İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OPERATÖR YARI GRUPLARININ DEĞİŞMEZ ALT UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Canan KAYA

Anabilim Dalı: Matematik-Bilgisayar
Programı: Matematik-Bilgisayar

HAZİRAN 2008

İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OPERATÖR YARI GRUPLARININ DEĞİŞMEZ ALT UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Araş.Gör. Canan KAYA
0609041017

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: **13 Haziran 2008**
Tezin Savunulduğu Tarih: **23 Haziran 2008**

Tez Danışmanı : **Yard.Doç.Dr. Mert ÇAĞLAR**
Diğer Jüri Üyeleri : **Yard.Doç.Dr. R.Tunç MISIRLIOĞLU (İ.Ü.)**
Yard.Doç.Dr. Yaşar POLATOĞLU

HAZİRAN 2008

Öz

OPERATÖR YARI-GRUPLARININ DEĞİŞMEZ ALT UZAYLARI

KAYA, Canan
Yüksek Lisans Tezi, Matematik-Bilgisayar Bölümü
Tez Yöneticisi: Yard. Doç. Dr. Mert ÇAĞLAR

Haziran 2008, 19 sayfa

Bu çalışmada kompakt operatörlerin cebirleri ve yarı grupları incelenmiş ve bu konularla ilgili, temel olarak [7]'den olmak üzere çeşitli sonuçlara yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER VE SÖZCÜKLER: Banach uzayı, cebir, yarı grup, önkompakt küme, hemen-hemen-sıfır-güçlü operatör, spektrum.

Abstract

INVARIANT SUBSPACES OF SEMIGROUP OF OPERATORS

KAYA, Canan
M.Sc. Thesis, Department Of Mathematics-Computer Science
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mert ÇAĞLAR

June 2008, 19 pages

In this thesis, algebras and semigroups of compact operators are examined, and several results on them, especially those of [7], are presented.

KEY WORDS AND PHRASES : Banach space, algebra, semigroup, precompact set, quasinilpotent operator, spectrum.

Ailem'e

Teşekkür

İki yıllık yüksek lisans eğitimim boyunca tüm bilgisini ve deneyimini benimle paylaşan sayın hocam Yard. Doç. Dr. Mert ÇAĞLAR başta olmak üzere, tez çalışmamda sabırla destek olan ve yönlendiren sayın hocam Yard. Doç. Dr. Tunç Mısırlıoğlu'na teşekkürü bir borç bilir, en içten saygılarımı sunarım.

İçindekiler

Bölüm 1

Giriş

Baz problemi olarak bilinen "Ayrılabilir her Banach uzayının bir bazı var mıdır?" sorusu 1975 yılına kadar açık kalmıştır. 1975 yılında Per Enflo bir baza sahip olmayan bir Banach uzayı kurarak bu soruyu negatif olarak cevaplamıştır. Değişmez alt uzay problemi olarak bilinen "Ayrılabilir her Hilbert uzayı üzerinde tanımlı her sınırlı operatörün aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzayı var mıdır?" sorusu halen çözülememiştir. Sonlu boyutlu uzaylar üzerinde tanımlı olan lineer dönüşümlerle sonsuz boyutlu uzaylar üzerinde tanımlı olan kompakt operatörler benzer özellikler gösterdiğinden, bu soru kompakt operatörler üzerinde düşünülmeye başlanmış ve çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. 1935 yılında J. Von Neumann Hilbert uzayı üzerinde tanımlı her sıfırdan farklı kompakt operatörün aşikar olmayan değişmez alt uzayı olduğunu göstermiş ama bu bilgiyi yayınlamamıştır. Ancak bu sonucu öğrencileri Aronszajn ve Smith Banach uzaylarına genişletmişlerdir [5]. Daha sonra V. I. Lomonosov sıfırdan farklı kompakt operatörlerin hiperdeğişmez alt uzayı olduğu sonucunu elde etmiştir [6]. V. S. Shulman 1984'de Volterra cebirlerinin hiperdeğişmez alt uzaya sahip olduklarını ispatlamıştır [4]. 1999'da da öğrencisi Yu. V. Turovskii bu sonucu Volterra yarı grupları için genelleştirmiştir.

Eldeki çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, sırasıyla, sonlu-sonsuz boyutlu uzaylar üzerindeki benzer kavramlar verilmiş ve lineer dönüşümlerle kompakt operatörler arasındaki benzerlikler ortaya konulmuştur. Aynı zamanda değişmez alt uzayla ilgili temel teoremler verilmiş ve ikinci bölüm için hazırlık yapılmıştır. İkinci bölümde ise Yu.V.Turovskii'nin [7]'de verdiği ispat incelenmiştir.

Bölüm 2

Temel kavramlar ve tanımlar

Operatör kavramıyla lineer operatör, vektör uzayı ile $\mathbb{K}$-vektör uzayı kastedilecektir ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). $B(X)$, X uzayından kendisine sınırlı operatörler uzayıdır.

2.1 Genel Kavramlar

Tanım 2.1.1. *$T \in B(X)$ olsun. Eğer bir $V \subset X$ alt uzayı için $T(V) \subset V$ ise V uzayına T operatörünün bir değişmez alt uzayı denir. Diğer bir ifade ise V uzayı T-değişmez söylenişidir. $\{0\}$ ve X uzaylarından farklı bir T-değişmez V alt uzayı aşikar olmayan olarak adlandırılır.*

Tanım 2.1.2. *T, X uzayı üzerinde tanımlı operatör, $\mathscr{A}$, operatörlerin bir ailesi ve M, X uzayının bir alt uzayı olsun. M, $\mathscr{A}$ ailesindeki her operatör altında değişmez kalıyor ise M alt uzayına $\mathscr{A}$ operatör ailesi için değişmez alt uzaydır denir. M, T operatörü ile değişmeli olan operatörler altında değişmez kalıyorsa M alt uzayına T operatörü için hiperdeğişmez alt uzaydır denir.*

Tanım 2.1.3. *V vektör uzayı ve N, V vektör uzayının bir alt uzayı olsun.*

$$V/N := \{[x] = x + N |\, x \in V\}$$

kümesi üzerinde '+' ve '.' işlemleri her $[x], [y] \in V/N$ ve $\lambda \in \mathbb{K}$ olmak üzere

$$[x] + [y] = [x + y]$$
$$\lambda [x] = [\lambda x]$$

olarak tanımlanırsa V/N kümesine bölüm uzayı denir.
T, V vektör uzayı üzerinde bir lineer dönüşüm ve N, T operatörü altında değişmez alt uzay olmak üzere V/N üzerindeki $\hat{T}$ bölüm dönüşümü her $x \in V$ için $\hat{T}[x] = [Tx]$ şeklinde tanımlanır.

