İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POZİTİF OPERATÖRLER İÇİN DEĞİŞMEZ ALT-ÖRGÜLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Araş.Gör. Uğur GÖNÜLLÜ
0609041013

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:	**13 Haziran 2008**
Tezin Savunulduğu Tarih:	**23 Haziran 2008**

Tez Danışmanı :	**Yard.Doç.Dr. Mert ÇAĞLAR**
Diğer Jüri Üyeleri :	**Yard.Doç.Dr. R.Tunç MISIRLIOĞLU (İ.Ü.)**
	Yard.Doç.Dr. Yaşar POLATOĞLU

HAZİRAN 2008

Önsöz

Bu yüksek lisans tez çalışmasının konusunu öneren danışmanım Yard.Doç.Dr. Mert ÇAĞLAR'a ve çalışma boyunca yardımları ve önerileri ile yol gösteren Yard.Doç.Dr. R.Tunç MISIRLIOĞLU'na, ayrıca tüm Matematik-Bilgisayar bölümü hocalarına teşekkür ederim.

İçindekiler

Üniversitesi : İstanbul Kültür Universitesi

Enstitüsü : Fen Bilimleri

Anabilim Dalı : Matematik-Bilgisayar

Programı : Matematik-Bilgisayar

Tez Danışmanı : Yard.Doç.Dr. Mert ÇAĞLAR

Tez Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans - Haziran 2008

ÖZET

POZİTİF OPERATÖRLER İÇİN DEĞİŞMEZ ALT-ÖRGÜLER

Uğur GÖNÜLLÜ

Banach örgüleri üzerinde tanımlı bazı pozitif operatörlerin aşikar olmayan kapalı değişmez alt-örgülere sahip olduğu bilinmektedir. Özel olarak her pozitif kompakt operatör aşikar olmayan kapalı değişmez alt-örgüye sahiptir. Bu çalışmada, Banach örgüleri üzerinde tanımlı, aşikar olmayan kapalı değişmez alt-örgülere sahip olmayan bazı pozitif operatör örnekleri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Banach Örgüsü, Pozitif Operatör, Değişmez Alt-örgü

University : İstanbul Kültür University

Institute : Institute of Science and Technology

Science Programme : Mathematics-Computer

Programme : Mathematics-Computer

Supervisor : Assist.Prof.Dr. Mert ÇAĞLAR

Degree Awarded and Date : M.S. - June 2008

ABSTRACT

INVARIANT SUBLATTICES FOR POSITIVE OPERATORS

Uğur GÖNÜLLÜ

We know that some positive operators on Banach lattices have non-trivial closed invariant sublattices. In particular, every positive compact operator has non-trivial closed invariant sublattices. In this work, we present several examples of positive operators on Banach lattices which do not have non-trivial closed invariant sublattices.

Keywords: Banach lattices, Positive operators, Invariant sublattice

Bölüm 1

Giriş

Genel olmayan bir çok sonuçtan sonra, aşikar olmayan kapalı değişmez alt-uzaya sahip olmayan operatör örnekleri ilk olarak Enflo [4] ve daha sonra Read [9], [10] ve [11] tarafından vermiştir. 1992'de de Pagter [3], Abramovich, Aliprantis ve Burkinshaw, en az iki boyutlu bir Banach örgüsü üzerinde tanımlı her pozitif operatör aşikar olmayan kapalı değişmez alt-uzaya sahiptir, sanısı üzerine makaleler serisi başlatmışlardır. Bir çok netice içeren bu çalışmaların sonuçları [1] in Bölüm 10 nun da bulunabilir.

Eldeki bu Yüksek Lisans tez çalışmasında A.K. Kitover ve A.W. Wickstead in [7] "*Invariant sublattices for positive operators*" başlıklı makalesi incelenmiş ve orada sunulan bir kaç örnek genelleştirilmiştir. Sözü edilen makalede kısaca, değişmez alt-uzayların varlığını gösterirken kullanılan bazı tekniklerin değişmez alt-örgülerin varlığını göstermede hangi koşullarda geçerli olduğu ve bir Banach örgüsü üzerinde tanımlı herhangi bir pozitif operatörün aşikar olmayan kapalı değişmez alt-uzayı vardır sanısına, bir Banach örgüsü üzerinde tanımlı ve aşikar olmayan kapalı değişmez alt-örgüsü olmayan bazı pozitif operatör örnekleri verilerek bir yaklaşım sunulmuştur. Belirtmek gerekir ki bu örneklerin değişmez alt-uzayları vardır.

Eldeki çalışmanın ikinci bölümünde kullanılacak olan temel kavramlar ve tanımlar verilmiş, üçüncü bölümde, bir Banach örgüsünde sayılabilir bir küme tarafından üretilen vektör alt-örgüsünün ayrılabilir olduğu gösterilerek bununla değişmez alt-örgülerin varlığı arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Dördüncü bölümde, ilk olarak örneklerde kullanılacak lemmalar verilip daha sonra pozitif özvektöre ve değişmez kapalı ideale sahip olmayıp değişmez kapalı alt-örgüye sahip olabilen bir pozitif operatör örneği ve sonraki örneklerde değişmez kapalı alt-örgüye sahip olmayan pozitif operatör örnekleri verilmiştir. Son bölümde dördüncü bölümde verilen bazı örneklerin genel hali incelenmişitr.

Bölüm 2

Temel kavramlar ve tanımlar

Tanım 2.1. *Bir X küme üzerinde tanımlı $\geq$ ikili bağıntısına bir* ***sıralama bağıntısı*** *denir:*

(1) *her bir x için $x \geq x$ (Yansıma),*

(2) *$x \geq y$ ve $y \geq x$ ise $x = y$ (Ters simetri),*

(3) *$x \geq y$ ve $y \geq z$ ise $x \geq z$ (Geçişme).*

Genel olarak $y \leq x$ sembolü $x \geq y$ e denktir. $x > y$ notasyonu $x \geq y$ ve $x \neq y$ anlamına gelir. Bir sıralama bağıntısıyla donatılmış kümeye bir ***kısmî sıralanmış küme*** *denir.*

Tanım 2.2. *X bir reel vektör uzayı ve $\geq$ bağıntısıyla kısmî sıralanmış olsun.*

(1) *her $z \in X$ için $x \geq y$ ise $x + z \geq y + z$*

(2) *her $\alpha \geq 0$ skaleri için, $x \geq y$ ise $\alpha x \geq \alpha y$*

özelliklerini sağlanıyorsa X e ***sıralanmış vektör uzayı*** *denir. X sıralanmış vektör uzayı olmak üzere $X^+ = \{x \in X : x \geq 0\}$ kümesine X in* ***pozitif konisi*** *veya kısaca* ***konisi*** *denir.*

Tanım 2.3. *X sıralanmış bir vektör uzayı olsun. X deki her vektör çifti en küçük üst sınıra (supremum) ve en büyük alt sınıra ($infimum$) sahip ise X e* ***Riesz uzayı*** *veya* ***vektör örgüsü*** *denir. Bir $\{x, y\}$ çiftinin supremumu ve infimumu sırasıyla $x \vee y$ ve $x \wedge y$ ile gösterilecektir. Bir Riesz uzayının herhangi bir A alt-kümesi, vektör alt-uzayı ve her $x, y \in A$ için $x \vee y$, $x \wedge y \in A$ ise A ya bir* ***Riesz alt-uzayı*** *veya* ***vektör alt-örgüsü*** *denir.*

Bir Riesz uzayında herhangi bir x elemanın **pozitif kısmı**, **negatif kısmı** ve **mutlak değeri** sırasıyla,

$$x^+ = x \vee 0, \quad x^- = (-x) \vee 0, \quad |x| = x \vee (-x)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.4. *x bir Riesz uzayının elemanı olsun. Bu durumda*

(1) $x = x^+ - x^-$,

(2) $|x| = x^+ + x^-$,

(3) $x^+ \wedge x^- = 0$.

Kanıt. $[2, s.4]$ □

A bir Riesz uzayını alt-kümesi olmak üzere,

$x \vee A := \{x \vee a : a \in A\}$,

$x \wedge A := \{x \wedge a : a \in A\}$.

Eğer $x \wedge A = \{0\}$ ise x, A ya dik denir.

Teorem 2.5. *A bir Riesz uzayının alt-kümesi olsun. Eğer sup A var ise her bir x için $sup(x \wedge A)$ var ve*

$$sup(x \wedge A) = x \wedge sup\, A.$$

Benzer şekilde, eğer inf A var ise her bir x için $inf(x \vee A)$ var ve

$$inf(x \vee A) = x \vee inf\, A.$$

Kanıt. $[2, s.6]$ □

Önerme 2.6. *E bir Riesz uzayı olsun. E nin herhangi bir A alt-kümesi için*

$$A^\vee := \left\{x \in E : \exists\, x_1, x_2, ..., x_n \in A \ni x = \vee_{i=1}^n x_i\right\}$$

ve

$$A^\wedge := \left\{x \in E : \exists\, x_1, x_2, ..., x_n \in A \ni x = \wedge_{i=1}^n x_i\right\}.$$

Ayrıca, $A^{\wedge\vee} := (A^\wedge)^\vee$ ve $A^{\vee\wedge} := (A^\vee)^\wedge$ ise aşağıdakiler sağlanır;

(1) $\quad A^{\wedge\vee} = A^{\vee\wedge}$,

(2) *A bir vektör alt-uzayı ise A tarafından üretilen Riesz alt-uzayı (yani, A yı içeren en küçük vektör alt-örgüsü)* $A^{\vee\wedge}$ *ve ayrıca*

$$A^{\vee\wedge} = A^{\vee} - A^{\vee} = A^{\wedge} - A^{\wedge}.$$

Kanıt. $[2, s.197]$ veya [5] in Teorem 2.2.11. □

Sonuç 2.7. *E bir Riesz uzayı ve A, E nin herhangi bir alt-kümesi ise A tarafından üretilen vektör alt-örgüsü* $\left(span\{A\}\right)^{\vee\wedge}$ *dir.*

Kanıt. Önerme 2.6 dan kolayca görülür. □

Tanım 2.8. *E bir Riesz uzayı ve A, E nin bir alt-kümesi olsun.* $y \in A$ *ve* $|x| \leq |y|$ *olduğunda* $x \in A$ *oluyor ise A ya **katı** (solid) denir. E nin katı vektör alt-uzayına **ideal** denir. E nin boştan farklı bir alt-kümesi tarafından üretilen ideal yani, A yı içeren en küçük ideal,*

$$E_A = \left\{ x \in E : \exists\, x_1, x_2, ..., x_n \in A \text{ ve } \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \ni |x| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, |x_i| \right\}.$$

Eğer $A = \{x\}$ *ise* $E_x = E_{\{x\}}$ *e x tarafından üretilen **esas ideal** denir ve tam olarak*

$$E_x = \left\{ y \in E : \exists\, \lambda \geq 0 \ni |y| \leq \lambda\, |x| \right\}$$

dir. Bir $e > 0$ *vektörü için* $E_e = E$ *ise e ye **sıra birimi** (order unit) denir.*

Tanım 2.9. $\|.\|$ *bir Riesz uzayı üzerinde tanımlanmış norm olsun. Eğer* $|x| \leq |y|$ *olduğunda* $\|x\| \leq \|y\|$ *elde ediliyorsa bu norma **örgü normu** denir. Örgü normu ile donatılmış bir Riesz uzayına **normlandırılmış Riesz uzayı** denir. Üzerinde tanımlanmış norma göre tam metrik uzay olan bir normlandırılmış Riesz uzayında **Banach örgüsü** denir.*

Tanım 2.10. *X, Y iki sıralanmış vektör uzayı ve* $T{:}X \to Y$ *bir operatör olsun. Eğer* $x \geq 0$ *olduğunda* $Tx \geq 0$ *oluyorsa T ye **pozitif operatör** denir ve* $T \geq 0$ *veya* $0 \leq T$ *şeklinde gösterilir.*

Teorem 2.11. *Bir Banach örgüsünden normlandırılmış bir Riesz uzayına giden her pozitif operatör süreklidir.*

Kanıt. $[2, s.175]$ □

Tanım 2.12. *E ve F iki Riesz uzayı ve $T : E \to F$ bir pozitif operatör olsun. Eğer her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ ise T ye* ***örgü*** *(veya* ***Riesz****)* ***homomorfizmi*** *denir. Bire-bir olan bir örgü homomorfizmine* ***örgü*** *(veya* ***Riesz****)* ***izomorfizmi*** *denir. T, bir örgü izomorfisi ve her $x \in E$ için $\|Tx\| = \|x\|$ ise T ye* ***örgü izometrisi*** *denir. Eğer T, üzerine ise Banach örgülerine* ***örgü izometrik*** *denir.*

Tanım 2.13. *E bir Banach örgüsü olsun.*

(1) *$x \wedge y = 0$ olan her $x, y \in E^+$ için*

$$\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$$

*koşulu sağlandığında E ye AL_p-**uzayı** ve onun normunada p-**toplamsal**,*

(2) *$x \wedge y = 0$ olan her $x, y \in E^+$ için*

$$\|x \vee y\| = maks\{\|x\|, \|y\|\}$$

*koşulu sağlandığında E ye AM-**uzayı** denir. Ayrıca AL_1-uzayı AL-uzayı olarak gösterilir.*

Teorem 2.14. *E bir Banach örgüsü ve $x \in E$ olsun. E de x tarafından üretilen esas ideal E_x,*

$$\|y\|_\infty = inf\{\lambda > 0 : |y| \leq \lambda\,|x|\}, \qquad y \in E_x$$

normu altında bir AM-uzayıdır.

