İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLAR

DOKTORA TEZİ

Emel YAVUZ DUMAN

0509242001

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 04 Haziran 2009

Tezin Savunulduğu Tarih : 19 Haziran 2009

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yaşar POLATOĞLU

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Aydın AYTUNA (S.Ü.)
Prof. Dr. Çiğdem GENCER
Yrd. Doç. Dr. Mert ÇAĞLAR
Yrd. Doç. Dr. R. Tunç MISIRLIOĞLU (İ.Ü.)

HAZİRAN 2009

ÖNSÖZ

2001 yılından beri öğrencisi olduğum ve 2004 senesinden bu yana danışmanlığımı yürüten, bana çalışkanlığı ve kestirilemez zekâsı ile her zaman örnek bir bilim insanının nasıl olması gerektiğini gösteren, bıkmadan sorularımı yanıtlayan, asla hayır demeyen, alçakgönüllü, yapıcı, benim babamdan sonra tanıdığım en baba insan Sayın Yaşar Polatoğlu'na; lisansüstü ders aşamasında ve sonrasında yaptığı yardımlardan ve bu tezin yazımında göstermiş olduğu titiz yaklaşımdan ötürü Sayın Mert ÇAĞLAR'a; İstanbul Analiz Seminerleri (İAS) dolayısıyla tanıma fırsatı bulduğum ve verdiği lisansüstü dersi ile hocam olması şerefine eriştiğim, İstanbul-daki analizcilerin bir araya gelmesine ve konusunda uzman bilim insanlarının seminerlerini dinlememize imkan sağlayan İAS'nin düzenlenmesinde verdiği emeklerden ve bu çalışmaya katkılarından ötürü Sayın Aydın AYTUNA'ya; tez izleme jüri üyesi olmalarından ötürü bu çalışmanın oluşumunun her aşamasını yakından takip eden Sayın Çiğdem GENCER ve Sayın R. Tunç MISIRLIOĞLU'na; manevi desteğini her zaman hissettiğim, kütüphanesini benimle paylaşan cömert insan Sayın Adnan İLERÇİ'ye; ders, yeterlilik ve tez süreçlerini beraberce yaşadığım takım arkadaşım Sayın H. Esra ÖZKAN'a; sonsuz destek ve güvenlerinden ötürü aile fertlerim Sayın Mevlüt YAVUZ, Sayın Hayriye YAVUZ, Sayın Ebru YAVUZ, Sayın Mehmet YAVUZ ve Sayın İdil KILAF'a; son olarak da özellikle anlayışı ve paylaşımcığılından ötürü eşim Sayın Mert DUMAN'a teşekkürlerimi sunuyorum.