2.2 Lineer Dönüşümler

Bu kısımda, sonlu boyutlu uzaylarda bir sonraki kısımda kullanacağımız temel kavramlar tanımlanacak ve X sonlu boyutlu vektör uzayı kabul edilecektir.

Tanım 2.2.1. *$\mathscr{A}$, X uzayı üzerinde tanımlı lineer dönüşümlerin bir ailesi olsun. Eğer X vektör uzayı için bir taban bulabilirsek öyleki $\mathscr{A}$ ailesindeki her dönüşüm bu taban ile üst üçgen matris şeklinde ifade edilebilsin bu durumda $\mathscr{A}$ ailesine üçgenleştirilebilir denir.*
Açık olarak üçgenleştirilebilme tanımı değişmez alt uzayların zincirinin

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_n = X$$

var olmasına denktir. Burada M_j alt uzaylarının boyutu j dir ve bu zincir "üçgenleştirilebilen zincir" olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.2. *$\mathscr{A}$, X uzayı üzerinde tanımlı lineer dönüşümlerin ailesi, $A \in \mathscr{A}$ ve $N \subset M$ olacak şekilde M ve N, $\mathscr{A}$ ailesi için değişmez alt uzay olsun. $\mathscr{A}$ ailesinin bölüm dönüşümlerinin ailesi M/N üzerinde tanımlı $\hat{A}$ bölüm dönüşümlerinin kümesidir. Bir özelliğin bölüm dönüşümlerine aktarılması, özelliği sağlayan dönüşümlerin bölüm dönüşümlerinin ailesinin de bu özelliği sağlaması demektir.*

Lemma 2.2.3 (Üçgenleştirme Lemması)**.** *$\mathscr{P}$, her biri bölüme aktarılabilen özelliklerin bir ailesi olsun. $\mathscr{P}$ ailesindeki özellikleri sağlayan boyutu birden büyük uzay üzerinde tanımlı olan dönüşümlerin ailesinin aşikar olmayan değişmez alt uzayı varsa bu durumda $\mathscr{P}$ ailesindeki özellikleri sağlayan her dönüşümlerin ailesi üçgenleştirilebilirdir.*

Kanıt. $\mathscr{C}$, $\mathscr{P}$ ailesindeki özellikleri sağlayan dönüşümlerin ailesi olsun. $\mathscr{C}$ ailesi altında değişmez kalan alt uzayların maksimal zincirini seçelim:

$$\{0\} = Z_0 \subset Z_1 \subset ... \subset Z_n = X$$

Herhangi bir k için $1 < \dim(Z_k/Z_{k-1})$ ise kabulden $\mathscr{C}$ ailesindeki dönüşümlerin bölümlerinin ailesi aşikar olmayan değişmez L alt uzayına sahiptir. Ancak $\{x \in Z_k : \widehat{x} \in L\}$, $\mathscr{C}$ ailesinin değişmez alt uzayı ve Z_k ile Z_{k-1} arasında olduğundan zincirin maksimalliği ile çelişir. Dolayısıyla $\mathscr{C}$ ailesi üçgenleştirilebilir. □

Teorem 2.2.4. *Lineer dönüşümlerin her değişmeli ailesi üçgenleştirilebilirdir.*

Kanıt. $\mathscr{A}$ lineer dönüşümlerin değişmeli ailesi ve $T, S \in \mathscr{A}$ olsun. Bu durumda $\widehat{T}\widehat{S} = \widehat{TS} = \widehat{ST} = \widehat{S}\widehat{T}$ olduğundan değişme özelliği bölüme aktarılır. $\mathscr{A}$ ailesindeki her dönüşüm birim dönüşümünün bir çarpımıysa her alt uzay $\mathscr{A}$ ailesi altında değişmez kalır. $S \in \mathscr{A}$, birim dönüşümünün bir çarpımı olmayan lineer dönüşüm, λ, S lineer dönüşümünün özdeğeri, M uzayı da bu özdeğere karşılık gelen öz vektör ise $T \in \mathscr{A}$, $x \in M$ olmak üzere $STx = TSx = \lambda Tx$ olduğundan M, $\mathscr{A}$ ailesi altında değişmez kalır. Üçgenleştirme Lemması'ndan ispat tamamlanır.

□

Sonuç 2.2.5. *Her lineer dönüşüm üçgenleştirilebilirdir.*

Kanıt. Sonuç, Teorem 2.2.4'in özel halidir. □

Tanım 2.2.6. *$T \in B(X)$ olmak üzere*
$\sigma(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1}\, yoktur\right\}$ şeklinde tanımlı olan $\sigma(T)$ ifadesine T dönüşümünün spektrumu denir. Spektruma ait bazı özellikler şu şekildedir; $T \in B(X)$ olsun,

- *λ, T dönüşümünün özdeğeri ise $\lambda \in \sigma(T)$ dir.*
- *$\sigma(T)$ boştan farklı kompakt kümedir.*

Teorem 2.2.7 (Spektral Tasvir Teoremi)**.** *$\{A_1, ..., A_k\}$ lineer dönüşümlerin üçgenleştirilebilir ailesi ve p, $\{A_1, ..., A_k\}$ dönüşümlerinin değişmeli olmayan polinomu olsun. Bu durumda,*

$$\sigma(p(A_1, ..., A_k)) \subset p(\sigma(A_1), ..., \sigma(A_k))$$

sağlanır. Burada $p(\sigma(A_1), ..., \sigma(A_k))$ *ile her* j *için* $\lambda_j \in \sigma(A_j)$ *olmak üzere tüm* $p(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ *polinomlarının kümesi gösterilmektedir.*

Kanıt. Sonlu boyutlu uzaylar üzerinde tanımlı dönüşümlerin spektrumu dönüşümlerin özdeğerlerinin kümesi olduğundan aşağıdaki bilgilerden ispat elde edilir.

(i) Üçgen matrislerin özdeğerleri esas köşegeninde varolanlardır.

(ii) Üçgen matrislerin çarpımlarının esas köşegenindeki değerler üçgen matrislerin esas köşegenindeki değerlerin çarpımlarıdır.

(iii) Matrislerin toplamlarının esas köşegenindeki değerler matrislerin esas köşegenindeki değerlerinin toplamlarıdır.