Kanıt. [2, s.187] □

Teorem 2.15. (Kakutani-Bohnenblust ve M. Krein-S. Krein) *E bir Banach örgüsü olmak üzere E nin sıra birimli bir AM-uzayı olması için gerek ve yeter şart en az bir K kompakt Hausdorff uzayı için $C(K)$ uzayı ile örgü izometrik olmasıdır.*

Kanıt. [2, s.194] □

Teorem 2.16. *K bir kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere X, $C(K)$ nın bir kapalı alt-uzayı ve*

$$\mathscr{F} = \Big\{ (k_1, k_2, \lambda) : \forall f \in X, f(k_1) = \lambda f(k_2) \quad k_1, k_2 \in K,\ \lambda \geq 0 \Big\}$$

olsun. Bu durumda X in $C(K)$ nın bir alt-örgüsü olması için gerek ve yeter şart

$$\Big\{ f \in C(K) : \forall (k_1, k_2, \lambda) \in \mathscr{F}, f(k_1) = \lambda f(k_2) \Big\} \subset X$$

olmasıdır.

Kanıt. [6] ın Teorem 3. □

Önerme 2.17. *c ile $C(\mathbb{N}^*)$ örgü izometriktir ($\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{N}$ nin tek nokta kompaktlaştırılmasıdır).*

Kanıt. $x = (x_n) \in c$ olduğunda x in yakınsadığı nokta l_x ile gösterilsin, yani $x_n \to l_x$, $n \to \infty$ olsun. $T : c \to C(\mathbb{N}^*)$; her $n \in \mathbb{N}$ için $(Tx)(n) = x_n$ ve $(Tx)(\infty) = l_x$ şeklinde tanımlansın. T nin lineer olduğu açıktır. $x, y \in c$ için

$$T(x \vee y)(n) = (x \vee y)_n = x_n \vee y_n = T(x)(n) \vee T(y)(n) = \big(T(x) \vee T(y)\big)(n)$$

ve

$$T(x \vee y)(\infty) = l_x \vee l_y = \big(T(x) \vee T(y)\big)(\infty)$$

olduğundan T bir örgü homomorfisidir. $\|x\| = \sup\big\{ |x_n| : n \in \mathbb{N}\big\}$ ve $\|Tx\| = \sup\big\{ |(Tx)(i)| : i \in \mathbb{N}^*\big\} = \sup\big\{ |x_n| : n \in \mathbb{N}\big\} \vee l_x$ olduğundan $\|x\| \leq \|Tx\|$ dir. Ayrıca herhangi bir $\epsilon > 0$ verildiğinde $n \geq N$ için $|x_n - l_x| < \epsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Buna göre

$$|l_x| < \epsilon + |x_n| \leq \epsilon + \sup\big\{ |x_n| : n \in \mathbb{N}\big\} \leq \epsilon + \|x\|$$

yani, $\|Tx\| \leq \|x\|$ dir. Dolayısıyla T bir örgü izometridir. Şimdi $f \in C(\mathbb{N}^*)$ olsun. Herhangi bir $\epsilon > 0$ verildiğinde $f^{-1}(B_\epsilon(f(\infty)))$ (burada $B_\epsilon(f(\infty))$, $f(\infty)$ in ϵ-yarıçaplı açık topunu göstermektedir) $\mathbb{N}^*$ de açık kümedir. Ayrıca $\infty \in f^{-1}(B_\epsilon(f(\infty)))$ olduğundan $U_\infty \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(\infty)))$ olacak şekilde ∞ un bir U_∞ açık komşuluğu vardır. ∞ un açık komşulukları, $L \subset \mathbb{N}$ in bir sonlu alt-kümesi olmak üzere $\mathbb{N}^* \setminus L$ şeklindedir. L deki en büyük doğal sayıya N dersek (L sonlu olduğundan böyle bir doğal sayı vardır) $n \geq N + 1$ için $|f(n) - f(\infty)| < \epsilon$ yani, $f(n) \to f(\infty)$ $(k \to \infty)$ dir. Dolayısıyla $x_n = f(n)$ şeklinde bir dizi tanımlanırsa $x_n \to f(\infty)$ ve $Tx = f$ olur. Bu da T nin üzerine olduğunu gösterir ki c ile $C(\mathbb{N}^*)$ in örgü izometrik olduğu elde edilir. □

Sonuç 2.18. *H, c nin kapalı bir vektör alt-örgüsü olsun. Her* $x \in H$ *için* $x_m = \alpha x_n$ *olacak şekilde* $\alpha \geq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$ *veya* $x_m = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n$ *olacak şekilde* $\alpha \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$ *veya* $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha x_m$ *olacak şekilde* $\alpha \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$ *vardır. Tersine bir* $x \in c$*, H nin elemanlarının sağladığı sınırlamaların (yani, yukarıdaki eşitlikler) her birini sağlıyor ise* $x \in H$ *dir. Yani, yukarıdaki sınırlamalar ile c nin kapalı alt-örgüleri karakterize edilebilir.*

Kanıt. Teorem 2.16 ve Önerme 2.17 den kolayca görülür. □

Sonuç 2.19. *H,* c_0 *nin kapalı bir vektör alt-örgüsü olsun. Her* $x \in H$ *için* $x_m = \alpha x_n$ *olacak şekilde* $\alpha \geq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$ *vardır. Tersine bir* $x \in c_0$*, H nin elemanlarının sağladığı sınırlamaların her birini sağlıyor ise* $x \in H$ *dir. Yani yukarıdaki sınırlamalar ile* c_0 *ın kapalı alt-örgüleri karakterize edilebilir.*

Kanıt. c_0, c nin kapalı bir alt-ideali olduğundan Teorem 2.16, Önerme 2.17 ve Sonuç 2.18 den istenen elde edilir. □

Tanım 2.20. *Sıralanmış bir X vektör uzayı, eğer her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $nx \leq y$ *olması* $x \leq 0$ *olmasını gerektiriyorsa* ***Arşimedyan*** *olarak adlandırılır.*

Tanım 2.21. *Bir Riesz uzayının boştan farklı ve üstten sınırlı her alt-kümesinin bir supremumu var ise Riesz uzayına* ***Dedekind tam*** *denir.*

Tanım 2.22. *Bir Riesz uzayındaki* $e > 0$ *vektörüne,* $x \wedge y = 0$, $x \leq e$ *ve* $y \leq e$ *koşulları sağlandığında* $x = 0$ *veya* $y = 0$ *oluyorsa, bir* ***atom*** *denir. Eğer bir Riesz uzayı bir atoma sahip ise ona* ***atomik*** *denir.*

Lemma 2.23. *Arşimedyan bir E Riesz uzayında pozitif bir x elemanının E de atom olması için gerek ve yeter koşul* $\text{span}\{x\} = E_x$ *olmasıdır.*

Kanıt. $[1, s.86]$ □

Teorem 2.24. *Bir Riesz uzayında* $|x| \leq |y_1 + y_2 + ... + y_n|$ *ise* $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$ *ve i=1,2,...,n için* $|x_i| \leq |y_i|$ *olacak şekilde* $x_1, x_2, ..., x_n$ *elemanları vardır. Ayrıca, x pozitif ise* x_i *ler pozitif seçilebilir.*

Kanıt. $[2, s.9]$ □

Sonuç 2.25. *E bir Arşimedyan Riesz uzayı ve A, E deki bütün atomların oluşturduğu kümenin herhangi bir alt-kümesi ise* $\operatorname{span}\{A\} = E_A$ *dir.*

Kanıt. Lemma 2.23 ve Teorem 2.24 den kolayca görülür. $\square$

e_n ile n. koordinat vektörü gösterilsin.

Lemma 2.26. *e_n ler ℓ_p $(1 \le p \le \infty)$ de birer atom ve x, ℓ_p nin bir atomu ise $x = \lambda e_k$ olacak şekilde bir k ve $\lambda > 0$ sayısı vardır.*

Kanıt. İspat açıktır. $\square$

x, ℓ_p veya c_0 da bir vektör olmak üzere $\operatorname{supp} x = \{i \in \mathbb{N} : x_i \neq 0\}$ şeklinde tanımlansın.

$E \subset \mathbb{N}$ ve x, ℓ_p veya c_0 da bir vektör olmak üzere Ex vektörü, $i \in E$ ise $(Ex)_i = x_i$ ve diğer durumlarda $(Ex)_i = 0$ şeklinde tanımlansın.

Lemma 2.27. *H, ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ veya c_0 ın kapalı bir vektör alt-örgüsü ve $x, y \in H^+$ olsun. Bu durumda $E = (\operatorname{supp} y)^C$ olmak üzere $Ex \in H$ dir.*

Kanıt. [8] nin Lemma 5.1 $\square$

Sonuç 2.28. *H, ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ veya c_0 ın kapalı bir vektör alt-örgüsü ve $x, y \in H^+$ olsun. Bu durumda $E = \operatorname{supp} y$ olmak üzere $Ex \in H$ dir.*

Kanıt. $y = Ey + E^C y$ ve bir önceki Lemmadan $E^C y \in H$ olduğunda $Ey = y - E^C y \in H$ dir. $\square$

Aşağıda ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ için verilen ifadeler c_0 içinde geçerlidir.

Lemma 2.29. *$(x^\alpha) \subset \ell_p$ $(1 \le p < \infty)$ ağı üstten sınırlı, azalan ve $\inf(x^\alpha) = 0$ ise (x^α) ağı sıfıra yakınsar.*

Kanıt. $\inf(x^\alpha) = 0$ ise her n için $\inf(x_n^\alpha) = 0$ dır. (x^α) üstten sınırlı olduğundan her α için $x \ge x^\alpha$ olacak şekilde bir $x \in \ell_p$ vardır. $x \in \ell_p$ olduğudan $\frac{\epsilon^p}{2} > 0$ için $\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{\epsilon^p}{2}$ olacak şekilde bir N sayısı vardır. Dolayısıyla her α için $\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i^\alpha|^p < \frac{\epsilon^p}{2}$ sağlanır. $n = 1$ için $\inf(x_1^\alpha) = 0$ olduğundan $\beta_1 < \alpha$ için $x_1^\alpha < \frac{\epsilon}{2N}$

olacak şekilde bir β_1 indisi vardır. Aynı şekilde $n = 2, 3, ..., N$ için de yukarıdaki koşulu sağlayan β_n indisleri bulunabilir. $n = 1, 2, 3, ..., N$ için $\beta_n \leq \gamma$ olacak şekilde bir γ indisi vardır. Dolayısıyla $\gamma \leq \alpha$ için $\sum_{i=1}^{N} |x_i^\alpha|^p < \frac{\epsilon^p}{2}$ ve ayrıca her α için $\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i^\alpha|^p < \frac{\epsilon^p}{2}$ sağlandığından $\gamma \leq \alpha$ için $\|x^\alpha\| < \epsilon$ bulunur. Böylece istenen ispatlanmıştır. $\square$

Sonuç 2.30. $(x^\alpha) \subset \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$ *üstten sınırlı, azalan ve* $\inf(x^\alpha) = t$ *ise* (x^α) *ağı* t *ye yakınsar.*

Önerme 2.31. *H, ℓ_p nin kapalı bir vektör alt-örgüsü olmak üzere $H = \{0\}$ olması için gerek ve yeter koşul H nin atomik olmamasıdır.*

Kanıt. $H = \{0\}$ ise H nin atomik olmadığı açıktır.