Haziran 2009 Emel YAVUZ DUMAN

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ iv

SEMBOL LİSTESİ v

ÖZET vii

SUMMARY viii

1 GİRİŞ 1

2 YALINKAT FONKSİYONLAR 3

2.1 Temel Tanım ve Teoremler 3

2.2 Normalize Edilmiş Yalınkat Fonksiyonlar 7

2.2.1 Pozitif Reel Kısma Sahip Fonksiyonlar Sınıfı 12

2.2.2 Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı 14

3 HARMONİK FONKSİYONLAR 16

3.1 Temel Tanımlar 16

3.2 Harmonik Fonksiyonlar ve Temel Özellikleri 17

3.3 Harmonik Yalınkat Fonksiyonlar 19

3.4 Normalize Edilmiş Yön-Koruyan Harmonik Fonksiyonlar 21

4 ANALİTİK KISMI JANOWSKI YILDIZIL FONKSİYON SINIFINA AİT YÖN-KORUYAN HARMONİK FONKSİYONLAR 29

4.1 Sonuçlar 30

5 SONUÇ 39

KAYNAKLAR 40

ÖZGEÇMİŞ 43

ŞEKİL LİSTESİ

2.1 f dönüşümü altında C eğrisinin resmi 5

2.2 f dönüşümü altında C_1 ve C_2 eğrilerinin resimleri 6

2.3 $f \prec g$, f fonksiyonunun g ile sabordinasyonu 10

2.4 $\mathbb{U}$ birim diskinin Koebe fonksiyonu altında resmi 11

2.5 $C_r = \partial\mathbb{U}_r$ çemberlerinin p dönüşümü altında resmi 13

2.6 (a) Yıldızıl bölge (b) w_0 noktasına göre yıldızıl bölge . 14

SEMBOL LİSTESİ

A, B	:	$-1 \leq B < A \leq 1$ koşulunu sağlayan sabitler
$\mathbb{C}$	:	Kompleks düzlem
$C(r, A, B)$	:	Sınır
d_f	:	f'nin kompleks dilatasyonunun modülü
$\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$	:	Basit bağlantılı bölge
D_f	:	f'nin dilatasyonu
Δ	:	Laplace operatörü
E_i	:	Üstel integral
$f \prec g$	:	f'nin g ile sabordinasyonu
F_1	:	Appell hipergeometrik fonksiyonu
${}_2F_1$	:	Gauss hipergeometrik fonksiyonu
J_f	:	f fonksiyonunun Jakobiyeni
$k(z)$	:	Koebe fonksiyonu
$k_0(z)$	:	Harmonik Koebe fonksiyonu
$k_\theta(z)$	:	Koebe fonksiyonun rotasyonu
μ_f	:	f'nin kompleks dilatasyonu
ν	:	İkinci dilatasyon fonksiyonu
Ω	:	Schwarz fonksiyonlarının sınıfı
ϕ	:	Schwarz fonksiyonu
$\mathcal{P}$	:	Carathéodory sınıfı
$\mathcal{P}(A, B)$	:	Janowski pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}$	:	Yalınkat fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}^*$	:	Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}^*(A, B)$	:	Janowski yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}_H$, $\mathcal{S}_H^0$	:	Yön-koruyan harmonik fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}_H^*$, $\mathcal{S}_H^{*0}$	:	Yön-koruyan harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{S}_H^*(A,B)$	:	Analitik kısmı Janowski yıldızıl fonksiyon sınıfına ait yön-koruyan harmonik fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{U}$	:	Açık birim disk
$\mathcal{V}$	:	İkinci dilatasyon fonksiyonları sınıfı

Üniversitesi	**:**	**İstanbul Kültür Üniversitesi**
Enstitüsü	**:**	**Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı	**:**	**Matematik-Bilgisayar**
Programı	**:**	**Matematik**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Yaşar POLATOĞLU**
Tez Türü ve Tarihi	**:**	**Doktora - HAZİRAN 2009**

ÖZET

HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLAR

Emel YAVUZ DUMAN

Harmonik fonksiyonlar analitik olması gerekmeyen kompleks değerli fonksiyonlardır. Harmonik yalınkat fonksiyonlar teorisi ise kompleks analizin üzerinde en çok araştırma yapılan dallarından birisidir. Bu tezde amaca yönelik olarak önce yalınkat fonksiyonlar, harmonik yalınkat fonksiyonlar ve bu tip fonksiyonların özel bir hali olan yön-koruyan harmonik fonksiyonlar üzerinde kısaca durulmuş ve ortaya konan problemin çözümünde kullanılacak araçlar tanıtılmıştır. Yön-koruyan harmonik fonksiyonlar ve analitik yalınkat fonksiyonların beraber kullanılması ile yeni bir sınıf tanımlanmış ve bu sınıftaki fonksiyonlara ait genişleme teoremi, distorsiyon teoremi, Heinz eşitsizliği, katsayı eşitsizliği ve Jakobiyen sınırları elde edilmiştir. Ayrıca yön-koruyan harmonik fonksiyonların analitik ve eş-analitik kısımlarının ikinci katsayıları için yeni bir katsayı eşitsizliği de verilmiştir.

Anahtar Kelimeler	**:**	**Yalınkat, harmonik yalınkat yön-koruyan harmonik, yıldızıl, distorsiyon teoremi, genişleme teoremi, Heinz eşitsizliği, katsayı eşitsizliği.**
Bilim Dalı Sayısal Kodu	**:**	**0924**

University	**:**	**İstanbul Kültür University**
Institute	**:**	**Institute of Science**
Science Programme	**:**	**Mathematics and Computer**
Programme	**:**	**Mathematics**
Supervisor	**:**	**Assist. Prof. Dr. Yaşar POLATOĞLU**
Degree Awarded and Date	**:**	**Ph.D. - JUNE 2009**

SUMMARY

HARMONIC UNIVALENT FUNCTIONS

Emel YAVUZ DUMAN

Harmonic functions are complex valued functions which do not need to be analytic. The theory of harmonic univalent functions is one of the most popular branches of complex analysis. In this thesis we first survey standard topics in the theory of univalent functions, and harmonic univalent functions, and then describe the tools which will be used in the sequel. By using harmonic univalent functions and univalent functions simultaneously, we define a new class of harmonic univalent functions and obtain the growth theorem, the distortion theorem, the Heinz inequality, the coefficient inequality and boundaries of Jacobian for this new class. Also we obtain a new coefficient inequality for the second coefficients of analytic and co-analytic parts of harmonic univalent functions.

