1+r^{2}}{1-r^{2}}\right|$

eşitliği elde edilir. (2.48) ve (2.50) eşitsizlikleri birlikte düşünülürse,

(2.51) $-\dfrac{2r}{1-r^{2}}\leq -\left|f(z)-\dfrac{1+r^{2}}{1-r^{2}}\right|\leq \operatorname{Re}\left(f(z)-\dfrac{1+r^{2}}{1-r^{2}}\right)\leq \left|f(z)-\dfrac{1+r^{2}}{1-r^{2}}\right|\leq \dfrac{2r}{1-r^{2}}$

yazılır. Bu ise aynı zamanda

(2.52) $-\dfrac{2r}{1-r^{2}}\leq \operatorname{Re}\left(f(z)-\dfrac{1+r^{2}}{1-r^{2}}\right)\leq \dfrac{2r}{1-r^{2}}$

demektir ve

$$-\frac{2r}{1-r^2} \le \operatorname{Re} f(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \le \frac{2r}{1-r^2} \Rightarrow$$

$$-\frac{2r}{1-r^2} + \frac{1+r^2}{1-r^2} \le \operatorname{Re} f(z) \le \frac{2r}{1-r^2} + \frac{1+r^2}{1-r^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1-2r+r^2}{1-r^2} \le \operatorname{Re} f(z) \le \frac{1+2r+r^2}{1-r^2} \Rightarrow$$

$$\frac{(1-r)^2}{(1-r)(1+r)} \le \operatorname{Re} f(z) \le \frac{(1+r)^2}{(1-r)(1+r)} \Rightarrow$$

$$\frac{1-r}{1+r} \le \operatorname{Re} f(z) \le \frac{1+r}{1-r}$$

şeklinde ifade edilir.

TEOREM 2.8: $|a| < 1$ koşulunu sağlayan bir kompleks sayı için

$$\left|\frac{1+a}{1-a}\right| \le \frac{1+|a|}{1+|a|}$$

eşitsizliği daima vardır.

İSPAT: Kompleks sayılarda ki üçgen eşitsizliğinden

(2.53) $\quad |1+a| \le 1+|a|$

ifadesini yazabiliriz. Ayrıca,

$$1 = |1| = |1-a+a| \le |1-a| + |a| \Rightarrow$$

(2.54) $\quad 1-|a| \le |1-a|$

bağıntısını (2.53) eşitsizliğinde kullanırsak

$$\frac{|1+a|}{|1-a|} \le \frac{1+|a|}{1-|a|} \Rightarrow \left|\frac{1+a}{1-a}\right| \le \frac{1+|a|}{1-|a|}$$

elde edilir ki buda bize teoremin ispatını verir.

TEOREM 2.9: $w = f(z)$ fonksiyonu P sınıfına ait ise

$$|f'(z)| \le \frac{2}{(1-|z|)^2}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İSPAT: $w = f(z)$ fonksiyonu P sınıfına ait ise, $\varphi(z)$ fonksiyonu Schwarz lemmasının koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

(2.55) $$f(z) = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$$

şeklinde yazılabilir. (2.55) ifadesinden türev alırsak

$$f'(z) = \frac{\varphi'(z)(1-\varphi(z)) + \varphi'(z)(1+\varphi(z))}{(1-\varphi(z))^2} \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{\varphi'(z) - \varphi'(z)\varphi(z) + \varphi'(z) + \varphi(z)\varphi'(z)}{(1-\varphi(z))^2} \Rightarrow$$

$$f'(z) = \frac{2\varphi'(z)}{(1-\varphi(z))^2} \Rightarrow$$

(2.56) $$|f'(z)| = \frac{2|\varphi'(z)|}{|1-\varphi(z)|^2}$$

eşitliği bulunur. Ayrıca $\varphi(z)$ fonksiyonu Schwarz Lemmasının koşullarını gerçeklediğinden

(2.57) $$|\varphi'(z)| \le \frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}$$

yazılabilir. (2.56) ve (2.57) birlikte düşünüldüğünde

$$|f'(z)| = \frac{2|\varphi'(z)|}{|1-\varphi(z)|^2} \le \frac{2\left(\dfrac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}\right)}{|1-\varphi(z)|^2} = \frac{2(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)|1-\varphi(z)|^2}$$

(2.58) $$|f'(z)| \le \frac{2(1-|\varphi(z)|)(1+|\varphi(z)|)}{(1-|z|)(1+|z|)|1-\varphi(z)|^2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Diğer yandan $\varphi(z)$ fonksiyonunun $|\varphi(z)| \le |z|$ eşitsizliğini sağladığı göz önüne alınırsa

(2.59) $$1+|\varphi(z)| \le 1+|z| \Rightarrow \frac{1+|\varphi(z)|}{1+|z|} \le 1$$

ifadesi bulunur ki (2.59) ifadesi (2.58) de kullanılırsa

(2.60) $$|f'(z)| \le \frac{2(1-|\varphi(z)|)}{(1-|z|)|1-\varphi(z)|^2}$$

elde edilir.

Ayrıca z_1 ve z_2 herhangi iki kompleks sayı olmak üzere

(2.61) $$|z_1 - z_2| \le |z_1| - |z_2|$$

eşitsizliği daima geçerlidir. Bu ifadede $z_1 = 1$ ve $z_2 = \varphi(z)$ olarak alınırsa

(2.62) $$|1-\varphi(z)| \le 1 - |\varphi(z)| \Rightarrow |1-\varphi(z)|^2 \le (1-|\varphi(z)|)^2$$

elde edilir. (2.62) ifadesi (2.60) da kullanılırsa

$$|f'(z)| \le \frac{2(1-|\varphi(z)|)}{(1-|z|)|1-\varphi(z)|^2} \le \frac{2(1-|\varphi(z)|)}{(1-|z|)(1-|\varphi(z)|)^2} \Rightarrow$$

(2.63) $$|f'(z)| \le \frac{2}{(1-|z|)(1-|\varphi(z)|)}$$

bulunur. $|\varphi(z)| \le |z|$ eşitsizliği (2.63) ifadesinde kullanılırsa

$$|f'(z)| \le \frac{2}{(1-|z|)(1-|\varphi(z)|)} \le \frac{2}{(1-|z|)(1-|z|)} \Rightarrow$$

$$|f'(z)| \le \frac{2}{(1-|z|)^2}$$

elde edilir.

SONUÇ 2.1: $w = f(z)$ fonksiyonu P sınıfına ait ise

$$\frac{1-r}{1+r} \le |f(z)| \le \frac{1+r}{1-r} \text{ ve } |f'(z)| \le \frac{2}{(1-|z|)^2}$$

eşitsizlikleri gerçeklendiğinden P sınıfı normal bir aile oluşturur ve P sınıfı kompak bir fonksiyon ailesidir.

SONUÇ 2.2: $|f'(z)| \le \dfrac{2}{(1-|z|)^2} \Rightarrow |f'(0)| \le 2$ eşitsizliği vardır. Bu ise

$$f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots \Rightarrow f'(z) = p_1 + 2p_2 z + \ldots \Rightarrow f'(0) = p_1$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$|f'(0)| = |p_1| \le 2$$

demektir.

TEOREM 2.10: $f(z)$ fonksiyonu P sınıfına ait ise $0 \le t \le 2\pi$ olmak üzere $f(e^{it} z)$ fonksiyonu da P sınıfına aittir.

İSPAT: $f(z) \in P$ olduğundan

(2.64) $\qquad f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + ...$

açılımına sahip, $D = \{z \mid |z| < 1\}$ bölgesinde analitik ve

(2.65) $\qquad \operatorname{Re} f(z) > 0$

(2.66) $\qquad f(0) = 1$

koşullarını gerçekler. Şimdi

(2.67) $\qquad h(z) = f(e^{it} z) = 1 + p_1 e^{it} z + p_2 e^{2it} z^2 + ...$

fonksiyonunu düşünelim. (2.67) yazılışından dolayı $h(z)$ fonksiyonu $D = \{z \mid |z| < 1\}$ de analitiktir, $h(0) = 1$ koşulunu gerçekler.

$$\zeta = e^{it} z \Rightarrow |\zeta| = |e^{it} z| = |e^{it}||z| = |z| < 1$$

ifadesi göz önüne alacak olursak $\zeta \in D = \{z \| z| < 1\}$ dır ve

$$h(z) = f(e^{it} z) \Rightarrow \operatorname{Re} h(z) = \operatorname{Re} f(\zeta) > 0$$

koşulunu gerçekler. Yani $h(z)$ fonksiyonu P sınıfına aittir.

TEOREM 2.11: $w = f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + ...$ fonksiyonu P sınıfına ait ise

$$|p_n| \le 2$$

dır.

İSPAT: Teoremin ispatında aşağıdaki integral kullanılır.

(2.68) $$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{C:|z|=1} f(z) \left[2 - z^n - \frac{1}{z^n} \right] \frac{dz}{z}$$

integralini göz önüne alalım. (2.68) integrali aynı zamanda

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{C:|z|=1} f(z) \left[2 - z^n - \frac{1}{z^n} \right] \frac{dz}{z} \Rightarrow$$

(2.69) $$I = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{C:|z|=1} 2 \frac{f(z)}{z} dz}_{(i)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{C:|z|=1} z^{n-1} f(z) dz}_{(ii)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{C:|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz}_{(iii)}$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.69) yazılışındaki

(i) integral;

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} 2\frac{f(z)}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} 2\frac{1+p_1 z + p_2 z^2 + \ldots}{z}dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} 2\left(\frac{1}{z} + p_1 + p_2 z + \ldots\right)dz$$

şeklinde yazılırsa integralin sadece $z = 0$ noktasında rezidüsü vardır (Laurent açılımı düşünülür). Rezidü teoreminden dolayı, integralin değeri Laurent açılımındaki ilk katsayıya eşit olduğundan (i) integralinin değeri 2 olarak bulunur.

(ii) integral;

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} z^{n-1} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} z^{n-1}(1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n + \ldots)dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} (z^{n-1} + p_1 z^n + p_2 z^{n+1} + \ldots + p_n z^{2n-1} + \ldots)dz$$

şeklinde yazılırsa Cauchy-İntegral Teoremine göre integralin değeri 0 olarak bulunur.

(iii) integral;

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

İntegrali olduğu göz önüne alınırsa Cauchy-Türev formülünden dolayı p_n katsayısına eşittir.

Bulduğumuz sonuçları (2.69) ifadesinde yazarsak, I integrali

$$I = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} 2\frac{f(z)}{z}dz}_{(2)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} z^{n-1} f(z)dz}_{(0)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz}_{(p_n)} \Rightarrow$$

(2.70) $\quad I = 2 - p_n$

olarak bulunur.

I integralinin diğer bir çözümü ise aşağıdaki şekilde yapılabilir.

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} f(z)\left[2 - z^n - \frac{1}{z^n}\right]\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} f(z)\left[2 - z^n - z^{-n}\right]\frac{dz}{z} \Rightarrow$$

(2.71) $$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} f(z)\left[2-(z^n+z^{-n})\right]\frac{dz}{z}$$

$$z=e^{i\theta}\Rightarrow dz=ie^{i\theta}d\theta,\ z^n=e^{in\theta},\ z^{-n}=e^{-in\theta}$$

$$2-(z^n+z^{-n})=2-(e^{in\theta}+e^{-in\theta})=$$

$$2-(\cos n\theta+i\sin n\theta+\cos n\theta-i\sin n\theta)=$$

$$2-(2\cos n\theta)=2-2\cos n\theta=$$

$$2(1-\cos\underbrace{n\theta}_{\theta_1})=2(1-\cos\theta_1)=2\left[\sin^2\frac{\theta_1}{2}+\cos^2\frac{\theta_1}{2}-\cos\left(\frac{\theta_1}{2}-\frac{\theta_1}{2}\right)\right]=$$

$$2(\sin^2\frac{\theta_1}{2}+\cos^2\frac{\theta_1}{2}-\cos^2\frac{\theta_1}{2}+\sin^2\frac{\theta_1}{2})=4\sin^2\frac{\theta_1}{2}=4\sin^2\frac{n\theta}{2}\Rightarrow$$

$$2-(z^n+z^{-n})=4\sin^2\frac{n\theta}{2}$$

(2.71) integralinde yukarıda bulduğumuz ifadeler yazılacak olursa

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} f(z)\left[2-(z^n+z^{-n})\right]\frac{dz}{z}=$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} f(e^{i\theta})4\sin^2\frac{n\theta}{2}\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta=$$

(2.72) $$I=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} f(e^{i\theta})4\sin^2\frac{n\theta}{2}d\theta$$

eşitliği bulunur. Diğer taraftan $0\le\theta\le 2\pi\Rightarrow 0\le n\theta\le 2\pi$ olduğu açıktır. $|z|=1$ çemberi üzerinde çalıştığımızdan (2.72) integrali

(2.73) $$I=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} f(e^{i\theta})4\sin^2\frac{n\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})4\sin^2\frac{n\theta}{2}d\theta$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonu P sınıfına ait olduğundan $\operatorname{Re} f(z)\ge 0\Rightarrow\ \operatorname{Re} f(e^{i\theta})\ge 0$ eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla

$$\operatorname{Re} I=\operatorname{Re}(2-p_n)=\operatorname{Re}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\frac{n\theta}{2}d\theta\right)\ge 0\Rightarrow$$

(2.74) $$\operatorname{Re}(2-p_n)\ge 0\Leftrightarrow \operatorname{Re} p_n\le 2\Rightarrow$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan P sınıfının orijin etrafındaki rotasyon altında invaryant kaldığını, yani $f(z)\in P$ ise $f(e^{it}z)\in P$ olduğunu, Teorem 2.10 da göstermiştik.

$f(e^{it}z)$ fonksiyonunun Taylor açılımındaki n'inci katsayının $e^{int}p_n$ olduğu göz önüne alınırsa (7) eşitsizliği,

(2.75) $$\mathrm{Re}(e^{int}p_n) \leq 2, \; 0 \leq t \leq 2\pi$$

şeklinde ifade edilebilir. t'nin özellikle

(2.76) $$\begin{cases} p_n = |p_n| e^{i\arg p_n} \Leftrightarrow e^{-i\arg p_n} p_n = |p_n| \\ nt = -\arg p_n \Leftrightarrow nt + \arg p_n = 0 \end{cases}$$

olacak şekilde değeri seçilirse (2.75) ve (2.76) eşitliklerinden

$$\mathrm{Re}(e^{int}p_n) = |p_n| \leq 2$$

olduğu bulunur.

TEOREM 2.12: $f(z)$ fonksiyonu P sınıfına ait ise

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\gamma(t), \; \gamma(2\pi) - \gamma(0) = 1$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\gamma(t,r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathrm{Re}\, f(re^{i\theta}) d\theta$$

şeklinde bir fonksiyondur.

İSPAT: Teoremin ispatı, analitik fonksiyonlar için Schwarz formülü kullanarak yapılır. Analitik fonksiyonlar için Schwarz formülü aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$h(z)$ fonksiyonu $|z| < R$ de analitik olsun. Bu durumda

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} u(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + ic$$

yazılışı geçerlidir. Burada c keyfi reel sayı, $u(\zeta)$ fonksiyonu, $h(z)$ fonksiyonunun reel kısmıdır.

$$|\zeta| = r \Rightarrow \zeta = re^{it} \Rightarrow d\zeta = ire^{it}dt \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \mathrm{Re}\, f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}+z}{re^{it}-z} \mathrm{Re}\, f(re^{it}) \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt \Rightarrow$$

(2.77) $$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}+z}{re^{it}-z} \mathrm{Re}\, f(re^{it}) dt$$

Diğer yandan Helly seçme teoremine göre, $[a,b]$ aralığında sonsuz elemana sahip bir $F=\{f(x)\}$ ailesi tanımlanmış olsun. Aileye ait bütün fonksiyonlar ve bu fonksiyonların toplam değişimi sınırlı, yani $\forall f(x)\in F$ için $|f(x)|\le K$ ve $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x)\le K$ ise, F ailesinden bir $\{f_n(x)\}$ dizisi seçmek mümkündür ki $\{f_n(x)\}$ dizisi $[a,b]$ nin her noktasında bir $\varphi(x)$ fonksiyonuna yakınsar. $n\to\infty$ için $r_n\to 1$ olmak üzere $\{r_n\}$ dizisi, $\gamma(t,r_n)$ fonksiyonunun bütün süreklilik noktaları için $\gamma(t)$ fonksiyonuna yakınsar. Burada $\gamma(t,r_n)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^t \operatorname{Re} f(r_n e^{i\theta})d\theta$ dir. Dolayısıyla (2.77) eşitliği

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}\operatorname{Re} f(re^{it})dt \Rightarrow$$

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re} f(re^{it})dt\right)}_{d\gamma(t)}=\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}d\gamma(t)$$

şeklinde yazılabilir.

TEOREM 2.13: $w=f(z)$ fonksiyonu P sınıfına ait olsun. Bu durumda

$$\gamma(t,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t \operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $0\le t\le 2\pi$ aralığında monoton artan bir fonksiyondur.

İSPAT: $w=f(z)$ fonksiyonu P sınıfına ait olduğundan

(2.78) $\qquad \operatorname{Re} f(z)>0$

koşulunu gerçekler. Dolayısıyla

(2.79) $\qquad \gamma(t,r)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^t \operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta>0$

dır. Şimdi $0\le t_1\le t_2\le 2\pi$ olmak üzere

(2.80) $\qquad 0<\gamma(t,r)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{t_2}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{t_1}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta$

ifadesini yazalım. Diğer taraftan

$$(2.81) \qquad \gamma(t_2,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{t_1}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta>\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{t_1}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta}_{\gamma(t_1,r)}$$

olduğunu göz önüne alınırsa

$$\gamma(t_2,r)>\gamma(t_1,r)$$

bulunur ki buda teoremin ispatını verir.

SONUÇ 2.3: $\gamma(2\pi,r)=1$, $\gamma(0,r)=0$ eşitlikleri geçerlidir.

Gerçekten,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}\operatorname{Re} f(re^{it})dt$$

ifadesinde $z=0$ alınacak olursa

$$f(0)=1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}}{re^{it}}\operatorname{Re} f(re^{it})dt \Rightarrow$$

$$1=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re} f(re^{it})dt=\gamma(2\pi,r)\Rightarrow\gamma(2\pi,r)=1$$

bulunur. Ayrıca

$$\gamma(t,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{t}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta$$

tanımında $t=0$ alınırsa

$$\gamma(0,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{0}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta=0\Rightarrow\gamma(0,r)=0$$

elde edilir.

TEOREM 2.14: $p(z)=1+p_1z+p_2z^2+...$ fonksiyonu $D=\{z\|z|<1\}$ de tanımlanmış ve analitik olsun ve $\operatorname{Re} p(z)>0,\ p(0)=1$ koşullarını gerçeklesin. Eğer $\operatorname{Re} p(z),\ |z|=r$ çemberi üzerinde bir z_0 noktasında minimum değerini alıyorsa

$$z_0p'(z_0)=t(1-(p(z_0))^2),\ \left(t\le-\frac{1}{2}\right)$$

eşitliği geçerlidir. Daha fazla olarak $p(z_0)=0+Ai$ bağıntısı gerçeklenirse

$$z_0p'(z_0)=t(1+A^2)\le-\frac{1}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İSPAT: $p(z)$ fonksiyonu yardımıyla

(2.82) $$w(z)=\frac{p(z)-1}{p(z)+1}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $w(z)$ fonksiyonu D de analitik ve $p(0)=1$ olduğundan $w(0)=0$ koşulu gerçeklenir. Ayrıca $\frac{z-1}{z+1}$ lineer transformasyonu sağ yarım düzlemi, birim çembere resmettiğinden (2.82) den dolayı $|w(z)|<1$ koşulunu gerçekler. Diğer taraftan $\operatorname{Re} p(z)$, $|z|=r$ çemberi üzerinde bir z_0 noktasında minimum değerini alıyorsa (2.82) yazılışından dolayı $w(z)$ aynı noktada maksimum değerini alır. Dolayısıyla I.S. Jack lemmasından (Lemma 2.1)

(2.83) $$z_0 w'(z_0)=kw(z_0),\ k\geq 1$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Diğer taraftan (2.82) ifadesinden türev alırsak

$$w'(z)=\frac{p'(z)(p(z)+1)-p'(z)(p(z)-1)}{(p(z)+1)^2}$$

$$w'(z)=\frac{p'(z)p(z)+p'(z)-p'(z)p(z)+p'(z)}{(p(z)+1)^2}$$

(2.84) $$w'(z)=\frac{2p'(z)}{(p(z)+1)^2}$$

eşitliğini elde ederiz. (2.84) eşitliğinin her iki tarafı z ile çarpılırsa

(2.85) $$zw'(z)=\frac{2zp'(z)}{(p(z)+1)^2}$$

ifadesi elde edilir. (2.82) ve (2.85) bağıntılarından hareketle

$$\frac{zw'(z)}{w(z)}=\frac{2zp'(z)}{(p(z)+1)^2}\frac{p(z)+1}{p(z)-1}=\frac{2zp'(z)}{p^2(z)-1}$$

(2.86) $$-\frac{zw'(z)}{w(z)}=\frac{2zp'(z)}{1-p^2(z)}$$

elde edilir. (2.83) eşitliği (2.86) da kullanılırsa

$$-\frac{kw(z_0)}{2w(z_0)}=\frac{z_0p'(z_0)}{1-p^2(z_0)}\Rightarrow -\frac{k}{2}=\frac{z_0p'(z_0)}{1-p^2(z_0)}\Rightarrow$$

(2.87) $$z_0p'(z_0)=-\frac{k}{2}(1-p^2(z_0))$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan

(2.88) $$k \geq 1 \Rightarrow -k \leq -1 \Rightarrow -\frac{k}{2} \leq -\frac{1}{2}$$

bulunur. (2.87) ve (2.88) bağıntıları birlikte düşünülürse

$$z_0 p'(z_0) = t(1 - p^2(z_0)),\ t = -\frac{k}{2} \leq -\frac{1}{2}$$

olarak bulunur. Eğer

$$p(z_0) = 0 + Ai$$

ise bu durumda

$$p^2(z_0) = (0 + Ai)^2 = A^2 i^2 = -A^2$$

bulunur.

$$z_0 p'(z_0) = -\frac{k}{2}(1 - p^2(z_0))$$

(2.89) $$z_0 p'(z_0) = -\frac{k}{2}(1 + A^2)$$

$A \in \mathbb{R} \Rightarrow A^2 > 0,\ k \geq 1$ olduğundan $-k \leq -1 \Rightarrow -\frac{k}{2} \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow$

(2.90) $$-\frac{k}{2}(1 + A^2) \leq -\frac{1}{2}(1 + A^2)$$

eşitliği elde edilir.

$$1 + A^2 \geq 1 \Rightarrow -(1 + A^2) \leq -1.$$

(2.91) $$-\frac{(1 + A^2)}{2} \leq -\frac{1}{2}$$

(2.90) ve (2.91) eşitlikleri birlikte düşünülürse

(2.92) $$-\frac{k}{2}(1 + A^2) \leq -\frac{1}{2}(1 + A^2) \leq -\frac{1}{2}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.92) ve (2.89) beraber düşünülürse

(2.93) $$z_0 p'(z_0) = -\frac{k}{2}(1 + A^2) \leq -\frac{1}{2}$$

bulunur. $t = -\frac{k}{2}$ alınırsa (2.93) ifadesi

$$z_0 p'(z_0) = t(1 + A^2) \leq -\frac{1}{2}$$

şekline gelir.

TEOREM 2.15: $p(z)=1+p_1z+p_2z^2+...$ fonksiyonu $D=\{z\|z|<1\}$ de tanımlanmış, analitik olsun ve $\operatorname{Re} p(z)>0,\ p(0)=1$ koşullarını gerçeklesin. $w(z)$, D de analitik $w(0)=0,\ |w(z)|<1$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{A(z)-B(z)}{4}\le \operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)}{1-w^2(z)}\right)\le \frac{A(z)+B(z)}{4}$$

eşitsizliği

$$A(z)=\operatorname{Re}\left(p(z)-\frac{1}{p(z)}\right),\qquad B(z)=\frac{r^2|p(z)+1|^2-|p(z)-1|^2}{(1-r^2)|p(z)|}$$

açılımına sahip fonksiyonlar için gerçeklenir.

İSPAT: $p(z)=1+p_1z+p_2z^2+...$ fonksiyonu D de tanımlanmış analitik $p(0)=1$, $\operatorname{Re} p(z)>0$ koşullarını gerçekleyen fonksiyon olmak üzere

(2.94) $$p(z)=\frac{1+w(z)}{1-w(z)}\Rightarrow \frac{1}{p(z)}=\frac{1-w(z)}{1+w(z)}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla (2.94) eşitliklerinden

$$p(z)-\frac{1}{p(z)}=\frac{1+w(z)}{1-w(z)}-\frac{1-w(z)}{1+w(z)}\Rightarrow$$

(2.95) $$\left(p(z)-\frac{1}{p(z)}\right)=\frac{4w(z)}{1-w^2(z)}$$

ifadesi elde edilir. (2.95) den hareketle

(2.96) $$A(z)=\operatorname{Re}\left(p(z)-\frac{1}{p(z)}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{4w(z)}{1-w^2(z)}\right)$$

bulunur. Benzer tarzda hareket ederek (2.94) yazılışından

$$r^2|p(z)+1|^2=r^2\left|\frac{1+w(z)}{1-w(z)}+1\right|^2=r^2\left|\frac{1+w(z)+1-w(z)}{1-w(z)}\right|^2=r^2\left|\frac{2}{1-w(z)}\right|^2\Rightarrow$$

(2.97) $$r^2|p(z)+1|^2=\frac{4r^2}{|1-w(z)|^2}$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan

$$|p(z)-1|^2=\left|\frac{1+w(z)}{1-w(z)}-1\right|^2=\left|\frac{1+w(z)-1+w(z)}{1-w(z)}\right|^2=\left|\frac{2w(z)}{1-w(z)}\right|^2\Rightarrow$$

(2.98) $$\left|p(z)-1\right|^2=\frac{4\left|w(z)\right|^2}{\left|1-w(z)\right|^2}$$

dır. (2.97) ve (2.98) ifadelerinin birlikte kullanılmasıyla

$$B(z)=\frac{r^2\left|p(z)+1\right|^2-\left|p(z)-1\right|^2}{(1-r^2)\left|p(z)\right|}=\frac{\dfrac{4r^2}{\left|1-w(z)\right|^2}-\dfrac{4\left|w(z)\right|^2}{\left|1-w(z)\right|^2}}{(1-r^2)\left|\dfrac{1+w(z)}{1-w(z)}\right|^2}\Rightarrow$$

(2.99) $$B(z)=\frac{4(r^2-\left|w(z)\right|^2)}{(1-r^2)\left|1+w^2(z)\right|^2}$$

bulunur. Diğer taraftan $w(z)$ fonksiyonu

(2.100) $$\left|zw'(z)-w(z)\right|\leq\frac{r^2-\left|w(z)\right|^2}{1-r^2}$$

eşitsizliğini gerçekler. (2.100) ifadesini $\left|1-w^2(z)\right|$ ile bölersek

(2.101) $$\left|\frac{zw'(z)-w(z)}{1-w^2(z)}\right|\leq\frac{r^2-\left|w(z)\right|^2}{(1-r^2)\left|1-w^2(z)\right|}$$

bağıntısını buluruz. z herhangi bir kompleks sayı olduğuna göre

(2.102) $$-\left|z\right|\leq\operatorname{Re}z\leq\left|z\right|$$

eşitsizliği gerçeklenir. Dolayısıyla (2.102)'ye göre (2.101) ifadesinden

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)-w(z)}{1-w^2(z)}\right)\leq\left|\frac{zw'(z)-w(z)}{1-w^2(z)}\right|\leq\frac{r^2-\left|w(z)\right|^2}{(1-r^2)\left|1-w^2(z)\right|}\Rightarrow$$

(2.103) $$\operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)-w(z)}{1-w^2(z)}\right)\leq\frac{r^2-\left|w(z)\right|^2}{(1-r^2)\left|1-w^2(z)\right|}$$

eşitsizliği yazılabilir. (2.103) ifadesi aynı zamanda

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)-w(z)}{1-w^2(z)}\right)\leq\operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)}{1-w^2(z)}-\frac{w(z)}{1-w^2(z)}\right)\leq\frac{r^2-\left|w(z)\right|^2}{(1-r^2)\left|1-w^2(z)\right|}\Rightarrow$$

(2.104) $$\operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)}{1-w^2(z)}\right)\leq\frac{r^2-\left|w(z)\right|^2}{(1-r^2)\left|1-w^2(z)\right|}+\operatorname{Re}\left(\frac{w(z)}{1-w^2(z)}\right)$$

şeklinde yazılabilir. (2.96) ve (2.99) ifadeleri (2.104) eşitsizliğinde göz önüne alınırsa

(2.105) $$\mathrm{Re}\left(\frac{zw'(z)}{1-w^2(z)}\right)\le\frac{A(z)}{4}+\frac{B(z)}{4}$$

elde edilir. Ayrıca (2.101) ve (2.102) ifadelerinden

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zw'(z)-w(z)}{1-w^2(z)}\right)\ge-\frac{r^2-|w(z)|^2}{(1-r^2)|1-w^2(z)|}\Rightarrow$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zw'(z)}{1-w^2(z)}\right)-\mathrm{Re}\left(\frac{w(z)}{1-w^2(z)}\right)\ge-\frac{r^2-|w(z)|^2}{(1-r^2)|1-w^2(z)|}\Rightarrow$$

(2.106) $$\mathrm{Re}\left(\frac{zw'(z)}{1-w^2(z)}\right)\ge\mathrm{Re}\left(\frac{w(z)}{1-w^2(z)}\right)-\frac{r^2-|w(z)|^2}{(1-r^2)|1-w^2(z)|}$$

eşitsizliği yazılır. (2.106) ifadesinde (2.96) ve (2.99) kullanılırsa

(2.107) $$\mathrm{Re}\left(\frac{zw'(z)}{1-w^2(z)}\right)\ge\frac{A(z)}{4}-\frac{B(z)}{4}$$

bulunur. (2.105) ve (2.107) eşitsizliklerinden

$$\frac{A(z)-B(z)}{4}\le\mathrm{Re}\left(\frac{zw'(z)}{1-w^2(z)}\right)\le\frac{A(z)+B(z)}{4}$$

elde edilir.