□

Teorem 2.2.8 (Burnside Teoremi)**.** *Sadece aşikar alt uzaya sahip olan boyutu* 1*'den büyük sonlu boyutlu vektör uzayı üzerinde tanımlı lineer dönüşümlerin cebiri* V *uzayından* V *uzayına tüm lineer dönüşümlerin cebiridir.*

Kanıt. $[1, s.4]$ □

Herhangi bir cebirdeki dönüşümlerin bölüm dönüşümlerinin aileside bir cebirdir. Burnside Teoremi'nden ve Üçgenleştirme Lemması'ndan, lineer dönüşümlerin cebiri bölüme aktarılabilen herhangi bir özelliği sağlasın ve aynı özellik V uzayının boyutu 1'den büyük olmak üzere $B(V)$ tarafından sağlanmasın bu durumda cebir üçgenleştirilebilirdir.

Teorem 2.2.9. *Sıfır-güçlü lineer dönüşümlerin cebiri üçgenleştirilebilir.*

Kanıt. A, X uzayı üzerinde tanımlı sıfır-güçlü lineer dönüşüm ise $\widehat{A} = 0$ olduğundan lineer dönüşümlerin sıfır-güçlü olma özelliği bölüme aktarılabilir. Boyutu sıfırdan farklı her vektör uzayı üzerinde sıfır-güçlü olmayan lineer dönüşümler olduğundan bölüm cebiri öz uzaydır. Burnside Teoremi'nden ve Üçgenleştirme Lemması'ndan ispat tamamlanır. □

Teorem 2.2.10. *$\mathscr{A}$, lineer dönüşümlerin bir cebiri olsun. $\mathscr{A}$ cebirinin üçgenleştirilebilmesi için gerek ve yeter şart $\mathscr{A}$ cebirindeki her B ve C için $BC-CB$ dönüşümünün sıfır-güçlü olmasıdır.*

Kanıt. $\mathscr{A}$ üçgenleştirilebilir ise Spektral Tasfir Teoremi'nden $BC-CB$ operatörünün özdeğeri $\beta \in \sigma(B)$ ve $\gamma \in \sigma(C)$ olmak üzere $\beta\gamma - \gamma\beta$ şeklindedir. Bununla birlikte cisimdeki çarpım değişmeli olduğundan $\sigma(BC - CB) = \{0\}$ elde edilir. Tersine olarak boyutu 1'den büyük uzaylar üzerinde tanımlı sıfır-güçlü olmayan değişmeli lineer dönüşümler vardır. Bunun yanısıra sıfır-güçlü değişmeli olma özelliği bölüm dönüşümlerine geçebilmektedir. Buradan da $\mathscr{A}$ ailesinin her boyutu 1'den büyük M/N dönüşümlerinin ailesi $B(M/N)$ cebirinin öz cebiridir ve Burnside Teoremi'nden de aşikar alt uzaya sahip olduğu elde edilir. Üçgenleştirme Lemması'ndan $\mathscr{A}$ cebirinin üçgenleştirilebilir olduğu elde edilir.

□

Teorem 2.2.11 (McCoy Teoremi)**.** *$\{A, B\}$ çiftinin üçgenleştirilebilmesi için gerek ve yeter şart her değişmeli olmayan p polinomu için $p(A, B)(AB - BA)$ dönüşümünün sıfır-güçlü olmasıdır.*

Kanıt. $\{A, B\}$ üçgenleştirilebilir ise bunların ürettiği cebirde üçgenleştirilebilir olduğundan Spektral Tasfir Teoremi'nden $p(A, B)(AB - BA) = \{0\}$ elde edilir. $\mathscr{A}$, $\{A, B\}$ tarafından üretilen cebir olsun. $AB = BA$ ise $\mathscr{A}$ üçgenleştirilebilirdir. $AB - BA \neq 0$ ve $(AB - BA)x \neq 0$ olsun. $C(AB - BA)x = x$ olacak şekilde C lineer dönüşümünü
seçelim. Eğer A dönüşümünün değişmez alt uzayı yoksa Burnside Teoremi'nden C, $\mathscr{A}$ cebirinin içindedir. Ancak $\mathscr{A}$, $\{A, B\}$'nin değişmeli olmayan polinomlarından oluşmaktadır ve $C(AB - BA)$ sıfır güçlü değildir. Dolayısıyla, bu kabulümüzle çelişir.

□

2.3 Kompakt Operatörler

Bu bölümde, aksi belirtilmedikçe X sonsuz boyutlu Banach uzayı kabul edilecektir.

Tanım 2.3.1. *X normlu uzay ve T, X üzerinde tanımlı lineer bir dönüşüm olsun. X uzayından alınan sınırlı herhangi bir (x_n) dizisi için (Tx_n) dizisinin yakınsak*

bir alt dizisi bulunabiliyorsa bu durumda T dönüşümüne kompakttır denir. X normlu uzayından Y normlu uzayına kompakt operatörlerin ailesi $K(X,Y)$ ile gösterilmektedir. Kompakt operatörlere ait bazı bilgiler şu şekildedir;
X, Y, Z normlu uzaylar olsun,

- *$T \in K(X,Y)$ ise T sınırlıdır. Buradan $K(X,Y) \subseteq B(X,Y)$ olduğu elde edilir.*
- *$S,T \in K(X,Y)$ ve $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ ise $\alpha S + \beta T$ kompakt operatördür.*
- *$S \in B(X,Y)$, $T \in B(X,Y)$ operatörlerinden en az biri kompakt operatör ise $TS \in B(X,Y)$ operatörü de kompakt operatördür.*
- *N Banach uzayı, (T_k), X uzayından N uzayına kompakt operatörlerin dizisi, $T \in B(X,N)$ olmak üzere $T_k \to T$ ise T operatörü kompakttır.*

Teorem 2.3.2 (Fredholm Alternatifi)**.** *K sonsuz boyutlu X uzayı üzerinde tanımlı kompakt bir operatör ise bu durumda K operatörünün spectrumu*

$$\sigma(K) = \{0\} \cup \sigma_p(K)$$

şeklindedir.