Tersine H atomik olmasın ve $H \neq \{0\}$ olsun. Bu durumda her $x \in H^+ \setminus \{0\}$ için $y \wedge z = 0$, $y \leq x$, $z \leq x$, $y \neq 0$ ve $z \neq 0$ olacak şekilde x e bağlı olan $y, z \in H$ vardır. $x \neq 0$ olduğundan x in ilk sıfırdan farklı olduğu indisi r ile gösterilsin. Buna göre $y \wedge z = 0$ olduğundan $y_r = 0$ olduğunu varsayabiliriz. $E_y = \operatorname{supp} y$ şeklinde tanımlansın. $x^1 := E_y^C x$ ise $y \neq 0$ olduğundan $x > x^1$, Lemma 2.27 dan $x^1 \in H$ ve $x_r^1 = x_r$ olduğundan $x^1 \neq 0$ dır. Buna göre tümevarım ile sıfırdan farklı kesin olarak azalan bir $(x^n) \subset H$ dizisi tanımlanabilir. ℓ_p Dedekind tam olduğundan ℓ_p de $t = \inf(x^n)$ vardır. Ayrıca her n için $x_r^n = x_r \neq 0$ olduğundan $t_r = x_r$ bulunur. Sonuç 2.30 den $x^n \to t$ ve H kapalı olduğundan $t \in H^+ \setminus \{0\}$ dır. Sabit bir $x \in H^+ \setminus \{0\}$ için

$$M = \{t \in H : \exists (x^n) \subset H \ni 0 < x^{n+1} < x^n < x,\ x^n \to t \text{ ve } x_r^n = x_r\}$$

kümesi tanımlansın. Bu durumda $M \neq \emptyset$ dir. M, 0 ile alttan sınırlı olduğundan ℓ_p de $w = \inf M$ vardır. Ayrıca her $t \in M$ için $t_r = x_r$ olduğundan $w_r = x_r$ ve ayrıca $x > w > 0$ bulunur. Öte yandan açıktır ki $\alpha, \beta \in M$ için $\alpha \wedge \beta \in M$ dir. Dolayısıyla $-M$ kümesini bir indis kümesi alarak $x_{-\alpha} = \alpha$ şeklinde tanımlanmış üstten sınırlı ve azalan bir (x^α) ağı tanımlanabilir. Yukarıdaki Sonuçtan ve H nin kapalı olmasından $w \in H$ dir. Yukarıdaki nedenlerden dolayı w içinde sıfırdan farklı kesin olarak azalan yakınsak bir $(w^n) \subset H$ dizisi tanımlanabilir. Buna göre $w^n \to t_w$ olacak şekilde bir t_w vardır. Ayrıca $w_r = x_r$ olduğundan $w_r^n = x_r$ yani, $t_w \in M$ bulunur. Öte yandan $t_w < w$ olduğundan w nın seçimiyle çelişiriz. Dolayısıyla $H = \{0\}$ elde edilir. $\square$

Lemma 2.32. *H, ℓ_p nin bir vektör alt-örgüsü, x ve y, H nin herhangi iki atomu öyle ki $y \notin \operatorname{span}\{x\}$ ise $x \wedge y = 0$ dır.*

Kanıt. $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ ($y \notin \text{span}\{x\}$) H nin herhangi iki atomu olmak üzere $x_n \neq 0$ olduğuda $y_n = 0$ olduğu gösterilirse Lemma ispatlanmış olur. x, H nin bir atomu ve $x_k \neq 0$ olduğunda $y_k \neq 0$ olacak şekilde H nin bir y atomu ($y \notin \text{span}\{x\}$) ve en az bir k indisi olsun. Buna göre $x_k = y_k = 1$ olarak alabiliriz. Ayrıca $(x-y)^+ \leq x$ ve ℓ_p Arşimedyan olduğundan H Arşimedyan ve Lemma 2.23 dan $(x-y)^+ = \lambda x$ olacak şekilde bir λ reel sayısı vardır. Buna göre $x_k \neq 0$ ve $(x-y)_k^+ = 0$ olduğundan $\lambda = 0$ bulunur. Bu da $(x-y)^+ = 0$ demektir. Buradan $x < y$ bulunur. Yine Lemma 2.23 den $x = \beta y$ olacak şekilde bir β reel sayısı vardır. Buradan $y \in \text{span}\{x\}$ elde edilir. Bu da y nin seçimi ile çelişir. $\square$

Lemma 2.33. *H, ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) nin kapalı bir vektör alt-örgüsü ve $A \subset H^+$ boş kümeden farklı olsun. Eğer $|z| \wedge A = \{0\}$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $z \in H$ varsa H de A ya dik olan bir atom vardır.*

Kanıt. $S = \{z \in H : |z| \wedge A = \{0\}\} \neq \emptyset$ kümesi ℓ_p nin kapalı bir vektör alt-örgüsüdür. Gerçekten her $x, y \in S$ için $|x+y| \leq |x| + |y|$ olduğundan $|x+y| \wedge A = \{0\}$ olduğu kolayca görülür. Her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve her $x \in S$ için, eğer $|\lambda| \leq 1$ ise her $w \in A$ için $0 \leq |\lambda x| \wedge w = (|\lambda|\,|x|) \wedge w \leq |x| \wedge w = 0$ olduğundan $|\lambda x| \wedge A = \{0\}$ bulunur. Eğer $|\lambda| \geq 1$ ise her $w \in A$ için $0 \leq |\lambda x| \wedge w = (|\lambda|\,|x|) \wedge w = |\lambda|\,(|x| \wedge \frac{w}{|\lambda|}) \leq |\lambda|\,(|x| \wedge w) \leq |\lambda|\,0 = 0$ olduğundan $|\lambda x| \wedge A = \{0\}$ bulunur. Her $x, y \in S$ için $|x \vee y| \leq |x| \vee |y|$ olduğundan $|x \vee y| \wedge A = \{0\}$ olduğu kolayca görülür. Bunlara göre S bir vektör alt-örgüsüdür. $(x_n) \subset S$ ve $x \in \ell_p$ olmak üzere $x_n \to x$ olsun. H kapalı olduğunda $x \in H$ dir. Ayrıca $x_n \to x$ olduğundan $|x_n| \to |x|$ olur. Öte yandan her $w \in A$ için $|x_n| \wedge w \to |x| \wedge w$ olacağından $|x| \wedge w = 0$ yani, $|x| \wedge A = \{0\}$ bulunur. Buradan S nin kapalı bir vektör alt-örgü olduğu elde edilir. Dolayısıyla Lemma 2.31 den S bir x atomuna sahiptir. Açıktır ki bu atom A ya diktir. Şimdi x in H de bir atom olduğunu gösterelim. Varsayalım ki x, H de bir atom olmasın bu durumda $y \wedge z = 0$, $y \leq x$, $z \leq x$, $y \neq 0$ ve $z \neq 0$ olacak şekilde $y, z \in H$ vardır. Ayrıca $0 < y \leq x$, $0 < z \leq x$ olduğundan $|y| \wedge A = \{0\}$ ve $|z| \wedge A = \{0\}$ yani $y, z \in S$ dir. Bu da x in S de bir atom olmasıyla çelişir. Dolayısıyla x isteneni sağlar. $\square$

Lemma 2.34. *H, ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) nin kapalı bir vektör alt-örgüsü ve x, H nin bir atomu ise $E_x = \text{supp}\, x$ olmak üzere her $y \in H$ için $E_x y = \lambda x$ olacak şekilde bir λ sayısı vardır.*

Kanıt. En azından bir $y \in H^+$ için $E_x y = \lambda x$ olacak şekilde bir λ sayısının olmadığını kabul edelim. $E_x y$ nin ilk sıfırdan farklı olduğu indisi r ile gösterelim. Dolayısıyla $x_r \neq 0$ dır. Bu durumda $x_r = \beta(E_x y)_r$ eşitliği sağlayan bir β sayısı vardır. $h = x - \beta E_x y$ şeklinde tanımlasın. Bu durumda $h_r = 0$ ve Sonuç 2.28 dan $h \in H$ ve $\beta E_x y \geq 0$ olduğundan $h^+ \leq x$ dir. Dolayısıyla Sonuç 2.25 den $h^+ = \alpha x$ olacak şekilde bir α sayısı vardır. Öte yandan $h_r = 0$ olduğundan $h_r^+ = 0$ olur ve $x_r \neq 0$ olduğundan $\alpha = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $h < 0$ dır. Ayrıca $E_h \neq \emptyset$ ve $E_h^C \neq \emptyset$ dir. Şimdi $z = -h$ alınırsa $z \in H^+$ ve $E_z = E_h$ bulunur. Lemma 2.27 ve Sonuç 2.28 dan $E_z^C x, E_z x \in H$, $x \geq E_z x \neq 0$, $x \geq E_z^C x \neq 0$ ve $E_z x \wedge E_z^C x = 0$ elde edilir. Bu da x in H de bir atom olmasıyla çelişiriz. Dolayısıyla her $y \in H^+$ için $E_x y = \lambda x$ olacak şekilde bir λ sayısı vardır. Buradan her $y \in H$ için $E_x y = \lambda x$ olacak şekilde bir λ sayısı var olduğu elde edilir. □

Teorem 2.35. *H, ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ nin kapalı bir vektör alt-örgüsü ve A, H nin birbirine dik olan atomlarından oluşan maksimal bir alt kümesi ise* $\overline{\operatorname{span}\{A\}} = H$ *dır.*

Kanıt. Açıktır ki Lemma 2.32 dan dolayı A kümesi sayılabilirdir. $N = |A|$ (N, sonlu veya sonsuz) ve her $x \in A$ için $r_x = \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$ tanımlansın. Bu durumda Lemma 2.32 den dolayı her $x, y \in A$ için $x \neq y$ olduğunda $r_x \neq r_y$ dir. $r_1 = \min\{r_x : x \in A\}$, $r_2 = \min\{r_x \notin \{r_1\} : x \in A\}$ ve tümevarım ile $n \leq N$ (N sonlu değil ise $n < N$)için $r_n = \min\{r_x \notin \{r_1, r_2, .., r_{n-1}\} : x \in A\}$ şeklinde tanımlansın. Şimdi A da x^n ile ilk sıfırdan farklı indisi r_n olan eleman gösterilsin. Böylece A nın elemanları doğal sayıların bir alt-kümesiyle indislenmiş olur. $x^n \in A$ olmak üzere $E_n = \operatorname{supp} x^n$ olarak tanımlansın. Herhangi bir $x \in H^+$ seçilsin. Lemma 2.34 den $E_n x = \lambda_n x^n$ olacak şekilde bir λ_n sayısı vardır. Şimdi $x = \sum_{n=1}^{N} E_n x$ olduğunu gösterelim. Lemma 2.32 dan $n \neq m$ için $E_n \cap E_m = \emptyset$ olduğundan $k \leq N$ için $\sum_{i=1}^{k} E_i x \leq x$ dir. $x \in \ell_p$ olduğundan $\epsilon^p > 0$ için $\sum_{i=L}^{\infty} |x_i|^p < \epsilon^p$ olacak şekilde bir L sayısı vardır. Eğer $L \leq r_{N_1}$ olacak şekilde bir r_{N_1} var ise $N_1 \leq n < m$ koşulunu sağlayan her m, n için $\sum_{i=n}^{m} E_i x$ elemanın ilk $L-1$ terimi sıfır, $\sum_{i=1}^{m} E_i x \leq x$ ve $\sum_{i=L}^{\infty} |x_i|^p < \epsilon^p$ olduğundan $\| \sum_{i=n}^{m} E_i x \| < \epsilon$ dır. Yani, $z = \sum_{n=1}^{N} E_n x$ olacak şekilde bir $z \in H$ vardır. Şimdi $z = x$ olduğunu gösterelim. Açıktır ki $z \leq x$ dir. Eğer $x - z > 0$ olsaydı $(x - z) \wedge A = \{0\}$ olurdu. Çünkü herhangi bir $x^n \in A$ için $E_n(x - z) = 0$ dır. Dolayısıyla Lemma 2.33 i kullanarak A nın maksimal olmasıyla çelişiriz. Dolayısıyla $x = \sum_{n=1}^{N} E_n x$ bulunur. Eğer $L \leq r_{N_1}$ olacak şekilde bir r_{N_1} yok ise N sonludur. Dolayısıyla $z = \sum_{n=1}^{N} E_n x$

olacak şekilde bir $z \in H$ vardır. Yukarıdaki nedenlerden dolayı $z = x$ olduğunu gösterebilir. Sonuç olarak $x = \sum_{n=1}^{N} E_n x$ elde edilir. □