TANIM 2.2: (Genelleştirilmiş Pozitif Reel Kısma Haiz Fonksiyonlar Sınıfı): $w=f(z)$ fonksiyonu birim diskte analitik, $w(0)=0$, $|w(z)|<1$ ve A, B reel sayılar olmak üzere $-1\le B<A\le 1$ koşullarını gerçeklesin. Eğer

(2.108) $$p(z)=1+p_1z+p_2z^2+...$$

açılımına sahip $p(z)$ fonksiyonu

(2.109) $$p(z)=\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}$$

şeklinde ifade edilebilirse “ $p(z)$ fonksiyonu $P\,(A, B)$ sınıfına aittir” denir.

(2.109) yazılışı, subordinasyon prensibi ve

(2.110) $$p_0(z)=\frac{1+Az}{1+Bz}$$

fonksiyonu göz önüne alındığında (2.108) açılımına sahip bir fonksiyonun $P\,(A, B)$ sınıfına ait olabilmesi için gerek ve yeter şart

(2.111) $p(z) \prec \dfrac{1+Az}{1+Bz}$

subordinasyonunu gerçeklemesidir.

Bu fonksiyon sınıfı W. Janowski tarafından tanımlanmıştı ve yalınkat fonksiyonlar teorisindeki en genel fonksiyon sınıfı olma özelliğini taşır. Bu durum aşağıdaki şekilde açıklanabilir.

1. Durum: $A=1,\ B=-1$ ise (2.109) yazılışından dolayı $p(z)=\dfrac{1+w(z)}{1-w(z)}$ haline gelir ki $P(1,-1)$ sınıfı, pozitif reel kısma haiz fonksiyon sınıfıdır.

2. Durum: $A=1-2\alpha$, $B=-1$, $0<\alpha<1$ olması halinde $p(z)$ fonksiyonu, $p(0)=1$, $\operatorname{Re} p(z)>\alpha$ koşullarını gerçekleyen birim diskte analitik fonksiyonların sınıfındadır.

3. Durum: $A=1,\ B=0$ olması durumunda $P(1,0)$ sınıfı, birim diskte analitik $p(0)=1$ ve $|p(z)-1|<1$ koşullarını gerçekleyen fonksiyonların sınıfıdır.

4. Durum: $A=\alpha,\ B=0,\ 0<\alpha<1$ olması durumunda $P(\alpha,0)$ sınıfı, birim diskte analitik $p(0)=1$ ve $|p(z)-1|<\alpha$ koşullarını gerçekleyen fonksiyonların sınıfıdır.

5. Durum: $A=1,\ B=-1+\dfrac{1}{M},\ M>\dfrac{1}{2}$ olması durumunda $P\left(1,-1+\dfrac{1}{M}\right)$ sınıfı, birim diskte analitik $p(0)=1$ ve $|p(z)-M|<M$ koşullarını gerçekleyen fonksiyonların sınıfıdır.

6. Durum: $A=\alpha,\ B=-\alpha,\ 0<\alpha<1$ olması durumunda $P(\alpha,-\alpha)$ sınıfı, birim diskte analitik $p(0)=1$ ve $\left|\dfrac{p(z)-1}{p(z)+1}\right|<\alpha$ koşullarını gerçekleyen fonksiyonların sınıfıdır.

Bu fonksiyon sınıfına ait genel özellikler aşağıdaki şekilde verilebilir.

ÖZELLİK 2.1: $p(z) \in \mathcal{P}(A,B)$ ise $\mathcal{P}(D)$ resim bölgesi

$$D_1 = p_0(-1) = \frac{1-A}{1-B},\ D_2 = p_0(1) = \frac{1+A}{1+B}$$

noktaları bir çapın uç noktaları olan ve merkezi reel eksen üzerinde bulunan diskin içindedir. Başka bir değişle, $0 < D_1 < 1 < D_2$ koşullarını gerçekleyen bir nokta çifti için $-1 \le B < A \le 1$ koşullarını gerçekleyen A ve B reel sayıları vardır ki $\mathcal{P}(D)$, D_1 ve D_2 noktalarını bir çapın uç noktaları kabul eden disktir.

Gerçekten, $w = u + iv$ olmak üzere

$$w = \frac{1+Az}{1+Bz} \Leftrightarrow w + Bwz = 1 + Az \Leftrightarrow w - 1 = (A - Bw)z \Leftrightarrow z = \frac{w-1}{A-Bw}$$

$$|z|^2 = r^2 = \frac{|(u+iv)-1|^2}{|A-B(u+iv)|^2} = \frac{|(u-1)+iv|^2}{|(A-Bu)-iBv)|^2} = \frac{(u-1)^2+v^2}{(A-Bu)^2+(Bv)^2} \Rightarrow$$

$$r^2 = \frac{(u-1)^2+v^2}{(A-Bu)^2+(Bv)^2} = \frac{u^2-2u+1+v^2}{A^2-2ABu+B^2u^2+B^2v^2} \Rightarrow$$

$$u^2-2u+1+v^2-A^2r^2+2ABr^2u-B^2r^2u^2-B^2r^2v^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(1-B^2r^2)u^2+(1-B^2r^2)v^2-2(1-ABr^2)u+(1-A^2r^2) = 0 \Rightarrow$$

$$u^2+v^2-2\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}u+\frac{1-A^2r^2}{1-B^2r^2} = 0$$

çember denklemini buluruz $(x^2+y^2+Ax+By+C=0)$. Bu çemberin merkezi

$$\left.\begin{array}{l} a = -\dfrac{A}{2} = \dfrac{2\dfrac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}}{2} = \dfrac{1-ABr^2}{1-B^2r^2} \\[2ex] b = -\dfrac{B}{2} = \dfrac{0}{2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(r) = \left(\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2},\ 0\right)$$

yarıçapı

$$\rho(r) = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2} = \frac{\sqrt{\left(2\dfrac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right)^2+0-4\left(\dfrac{1-A^2r^2}{1-B^2r^2}\right)}}{2} \Rightarrow$$

$$\rho(r) = \sqrt{\left(\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right)^2-\frac{1-A^2r^2}{1-B^2r^2}} = \sqrt{\frac{(1-ABr^2)^2-(1-B^2r^2)(1-A^2r^2)}{(1-B^2r^2)^2}}$$

$$\rho(r)=\sqrt{\frac{1-2ABr^2+A^2B^2r^4-1+A^2r^2+B^2r^2-A^2B^2r^4}{(1-B^2r^2)^2}}$$

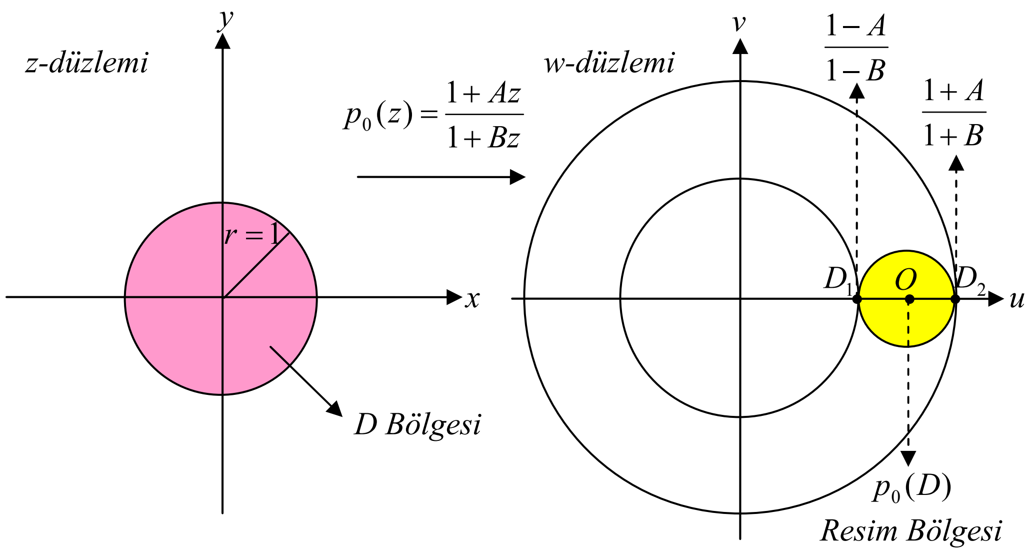
$$\rho(r)=\sqrt{\frac{A^2r^2-2ABr^2+B^2r^2}{(1-B^2r^2)^2}}=r\sqrt{\frac{A^2-2AB+B^2}{(1-B^2r^2)^2}}=r\sqrt{\frac{(A-B)^2}{(1-B^2r^2)^2}}$$

$$\rho(r)=\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}$$

olarak bulunur. Bu ifade ayrıca

$$\left|p(z)-\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right|\le\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}$$

şeklinde ifade edilebilir. Özelliğin geometrik ifadesi aşağıdaki Şekil 2.2'de verilmiştir.



Şekil 2.2

İki nokta arasındaki uzaklık formülünden yada orta nokta formülünden hareket edilirse

$$\frac{|D_1D_2|}{2}=\sqrt{\left(\frac{1+A}{1+B}-\frac{1-A}{1-B}\right)^2}=\frac{A-B}{1-B^2}\ \text{(çap)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1+A}{1+B}-\frac{A-B}{1-B^2}\right)^2}=\frac{1-AB}{1-B^2}\ \text{(merkez)}$$

olarak bulunur.

ÖZELLİK 2.2: $p(z)$ fonksiyonu $P(A,B)$ sınıfına, $q(z)$ fonksiyonu ise $P(1,-1)$ sınıfına ait fonksiyonlar olsun. Bu iki fonksiyon arasındaki bağıntı, bulundukları sınıfların tanımlarından hareketle aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$q(z)$ fonksiyonu $P(1,-1)$ sınıfına ait bir fonksiyon (pozitif reel kısma sahip fonksiyon) olduğundan

(2.112) $$q(z) \in P(1,-1) \Leftrightarrow q(z) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)} \Leftrightarrow q(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$$

bağıntıları geçerlidir.

$p(z)$ fonksiyonu $P(A,B)$ sınıfına ait bir fonksiyon olduğundan

(2.113) $$p(z) \in P(A,B) \Leftrightarrow p(z) = \frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)} \Leftrightarrow p(z) \prec \frac{1+Az}{1+Bz}$$

bağıntıları geçerlidir.

(2.112) ve (2.113) ifadelerindeki $w(z)$ fonksiyonu Schwarz Lemmasının koşullarını gerçekleyen bir fonksiyondur. (2.112) bağıntısından hareket ederek $w(z)$ fonksiyonunu $q(z)$ cinsinden ifade edersek

$$q(z) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)} \Leftrightarrow q(z) - q(z)w(z) = 1 + w(z) \Leftrightarrow$$
$$q(z) - 1 = w(z)(q(z)+1) \Leftrightarrow$$

(2.114) $$w(z) = \frac{q(z)-1}{q(z)+1}$$

yazabiliriz. (2.114) eşitliği (2.113) de kullanılırsa

$$p(z) = \frac{1 + A\dfrac{q(z)-1}{q(z)+1}}{1 + B\dfrac{q(z)-1}{q(z)+1}} \Rightarrow$$

(2.115) $$p(z) = \frac{(1+A)q(z) + (1-A)}{(1+B)q(z) + (1-B)}$$

ifadesine ulaşılır. (2.115) eşitliği $P(A,B)$ sınıfı ile $P(1,-1)$ sınıfı arasındaki bağıntıyı gösterir.

ÖZELLİK 2.3: $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n + \ldots$ fonksiyonu $P(A,B)$ sınıfına ait ise

$$|p_n| \le (A-B)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Bu özelliğin ispatında Mobius transformasyonları için Y. POLATOĞLU tarafından verilen aşağıdaki lemma kullanılır. Buna göre a, b, c, d kompleks sayılar olmak üzere birim disk $D = \{z \| z| < 1\}$ de tanımlanmış olan $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ Mobius transformasyonunun Taylor açılımındaki $n.$ katsayının modülü

$$\left|\frac{c}{d}\right|^n \frac{1}{|bd|} \leq 1, \left|\frac{b}{d}\right| = 1$$

koşullarını gerçeklerse

(2.116) $$|a_n| \leq \left\|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right\| = |ad - bc|$$

ifadesi geçerlidir. Buna göre

(2.117) $$p(z) \in \mathcal{P}\ (A,B) \Leftrightarrow p(z) = \frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)} \Leftrightarrow p(z) \prec \frac{1+Az}{1+Bz}$$

$$|p_n| \leq \left\|\begin{matrix} A & 1 \\ B & 1 \end{matrix}\right\| = (A-B) \Rightarrow |p_n| \leq (A-B)$$

bulunur.

ÖZELLİK 2.4: $p(z) \in \mathcal{P}(A,B)$ olsun. Bu durumda

(2.118) $$\frac{1-Ar}{1-Br} \leq |p(z)| \leq \frac{1+Ar}{1+Br}$$

(2.119) $$\frac{1-Ar}{1-Br} \leq \operatorname{Re} p(z) \leq \frac{1+Ar}{1+Br}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

Gerçekten, herhangi bir z kompleks sayısı için

(2.120) $$-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu biliyoruz. Bu ifadeyi Özellik 2.1'de gösterdiğimiz

(2.121) $$\left|p(z) - \frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right| \leq \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}$$

eşitsizliğinde kullanırsak

$$\operatorname{Re}\left(p(z) - \frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right) \geq -\left|p(z) - \frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right| \geq -\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} p(z) - \frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2} \geq -\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2} \Rightarrow \operatorname{Re} p(z) \geq \frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2} - \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2} \Rightarrow$$

(2.122) $$\operatorname{Re} p(z) \geq \frac{1-(A-B)r-ABr^2}{1-B^2r^2}$$

elde edilir. Buradan

$$1-(A-B)r-ABr^2 = 0 \Rightarrow$$

$$r_{1,2} = \frac{(A-B) \pm \sqrt{(A-B)^2+4AB}}{2AB} \Rightarrow$$

$$r_{1,2} = \frac{(A-B) \pm \sqrt{A^2-2AB+B^2+4AB}}{2AB} \Rightarrow$$

$$r_{1,2} = \frac{(A-B) \pm \sqrt{A^2+B^2+2AB}}{2AB} = \frac{(A-B) \pm \sqrt{(A+B)^2}}{2AB} \Rightarrow$$

$$r_{1,2} = \frac{(A-B) \pm (A+B)}{2AB}$$

$$r_1 = \frac{(A-B)-(A+B)}{2AB} = \frac{-A+B-A-B}{2AB} = -\frac{2A}{2AB} = -\frac{1}{B} \Rightarrow Br+1=0$$

$$r_2 = \frac{(A-B)+(A+B)}{2AB} = \frac{-A+B+A+B}{2AB} = \frac{2B}{2AB} = \frac{1}{A} \Rightarrow 1-Ar=0$$

(2.123) $$1-(A-B)r-ABr^2 = (1+Br)(1-Ar)$$

ifadesini yazabiliriz. (2.123) eşitliği (2.122) eşitliğinde kullanılırsa

$$\operatorname{Re} p(z) \geq \frac{1-(A-B)r-ABr^2}{1-B^2r^2} = \frac{(1+Br)(1-Ar)}{(1+Br)(1-Br)} = \frac{1-Ar}{1-Br} \Rightarrow$$

(2.124) $$\operatorname{Re} p(z) \geq \frac{1-Ar}{1-Br}$$

elde edilir. Ayrıca

$$|p(z)| \geq \operatorname{Re} p(z)$$

eşitliğini (2.124) eşitliğine uygularsak

(2.125) $$|p(z)| \geq \frac{1-Ar}{1-Br}$$

bulunur. Diğer yandan z_1 ve z_2 herhangi iki kompleks sayı olmak üzere

$$|z_1|-|z_2| \leq |z_1-z_2|$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizlikten hareketle

$$|p(z)| - \left|\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right| \le \left|p(z) - \frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right| \le \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2} \Rightarrow$$

$$|p(z)| - \frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2} \le \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2} \Rightarrow |p(z)| \le \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2} + \frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2} \Rightarrow$$

$$|p(z)| \le \frac{1+(A-B)r-ABr^2}{1-B^2r^2}$$

elde edilir.

$$1+(A-B)r-ABr^2 = (1+Ar)(1-Br)$$

ve

$$\text{(2.126)} \qquad \operatorname{Re} p(z) \le |p(z)|$$

ifadeleri (2.126) eşitliğinde kullanılırsa

$$\operatorname{Re} p(z) \le |p(z)| \le \frac{(1+Ar)(1-Br)}{(1-Br)(1+Br)} = \frac{1+Ar}{1+Br} \Rightarrow$$

$$\text{(2.127)} \qquad |p(z)| \le \frac{1+Ar}{1+Br} \Rightarrow$$

$$\text{(2.128)} \qquad \operatorname{Re} p(z) \le \frac{1+Ar}{1+Br}$$

bulunur. (2.124), (2.128) ve (2.125), (2.127) eşitlikleri birlikte düşünülürse

$$\frac{1-Ar}{1-Br} \le |p(z)| \le \frac{1+Ar}{1+Br}$$

$$\frac{1-Ar}{1-Br} \le \operatorname{Re} p(z) \le \frac{1+Ar}{1+Br}$$

eşitsizlikleri elde edilir ki bu da özelliğin gerçekleştiğini gösterir.

TEOREM 2.16: $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu $D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ de tanımlanmış ve analitik olsun. $w(z)$ fonksiyonu birim diskte analitik, $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere

$$p(z) = \frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}, \quad (-1 \le B < A \le 1)$$

şeklinde yazılabilsin. Bu taktirde

$$\frac{|b|}{2} \max_{|zt|=tr} \left(\frac{p(z)+1}{z} \right) = \frac{|b|}{r} + \frac{|b|(A-B)}{2} \frac{1}{1+Br}, \; b \in \mathbb{C} - \{0\}$$

eşitliği geçerlidir.

İSPAT: Özellik 2.1'den

$$(2.129) \qquad \left| p(z) - \frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2} \right| \leq \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}$$

eşitsizliği yazılabilir. (2.129) ifadesinden hareketle

$$\left| p(z) + 1 - 1 - \frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2} \right| \leq \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2} \Rightarrow$$

$$(2.130) \qquad \left| (p(z)+1) - \frac{2-(AB+B^2)r^2}{1-B^2r^2} \right| \leq \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada üçgen eşitsizliğinin

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

ifadesi kullanılırsa

$$|p(z)+1| - \left| \frac{2-(AB+B^2)r^2}{1-B^2r^2} \right| \leq \left| (p(z)+1) - \frac{2-(AB+B^2)r^2}{1-B^2r^2} \right| \leq \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2} \Rightarrow$$

$$|p(z)+1| \leq \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2} + \frac{2-(AB+B^2)r^2}{1-B^2r^2} \Rightarrow$$

$$(2.131) \qquad |p(z)+1| \leq \frac{2+(A-B)r-(AB+B^2)r^2}{1-B^2r^2}$$

bulunur. (2.131) eşitsizliğinden

$$(2.132) \qquad \frac{|b|}{2}|p(z)+1| \leq \frac{2|b|+|b|(A-B)r-|b|(AB+B^2)r^2}{2(1-B^2r^2)}$$

$$\frac{|b|}{2}\left| \frac{p(z)+1}{z} \right| \leq \frac{2|b|+|b|(A-B)r-|b|(AB+B^2)r^2}{2|z|(1-B^2r^2)}, \ |z| = r$$

alınarak

$$(2.133) \qquad \left| \frac{b}{2} \frac{p(z)+1}{z} \right| \leq \frac{2|b|+|b|(A-B)r-|b|(AB+B^2)r^2}{2r(1-B^2r^2)}, \ |z| = r$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Maksimum kavramını kullanarak

$$(2.134) \qquad \frac{|b|}{2} \max_{|z|=rt} \left(\frac{p(z)+1}{z} \right) = \frac{1}{2} \frac{2|b|+|b|(A-B)r-|b|(AB+B^2)r^2}{r(1-B^2r^2)}$$

yazılabilir. Şimdi sağ taraftaki ifadeyi çarpanlarına ayıralım.

$$\frac{2|b|+|b|(A-B)r-|b|(AB+B^2)r^2}{r(1-Br)(1+Br)} \equiv \frac{X}{r} + \frac{Y}{1+Br} + \frac{Z}{1-Br} \Rightarrow$$

$$\equiv \frac{X(1-B^2r^2)+Yr(1-Br)+Zr(1+Br)}{r(1+Br)(1-Br)} \Rightarrow$$

$$\frac{2|b|+|b|(A-B)r-|b|(AB+B^2)r^2}{r(1-Br)(1+Br)} \equiv \frac{X+(Y+Z)r+(-XB^2-YB+ZB)r^2}{r(1+Br)(1-Br)} \Rightarrow$$

$$X=2|b|,\ Y=|b|(A-B),\ \ Z=0 \Rightarrow$$

$$\frac{2|b|+|b|(A-B)r-|b|(AB+B^2)r^2}{2r(1-Br)(1+Br)} \equiv \frac{2|b|}{r}+\frac{|b|(A-B)}{1+Br} \Rightarrow$$

(2.135) $$\frac{1}{2}\frac{2|b|+|b|(A-B)r-|b|(AB+B^2)r^2}{2r(1-Br)(1+Br)} \equiv \frac{|b|}{r}+\frac{|b|(A-B)}{2}\frac{1}{1+Br} \Rightarrow$$

(2.134) ve (2.135) ifadelerinden

$$\frac{|b|}{2}\max_{|zt|=rt}\left(\frac{p(z)+1}{z}\right)=\frac{|b|}{r}+\frac{|b|(A-B)}{2}\frac{1}{1+Br}$$

eşitsizliği elde edilir.

TEOREM 2.17: $p(z)=1+p_1z+p_2z^2+...$ fonksiyonu birim disk $D=\{z||z|<1\}$ de tanımlanmış ve analitik olsun. $w(z)$ fonksiyonu birim diskte analitik, $w(0)=0$, $|w(z)|<1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere

$$p(z)=\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)},\ \ (-1\leq B<A\leq 1)$$

şeklinde yazılabilsin. Bu taktirde

$$\frac{|b|}{2}\max_{|zt|=tr}\left(\frac{p(z)-1}{z}\right)=\frac{|b|(A-B)}{1+Br},\ b\in \mathbb{C}-\{0\}$$

eşitliği geçerlidir.

İSPAT: Özellik 2.1'den biliyoruz ki

(2.136) $$\left|p(z)-\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right|\leq\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}$$

eşitsizliği vardır. Burada aşağıdaki gibi hareket ederek

$$\left|p(z)+1-1-\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right|\leq\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2} \Rightarrow$$

(2.137) $$\left|(p(z)-1)-\frac{(B^2-AB)r^2}{1-B^2r^2}\right|\leq\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Üçgen eşitsizliğinin

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$$

ifadesi (2.137) de kullanılırsa

$$|p(z)-1| - \left|\frac{(B^2 - AB)r^2}{1-B^2r^2}\right| \le \left|(p(z)-1) - \frac{(B^2-AB)r^2}{1-B^2r^2}\right| \le \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2} \Rightarrow$$

(2.138) $$|p(z)-1| \le \frac{[(A-B)-B(A-B)r]r}{1-B^2r^2}$$

elde edilir. (2.138) eşitsizliği aynı zamanda

$$\frac{|b|}{2}\left|\frac{p(z)-1}{z}\right| \le \frac{|b|[(A-B)-B(A-B)r]r}{2|z|(1-B^2r^2)} \Rightarrow, \ |z| = r \text{ alınarak}$$

$$\frac{|b|}{2}\left|\frac{p(z)-1}{z}\right| \le \frac{|b|[(A-B)-B(A-B)r]r}{2(1-B^2r^2)r} \Rightarrow$$

$$\frac{|b|}{2}\left|\frac{p(z)-1}{z}\right| \le \frac{|b|[(A-B)-B(A-B)r]}{2(1-B^2r^2)} \le \frac{|b|[(A-B)-B(A-B)r]}{(1-B^2r^2)} \Rightarrow$$

$$\frac{|b|}{2}\left|\frac{p(z)-1}{z}\right| \le \frac{|b|(A-B)(1-Br)}{(1-Br)(1+Br)} = \frac{|b|(A-B)}{(1+Br)} \Rightarrow$$

(2.139) $$\frac{|b|}{2}\left|\frac{p(z)-1}{z}\right| \le \frac{|b|(A-B)}{(1+Br)}$$

şeklinde yazılabilir. (2.139) ifadesinde maksimum kavramını kullanırsak

$$\frac{|b|}{2}\max_{|zt|=tr}\left(\frac{p(z)-1}{z}\right) = \frac{|b|(A-B)}{1+Br}$$

elde edilir.

TEOREM 2.18: $f(z) = z + a_2z^2 + ...$ fonksiyonu birim disk $D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ de tanımlanmış, analitik, $-1 \le B < A \le 1$ ve $B \ne 0$ olmak üzere

(2.140) $$2\left[1 + \frac{1}{b}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1\right)\right] - 1 = \frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}, \ b \in \mathbb{C} - \{0\}$$

koşulunu gerçeklerse

$$\left|r^{1-b}\right| r^{|b|}(1-Br)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}} \le |f(z)| \le \left|r^{1-b}\right| r^{|b|}(1+Br)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}}$$

eşitsizliği vardır. Burada $w(z)$ fonksiyonu birim diskte analitik, $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyondur.

İSPAT: Özellik 2.1'de gösterdik ki

$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + ...$ fonksiyonu birim diskte analitik bir fonksiyon olmak üzere

(2.141) $$p(z) = \frac{1 + Aw(z)}{1 + Bw(z)}$$

şeklinde yazılabiliyorsa

(2.142) $$\left| p(z) - \frac{1 - ABr^2}{1 - B^2 r^2} \right| \le \frac{(A - B)r}{1 - B^2 r^2}$$

eşitsizliğini gerçekler.