Kanıt. $[1, s.135]$ □

Teorem 2.3.3 (Lomonosov Teoremi)**.** *Sıfırdan farklı her kompakt operatörün aşikar olmayan hiperdeğişmez alt uzayı vardır.*

Kanıt. $[1, s.136]$ □

Sonuç 2.3.4 (Aronszajn - Smith Teoremi)**.** *Her kompakt operatör aşikar olmayan değişmez alt uzaya sahiptir.*

Kanıt. Kompakt operatörler hiperdeğişmez alt uzaya sahip olduklarından değişmez alt uzaya da sahiptirler. □

Sonuç 2.3.5. *Kompakt operatörlerin değişmeli ailesi aşikar olmayan değişmez alt uzaya sahiptir.*

Kanıt. K, sıfırdan farklı kompakt operatör olsun. Bu durumda Lomonosov Teoremi'nden K hiperdeğişmez alt uzaya sahiptir dolayısıyla K ile değişmeli olan operatör ailesi de değişmez alt uzaya sahiptir. $\square$

$\mathscr{F}$, X uzayının alt uzaylarının herhangi bir ailesi olmak üzere Alg$\mathscr{F}$ ile $\mathscr{F}$ ailesindeki alt uzayların değişmez kaldığı operatörlerin kümesi ve $\mathscr{S}$, operatörlerin kümesi olmak üzere Lat$\mathscr{S}$ ile $\mathscr{S}$ kümesindeki operatörler altında değişmez kalan alt uzayların ailesini gösterilecektir.

Tanım 2.3.6. *$\mathscr{F}$, X Banach uzayı üzerinde tanımlı sınırlı lineer operatörlerin bir ailesi olsun. Her bir alt uzayı $\mathscr{F}$ ailesindeki operatörler altında değişmez kalacak şekilde X uzayının alt uzaylarının zinciri olarak maksimal bir zincir varsa bu durumda $\mathscr{F}$ ailesine üçgenleştirilebilir denir. Bu zincire $\mathscr{F}$ ailesi için üçgenleştirilebilen zincir adı verilir.*
Zorn Lemması'ndan her $\mathscr{F}$ operatör ailesi için ailedeki operatörler altında değişmez kalan alt uzayların zinciri olarak maksimal zincir bulunabilmektedir.

Tanım 2.3.7. *Γ alt uzayların zinciri olsun. Γ zinciri kesişim ve üretme işlemi altında kapalıysa bu durumda Γ zincirine tam zincir denir.*

Tanım 2.3.8. *Γ alt uzayların bir zinciri ve $Z \in \Gamma$ ise Z_-*

$$Z_- = V\{N \in \Gamma : N \subseteq Z, N \neq Z\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.3.9. *X uzayının alt uzaylarının Γ zincirinin alt uzay zinciri olarak maksimal olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki üç koşulun sağlanmasıdır:*

- $\{0\} \in \Gamma$ *ve* $X \in \Gamma$
- Γ *tam zincir*
- $M \in \Gamma$ *ve* $M_- \neq M$ *ise* $dim\,(M/M_-) = 1$

Kanıt. Γ maksimal alt uzay zinciri ise açıktır ki tam zincirdir ve $\{0\} \in \Gamma$, $X \in \Gamma$ dır. M/M_- uzayının boyutu 1'den büyük ise M ile M_- arasında bir N alt uzayı vardır ve zincire ait değildir. Ancak Γ zincirinin her elemanı ile karşılaştırılabileceğinden çelişki elde edilir dolayısıyla M/M_- uzayının boyutu 1'dir. Tersine Γ koşulları sağlayan zincir olsun. M, Γ zincirindeki her alt uzayla karşılaştırılabilen bir zincir olsun bu durumda M, Γ zincirindedir. Şimdi $M_0 = \vee\{N \in \Gamma : N \subseteq M\}$ ve $M_1 = \cap\{N \in \Gamma : N \supseteq M\}$ alt uzaylarını tanımlayalım. Buradan $M_0 \in \Gamma$ ve $M_1 \in \Gamma$ elde edilir. Eğer $M \notin \Gamma$ ise $M_0 \subseteq M \subseteq M_1$ yazabiliriz. Buradan anlaşılacağı üzere M_1/M_0 boyutu 1'den büyüktür. $N \in \Gamma$ ve N, M_1 uzayının öz alt uzayı olduğu için N, M_0 uzayı tarafından içerilmektedir. M_1 uzayının önce gelmesinden $(M_1)_-$ uzayı M_0 tarafından içerilmektedir. Buradan $M_1/(M_1)_-$ uzayının boyutu 1'den büyük elde edilir ancak bu da son koşulla çelişir. Dolayısıyla Γ maksimal alt uzay zinciridir.

□

Lemma 2.3.10 (Üçgenleştirme Lemması)**.** *Operatörler ailesinin bir P özelliği bölüm operatörlerine aktarılsın. Bu P özelliğini sağlayan her ailenin aşikar olmayan değişmez alt uzayı varsa bu durumda P özelliğini sağlayan her aile üçgenleştirilebilirdir.*

Kanıt. $\mathscr{F}$, P özelliğini sağlayan operatörlerin ailesi ve Γ, $\mathscr{F}$ ailesindeki operatörler altında değişmez kalan alt uzayların zinciri olsun. Zorn Lemması'ndan $\mathscr{F}$ ailesindeki operatörler altında değişmez kalan alt uzayların maksimal zinciri olduğu elde edilir. Şimdi Γ zincirinin alt uzay zinciri olarak maksimal olduğunu gösterelim. Γ zincirinin Teorem 2.3.9'daki ilk iki koşulu sağladığı açıktır. $Z \in \Gamma$ için $1 < \dim(Z/Z_-)$ olduğunu varsayalım. Değişmez alt uzayların varlığı ve bu özelliğin bölüm operatörlerine aktarılması $\widehat{\mathscr{F}}$ ailesinin de Z/Z_- uzayında aşikar olmayan değişmez $\widehat{L}$ alt uzayını elde etmemizi sağlar. $L = \left\{x \in X : x + Z_- \in \widehat{L}\right\}$ olsun. L, Z_- uzayını kapsayan, Z uzayı tarafından kapsanan $\mathscr{F}$ ailesindeki operatörler altında değişmez kalan alt uzaydır. Dolayısıyla L alt uzayını Γ zincirine ekleyebiliriz. Ancak bu durum Γ zincirinin maksimalliği ile çelişir.

□

Açık olarak yukarıdaki lemmadan, kompakt operatörler üçgenleştirilebilirdir.

Teorem 2.3.11. *Kompakt operatörlerin değişmeli ailesi üçgenleştirilebilirdir.*

Kanıt. Kompakt operatörden elde edilen her bölüm operatörü kompakt operatördür. Buradan kompakt operatörlerin değişmeli aile olma özelliği bölüm operatörlerine aktarılır. Sonuç 2.3.5'den kompakt operatörlerin değişmeli ailesi aşikar olmayan değişmez alt uzaya sahip olduğu ve Üçgenleştirme Lemması'ndan da sonuç elde edilir.