Sonuç 2.36. *H, ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ nin kapalı bir vektör alt-örgüsü olsun. Her $x \in H$ için $x_m = \alpha x_n$ olacak şekilde $\alpha \geq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$ vardır.Tersine bir $x \in \ell_p$, H nin elemanlarının sağladığı sınırlamaların her birini sağlıyor ise $x \in H$ dir. Yani, yukarıdaki sınırlamalar ile ℓ_p ın kapalı alt-örgüleri karakterize edilebilir.*

Kanıt. Teorem 2.35 den kolayca görülür. □

Sonuç 2.37. *H, ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ nin kapalı bir öz vektör alt-örgüsü olsun. Bu durumda her $x \in H$ için $x_m = \alpha x_n$ olacak şekilde $\alpha \geq 0$ ve birbirinden farklı $m, n \in \mathbb{N}$ vardır.*

Sonuç 2.38. *H, $\mathbb{R}^n$ in kapalı bir öz vektör alt-örgüsü olsun. Bu durumda her $x \in H$ için $x_m = \alpha x_n$ olacak şekilde $\alpha \geq 0$ ve birbirinden farklı $m, n \in \mathbb{N}$ vardır.*

Önerme 2.39. *K sonlu bir kompakt Hausdorff uzayı ise $C(K)$ uzayı sonlu boyutludur.*

Kanıt. K kümesi sonlu ve üzerindeki topoloji Hausdorff olduğundan K, ayrık topolojiye sahip olur; Bu ise, K üzerinde tanımlı reel değerli tüm fonksiyonların ailesi $F(K, \mathbb{R})$ ile gösterilirse, $C(K) = F(K, \mathbb{R})$ olması demektir. Şimdi, $k \in K$ olmak üzere, $\delta_k \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\delta_k(x) = \begin{cases} 1, & x = k \\ 0, & x \neq k \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda δ_k lar lineer bağımsız ve her $f \in F(K, \mathbb{R})$ fonksiyonu

$$f = \sum_{k \in K} f(k)\, \delta_k$$

olarak yazılabileceğinden, $\{\delta_k : k \in K\}$ sonlu ailesi $F(K, \mathbb{R})$ vektör uzayı için bir taban, dolayısıyla $C(K)$ sonlu boyutludur. □

Önerme 2.40. *K bir kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere A, K da bir açık küme ve $p \in A$, K nın izole olmayan bir noktası ise $C(K)$ da A üzerinde sabit olmayan bir fonksiyon vardır.*

Kanıt. $p \in A$ izole olmayan bir nokta ve A açık olduğundan p den farklı bir $s \in A$ vardır. K bir Hausdorff uzayı olduğundan A da bir Hausdorff uzayıdır. Buna göre $U_p \cap U_s = \emptyset$ olacak şekilde A da U_p ve U_s açık komşulukları vardır. A açık küme olduğundan U_p ve U_s de K da açık kümedir. K bir kompakt Hausdorff uzayı olduğundan bir T_4 uzayıdır. Dolayısıyla tam regülerdir. U_s^c kapalı ve $s \notin U_s^c$ olduğundan $f(U_s^c) = 1$ ve $f(s) = 0$ olacak şekilde bir $f \in C(K)$ vardır. Öte yandan $p \in U_s^c$ olduğundan $f(s) \neq f(p)$ olur. Dolayısıyla f istenenleri sağlar. $\square$

Bölüm 3

Değişmez alt-örgüler

Banach uzayları üzerinde tanımlı ve sınırlı operatörlerin değişmez alt-uzaylar teorisinde, neredeyse aşikar olan sonuçlar vardır. Açıktır ki ayrılabilir olmayan bir Banach uzayı üzerinde tanımlı herhangi bir sınırlı operatör aşikar olmayan kapalı değişmez alt-uzaya sahiptir. Eğer $x \neq 0$ ise $\{T^n x : n = 0, 1, 2, ...\}$ nin üretiği alt-uzayın kapanışı, T-değişmez ve ayrılabilir olacağından istenen aşikar olmayan değişmez alt-uzay olur. Bu düşünce tarzının herhangi bir pozitif operatörün değişmez alt-örgüleri içinde doğru olduğunu göstermek, küçük bir ispat gerek duyar. Eğer A bir X vektör örgüsünün alt-kümesi ise $A^{\wedge}$ ile A daki bütün sonlu infimumlar ve $A^{\vee}$ ile A daki bütün sonlu supremumların kümesi olduğunu hatırlayalım.

Önerme 3.1. *X bir Banach örgüsü ise X in sayılabilir herhangi bir alt kümesi tarafından üretilen vektör alt-örgüsü ayrılabilirdir.*

Kanıt. A, X in sayılabilir herhangi bir alt-kümesi ve $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{A\}$ da A tarafından üretilen $\mathbb{Q}$-vektör alt-uzayı olsun. Buna göre $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{A\}$ sayılabilirdir. Önerme 2.6 dan $\left(\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{A\}\right)^{\vee\wedge}$ kümesi bir $\mathbb{Q}$-vektör alt-örgüsü ve ayrıca, $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{A\}$ sayılabilir olduğundan $\left(\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{A\}\right)^{\vee\wedge}$ da sayılabilirdir. $\left(\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{A\}\right)^{\vee\wedge}$ nın norm kapanışı, X in ayrılabilir bir $\mathbb{R}$-vektör örgüsüdür. Çünkü $x, y \in \overline{(\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{A\})^{\vee\wedge}}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$, ise $x_n \to x$, $y_n \to y$ ve $\alpha_n \to \alpha$ olacak şekilde $(x_n), (y_n) \subset \left(\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{A\}\right)^{\vee\wedge}$ ve $(\alpha_n) \subset \mathbb{Q}$ dizileri vardır. Bunlara göre $x_n + y_n \to x + y$, $\alpha_n x_n \to \alpha x$ ve $x_n \vee y_n \to x \vee y$ olduğundan $\overline{(\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{A\})^{\vee\wedge}}$, X in ayrılabilir $\mathbb{R}$-vektör örgüsüdür. Öte yandan $A \subset \overline{(\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{A\})^{\vee\wedge}}$ olduğudan A tarafından üretilen vektör alt-örgüsü ayrılabilirdir. $\square$

Sonuç 3.2. *X bir Banach örgüsü, T, X üzerinde tanımlı bir pozitif operatör ve*

$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, X in herhangi bir alt-ailesi ise bu aile tarafından üretilen en küçük T-değişmez vektör örgüsü ayrılabilirdir.

Kanıt. $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ tarafından üretilen vektör örgüsü H_1 olsun. Önerme 3.1 den H_1 ayrılabilirdir. Eğer H_n tanımlamış ve ayrılabilir ise H_n de sayılabilir yoğun bir A_n alt-kümesi vardır. H_{n+1}, $A_n \cup T(A_n)$ tarafından üretilen X in vektör alt-örgüsünün kapanışı olarak tanımlayalım. Yine Önerme 3.1 ve ayrılabilir bir kümenin kapanışınında ayrılabilir olmasından H_{n+1} ayrılabilirdir. Herhangi bir Banach örgüsü üzerinde tanımlı her pozitif operatörün sürekli, $T(A_n) \subset H_{n+1}$ ve H_{n+1} in kapalı olmasından $T(H_n) \subset H_{n+1}$ bulunur. $\cup_{n=1}^{\infty} H_n$ kümesi X in ayrılabilir T-değişmez vektör alt-örgüsüdür. Buradan istenen elde edilir.

□

Sonuç 3.3. *X ayrılabilir olmayan bir Banach örgüsü ve T, X üzerinde tanımlı bir pozitif operatör ise T, aşikar olmayan kapalı değişmez alt-örgüye sahiptir.*

Kanıt. Sıfırdan farklı herhangi bir $x \in X^+$ seçelim. Bir önceki sonuçdan x i içeren en küçük T-değişmez alt-örgü ayrılabilir ve bu alt-örgünün norm kapanışı x i içeren en küçük T-değişmez kapalı alt-örgü olur. X ayrılabilir olmadığından bu kapalı alt-örgü X in öz alt-kümesidir.

□

Bundan sonra kapalı olması gerekmeyen alt-örgüler ile ilgileneceğiz. Lineer durumda bir X Banach uzayı üzerinde tanımlı her lineer operatör kapalı olması gerekmeyen, aşikar olmayan lineer bir alt-uzaya sahiptir. Çünkü sıfırdan farklı bir $x \in X$ alındığında span $\{T^n x : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ lineer alt-uzayı sayılabilir Hamel bazına sahip olacaktır. Ayrıca Baire kategori teoreminden sonsuz boyutlu Banach uzayları sayılabilir Hamel bazına sahip olamayacağından, span $\{T^n x : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ isteneni sağlar. Aslında Schaefer [12] bunun sonsuz boyutlu herhangi bir vektör uzayı üzerindeki lineer operatörler için doğru olduğunu gösterdi. Ne Schaefer ın argümanları, nede yukarıdaki özet değişmez alt-örgüler ile ilgilenildiğinde kullanılamaz. Örneğin, bir vektör örgüsünün iki elemanı tarafından üretilen en küçük alt-örgü sayılabilir Hamel bazına sahip olması gerekmez. Örneğin $C[0,1]$ de $\mathbf{1}$, sabit fonksiyonu ve $\boldsymbol{x}$, birim fonksiyonu ($\boldsymbol{x}(t) = t$) tarafından üretilen vektör altörgüsü [0,1] üzerindeki bütün sürekli ve parçalı lineer fonksiyonlardan oluşur. Bu vektör alt-örgüsü $\{x \wedge \lambda \mathbf{1} : \lambda \in (0,1)\}$ ailesini içerir ve kolayca görülür ki bu aile lineer bağımsız ve sayılabilir değildir.

Buna rağmen, herhangi bir Banach örgüsünde sayılabilir bir küme tarafından üretilen en küçük vektör alt-örgüsünün öz alt-örgü olduğunu göstermek mümkündür. Tabiki bunu bir $x, Tx, T^2x, ...$ dizisine uygulamaya kalkışırsak genelde değişmez alt-örgü elde etmekte başarısız oluruz. Eğer T bir örgü homomorfizması ise bu teknik başarılı olur ve aslında bu teknik böyle operatörlerin sonlu bir ailesi içinde geçerlidir.

Önerme 3.4. *K bir sonsuz kompakt Hausdorff uzayı ve $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, $C(K)$ da sayılabilir bir aile ise bu aile tarafından üretilen vektör alt-örgüsü $C(K)$ nın öz alt-örgüsüdür.*

Kanıt. İzole nokta olmayan bir $p \in K$ ve her bir f_n için, $\mathbf{1}$, sabit bir fonksiyonunu göstermek üzere, $f_n = g_n + c_n\mathbf{1}$ ve $g_n(p) = 0$ eşitliklerini sağlayan $c_n \in \mathbb{R}$ ve $g_n \in C(K)$ seçilsin. $U = \{k \in K : \exists n \in \mathbb{N} \ni g_n(k) \neq 0\}$ olsun. Eğer $p \notin \overline{U}$ ise bütün g_n fonksiyonları boştan farklı $K \backslash \overline{U}$ açık kümesi üzerinde sıfırdır. $K \backslash \overline{U}$ üzerindeki bütün sabit fonksiyonlardan oluşan H alt örgüsü her bir f_n i içerir ve Önerme 2.40 den öz vektör alt-örgüsü olduğu elde edilir.

$p \in \overline{U}$ olduğu durumda

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|}{2^n \|g_n\|_\infty}$$

toplamı tanımlansın (bir n için $g_n = 0$ ise g_n terimi ihmal ediliyor. Eğer g_n lerin hepsi sıfır ise f_n ler sabit fonksiyon olacağından sonuç açıktır) ve J ile $C(K)$ da e tarafından üretilen esas ideali gösterelim. Yani, $J = \{x \in C(K) : \exists \lambda \geq 0 \ni |x| \leq \lambda e\}$ ayrıca, bu ideal $I = \{f \in C(K) : f(p) = 0\}$ ın tümü değildir. Bu görmek için $\sqrt{e}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Kolayca görülür ki $\sqrt{e} \in I$ dır. $U = \{k \in K : e(k) > 0\}$ iken p ye yakınsayan bir $(u_\gamma) \subset U$ ağı bulmak mümkündür ve $e(u_\gamma) \to 0$ dır. Eğer $\sqrt{e} \in J$ ise $\sqrt{e} \leq \lambda e$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ vardır. Bu nedenle $\sqrt{e(u_\gamma)} \leq \lambda e(u_\gamma)$ buradan $e(u_\gamma) \geq \lambda^{-2} > 0$ olacağından $e(u_\gamma) \to 0$ ile çelişiriz.