(2.141) yazılışı (2.140) ifadesi ile karşılaştırılırsa

(2.143) $$2\left[1 + \frac{1}{b}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1\right)\right] - 1 = p(z)$$

eşitliği yazılabilir. (2.143) ifadesinden hareketle

$$\frac{1}{b}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1\right) = \frac{1}{2}(p(z) + 1) - 1 \Rightarrow z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1 = \frac{b}{2}(p(z) + 1) - b \Rightarrow$$

(2.144) $$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{b}{2}(p(z) + 1) + (1 - b)$$

yazılışını elde ederiz.

$$\left| p(z) - \frac{1 - ABr^2}{1 - B^2 r^2} \right| \le \frac{(A - B)r}{1 - B^2 r^2} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{1}{2}(p(z) + 1) - \frac{2 - (B^2 + AB)r^2}{2(1 - B^2 r^2)} \right| \le \frac{(A - B)r}{2(1 - B^2 r^2)} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{b}{2}(p(z) + 1) - \frac{2b - b(B^2 + AB)r^2}{2(1 - B^2 r^2)} \right| \le \frac{|b|(A - B)r}{2(1 - B^2 r^2)} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{b}{2}(p(z) + 1) + (1 - b) - (1 - b) - \frac{2b - b(B^2 + AB)r^2}{2(1 - B^2 r^2)} \right| \le \frac{|b|(A - B)r}{2(1 - B^2 r^2)} \Rightarrow$$

(2.145) $$\left| \left[\frac{b}{2}(p(z) + 1) + (1 - b)\right] - \frac{2 - [2B^2 + b(B^2 - AB)r^2]}{2(1 - B^2 r^2)} \right| \le \frac{|b|(A - B)r}{2(1 - B^2 r^2)}.$$

Öte yandan (2.144) eşitliğinden

(2.146) $$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{b}{2}(p(z) + 1) + (1 - b) \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{b}{2}\frac{(p(z) + 1)}{z} + \frac{(1 - b)}{z}$$

elde ederiz. (2.146) ifadesinde integral alırsak

$$\log f(z) = (1-b)\log z + \frac{b}{2}\int_0^z \frac{p(\zeta)+1}{\zeta}d\zeta \Rightarrow$$

$$\log f(z) - \log z^{(1-b)} = \frac{b}{2}\int_0^z \frac{p(\zeta)+1}{\zeta}d\zeta \Rightarrow \log\frac{f(z)}{z^{(1-b)}} = \frac{b}{2}\int_0^z \frac{p(\zeta)+1}{\zeta}d\zeta \Rightarrow$$

$$\frac{f(z)}{z^{(1-b)}} = \exp\left[\frac{b}{2}\int_0^z \frac{p(\zeta)+1}{\zeta}d\zeta\right] \Rightarrow$$

(2.147) $$f(z) = z^{(1-b)}\exp\left[\frac{b}{2}\int_0^z \frac{p(\zeta)+1}{\zeta}d\zeta\right]$$

eşitliği bulunur. (2.147) ifadesinden

(2.148) $$|f(z)| \le |z^{(1-b)}|\exp\left(\frac{b}{2}\int_0^z\left[\max_{|zt|=rt}\left(\operatorname{Re}\frac{p(\zeta)+1}{\zeta}\right)\right]dt\right)$$

yazılabilir. Öte yandan Teorem 2.16 dan

(2.149) $$\frac{|b|}{2}\max_{|zt|=tr}\operatorname{Re}\left(\frac{p(zt)+1}{z}\right) = \frac{|b|}{r} + \frac{|b|(A-B)}{2(1+Br)},\ b \in \mathbb{C} - \{0\}$$

elde edilir. (2.149) ifadesinden integral alırsak

$$\frac{|b|}{2}\int_0^1 \max_{|zt|=tr}\operatorname{Re}\left(\frac{p(zt)+1}{z}\right)dt = \int_0^1 \frac{|b|}{2}\frac{2}{r}dr + \int_0^1 \frac{|b|(A-B)}{2(1+Br)}dr \Rightarrow$$

$$\frac{|b|}{2}\int_0^1 \max_{|zt|=tr}\operatorname{Re}\left(\frac{p(zt)+1}{z}\right)dt = \log r^{|b|} + \frac{|b|(A-B)}{2B}\log(1+Br) \Rightarrow$$

(2.150) $$\frac{|b|}{2}\int_0^1 \max_{|zt|=tr}\operatorname{Re}\left(\frac{p(zt)+1}{z}\right)dt = \log r^{|b|}(1+Br)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}}$$

bulunur. (2.148) ve (2.150) ifadelerinden

$$|f(z)| \le |r^{(1-b)}|\exp\left[\log r^{|b|}.(1+Br)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}}\right] \Rightarrow$$

(2.151) $$|f(z)| \le |r^{(1-b)}|\, r^{|b|}(1+Br)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}}$$

eşitsizliği elde edilir. Tamamen benzer şekilde hareket edersek alt sınır içinde

(2.152) $$|r^{1-b}|\, r^{|b|}(1-Br)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}} \le |f(z)|$$

ifadesini buluruz. (2.151) ve (2.152) eşitsizlikleri bize

$$|r^{1-b}|\, r^{|b|}(1-Br)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}} \le |f(z)| \le |r^{1-b}|\, r^{|b|}(1+Br)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}}$$

ifadesini verir.

3. YALINKAT FONKSİYONLAR

TANIM 3.1: (Yalınkat Fonksiyonlar) $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış ve analitik olsun. Eğer

$$z_1,\, z_2 \in D,\ z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

injektiflik (bire-bir) koşulu gerçeklenirse $f(z)$ fonksiyonuna “Yalınkat Fonksiyon” denir. Bire-bir olma koşulu aşağıdaki şekilde de ifade edilir.

$$z_1,\, z_2 \in D,\ z_1 = z_2 \Leftrightarrow f(z_1) = f(z_2).$$

Yalınkat fonksiyonlara örnek olarak; genişletilmiş, basit bağlantılı kompleks düzlemde Mobius transformasyonları verilebilir. Gerçekten

$$f(z_1) = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} = f(z_2) \Leftrightarrow$$

$$(az_1 + b)(cz_2 + d) = (az_2 + b)(cz_1 + d) \Leftrightarrow z_1 = z_2$$

TANIM 3.2: (S Sınıfı) $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu birim disk $D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ ’de tanımlanmış, analitik ve yalınkat olsun. $f(z)$ fonksiyonu $f'(0) = 1$ ve $f(0) = 0$ olacak şekilde normalize edilmiştir. Bu tür fonksiyonların cümlesini “S Sınıfı” olarak adlandıracağız.

Bu normalizasyon, aşağıdaki şekilde ifade edilen Riemann Tasvir Teoremindeki $f(\zeta) = 0$, $f'(\zeta) > 0$ koşullarından sağlanmaktadır.

“Kompleks düzlemin özel basit bağlantılı bir alt cümlesini göz önüne alalım. ζ, D bölgesinde verilen bir nokta olmak üzere, $f(\zeta) = 0$, $f'(\zeta) > 0$ koşullarını gerçekleyen ve D’yi birim disk üzerine konform olarak resmeden bir tasvir vardır ve bu tasvir tek türlü belirlidir.”

S sınıfına ait önemli fonksiyonlar aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

ÖZELLİK 3.1: $w = f(z) = z$ idantik fonksiyonu (birim fonksiyon) *D* bölgesini *D* bölgesi üzerine resmeder.

ÖZELLİK 3.2: $w = f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ fonksiyonu *D* bölgesini $\operatorname{Re} w > -\dfrac{1}{2}$ yarı düzlemi üzerine resmeder.

Gerçekten, $w = u + iv$ alınırsa

$$w = \frac{z}{1-z} \Leftrightarrow w - wz = z \Leftrightarrow w = z(1+w) \Leftrightarrow z = \frac{w}{1+w} \Leftrightarrow |z| = \left|\frac{w}{1+w}\right| \Rightarrow$$

$$|z|^2 = 1 = \frac{|w|^2}{|1+w|^2} \Rightarrow 1 = \frac{|u+iv|^2}{|(1+u)+iv|^2} = \frac{u^2+v^2}{(1+u)^2+v^2} \Rightarrow$$

$$(1+u)^2 + v^2 = u^2 + v^2 \Rightarrow$$

$$(1+u)^2 + v^2 - u^2 - v^2 = 0 \Rightarrow 1 + 2u = 0 \Rightarrow u = -\frac{1}{2}$$

bulunur. Buna göre $|z| = 1$ çemberi $\operatorname{Re} w = u = -\dfrac{1}{2}$ doğrusu üzerine resmedilir. Dolayısıyla *D* bölgesi

$$1 > |z|^2 = \frac{|w|^2}{|1+w|^2} = \frac{|u+iv|^2}{|(1+u)+iv|^2} = \frac{u^2+v^2}{(1+u)^2+v^2} \Rightarrow (1+u)^2 + v^2 > u^2 + v^2$$

$$(1+u)^2 + v^2 - u^2 - v^2 > 0 \Rightarrow 1 + 2u > 0 \Rightarrow u = \operatorname{Re} w = \operatorname{Re} f(z) > -\frac{1}{2}$$

yarım düzlemi üzerine resmedilir.

ÖZELLİK 3.3: $w = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonu D bölgesini dik $-\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{Im} w < \dfrac{\pi}{4}$ şeritsel bölge üzerine resmeder.

Gerçekten, $\eta = \dfrac{1+z}{1-z}$ ara transformasyonu $D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ birim diskinin

$w = u_1 + iv_1$ alınırsa,

$$\eta=\frac{1+z}{1-z}\Leftrightarrow \eta-\eta z=1+z\Leftrightarrow \eta-1=z(\eta+1)\Leftrightarrow z=\frac{\eta-1}{\eta+1}\Leftrightarrow |z|=\left|\frac{\eta-1}{\eta+1}\right|$$

$$1>|z|=\frac{|\eta-1|}{|\eta+1|}\Rightarrow 1>|z|^2=\frac{|\eta-1|^2}{|\eta+1|^2}\Rightarrow 1>\frac{|\eta-1|^2}{|\eta+1|^2}\Rightarrow |\eta+1|^2>|\eta-1|^2\Rightarrow$$

$$|(u_1+1)+iv_1|^2>|(u_1-1)+iv_1|^2\Rightarrow (u_1+1)^2+v_1^2>(u_1-1)^2+v_1^2\Rightarrow u_1>0$$

$\mathrm{Re}\,\eta=u_1>0$ sağ yarım düzlemine resmedildiğini buluruz. Diğer yandan sağ yarım düzlemde bulunan kompleks sayıların argümanlarının $-\frac{\pi}{2}$ ile $\frac{\pi}{2}$ arasında olduğu göz önüne alınırsa

(3.1) $$-\frac{\pi}{4}<\arg\eta<\frac{\pi}{4}$$

eşitsizliği elde edilir.Ayrıca

(3.2) $$w=\frac{1}{2}\log\eta=\frac{1}{2}\log|\eta|e^{i\theta}=\frac{1}{2}\log|\eta|e^{i\arg\eta}$$

olduğunu düşünürsek

$$w=\frac{1}{2}\log|\eta|+\frac{1}{2}\log e^{i\arg\eta}=\frac{1}{2}\log|\eta|+i\frac{1}{2}\arg\eta\log e=\frac{1}{2}\log|\eta|+i\frac{1}{2}\arg\eta$$

(3.3) $$\mathrm{Im}\,w=\frac{1}{2}\arg\eta$$

eşitliği bulunur. (3.1) ve (3.3) birlikte düşünülürse

$$-\frac{\pi}{4}<\frac{1}{2}\arg\eta<\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}<\mathrm{Im}\,w<\frac{\pi}{4}$$

elde edilir ki buda iddianın doğru olduğunu gösterir.

ÖZELLİK 3.4: $w=k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu D birim diskini $-\frac{1}{4}$'den sonsuza kadar negatif eksen boyunca kesilmiş tüm düzleme resmeder.

Gerçekten,

$$w=k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{1}{4}\frac{4z}{(1-z)^2}=\frac{1}{4}\frac{2z+2z}{(1-z)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-1+2z+2z+z^2-z^2}{(1-z)^2}\Rightarrow$$

$$w=k(z)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+2z+z^2)-(1-2z+z^2)}{(1-z)^2}=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{(1+z)^2}{(1-z)^2}-\frac{(1-z)^2}{(1-z)^2}\right]\Rightarrow$$

$$w = k(z) = \frac{1}{4}\cdot\frac{(1+z)^2}{(1-z)^2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

olarak $w = k(z)$ fonksiyonu yazılabilir. Şimdi Özellik 3.3 de olduğu gibi

$$\eta = \frac{1+z}{1-z} \tag{3.4}$$

ara transformasyonunu düşünelim. Bu transformasyon altında $|z| = 1$ çemberinin resmi $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ olarak alınır ve yukarıdaki tarzda hareket edilirse

$$\eta = \frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow \eta - \eta z = 1 + z \Leftrightarrow \eta - 1 = z(\eta+1) \Leftrightarrow z = \frac{\eta-1}{\eta+1} \Leftrightarrow |z| = \left|\frac{\eta-1}{\eta+1}\right|$$

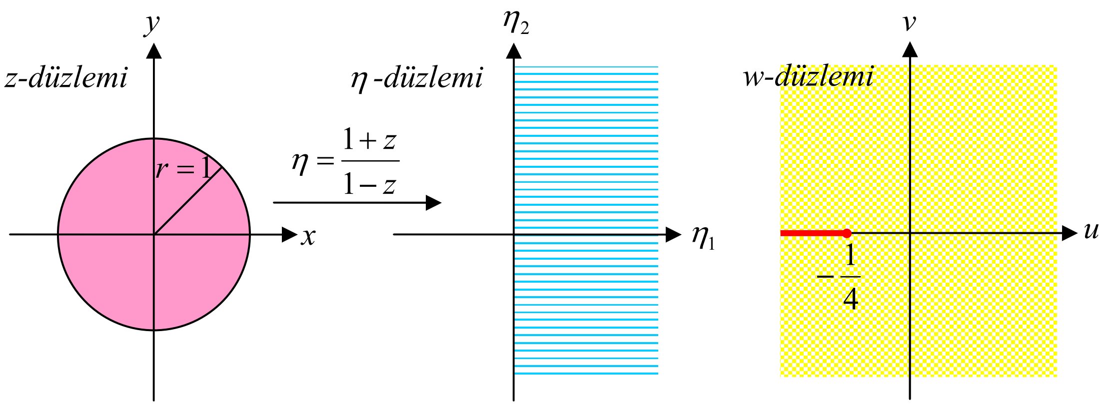
$$1 = |z| = \frac{|\eta-1|}{|\eta+1|} \Rightarrow 1 = |z|^2 = \frac{|\eta-1|^2}{|\eta+1|^2} \Rightarrow 1 = \frac{|\eta-1|^2}{|\eta+1|^2} \Rightarrow |\eta+1|^2 = |\eta-1|^2 \Rightarrow$$

$$|(\eta_1+1) + i\eta_2|^2 = |(\eta_1-1) + i\eta_2|^2 \Rightarrow (\eta_1+1)^2 + \eta_2^2 = (\eta_1-1)^2 + \eta_2^2 \Rightarrow \eta_1 = 0$$

bulunur. Bu da $|z| = 1$'in resminin $u = \operatorname{Re}\eta = 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$w = k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{4}$$

ifadesi göz önüne alınırsa $\eta_1 = 0$'ın, yani η düzleminde imajiner eksenin, resmi $-\frac{1}{4}$ noktasından $-\infty$'a kadar giden doğrudur. Şekil aşağıda gösterildiği gibidir.



Şekil 3.1

TEOREM 3.1: Yalınkat iki fonksiyonun bileşke fonksiyonu da yalınkattır.

İSPAT: İspatı iki adımda yaparız. Birinci adımda "İnjektif iki fonksiyonun bileşke fonksiyonu da injektiftir" olduğunu gösterelim.

$$f: D \to D_1 = f(D)$$
$$z_1 \to f(z_1)$$
$$z_2 \to f(z_2)$$

şeklinde tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu injektif ise

(3.5) $\quad z_1, z_2 \in D,\ z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$

bağıntısı gerçeklenir. Diğer taraftan

$$g: f(D) \to H$$
$$f(z_1) \to g(f(z_1))$$
$$f(z_2) \to g(f(z_2))$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon injektif ise

(3.6) $\quad f(z_1),\ f(z_2) \in f(D),\ f(z_1) \neq f(z_2) \Rightarrow g(f(z_1)) \neq g(f(z_2))$

bağıntısı gerçeklenir. (3.5) ve (3.6) bağıntıları birlikte düşünülürse

(3.7) $\quad z_1, z_2 \in D,\ z_1 \neq z_2 \Rightarrow g(f(z_1)) \neq g(f(z_2))$

bağıntısını yazabiliriz. Bu bize $(g \circ f)(z)$ fonksiyonunun injektif olduğunu gösterir.

İspatın ikinci adımında $(g \circ f)(z)$ fonksiyonunun analitik olduğunu göstermeliyiz. Bunun içinde bileşke fonksiyonunun türevinin var olduğunu göstermemiz gerekir.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{f(z) - f(z_0)}$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right]$$

$$w = f(z),\ w_0 = f(z_0),\ z \to z_0,\ w \to w_0$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \left[\lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \right] \left[\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right]$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \left[\lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} \right] \left[\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right]$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = g'(w_0) f'(z_0)$$

Bu eşitlik bize türevin var olduğunu gösterir. Bu ise teoremi ispatlar.

TEOREM 3.2: $\left(\dfrac{1}{f(z)}\right)$ fonksiyonunun yalınkat olması için gerek ve yeter şart $f(z)$ fonksiyonunun yalınkat olmasıdır.

İSPAT: (Gereklilik) $g(z)=\dfrac{1}{z}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $g(z)$ fonksiyonu her $D^{*}=\{z \mid z\in \mathbb{C}-(0)\}$ bölgesinde yalınkattır. Zira

$$z_1,\ z_2 \in D \Rightarrow \frac{1}{z_1}\neq\frac{1}{z_2} \Rightarrow g(z_1)\neq g(z_2)$$

dır. Teorem 3.1'den dolayı

$$g(f(z))=\frac{1}{\dfrac{1}{f(z)}}=f(z)$$

yazabiliriz. Bu da bize $f(z)$'nin yalınkat olduğunu gösterir.

(Yeterlilik) $f(z)$ yalınkat olsun. Benzer tarzda $g(z)=\dfrac{1}{z}$ yalınkat fonksiyonunu göz önüne alalım. Önceki teoremden

$$g(f(z))=\frac{1}{f(z)}$$

bileşke fonksiyonu yalınkat olduğundan $\left(\dfrac{1}{f(z)}\right)$ fonksiyonu yalınkattır.

S sınıfını koruyan bazı önemli elemanter transformasyonlar aşağıda tanımlanmıştır:

TANIM 3.3: (Eşlenik Transformasyonları) $w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ fonksiyonu S sınıfına ait olsun. $g(z)=\overline{f(\overline{z})}=z+\overline{a}_2z^2+\ldots$ şeklinde tanımlanan $\overline{f(\overline{z})}$ fonksiyonu da S sınıfına aittir.

Gerçekten, S sınıfının normalizasyonu

$$g(z)=\overline{f(\overline{z})}=z+\overline{a}_2z^2+\ldots \Rightarrow g(0)=0$$

$$g'(z)=1+2\overline{a}_2z+\ldots \Rightarrow g'(0)=1$$

şeklindedir. Diğer taraftan $f(z)$ yalınkat olduğundan

(3.8) $\qquad z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$

(3.9) $\qquad z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow \bar{z}_1 \neq \bar{z}_2$

dır. (3.8) ve (3.9) ifadelerinden

$$\bar{z}_1 \neq \bar{z}_2 \Leftrightarrow f(\bar{z}_1) \neq f(\bar{z}_2) \Leftrightarrow \overline{f(\bar{z}_1)} \neq \overline{f(\bar{z}_2)} \Leftrightarrow g(z_1) \neq g(z_2)$$

bağıntısını elde ederiz. Bu da bize $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ fonksiyonunun S sınıfına ait olduğunu gösterir.

TANIM 3.4: (Rotasyon Transformasyonları) $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu S sınıfına ait olsun. Bu durumda $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$ şeklinde tanımlanan $g(z)$ fonksiyonu da S sınıfına aittir.

Gerçekten,

$$f(e^{i\theta} z) = e^{i\theta} z + a_2 (e^{i\theta} z)^2 + \ldots = e^{i\theta} z + a_2 e^{2i\theta} z^2 + \ldots \Rightarrow$$

(3.10) $\qquad g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + a_2 e^{i\theta} z^2 + \ldots$

fonksiyonunda S sınıfının normalizasyonunu düşünürsek

(3.11) $\qquad g(0) = 0$

ve

$$g'(z) = 1 + 2a_2 e^{i\theta} z + \ldots \Rightarrow$$

(3.12) $\qquad g'(0) = 1$

bulunur. (3.11) ve (3.12) eşitlikleri S sınıfı normalizasyonunun gerçeklendiğini gösterir. Diğer yandan injektiflik koşulundan

$$z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow e^{i\theta} z_1 \neq e^{i\theta} z_2 \Leftrightarrow f(e^{i\theta} z_1) \neq f(e^{i\theta} z_2) \Leftrightarrow$$

$$g(z_1) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z_1) \neq e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z_2) = g(z_2)$$

bulunur. Bu da $g(z)$ fonksiyonunun yalınkat olduğunu gösterir. Sonuç olarak $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$ fonksiyonunun S sınıfına ait olduğunu söyleyebiliriz.

TANIM 3.5: (Genişleme yada Daralma Transformasyonları) $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu S sınıfına ait olsun. Bu durumda, $0 < r < 1$ olmak üzere $g(z) = r^{-1} f(rz)$ şeklinde tanımlanan $g(z)$ fonksiyonu da S sınıfına aittir.

Gerçekten,

$$g(z) = r^{-1} f(rz) = z + a_2 r z^2 + a_3 r^2 z^3 + \ldots \Rightarrow$$

$$g(0) = 0,\ g'(0) = 1$$

eşitliklerinden S sınıfı normalizasyonunun gerçeklendiği görülür. Ayrıca

$$0 < r < 1 \Rightarrow z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow rz_1 \neq rz_2 \Leftrightarrow g(z_1) = r^{-1} f(rz_1) \neq r^{-1} f(rz_2) = g(z_2)$$

olduğundan $g(z)$ fonksiyonu bire-birdir. Bu ise bize $g(z) = r^{-1} f(rz)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun S sınıfına ait olduğunu gösterir.

TANIM 3.6: (Disk Transformasyonları) $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu S sınıfına ait olsun. Bu durumda, $|a| < 1$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f\left(\dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) - f(a)}{(1-|a|^2) f'(a)}$$

şeklinde tanımlanan $g(z)$ fonksiyonu da S sınıfına aittir.

Gerçekten,

(3.13) $$f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)$$

transformasyonunu göz önüne alalım. Bu transformasyon

$$w_1(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$$

birim diskini invaryant bıraktığından (yani birim disk üzerine resmeden Mobius transformasyonu olduğundan) yalınkattır. Yalınkat iki fonksiyonunun bileşke fonksiyonu da yalınkat olduğundan (3.13) şeklinde tanımlanan fonksiyon yalınkattır. Ayrıca bu fonksiyonun $z = 0$ noktasındaki Taylor açılımı

(3.14) $$f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(1-|a|^2)z + \ldots$$

şeklindedir. Dolayısıyla (3.14) eşitliğinden

$$g(z) = \frac{f\left(\dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) - f(a)}{(1-|a|^2) f'(a)} = z + \ldots$$

yazılabilir. Bu son ifade $g(z)$ fonksiyonu S sınıfına ait normalizasyonu gerçekler ve injektiftir. Dolayısıyla $g(z)$ fonksiyonu S sınıfına aittir.

TANIM 3.7: (Karekök Transformasyonları) $w = f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ fonksiyonu S sınıfına ait olsun. Bu durumda, $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$ şeklinde tanımlanan $g(z)$ fonksiyonu da S sınıfına aittir.

Gerçekten,

$$g(z) = \sqrt{f(z^2)} = \sqrt{z^2 + a_2 z^4 + ...} = \sqrt{z^2(1 + a_2 z^2 + ...)} \Rightarrow$$

$$g(z) = z\sqrt{(1 + a_2 z^2 + ...)} = z + ...$$

yazılabileceğinden $g(0) = 0$ ve $g'(0) = 1$ eşitlikleri gerçeklenir. Ayrıca

$$g(z_1) = \sqrt{f(z_1^2)} = \sqrt{f(z_2^2)} = g(z_2) \Rightarrow$$

$$f(z_1^2) = f(z_2^2) \Rightarrow z_1^2 = z_1^2 \Rightarrow z_1 = \pm z_2$$

bulunur. $f(z)$ fonksiyonu bire-bir olduğunu $z_1 = \pm z_2$ ifadesinde kullanırsak $z_1 = z_2$ elde edilir ki bu aynı zamanda $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun bire-bir olduğunu gösterir. Bu ise $g(z)$ fonksiyonu S sınıfına aittir demektir.

TANIM 3.8: (Alınmayan Değer Transformasyonları) $w = f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ fonksiyonu S sınıfına ait olsun. S sınıfının tanımından dolayı $f(z)$ fonksiyonu $D = \{z \| z| < 1\}$ bölgesinde tanımlanmış, analitik ve bire-bir fonksiyondur. Yani,

(3.15) $\quad z_1, z_2 \in D$ ve $z_1 \neq z_2$ için $f(z_1) \neq f(z_2)$

dir.

$z \in D$ için $f(z)$ fonksiyonu tarafından alınmayan bir değer c olsun. Yani

(3.16) $\quad \forall z \in D$ için $f(z) \neq c$

bağıntısı gerçeklensin.

(3.17) $$g(z) = \frac{cf(z)}{z - f(z)}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon S sınıfına aittir.

Gerçekten,

$$z_1 \neq z_2 \text{ için } f(z_1) \neq f(z_2) \Leftrightarrow cf(z_1) \neq cf(z_2) \text{ ve } -f(z_1) \neq -f(z_2) \Rightarrow$$

(3.18) $$c - f(z_1) \neq c - f(z_2)$$

ifadesinden

$$z_1, z_2 \in D \quad \text{ve} \quad z_1 \neq z_2 \quad \text{için} \quad g(z_1) = \frac{cf(z_1)}{c - f(z_1)} \neq \frac{cf(z_2)}{c - f(z_2)} = g(z_2) \Rightarrow$$

$$g(z_1) \neq g(z_2)$$

bulunur. Diğer yandan

$$g(0) = \frac{cf(0)}{c - f(0)} = \frac{c0}{z - 0} = 0$$

$$g'(z) = \frac{cf'(z)(c - f(z)) - (-f'(z))cf(z)}{(c - f(z))^2} = \frac{c^2 f'(z)}{c^2 - 2cf(z) + f^2(z)} \Rightarrow$$

$$g'(0) = \frac{c^2 f'(0)}{c^2 - 2cf(0) + f^2(0)} = \frac{c^2 1}{c^2 - 2c0 + 0} = 1$$

yazılırsa $g(z)$ fonksiyonunun S sınıfına ait olduğu bulunmuş olur.

TANIM 3.9: (M-Fold Simetri Transformasyonları) Bu transformasyonlar genel olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

(3.19) $$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn+1} z^{mn+1} = z + a_{m+1} z^{m+1} + a_{2m+1} z^{2m+1} + \ldots$$

fonksiyonu $D = \{z \| z| < 1\}$ birim diskinde tanımlanmış, analitik ve bire-bir olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonuna "birim diskte m-fold simetri fonksiyonu" adı verilir ve bu fonksiyonların sınıfı $S^{(m)}$ ile gösterilir. Aşikar olarak $S^{(m)}$ sınıfında

(3.20) $$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

normalizasyonu vardır. Dolayısıyla $f(z) \in S$ olmak üzere

$$g(z) = (f(z^m))^{\frac{1}{m}}$$

şeklinde tanımlanan $g(z)$ fonksiyonu $S^{(m)}$ sınıfına aittir (bunun terside doğrudur).

NOT 3.1: $m=2$ hali karekök transformasyonunu verir ve bu transformasyon aynı zamanda S sınıfındaki $f(-z)=-f(z)$ eşitliğini gerçekleyen tek yalınkat fonksiyon sınıfıdır.

Yalınkat fonksiyonlara ait genel özellikler aşağıdaki şekilde verilebilir.

TEOREM 3.3: Yalınkat fonksiyonlar topolojik kavramları korurlar. Yani topolojik özellikler yalınkat fonksiyonlar altında invaryant kalır.

İSPAT: Eğer yalınkat fonksiyonun makus fonksiyonunun türevinin daima var olduğunu gösterirsek iddiayı ispatlamış oluruz.

$$\lim_{w\to w_0}\frac{f^{-1}(w)-f^{-1}(w_0)}{w-w_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}\Rightarrow$$

$$\lim_{w\to w_0}\frac{f^{-1}(w)-f^{-1}(w_0)}{w-w_0}=\frac{1}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}=\frac{1}{f'(z_0)}$$

$f'(z_0)>0$ olduğundan $\dfrac{1}{f'(z_0)}$ ifadesi daima tanımlıdır. Bu da bize teoremin ispatını verir.

TEOREM 3.4: Yalınkat fonksiyonlar birer konform homomorfizmadır.