□

Tanım 2.3.12. *Γ, K kompakt operatörlerin üçgenleştirilebilir zinciri ve $M \in \Gamma$ olsun. M ile bağlantılı K operatörünün esas köşegen sabiti λ_M şu şekilde tanımlanır:*
$M_- = M$ ise $\lambda_M = 0$
$M_- \neq M$ ise $(K - \lambda_M I)\, M \subseteq M_-$ olacak şekilde kompleks sayıdır.(Dikkat edilecek olursa λ_M, M/M_- üzerinde tanımlı $\hat{K}$ operatörünün spektrumundadır.)

Teorem 2.3.13 (Ringrose Teoremi)**.** *K, X sonsuz boyutlu Banach uzayı üzerinde tanımlı kompakt operatör ve Γ, K için üçgenleştirilebilir zincir olsun. Bu durumda*

$$\sigma(K) = \{0\} \cup \{\lambda_M : M \in \Gamma\}$$

sağlanır.

Kanıt. $[1, s.156]$ □

Teorem 2.3.14 (Kompakt Operatörler Ailesi İçin Spektral Tasvir Teoremi)**.** *$\{K_1, K_2, K_3, ..., K_n\}$, kompakt operatörlerin üçgenleştirilebilir ailesi ve p, n değişkenli, değişmeli olmayan polinom olsun. Bu durumda*

$$\sigma(p(K_1, K_2, ..., K_n)) \subseteq p(\sigma(K_1), ..., \sigma(K_n))$$

sağlanır.

Kanıt. p polinomu sabit terim içeriyorsa sabit terime her iki tarafı bölebiliriz. Dolayısıyla sabit terimi sıfır kabul edebiliriz. Buradan $\{K_1, K_2, ..., K_n\}$ kompakt operatörler olduğundan $p(K_1, K_2, ..., K_n)$ operatörü kompakttır. $\{K_1, K_2, ..., K_n\}$ operatör ailesi için üçgenleştirilebilen aileyi sabitleyelim. $\lambda_M, p(K_1, K_2, ..., K_n)$ operatörünün sıfırdan farklı esas köşegen sabiti ise M/M_- uzayındaki her $\widehat{f}$ operatörü için $p\left(\widehat{K}_1, \widehat{K}_2, ..., \widehat{K}_n\right)\widehat{f}$ $= \lambda_M \widehat{f}$ eşitliği sağlanır. Açıktır ki $p(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \lambda_M$ dir. Bununla birlikte her j için K_j uzayının esas köşegen sabiti λ_j olduğundan $\lambda_j \in \sigma(K_j)$ dır. Dolayısıyla $\lambda_M \in p(\sigma(K_1), ..., \sigma(K_n))$ elde edilir.

□

Kompakt operatörler ailesi için Spektral Tasvir Teoremi'nin terside doğrudur yani $\{K_1, K_2, ..., K_n\}$ kompakt operatörlerin cebiri, p değişmeli olmayan polinom olmak üzere $\sigma(p(K_1, K_2, ..., K_n)) \subseteq p(\sigma(K_1), ..., \sigma(K_n))$ ise $\{K_1, K_2, ..., K_n\}$ üçgenleştirilebilirdir.

Bölüm 3

Volterra Yarı-grubu

3.1 Değişmez Alt-Uzayların Varlığı

Bu bölümde, [7]'den bazı bölümlere yer verilecektir. X, Banach uzayı olmak üzere sadece X ve $B(X)$ uzayındaki norm-topoloji üzerinde işlemler yapılacaktır. Sınırlı $W \subset X$ alt kümesi için

$$\|W\| := \sup\{\|x\| : x \in W\}$$

şeklinde, sınırlı $M \subset B(X)$ alt kümesi de benzer şekilde tanımlansın. $x \in X$, $W \subset X$ ve $M, N \subset B(X)$ için $MW := \{Tx : x \in W, T \in M\}$ ve $MN := \{TS : T \in M, S \in N\}$ dir. $M(x)$ yerine Mx ifadesi kullanılacaktır. $\rho(M) = \inf \|M^n\|^{1/n}$ sayısına $M \subset B(X)$'in spektral yarıçapı denir. [2]'den $\rho(M) = \lim\limits_{n\to\infty} \|M^n\|^{1/n}$ elde edilir. Kompakt hemen-hemen-sıfır-güçlü operatörlerden oluşan çarpımsal yarı gruba Volterra yarı grubu denir. $M \subset B(X)$ alt kümesi tarafından üretilen yarı grubu $SG(M)$ ile birimli yarı grubu ise $SG_1(M)$ ile göstereceğiz, yani $SG(M) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M^n$ ve $SG_1(M) = \{1\} \cup SG(M)$ şeklindedir.
Bilindiği gibi T ve S, X Banach uzayı üzerinde tanımlı kompakt operatörler ise $L_T R_S$ de $B(X)$ üzerinde her $P \in B(X)$ için $R_S P = PS$ ve $L_T P = TP$ şeklinde tanımlı kompakt operatörlerdir.[1, s.193]

Lemma 3.1.1. *M, X Banach uzayı üzerinde tanımlı kompakt operatörlerin önkompakt kümesi olsun.*

(i) W, X uzayının sınırlı bir alt kümesi ise MW önkompakt kümedir.

(ii) $SG(M)$ yarı grubu sınırlı ise $SG(M)$, $B(X)$ uzayının önkompakt alt kümesidir.

Kanıt. (i) W, X uzayının sınırlı alt kümesi ve $(T_k x_k)$, MW kümesindeki herhangi bir dizi olsun. M önkompakt küme olduğundan $T \in K(X)$ operatörüne yakınsayan (T_{k_i}) alt dizisi vardır. Buradan (Tx_{k_i}) dizisinin yakınsak alt dizisi bulunur. Yani $(T_k x_k)$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu da bize MW kümesinin önkompakt olduğunu söyler.

(ii) M önkompakt olduğundan $L_M R_M = \{L_T R_S : T, S \in M\}$ önkompakt kümedir ve açıktır ki $MSG_1(M)M = L_M R_M(SG_1(M))$ eşitliği sağlanmaktadır. $SG(M)$ yarı grubunun sınırlı olduğunu varsaydığımızdan $SG_1(M)$ yarı grubuda sınırlıdır ve (i)'den $MSG_1(M)M$ kümesinin önkompakt olduğu buradan da $SG(M)$ yarı grubunun önkompakt olduğu elde edilir.