Keywords	**:**	**Univalent, harmonic univalent, sense-preserving harmonic, starlike, distortion theorem, growth theorem, Heinz inequality, coefficient inequality.**
Science Code	**:**	**0924**

Bölüm 1

GİRİŞ

Düzlemde harmonik yalınkat fonksiyonlar teorisinin gelişiminde matematiğin iki dalı önemli rol oynar. Bunlardan ilki diferansiyel geometridir. 1920'lerin başlarında diferansiyel geometriciler minimal yüzey teorisinde harmonik yalınkat fonksiyonlar ile çalıştılar. Daha sonra kompleks analizciler analitik yalınkat fonksiyonların bir genelleştirilmesi olarak, harmonik yalınkat fonksiyonların özel bir durumu olan, yön-koruyan harmonik fonksiyonlar teorisini incelemeye başladılar. Burada temel problem analitik yalınkat fonksiyonlar ile yön-koruyan harmonik fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktır. James Clunie ve Terry Sheil-Small, 1984 yılında teorinin bu problemine yanıt olabilecek çalışmalarını yayınladılar ([12]). Makalelerinde analitik yalınkat fonksiyonlar için iyi bilinen genişleme, distorsiyon, örtülüş teoremleri ve katsayı eşitsizlikleri gibi problemlerin yön-koruyan harmonik fonksiyonlar teorisindeki analoglarını ortaya koydular. Bununla beraber verilen sonuçların hiçbiri kesin değildi ve pek çoğu günümüzde dahi kesinlik kazanmamıştır. Teorideki bir diğer beklenti olan Riemann Gönderim Teoremi'nin yön-koruyan harmonik fonksiyonlar için analoğunu ortaya koyma problemi 1986 yılında Hengartner ve Schober tarafından çözüme kavuşturulmuştur ([19]). Bu çalışmaları takiben teori popüler bir saha haline gelmiştir ve üzerinde pek çok araştırma yapılmaktadır.

Bu tezde, analitik kısmı analitik yalınkat fonksiyonların bir alt sınıfına ait olan normalize edilmiş yön-koruyan harmonik fonksiyonlar sınıfı tanımlanmış ve bu sınıfa ait bazı eşitsizlikler verilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde kısaca analitik yalınkat fonksiyonlar üzerinde durulmuştur. Normalize edilmiş analitik yalınkat fonksiyonlar sınıfı tanımlanmış ve teorinin gelişiminde önemli rol oynayan Bieberbach Sanısı özellikle vurgulanarak bu çalışmada kullanılan pozitif reel kısma sahip ve yıldızıl fonksiyonlar sınıfı anlatılmıştır.

Üçüncü bölümde harmonik fonksiyonların bazı temel tanım ve özellikleri verilmiş, daha sonra harmonik yalınkat fonksiyonlar, normalize edilmiş yön-koruyan harmonik fonksiyonlar tanımlanmış ve kısaca teorideki açık problemlere vurgu yapılarak teorinin gelişimi kronolojik olarak ortaya konmuştur.

Dördüncü bölümde ise tanımlanan sınıfa ait temel teoremler elde edilmiştir. Ayrıca normalize edilmiş yön-koruyan harmonik fonksiyonlara ait yeni bir katsayı eşitsizliği de ispatlanmıştır.

Bölüm 2

YALINKAT FONKSİYONLAR

En basit anlamda geometrik fonksiyonlar teorisinin araştırma konusu kompleks değerli fonksiyonların resim bölgelerine bakarak bu fonksiyonların analitik özelliklerini incelemektir. Yalınkat fonksiyonlar, geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli ve ilgi çeken konularından birisidir. 1907 yılında Koebe tarafından yayınlanan Riemann Gönderim Teoremi'nin genelleştirilmesi ile birlikte pek çok önemli neticeler içeren makale ([21]), 1914 yılında Gronwall'ın alan teoremi ispatı ([18]), 1916 yılında Bieberbach'ın oraya koyduğu normalize edilmiş yalınkat fonksiyonların katsayıları için sanı ([8]) ve bu sanının sonuçları teorinin çıkış noktalarını oluşturur.