İSPAT: C eğrisi, $a\le t\le b$ olmak üzere $z(t)=x(t)+iy(t)$ denklemiyle verilsin (Düzgün, basit bağlantılı, yani kendi kendini kesmeyen eğri veya Jordan yayı). $w=f(z)$ yalınkat fonksiyonu ile C eğrisinin resim eğrisi $f(C)$ de düzgün bir Jordan yayı olacaktır. Dolayısıyla

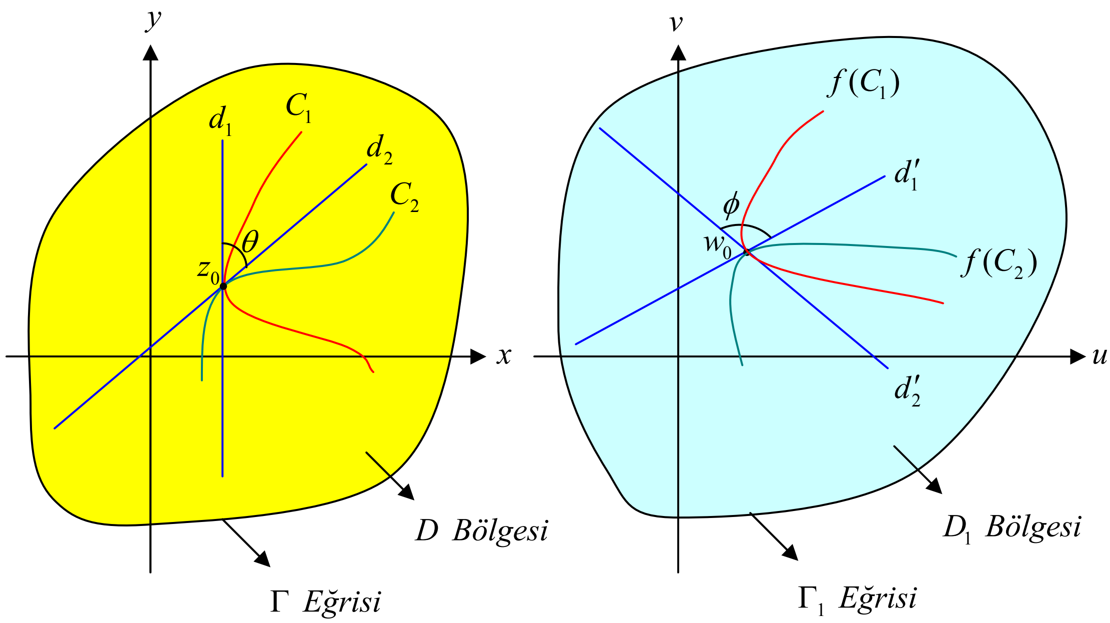
(3.21) $\qquad z'(t)\neq 0,\ z(t)$ sürekli

ifadeleri yazılabilir. $z_0=z(t_0)$ olmak üzere $f(z_0)$ noktasında $f(C)$ eğrisinin teğeti ile pozitif eksen doğrultusundaki açı

(3.22) $$\arg\left(\left.\frac{df}{dz}\right|_{z=z_0}\right)=\arg\left[\left(\left.\frac{df}{dt}\right|_{z=z_0}\right)\left(\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}\right)\right]=\arg\left(\left.\frac{df}{dt}\right|_{z=z_0}\right)\arg\left(\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}\right)$$

eşitliği ile verilir. Burada önemli belirtmek gerekir ki (3.22) eşitliğinde $z_0 = \infty$ ve $f(z_0) = \infty$ durumları göz ardı edilmiştir.

Şimdi z-düzleminde $w = f(z)$ fonksiyonunun tanım bölgesinde bulunan, $\alpha \le t \le \beta$ ve $\alpha_1 \le s \le \beta_1$ olmak üzere $C_1 : z(t)$, $C_2 : z(s)$ şeklinde iki eğri düşünelim öyle ki $z_0 = z(t_0) = z(s_0)$ eşitliği gerçeklensin. Yani, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi C_1 ve C_2 eğrileri aynı z_0 noktasında geçsinler. Başka bir değişler C_1 ve C_2 eğrileri z_0 noktasında kesişsinler.



Şekil 3.2

$w = f(z)$ yalınkat fonksiyonu ile Γ eğrisi Γ_1 eğrisi üzerine, D bölgesi üzerinde ve z_0 noktasında kesişen C_1 ve C_2 eğrileri sırasıyla $f(C_1)$ ve $f(C_2)$ eğrilerine resmedilsin. Yukarıda anlatılanlardan dolayı

(3.23) $\quad w_t'(t_0) = f'(z_0) z'(t_0) \quad$ ($f(C_1)$ eğrisi düzgün Jordan yayı)

(3.24) $\quad w_s'(s_0) = f'(z_0) z'(s_0) \quad$ ($f(C_2)$ eğrisi düzgün Jordan yayı)

eşitlikleri yazılabilir. Öte yandan (3.23) ve (3.24) eşitliklerinden hareketle

(3.25) $\quad \arg w_t'(t_0) = \arg(f'(z_0) z'(t_0)) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$

(3.26) $\quad \arg w_s'(s_0) = \arg(f'(z_0) z'(s_0)) = \arg f'(z_0) + \arg z'(s_0)$

ifadelerini elde ederiz. (3.25) ve (3.26) taraf tarafa çıkarılacak olursa

$$\arg w_t'(t_0) - \arg w_s'(s_0) = \arg z'(t_0) - \arg z'(s_0)$$

yada,

(3.27) $$\arg \frac{w_t'(t_0)}{w_s'(s_0)} = \arg \frac{z'(t_0)}{z'(s_0)} \Rightarrow \theta = \phi$$

eşitliği bulunur. (3.27) ifadesi açıların korunduğunu gösterir.

TEOREM 3.5: $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı kapalı C eğrisinin kapattığı D bölgesinde tanımlanmış ve yalınkat olsun. D bölgesinin $w = f(z)$ yalınkat fonksiyonu altındaki resmi $f(D)$ ise

(3.28) $$Alanf(D) = \iint_D |f'(z)|^2 \, dxdy$$

dir.

İSPAT: $w = f(z)$ fonksiyonu D bölgesinde analitik ve yalınkat olduğundan Cauchy-Riemann denklemlerini gerçekler. Bu ise

(3.29) $$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

denklemlerinin sağlanması demektir. Diğer taraftan analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun türevi

(3.30) $$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

eşitlikleri ile verilebilir. (3.30) eşitliklerinin kullanılması ile

(3.31) $$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

eşitliği bulunur.

Diğer taraftan $Alanf(D)$ ifadesi

(3.32) $$Alanf(D) = \iint_{f(D)} dudv$$

ile verilir.

Ayrıca çok katlı integrallerde ki değişken dönüşümü göz önüne alınarak Cauchy-Riemann denklemlerinin kullanılması ile

$$(3.33)\qquad \left.\begin{aligned} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow dudv = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} - \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow$$

$$(3.34)\qquad dudv = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left|f'(z)\right|^2$$

eşitliğini buluruz. Dolayısıyla (3.32) eşitliği

$$(3.35)\qquad Alanf(D) = \iint\limits_{f(D)} dudv = \iint\limits_{D} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dxdy = \iint\limits_{D} \left|f'(z)\right|^2 dxdy$$

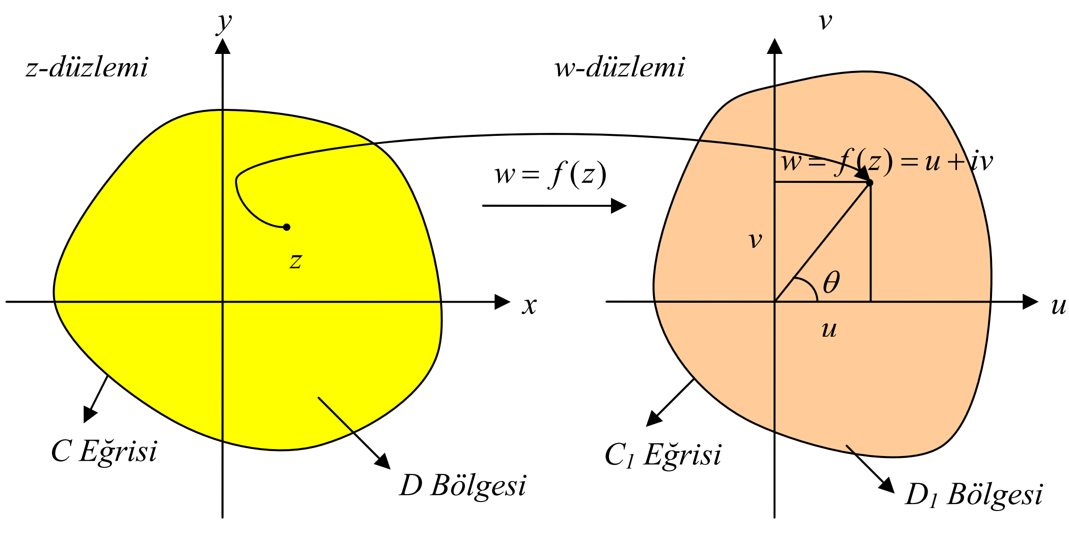
bulunur.

PROBLEM 3.1: $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı C eğrisinin kapattığı D bölgesinde tanımlanmış ve analitik olsun. Bu taktirde

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = r\frac{\partial}{\partial r}\log\left|f(re^{i\theta})\right|$$

eşitliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

ÇÖZÜM: Şekil 3.3 de gösterildiği gibi $w = f(z)$ fonksiyonu ile C eğrisi C_1



Şekil 3.3

eğrisi üzerine, D bölgesi D_1 bölgesi üzerinde resmedilsin. Resim bölgelerindeki her $w = f(z)$ noktası için

(3.36) $\qquad f(z) = |f(z)|\, e^{i\theta}$

eşitliğini yazabiliriz. (3.36) eşitliğinden hareketle

$$\log f(z) = \log\left(|f(z)|\, e^{i\theta}\right) = \log|f(z)| + \log e^{i\theta} = \log|f(z)| + i\theta \Rightarrow$$

(3.37) $\qquad \log f(z) = \log|f(z)| + i\theta$

ifadesini elde ederiz. $z = re^{i\theta}$ alınırsa

(3.38) $\qquad \log f(z) = \log|f(z)| + i\theta$

bulunur. (3.38) ifadesinden r 'ye göre türev alırsak

(3.39) $\qquad e^{i\theta} \dfrac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} = \dfrac{\partial}{\partial r} \log\left|f(re^{i\theta})\right|$

eşitliğini elde ederiz. (3.39) eşitliğinin her iki yanını r ile çarparsak

(3.40) $\qquad re^{i\theta} \dfrac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} = r \dfrac{\partial}{\partial r} \log\left|f(re^{i\theta})\right|$

bulunur. (3.40) eşitliği de aynı zamanda

(3.41) $\qquad z \dfrac{f'(z)}{f(z)} = r \dfrac{\partial}{\partial r} \log|f(z)|$

şeklinde yazılabilir. (3.41) ifadesinin reel kısmı alınırsa

$$\mathrm{Re}\left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) = r \frac{\partial}{\partial r} \log|f(z)|$$

bulunur ki bu da ispatı istenen ifadedir.

TEOREM 3.6: (1/4 Distorsiyon Teoremi) $w = f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ fonksiyonu S sınıfına ait olsun. $D = \{z \| z| < 1\}$ bölgesinin $w = f(z)$ fonksiyonu altındaki tasvir noktalarının $w = 0$ noktasına olan uzaklığı 1/4'den küçük olamaz.

İSPAT: c noktası $D = \{z \| z| < 1\}$ bölgesinin dışında bir nokta olsun.

(3.42) $\qquad F(z) = \dfrac{c\, f(z)}{c - f(z)} = z + \left(a_2 + \dfrac{1}{c} \right) z^2 + \dots$

fonksiyonu da S sınıfına aittir. $c \notin D$ olduğundan $c - f(z) \neq 0$ dir. Dolayısıyla $F(z)$ fonksiyonu D'de analitiktir ve

(3.43) $$F(z) = z + \left(a_2 + \frac{1}{c}\right)z^2 + \ldots \Rightarrow F(0) = 0$$

(3.44) $$F'(z) = 1 + 2\left(a_2 + \frac{1}{c}\right)z + \ldots \Rightarrow F'(0) = 1$$

koşullarını gerçekler. Diğer taraftan $z_1, z_2 \in D$ ve $z_1 \neq z_2$ olsun. Bu durumda $f(z) \in S$ olduğundan

(3.45) $$f(z_1) \neq f(z_2)$$

bağıntısı gerçeklenir. (3.45) ifadesinden hareket edersek

(3.46) $$f(z_1) \neq f(z_2) \Rightarrow cf(z_1) \neq cf(z_2)$$

(3.47) $$f(z_1) \neq f(z_2) \Rightarrow -f(z_1) \neq -f(z_2) \Rightarrow c - f(z_1) \neq c - f(z_2)$$

eşitsizliklerini elde ederiz. (3.46) ve (3.47) ifadelerinden

$$F(z_1) = \frac{c\, f(z_1)}{c - f(z_1)} \neq \frac{c\, f(z_2)}{c - f(z_2)} = F(z_2) \Rightarrow$$

(3.48) $$F(z_1) \neq F(z_2)$$

bağıntısını buluruz. (3.43), (3.44) ve (3.48) ifadeleri birlikte düşünülürse (3.42) eşitliği ile tanımlanan $F(z)$ fonksiyonunun S sınıfına ait olduğu görülür.

Bieberbach-Branges teoreminin

"S sınıfına ait bir $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$ fonksiyonunun Taylor açılımındaki a_n katsayısı

(3.49) $$|a_n| \leq n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

eşitsizliğini gerçekler"

ifadesi (3.42) yazılışında kullanılırsa

(3.50) $$\left|a_2 + \frac{1}{c}\right| \leq 2$$

eşitsizliği elde edilir. Öte yandan

(3.51) $$\left|\frac{1}{c}\right| = \left|\frac{1}{c} + a_2 - a_2\right| \leq \left|\frac{1}{c} + a_2\right| + |a_2|$$

olduğu göz önüne alınırsa (3.49), (3.50) ve (3.51) ifadelerinden

$$\left|\frac{1}{c}\right| = \left|\frac{1}{c} + a_2\right| + |a_2| \leq 2 + 2 \Rightarrow$$

$$\left|\frac{1}{c}\right| \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{|c|} \leq 4 \Rightarrow |c| > \frac{1}{4}$$

eşitsizliği elde edilir.

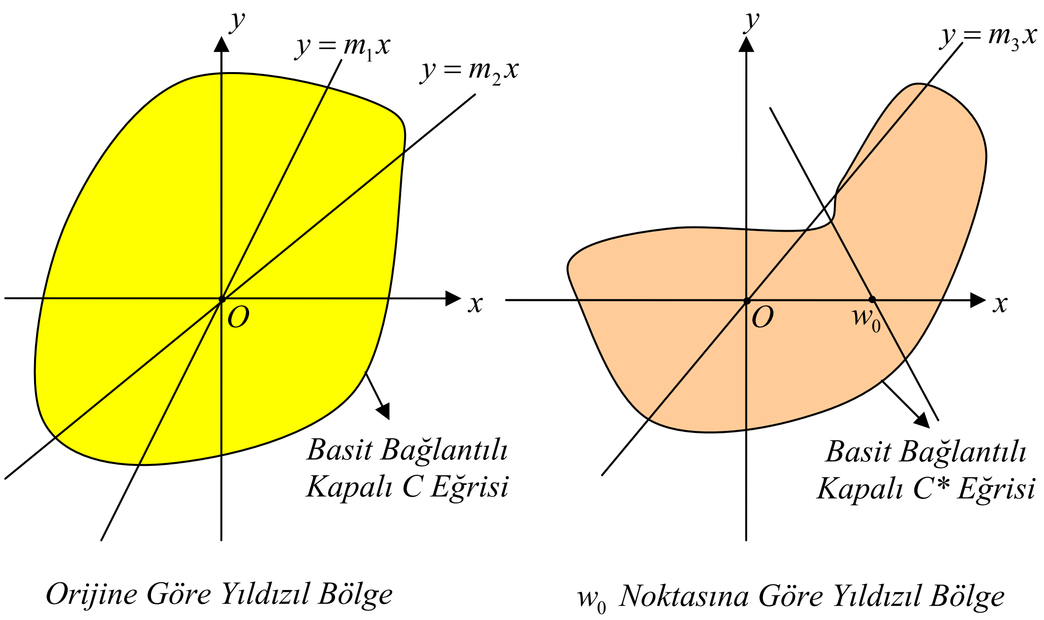
4. YILDIZIL FOKSİYONLAR

TANIM 4.1: (Yıldızıl Bölge) Basit bağlantılı bir C eğrisinin sınırladığı basit bağlantılı bir D bölgesini göz önüne alım.

Orijinden geçen bir doğru C eğrisinin sınırını tek bir noktada kesiyorsa, bu durumda bölgeye "Orijine Göre Yıldızıl Bölge" denir.

D bölgesi bir "w_0 Noktasına Göre Yıldızıl Bölge" ise, w_0 noktasından geçen bir doğru bölgenin sınırını bir noktadan kesiyor demektir.

Bu özellikler göz önüne alındığında yıldızıl bölge Şekil 4.1 de gösterilmiştir.



Şekil 4.1

TEOREM 4.1: $f(z)=a_1z+a_2z^2+...$ fonksiyonunun $D=\{z\,\big|\,|z|<1\}$ de yıldızıl olması için gerek ve yeter şart

$$f(z)=a_1z\exp\left[2\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)\right],\ (|z|<1)$$

eşitliğinin gerçeklenmesidir. Burada $\gamma(t)$ fonksiyonu monoton artan ve $\gamma(2\pi)-\gamma(0)=1$ olan bir fonksiyondur.

İSPAT: $f(z)$ fonksiyonu D de yıldızıl olsun. Yıldızıl fonksiyonun tanımından, $p(z)$ pozitif reel kısma haiz fonksiyonlar sınıfından bir fonksiyon olmak üzere

(4.1) $$z\frac{f'(z)}{f(z)}=p(z)$$

eşitliği yazılabilir. $p(z)$ fonksiyonu pozitif reel kısma haiz bir fonksiyon olduğundan

(4.2) $$p(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t),\quad \gamma(2\pi)-\gamma(0)=1$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\gamma(t)$ fonksiyonu $0\le t\le 2\pi$ de monoton artan bir fonksiyondur. (4.1) ve (4.2) yazılışları göz önüne alınarak

(4.3) $$z\frac{f'(z)}{f(z)}=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)$$

eşitliği yazılabilir. (4.3) ifadesinden hareketle

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}-1=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)-1=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)-\underbrace{[\gamma(2\pi)-\gamma(0)]}_{1=\int_0^{2\pi}d\gamma(t)}\Leftrightarrow$$

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}-1=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)-\int_0^{2\pi}d\gamma(t)=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}-1\right]d\gamma(t)\Leftrightarrow$$

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}-1=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z-1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)=\int_0^{2\pi}\frac{2e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{1}{z}=2\int_0^{2\pi}\frac{e^{-it}}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)\Leftrightarrow\ \text{(integral alınırsa)}$$

$$\log f(z)-\log z=-2\int_0^{2\pi}\log(1-e^{-it}z)d\gamma(t)\Leftrightarrow$$

$$\log\frac{f(z)}{z}=-2\int_0^{2\pi}\log(1-e^{-it}z)d\gamma(t)\Leftrightarrow \quad (f'(0)=a_1\Rightarrow \log f'(0)=\log a_1)$$

$$\log\frac{f(z)}{z}-\log f'(0)=-2\int_0^{2\pi}\log(1-e^{-it}z)d\gamma(t)\Leftrightarrow$$

$$\log\frac{f(z)}{zf'(0)}=-2\int_0^{2\pi}\log(1-e^{-it}z)d\gamma(t)\Leftrightarrow$$

$$\log\frac{f(z)}{za_1}=2\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)\Leftrightarrow$$

$$\frac{f(z)}{za_1}=\exp\left[2\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)\right]\Leftrightarrow$$

$$f(z)=a_1 z\exp\left[2\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)\right],\ (|z|<1)$$

bulunur ki bu da iddianın ispatını verir.

TEOREM 4.2: C eğrisi, z-düzleminde basit bağlantılı ve pozitif yönde yönlendirilmiş bir eğri olsun. C eğrisinin $w=f(z)$ analitik fonksiyonu altındaki resmi C_1 olsun. w_0 noktası C_1 resim eğrisi üzerinde olmayan bir nokta olmak üzere C_1 eğrisinin w_0 noktasına göre yıldızıl olma koşulu

$$\operatorname{Im}\left(\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}z'(t)\right)\geq 0,\ a\leq t\leq b$$

ifadesi ile verilir.

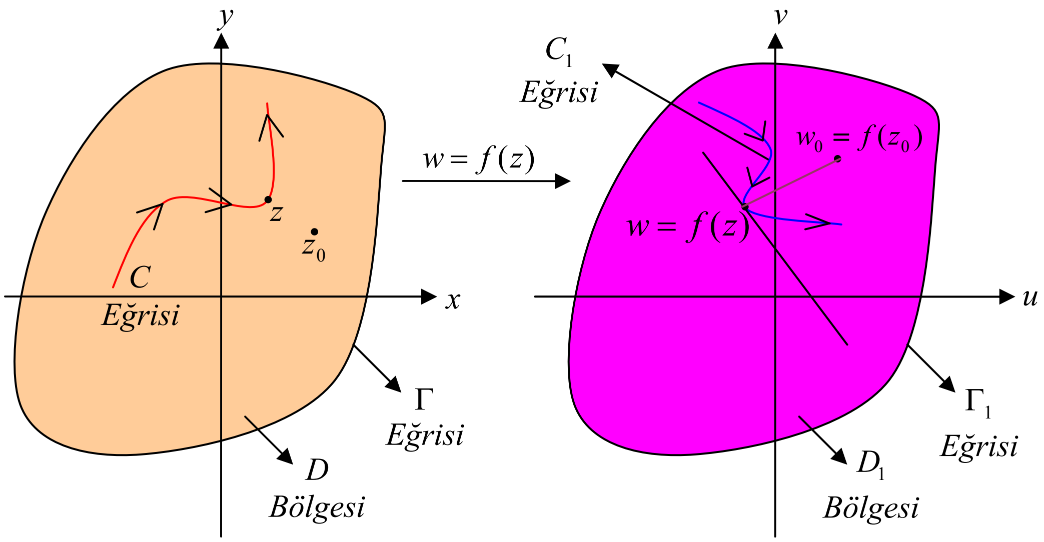
İSPAT: Şekil 4.2 de gösterildiği gibi basit bağlantılı kapalı Γ eğrisi ve onun kapattığı D bölgesinde tanımlanmış $w=f(z)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

Γ eğrisi ve D bölgesinin $w=f(z)$ fonksiyonu altındaki resimleri Γ_1 ve D_1 olsun. Benzer şekilde D bölgesinde tanımlı basit bağlantılı C eğrisinin bu fonksiyon altındaki resmi C_1 olarak tanımlansın.

C eğrisinin denklemi

(4.4) $\quad z(t)=x(t)+iy(t)$, $(a\leq t\leq b)$

eşitliği ile tanımlanır.



Şekil 4.2

Öte yandan, $w_0 = f(z_0)$ noktası C_1 resim eğrisi üzerinde olmayan bir nokta olmak üzere

(4.5) $\arg(w - w_0) = \arg(f(z) - f(z_0))$

ifadesi t'nin $a \le t \le b$ aralığındaki değerleri için azalmıyorsa C_1 eğrisine "Yıldızıl Eğri" adı verilir. Bu tanım aynı zamanda

(4.6) $\frac{d}{dt}[\arg(w - w_0)] = \frac{d}{dt}[\arg(f(z) - f(z_0))] \ge 0, \quad (a \le t \le b)$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca herhangi bir z kompleks sayısı için

$$z = |z|e^{i\phi} \Rightarrow \log z = \log(|z|e^{i\phi}) = \log|z| + \log e^{i\phi} = \log|z| + i\phi \Rightarrow$$

(4.7) $z = \log|z| + i\phi$

yazılışından dolayı

(4.8) $\theta = \arg z = \mathrm{Im}(\log z)$

eşitliğini elde ederiz. (4.8) ve (4.6) eşitliklerinin birlikte düşünülmesi ile

(4.9) $\arg(w - w_0) = \arg(f(z) - f(z_0)) = \mathrm{Im}(\log(f(z) - f(z_0)))$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan

$$0 \le \frac{d}{dt}[\arg(w - w_0)] = \frac{d}{dt}[\arg(f(z) - f(z_0))] = \frac{d}{dt}[\mathrm{Im}(\log(f(z) - f(z_0)))]$$

$$0 \le \mathrm{Im}\left[\frac{d}{dt}\log(f(z(t)) - f(z(t_0)))\right] = \mathrm{Im}\left[z'(t)\frac{f'(z(t))}{f(z(t)) - f(z(t_0))}\right]$$

$$0 \le \operatorname{Im}\left[z'(t) \frac{f'(t)}{f(z) - f(z_0)} \right]$$

eşitliği elde edilir ki buda ispatı istenen ifadedir.

ÖRNEK 4.1: C eğrisinin $|z| = R$ çemberi olarak verilmesi durumunda yıldızıllık ve konvekslik koşulunu aşağıdaki şekilde elde ederiz.

Konvekslik koşulunu elde etmek için, çember denklemini yazalım.

$$|z| = R \Rightarrow z = Re^{it},\ 0 \le t \le 2\pi \Rightarrow z(t) = R\cos t + iR\sin t \Rightarrow$$

$$z'(t) = iRe^{it}dt \Rightarrow z'(t) = iz \Rightarrow z''(t) = i^2 z \Rightarrow z'(t) = -z\ .$$

Yani neticede

$$(4.10) \qquad \begin{cases} z'(t) = iz \\ z''(t) = -z \end{cases}$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi (4.10) eşitlikleri kullanılarak

$$0 \le \operatorname{Im}\left[\frac{z''(t)}{z'(t)} + z'(t)\frac{f''(t)}{f'(t)} \right] = \operatorname{Im}\left[\frac{-z}{iz} + iz\frac{f''(t)}{f'(t)} \right] = \operatorname{Im}\left[\frac{-1}{i} + iz\frac{f''(t)}{f'(t)} \right] \Rightarrow$$

$$0 \le \operatorname{Im}\left[i + iz\frac{f''(t)}{f'(t)} \right] = \operatorname{Im}\left[i\left(1 + z\frac{f''(t)}{f'(t)}\right) \right] \Rightarrow$$

$$(4.11) \qquad 0 \le \operatorname{Im}\left[i\left(1 + z\frac{f''(t)}{f'(t)}\right) \right]$$

ifadesini elde ederiz.

Herhangi bir z kompleks sayısı için

$$(4.12) \qquad \operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Im}(i(x+iy)) = \operatorname{Im}(ix + i^2 y) = \operatorname{Im}(ix - y) = x = \operatorname{Re} z$$

yazabiliriz. (4.12) eşitliğini (4.11) ifadesinde kullanırsak

$$0 \le \operatorname{Im}\left[i\left(1 + z\frac{f''(t)}{f'(t)}\right) \right] = \operatorname{Re}\left(1 + z\frac{f''(t)}{f'(t)}\right) \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}\left(1 + z\frac{f''(t)}{f'(t)}\right) \ge 0$$

bulunur. Bu ifade $|z| = R$ çemberinin konvekslik koşuludur.

Benzer tarzda hareket ederek yıldızıllık koşulunu aşağıdaki şekilde buluruz.

$$0 \leq \frac{d}{dt}\left[\arg(w-w_0)\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{f'(z)}{f(z)-f(z_0)} z'(t)\right] = \mathrm{Im}\left[i\left(z\frac{f'(z)}{f(z)-f(z_0)}\right)\right]$$

$$\text{(4.13)} \qquad \mathrm{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)-f(z_0)}\right) \geq 0\,.$$

(4.13) ifadesinde $f(z_0) = f(0) = 0$ eşitliği kullanılırsa

$$\mathrm{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geq 0$$

elde edilir. Bu da bize yıldızıllık koşulunu verir.

5. JANOWSKI YILDIZIL FONKSİYONLARI

Bu kısımda 1973 yılında W. Janowski ([15]) tarafından tanımlanan ve bazı özellikleri incelenen yıldızıl fonksiyonların bir alt sınıfı olan Janowski yıldızıl fonksiyonlarının genel özelliklerini ele alacağız. Bu sınıf için genel özellikler M.K. Aouf ([2]),Y. Polatoğlu, M. Bolcal, ve A. Şen ([30], [31], [32]) incelenmiştir.

TANIM 5.1: $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu birim disk $D = \{z \mid |z| < 1\}$ de tanımlanmış ve analitik olsun. $p(z) \in P(A, B)$ olmak üzere

(5.1) $$z\frac{f'(z)}{f(z)} = p(z) = \frac{1 + Aw(z)}{1 + Bw(z)}$$

şeklinde yazılabilirse $f(z)$ fonksiyonuna "Janowski yıldızıl fonksiyon" adı verilir. Bu tür fonksiyonların sınıfını $S^*(A, B)$ ile gösteririz. (5.1) yazılışı $f(z) \in S^*(A, B)$ olması için gerek ve yeter şarttır.