□

Bilindiği gibi X uzayının sınırlı M alt kümesi için $\rho(M) < t$ ise $SG(t^{-1}M)$ sınırlıdır. Şimdi bu bilgiyi kullanalım.

Teorem 3.1.2. *$\rho(M) = 1$ olmak üzere M, kompakt operatörlerin önkompakt kümesi olsun. $SG(M)$ yarı grubu sınırlı değil ise M kümesinin aşikar olmayan hiperdeğişmez alt uzayı vardır.*

Kanıt. $SG(M)$ yarı gurubu sınırlı olmasın ve $1 < t_n$, $t_n \to 1$ olacak şekilde (t_n) reel sayıların bir dizisi olsun. $SG(t_n^{-1}M)$ sınırlı olduğundan X uzayı üzerinde her $x \in X$ için $\|x\|_n = s_n^{-1}\|SG_1(t_n^{-1}M)x\|$ şeklinde bir fonksiyon tanımlanabilir. Burada $s_n = \|SG_1(t_n^{-1}M)\|$ dir. $\|.\|_n$, X uzayı üzerinde tanımlı, $\|.\|$ normuna denk bir norm olduğu kolaylıkla görülebilir. Ayrıca her $x \in X$ ve her $T \in M$ için $\|Tx\|_n \leq t_n\|x\|_n$ sağlanır. Her $x \in X$ için X üzerinde $v(x) = \limsup\limits_{n\to\infty}\|x\|_n$ şeklinde v fonksiyonu tanımlayalım.

Şimdi v fonksiyonunun sıfırdan farklı, sürekli, yarı-norm olduğunu ve çek$v = \{x \in X : v(x) = 0\}$ uzayının sıfırdan farklı, M kümesinin hiperdeğişmez alt uzayı olduğunu gösterelim. Açıktır ki v fonksiyonu X uzayı üzerinde yarı-normdur. Her $x \in X$ için $\|x\|_n \leq \|x\|$ olduğundan v fonksiyonu, X uzayı üzerinde süreklidir ve dolayısıyla çek$v$, X uzayının kapalı alt uzayıdır. Her $x \in X$, $T \in M$ ve $S \in M'$ için

$$v(Tx) = \limsup_{n\to\infty} \|Tx\|_n \leq \limsup_{n\to\infty} t_n \|x\|_n = v(x)$$

ve

$$v(Sx) = \limsup_{n\to\infty} \|Sx\|_n \leq \|S\| \limsup_{n\to\infty} \|x\|_n = \|S\| \, v(x)$$

sağlanacağından çek$v$ alt uzayı, M kümesi altında hiperdeğişmez alt uzaydır.

Şimdi $v \neq 0$ olduğunu ispatlayalım. $\|x_n\| = 1$ ve $t_n^{-1} < \|x_n\|$ olacak şekilde $x_n \in X$ seçelim. $\|.\|_n$ normunun tanımından her n için $t_n^{-1} < s_n^{-1} \|T_n x_n\|$ olacak şekilde $SG_1(t_n^{-1}M)$ yarı grubunun elemanlarının bir (T_n) dizisi vardır. Her $n_0 < n$ için $T_n \neq 1$ olacak şekilde n_0 sayısı vardır. Çünkü $SG(M)$ yarı grubu sınırlıdır. $S_n \in t_n^{-1}M$ ve $Q_n \in SG_1(t_n^{-1}M)$ olmak üzere her n için $T_n = Q_n S_n$ düşünebiliriz. $t_n \to 1$ ve M önkompakt küme olduğundan $S \in B(X)$ için $\|S_n - S\| \to 0$ olduğunu ve S kompakt operatör olduğundan $y \in X$ için $\|Sx_n - y\| \to 0$ olduğunu varsayabiliriz. Buradan da $\|S_n x_n - y\| \to 0$ elde edilir. Her n için $\|S_n x_n - y\|_n \leq \|S_n x_n - y\|$ ve $\|y\|_n \geq \|S_n x_n\|_n - \|S_n x_n - y\|_n \geq \|S_n x_n\|_n - \|S_n x_n - y\|$ olduğundan $v(y) \geq \limsup_{n\to\infty} \|S_n x_n\|_n$ elde edilir. Ancak $t_n^{-1} < s_n^{-1} \|Q_n S_n x_n\| \leq s_n^{-1} \|SG_1(t_n^{-1}M) S_n x_n\| = \|S_n x_n\|_n$ dir. Dolayısıyla $v(y) \geq 1$ elde edilir yani çek$v \neq X$ dır.

Şimdi çek$v \neq \{0\}$ olduğunu ispatlayalım. Eğer $\|T\| \geq \left\| \bigcup_{i=1}^{n-1} M \right\|$ ise $T \in M^n$ operatörüne M kümesi için başat denir. $SG(M)$ yarı grubu sınırlı olmadığından $\left\| \bigcup_{i=1}^{m_k - 1} \right\| < \|M^{m_k}\|$ olacak şekilde artan (m_k) dizisi vardır ve açık olarak $\left\| \bigcup_{i=1}^{m_k - 1} M^i \right\| \to \infty$ dır. Sonuç olarak M kümesi için başat ve $\|T_k\| \to \infty$ olacak şekilde operatörlerin (T_k) dizisi vardır. $\alpha_k = \left\| T^k \right\|^{-1}$ olsun.

Şimdi $(\alpha_k T_k)$ dizisinin önkompakt olduğunu gösterelim. Gerçekten $P_k, F_k \in M$, $Q_k \in SG_1(M)$ için $\alpha_k T_k = L_{P_k} R_{F_k} (\alpha_k Q_k)$ sağlanır ve $(\alpha_k Q_k)$ dizisi sınırlıdır. $(L_{P_k} R_{F_k})$ dizisi önkompakt olduğundan $K \in K(X)$ için $L_{P_k} R_{F_k} \to K$ olduğunu varsayabiliriz. $(K(\alpha_k Q_k))$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır ve buradan $(\alpha_k T_k)$ dizisinin yakınsak bir alt diziye sahip olduğu elde edilir. Buradan da $\|S\| = 1$ ve $\alpha_k T_k \to S$ olduğunu varsayalım. Her k için $\|x_k\| = 1$ ve $t_k^{-1} < \|\alpha_k T_k x_k\|$ olacak şekilde $x_k \in X$ seçelim. S operatörü kompakt olduğundan $y \in X$ için $Sx_k \to y$ olduğunu varsayalım. Buradan $\|y\| = 1$ ve $\alpha_k T_k x_k \to y$ elde edilir. Diğer yandan $v(y) = \lim_{k\to\infty} v(\alpha_k T_k x_k) \leq \limsup_{k\to\infty} \alpha_k v(x_k) \leq \limsup_{k\to\infty} \alpha_k = 0$ dır yani $v(y) = 0$ elde edilir. □