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

$\mathbb{C}$ kompleks düzleminde açık bağlantılı bir cümleye *bölge* denir. Bir bölgenin tümleyeni bağlantılı ise kendisi *basit bağlantılı* olarak isimlendirilir. Bir doğru parçasının sürekli görüntüsüne kompleks düzlemde bir *yay* denir. Kendi kendini kesmeyen bir yaya *Jordan yayı* adı verilir. *Kapalı eğri*, bir çemberin sürekli görüntüsüdür. *Basit bağlantılı eğri* ya da *Jordan eğrisi* kendi kendini kesmeyen kapalı bir eğridir. Jordan eğrisinin içi *Jordan bölgesi* olarak isimlendirilir. Bu çalışmada basit bağlantılı bölgeleri temsil için $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{D}$'nin indekslenmiş notasyonları kullanılmıştır. Bir $E \subset \mathbb{C}$ cümlesinin *komşuluğu* E'yi içeren bir açık cümledir. $|z| < 1$ eşitsizliğini gerçekleyen $z \in \mathbb{C}$ noktalarının cümlesi (açık) *birim disk* olarak isimlendirilir ve bu özel basit bağlantılı cümle $\mathbb{U}$ notasyonu ile gösterilmiştir.

Bir f fonksiyonunun $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında *diferansiyellenebilme*si demek, z_0 noktasında

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limitinin var olması anlamına gelir. Bir $\mathcal{D}$ bölgesinde tanımlı f fonksiyonu, $\mathcal{D}$'nin her noktasında diferansiyellenebilir ise *verilen bölgede analitik*tir (regüler veya holomorfik) denir. Eğer $f(z)$, z_0'ın bir komşuluğu içindeki her noktada diferansiyellenebilir ise, bu, f, z_0 *noktasında analitik*tir olarak ifade edilir. Bu durumda f'nin z_0 noktasında her mertebeden türevi vardır ve

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir.

$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy)$ kompleks fonksiyonu geometrik olarak z-düzlemindeki bir bölgeyi w-düzlemindeki bir bölgeye resmeden bir dönüşüm olarak da düşünülebilir. Eğer f analitik ise

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

olarak ifade edilen *Cauchy-Riemann denklemleri*ni sağlar. Bu aynı zamanda yeter şarttır.

$f = u + iv$ fonksiyonunun *Jakobiyen*i

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

olarak tanımlanır. $\mathcal{D}$ bölgesinde analitik f fonksiyonu için Cauchy-Riemann denklemlerinin bir sonucu olarak

$$J_f(z) = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + u_y^2 = |u_x + iu_y|^2 = |f'(z)|^2$$

eşitliği her zaman doğrudur.

$f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ bölgesinde tanımlı ve analitik olsun. Her $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ için $z_1 \neq z_2$ iken $f(z_1) \neq f(z_2)$ injektiflik koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna $\mathcal{D}$ bölgesinde *yalınkat* (univalent veya schlicht) denir.

Bir f fonksiyonunun $z_0 \in \mathcal{D}$ noktasında *yerel yalınkat* (locally univalent) olması bu noktanın bir komşuluğunda yalınkat olduğu anlamına gelir.

Analitik fonksiyonların yerel yalınkatlığı ile ilgili aşağıdaki gerek ve yeter şart verilmiştir.

Teorem 2.1.1. *([2], s. 131) Analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında yerel yalınkat olması için gerek ve yeter şart $f'(z_0) \neq 0$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.*

Bir bölgede yerel yalınkat olan analitik fonksiyonlar, verilen bölgede yalınkat olmak zorunda değildir. Örneğin $f(z) = z^2$ fonksiyonu $\mathcal{D} = \{z : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < 3\pi/2\}$ bölgesinde yerel yalınkat olduğu halde, bu bölgede yalınkat değildir. Gerçekten, $f(z) = z^2$ fonksiyonu $\mathcal{D}$'de analitiktir ve her $z_0 \in \mathcal{D}$ için $f'(z_0) \neq 0$ sağlandığından yerel yalınkattır. Fakat

$$f\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + i\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}} - i\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = i\frac{9}{4}$$

olduğundan verilen bölgede $f(z)$ yalınkat değildir.