$C(K)$ da $M = span\,(J \cup \{\mathbf{1}\})$ olarak tanımlansın. M, $C(K)$ nın bir alt-örgüsüdür. Gerçekten $j \in J$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ ise $|j + \alpha\mathbf{1}|$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Genelliği bozmaksızın $\alpha \geq 0$ farz edebiliriz. Eğer $j(k) \geq -\alpha$ ise $|j + \alpha\mathbf{1}|(k) = j(k) + \alpha$ bu nedenle $(|j + \alpha\mathbf{1}| - \alpha\mathbf{1})(k) = j(k)$. Diğer taraftan $j(k) < -\alpha$ ise $|j + \alpha\mathbf{1}|(k) = -j(k) - \alpha$ bu nedenle $(|j + \alpha\mathbf{1}| - \alpha\mathbf{1})(k) = -j(k) - 2\alpha$ ve buradan $|(|j + \alpha\mathbf{1}| - \alpha\mathbf{1})(k)| \leq$

$|\, j\,(k)| + 2\alpha \leq 3\,|\, j\,(k)|$ bulunur. Buradan $||\, j+\alpha\mathbf{1}| - \alpha\mathbf{1}| \leq 3\,|\, j|$ böylece $|\, j+\alpha\mathbf{1}| - \alpha\mathbf{1} \in J$ yani, $|\, j+\alpha\mathbf{1}| \in M$ dir. $M \cap I = J \neq I$, $I \nsubseteq M$ ve buradan $M \neq C\,(K)$ dır. Her bir $g_n \in J$ iken $f_n \in M$ dir. Buradan M, $C(K)$ nın her bir f_n i içeren öz alt-örgüsüdür. Böylece f_n ler tarafından üretilen vektör alt-örgüsü, $C(K)$ nın öz alt-örgüsü olur.

□

Sonuç 3.5. *X sonsuz boyutlu bir Banach örgüsü ve $\{f_n : n \in N\}$, X in alt-kümesi ise bu küme tarafından üretilen vektör alt-örgüsü X in öz alt-örgüsüdür.*

Kanıt. Her n için $f_n \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n|}{2^n \,\|f_n\|}$$

olarak tanımlansın. X de e tarafından üretilen esas ideal, her bir f_n i ve dolayısıyla onların üretiği alt-örgüyü de içerir. Eğer ideal sonlu boyutlu ise ispat tamamlanmıştır. Eğer ideal sonlu boyutlu değilse ideal, en az bir K kompakt Hausdorff uzayı için $C\,(K)$ uzayı ile özdeşleştirilebilir. Önerme 2.39 den K sonsuz ve buna göre Önerme 3.4 den üretilen alt-örgünün öz alt-örgü olduğu bulunur.

□

Teorem 3.6. *X boyutu birden büyük bir Banach örgüsü ve T_k $(1 \leq k \leq m)$ larda X üzerinde tanımlı örgü homomorfileri olsun. X de her bir T_k ve bu nedenle T_k ların üretiği cebirdeki her operatör altında değişmez kalan aşikar olmayan, kapalı olması gerekmeyen, bir H alt-örgüsü vardır.*

Kanıt. $T = \sum_{k=1}^{m} T_k$ şeklinde tanımlasın ve sıfırdan farklı bir $x \in X^+$ seçilsin. Buradan

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x}{2^n \,\|T\|^n} \in X^+$$

toplamı oluşturulsun (sıfır olan terimler ihmal ediliyor). X de y tarafından üretilen esas ideal J ile gösterilsin.

$$Ty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{n+1} x}{2^n \,\|T\|^n} = 2\,\|T\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{n+1} x}{2^{n+1} \,\|T\|^{n+1}} = 2\,\|T\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n x}{2^n \,\|T\|^n} \leq 2\,\|T\|\, y$$

ve T nin pozitifliğinden J, T-değişmez ve dolayısıyla T_k-değişmezdir. Eğer $J \neq X$ ise ispatımız tamamlanmıştır.

Eğer $J = X$ ise y, X için bir sıra birimidir. Dolayısıyla Kakutani gösterilim teoreminden X, K kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere bir $C(K)$ uzayı ile özdeşleştirilebilir. Eğer K sonlu elemenlı ise Önerme 2.39 den X sonlu boyutlu olur ve bu nedenle T pozitif bir x_0 özvektörüne sahip ve buna karşılık geldiği özdeğerde T nin spektral yarıçapı olan $r(T)$ dir [1, Teorem 8.11]. Buna göre *span* $\{x_0\}$, X in bir değişmez alt-örgüsü ve X in boyutu birden büyük olduğundan öz alt-örgüsü olur.

K sonsuz küme olduğu durumda, Π ile T_k operatörlerinin sonlu çarpımlarından oluşan aileyi gösterelim. Dolayısıyla Π sayılabilirdir. Sıfırdan farklı bir $x \in X^+$ seçilsin ve $A = span\{\pi x : \pi \in \Pi\}$ olsun. Önerme 3.4 e göre $\{\pi x : \pi \in \Pi\}$ kümesi tarafından üretilen vektör örgüsü H, X e eşit olamaz. H, $1 \leq k \leq m$ için T_k-değişmezdir. Gerçekten $a \in A$ ise $a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \pi_j x$ olmak üzere $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ve $\pi_j \in \Pi \, (1 \leq j \leq n)$ vardır. Her bir j ve k için $T_k \pi_j \in \Pi$ olduğundan $T_k(a) \in A$ yani, $T_k\,(A) \subset A$ dır.Eğer $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ ise her bir T_k örgü homomorfisi olduğundan $T_k\,(a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_n) = T_k\,(a_1) \vee T_k\,(a_2) \vee ... \vee T_k\,(a_n) \in (T_k\,(A))^{\vee} \subset A^{\vee}$ yani, $T_k\,(A^{\vee}) \subset A^{\vee}$ olur. Benzer şekilde $T_k\,(A^{\vee\wedge}) \subset A^{\vee\wedge}$ elde edilir. Öte yandan $H = A^{\vee\wedge}$ olduğundan H, T_k-değişmezdir. Kolayca görülür ki H, T_k lar tarafından üretilen cebirdeki her operatör altında değişmezdir.

$\square$

Bölüm 4

Bazı ayrık örnekler

Bu bölüme, sonsuz boyutlu bir Banach örgüsü üzerinde tanımlı, pozitif özvektöre ve aşikar olmayan kapalı değişmez ideale sahip olmayıp aşikar olmayan kapalı değişmez alt-örgüye sahip olan bir pozitif operatör örneği ile başlayacağız. Bu en azından aşikar olmayan kapalı değişmez alt-örgülerin var olmasının beklenenden biraz daha yüksek şansının olduğunu gösterir. Sonuç 2.19 ve Sonuç 2.37 den $\ell_p(\mathbb{Z})$ $(1 \leq p < \infty)$ veya $c_0(\mathbb{Z})$ nin kapalı alt-örgüleri, en az bir i için $m_i, n_i \in \mathbb{Z}$ ve $\alpha_i \geq 0$ olmak üzere $x_{m_i} = \alpha_i x_{n_i}$ formunda sınırlamaların bir ailesi tarafından tanımlandığını hatırlatalım. Örneklere başlamadan önce bazı lemmalar vereceğiz.

Lemma 4.1. *H, $\ell_p(\mathbb{Z})$ $(1 \leq p < \infty)$ veya $c_0(\mathbb{Z})$ nin kapalı bir alt-örgüsü öyle ki H nin üzerindeki tek sınırlama, $m, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x_m = x_n$ dir. p, q, r, s farklı tam sayılar ve her $x \in H$ için $x_p + x_q = x_r + x_s$ ise aşağıdaki durumlardan birisi sağlanır;*

(1) $x_p = x_q = x_r = x_s$

(2) $x_p = x_r$ *ve* $x_q = x_s$

(3) $x_p = x_s$ *ve* $x_q = x_r$

Kanıt. $p : \ell_p(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}^4$; $p(x) = (x_p, x_q, x_r, x_s)$ şeklinde tanımlanmış bir örgü homomorfisi olsun. $p(H)$, $\mathbb{R}^4$ ün vektör alt-örgüsü ve onun elemanları üzerinde mümkün olan tek sınırlama $x_n = x_m$ formundadır. Ayrıca H de en azından böyle bir sınırlama olmalıdır. Aksi taktirde $x = (1, 2, 5, -2) \in H$ (1+2=5-2) olurdu, fakat $|x| = (1, 2, 5, 2) \notin H$ $(1 + 2 \neq 5 + 2)$ olduğundan en azından böyle bir sınırlama olmalıdır. $x_p = x_q$ ise $2x_p = x_r + x_s$ olur. Bu $\mathbb{R}^4$ ün bir alt-örgüsünü tanımlamaz. Çünkü bu $\mathbb{R}^4$ ün bir alt-örgüsünü tanımlasaydı, $x = (-1, -1, 3, -5) \in H$ (-1-1=3-5) olurdu, fakat

$1+1\neq 3+5$ olduğundan $|x|=(1,1,3,5)\notin H$. Bu nedenle H üzerinde ayrıca bir sınırlama olmalıdır. Eğer $x_p=x_r$ ise $x_p=x_s$ olacağından (1) koşulu sağlanır. Eğer $x_r=x_s$ ise $x_p=x_s$ olacağından yine (1) koşulu sağlanır.

Eğer $x_p=x_r$ formunda bir sınırlama var ise $x_q=x_s$ olur ki (2) durumu sağlanır. Benzer yolla (3) durumununda sağlandığı görülür. □

Lemma 4.2. *$x\in\ell_p(\mathbb{Z})$ $(1\leq p<\infty)$ veya $c_0(\mathbb{Z})$ ve $m>n$ olmak üzere her $k\in\mathbb{Z}$ için $x_{m+k}=x_{n+k}$ olacak şekilde m,n tam sayıları var ise $x=0$ dır.*

Kanıt. $x_n,x_{n+1},...,x_{m-1}$ değerleri devamlı tekrar edeceğinden bunların hepsi sıfır değilse x sonlu bir norma sahip olamacağından $x=0$ olmalıdır. □

Lemma 4.3. *T, $\ell_p(\mathbb{Z})$ veya $c_0(\mathbb{Z})$ üzerinde $(Tx)_k=x_{k-1}+x_{k+1}$ şeklinde tanımlansın ve H de T-değişmez kapalı alt-örgü öyle ki her $x\in H$ için $m>n$ olmak üzere $m,n\in\mathbb{Z}$ için $x_m=x_n$ ve $x_{m+1}=x_{n+1}$ ise $H=\{0\}$ dir.*

Kanıt. Her $x\in H$ ve $0\leq j\leq k$ için $x_{m+j}=x_{n+j}$ eşitliği sağlanır. Gerçekten $k=0$ ve $k=1$ için bu önermenin doğru olduğunu biliyoruz. Önerme k için doğru olsun. Ayrıca $Tx\in H$ olduğundan $(Tx)_{m+k}=(Tx)_{n+k}$ olur ve buna göre $x_{m+k-1}+x_{m+k+1}=x_{n+k-1}+x_{n+k+1}$ eşitliği elde edilir. Öte yandan $x_{m+k-1}=x_{n+k-1}$ olduğundan $x_{m+k+1}=x_{n+k+1}$ bulunur. Buna göre her $k\in\mathbb{N}$ için $x_{m+k}=x_{n+k}$ eşitliği sağlanır. Benzer yöntemle negatif k tam sayıları içinde $x_{m+k}=x_{n+k}$ eşitliği gösterilebilir. Dolayısıyla Lemma 4.2 den istenen elde edilir. □

Örnek 4.4. *$X=\ell_p(\mathbb{Z})$ $(1\leq p<\infty)$ veya $c_0(\mathbb{Z})$ ve T, X üzerinde $(Tx)_n=x_{n-1}+x_{n+1}$ şeklinde tanımlanmış ise*

(1) *T pozitif özvektöre sahip değildir,*

(2) *T aşikar olmayan kapalı değişmez ideale sahip değildir,*

(3) *X in T-değişmez kapalı alt-örgüleri $q\in\mathbb{Z}$ yada $q-\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}$ için*

$$H_q=\{x\in X: m+n=2q \quad ise \quad x_m=x_n\}$$

alt-örgüleridir.