$LIM\,(M)$ ile $n_k \to \infty$ ve $T_k \in M^{n_k}$ olmak üzere yakınsak (T_k) dizilerinin limitlerinin kümesini gösterelim. Açık olarak $N = LIM\,(M)$, $\overline{SG\,(M)}$ kümesinin yarı grup idealidir. Özel olarak her $T \in SG\,(M)$ için $TN \subset N$ ve $NT \subset N$ dir.
$N^2 \subset N$ her zaman sağlanır, ancak $N \subset N^2$, $SG\,(M)$ yarı grubu önkompakt olduğunda gerçeklenir. Gerçekten $T_k \in M^{n_k}$ $(n_k \to \infty)$ için $T_k \to T$ ise $S_k \in M^{n_k}, P_k \in M^{j_k}, m_k + j_k = n_k$, $m_k \to \infty$ ve $j_k \to \infty$ olmak üzere $T_k = S_k P_k$ olacak şekilde (S_k) ve (P_k) dizileri vardır. Limitleri $S, P \in N$ olan (S_k) dizisinin yakınsak (S_{k_i}) dizisini ve daha sonra da (P_{k_i}) dizisinin yakınsak alt dizisini seçelim. Buradan $T = SP$ elde edilir dolayısıyla $N \subset N^2$ sonucuna ulaşılır.

Teorem 3.1.3. *$\rho\,(M) = 1$ ve M sınırlı operatörlerin sınırlı kümesi olsun. $SG\,(M)$ önkompakt yarı grubu ise $LIM\,(M)$ kümesinin ve dolayısıyla $\overline{SG\,(M)}$ yarı grubunun sıfırdan farklı idempotent elemanı vardır.*

Kanıt. $SG\,(M)$ önkompakt yarı grup olduğundan sınırlıdır ve $v\,(SG\,(M)) = 1$ olacak şekilde $B\,(X)$ üzerindeki norma denk bir v normu vardır [3]. $v = \|.\|$ olduğunu varsayalım ve $N = LIM\,(M)$ olsun. $\|N\| = 1$ dir. Gerçekten, $\rho\,(M) = \inf \|M^n\|^{1/n} = 1$ olduğundan her n için $\|M^n\| = 1$ sağlanır ve $\|K_n\| \to 1$ olacak şekilde $K_n \in M^n$ olan (K_n) dizisi vardır. Dizinin yakınsak alt dizisini bulabiliriz, limitine T_0 diyelim. Buradan $T_0 \in N$ ve $\|T_0\| = 1$ elde edilir. $N = N^2$ olduğundan $S_1, T_1 \in N$ olmak üzere $T_0 = S_1 T_1$ sağlanır ve açık olarakta $\|T_1\| = 1$. Bu şekilde devam edersek her n için $\|T_n\| = 1$ ve $T_{n-1} = S_n T_n$ olacak şekilde (T_k) ve (S_k) dizileri bulunur. N kompakt küme olduğundan $\|T\| = 1$ olacak şekilde $T \in N$ operatörüne yakınsayan (T_{n_k}) alt dizisinin olduğunu varsayabiliriz. Buradan N kümesindeki (Q_k) dizisi için $T_{n_k} = Q_k T_{n_{k+1}}$ elde ederiz. (Q_k) dizisinin limiti $S \in N$ olan yakınsak bir alt dizisi olduğundan $T = ST$ elde edilir. Buradan her $0 < n$ için $\|S^n\| = 1$ olduğu sonucu çıkar. Bununla birlikte (S^n) dizisinin (S^{n_i}) yakınsak alt dizisi vardır, limitine $F \in N$ diyelim, açıktır ki $\|F\| = 1$ dir. Ayrıca (j_p) dizisi için $2m_p < m_{p+1}$ ve $m_{p+1} = 2m_p + j_p$ olacak şekilde (n_i) dizisinin (m_p) alt dizisi vardır. Buradan $S^{m_p} \to F$ ve $S^{m_{p+1}} = S^{m_p} S^{j_p} S^{m_p}$ elde edilir. S^{j_p} dizisinin yakınsak bir alt dizisi olduğundan, limitine $P \in N$ diyelim, $F = FPF$ elde ederiz. $FP \neq O$, $FP \in N$ ve $FP = (FP)^2$ olduğu açıktır. □

3.2 Ana Sonuç

Yapılacak olan açıklamada Banach uzaylarında geçerli olan Ringrose sonuçlarından yararlanılacaktır.
Γ, X uzayının (kapalı) alt uzaylarının bir tam zinciri olsun. Bilindiği gibi $Y \in \Gamma$ ise $Y_{-} := \overline{\operatorname{span}\{Z \in \Gamma : Z \subset Y,\, Z \neq Y\}}$ şeklinde tanımlanır. $Y \neq Y_{-}$ ise Y/Y_{-} alt uzayına gedik denir.
$T \in K(X)$ ve Γ, T operatörü altında değişmez kalan alt uzayların tam zinciri olsun. Zorn Lemması'ndan $\Gamma \subseteq \Gamma_{\max}$ olacak şekilde $\operatorname{Lat} T$ örgüsünde $\Gamma_{\max}$ maksimal alt uzay zinciri vardır. Teorem 2.3.9'dan $\Gamma_{\max}$ zincirinin tüm gedikleri bir boyutludur.
Şimdi T hemen-hemen-sıfır-güçlü olmayan, kompakt operatör ve Γ, $\operatorname{Lat}T$ ailesinin alt uzaylarının tam zinciri olsun. Bu durumda $V = Y/Y_{-}$ gediği üzerinde tanımlı T/V operatörünün hemen-hemen-sıfır-güçlü olmayacak şekilde Γ zincirinin V gediğinin varolduğunu gösterelim. Öncelikle Γ zincirinin gediği olmasaydı [1]'den sürekli olur ve Teorem 2.3.9'dan Γ maksimal zincir olurdu. Bu ise [8]'in sonuç 5.13 ile çelişir. Şimdi Γ zincirinin her V gediği için T/V operatörünün hemen-hemen-sıfır-güçlü olduğunu varsayalım. Açık olarak her V gediği için T/V operatörü kompakttır. $\Gamma_{\max}(V)$, Γ zincirinin her V gediği için $\operatorname{Lat}(T/V)$ ailesindeki alt uzaylardan oluşan maksimal zincir olsun. Ringrose Teoremi'nden $\Gamma_{\max}$ ile bağlantılı T/V operatörünün her esas köşegen sabiti sıfırdır. Γ zincirinin tüm Y elemanlarını kullanarak X uzayının alt uzaylarının Γ_0 zincirini şu şekilde oluşturalım: Γ zincirinde $Y = Y_{-}$ ise $Y \in \Gamma_0$, diğer durumda ($V = Y/Y_{-}$, Γ zincirinin gediğidir) $X \to X/Y_{-}$ kanonik fonksiyonu altında $\Gamma_{\max}(V)$ zincirinin tüm elemanlarının ön görüntüleri Γ_0 zincirine ait olsun ($\Gamma_{\max}$ zincirinin elemanlarını X/Y_{-} uzayının alt uzayları olarak düşünebiliriz). Γ_0, X uzayının alt uzaylarının tam zinciridir ve gedikleri bir boyutludur. Teorem 2.3.9.'dan Γ_0 zincirinin maksimal alt uzay zinciri olduğu elde edilir. Açık olarak Γ_0, $\operatorname{Lat} T$ tarafından içerilir ve T operatörünün Γ_0 ile bağlantılı esas köşegen sabiti sıfırdır. Ringrose Teoeremi'nden T operatörü hemen-hemen-sıfır-güçlü elde edilir. Dolayısıyla T/V operatörü hemen-hemen-sıfır-güçlü değildir.