f fonksiyonu z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ olsun. z_0 noktasından geçen ve türevi olan (düzgün) bir C eğrisinin $w = f(z)$ dönüşümü altında yönünün değişimini inceleyelim. C eğrisinin parametrik gösterilimi, $a \leq t \leq b$ olmak üzere, $z(t) = x(t) + iy(t)$ ise, görüntüsü olan C' eğrisinin t parametresine bağlı olarak gösterilimi $w(t) = f(z(t))$ şeklindedir.

Şekil 2.1: f dönüşümü altında C eğrisinin resmi

$z(t)$ eğrisi düzgün olduğundan

$$f'(z(t)) = \frac{w'(t)}{z'(t)}$$

yazılabilir. $z_0 = z(t_0)$ noktasında $z'(t_0) \neq 0$ ise $f'(z_0) \neq 0$ olduğundan $w'(t_0) \neq 0$'dır ve aynı zamanda

$$\arg w'(t_0) - \arg z'(t_0) = \arg f'(z(t_0))$$

eşitliği sağlanır. Burada $z'(t_0) = x'(t_0) + iy(t_0)$ olup $\arg z'(t_0)$, z_0 noktasındaki teğetin x-ekseni ile yaptığı Şekil 2.1'de gösterilen θ_0 açısıdır. Eğer $\arg w'(t_0) = \phi_0$ dersek $G_0 = \arg f'(z(t_0)) = \theta_0 - \phi_0$ yazabiliriz ki bunun anlamı, G_0'ın yalnız z_0'a tâbi olup z_0'dan geçen C eğrisine bağlı olmadığıdır.

Yine z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ koşulunu sağlayan f fonksiyonu göz önüne alınsın. C_1 ve C_2 düzgün eğrilerinin bir z_0 noktasından geçtiği farz edilsin. θ_1 ve θ_2 açıları, sırasıyla, C_1 ve C_2 eğrilerine z_0 noktasından çizilen teğetlerin eğim açıları olsun. Yukarıdaki gibi hareket edersek, $\phi_1 = G_0 + \theta_1$ ve $\phi_2 = G_0 + \theta_2$ açıları, C_1 ve C_2 eğrilerinin $w = f(z)$ dönüşümü altındaki görüntüleri olan C_1' ve C_2' eğrilerine $w_0 = f(z_0)$ noktasından çizilen teğetlerin eğim açıları olarak bulunur. Buradan $\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1 = \alpha$ elde edilir.

Şekil 2.2: f dönüşümü altında C_1 ve C_2 eğrilerinin resimleri

Dolayısıyla C_1 ve C_2 eğrileri arasındaki açının büyüklüğü ve yönü, C_1' ve C_2' görüntü eğrileri arasındaki açının büyüklüğü ve yönü ile aynıdır. Yani, $w = f(z)$ dönüşümü z_0'dan geçen iki düzgün eğri arasındaki açıyı ve yönünü muhafaza eder.

Bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa bu dönüşüme *verilen noktada konform*dur denir.

Eğer f dönüşümü $\mathcal{D}$ bölgesindeki bütün noktalarda konform ise f, *$\mathcal{D}$ bölgesinde konform* olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.2. *([24], s. 149) Eğer f fonksiyonu analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulunu sağlarsa $w = f(z)$ dönüşümü konformdur.*

Yukarıda anlatılan açı-koruma özelliğinden dolayı yalınkat fonksiyonlar konform fonksiyonlar olarak da isimlendirilir.