TEOREM 5.1: $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu eğer

(5.2) $$\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1\right) \prec \begin{cases} \dfrac{(A - B)z}{1 + Bz} = F_1(z), & B \neq 0, \\ Az = F_2(z), & B = 0, \end{cases}$$

subordinasyonunu gerçeklerse $S^*(A, B)$ sınıfına aittir.

İSPAT: $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu yardımıyla

(5.3) $$\frac{f(z)}{z} = \begin{cases} (1 + Bw(z))^{\frac{A-B}{B}}, & B \neq 0, \\ e^{Aw(z)}, & B = 0, \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $(1+Bw(z))^{\frac{A-B}{B}}$ ve $e^{Aw(z)}$ ifadelerinin $z=0$ 'daki değerinin 1'e eşit olacak şekilde Riemann yüzeyi seçilmiştir. Bu durumda $w(z)$ fonksiyonu birim disk D'de analitik, $w(0)=0$ koşullarını gerçekler. Eğer $|w(z)|<1$ olduğunu gösterirsek teoremi ispatlamış oluruz.

Diğer yandan

(5.4) $$w=\begin{cases} \dfrac{(A-B)z}{1+Bz}, & B\neq 0, \\ Az, & B=0, \end{cases}$$

lineer transformasyonu $|z|=r$ çemberini merkezi $C(r)$ ve yarıçapı $\rho(r)$ olan çemberler üzerine resmeder. Burada $C(r)$ ve $\rho(r)$

(5.5) $$\begin{cases} C(r)=\left(-\dfrac{B(A-B)r^2}{1-B^2r^2},0\right), & \rho(r)=\dfrac{(A-B)r}{1-B^2r^2}, \quad B\neq 0, \\ C(r)=(0,0), & \rho(r)=|A|r, \quad B=0, \end{cases}$$

şeklindedir.

(5.3) ifadesinden logaritmik türev alırsak,

(5.6) $$\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right)=\begin{cases} \dfrac{(A-B)zw'(z)}{1+Bw(z)}, & B\neq 0, \\ Azw'(z), & B=0, \end{cases}$$

eşitliğini buluruz. Şimdi $w(z)$ fonksiyonunun $|z|=r$ çemberi üzerinde bir z_0 noktasından maksimum değerini aldığını, yani $|w(z)|=1$ olduğunu göz önüne alalım. Bu taktirde I.S. Jack lemmasının kullanılması ile

(5.7) $$z_0w'(z_0)=kw(z_0),\ k\geq 1$$

eşitliği elde edilir. (5.7) ifadesini (5.6) da kullanılırsa

(5.8) $$\left(z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}-1\right)=\begin{cases} k\dfrac{(A-B)w(z_0)}{1+Bw(z_0)}=F_1(w(z_0))\notin F_1(D), & B\neq 0, \\ kAw(z_0)=F_2(w(z_0))\notin F_2(D), & B\neq 0, \end{cases}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (5.8) eşitliği (5.2) subordinasyonu ile çelişki yaratır. Bu çelişkiye neden $w(z)$ fonksiyonunun $|z|=r$ çemberi üzerinde maksimum değerini alması yani $|w(z)|=1$ olmasıdır. Bu çelişkiyi ortadan kaldırmak $|w(z)|<1$ almalıyız. Diğer yandan (5.2) subordinasyonundan hareketle

$$\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) \prec \begin{cases} \dfrac{(A-B)z}{1+Bz}, & B \neq 0, \\ Az, & B = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) = \begin{cases} \dfrac{(A-B)w(z)}{1+Bw(z)}, & B \neq 0, \\ Aw(z), & B = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} \right) = \begin{cases} \dfrac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}, & B \neq 0, \\ 1+Aw(z), & B = 0, \end{cases}$$

bulunur. Bu da bize teoremin ispatını verir.

SONUÇ 5.1: $f(z)$ fonksiyonu $S^*(A, B)$ sınıfına ait olsun. Bu taktirde

(5.9) $$f(z) = \begin{cases} z(1+Bw(z))^{\frac{A-B}{B}}, & B \neq 0, \\ ze^{Aw(z)}, & B = 0, \end{cases}$$

gösterilişine sahiptir. (5.9) gösterilişinde $w(z) \equiv z$ olarak alınırsa

(5.10) $$f(z) = \begin{cases} z(1+Bz)^{\frac{A-B}{B}}, & B \neq 0, \\ ze^{Az}, & B = 0, \end{cases}$$

ekstremal fonksiyonu elde edilir.

TEOREM 5.2: $f(z)$ fonksiyonu $S^*(A, B)$ sınıfına ait olsun. Bu taktirde

(5.11) $$C_1(r;\ -A, -B) \leq |f(z)| \leq C_1(r;\ A, B)$$

distorsiyonu geçerlidir. Burada

$$C_1(r;\ A, B) = \begin{cases} r(1+Br)^{\frac{A-B}{B}}, & B \neq 0, \\ re^{Ar}, & B = 0, \end{cases}$$

dır. Bu sınırlar kesindir. Zira ekstremal fonksiyon (5.10) eşitliği ile verilir.

İSPAT: $p(z) \in P(A, B)$ olsun. Bu taktirde

(5.12) $$\left| p(z) - \frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2} \right| \leq \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}$$

eşitsizliği vardır. Yani $p_0(z)=\dfrac{1+Az}{1+Bz}$ lineer transformasyonu $|z|=r$ çemberini merkezi $C_2(r)=\dfrac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}$, $\rho_2(r)=\dfrac{(A-B)r}{1-B^2r^2}$ olan çember üzerine resmeder. Bu durum (5.12) eşitsizliği ile verilir. Bu eşitsizlik W. Janowski tarafından bulunmuştur [15]. (5.12) eşitsizliği ve $S^*(A, B)$ sınıfının tanımından

(5.13) $$\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right|\leq\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}$$

eşitsizliği elde edilir. (5.13) ifadesinden basit hesaplamalarla

(5.14) $$\frac{1-(A-B)r-ABr^2}{1-B^2r^2}\leq\operatorname{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\leq\frac{1+(A-B)r-ABr^2}{1-B^2r^2}$$

bulunur. Diğer yandan,

(5.15) $$\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)}=r\frac{\partial}{\partial r}\log|f(z)|,\ |z|=r$$

olduğunu (5.14) eşitliğinde kullanırsak

(5.16) $$\frac{1-(A-B)r-ABr^2}{1-B^2r^2}\leq\frac{\partial}{\partial r}\log|f(z)|\leq\frac{1+(A-B)r-ABr^2}{1-B^2r^2}$$

ifadesini elde ederiz. (5.16) eşitliğini 0'dan r'ye kadar integre edersek (5.11) ifadesi elde edilir.

TEOREM 5.3: $f(z)=z+a_2z^2+...$ fonksiyonu $S^*(A, B)$ sınıfına ait olsun. Bu durumda

(5.17) $$|a_n|\leq\begin{cases}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-2}\frac{|(A-B)+kB|}{k+1}, & B\neq 0,\\ \displaystyle\prod_{k=0}^{n-2}\frac{A}{k+1}, & B\neq 0,\end{cases}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bu eşitsizlikler kesindir. Çünkü ekstremal fonksiyon

$$f_*(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{(1-B\delta z)^{-\frac{(A-B)}{B}}},\ |\delta|=1, & B\neq 0,\\ ze^{Az}, & B=0.\end{cases}$$

İSPAT: $S^*(A, B)$ sınıfının tanımından $B\neq 0$ için

(5.18) $$z\frac{f'(z)}{f(z)} = p(z)$$

eşitliğini yazabiliriz. (5.18) ifadesinde $p(z)$ ve $f(z)$ fonksiyonlarının Taylor açılımlarını kullanırsak

(5.19) $$\begin{cases} (z + 2a_2z^2 + 3a_3z^3 + ... + na_nz^n + ...) = \\ = (z + a_2z^2 + ... + a_nz^n + ...)(1 + p_1z + p_2z^2 + ... + p_nz^n + ...) \end{cases}$$

eşitliğini elde ederiz. (5.19) ifadesinde z^n 'li terimlerin katsayıları eşitlenirse

(5.20) $$na_nz^n = a_n + p_1a_{n-1} + p_2a_{n-2} + ... + p_{n-1}$$

buluruz. Diğer taraftan,

(5.21) $$|p_n| \leq (A - B)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu biliyoruz. (5.21) eşitsizliği (5.20) eşitliğinde kullanılırsa

(5.22) $$(n-1)|a_n| \leq |A - B|(1 + |a_2| + |a_3| + ... + |a_{n-1}|)$$

ifadesi elde edilir ki bu da

(5.23) $$|a_n| \leq \frac{|A - B|}{(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}|a_k|$$

şeklinde ifade edilebilir.

(5.17) ifadesinin gerçeklendiğini indüksiyon prensibiyle gösterelim. (5.23) eşitliği ile (5.17) eşitliğinin sağ yanları aslında aynı eşitlikleri gerçekler. Gerçekten,

(i) $n = 2$ için,

(5.24) $$\begin{cases} |a_n| \leq \frac{|A - B|}{(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}|a_k|, \ |a_1| = 1 \Rightarrow |a_2| \leq |A - B|, \\ |a_n| \leq \prod_{k=0}^{n-2}\frac{|(A - B) + kB|}{k+1} \Rightarrow \qquad |a_2| \leq |A - B|. \end{cases}$$

(ii) $n = 3$ için,

$$(5.25)\qquad \begin{cases} |a_3| \le \dfrac{|A-B|}{(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}|a_k| = \dfrac{1}{2}|A-B|(1+|a_2|) \Rightarrow \\ |a_3| \le \dfrac{1}{2}|A-B|^2 + \dfrac{1}{2}|A-B|, \\ |a_3| \le \displaystyle\prod_{k=0}^{n-2}\dfrac{|(A-B)+kB|}{k+1} = |A-B|\dfrac{|(A-B)+B|}{2} \Rightarrow \\ |a_3| \le \dfrac{1}{2}|A-B|\big[|A-B|+|B|\big] \le \dfrac{1}{2}|A-B|\big[|A-B|+1\big] \Rightarrow \\ |a_3| \le \dfrac{1}{2}|A-B|^2 + \dfrac{1}{2}|A-B|. \end{cases}$$

Bu eşitlik $n = p$ için doğru olsun. Buna göre

$$(5.26)\qquad \begin{cases} |a_n| \le \dfrac{|A-B|}{(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}|a_k|, \\ |a_1| = 1 \Rightarrow |a_p| \le \dfrac{|A-B|}{(p-1)}(1+|a_2|+|a_3|+...+|a_{p-1}|), \end{cases}$$

$$(5.27)\qquad \begin{cases} |a_p| \le \displaystyle\prod_{k=0}^{p-2}\dfrac{|(A-B)+kB|}{k+1}, \\ |a_p| \le \dfrac{1}{(p-1)!}|A-B|(|A-B|+1)(|A-B|+2)...(|A-B|+(p-2)). \end{cases}$$

dir. (5.26), (5.27) ve indüksiyon hipotezinden

$$(5.28)\qquad \begin{cases} \dfrac{|A-B|}{(p-1)}(1+|a_2|+|a_3|+...+|a_{p-1}|) = \\ = \dfrac{1}{(p-1)!}|A-B|(|A-B|+1)(|A-B|+2)...(|A-B|+(p-2)) \end{cases}$$

yazabiliriz. Eğer (5.28) ifadesinde $x = |A-B| > 0$ olduğunu kullanırsak

$$(5.29)\qquad \frac{x}{(p-1)}(1+|a_2|+|a_3|+...+|a_{p-1}|) = \frac{1}{(p-1)!}x(x+1)(x+2)...(x+(p-2))$$

olduğunu buluruz. (5.29) eşitliğinden basit işlemler yaparsak

$$\frac{1}{p}(x+(p-1))\frac{1}{(p-1)}(1+|a_2|+|a_3|+...+|a_{p-1}|) =$$

$$= \frac{1}{p!}(x+1)(x+2)(x+3)...(x+(p-2))(x+(p-1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p}\left[\frac{x}{(p-1)}(1+|a_2|+|a_3|+...+|a_{p-1}|)\right] + \left[\frac{1}{p}(1+|a_2|+|a_3|+...+|a_{p-1}|)\right] =$$

$$= \frac{1}{p!}(x+1)(x+2)(x+3)...(x+(p-2))(x+(p-1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p}\left|a_p\right| + \left[\frac{1}{p}(1+\left|a_2\right|+\left|a_3\right|+...+\left|a_{p-1}\right|)\right] =$$

$$= \frac{1}{p!}(x+1)(x+2)(x+3)...(x+(p-2))(x+(p-1)) \Rightarrow$$

$$(5.30) \qquad \begin{cases} \frac{x}{p}(1+\left|a_2\right|+\left|a_3\right|+...+\left|a_{p-1}\right|+\left|a_p\right|) = \\ = \frac{x}{p!}(x+1)(x+2)(x+3)...(x+(p-2))(x+(p-1)) \end{cases}$$

eşitliğini elde ederiz. (5.30) ifadesi bize eşitliğin $n = p+1$ için de doğru olduğunu gösterir. Dolayısıyla (5.17) ifadesi gerçeklenir.

SONUÇ 5.2: Eğer $A = 1,\ B = -1$ alınırsa

$$\left|a_n\right| \leq \frac{1}{(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-2}\left|2-k\right|$$

eşitsizliğini elde ederiz ki bu eşitsizlik M.K. Aouf tarafından gösterilmiştir ([2]).

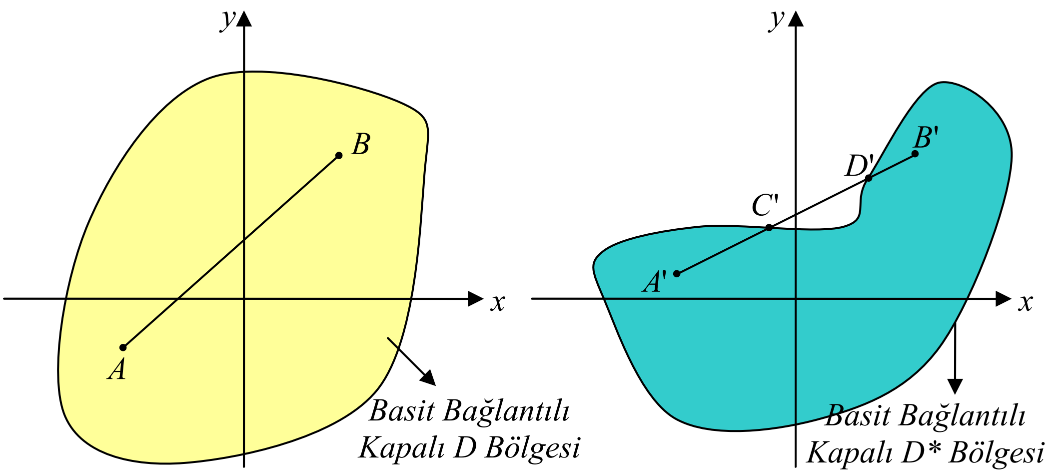
6. KONVEKS FONKSİYONLAR

TANIM 6.1: (Konveks Eğri) C eğrisi z-düzleminde basit bağlantılı pozitif yönlendirilmiş (yani saat ibresinin dönme yönünün tersi yönde olan dönme yönünde yönlendirilmiş) bir eğri olsun. C eğrisinin $w = f(z)$ analitik fonksiyonu altındaki resim C_1 olsun. $a \leq t \leq b$ olmak üzere C_1 eğrisinin bir $w = f(z)$ noktasındaki teğetinin argümanı t'nin azalmayan bir fonksiyonu ise C_1 eğirsi "Konveks" tir denir.

TANIM 6.2: (Konveks Bölge) Genel olarak konveks bir bölge aşağıdaki şekilde tanımlanır. Bölge içinde alınan iki noktayı birleştiren doğru tamamen bölge içinde kalıyorsa bölgeye "Konveks Bölge" denir.

Bu tanım göz önüne alındığında bir konveks bölge için aşağıdaki özellikler sıralanabilir.

(i) Konveks bölge genel olarak aşağıdaki şekilde gösterilebilir.



Bölge içinde alınan A ve B noktalarını birleştiren AB doğru parçası tamamen bölge içinde kaldığından bölge konvekstir.

Bölge içinde alınan A' ve B' noktalarını birleştiren $A'B'$ doğru parçasının C', D' kısmı bölge içinde kalmadığından bölge konveks değildir.

Şekil 6.1

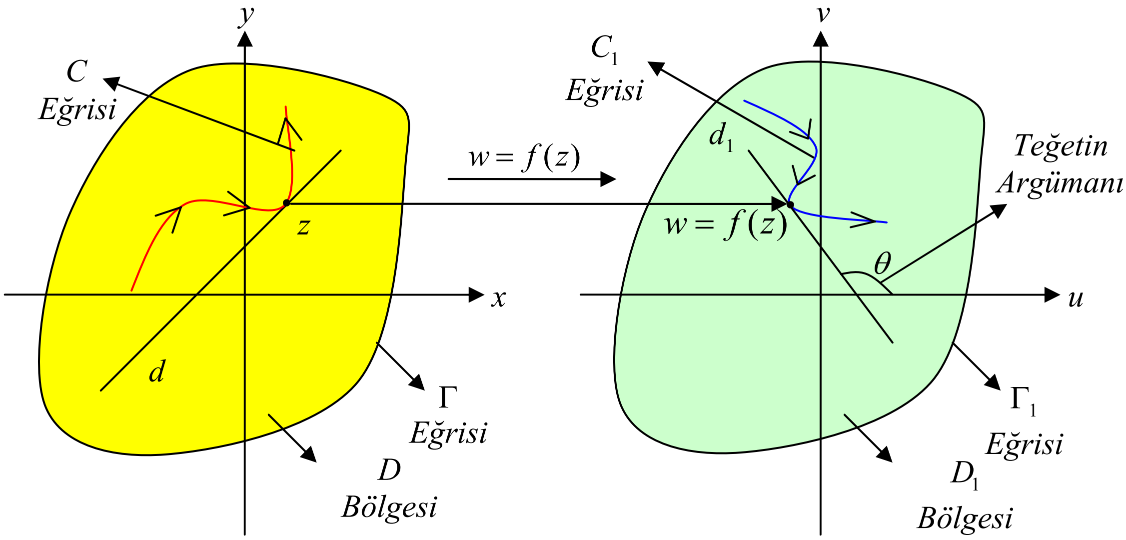
(ii) Yıldızıl bölge tanımı göz önüne alındığında, her noktasına göre yıldızıl olan bölge konveks bölgedir.

TEOREM 6.1: Yukarıda belirtilen C_1 resim eğrisinin konveks olma koşulu

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z''(t)}{z'(t)}+z'(t)\frac{f''(t)}{f'(t)}\right)\geq 0,\ \ a\leq t\leq b$$

dir.

İSPAT:



Şekil 6.2

Şekil 6.2 de gösterildiği gibi tasvir bölgeleri ve tasvir eğrileri göz önüne alınsın. Yani, basit bağlantılı kapalı Γ eğrisi ve kapattığı D bölgesinin resimleri $w=f(z)$ fonksiyonu altında Γ_1 ve D_1 olsun. Benzer şekilde D bölgesinde tanımlı basit bağlantılı C eğrisinin bu fonksiyon altındaki resmi C_1 ise bu durumda verilen konveks olma tanımını kullanarak

(6.1) $$\frac{d}{dt}(\theta(t))\geq 0$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada θ açısı resim eğrisi C_1'e teğet olan d_1 doğrusunun argümanıdır ve t'nin $a\leq t\leq b$ aralığında tanımlanmış fonksiyonudur.

Öte yandan C eğrisi z -düzleminde

(6.2) $\quad z(t) = x(t) + iy(t)$, ($a \le t \le b$)

şeklinde parametrelenebilir. Diğer yandan C eğrisi yönlendirilmiş eğri olduğundan, C eğrisinin teğetinin doğrultusu

(6.3) $\quad \arg z'(t) =$ teğet doğrultusu

şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla $w = f(z)$ fonksiyonu bu teğet vektörünü

(6.4) $\quad \arg f'(z) = \arg(f(z(t)))' = \arg(z'(t) f'(z(t)))$

açısı üzerinden döndürür. Tanımdan dolayı C_1 eğrisinin konveks olması için gerek ve yeter şart

(6.5) $$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}(\arg(z'(t) f'(z(t)))) \ge 0, \ (a \le t \le b)$$

eşitsizliğinin gerçeklenmesidir. (6.5) ifadesi argüman özelliklerinin kullanılması ile

(6.6) $$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}(\arg(z'(t) f'(z(t)))) = \frac{d}{dt}(\arg z'(t) + \arg f'(z(t))) \ge 0$$

şeklinde ifade edilebilir. Diğer yanda resim bölgesindeki herhangi bir $w = f(z)$ noktası için

(6.7) $\quad f(z) = |f(z)| e^{i\theta}$, ($Argf(z) = \theta$)

ifadesi yazılabilir. (6.7) eşitliğinden

$$\log f(z) = \log(|f(z)| e^{i\theta}) = \log|f(z)| + \log e^{i\theta} = \log|f(z)| + i\theta \Rightarrow$$

(6.8) $\quad \log f(z) = \log|f(z)| + i\theta$

bulunur. (6.7) ve (6.8) ifadelerinden

(6.9) $\quad \arg f(z) = \mathrm{Im}(\log f(z))$

eşitliğini elde ederiz. (6.9) yazılışını (6.6) ifadesinde kullanırsak

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(\arg z'(t) + \arg f'(z(t))) = \frac{d}{dt}\left[\mathrm{Im}\left((\log z'(t)) + (\log f'(z(t)))\right)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{Im}\left[\frac{d}{dt}\left((\log z'(t)) + (\log f'(z(t)))\right)\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(t)}{f'(t)} z'(t)\right] \ge 0$$

bulunur ki buda teoremin ispatını verir.

LEMMA 6.1: $f(z)$ fonksiyonu bir D bölgesinde tanımlanmış, analitik ve yalınkat olsun. $|\zeta| < 1$, $|z| < 1$, $z \ne \zeta$ olmak üzere

$$F(z,\zeta)=\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}-\frac{z+\zeta}{z-\zeta}$$

şeklinde tanımlanan $F(z,\zeta)$ fonksiyonu $|\zeta|<1$, $|z|<1$ de analitiktir.

İSPAT: $f(z)$ fonksiyonu bir D bölgesinde tanımlanmış ve analitik olduğundan D de kutbu yoktur. Ayrıca yalınkat olmasında ötürü

(6.10) $\quad z\neq\zeta$ için $f(z)\neq f(\zeta)$

bağıntısı gerçeklenir. Ayrıca

(6.11) $\quad z\neq\zeta$ olduğundan $z-\zeta\neq 0$

dır. (6.10) ve (6.11) bağıntıları göz önüne alınırsa $F(z,\zeta)$ fonksiyonunun $|\zeta|<1$, $|z|<1$ de analitik olduğu görülür. Diğer yandan

$$\lim_{\zeta\to z}F(z,\zeta)=\lim_{\zeta\to z}\left[\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}-\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right]\Rightarrow$$

$$\lim_{\zeta\to z}F(z,\zeta)=\lim_{\zeta\to z}\frac{(z-\zeta)2zf'(z)-(f(z)-f(\zeta))(z+\zeta)}{(f(z)-f(\zeta))(z-\zeta)}\Rightarrow$$

$$\lim_{\zeta\to z}F(z,\zeta)=\lim_{\zeta\to z}\frac{f'(z)+zf''(z)}{f'(z)}=1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

eşitliği bulunur ki bu da iddianın doğru olduğunu gösterir.

SONUÇ 6.1: Eğer $\operatorname{Re}F(z,\zeta)>0$ koşulu her $|\zeta|<1$ için gerçeklenirse

$$\operatorname{Re}z\frac{f'(z)}{f(z)}>\frac{1}{2}$$

dir.

İSPAT:

(6.12) $$\operatorname{Re}F(z,\zeta)=\operatorname{Re}\left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}-\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right)>0$$

eşitsizliğini sonucun hipotez koşulundan yazabiliriz. Bu eşitsizlik her $|\zeta|<1$ için gerçekleştiğinden $\zeta=0$ için de doğrudur. Dolayısıyla

$$\operatorname{Re}F(z,0)=\operatorname{Re}\left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(0)}-\frac{z+0}{z-0}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(0)}-1\right)\Rightarrow$$

(6.13) $$\operatorname{Re} F(z,0) = \operatorname{Re}\left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(0)} - 1\right)$$

eşitliği yazılabilir. Diğer yandan $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ açılımına sahip olduğundan $f(0) = 0$ dır. Dolayısıyla (6.13) yazılışı aynı zamanda

$$\operatorname{Re} F(z,0) = \operatorname{Re}\left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-0} - 1\right) = \operatorname{Re}\left(2z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1\right) > 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2}$$

olduğu bulunur.

LEMMA 6.2: $w = f(z) = \log(1+z)$ fonksiyonu konvekstir.

İSPAT: İspatı iki ayrı yoldan yapabiliriz.

I. YOL.

$$f(z) = \log(1+z) \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{1+z} \Rightarrow$$

$$\log f'(z) = \log\frac{1}{1+z} = \log 1 - \log(1+z) \Rightarrow$$

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{1}{1+z} \Rightarrow z\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{z}{1+z} \Rightarrow 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} = 1 - \frac{z}{1+z} = \frac{1}{1+z} \Rightarrow$$

(6.14) $$1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1}{1+z}$$

eşitliğinden hareketle

$$\operatorname{Re}\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+z}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1+z}\right) + \overline{\left(\frac{1}{1+z}\right)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+\bar{z}}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1+\bar{z}+1+z}{|1+z|^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2(1+\operatorname{Re} z)}{|1+z|^2}\right] = \frac{1+\operatorname{Re} z}{|1+z|^2} \Rightarrow$$

(6.15) $$\operatorname{Re}\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) = \frac{1+\operatorname{Re} z}{|1+z|^2}$$

yazılabilir. Diğer yandan $z \in D$ olduğundan

(6.16) $$|z| < 1 \Leftrightarrow -|z| > -1$$

dir. Bir kompleks sayı için

(6.17) $\qquad -|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu biliyoruz. (6.16) ve (6.17) birlikte düşünülürse

(6.18) $\qquad -1 < -|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z| < 1 \Rightarrow -1 < \operatorname{Re} z < 1$

ifadesi bulunur. (6.18) eşitsizliğinden

$$1-1 < 1+\operatorname{Re} z < 1+1 \Rightarrow 0 < \operatorname{Re} z < 2 \Rightarrow$$

(6.19) $\qquad 1+\operatorname{Re} z > 0$

eşitsizliği elde edilir.

Bir kompleks sayının modülü daima pozitif olacağından

(6.20) $\qquad |1+z|^2 > 0$

dır. Şimdi (6.15), (6.19) ve (6.20) birlikte düşünülürse

(6.21) $\qquad \operatorname{Re}\left(1+z\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0$

olduğunu elde ederiz. Bu bize $w = f(z) = \log(1+z)$ fonksiyonunun konveks olduğunu gösterir.

II. YOL. Bir diğer ispat, $w = f(z) = \log(1+z)$ fonksiyonu altında $D = \{z \| z| < 1\}$ bölgesinin resim bölgesi olan $f(D)$ nin konveks olduğu gösterilerek yapılır.

Şimdi $w_1 = 1+z$ fonksiyonu

$$w_1 = u + iv = 1 + x + iy \Rightarrow$$

(6.22) $\qquad \begin{cases} u_1 = u_1(x,y) = 1+x \\ v_1 = v_1(x,y) = y \end{cases}$

şeklinde yazılırsa bu transformasyonu altında D'nin resmini bulalım.