Teorem 3.2.1. *(i) Volterra yarı grubu Volterra cebiri üretir.*
(ii) Sıfırdan farklı Volterra yarı grubunun aşikar olmayan hiperdeğişmez alt uzayı vardır.

Kanıt. Öncelikle (i) ve (ii)'nin denk olduğunu gösterelim.

Volterra yarı grubu Volterra cebiri üretiyor ise [4]'den aşikar olmayan değişmez alt uzayının olduğu elde edilir. Volterra yarı grubunun aşikar olmayan hiperdeğişmez alt uzayı varsa Üçgenleştirme Lemması'ndan üçgenleştirilebilir olduğu ve cebirdeki her eleman yarı grupdaki elemanların sonlu lineer kombinasyonu şeklinde yazılacağından Spektral Tasvir Teoremi'nden Volterra yarı grubu tarafından üretilen cebirin Volterra cebiri olduğu elde edilir. Şimdi (i)'yi ispatlayalım. Bunun için de tersini varsayalım yani G, Volterra yarı grubu tarafından üretilen cebirin hemen hemen sıfır güçlü olmayan bir T operatörü olsun. $M = \{T_1, ..., T_n\} \subset G$ olmak üzere T operatörünün T_i operatörlerinin $(i = 1, ..., n)$ lineer kombinasyonu şeklinde yazıldığını düşünelim. $\text{Abc}\,(M)$, M kümesinin konveks kabuğu olmak üzere $T \in \text{abc}\,(M)$ varsayabiliriz. Γ, M kümesinin değişmez alt uzaylarının maksimal zinciri olsun. Buradan Γ, Lat$T$ ailesindeki alt uzayların tam zinciri olur. Önceki bilgilerden T/V operatörü hemen hemen sıfır güçlü olmayan operatör olacak şekilde Γ zincirinin V gediği vardır.
$M/V = \{T_1/V, ..., T_n/V\}$ olsun. Her $0 < k$ tam sayısı için

$$\left\|(M/V)^k\right\| \leq \left\|(abc\,(M/V))^k\right\| \leq \left\|abc\left((M/V)^k\right)\right\| \leq \left\|(M/V)^k\right\|$$

sağlandığından $\rho\,(M/V) = \rho\,(abc\,(M/V))$ gerçeklenir. $T/V \in abc\,(M/V)$ ve $0 < \rho\,(T/V)$ olduğundan $0 < \rho\,(abc\,(M/V))$ elde edilir ve $\rho\,(abc\,(M/V)) = 1$ olduğunu varsayalım. Açık olarak M/V kümesinin aşikar olmayan değişmez alt uzayı yoktur. Teorem 3.1.2.'den $SG\,(M/V)$ yarı grubunun sınırlı olduğu elde edilir. Buradan da Lemma 3.1.1.'den $SG\,(M/V)$ yarı grubunun önkompakt olduğu sonucuna ulaşılır. Son olarak Teoerem 3.1.3.'den $\overline{SG\,(M/V)}$ yarı grubunun sıfırdan farklı idempotent elemanı olduğu bulunur. Ancak açıktır ki $SG\,(M/V)$ Volterra yarı grubu ve hatta $\overline{SG\,(M/V)}$ da Volterra yarı grubudur. Ama $\overline{SG\,(M/V)}$ de idempotent yani hemen hemen sıfır güçlü olmayan bir eleman vardır, dolayısıyla çelişki elde edilir. □

Kaynakça

[1] H. Radjavi & P. Rosenthal, *Simultaneous Triangularization*, Springer Verlag , Berlin, 2000.

[2] G. C. Rota and W. G. Strang, "A note on the joint spectral radius," *Indag. Math.* **22** (1960), 379-381.

[3] F. F. Bonsall & J. Duncan, *Numerical Ranges of Operators on Normed Algebras I*, Londan Math. Soc. Lect. Note, Ser. 2, Cambridge Univ. Press, Londan, 1971.

[4] V. S. Shulman, "On invariant subspace of Volterra Operators," *Funk. Anal. i Prilozen.* **18,** No.2 (1984), 84-85. [in Russian]

[5] N. Aronszajn & K. T. Smith, "Invariant subspaces of completely continuous operators," *Ann. of Math.* **60** (1954), 345-350.

[6] V. Lomonosov, "Invariant subspaces for the family of operators commuting with compact operators," *Functional. Anal. Appl.* **7** (1973), 213-214.

[7] Yu. V. Turovskii, "Volterra semigroups have invariant subspaces," *J.Funct.Anal.* **162** (1999), 313-322.

[8] H. Radjavi & P. Rosenthal, *Invariant Subspaces*, Springer Verlag, New York,1973.

Özgeçmiş

Canan Kaya 1983 yılında İstanbul'da doğdu. Suadiye lisesini bitirdikten sonra 2000-2005 yılları arasında Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimi aldı. Bir yıl özel bir eğitim merkezinde çalıştıktan sonra İstanbul Kültür Üniversitesi Matematik-Bilgisayar Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak yüksek lisans eğitimine başladı ve halen devam etmektedir.