Teorem 2.1.3. *([13], s. 152) z_0 noktasında $w = f(z)$ fonksiyonu analitik olsun ve $f'(z_0) \neq 0$ eşitsizliği sağlansın. Buna göre $w_0 = f(z_0)$ noktasının bir komşuluğunda analitik $z = g(w)$ ters fonksiyonu vardır. Ayrıca, $g'(w_0) = 1/f'(z_0)$ sağlanır.*

z-düzlemindeki $\mathcal{D}_1 \subsetneqq \mathbb{C}$ bölgesini, w-düzlemindeki $\mathcal{D}_2$ bölgesi üzerine resmeden f fonksiyonunun varlığı 1851 yılında G. Bernard Riemann tarafından, doktora tezinde, ortaya atılmıştır ([2], s. 30). *Riemann Gönderim Teoremi* olarak bilinen bu teorem *Geometrik Fonksiyonlar Teorisi*'nin doğmasına neden olmakla birlikte, 1907 yılında P. Koebe ([21]) tarafından konform fonksiyonlara genişletilerek verilen hali daha kullanışlıdır. Enteresandır ki Koebe, Riemann Gönderim Teoremi'nin genişletilmiş hali diyebileceğimiz versiyonunu verene kadar teoremin orijinal hali, kimi araştırmacılara göre kullanışlı bulunmadığından kimi araştırmacılara göre de önemi tam olarak anlaşılmadığından teoride pek uygulama bulamamıştır.

Teorem 2.1.4. *([21]) Basit bağlantılı her $\mathcal{D} \subsetneqq \mathbb{C}$ bölgesi konform olarak birim disk üzerine resmedilebilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere, $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan ve $\mathcal{D}$'yi birim disk $\mathbb{U}$ üzerine resmeden tek türlü belirli bir konform fonksiyon vardır.*

2.2 Normalize Edilmiş Yalınkat Fonksiyonlar

Teorem 2.1.3 bize bir konform fonksiyonun ters görüntüsünün yine konform olduğunu söyler. Dolayısıyla Teorem 2.1.4'den herhangi iki basit bağlantılı bölgenin *konform olarak eşdeğer*, yani kompleks düzlem içinde kalan herhangi iki basit bağlantılı bölgenin birbirleri üzerine konform olarak resmedilebileceği sonucunu çıkarabiliriz. Dolayısıyla $\mathcal{D}_1 \subsetneqq \mathbb{C}$, $\mathcal{D}_2 \subsetneqq \mathbb{C}$ herhangi iki basit bağlantılı bölge ve $z \in \mathcal{D}_1$, $w \in \mathcal{D}_2$ ise $f(z) = w$ ve $f'(z) > 0$ koşullarını sağlayan tek türlü belirli bir $f : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ konform dönüşüm vardır. Buna göre yalınkat fonksiyonlar teorisinde herhangi basit bağlantılı bölgeler yerine birim disk göz önüne alınır.

$\mathbb{U}$ açık birim diskinde analitik ve yalınkat, $h(0) = h'(0) - 1 = 0$ şeklinde *normalize* edilmiş f fonksiyonlarının cümlesini $\mathcal{S}$ ile gösterelim. Normalizasyondan ötürü $h \in \mathcal{S}$ fonksiyonu

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{U}) \tag{2.1}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir.

$\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örnekleri aşağıdaki gibidir:

(i) $w = h(z) = z$, birim fonksiyon;

(ii) $w = h(z) = z(1-z)^{-1} = z + z^2 + z^3 + \cdots$, $\mathbb{U}$'yu Re $w > -1/2$ bölgesi üzerine resmeder;

(iii) $w = h(z) = z(1-z^2)^{-1} = z + z^3 + z^5 + \cdots$, $\mathbb{U}$'yu tüm kompleks düzlemden $(-\infty, -1/2]$ ve $[1/2, \infty)$ yarı-doğrularının çıkarılması ile elde edilen bölge üzerine resmeder;

(iv) $\log z = \log|z| + i \arg z$ şeklinde tanımlanan $\log z$ fonksiyonu, $\arg z$'nin sonsuz sayıda değeri olması nedeniyle, diğer bir değişle iki değeri arasındaki fark $2\pi i$'nin bir katı olduğundan, *çok-değerli* bir fonksiyondur. Dolayısıyla her bir z'ye $\log z$'nin sonsuz sayıda değerleri tekabül eder. $\arg z$'nin verilen bir değerine karşılık gelen $\log z$'ye logaritmanın bir *dal*ı denir. $\arg z$'nin $-\pi < \arg z \leq \pi$ aralığına tekabül eden dalına $\log z$'nin *esas değer*i adı verilir. Buna göre $\log z$ fonksiyonu her biri *tek değerli* sonsuz sayıda dala sahiptir. Dolayısıyla $\log z$ fonksiyonu seçilen sabit bir dal üzerinde tek-değerli olur. Bu koşul altında $w = h(z) = \frac{1}{2}\log[(1+z)/(1-z)]$, fonksiyonu $\mathbb{U}$'yu $-\pi/4 < \mathrm{Im} w < \pi/4$ bölgesi üzerine resmeder;

(v) $w = h(z) = z - \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}[1 - (1-z)^2]$, $\mathbb{U}$'yu bir kardioidin içine resmeder.