Kanıt. $S(x_n)=(x_{n+1})$ olsun. Buna göre S bildiğimiz sol öteleme (shift) operatörüdür. Eğer $Sx=\lambda x$ ise $x_{n+1}=\lambda x_n$ den $\lambda\neq 0$ ise $|x_n|\nrightarrow 0$ olduğu ve $\lambda=0$ ise $x=0$

bulunur. Bu nedenle S bir özvektöre sahip değildir. Eğer $Tx = \lambda x$ ise $STx = \lambda Sx$ ve ayrıca $T = S + S^{-1}$ olduğundan $S^2x - \lambda Sx + x = 0$ bulunur. Buradan $\alpha_1 = \frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2}$ ve $\alpha_2 = \frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}$ olmak üzere $(S - \alpha_1)(S - \alpha_2)x = 0$ şeklinde yazılabilir. Buna göre ya x, S için bir özvektör yada $(S - \alpha_2)x$, S için bir özvektör bu durumlar gerçeklenemeyeceğinden T bir özvektöre sahip değildir.

Eğer J, X de aşikar olmayan kapalı T-değişmez ideal ise her $x \in J$ için $x_p = 0$ olacak şekilde en az bir $p \in \mathbb{Z}$ vardır. Gerçekten her $x \in J$ için $x_m = \alpha x_n$ olacak şekilde $\alpha \geq 0$ ve $m, n \in \mathbb{Z}$ vardır. Şimdi $k \neq n$ için $y_k = x_k$ ve $y_n = \frac{1}{2}x_n$ şeklinde bir $y \in X$ tanımlanırsa ideal tanımından kolayca $y \in J$ olduğu görülür. Buradan $y_m = \alpha y_n$ olacağından $\frac{\alpha}{2}x_n = 0$ bulunur. Buradan ya $\alpha = 0$ yada $x_n = 0$ olur. Eğer $\alpha = 0$ ise $p = m$, $\alpha \neq 0$ ise $p = n$ alınırsa istenen sağlanır. $A = \{n \in \mathbb{Z} : \forall x \in J, \quad x_n = 0\}$ şeklinde tanımlansın. Böylece $p \in A$ olur. $n \in A$ ve $x \in J^+$ olsun. Bu durumda $Tx \in J$ olduğundan $(Tx)_n = x_{n-1} + x_{n+1} = 0$ olur. Ayrıca $x_{n-1}, x_{n+1} \geq 0$ olduğundan $x_{n-1} = x_{n+1} = 0$ bulunur. Dolayısıyla $x = x^+ - x^-$ olduğundan her $x \in J$ için de $x_{n-1} = x_{n+1} = 0$ bulunur. Böylece $n+1, n-1 \in A$ olur. Tümevarım ile $A = \mathbb{Z}$ olacağından $J = \{0\}$ bulunur.

H_q kapalı alt-örgülerinin her biri T-değişmezdir. Gerçekten $x \in H_q$, $m > n$ ve $m + n = 2q$ ise $(m+1) + (n-1) = (m-1) + (n+1) = 2q$ olduğundan $(Tx)_m = x_{m-1} + x_{m+1} = x_{n-1} + x_{n+1} = (Tx)_n$ olur, buradan $Tx \in H_q$ bulunur.

H, X in bir aşikar olmayan kapalı T-değişmez alt-örgüsü olsun. Bu nedenle her $x \in H$ için $x_m = \alpha x_n$ olacak şekilde $m > n$ ve $\alpha > 0$ sayıları vardır (Sınırlamalardaki en az bir α nın 0 a eşit olması durumunda yukarıdaki neden dolayı $H = \{0\}$ olacağından $\alpha \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz). Her $x \in H$ ve her $k \geq 0$ tam sayısı için

$$\sum_{j=m-k}^{m+k} x_j = \alpha \sum_{j=n-k}^{n+k} x_j$$

eşitliği sağlanır. Gerçekten $k = 0$ için ispat açıktır. Bunun $k > 0$ için doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda $\sum_{j=m-k}^{m+k} x_j = \alpha \sum_{j=n-k}^{n+k} x_j$ ve $\sum_{j=m-k+1}^{m+k-1} x_j = \alpha \sum_{j=n-k+1}^{n+k-1} x_j$ nin taraf tarafa çıkarılmasıyla $x_{m-k} + x_{m+k} = \alpha(x_{n-k} + x_{n+k})$ bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\sum_{j=m-k}^{m+k}(Tx)_j &= \sum_{j=m-k}^{m+k} x_{j-1}+x_{j+1} = \sum_{j=m-k-1}^{m+k-1} x_j + \sum_{j=m-k+1}^{m+k+1} x_j \\ &= x_{m-k-1}+x_{m+k+1}-(x_{m-k}+x_{m+k})+2\sum_{j=m-k}^{m+k} x_j,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=n-k}^{n+k}(Tx)_j &= \sum_{j=n-k}^{n+k} x_{j-1}+x_{j+1} = \sum_{j=n-k-1}^{n+k-1} x_j + \sum_{j=n-k+1}^{n+k+1} x_j \\ &= x_{n-k-1}+x_{n+k+1}-(x_{n-k}+x_{n+k})+2\sum_{j=n-k}^{n+k} x_j\end{aligned}$$

ve

$$\sum_{j=m-k}^{m+k}(Tx)_j = \alpha \sum_{j=n-k}^{n+k}(Tx)_j$$

olduğundan $x_{m-k-1}+x_{m+k+1}=\alpha\left(x_{n-k-1}+x_{n+k+1}\right)$ olacağından

$$\sum_{j=m-k-1}^{m+k+1} x_j = \alpha \sum_{j=n-k-1}^{n+k+1} x_j$$

elde edilir.

Varsayalım ki $n<m$ ve $n-k<m-k<n+k<m+k$ eşitsizliğini sağlayan yeteri kadar büyük k seçilsin. $A_k=\sum_{j=m-k}^{n+k} x_j$, $B_k=\sum_{j=n+k+1}^{m+k} x_j$ ve $C_k=\sum_{j=n-k}^{m-k-1} x_j$ tanımlansın. Bunlara göre $\sum_{j=m-k}^{m+k} x_j = A_k+B_k$ ve $\sum_{j=n-k}^{n+k} x_j = A_k+C_k$ olur. Dolayısıyla $A_k+B_k=\alpha\left(A_k+C_k\right)$ eşitliği sağlanır. $x\in \ell_p(\mathbb{Z})$ olduğu durumda her $\eta>0$ için belirli bir $n_1\in\mathbb{Z}$ vardır öyle ki $|j|>n_1$ için $|x_j|^p<\eta$ ve ayrıca eğer $x\in\ c_0(\mathbb{Z})$ ise en az bir $n_2\in\mathbb{Z}$ vardır öyle ki her $|j|>n_2$ için $|x_j|<\eta$ dir. Her iki durumda da $\epsilon>0$ verildiğinde en az bir $n_0\in\mathbb{Z}$ vardır öyle ki her $|n|>n_0$ için $|x_n|<\epsilon$ dur. Eğer k yeteri kadar büyük ise B_k, her birinin modülü en fazla ϵ olan $m-n$ terimden oluşur. Eğer ϵ yeteri kadar küçük seçilirse $|B_k|$ nın keyfi küçük olmasını sağlayabiliriz. Buradan $B_k\to 0, k\to\infty$ ve benzer şekilde $C_k\to 0,\ k\to\infty$ bulunur. Bu nedenle $A_k(1-\alpha)=\alpha C_k-B_k\to 0,\ k\to\infty$ dir. Eğer $x\in H^+$ alınırsa $A_k\uparrow,\ k\to\infty$ böylece $\alpha\neq 1$ için $|A_k(1-\alpha)|\uparrow 0$ dolayısıyla $A_k=0$ dir. Bu durumda $x=0$ böylece $H^+=\{0\}$ ve bu nedenle $H=\{0\}$ bulunur.

$$Q=\{(m,n): m>n\ ve\ \forall x\in H,\ x_m=x_n\}$$

İddia ediyoruz ki bir $(m,n)\in Q$ vardır öyle ki $n+2\geq m\geq n$ dir. Çünkü, açıktır ki gibi $m-n$ farklarının bir en küçüğü vardır. Bu en küçük farkı (m,n) ile gösterelim ve $(m, n) > 2$ olsun. Bu durumda $m - 1 > n + 1$ dir. Her $x \in H$ için $(Tx)_m = (Tx)_n$ olduğundan $x_{m-1} + x_{m+1} = x_{n-1} + x_{n+1}$ dir. Lemma 4.1 den üç olası durum vardır. İlk durum $x_{m-1} = x_{m+1} = x_{n-1} = x_{n+1}$ buradan $(m - 1, n + 1) \in Q$ olduğu çıkar bu da (m, n) nin seçimiyle çelişir. İkinci durumda $x_{m+1} = x_{n-1}$ ve $x_{m-1} = x_{n+1}$ buradan tekrar $(m - 1, n + 1) \in Q$ olur ve yine (m, n) nin seçimiyle çelişir. En son durumda $x_{m+1} = x_{n+1}$ ve $x_{m-1} = x_{n-1}$ dir. Ayrıca $x_m = x_n$ olduğundan Lemma 4.3 den $H = \{0\}$ bulunur. Bu da H nin aşikar olmamasıyla çelişir.

Eğer $m - n$ minimal olacak şekilde bir $(m, n) \in Q$ çifti seçilirse iki durum vardır. İlk durumda $m - n = 2$ olsun. Buna göre $q = (m + n)/2$ alınarak $x_{q-1} = x_{q+1}$ bulunur. İddia ediyoruz ki her $k \in \mathbb{N}$ için $x_{q-k} = x_{q+k}$ dır. $x \in H$ için $1 \leq j \leq k$ olmak üzere $x_{q-j} = x_{q+j}$ ifadesini göz önüne alalım $k = 1$ için ifadenin doğruluğu açıktır. Eğer $k \in \mathbb{N}$ için bu ifadenin doğruluğu varsayılırsa $Tx \in H$ olduğundan

$$x_{q-k-1} + x_{q-k+1} = (Tx)_{q-k} = (Tx)_{q+k} = x_{q+k-1} + x_{q+k+1}$$

ve $x_{q-k+1} = x_{q+k-1}$ olduğundan $x_{q-k-1} = x_{q+k+1}$ bulunur. Bu da ifadenin $k + 1$ için doğru olduğunu gösterir. Buna göre $H \subset H_q$ dir. İkinci durumda $m - n = 1$ olsun. Dolayısıyla $x_{m+1} = x_m$, ve $m - n = 2$ durumundaki benzer argümanlarla her $x \in H$ için $x_{m-k} = x_{m+1+k}$ olduğu gösterilebilir. Buradan da $H \subset H_{m+\frac{1}{2}}$ bulunur. Geriye H nin elemanları üzerinde başka sınırlamaların olmadığını göstermek kalıyor. Bütün sınırlamaların $x_m = x_n$ formunda olduğunu biliyoruz. İlk olarak $H_{q+\frac{1}{2}}$ olduğu durum ile ilgileneceğiz. Genelliği bozmaksızın $n > q + 1$ alınırsa $x_q = x_{q+1} = x_n$ formunda sınırlamalara sahip oluruz. $Tx \in H$ olduğuna göre

$$x_{q-1} + x_{q+1} = (Tx)_q = (Tx)_n = x_{n-1} + x_{n+1}$$

olur. Eğer $n > q + 2$ ise Lemma 4.1 de verilen durumlar göz önüne alınabilir. Eğer $x_{q-1} = x_{q+1} = x_{n-1} = x_{n+1}$ ise $x_q = x_{q+1} = x_n = x_{n+1}$ olacağından Lemma 4.3 kullanarak çelişki elde ederiz. Eğer $x_{q-1} = x_{n-1}$ ve $x_{q+1} = x_{n+1}$ ise $x_n = x_q$ olduğundan tekrar Lemma 4.3 ü kullanarak çelişki elde ederiz. Eğer $x_{q-1} = x_{n+1}$ ve $x_{q+1} = x_{n-1}$ ise $x_n = x_q = x_{q+1}$ olduğundan $x_q = x_{q+1} = x_n = x_{n-1}$ bulunur ki yine Lemma 4.3 kullanarak çelişki elde ederiz. Eğer $n = q + 2$ ise $x \in H$ için $x_q = x_{q+1} = x_{q+2}$ elde edilir ve tümevarımla x in sabit vektör olduğu bulunur ki bu da $x = 0$ olmadıkça imkansızdır. Dolayısıyla $H = H_{q+\frac{1}{2}}$ elde edilir.