(6.23) $\qquad D = \{z \| z| < 1\} = \{(x^2+y^2) | x^2+y^2 < 1\}$

olduğunu düşünerek

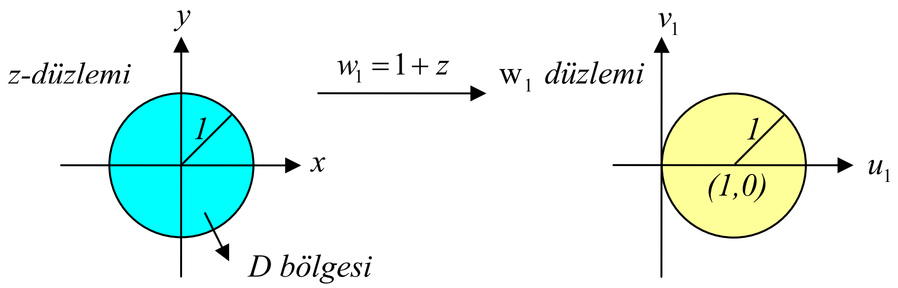
$$u_1 = u_1(x,y) = 1+x \Rightarrow x = u_1 - 1 \Rightarrow x^2 = (u_1-1)^2$$
$$v_1 = v_1(x,y) = y \Rightarrow y^2 = v_1^2$$

(6.24) $\qquad x^2 + y^2 = (u_1-1)^2 + v_1^2$

yazabiliriz. (6.23) ve (6.24) eşitlikleri birlikte düşünülürse

(6.25) $\qquad (u_1-1)^2 + v_1^2 < 1$

bulunur. (6.25) eşitsizliği merkezi (1,0) da, yarıçapı 1 olan çember denklemidir. Dolayısıyla (6.24) transformasyonu (yada $w_1 = 1 + z$ fonksiyonu) altında D bölgesinin resmi merkezi (1,0) da, yarıçapı 1 olan çemberin iç bölgesidir. Transformasyonun şekli aşağıdaki gibidir.



Şekil 6.3

Şimdide $f(D) = \{(u_1, v_1) | (u_1 - 1)^2 + v_1^2 < 1\}$ bölgesinin $w = \log w_1$ tasviri altındaki resim bölgesini bulalım. $f(D)$ bölgesinde bulunan noktaların primitif argümanları $(-\pi/2)$ ile $(\pi/2)$ arasındadır. Dolayısıyla

$$w = \log w_1 \Leftrightarrow w_1 = e^w \Rightarrow u_1 + iv_1 = e^{u+iv} \Rightarrow$$

$$u_1 + iv_1 = e^u e^{iv} \text{ yada } Re^{i\phi} = e^u e^{iv} \Rightarrow$$

(6.26) $\quad R = e^u, \quad \phi = v$

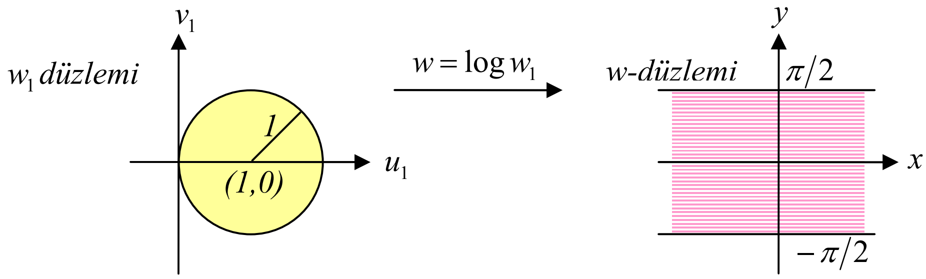
eşitlikleri bulunur. Öte yandan yukarıda belirttiğimiz üzere

(6.27) $\quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$

dir. Buna göre (6.26) ifadesinden v,

(6.28) $\quad -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$

haline gelir. Bu da bize $f(D)$ resim bölgesinin $w = \log w_1$ fonksiyonu altında $v = -\frac{\pi}{2}$, $v = \frac{\pi}{2}$ şeritsel bölgesi üzerine resmettiğini gösterir. Transformasyonun şekli aşağıdaki gibidir.



Şekil 6.4

Dolayısıyla w-düzlemindeki $-\dfrac{\pi}{2} \le v \le \dfrac{\pi}{2}$ şeritsel bölgesi konveks olduğundan $w = f(z) = \log(1+z)$ fonksiyonu D'de konvekstir.

LEMMA 6.3: $w = f(z) = \dfrac{1}{1+z}$ fonksiyonu $\operatorname{Re} f(z) > \dfrac{1}{2}$ eşitsizliğini gerçekler.

İSPAT: $z = x + iy$ olarak alınırsa,

$$\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+z}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1+z}\right) + \overline{\left(\frac{1}{1+z}\right)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+\bar{z}}\right] \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1+\bar{z}+1+z}{|1+z|^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2(1+\operatorname{Re} z)}{|1+z|^2}\right] = \frac{1+\operatorname{Re} z}{|1+z|^2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1+x}{|1+x+iy|^2} = \frac{1+x}{(1+x)^2 + y^2} \Rightarrow$$

(6.29) $$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1+x}{1+2x+(x^2+y^2)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Diğer taraftan $x^2 + y^2 < 1$ olduğundan (6.29) ifadesi

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1+x}{1+2x+(x^2+y^2)} > \frac{1+x}{1+2x+1} = \frac{1+x}{2(1+x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} f(z) > \frac{1}{2}$$

bulunur.

LEMMA 6.4: $\operatorname{Re} w_1 > \frac{1}{2}$ ve $\operatorname{Re} w_2 > \frac{1}{2}$ ise $\operatorname{Re}\sqrt{w_1 w_2} > \frac{1}{2}$ dir.

İSPAT: Lemma 6.2 ve Lemma 6.3'de

(6.30) $\quad f_1(z) = \log(1+z)$ fonksiyonunun konveks

(6.31) $\quad f_2(z) = \dfrac{1}{1+z} \Rightarrow \operatorname{Re} f_2(z) > \dfrac{1}{2}$

olduğunu gösterdik. Şimdi

(6.32) $\quad w_1 = \dfrac{1}{1+z_1},\ w_2 = \dfrac{1}{1+z_2}$

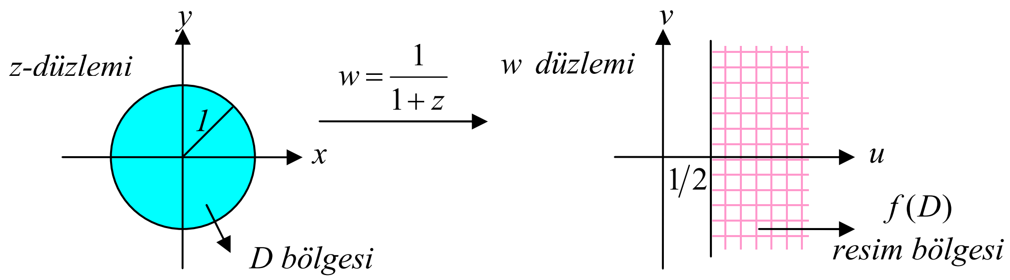
fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu fonksiyonlardan hareketle

$$\sqrt{w_1 w_2} = \sqrt{\frac{1}{1+z_1}\frac{1}{1+z_2}} \Rightarrow \log\sqrt{w_1 w_2} = \log\sqrt{\frac{1}{1+z_1}\frac{1}{1+z_2}} \Rightarrow$$

$$\log\sqrt{w_1 w_2} = \log\left(\frac{1}{1+z_1}\frac{1}{1+z_2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{1+z_1} + \log\frac{1}{1+z_2}\right) \Rightarrow$$

(6.33) $\quad \log\sqrt{w_1 w_2} = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1}{1+z_1} + \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1}{1+z_2}$

eşitliğini yazabiliriz. Diğer taraftan (6.31) ifadesi bize $f_2(z) = \dfrac{1}{1+z}$ fonksiyonunun konveks olduğunu gösterir. Zira resim bölgesi $\operatorname{Re} f_2(z) > \dfrac{1}{2}$ sağ yarım düzlemidir. Bu ise Şekil 6.5 gibi ifade edilebilir.



Şekil 6.5

Konveks bölge olmanın analitiklik tanımından $z_1, z_2 \in f(D)$ için $z_3 \in f(D)$ vardır ki $0 \le \lambda \le 1$ için

(6.34) $\quad \lambda f_2(z_1) + (1-\lambda) f_2(z_2) = f_2(z_3)$

dir. (6.34) ifadesinde $\lambda = \frac{1}{2}$ alınması halinde

$$\log\sqrt{w_1 w_2} = \frac{1}{2}\log\frac{1}{1+z_1} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{1+z_2} = \log\frac{1}{1+z_3}$$

bulunur. Yani,

$$\sqrt{w_1 w_2} = \frac{1}{1+z_3} \tag{6.35}$$

eşitliği geçerlidir. (6.35) eşitliğinden

$$\operatorname{Re}\sqrt{w_1 w_2} = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+z_3}\right) > \frac{1}{2}$$

olduğu bulunur.

SONUÇ 6.2: $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu $D = \{z \| z| < 1\}$'de konveks olsun. Bu durumda $\operatorname{Re}\sqrt{f'(z)} > \frac{1}{2}$ dir.

İSPAT: $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu $D = \{z \| z| < 1\}$'de konveks ise $\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2}$ ve $\operatorname{Re}\frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}$ dir. Lemma 6.4 den dolayı

$$w_1 = z\frac{f'(z)}{f(z)}, \; w_2 = \frac{f(z)}{z}$$

alınarak

$$\operatorname{Re}\sqrt{w_1 w_2} = \operatorname{Re}\sqrt{z\frac{f'(z)}{f(z)}.\frac{f(z)}{z}} = \operatorname{Re}\sqrt{f'(z)} > \frac{1}{2}$$

dir.

7. $C(A, B)$ SINIFI VE ÖZELLİKLERİ

TANIM 7.1: $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ fonksiyonu birim disk D'de tanımlanmış ve analitik olsun. $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + ...$ fonksiyonu $P(A, B)$ sınıfına ait bir fonksiyon olmak üzere

$$(7.1) \qquad 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} = p(z) = \frac{1 + Aw(z)}{1 + Bw(z)}$$

eşitliğini sağlarsa $f(z)$ fonksiyonu konvekstir. Bu tür fonksiyonların sınıfı $C(A, B)$ ile gösterilir.

(7.1) ifadesi $f(z)$ fonksiyonunun $C(A, B)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şarttır. Ayrıca $A = 1, B = -1$ için $C(1, -1)$ sınıfını elde ederiz ki, bu sınıf birim diskte konveks fonksiyonlar sınıfıdır. A ve B'nin özel değerleri için (bu değerler $P(A, B)$ sınıfının incelenmesinde ayrıntılı olarak belirtilmiştir) değişik matematikçiler tarafından incelenen konveks fonksiyonların alt sınıfları elde edilir.

$C(A, B)$ sınıfı ile $S^*(A, B)$ sınıfı arasındaki ilişkiyi inceleyebilmek için aşağıdaki klasik Alexander teoremini verelim.

TEOREM 7.1: $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ fonksiyonunun birim disk D'de $C(A, B)$ sınıfına ait olabilmesi için gerek ve yeter şart $zf'(z)$ fonksiyonunun $S^*(A, B)$ sınıfına ait olmasıdır.

İSPAT: $g(z) = zf'(z)$ olarak tanımlarsak ve her iki tarafın logaritmik türevini alırsak

(7.2) $$g(z)=zf'(z)\Leftrightarrow z\frac{g'(z)}{g(z)}=1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

eşitliğini elde ederiz. (7.2) eşitliği bize teoremin ispatını verir.

TEOREM 7.2: $f(z)=z+a_2z^2+...$ fonksiyonunun birim disk D'de tanımlanmış, analitik ve $f(0)=0,\ f'(0)=1$ koşulları ile normalize edilmiş olsun. Eğer $|z|<1$, $|\zeta|<1$, $\zeta\neq z$ olmak üzere

(7.3) $$\left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}-\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right)-1\prec\begin{cases}\dfrac{(A-B)z}{1+Bz}=F_1(z), & B\neq 0,\\ Az=F_2(z), & B=0,\end{cases}$$

subordinasyonu gerçeklenirse $f(z)\in C(A,B)$'dir.

İSPAT: $f(z)$ fonksiyonu yardımıyla, $|z|<1$, $|\zeta|<1$, $\zeta\neq z$ olmak üzere

(7.4) $$z\left(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)^2=\begin{cases}z(1+Bw(z))^{\frac{A-B}{B}}, & B\neq 0,\\ ze^{Aw(z)}, & B=0,\end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $(1+Bw(z))^{\frac{A-B}{B}}$ ve $e^{Aw(z)}$ ifadelerinin $z=0$'daki değerinin 1'e eşit olacak şekilde Riemann yüzeyi seçilmiştir. Bu durumda $w(z)$ fonksiyonu birim disk D'de analitik, $w(0)=0$ koşullarını gerçekler. Eğer $|w(z)|<1$ olduğunu gösterirsek teoremi ispatlamış oluruz. (7.4) ifadesinden logaritmik türev alırsak

(7.5) $$\left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}-\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right)-1=\begin{cases}\dfrac{(A-B)zw'(z)}{1+Bw(z)}, & B\neq 0,\\ Azw'(z), & B=0,\end{cases}$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi $w(z)$ fonksiyonunun $|z|=r$ çemberi üzerinde bir z_0 noktasından maksimum değerini aldığını, yani $|w(z)|=1$ olduğunu göz önüne alalım. Bu taktirde I.S. Jack lemmasının kullanılması ile

(7.6) $$z_0w'(z_0)=kw(z_0),\ k\geq 1$$

eşitliği elde edilir. (7.6) ifadesinin (7.5) ifadesinde kullanılması ile

(7.7) $$\left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}-\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right)-1=\begin{cases}\dfrac{(A-B)kw(z_0)}{1+Bw(z_0)}=F_1(w(z_0))\notin F_1(D), B\neq 0,\\ Akw(z_0)=F_2(w(z_0))\notin F_2(D), \qquad B=0,\end{cases}$$

olduğunu buluruz. (7.7) eşitliği (7.3) subordinasyonu ile çelişir. Bu çelişkiye neden $w(z)$ fonksiyonunun $|z| = r$ çemberi üzerinde maksimum değerini almasıdır. Bu çelişkiyi ortadan kaldırmak için birim diskteki z 'ler için $|w(z)| < 1$ almalıyız. Bu durumda (7.3) subordinasyonu ile

$$\left(\frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta} \right) - 1 \prec \begin{cases} \dfrac{(A-B)z}{1+Bz}, & B \neq 0, \\ Az, & B = 0, \end{cases}$$

ise $\zeta \neq z,\ |z| < 1,\ |\zeta| < 1$ olmak üzere

(7.8) $$F(z,\ \zeta) = \left(\frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta} \right) - 1 = \begin{cases} \dfrac{1 + Aw(z)}{1 + Bw(z)}, & B \neq 0, \\ 1 + Bw(z), & B = 0, \end{cases}$$

eşitliğini elde ederiz. (7.8) eşitliği kesindir. Zira,

$$z\left(\frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta} \right)^2 = \begin{cases} z(1+Bz)^{\frac{A-B}{B}}, & B \neq 0, \\ ze^{Az}, & B = 0, \end{cases}$$

olması halinde

$$\left(\frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta} \right) - 1 \prec \begin{cases} \dfrac{(A-B)z}{1+Bz}, & B \neq 0, \\ Az, & B = 0, \end{cases}$$

elde edilir ki buda sonucun kesin olduğunu gösterir.

$F(z,\ \zeta)$, $|z| < 1$'de $|\zeta| < 1$ için analitiktir. Zira

(7.9) $$\lim_{\zeta \to z} F(z, \zeta) = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

eşitliği vardır. (7.8) ve (7.9) eşitliklerinin birlikte düşünülmesi ile $f(z) \in C(A,\ B)$ olduğunu elde ederiz.

SONUÇ 7.1: $f(z) \in C(A,\ B)$ ise

(7.10) $$\begin{cases} r(1-Br)^{\frac{A-B}{2B}} \leq |f(z)| \leq r(1+Br)^{\frac{A-B}{2B}}, & B \neq 0, \\ re^{-\frac{|A|}{2}r} \leq |f(z)| \leq re^{\frac{|A|}{2}r}, & B = 0 \end{cases}$$

dır. Gerçekten,

$$F(z,\zeta)=\left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}-\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right)-1=\begin{cases}\dfrac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}, & B\neq 0,\\ 1+Bw(z), & B=0,\end{cases}$$

eşitliği

$$(7.11)\qquad z\frac{f'(z)}{f(z)}=\begin{cases}\dfrac{1+\frac{A+B}{2}w(z)}{1+Bw(z)}, & B\neq 0,\\ 1+\dfrac{A}{2}w(z), & B=0,\end{cases}$$

ifadesini gerçekler. Diğer taraftan

$$w=w(z)=\begin{cases}\dfrac{1+\frac{A+B}{2}z}{1+Bz}, & B\neq 0,\\ 1+\dfrac{A}{2}z, & B=0,\end{cases}$$

fonksiyonu $|z|=r$ çemberini merkezi $C(r)$ ve yarıçapı $\rho(r)$ olan çemberler üzerine resmeder. Burada $C(r)$ ve $\rho(r)$ aşağıdaki şekildedir.

$$(7.12)\qquad \begin{cases}C(r)=\left(\dfrac{1-B\left(\frac{A+B}{2}\right)r^2}{1-B^2r^2},0\right), \ \rho(r)=\dfrac{\left(\frac{A-B}{2}\right)r}{1-B^2r^2}, & B\neq 0,\\ C(r)=(1,0), \qquad \rho(r)=\dfrac{|A|r}{2}, & B=0,\end{cases}$$

Dolayısıyla (7.12) ifadesinden

$$(7.13)\qquad \begin{cases}\dfrac{1-\left(\frac{A-B}{2}\right)r-B\left(\frac{A+B}{2}\right)r^2}{1-B^2r^2}\le \operatorname{Re} z\dfrac{f'(z)}{f(z)}\le \dfrac{1+\left(\frac{A-B}{2}\right)r-B\left(\frac{A+B}{2}\right)r^2}{1-B^2r^2}, & B\neq 0,\\ 1-\dfrac{|A|r}{2}\le \operatorname{Re} z\dfrac{f'(z)}{f(z)}\le 1+\dfrac{|A|r}{2}, & B=0,\end{cases}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Diğer taraftan,

$$(7.14)\qquad \operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)}=r\frac{\partial}{\partial r}\log|f(z)|,\ |z|=r$$

olduğunu göz önüne alırsak ve (7.14) bağıntısını (7.13) ifadesinde kullanırsak

$$(7.15)\qquad \begin{cases} \dfrac{1-\left(\dfrac{A-B}{2}\right)r-B\left(\dfrac{A+B}{2}\right)r^2}{r(1-B^2r^2)} \le \dfrac{\partial}{\partial r}\log\left|f(z)\right| \le \dfrac{1+\left(\dfrac{A-B}{2}\right)r-B\left(\dfrac{A+B}{2}\right)r^2}{r(1-B^2r^2)}, & B\neq 0, \\ \dfrac{1}{r}-\dfrac{|A|}{2} \le \dfrac{\partial}{\partial r}\log\left|f(z)\right| \le \dfrac{1}{r}+\dfrac{|A|}{2}, & B=0, \end{cases}$$

eşitsizliği elde edilir. (7.15) ifadesini 0’dan r’ye kadar integre edersek (7.10) eşitliğini elde ederiz.

Yukarıdaki teorem ve sonuç Y. Polatoğlu, M. Bolcal, A. Şen ve E. Yavuz tarafından ispatlanmıştır.

8. TASVİR EĞRİLERİNİN ÖZELLİKLERİ

PROBLEM 8.1: $w = f(z)$ fonksiyonu $|z| = r$ çemberi üzerinde ve sınırladığı $|z| < r$ bölgesinde tanımlanmış, analitik ve yalınkat olsun. $|z| = r$ çemberinin $w = f(z)$ fonksiyonu ile yapılan tasvirinde elde edilen eğri $\Gamma = f(|z| = r)$ ise aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(i) Teğetin x-ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı

$$izf'(z)$$

ile ifade edilebilir.

(ii) (i) şıkkındaki teğete çizilen dış normal

$$-izf'(z)$$

ile ifade edilebileceğini gösteriniz.

ÇÖZÜM: Yarıçapın, teğete değme noktasında dik olduğunu ve bir üçgende bir dış açının kendisine komşu olmayan iki iç açının toplamına eşit olduğunu biliyoruz. Buna göre,

(8.1) $$\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

(8.2) $$\beta = \theta + \frac{\pi}{2}$$

eşitlikleri yazılabilir. Diğer yandan teğetin değme noktasındaki eğimi

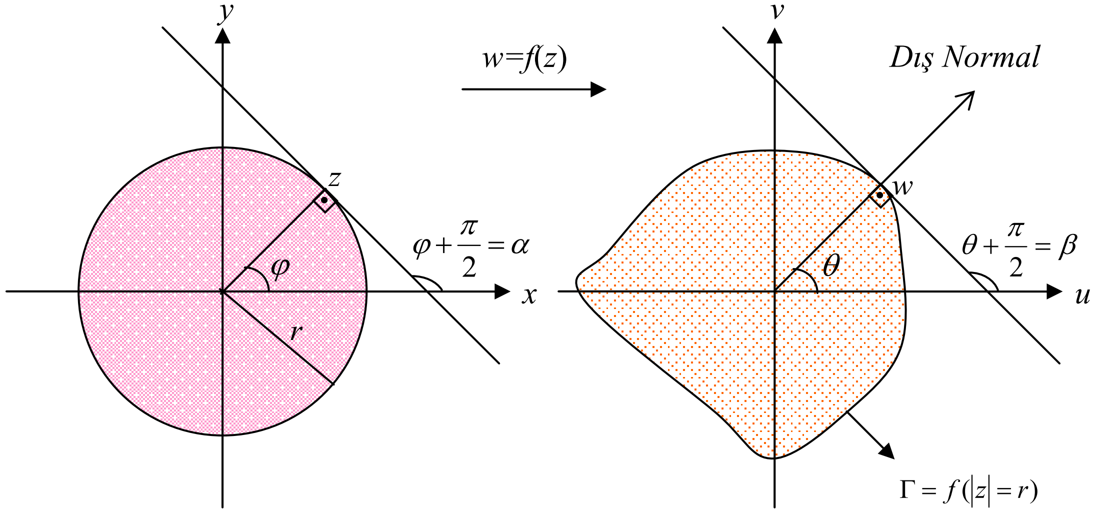
(8.3) $$m = f'(z)$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca,

$$w = f(z) \Rightarrow dw = f'(z)dz \Rightarrow Argdw = Arg(f'(z)dz) \Rightarrow$$

(8.4) $\quad Arg dw = Arg f'(z) + Arg dz$

eşitliğini yazabiliriz.



Şekil 8.1

(8.5) $\quad Arg dw = \beta = \theta + \frac{\pi}{2}$

(8.6) $\quad Arg dz = \alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$ (Teğetin x-ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı)

Yukarıdaki (8.5) ve (8.6) ifadeleri (8.4) eşitliğinde yerine yazılırsa,

(8.7) $\quad Arg dw = \varphi + \frac{\pi}{2} + Arg f'(z)$

elde edilir. Diğer yandan,

(8.8) $\quad \varphi = Arg z$

(8.9) $\quad \frac{\pi}{2} = Arg i$

olduğunu (8.7) ifadesinde kullanırsak,

$$Arg dw = Arg z + Arg i + Arg f'(z) \Rightarrow Arg dw = Arg(izf'(z)) \Rightarrow$$

(8.10) $\quad dw = izf'(z)$

bulunur. Buda teğetin $(izf'(z))$ vektörü ile verildiğini gösterir.

Teğet ve normal birbirlerine dik olduklarından m_1 normalin eğimi ise,

$$mm_1 = f'(z)m_1 = -1 \Rightarrow$$

(8.11) $\quad m_1 = -\frac{1}{f'(z)}$

eşitliğini yazabiliriz. Öte yandan,

$$w = f(z) \Rightarrow dw = f'(z)dz \Rightarrow$$

(8.12) $$\frac{1}{dw} = -\frac{1}{f'(z)dz}$$

olduğunu buluruz. (8.11) ve (8.12) bağıntıları birlikte düşünülürse,

$$\frac{1}{dw} = \frac{1}{f'(z)dz} \Rightarrow Arg\left(\frac{1}{dw}\right) = -Arg\left(\frac{1}{f'(z)dz}\right) \Rightarrow$$

(8.13) $$Arg1 - Argdw = -(Arg1 - Argf'(z) - Argdz)$$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan,

$$Arg1 = 0$$

olduğunu göz önüne alırsak (8.13) bağıntısı

(8.14) $$-Argdw = Argf'(z) + Argdz$$

haline dönüşür. (8.6), (8.8) ve (8.9) eşitlikleri (8.14) ifadesinde kullanılırsa

(8.15) $$dw = -izf'(z)$$

bulunur.

PROBLEM 8.2: $w = f(z)$ fonksiyonu $|z| = r$ çemberi üzerinde ve kapattığı D bölgesinde tanımlanmış, analitik ve yalınkat olsun. $|z| = r$ çemberinin $w = f(z)$ fonksiyonu altındaki resmi

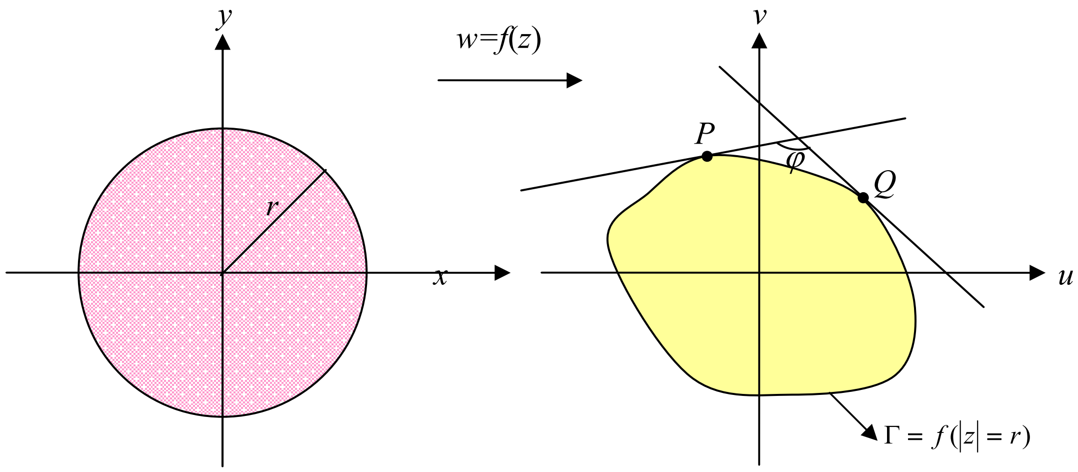
(8.16) $$\Gamma = f(|z| = r)$$

olsun. Γ eğrisinin eğriliği

(8.17) $$\rho = \frac{\operatorname{Re}\left(1 + z\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\right)}{|zf'(z)|}$$

ifadesi ile verilebileceğini gösteriniz.

ÇÖZÜM: Çözüme bir eğrinin eğrilik tanımı nedir ve nasıl tanımlanır sorularını cevaplayarak başlayalım.



Şekil 8.2

Γ eğrisinin eğriliği şu şekilde tanımlanabilir: Şekil 8.2 de gösterildiği gibi, $\Gamma = f(|z| = r)$ eğrisi üzerinde bulunan herhangi iki nokta P ve Q ise bu noktalardan Γ eğrisine çizilen teğetlerin oluşturdukları açıya $\overset{\frown}{PQ}$ yayının eğriliği denir ve

(8.18) $$\text{Eğrilik} = \rho = \frac{\text{Teğet açısının } \varphi\text{'ye göre türevi}}{\text{Görüntü eğrisinin uzunluğunun } \varphi\text{'ye göre türevi}}$$

ile formülüze edilir.

z kompleks sayısının kutupsal koordinatlardaki yazılışından dolayı,

(8.19) $$f'(re^{i\varphi}) = \left|f'(re^{i\varphi})\right| e^{iArgf'(re^{i\varphi})}$$

ifadesini verebiliriz. (8.19) eşitliğinden hareketle

$$\log f'(re^{i\varphi}) = \log[\left|f'(re^{i\varphi})\right| e^{iArgf'(re^{i\varphi})}] = \log\left|f'(re^{i\varphi})\right| + \log e^{iArgf'(re^{i\varphi})} \Rightarrow$$

(8.20) $$\log f'(re^{i\varphi}) = \log\left|f'(re^{i\varphi})\right| + iArgf'(re^{i\varphi})$$

bağıntısını elde ederiz. (8.20) ifadesinde her iki tarafın sanal kısımları alınırsa

(8.21) $$\mathrm{Im}(\log f'(re^{i\varphi})) = Argf'(re^{i\varphi})$$

bulunur. (8.21) ifadesinden φ'ye göre türev alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mathrm{Im}(\log f'(re^{i\varphi}))\right) = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(Argf'(re^{i\varphi})\right) \Rightarrow$$

(8.22) $$1 + \frac{\partial}{\partial\varphi}(\mathrm{Im}(\log f'(re^{i\varphi}))) = 1 + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(Argf'(re^{i\varphi})\right)$$

ifadesini elde ederiz. Öte yandan teğet açısının φ'ye göre türevini hesaplarsak,

$$\theta = \theta(\varphi) = \varphi + Argf'(z) + \frac{\pi}{2} = Arg(izf'(z)) \Rightarrow$$

(8.23) $$\theta'(\varphi) = 1 + \frac{\partial}{\partial\varphi}(Argf'(re^{i\varphi}))$$

elde ederiz. (8.22) ve (8.23) ifadelerinin karşılaştırılmasıyla,

(8.23) $$\theta'(\varphi) = 1 + \frac{\partial}{\partial\varphi}(\mathrm{Im}(Argf'(re^{i\varphi}))) = 1 + \frac{\partial}{\partial\varphi}(Argf'(re^{i\varphi}))$$

eşitliğini yazabiliriz. Şimdi,

$$\log f'(re^{i\varphi}) = \log\left|f'(re^{i\varphi})\right| + iArg(f'(re^{i\varphi}))$$

ifadesinden φ'ye göre türev alalım.