$H \subset H_q$ durumunda, her $x \in H$ için $x_{q-1} = x_{q+1} = x_n$ olduğunu varsayalım. Yine genelliği bozmaksızın $n > q + 1$ olduğu varsayılabilir. Bu durumda $(Tx)_{q-1} = (Tx)_n$

olduğundan $x_{q-2} + x_q = x_{n-1} + x_{n+1}$ olur. Lemma 4.1 kullanarak üç duruma sahip oluruz, (1) $x_{q-2} = x_q = x_{n-1} = x_{n+1}$ ve $x_{q+1} = x_n$ olduğundan $x_q = x_{n-1}$ ve $x_{q+1} = x_n$ olur ve bu Lemma 4.3 ile çelişir. (2) $x_q = x_{n-1}$ ve ayrıca $x_{q+1} = x_n$ olduğundan tekrar Lemma 4.3 ile çelişiriz. (3) $x_q = x_{n+1}$ ve ayrıca $x_{q-1} = x_n$ olduğundan tekrar Lemma 4.3 ile çelişiriz. Buradan $H = H_q$ olduğu görülür. □

Tabiki X, $\ell_\infty(\mathbb{Z})$ veya $c(\mathbb{Z})$ alınırsa T, pozitif bir özvektöre sahip olur. Çünkü herhangi bir sabit dizi, T nin özvektörüdür. Öte yandan $c_0(\mathbb{Z})$ da kapalı değişmez ideal olur.

H_q nun elemanları, $q \in \mathbb{Z}$ iken

$$(..., x_{q+2}, x_{q+1}, x_q, x_{q+1}, x_{q+2}, ...)$$

ve $t = q - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ iken

$$(..., x_{t+3}, x_{t+2}, x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, x_{t+3}...)$$

şeklindedir.

Bu değişmez alt-örgülerin herhangi farklı iki tanesinin kesişimi $\{0\}$ olur. Bu durumda örneğin T nin H_0 a kısıtlanışının aşikar olmayan kapalı değişmez alt-örgüsü yoktur. H_0, c_0 yada ℓ_p ile özdeşleştirilebilir ve T operatörü

$$(Tx)_n = \begin{cases} x_{n-1} + x_{n+1} & n > 0 \\ 2x_1 & n = 0 \end{cases}$$

S sağ öteleme (unilateral shift) operatörü olmak üzere T operatörü neredeyse çok tanıdık olan $S + S^*$ operatörüdür. Şimdi, aşikar olmayan kapalı değişmez alt-örgülerin var olmayışına, kendini içeren bir ispat vereceğiz.

Örnek 4.5. *$X = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$ veya c_0 ve T de X üzerinde*

$$(Tx)_n = \begin{cases} x_{n-1} + x_{n+1} & n > 0 \\ x_1 & n = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış bir operatör olsun. Bu durumda X in aşikar olmayan kapalı T-değişmez alt-örgüsü yoktur.

Kanıt. T bir pozitif özvektöre sahip değildir. Gerçekten her bir $x \in X$ için kompleks düzlemde açık birim disk üzerinde analitik olan bir $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ fonksiyonu tanımlanabilir. Bu durumda x e $f(z)$ fonksiyonu karşılık geldiğinde Tx e $zf(z) + (f(z) - f(0))/z$ fonksiyonu karşılık gelir. Eğer $Tx = \lambda x$ ve x pozitif ise $\|T\| = 2$ olduğundan $0 \leq \lambda \leq 2$ dır. Bu durumda

$$zf(z) + (f(z) - f(0))/z = \lambda f(z)$$

elde edilir. Buna göre $f(z) = \frac{f(0)}{z^2 - \lambda z + 1}$ dir. $f(0) = 1$ alınarak $(z^2 - \lambda z + 1)^{-1}$ fonksiyonunun 0 noktasındaki Taylor açılımındaki katsayılar oluşan dizi X in elemanı olmalıdır. Eğer $\lambda = 2$ ise bu açılım $(z^2 - 2z + 1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ olur ve katsayılar sınırlı olmadığından katsayılar oluşan dizi X in elemanı olamaz. Eğer $\lambda < 2$ ise θ, $\cos\theta = \frac{\lambda}{2}$ ve $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$ şeklinde tanımlansın ve $w = \cos\theta + i\sin\theta$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2 - \lambda z + 1} &= \frac{-i}{2\sin\theta}\left(\frac{1}{z - w} - \frac{1}{z - \overline{w}}\right) \\
&= \frac{i}{2\sin\theta}\left(\frac{\overline{w}}{1 - \overline{w}z} - \frac{w}{1 - wz}\right) \\
&= \frac{i}{2\sin\theta}\left(\overline{w}\sum_{n=0}^{\infty}\overline{w}^n z^n - w\sum_{n=0}^{\infty} w^n z^n\right) \\
&= \frac{i}{2\sin\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\overline{w}^{n+1} - w^{n+1}\right) z^n \\
&= \frac{i}{2\sin\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\Big(\cos\big((n+1)\theta\big) - i\sin\big((n+1)\theta\big)\Big) \\
&\quad - \Big(\cos\big((n+1)\theta\big) + i\sin\big((n+1)\theta\big)\Big)\Big] z^n \\
&= \frac{-i}{2\sin\theta}\sum_{n=0}^{\infty} 2i\sin\Big((n+1)\theta\Big) z^n
\end{aligned}$$

böylece Taylor katsayıları, $\frac{\sin((n+1)\theta)}{2\sin\theta} \nrightarrow 0$ olduğundan $x \notin X$ elde edilir. Bu da T nin bir pozitif özvektöre sahip olmadığını gösterir.

H, X in bir aşikar olmayan kapalı T-değişmez alt-örgüsü olsun. İlk olarak her $x \in H$ için $x_m = 0$ olacak şekilde bir m saysının var olmadığını gösterelim. Eğer $m = 0$ ise her $x \in H$ için $T(x)_0 = x_1 = 0$ olduğundan $m > 0$ olduğu farzedilebilir. Eğer böyle bir m sayısı var ise $x \in H^+$ alınır ve $T(x)_m = x_{m-1} + x_{m+1} = 0$ olduğu gözlemlenirse $x_{m-1} = x_{m+1} = 0$ olur. Bu da her $x = x^+ - x^- \in H$ için geçerli olacağından tümevarım ile negatif olmayan bütün p tamsayıları için $x_p = 0$ bulunur.

Dolayısıyla $H = \{0\}$ elde edilir. Diğer durumda $H \neq X$ ise her $x \in H$ için $x_m = \alpha x_n$ olacak şekilde $\alpha > 0$, $m > n \geq 0$ sayıları vardır. Eğer $x \in H$ ve $x_0, x_1, ..., x_m$ biliniyor ise x bunlar ile tektürlü olarak belirlenebilir. Yani,

$P(p)$: "$0 \leq p$ için x_k yı $(k \leq p)$ $x_j \, (0 \leq j \leq m)$ lerin bir lineer kombinasyonu olarak ifade edebiliriz."

ifadesini göz önüne alalım. Bu $p = 0$ için doğrudur. $P(p)$ doğru olduğunu varsayalım. H, T-değişmez olduğundan $T^{p+1-m}x \in H$, ve $(T^{p+1-m}x)_m$, x_k ların $(k \leq p+1)$ bir lineer kombinasyonu ve x_{p+1} in katsayısı 1 dir. Benzer şekilde $(T^{p+1-m}x)_n$, x_k ların $(k \leq p+1-m+n)$ bir lineer kombinasyonudur. Ayrıca $(T^{p+1-m}x)_m = \alpha(T^{p+1-m}x)_n$ olduğundan bu eşitlikten x_{p+1} i x_k lar $(k \leq p)$ cinsinden ifade edebiliriz ve dolayısıyla x_{p+1}, x_k ların $(0 \leq k \leq m)$ bir lineer kombinasyonudur. Yani, $P(p+1)$ ispatlanmış olur. Buradan H nin sonlu boyutlu olduğunu elde ederiz. Dolayısıyla [1] in Teorem 8.11 i bize T nin bir pozitif özvektöre sahip olduğunu söyler ki bu da bizi çelişkiye götürür.

□

$p = 2$ olduğunda T operatörü kendine-eş olduğundan kesin olarak aşikar olmayan kapalı değişmez alt-uzaya sahiptir.

Eğer $X = c$ veya ℓ_∞ alınırsa c_0 aşikar olmayan değişmez kapalı ideal olacağından bu örnek sonuç vermez. M.G. Krein [1, Corollary 9.46] nın teoremi iddia ediyor ki bir $C(K)$ uzayı üzerinde tanımlanmış herhangi bir pozitif T operatörü için T nin eşleniği bir pozitif özvektöre sahiptir. Bundan hemen T nin aşikar olmayan kapalı değişmez alt-uzaya sahip olduğu bulunur, oda böyle bir özvektörün çekirdeğidir. Bu nedenle $C(K)$ uzayları üzerinde tanımlı pozitif operatörler aşikar olmayan kapalı alt-örgülere sahip olduğu bir sanı olabilir. Fakat aşağıdaki örnekte bunun böyle olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 4.6. *X=c ve T de X üzerinde*

$$(Tx)_n = \begin{cases} x_{n-1} + x_{n+1} + x_0 & n > 0 \\ x_1 + x_0 & n = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış bir operatör olsun. Bu durumda X in aşikar olmayan kapalı T değişmez alt-örgüsü yoktur.

Kanıt. T bir pozitif özvektöre sahip değildir. Gerçekten bir önceki örnekte olduğu gibi her bir $x \in X$ için kompleks düzlemde açık birim disk üzerinde analitik olan bir $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ fonksiyonu tanımlanabilir. Bu durumda x e $f(z)$ fonksiyonu karşılık geldiğinde Tx e $zf(z) + (f(z) - f(0))/z + f(0)/(1-z)$ fonksiyonu karşılık gelir. Eğer $x \in X^+$, T nin bir pozitif özvektörü ise $Tx = \lambda x$ olacak şekilde bir $\lambda \geq 0$ sayısı vardır. Buradan

$$zf(z) + (f(z) - f(0))/z + f(0)/(1-z) = \lambda f(z)$$

eşitliği sağlanmalıdır. Buna göre $f(z) = \frac{(1-2z)f(0)}{(1-z)(z^2-\lambda z+1)}$ bulunur. Eğer $\lambda > 2$ ise $|\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}\right)/2| < 1$ olduğundan f, $\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}\right)/2$ de bir kutup noktasına sahiptir. Bu da f in açık birim disk üzerinde analitik olmasıyla çelişir.

Şimdi $\lambda \leq 2$ durumu göz önüne alalım. $x_0 = f(0) \neq 0$ olmalıdır. Aksi durumda $f = 0$ dır. $Tx = \lambda x$ den $(Tx)_0 = x_1 + x_0 = \lambda x_0$ olur. Buna göre $x_1 = (\lambda - 1)x_0$ bulunur. $(Tx)_1 = x_2 + 2x_0 = \lambda x_1 = \lambda(\lambda - 1)x_0$ den $x_2 = (\lambda^2 - \lambda - 2)x_0$ bulunur. $(Tx)_2 = x_3 + x_1 + x_0 = x_3 + \lambda x_0 = \lambda x_2 = \lambda(\lambda^2 - \lambda - 2)x_0$ buradan $x_3 = \lambda(\lambda^2 - \lambda - 3)x_0$ bulunur. $\lambda \leq 2$ olduğundan $(\lambda^2 - \lambda - 3) < 0$ elde edilir. Yani, $x_3 < 0$ bulunur ki bu da $x \geq 0$ ile çelişir. Bu nedenle T bir pozitif özvektöre sahip değildir.

H, X in kapalı T-değişmez bir alt-örgüsü olsun. İlk olarak her $x \in H$ için $x_m = 0$ olacak şekilde bir m sayısının var olmadığını gösterelim. Böyle bir m sayısının olduğunu varsayalım. Eğer $m > 1$ ise herhangi bir $x \in H^+$ için $T(x)_m = x_{m-1} + x_{m+1} + x_0 = 0$ olduğundan $x_{m-1} = x_{m+1} = x_0 = 0$ bulunur ve dolayısıyla $x_{m-1} = x_{m+1} = x_0 = 0$ eşitliği her $x \in H$ için de geçerlidir. Tümevarım ile negatif olmayan her p tamsayısı için $x_p = 0$ elde edilir. Eğer $m = 1$ ise $T(x)_1 = 2x_0 + x_2$ den benzer bir yol ile her $x \in H$ için $x_2 = x_0 = 0$ bulunur. Böylece $m > 1$ durumunu elde ederiz. Son olarak $m = 0$ ise $T(x)_0 = x_0 + x_1$ den her $x \in H$ için $x_1 = 0$ bulunur ve tekrar bir önceki durum elde edilir. Bunlara göre böyle bir m sayısı yoktur. Ayrıca her $x \in H$ için $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ da olamaz. Çünkü her $x \in H$ için $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ olsaydı her $x \in H$ için

$$0 = \lim_{n\to\infty} (Tx)_n = \lim_{n\to\infty} (x_{n-1} + x_{n+1} + x_0) = x_0$$

bulunur. Buna göre her $x \in H$ için $x_0 = 0$ elde edilirdi ki bununda olmayacağı yukarıda gösterilmiştir.