(8.24) $$ire^{i\varphi}\frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\left|f'(re^{i\varphi})\right|\right) + i\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\arg(f'(re^{i\varphi}))\right).$$

(8.24) eşitliğinin her iki tarafının i ile bölünmesi ile

(8.25) $$re^{i\varphi}\frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\left|f'(re^{i\varphi})\right|\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\arg(f'(re^{i\varphi}))\right)$$

yada,

(8.26) $$re^{i\varphi}\frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\left|f'(re^{i\varphi})\right|\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\arg(f'(re^{i\varphi}))\right)$$

eşitliği elde edilir. (8.26) ifadesi aynı zamanda,

(8.27) $$\left(1 + re^{i\varphi}\frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})}\right) = \left(-i\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\left|f'(re^{i\varphi})\right|\right)\right) + \left(1 + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\arg(f'(re^{i\varphi}))\right)\right)$$

şeklinde yazılabilir. (8.27) ifadesinin her iki tarafının reel kısımlarının alınması ile

(8.28) $$\mathrm{Re}\left(1 + re^{i\varphi}\frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})}\right) = 1 + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\arg(f'(re^{i\varphi}))\right)$$

eşitliği elde edilir. (8.23) ve (8.28) eşitliklerinin karşılaştırılması ile,

(8.29) $$\begin{cases} \theta'(\varphi) = \mathrm{Re}\left(1 + re^{i\varphi}\dfrac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})}\right) = 1 + \dfrac{\partial}{\partial\varphi}(Argf'(re^{i\varphi})) \\ \qquad\qquad = 1 + \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mathrm{Im}(Argf'(re^{i\varphi}))\right) \end{cases}$$

ifadesine ulaşılır. Buna göre teğet açısının φ'ye göre türevi (8.29) eşitliğinden dolayı

(8.30) $$\theta'(\varphi) = \mathrm{Re}\left(1 + re^{i\varphi}\frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})}\right)$$

ile verilir. (8.30) eşitliğinde $z = re^{i\theta}$ alınmasıyla,

(8.31) $$\theta'(\varphi) = \operatorname{Re}\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)$$

elde edilir. Öte yandan görüntü eğrisinin uzunluğunun φ'ye göre türevini bulmak istersek,

$$w = f(z) \Rightarrow w = f(re^{i\varphi}) \Rightarrow dw = ire^{i\varphi} f'(re^{i\varphi}) \Rightarrow$$

$$|dw| = \left|ire^{i\varphi} f'(re^{i\varphi})\right| \Rightarrow |dw| = |i|\left|re^{i\varphi} f'(re^{i\varphi})\right| \Rightarrow$$

(8.32) $$|dw| = \left|re^{i\varphi} f'(re^{i\varphi})\right|$$

ifadesinde ulaşılır. (8.32) eşitliğinde $z = re^{i\varphi}$ alınırsa,

(8.33) $$|dw| = |zf'(z)|$$

bulunur. (8.31) ve (8.33) ifadeleri (8.18) ifadesinde yerine yazılacak olursa,

$$\rho = \frac{\operatorname{Re}\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)}{|zf'(z)|}$$

elde edilir.

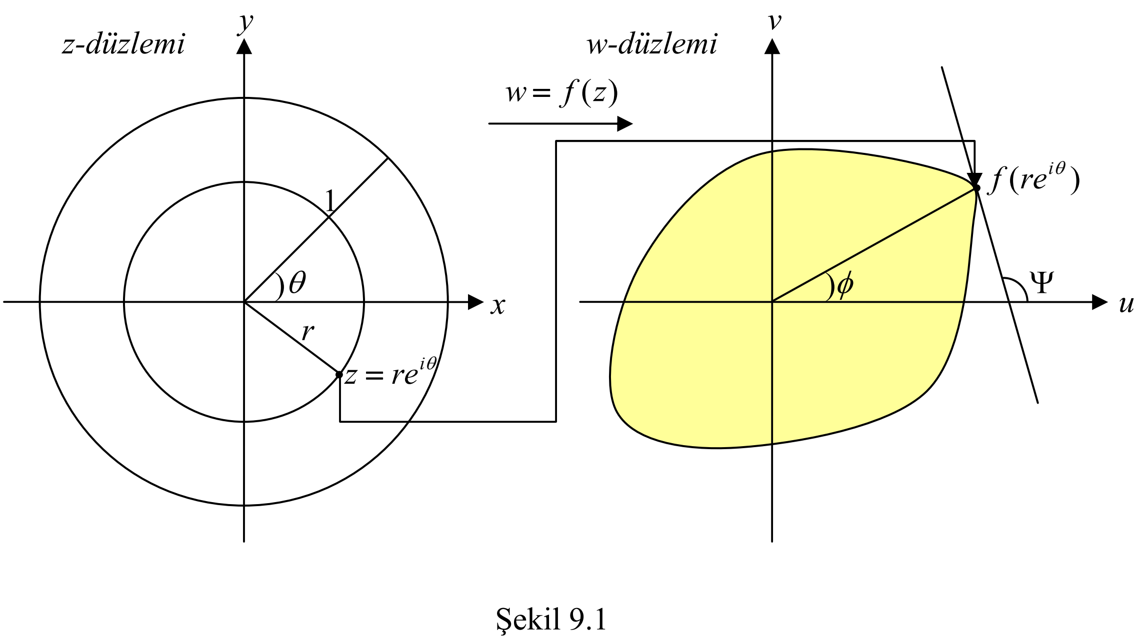
9. α-KONVEKS FONKSİYONLAR

α -konveks fonksiyon sınıfı P.T. Mocanu tarafında tanımlanmıştır. Bu sınıfın genel tanımı aşağıdaki şekildedir.

TANIM 9.1: (α-Konveks Fonksiyonlar) $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ fonksiyonu birim disk $D = \{z \| z| < 1\}$ 'de tanımlanmış analitik bir fonksiyon olsun ve bu fonksiyon birim diskteki her z noktası için $\dfrac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0$ koşulunu gerçeklesin. $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$\text{(9.1)} \qquad \operatorname{Re}(J(\alpha,\, f(z))) = \operatorname{Re}\left[(1-\alpha) z \frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right] > 0$$

eşitsizliğini gerçekleyen $f(z)$ fonksiyonuna α -konveks fonksiyon adı verilir. Bu tür fonksiyonların sınıfı $M(\alpha)$ ile gösterilir.



Şekil 9.1

$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ fonksiyonunun tasviri altında, $D = \{z \| z| < r < 1\}$ diskinin resmi C_r ile gösterilsin ve bu çember üzerindeki bir $z = re^{i\theta}$ noktasının resmi $f(re^{i\theta})$ olsun. Bu durumda $\theta = \arg f(re^{i\theta})$ yazabiliriz. $f(re^{i\theta})$ noktasından C_r eğrisine çizilen teğeti göz önüne alırsak bu teğetin açısı $\Psi = \arg(ire^{i\theta} f'(re^{i\theta}))$ ifadesi ile verilebilir. Birim diskte analitik olan $f(z)$ fonksiyonlarının bazı özellikleri gerçekleyip gerçeklemeyeceği tamamen θ ve Ψ açılarına bağlıdır. Bu açıların gerçekledikleri özelliklere göre $f(z)$ analitik fonksiyonları sınıflandırılırlar. Örneğin $f(z)$ fonksiyonunun birim diskte yıldızıl olması için gerek ve yeter şart

(9.2) $$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \geq 0$$

olması ile karakterize edilebilir. Benzer şekilde $f(z)$ fonksiyonunun birim diskte konveks olması için gerek ve yeter şart

(9.3) $$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \geq 0$$

eşitsizliğini sağlamasıdır.

Yukarıda söylenenlerden dolayı α-konveks fonksiyonların genel karakterizasyonu ise yine θ, ϕ ve Ψ açıları üzerine bazı şartların konulması ile elde edilir. Bu ise $0 \leq \alpha \leq 1$ için

(9.4) $$\mu = (1-\alpha)\phi + \alpha \Psi$$

şeklinde tanımlanan ve adına Mocanu açısı adı verilen açının birim disk D'deki her z için

(9.5) $$\frac{\partial \mu}{\partial \theta} \geq 0$$

olması durumunda $f(z)$ fonksiyonu D'de α-konvekstir denir.

10. MOCANU-JANOWSKI TİPİNDE α-KONVEKS FONKSİYONLAR

Bu bölümde Maconu-Janowski fonksiyonlarını tanımlayarak bu sınıfın genel özelliklerini (gösterilim teoremi, genelleştirilmiş Marx-Strohhacker eşitsizlikleri, distorsiyon teoremleri, katsayı eşitsizlikleri) inceleyeceğiz. Bunun için aşağıdaki tanım ve teoremlere ihtiyacımız vardır.

TANIM 10.1: (Janowski Yıldızıl Fonksiyon) $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ...$ fonksiyonu birim disk D'de tanımlanmış, analitik bir fonksiyon olsun. $p(z)$, genelleştirilmiş pozitif reel kısma haiz fonksiyon sınıfına ait bir fonksiyon olmak üzere

(10.1) $$z\frac{f'(z)}{f(z)} = p(z) = \frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}$$

şeklinde yazılabilirse $f(z)$ fonksiyonuna Janowski yıldızıl fonksiyon adı verilir. Bu fonksiyon sınıfı $S^*(A, B)$ ile gösterilir.

TANIM 10.2: (Janowski Konveks Fonksiyon) $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ...$ fonksiyonu birim disk D'de tanımlanmış, analitik bir fonksiyon olsun. $p(z)$, genelleştirilmiş pozitif reel kısma haiz fonksiyon sınıfına ait bir fonksiyon olmak üzere

(10.2) $$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)} = p(z) = \frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}$$

şeklinde yazılabilirse $f(z)$ fonksiyonuna Janowski konveks fonksiyon adı verilir. Bu fonksiyon sınıfı $C(A, B)$ ile gösterilir. $C(A, B)$ sınıfına ait ilk çalışmalar Y. Polatoğlu, M. Bolcal ve A. Şen tarafından yapılmıştır.

TANIM 10.3: (Mocanu-Janowski Tipinde α-Konveks Fonksiyon) $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ...$ fonksiyonu birim disk D'de tanımlanmış, analitik bir fonksiyon olsun. $p(z)$, genelleştirilmiş pozitif reel kısma haiz fonksiyon sınıfına ait olmak üzere $0 \le \alpha \le 1$ koşulu altında,

$$J(\alpha,\, f(z)) = \left[(1-\alpha) z \frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right] = p(z) = \frac{1 + Aw(z)}{1 + Bw(z)} \tag{10.3}$$

diferansiyel denklemini gerçekleyen $f(z)$ fonksiyonlarına Mocanu-Janowski tipinde α-konveks fonksiyon adı verilir. Bu tür fonksiyonların sınıfı $M(\alpha,\, A,\, B)$ ile gösterilir.

$S^*(A,\, B)$ ve $C(A,\, B)$ sınıflarının tanımlarına dikkat edilirse $M(\alpha,\, A,\, B)$ sınıfı, P.T. Mocanu tarafından tanımlanan α-konveks fonksiyon sınıfının genelleştirilmişidir. Bu genelleştirmeyi aşağıdaki şekilde verebiliriz.

(i) $\alpha = 1$ için $M(1,\, A,\, B) \equiv C(A,\, B)$ sınıfı.

(ii) $\alpha = 0$ için $M(0,\, A,\, B) \equiv S^*(A,\, B)$ sınıfı.

(iii) $A = 1,\, B = -1$ için $M(\alpha,\, 1,\, -1) \equiv M(\alpha)$ α-konveks fonksiyonlar sınıfı.

Burada önemle belirtmek gerekir ki genelleştirilmiş pozitif reel kısma ait fonksiyonların özel durumları göz önüne alınırsa $M(\alpha,\, A,\, B)$ sınıfına ait alt sınıfları elde ederiz. Bunun için A ve B'yi aşağıdaki şekilde seçmek yeterlidir.

(iv) $A = 1 - 2\lambda,\, B = -1,\, 0 \le \lambda \le 1$ olması halinde $M(\alpha, 1 - 2\lambda, -1)$ sınıfı bulunur. Bu sınıf λ'ıncı mertebeden α-konveks fonksiyonlar sınıfıdır.

(v) $A = 1,\, B = 0$ için $|J(\alpha,\, 1,\, 0,\, f(z)) - 1| < 1$ koşulunu gerçekleyen α-konveks fonksiyonlar sınıfını elde ederiz.

(vi) $A=\lambda,\ B=0$ için $\left|J(\alpha,\ \lambda,\ 0,\ f(z))-1\right|<\lambda$ koşulunu gerçekleyen α-konveks fonksiyonlar sınıfını elde ederiz.

(vii) $A=1,\ B=-1+\dfrac{1}{M},\ M>\dfrac{1}{2}$ için $\left|J\left(\alpha,1,\left(-1+\dfrac{1}{M}\right),\ f(z)\right)-M\right|<M$ koşulunu gerçekleyen α-konveks fonksiyonlar sınıfını elde ederiz.

(iix) $A=\lambda,\ B=-\lambda,\ 0<\lambda<1$ için $\left|\dfrac{J(\alpha,\ \lambda,-\lambda,\ f(z))-1}{J(\alpha,\ \lambda,-\lambda,\ f(z))-1}\right|<\lambda$ koşulunu gerçekleyen fonksiyonlar sınıfını elde ederiz.

TEOREM 10.1: $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+...$ fonksiyonu birim disk D'de tanımlanmış, analitik bir fonksiyon olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu

(10.4) $$(1-\alpha)z\frac{f'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)-1\prec\begin{cases}\dfrac{(A-B)z}{1+Bz}=F_1(z), & B\neq 0,\\ Az=F_2(z), & B=0,\end{cases}$$

subordinasyonunu gerçeklerse $M(\alpha,\ A,\ B)$ sınıfına aittir.

İSPAT: $w_1=h(z)=\dfrac{(A-B)z}{1+Bz}$ lineer transformasyonu $|z|=r$ çemberlerini, merkezi $C_1(r)$ ve yarıçapı $\rho_1(r)$ olan çemberler üzerine resmeder. Burada $C_1(r)$ ve $\rho_1(r)$ aşağıdaki şekildedir.

(10.5) $$\begin{cases}C_1(r)=-\dfrac{B(A-B)r^2}{1-B^2r^2},\ \rho_1(r)=\dfrac{(A-B)r}{1-B^2r^2}, & B\neq 0,\\ C_1(r)=(0,\ 0), \qquad\qquad \rho_1(r)=|A|r, & B=0.\end{cases}$$

Ayrıca, $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+...$ fonksiyonu yardımıyla

(10.6) $$\frac{f(z)}{z}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{\alpha}=\begin{cases}(1+Bw(z))^{\frac{A-B}{B}}, & B\neq 0,\\ e^{Aw(z)}, & B=0,\end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $(1+Bw(z))^{\frac{A-B}{B}}$ ve $e^{Aw(z)}$ ifadelerinin $z=0$'daki değeri 0'a eşit olduğu Riemann dalları seçilmiştir. Bu durumda $w(z)$ fonksiyonu

D'de analitiktir ve $w(0)=0$ koşullarını gerçekler. Eğer $|w(z)|<1$ olduğunu gösterirsek teoremi ispatlamış oluruz. (10.6) ifadesinden logaritmik türev alırsak

$$\log f(z)-\log z+\alpha\log z+\alpha\log f'(z)-\alpha\log f(z)=\begin{cases}\dfrac{A-B}{B}\log(1+Bw(z)), & B\neq 0,\\ Aw(z)\log e, & B=0,\end{cases}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{1}{z}+\alpha\frac{1}{z}+\alpha\frac{f''(z)}{f'(z)}-\alpha\frac{f'(z)}{f(z)}=\begin{cases}\dfrac{A-B}{B}\dfrac{Bw'(z)}{1+Bw(z)}, & B\neq 0,\\ Aw'(z), & B=0,\end{cases}$$

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}-1+\alpha+\alpha z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\alpha z\frac{f'(z)}{f(z)}=\begin{cases}\dfrac{(A-B)zw'(z)}{1+Bw(z)}, & B\neq 0,\\ Azw'(z), & B=0,\end{cases}$$

(10.7) $$(1-\alpha)z\frac{f'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)-1=\begin{cases}\dfrac{(A-B)zw'(z)}{1+Bw(z)}, & B\neq 0,\\ Azw'(z), & B=0,\end{cases}$$

ifadesine ulaşırız. Diğer yandan, $w(z)$ fonksiyonu $|z|=r$ çemberleri üzerinde bir z_0 noktasında maksimum değerini alıyorsa I.S. Jack lemması gereği

(10.8) $$z_0w'(z_0)=kw(z_0)$$

eşitliği gerçeklenir. (10.8) ifadesini (10.7) de kullanırsak

(10.9)

$$\left[(1-\alpha)z\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}+\alpha\left(1+z_0\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)\right]-1=\begin{cases}k\dfrac{(A-B)w(z_0)}{1+Bw(z_0)}\notin F_1(w(z_0))\notin F_1(D), & B\neq 0,\\ Aw(z_0)\notin F_2(w(z_0))\notin F_2(D), & B=0,\end{cases}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu ise teoremin hipotezi olan

$$\left[(1-\alpha)z\frac{f'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right]-1\prec\begin{cases}\dfrac{(A-B)z}{1+Bz}=F_1(z), & B\neq 0,\\ Az=F_2(z), & B=0,\end{cases}$$

subordinasyonu ile çelişir. Bu çelişkiye neden $w(z)$ fonksiyonunun $|z|=r$ çemberi üzerinde bir z_0 noktasındaki maksimum değerini alması neden olmuştur. Dolayısıyla bu çelişkiyi ortadan kaldırmak için $|w(z)|<1$ alınmalıdır. Bu ise bize (10.4) subordinasyonunun gerçeklendiğini gösterir.

Diğer taraftan $w(z)$ fonksiyonu Schwarz lemmasınını koşullarını sağladığından

$$(1-\alpha)z\frac{f'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)-1\prec\begin{cases}\dfrac{(A-B)z}{1+Bz}, & B\neq 0,\\ Az, & B=0,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$(1-\alpha)z\frac{f'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)-1=\begin{cases}\dfrac{(A-B)w(z)}{1+Bw(z)}, & B\neq 0,\\ Aw(z), & B=0,\end{cases}$$

şeklinde yazmak subordinasyon prensibinden dolayı mümkündür. Bu ise bize

$$(1-\alpha)z\frac{f'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)=\begin{cases}\dfrac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}, & B\neq 0,\\ Aw(z), & B=0,\end{cases}$$

olduğunu yani gerçekten $f(z)$'in $M(\alpha,\ A,\ B)$ sınıfına ait olduğunu gösterir. Burada ekstremal fonksiyon

$$f(z)\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{\alpha}=\begin{cases}z(1+Bz)^{\frac{A-B}{B}}, & B\neq 0,\\ ze^{Az}, & B=0,\end{cases}$$

dir.

SONUÇ 10.1: Teorem 10.1'den

$$w(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{B}\left[\left(\dfrac{f(z)}{z}\right)^{\frac{B}{A-B}}\left(z\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right)^{\frac{\alpha B}{A-B}}-1\right], & B\neq 0,\\ \log\left[\left(\dfrac{f(z)}{z}\right)^{\frac{1}{A}}\left(z\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right)^{\frac{\alpha}{A}}\right], & B=0,\end{cases}$$

eşitliği elde edilir. $w(z)$ fonksiyonunun tanımı göz önüne alınırsa $|w(z)|<1$ olduğundan dolayı

$$\left|\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\frac{B}{A-B}}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{\frac{\alpha B}{A-B}}-1\right|<|B|,\quad B\neq 0, \tag{10.10}$$

$$\left|\log\left[\left(\frac{f(z)}{z}\right)\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{\alpha}\right]\right|<|A|,\quad B=0, \tag{10.11}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (10.10) ve (10.11) eşitsizlikleri Marx-Strohhacker eşitsizliklerinin genelleştirilmişidir. Bu eşitsizliği $\alpha,$ A ve B parametrelerine özel değerler vererek

(i) $\alpha = 1,\ A = 1,\ B = -1$ olması durumunda konveks fonksiyonlar için

$$\left| \frac{1}{\sqrt{f'(z)}} - 1 \right| < 1 \text{ ve } \mathrm{Re}\sqrt{f'(z)} > \frac{1}{2} \ (B \neq 0 \text{ hali için})$$

eşitsizliklerini elde ederiz ki bu iki eşitsizlik konveks fonksiyonlar için çok iyi bilinen Marx-Strohhacker eşitsizlikleridir [10, sayfa 129].

(ii) $\alpha = 0,\ A = 1,\ B = -1$ olması durumunda yıldızıl fonksiyonlar için

$$\left| \sqrt{\frac{z}{f(z)}} - 1 \right| < 1$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlik 1932 yılında Marx-Strohhacker tarafından ve 1936 yılında M.S. Robertson tarafından ispatlanmıştır [10, sayfa 128].

(iii) $A = 1,\ B = -1$ olması durumunda α -konveks fonksiyonlar için

$$\left| \sqrt{\frac{z}{f(z)} \left(\frac{f(z)}{zf'(z)} \right)^{\alpha}} - 1 \right| < 1$$

şeklinde tamamen yeni α -konveks fonksiyonlar için bir eşitsizlik elde edilir.

(iv) $A = 1,\ B = 0$ olması durumunda ($B = 0$ halinde) α -konveks fonksiyonlar için

$$\left| \log\left(\frac{f(z)}{z} \right) \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right)^{\alpha} - 1 \right| < 1$$

eşitsizliğini buluruz. Bu eşitsizlik de yukarıdaki eşitsizlik gibi yenidir.

SONUÇ 10.2: $f(z) \in M(\alpha, A, B)$ ve $w(z)$ Schwarz lemmasının koşullarını sağlamak üzere

$$f(z) = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1} (1 + Bw(\zeta))^{\frac{A-B}{\alpha B}} d\zeta \right]^{\alpha}, & B \neq 0, \\ \left[\dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{\frac{A}{\alpha} w(\zeta)} d\zeta \right]^{\alpha}, & B \neq 0, \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

İPAT: Teorem 10.1 de $f(z) \in M(\alpha, A, B)$ ise

$$(10.12) \qquad f(z)\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{\alpha} = \begin{cases} z(1+Bw(z))^{\frac{A-B}{B}}, & B \neq 0, \\ ze^{Aw(z)}, & B = 0, \end{cases}$$

eşitliğinin geçerli olduğunu biliyoruz. Burada $w(z)$ Schwarz lemmasının koşullarını gerçekler. (10.12) eşitliğinden hareketle

$$(f(z))^{\frac{1}{\alpha}}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = \begin{cases} z^{\frac{1}{\alpha}}(1+Bw(z))^{\frac{A-B}{\alpha B}}, & B \neq 0, \\ z^{\frac{1}{\alpha}}e^{\frac{A}{\alpha}w(z)}, & B = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$(10.13) \qquad \frac{f'(z)}{(f(z))^{1-\frac{1}{\alpha}}} = \begin{cases} z^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+Bw(z))^{\frac{A-B}{\alpha B}}, & B \neq 0, \\ z^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{\frac{A}{\alpha}w(z)}, & B = 0, \end{cases}$$

eşitliğini elde ederiz. (10.13) ifadesinden integral alınırsa

$$f(z) = t \Rightarrow f'(z)dz = dt, \ (f(z))^{1-\frac{1}{\alpha}} = t^{1-\frac{1}{\alpha}}$$

$$\alpha(f(z))^{\frac{1}{\alpha}} = \begin{cases} \int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+Bw(\zeta))^{\frac{A-B}{\alpha B}}d\zeta, & B \neq 0, \\ \int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{\frac{A}{\alpha}w(\zeta)}d\zeta, & B = 0, \end{cases}$$

ifadesi elde edilir. Bu son eşitlik aynı zamanda

$$(10.14) \qquad f(z) = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha}\int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+Bw(\zeta))^{\frac{A-B}{\alpha B}}d\zeta\right]^{\alpha}, & B \neq 0, \\ \left[\frac{1}{\alpha}\int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{\frac{A}{\alpha}w(\zeta)}d\zeta\right]^{\alpha}, & B = 0, \end{cases}$$

şeklinde de yazılabilir.

TEOREM 10.2: $f(z) \in M(\alpha, A, B)$ olsun. Bu durumda $g(z) \in S^*(A, B)$ olmak üzere

$$(10.15) \qquad f(z) = \left[\frac{1}{\alpha}\int_0^z \zeta^{-1}(g(\zeta))^{\frac{1}{\alpha}}d\zeta\right]^{\alpha}$$

şeklinde bir integral gösterilişine sahiptir.

İSPAT: (10.14) ifadesi aynı zamanda

$$(10.16)\qquad f(z)=\begin{cases}\left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^z \zeta^{-1}\left(\zeta(1+Bw(\zeta))^{\frac{A-B}{B}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}d\zeta\right]^{\alpha}, & B\neq 0,\\ \left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^z \zeta^{-1}\left(\zeta\; e^{Aw(\zeta)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}d\zeta\right]^{\alpha}, & B=0,\end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan $g(z)\in S^*(A,B)$ ise bu taktirde $g(z)$ fonksiyonu

$$(10.17)\qquad g(z)=\begin{cases} z(1+Bw(z))^{\frac{A-B}{B}}, & B\neq 0,\\ ze^{Aw(z)}, & B=0,\end{cases}$$

şeklinde yazılabileceğini biliyoruz. (10.17) yazılışını (10.16)'da yerine yazarsak (10.5) ifadesi elde edilir.

HAZIRLIK 10.1: $M(\alpha, A, B)$ sınıfı için distorsiyon teoremini verebilmek için hipergeometrik fonksiyonları kullanarak $K(\alpha, A, B, r)$ ile gösterilen yeni bir fonksiyon tanımlayacağız. $\operatorname{Re} a>0$ ve $\operatorname{Re}(c-a)>0$ olmak üzere hipergeometrik fonksiyon

$$(10.18)\qquad \begin{cases} G(a,b,c;z)=\dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)}\frac{z^k}{k!}=\\ \qquad =\dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\displaystyle\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-uz)^{-b}du\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Diğer yandan (10.14) yazılışında $w(\zeta)=\zeta$ olarak alınacak olursa

$$(10.19)\qquad f_0(z)=\begin{cases}\left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+B\zeta)^{\frac{A-B}{\alpha B}}d\zeta\right]^{\alpha}, & B\neq 0,\\ \left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{\frac{A}{\alpha}\zeta}d\zeta\right]^{\alpha}, & B=0,\end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi (10.18) ve (10.19) yazılışları orasında bir benzerlik kurulacak olursa

$$(10.20)\qquad \begin{cases} a-1=\dfrac{1}{\alpha}-1 \Rightarrow a=\dfrac{1}{\alpha}, \\ c-a-1=0 \Rightarrow c=a+1 \Rightarrow c=\dfrac{1}{\alpha}+1, \\ -b=\dfrac{A-B}{\alpha B}=\dfrac{\frac{A-B}{B}}{\alpha} \Rightarrow b=-\dfrac{\frac{A-B}{B}}{\alpha}, \end{cases}$$

eşitlikleri elde edilir. (10.20) eşitlikleri

$$\operatorname{Re}(a)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha}\right)>0,\ \operatorname{Re}(c-a)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha}+1-\frac{1}{\alpha}\right)=\operatorname{Re}1=1>0$$

koşullarını gerçekler, dolayısıyla $f_0(z)$ fonksiyonu hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$(10.21)\qquad f_0(z)=\begin{cases} \left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+B\zeta)^{\frac{\frac{A-B}{B}}{\alpha}}d\zeta\right]^{\alpha}, & B\neq 0, \\ \left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{\frac{A}{\alpha}\zeta}d\zeta\right]^{\alpha}, & B=0, \end{cases}$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca

$$(10.22)\qquad \zeta=uz \Rightarrow d\zeta=zdu$$

alınması durumunda (10.21) ifadesi

$$f_0(z)=\begin{cases} \left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^1 (uz)^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+Buz)^{\frac{\frac{A-B}{B}}{\alpha}}zdu\right]^{\alpha}, & B\neq 0, \\ \left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^1 (uz)^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{\frac{A}{\alpha}zu}zdu\right]^{\alpha}, & B=0, \end{cases}$$

$$(10.23)\qquad f_0(z)=\begin{cases} z\left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^1 (u)^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+Bzu)^{\frac{\frac{A-B}{B}}{\alpha}}du\right]^{\alpha}, & B\neq 0, \\ z\left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^1 (u)^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{\frac{A}{\alpha}zu}du\right]^{\alpha}, & B=0, \end{cases}$$

haline dönüşür. (10.18), (10.20) ve (10.23) eşitliklerinin birlikte düşünülmesi halinde

$$(10.24)\qquad f_0(\alpha,\ A,\ B,\ r)=K(\alpha,\ A,\ B,\ z)=\begin{cases} z\left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^1 u^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+Bzu)^{\frac{\frac{A-B}{B}}{\alpha}}du\right]^{\alpha}, & B\neq 0,\\ z\left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^1 u^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{\frac{A}{\alpha}zu}du\right]^{\alpha}, & B=0,\end{cases}$$

fonksiyonunu elde ederiz. (10.24) yazılışından hareket ederek ve Gamma fonksiyonlarının tanımını kullanarak

$$(10.25)\qquad \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1-\frac{1}{\alpha}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma(1)}=$$

olduğunu (10.24) yazılışında kullanırsak

$$(10.26)\qquad \begin{cases} K(\alpha,\ A,\ B,\ r)=r\left[G\left(\dfrac{1}{\alpha},\ -\dfrac{\frac{A-B}{B}}{\alpha},\ \dfrac{1}{\alpha}+1;\ r\right)\right]^{\alpha}= \\ \begin{cases}\left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^r \rho^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+B\rho)^{\frac{\frac{A-B}{B}}{\alpha}}d\rho\right]^{\alpha}, & B\neq 0,\\ \left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^r \rho^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{\frac{A}{\alpha}\rho}d\rho\right]^{\alpha}, & B=0,\end{cases}\end{cases}$$

ifadesi yazılabilir.