H, X in aşikar olmayan kapalı T-değişmez bir alt-örgüsü olsun. Buna göre Sonuç 2.18 den her $x \in H$ için $x_m = \alpha x_n$ olacak şekilde $\alpha > 0$, m, n veya $x_m = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n$ olacak şekilde $\alpha > 0$, m vardır. Bu durumların ilkin de bir önceki örnekte olduğu gibi H nin sonlu boyutlu olduğu elde edilir ki bu da bizi çelişkiye götürür. İkinci durumda, eğer her $x \in H$ için $x_p = \beta \lim_{n\to\infty} x_n$ olacak şekilde $\beta > 0$, $p \neq m$ sayıları var ise $x_m = (\alpha/\beta)\, x_p$ olur ki bu da birinci durumdan dolayı imkansızdır. Bu da böyle bir sınırlamanın bir tane olabileceği söyler, yani; $x_m = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n$ sınırlaması H üzerinde mümkün olan tek sınırlamadır.

Eğer $m = 0$ ise $b_0 = b_1 = \alpha$ ve $n \geq 2$ için $b_n = 1$ şeklinde bir $b = (b_n)$ dizi tanımlansın bu durumda $b \in H$ olur. Buna göre $\lim_{n\to\infty} (Tx)_n = 2+\alpha$ ve $(Tx)_0 = 2\alpha$ dan $2\alpha = \alpha\,(\alpha + 2)$ olur. Buradan $\alpha = 0$ bulunur. Eğer $m > 0$ ise $a_m = \alpha$, $n \geq m+2$ için $a_n = 1$ ve geriye kalan n ler için $a_n = 0$ şeklinde bir $a = (a_n)$ dizi tanımlansın bu durumda $a \in H$ olur. Buna göre $\lim_{n\to\infty} (Tx)_n = 2$ ve $(Tx)_m = 0$ dan $2\alpha = 0$ olur. Buradan yine $\alpha = 0$ bulunur. Her iki durumda da $\alpha > 0$ ile çelişiriz. Buna göre X in aşikar olmayan herhangi bir alt-örgüsü üzerinde sağlanacak bütün sınırlamalar elendi. Buradan X in aşikar olmayan kapalı T-değişmez bir alt-örgüsünün olmadığı bulunur. $\square$

Bölüm 5

Sonuçlar

Örnek 5.1. *$X = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$ veya c_0 ve T de X üzerinde, $\alpha \geq 1$ olmak üzere*

$$(Tx)_n = \begin{cases} \alpha x_{n-1} + x_{n+1} & n > 0 \\ x_1 & n = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış bir operatör olsun. Bu durumda X in aşikar olmayan kapalı T değişmez alt-örgüsü yoktur.

Kanıt. Örnek 4.5 den dolayı $\alpha > 1$ varsayabiliriz. T bir pozitif özvektöre sahip değildir. Gerçekten her bir $x \in X$ için kompleks düzlemde açık birim disk üzerinde analitik olan bir $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ fonksiyonu tanımlanabilir. Bu durumda x e $f(z)$ fonksiyonu karşılık geldiğinde Tx e $\alpha z f(z) + (f(z) - f(0))/z$ fonksiyonu karşılık gelir. Eğer $Tx = \lambda x$ ve x pozitif ise $\|T\| = 1 + \alpha$ olduğundan $0 \leq \lambda \leq 1 + \alpha$ dır. Bu durumda

$$\alpha z f(z) + (f(z) - f(0))/z = \lambda f(z)$$

elde edilir. Buna göre $f(z) = \frac{f(0)}{\alpha z^2 - \lambda z + 1}$ dir. $f(0) = \alpha$ alırsa $f(z) = \frac{1}{z^2 - \frac{\lambda}{\alpha} z + \frac{1}{\alpha}}$ olur. $0 \leq \lambda \leq 1 + \alpha$ için $z^2 - \frac{\lambda}{\alpha} z + \frac{1}{\alpha} = 0$ denkleminin köklerinden en az bir tanesi açık birim diskte olduğundan $f(z)$ fonksiyonun kutup noktası vardır. Bu da $f(z)$ fonksiyonun açık birim disk üzerinde analitik olmasıyla çelişir. Dolayısıyla T operatörü bir pozitif özvektöre sahip değildir.

H, X in bir aşikar olmayan kapalı T-değişmez alt-örgüsü olsun. Bu durumda Örnek 4.5 de olduğu gibi H nin sonlu boyutlu olduğu görülür. Dolayısıyla [1] in

Teorem 8.11 den T nin bir pozitif özvektöre sahip olduğu elde edilir. Bu da T nin pozitif özvektöre sahip olmamasıyla çelişir. □

Örnek 5.2. *$X = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$ veya c_0 ve T de X üzerinde, $\alpha > 1$ olmak üzere*

$$(Tx)_n = \begin{cases} x_{n-1} + \alpha x_{n+1} & n > 0 \\ \alpha x_1 & n = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış bir operatör olsun. Bu durumda T bir pozitif özvektöre sahiptir. Dolayısıyla X in aşikar olmayan kapalı T-değişmez alt-örgüsü vardır.

Kanıt. $2\sqrt{\alpha}$, T nin bir özdeğeridir ve buna karşılık gelen pozitif özvektörde $x = \left(\frac{n+1}{\alpha^{\frac{n+2}{2}}}\right)$ dir. Gerçekten $n = 0$ için $(Tx)_0 = \alpha x_1 = \alpha\frac{2}{\alpha\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$ ve $2\sqrt{\alpha}\,x_0 = 2\sqrt{\alpha}\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$ olduğundan $(Tx)_0 = 2\sqrt{\alpha}x_0$ bulunur. $n > 0$ için

$$(Tx)_n = x_{n-1} + \alpha x_{n+1} = \frac{n}{\alpha^{\frac{n+1}{2}}} + \alpha\frac{n+2}{\alpha^{\frac{n+3}{2}}} = \frac{n}{\alpha^{\frac{n+1}{2}}} + \frac{n+2}{\alpha^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{2n+2}{\alpha^{\frac{n+1}{2}}}$$

ve

$$2\sqrt{\alpha}x_n = 2\sqrt{\alpha}\frac{n+1}{\alpha^{\frac{n+2}{2}}} = \frac{2n+2}{\alpha^{\frac{n+1}{2}}}$$

buradan her n sayısı için $(Tx)_n = 2\sqrt{\alpha}x_n$ olduğundan $Tx = 2\sqrt{\alpha}x$ bulunur. Yani $2\sqrt{\alpha}$, T nin bir özdeğeri ve buna karşılık gelen pozitif özvektörde x dir. Dolayısıyla span$\{x\}$, X in aşikar olmayan kapalı T-değişmez alt-örgüsüdür. □

Örnek 5.3. *X=c ve T de X üzerinde, $\alpha > 1$ olmak üzere*

$$(Tx)_n = \begin{cases} \alpha x_{n-1} + x_{n+1} + x_0 & n > 0 \\ x_1 + x_0 & n = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış bir operatör olsun. Bu durumda X in aşikar olmayan kapalı T değişmez alt-örgüsü yoktur.

Kanıt. Örnek 4.6 dan dolayı $\alpha > 1$ kabul edebiliriz. T bir pozitif özvektöre sahip değildir. Gerçekten Örnek 4.5 da olduğu gibi her bir $x \in X$ için kompleks düzlemde açık birim disk üzerinde analitik olan bir $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ fonksiyonu tanımlanabilir. Bu durumda x e $f(z)$ fonksiyonu karşılık geldiğinde Tx e $\alpha z f(z) + (f(z) - f(0))/z +$

$f(0)/(1-z)$ fonksiyonu karşılık gelir. Eğer $x \in X^+$, T nin bir pozitif özvektörü ise $Tx = \lambda x$ olacak şekilde bir $\lambda \geq 0$ sayısı vardır. Dolayısıyla

$$\alpha z f(z) + (f(z) - f(0))/z + f(0)/(1-z) = \lambda f(z)$$

olmalıdır. Buradan $f(z) = \frac{(1-2z)f(0)}{(1-z)(\alpha z^2 - \lambda z + 1)}$ bulunur. Eğer $\lambda \geq 2\sqrt{\alpha}$ ise $\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\alpha}}{2\alpha} < 1$ elde edilir. Ayrıca $\lambda < 2\sqrt{\alpha}$ ise $\lambda^2 - 4\alpha < 0$ olacağından

$$\left| \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\alpha}}{2\alpha} \right| = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 4\alpha - \lambda^2}}{2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} < 1$$

bulunur. Buradan negatif olmayan her λ reel sayısı için $f(z)$ in bir kutup noktasına sahip olduğu bulunur. Bu da $f(z)$ in analitik olmasıyla çelişiriz. Dolayısıyla T bir pozitif özvektöre sahip değildir.

H, X in aşikar olmayan kapalı T-değişmez bir alt-örgüsü olsun. Bu durumda Örnek 4.6 de olduğu gibi her $x \in H$ için $x_m = 0$ olacak şekilde bir m sayısı ve $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ olmadığı kolayca görülür. Dolayısıyla Sonuç 2.18 den her $x \in H$ için $x_m = \beta x_n$ olacak şekilde $\beta > 0$, m, n veya $x_m = \beta \lim_{n\to\infty} x_n$ olacak şekilde $\beta > 0$, m sayıları vardır. Bu sınırlamaların ilki sağlanır ise Örnek 4.5 den H nin sonlu boyutlu olduğu ve dolayısıyla T nin bir pozitif özvektöre sahip olduğu bulunur. Buradan bir çelişki elde ederiz. İlk sınırlamanın sağlanmayıp ikinci sınırlamanın sağlanması durumunda, $m = 0$ ise $a_0 = a_1 = \beta$ ve $n \geq 2$ için $a_n = 1$ şeklinde bir $a = (a_n)$ dizisi ve $m > 0$ ise $b_m = \beta$, $n \geq m+2$ için $b_n = 1$ ve geriye kalan n ler için $b_n = 0$ şeklinde bir $b = (b_n)$ dizi tanımlanırsa $\beta \leq 0$ bulunur. Buradan $\beta > 0$ ile çelişir. Buradan X in aşikar olmayan kapalı T-değişmez bir alt-örgüsünün olmadığı bulunur. □

Kaynakça

[1] Y.A. Abramovich & C.D Aliprantis, *An Invitation to Operator Theory*, Amer.Math.Soc.Graduate Studies in Math., vol. 50, Providence, RI, 2002

[2] C.D Aliprantis & O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Academic Press, New York and London, 1985

[3] B. de Pagter, *Irreducible compact operators*, Math.Z., **192**(1986), 149-153

[4] P. Enflo, *On the invariant subspace problem for Banach spaces*, Acta Math., **158**(1987), 213-313

[5] G.J.O. Jameson, *Ordered Linear Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[6] S. Kakutani, *Concrete representations of abstract (M)-spaces*, Ann.Math., **42** (1941), 994-1024

[7] A.K. Kitover & A.W. Wickstead, *Invariant sublattices for positive operators*, Indag. Math. N.S., **18**(1), (2007), 39-60

[8] H. Radjavi & V.G. Troitsky, *Invariant Sublattices*, Illinois J. Math., baskıda

[9] C.J. Read, *A solution to the invariant subspace problem on the space* ℓ_1, J.London Math.Soc., **17** (1985), 305-317

[10] C.J. Read, *A short proof concerning the invariant subspace problem*, J.London Math.Soc., **34** (1986), 335-348

[11] C.J. Read, *Quasinilpotent operators and the invariant subspace problem*, J.London Math.Soc., **56** (1997), 595-606

[12] H.H. Schaefer, *Spektraleigenschaften positiver linearer operatoren*, Math.Z., **82** (1963), 303-313

Özgeçmiş

13 Ocak 1985 tarihinde İstanbul'da doğdu. Penyelüks Hasan GÜLER İlkokulu'ndan 1995 yılında, Zeynep Bedia KILIÇLIOĞLU Ortaokulu'ndan 1998 yılında , Avcılar Süleyman NAZİF Lisesi'nden 2001 yılında mezun oldu. 2002-2006 yılları arasında İstanbul Kültür Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü'nde lisans eğitimini tamamladı. 2006 yılında İKÜ Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. Halen İKÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.