TEOREM 10.3: $f(z)\in M(\alpha,\ A,\ B)$ olsun. Bu taktirde

$$(10.27)\qquad -K(\alpha,\ A,\ B,\ -r)\leq |f(z)|\leq K(\alpha,\ A,\ B,\ r)$$

dir. Bu eşitsizlik kesindir. Zira extremal fonksiyon (10.21) eşitliği ile verilen

$$f_0(z)=\begin{cases}\left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+B\zeta)^{\frac{\frac{A-B}{B}}{\alpha}}d\zeta\right]^{\alpha}, & B\neq 0,\\ \left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{\frac{A}{\alpha}\zeta}d\zeta\right]^{\alpha}, & B=0,\end{cases}$$

fonksiyonudur.

İSPAT: $f(z)\in M(\alpha, A, B)$ olduğundan Teorem 10.2'den dolayı $g(z)\in S^*(A, B)$ olmak üzere

(10.28) $$f(z)=\left[\frac{1}{\alpha}\int_0^z \zeta^{-1}(g(\zeta))^{\frac{1}{\alpha}}d\zeta\right]^{\alpha}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $|z|=r$ ve $\zeta=\rho e^{i\theta}\Rightarrow d\zeta=e^{i\theta}d\rho$ olarak alır (10.28) eşitliğini pozitif reel eksen boyunca integre edersek

$$f(z)=\left[\frac{1}{\alpha}\int_0^r \rho^{-1}e^{-i\theta}(g(\rho))^{\frac{1}{\alpha}}e^{i\theta}d\rho\right]^{\alpha}$$

(10.29) $$f(z)=\left[\frac{1}{\alpha}\int_0^r \rho^{-1}(g(\rho))^{\frac{1}{\alpha}}d\rho\right]^{\alpha}$$

eşitliğini elde ederiz. Diğer taraftan $g(z)\in S^*(A, B)$ olduğundan

(10.30) $$\begin{cases} r(1-Br)^{\frac{A-B}{B}}\le |g(z)|\le r(1+Br)^{\frac{A-B}{B}}, & B\neq 0,\\ re^{-Ar}\le |g(z)|\le re^{Ar}, & B=0,\end{cases}$$

eşitsizliklerini gerçekler. Dolayısıyla (10.30) ifadesi

(10.31) $$\begin{cases} |g(\rho)|^{\frac{1}{\alpha}}\le \rho^{\frac{1}{\alpha}}(1+B\rho)^{\frac{\frac{A-B}{B}}{\alpha}}, & B\neq 0,\\ |g(\rho)|^{\frac{1}{\alpha}}\le \rho^{\frac{1}{\alpha}}e^{\frac{A}{\alpha}\rho}, & B=0,\end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan (10.29) eşitliğinden

(10.32) $$(f(z))^{\frac{1}{\alpha}}=\frac{1}{\alpha}\int_0^r \rho^{-1}(g(\rho))^{\frac{1}{\alpha}}d\rho$$

yazabiliriz. (10.31) eşitsizliği (10.32) de kullanılırsa

$$|f(z)|^{\frac{1}{\alpha}}\le \frac{1}{\alpha}\int_0^r \rho^{-1}|g(\rho)|^{\frac{1}{\alpha}}d\rho\Rightarrow$$

$$|f(z)|^{\frac{1}{\alpha}}\le \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^r \rho^{-1}\rho^{\frac{1}{\alpha}}(1+B\rho)^{\frac{\frac{A-B}{B}}{\alpha}}d\rho, & B\neq 0,\\ \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^r \rho^{-1}\rho^{\frac{1}{\alpha}}e^{\frac{A}{\alpha}\rho}d\rho, & B=0,\end{cases}\Rightarrow$$

$$(10.33)\qquad |f(z)| \le \begin{cases} \left[\dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\int_0^r \rho^{\frac{1}{\alpha}-1} (1+B\rho)^{\frac{\frac{A-B}{B}}{\alpha}} d\rho \right]^{\alpha}, & B \neq 0, \\ \left[\dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\int_0^r \rho^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{\frac{A}{\alpha}\rho} d\rho \right]^{\alpha}, & B = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik (10.26) ifadesi ile karşılaştırılacak olursa

$$(10.34)\qquad |f(r)| \le K(\alpha, A, B, r)$$

olduğunu buluruz. (10.34) eşitsizliği (10.27) eşitsizliğinin sağ tarafıdır.

(10.27) eşitsizliğinin sol tarafını ispatlarken aşağıda açıklanan durumları göz önüne alırız. $g(z) \in S^*(A, B)$ olduğundan orijini $f(z) = Re^{i\phi}$ noktasına birleştiren bir Γ doğrusunu göz önüne alırız. $f(z)$ fonksiyonu birim disk D'de analitik olduğundan Γ doğrusu D birim diskinde orijini bir $z = re^{i\phi}$ noktasında birleştiren bir Jordan yayının resmidir. Diğer taraftan $(f(z))^{\frac{1}{\alpha}}$ tasviri altında bir γ yayının resmi orijinden çıkan ve her birinin uzunluğu

$$(10.35)\qquad R^{\frac{1}{\alpha}} = |f(z)|^{\frac{1}{\alpha}} = \int_{\gamma} \left| d(f(z))^{\frac{1}{\alpha}} \right| |d\zeta|$$

olan bir çok doğru parçası olacaktır. Diğer taraftan $f(z)$ fonksiyonunun integral gösteriliminden

$$f(z) = \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^{\zeta} \zeta^{-1} (g(\zeta))^{\frac{1}{\alpha}} d\zeta \right]^{\alpha} \Rightarrow$$

$$(f(\zeta))^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\zeta} \zeta^{-1} (g(\zeta))^{\frac{1}{\alpha}} d\zeta \Rightarrow$$

$$d(f(\zeta))^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\zeta} \zeta^{-1} (g(\zeta))^{\frac{1}{\alpha}}$$

olacaktır. Böylece $\rho = |\zeta|$ ise

$$\begin{cases} r(1-Br)^{\frac{A-B}{B}} \le |g(z)| \le r(1+Br)^{\frac{A-B}{B}}, & B \neq 0, \\ re^{-Ar} \le |g(z)| \le re^{Ar}, & B = 0, \end{cases}$$

ifadesinden hareketle

$$\begin{cases} R^{\frac{1}{\alpha}} = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{\gamma}\left|\zeta^{-1}(g(\zeta))^{\frac{1}{\alpha}}\right||d\zeta| \geq \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{\gamma}\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-B\rho)^{\frac{\frac{A-B}{B}}{\alpha}}|d\zeta| = \\ \quad = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{0}^{r}\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-B\rho)^{\frac{\frac{A-B}{B}}{\alpha}}d\rho, \quad B \neq 0, \\ R^{\frac{1}{\alpha}} = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{\gamma}\left|\zeta^{-1}(g(\zeta))^{\frac{1}{\alpha}}\right||d\zeta| \geq \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{\gamma}\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-A\rho}|d\zeta| = \\ \quad = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{0}^{r}\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-A\rho}d\rho, \qquad B = 0, \end{cases}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Eğer $\rho = ru$ alınırsa, hipergeometrik fonksiyon ve $K(\alpha, A, B, r)$ fonksiyonunun tanımı altında

(10.37) $\quad |f(z)| \geq -K(\alpha, A, B, -r)$

eşitsizliğini elde ederiz. (10.34) ve (10.37) eşitsizlikleri bize teoremin ispatını verir.

TEOREM 10.4: $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in M(\alpha, A, B)$ ve S_n, $\sum_{i=1}^{n} ix_i = n$ koşulunu gerçekleyen, negatif olmayan $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ n'lilerinin cümlesi olsun ve her bir n'li için

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = q,$$

olarak tanımlanmış olsun. Burada $n = 1,2,3,...$ için ($\gamma(\alpha,q) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...$, $\gamma(\alpha,0) = \alpha$)

(10.38) $$|a_{n+1}| \leq \sum_{S(n)} \frac{\gamma(\alpha, q-1)c_1^{x_1}c_2^{x_2}...c_n^{x_n}}{x_1!x_2!x_3!...x_n!}$$

dir. Burada toplam $S(n)$'deki n'liler üzerinden alınır ve c_n'ler

$$c_n = \frac{1}{n!\alpha^n B^{n-1}(1+n\alpha)}\prod_{k=0}^{n-1}\left[(B-A)+kB\alpha\right], \; n = 1,2,3,...$$

dir.

İSPAT: Bu sınıfa ait katsayının eşitsizliğinin gösterilmesinde A.W. Goodman tarafından geliştirilen tekniği kullanırız. Buna göre,

$$f_*(z)=\begin{cases}\left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+B\zeta)^{\frac{\frac{A-B}{B}}{\alpha}}d\zeta\right]^{\alpha}, & B\neq 0,\\ \left[\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{\frac{A}{\alpha}\zeta}d\zeta\right]^{\alpha}, & B=0,\end{cases}$$

yazılışındaki kuvvetlerin esas değerleri alınırsa

(10.39) $\quad f_*(z)=zH(z)$

şeklinde yazılabilir. Burada

(10.40) $\quad H(z)=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n\right]^{\alpha}$

(10.41) $\quad c_n=\dfrac{1}{n!\alpha^n B^{n-1}(1+n\alpha)}\prod_{k=0}^{n-1}\left[(B-A)+kB\alpha\right],\ n=1,2,3,...$

dır. Eğer

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$$

ise

$$|a_{n+1}|\leq\frac{H^{(n)}(0)}{n!},\ n=1,\ 2,\ 3,...$$

dır. (10.39) ve (10.40) yazılışlarından

(10.42) $\quad H(z)=[h(z)]^{\alpha}=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}z^n$

varolduğuna göre burada

$$h(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n$$

dir. (10.42) ifadesinden logaritmik türev alırsak

$$H'(z)=\alpha\frac{h'(z)}{h(z)}H(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_{n+1}z^{n-1}$$

elde ederiz. Bu yazılışta $h(z), h'(z), H'(z), H(z)$ 'nin kuvvet serileri ile yazılması halinde

(10.43) $\quad \left(\sum_{n=1}^{\infty}na_{n+1}z^{n-1}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n+1}z^n\right)=\alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty}nc_n z^{n-1}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}na_{n+1}z^{n+}\right)$

bulunur. $n\geq 1$ sabit sayısı için (10.43) yazılışından z^{n-1} 'in katsayıları eşitlenerek

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[k-\alpha(n-k)\right]c_{n-k}a_{k+1}=0$$

ifadesine ulaşılır. Gerçekten (10.43) ifadesinde her iki taraftan z^{n-1}'in katsayılarını hesaplayalım. İlk önce sol tarafı bulalım.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}na_{n+1}z^{n-1}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nz^{n-1}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}na_{n+1}z^{n-1}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n\right)\Rightarrow$$

$$=(a_2+2a_3z+3a_4z^2+\ldots+na_{n+1}z^{n-1}+\ldots)+(a_2+2a_3z+\ldots+na_{n+1}z^{n-1}+\ldots)$$
$$(c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots)$$

ifadesinden z^{n-1}'li terimin katsayısını bulalım.

$$=(na_{n+1}+a_2c_{n-1}+2a_3c_{n-2}+3a_4c_{n-3}+\ldots(n-1)a_nc_1)=\sum_{k=0}^{n}kc_{n-k}\alpha_{k+1}\ .$$

Şimdi sağ tarafın

$$\alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty}nc_nz^{n-1}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}na_{n+1}z^{n+1}\right)=$$
$$=\alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty}nc_nz^{n-1}\right)+\left(\sum_{n=1}^{\infty}nc_nz^{n-1}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}na_{n+1}z^{n+1}\right)$$

ifadesinden z^{n-1}'li terimin katsayılarını hesaplarsak

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha(n-k)c_{n-k}a_{k+1}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\sum_{k=0}^{n}kc_{n-k}a_{k+1}-\alpha\sum_{k=0}^{n}(n-k)c_{n-k}a_{k+1}=0$$

veya

(10.44) $$\sum_{k=0}^{n}\left[k-\alpha(n-k)\right]c_{n-k}a_{k+1}=0$$

olarak bulunur. $c_0=1$ olduğu göz önüne alınırsa buradan $n=1,2,\ldots,(n-1)$ bırakılarak (10.44) bağıntısından a_{n+1}'i çözersek

(10.45) $$a_{n+1}=-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[k-\alpha(n-k)\right]c_{n-k}a_{k+1}$$

bulunur. (10.45) denklemi bir rekürasyon formülü olup bize a_{n+1}'in daha küçük indekslerden hesaplama olanağı verir. Öyle ki a_{n+1}'in bir dizisini bir tek tavırda hesaplama olanağı verir. Böylece bu teoremi ispatlamak için her n sayısı için

$$|a_{n+1}| \leq \sum_{S(n)} \frac{\gamma(\alpha,q-1)c_1^{x_1}c_2^{x_2}...c_n^{x_n}}{x_1!x_2!x_3!...x_n!}$$

eşitliği ile tanımlanan a_{n+1} katsayılarını gerçekte

$$a_{n+1} = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left[k-\alpha(n-k)\right]c_{n-k}a_{k+1}$$

bağıntısını sağladığını göstermek yeter. Bunun için indüksiyon ile işlem yaparız. Bu demektir ki her $k = 1,2,...n-1$ için

(10.46) $$a_{n+1} = \sum \frac{\gamma(\alpha,j-1)c_1^{x_1}c_2^{x_2}...c_n^{x_n}}{x_1!x_2!x_3!...x_k!}$$

vardır. Burada $j = \sum_{i=1}^{k} x_k$ ve toplam $S(k)$ üzerinde alınır ($\sum_{i=1}^{n} x_i = k$ nın gerçeklediği bütün negatif olmayan $(x_1, x_2,..., x_k)$ k 'lıların üzerinden alınır).

Eğer $k < n$ ise yeterli derecede sıfırlar ilave ederek $k-$tuplesinden, $n-$ tuplesine genişletilebilir. Böylece

(10.47) $$n\sum_{i=1}^{k} ix_i = k,\ k < n$$

ifadesinin negatif olmayan sayılar dahilinde çözümü $i = k+1, k+2,...,n$ için $x_i = 0$ verilmelidir ve (10.46) ifadesindeki $\frac{c_i^{x_i}}{x_i!}$ faktörünün kapsamı değeri değiştirmez. Çünkü bu faktörler $i = k+1, k+2,...,n$ için 1'dir. Böylece (10.46) denklemi

(10.48) $$a_{n+1} = \sum \frac{\gamma(\alpha,j-1)c_1^{x_1}c_2^{x_2}...c_n^{x_n}}{x_1!x_2!x_3!...x_n!},\ k \leq n$$

ile yer değiştirebilir. Burada $j = \sum_{i=1}^{n} x_i$ dir ve toplam (10.47) ifadesinin negatif olmayan sayısal çözümleri üzerinden alınır. (10.48) bağıntısını

$$a_{n+1} = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[k-\alpha(n-k)\right]c_{n-k}a_{k+1}$$

ifadesinin sağ R tarafında kullanırız. Burada

$$R \equiv -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{S(k)} \frac{\left[k-\alpha(n-k)\right]\gamma(\alpha,j-1)c_{n-k}c_1^{x_1}c_2^{x_2}...c_n^{x_n}}{x_1!x_2!x_3!...x_n!}$$

elde edilir. Şimdi $(y_1, y_2,..., y_n)$, $S(n)$ 'nin içinde herhangi bir sabit $n-$tuple olsun. Öyleki

$$\sum_{i=1}^{n} iy_i = n,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = q$$

olsun. R'nin eşitliğinde $c_1^{y_1}c_2^{y_2}...c_n^{y_n}$ nin C katsayısını belirlememiz gerekir. Bu katsayı toplamdaki çeşitli terimleri birleştirerek ortaya çıkabilir. Gerçekte bu terimler ancak ve ancak

$$c_{n-k}c_1^{x_1}c_2^{x_2}...c_n^{x_n} = c_1^{y_1}c_2^{y_2}...c_n^{y_n}$$

varsa ortaya çıkabilir. Spesifik olmak için, $y_\alpha > 1$'i gerçekleyen bir indeks α ; $i \neq a$ ise $x_i = y_i$ ve $x_\alpha = y_\alpha - 1$ olsun. Bu sabit a için $j = \sum_{i=1}^{n} x_i = q-1$ eşitliği elde edilir.

$$R \equiv -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{S(k)}\frac{\left[k-\alpha(n-k)\right]\gamma(\alpha, j-1)c_{n-k}c_1^{x_1}c_2^{x_2}...c_n^{x_n}}{x_1!x_2!x_3!...x_n!}$$

ifadesinde $n-k=a$ olarak alırsak ve eğer A, $y_\alpha \neq 0$'ı gerçekleyen a'nın bir cümlesi ise buradan

$$c \equiv \sum_{a\in A}\frac{\gamma(n-a-a\alpha)\gamma(\alpha,q-2)}{x_1!x_2!x_3!...x_n!}$$

bulunur. Bu bağıntının da pay ve paydasına y_α faktörü koymakla

$$c = \sum_{a\in A}\frac{y_\alpha(n-\alpha-a\alpha)\gamma(\alpha,q-2)}{n.y_1!y_2!y_3!...y_n!} = \frac{\gamma(\alpha,q-2)}{n.y_1!y_2!y_3!...y_n!}\sum_{a\in A} y_\alpha\gamma(n-a-a\alpha)$$

elde edilir. Eğer $y_\alpha = 0$ ise toplamda ona tekabül eden terim sıfırdır. Böylece

$$\sum_{i=1}^{n} iy_i = n,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = q$$

ifadelerini kullanarak

$$c = \frac{\gamma(\alpha,q-2)}{n.y_1!y_2!y_3!...y_n!}\sum_{a=1}^{n}(\alpha a y_\alpha + a y_\alpha - n y_\alpha) =$$
$$= \frac{\gamma(\alpha,q-2)}{y_1!y_2!y_3!...y_n!}n(\alpha-(q-1)) = \frac{\gamma(\alpha,q-2)}{y_1!y_2!y_3!...y_n!}$$

elde edilir ki bu da

$$a_{n+1} = \sum\frac{\gamma(\alpha,q-1)c_1^{x_1}c_2^{x_2}...c_n^{x_n}}{x_1!x_2!x_3!...x_n!}$$

ifadesinin sağ tarafında ihtiyaç duyulan $c_1^{y_1}c_2^{y_2}...c_n^{y_n}$ nin katsayısıdır. Her sabit $(y_1, y_2,..., y_n)$ için münakaşa gerçekliğini koruduğundan

$$a_{n+1} = \sum \frac{\gamma(\alpha, q-1) c_1^{x_1} c_2^{x_2} \ldots c_n^{x_n}}{x_1! x_2! x_3! \ldots x_n!}$$

ifadesindeki sınırlar kesindir ve $\alpha > 0$ için

$$f_*(z) = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1} (1+B\zeta)^{\frac{\frac{A-B}{B}}{\alpha}} d\zeta \right]^{\alpha} & B \neq 0, \\ \left[\dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{\frac{A}{\alpha}\zeta} d\zeta \right]^{\alpha} & B = 0, \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyon için eşitlik elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] **Altintas, O. and Srivastava, H.M.**, 2001. Some majorization problems associated with p-valently starlike and convex functions of complex order, *East Asian Math. J.*, **17**, 175-183.

[2] **Aouf, M.K.**, 1985. p-valent classes related to convex functions of complex order, *Rocky Mountain of Mathematics*, **15**, 853-863.

[3] **Bajpai, S.K. and Mehrok, J.S.**, 1973. On the coefficient structure and growth theorem for the functions $p(z)$ for which $zf'(z)$ is spirallike, *Publ. Inst. Math. N.S.*, **16** (30), 5-12.

[4] **Chichra, P.N.**, 1975. Regular functions for which $zf'(z)$ is α-spirallike, *Proc, Amer. Math. Soc.*, **49**, 151-160.

[5] **Clunie J.**, 1959. On meromorphic schlicht functions, *J. London Math. Soc.*, **34**, 215-216.

[6] **Dettman, W. Jhon,** 1965, Applied complex variables, Dover Publications, New York.

[7] **Duren, P.L.**, 1983. Univalent Function, Springer-Verlag, New York.

[8] **Eenigenburg, P.J. and Keogh, F.R.**, 1970. The Hardy class of some univalent functions and their derivatives, *Michigan Math. J.*, **17**, 335-346.

[9] **Goodman, A.W.**, 1950. On the Schwarz-Christoffel transformation and p-valent functions", *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, **68**, 204-223.

[10] **Goodman, A.W.**, 1984. Univalent functions Volume I and Volume II, Mariner Publishing Comp., Florida.

[11] **Goodman, A.W.**, 1972. Coefficients for the area theorem, *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, **33**, 438-444.

[12] **Hardy, G.H. and Littlewood, J.E.**, 1932. Some properties of fractional integrals II, *Math. Z.*, **34**, 403-439.

[13] **Hayman, W.K.**, 1994, Multivalent Functions, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[14] **Jack, I.S.**, 1971. Functions starlike and convex of order α, *J. London Math. Soc.*, **3** (2), 469-474.

[15] **Janowski, W.**, 1973. Some external problems for certain families of analytic functions, *Ann. Polon. Math.*, **28**, 297-326.

[16] **Kaplan, W.**, 1952. Close-to-convex schlicht functions, *Michigan Math. J.*, **1**, 169-185.

[17] **Keogh, F.R. and Merkes, E.P**, 1969. A coefficient inequality for certain classes of analytic functions, *Proe. Amer. Math. Soc.*, **20**, 8-12.

[18] **Krzyz, J.**, 1962. The radius of close-convexity within the family of univalent functions, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **10** (4), 201-204.

[19] **Kulshrestha, P.K.**, 1976. Bounded Robertson functions, *Rend. Mat.*, **9** (6), 137-150.

[20] **Kulshrestha, P.K.**, 1973. Distortion of spiral-like mappings, *Royal Irish Acad.*, **73**, 1-5.

[21] **Lehto, Olli,** 1986. Univalent Functions and Teichmüller Spaces, Springer-Verlay, New York.

[22] **Libera, R.J. and Ziegler, M.R.**, 1972. Regular functions $f(z)$ for which $zf'(z)$ is α-spiral, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **166**, 361-370.

[23] **Libera, R.J**., 1967. Univalent α-spiral functions, *Canad. J. Math.*, **19**, 449-456.

[24] **MacGregor, T.H.**, The radius of Convexity for starlike functions of order ½, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14**, 71-76.

[25] **Miller, S.S.**, **Mocanu, P.T. and Reade, M.O.**, 1975. α-convex function and derivatives in Nevalinna class, *Studia, Babes-Bolyal, Mathematica*, **20**, 35-40.

[26] **Moretti, Gino,** 1968. Functions of a complex Variable, Prentice Hall, New Delhi.

[27] **Nasr, M.A. and Auof, M.K.**, 1982. On convex functions of complex order, *Mansoura Science Bulletin*, **9**, 565-582.

[28] **Natanson, I.P.**, 1955. Konstructive Funktionentheorie, Akademie Verlag, Berlin.

[29] **Pinchuk, B.**, 1968. On starlike and convex functions of order α, *Duke Math. J.*, **35**, 721-734.

[30] **Polatoğlu, Y., Bolcal, M., and Şen, A.**, 2002. Koebe domain of starlike functions of complex order with Montel Normalization, *Glasnik Matematicki*, **37** (57), 89-92.

[31] **Polatoğlu, Y., Bolcal, M., and Şen, A.**, 2003. Two point distortion theorems for certain families of analytic functions in the unit disc, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol. **64**.

[32] **Polatoğlu, Y. and Bolcal, M.,** 2003. Koebe domain for certain analytic functions in the unit disc under the Montel normalization, *Mathematica Pannonica* **14**, 283-291.

[33] **Pommerenke,** 1975. Univalent Functions, Vanlenhoeck&Ruprecht, Götingen.

[34] **Pommerenke, C.**, 1962. On starlike and convex functions, *J.L. Math. Soc.*, **37**, 209-224.

[35] **Priwalow, I.I.**, 1965. Randeigenshaften analytisc her funktionen, Veb, Deutscher Verl. Wissensch, Berlin.

[36] **Robertson, M.S.**, 1936. On the theory of univalent functions, *Ann. of Math.*, **37**, 374-408.

[37] **Robertson, M.S.**, 1956. Radii of star-likeness and close-to-convexity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16**, 847-852.

[38] **Robertson, M.S.**, 1963. Some radius of convexity problems, *Michigan Math. J.*, **10**, 231-236.

[39] **Robertson, M.S.**, 1969. Univalent functions $f(z)$ for which $z.f'(z)$ is λ-spirallike, *Michigan Math. J.*, **16**, 97-101.

[40] **Schlid, A.**, 1965. On starlike functions of order α, *Amer. J. Math.*, **87**, 65-70.

[41] **Schwerdtfeger, Hans,** 1979, Geometry of complex numbers, Dover Pub., New York.

[42] **Silvia, E.M.**, 1992. A brief overview of subclasses of spirallike functions in Current Topics in Analytic Function Theory, *World Scientific*, 328-336.

[43] **Singh, V. and Goel, R.M.**, 1971. On radii of convexity and starlikeness of some classes of functions, *J. Math. Soc.*, **23**, 323-339.

[44] **Sizuk, P.I.**, 1975. Regular functions $f'(z)$ for which $zf'(z)$ is θ-spirallike shaped of order α , *Sibirsk. Math. Z.*, **16**, 1286-1290.

[45] **Spacek, L.**, 1933. Prispeek *k* teorii funki, *Prostych, Casopis Pest. Math. Fys*., **62**, 12-19.

[46] **Uluçay, Cengiz,** 1978. Fonksiyonlar teorisi ve Riemann yüzeyleri, KTÜ yayınları.

[47] **Wiatrowski, P.**, 1971. The coefficients of certain family of holomorphic functions, *Zeszyty Nauk. Univ. Todzk. Nauki Math. Przyrod. Ser. II, Zeszyt Math*, **39**, 75-85.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında İstanbul'da doğdu. 1989 yılında Ahmet Merter İlk Okulunu, 1992 yılında Kemal Hasoğlu İlköğretim Okulunu, 1996 yılında İstanbul İnşaat Teknik Lisesi, Yapı Ressamlığı Bölümünü, 1999 yılında Marmara Üniversitesi Teknik Bilimler MYO, Bilgisayar Programcılığı Bölümünü bitirdi. 2001 yılında TC İstanbul Kültür Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümüne dikey geçiş yaptı ve 2004 yılında mezun oldu. Aynı yıl TC İstanbul Kültür Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans programına kaydoldu ve Matematik-Bilgisayar Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu görevini sürdürmektedir.