Yalınkat iki fonksiyonun toplamı yalınkat olmak zorunda olmadığından $\mathcal{S}$ sınıfına ait iki fonksiyonun toplamı $\mathcal{S}$'de olmayabilir. Örneğin,

$$h_1(z) = \frac{z}{1-z} \quad \text{ve} \quad h_2(z) = \frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmakla beraber

$$h_1'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad h_2'(z) = \frac{1}{(1+iz)^2} \Rightarrow h_1'(z) + h_2'(z) = \frac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

toplam fonksiyonu $z = \frac{1+i}{2}$ noktasında $h_1'(z) + h_2'(z) = 0$ değerini alır. Fakat $\mathcal{S}$ sınıfının sağladığı özellikler pek çok dönüşüm altında korunur. Bu temel dönüşümlerden bazıları aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

(i) *Eşlenik alma:* $h \in \mathcal{S}$ ve $g(z) = \overline{h(\bar{z})} = z + \overline{a_2}z^2 + \overline{a_3}z^3 + \cdots$ ise, $g \in \mathcal{S}$'dir.

(ii) *Döndürme:* $h \in \mathcal{S}$ ve $g(z) = e^{-i\theta}h(e^{-i\theta}z)$ ise, $g \in \mathcal{S}$'dir.

(iii) *Dilatasyon:* $h \in \mathcal{S}$ ve $0 < r < 1$ olmak üzere $g(z) = r^{-1}h(rz)$ ise $g \in \mathcal{S}$'dir.

(iv) *Disk otomorfizması.* $h \in \mathcal{S}$ ve $|\alpha| < 1$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{h\left(\frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}\right) - h(\alpha)}{(1-|\alpha|^2)h'(\alpha)}$$

ise, $g \in \mathcal{S}$'dir.

(v) *Değer bölgesi dönüşümü:* $h \in \mathcal{S}$ ve ψ fonksiyonu h'nin görüntü bölgesinde analitik, yalınkat, $\psi(0) = 0$ ve $\psi'(0) = 1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon ise, $\psi \circ h \in \mathcal{S}$'dir.

(vi) *Alınmamış değer dönüşümü:* $h \in \mathcal{S}$ ve $h(z) \neq \omega$ ise $g = \omega h/(\omega - h) \in \mathcal{S}$'dir.

(vii) *Karekök dönüşümü:* $h \in \mathcal{S}$ ve $g(z) = \sqrt{h(z^2)}$ ise, $g \in \mathcal{S}$'dir.

$\mathbb{U}$'da analitik, her $z \in \mathbb{U}$ için $\phi(0) = 0$ ve $|\phi(z)| < 1$ özelliklerini sağlayan $\phi(z)$ fonksiyonlarının cümlesini Ω ile gösterelim. Ω sınıfına ait ϕ fonksiyonları *Schwarz fonksiyonu* olarak adlandırılır.

Schwarz fonksiyonları sabordinasyon prensibinin temel elemanlarıdır. Sabordinasyon prensibi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$f(z)$ ve $g(z)$ açık birim diskte analitik iki fonksiyon ve $\phi(z) \in \Omega$ olsun. Her $z \in \mathbb{U}$ için $f(z) = g(\phi(z))$ eşitliği gerçekleniyor ise $f(z)$ *fonksiyonu* $g(z)$ *fonksiyonuna sabordinedir* denir ve $f \prec g$ ile gösterilir. Eğer g, $\mathbb{U}$'da yalınkat ise $f \prec g$ olması için gerek ve yeter şart $f(0) = g(0)$ ve $f(\mathbb{U}) \subseteq g(\mathbb{U})$ ifadelerinin sağlanmasıdır.

Şekil 2.3: $f \prec g$, f fonksiyonunun g ile sabordinasyonu

Bir eşitsizlikte, eşitliği veren fonksiyona *ekstremal fonksiyon* adı verilir. Aslında maksimum modül teoreminin basit fakat önemli bir sonucu olan ve geometrik fonksiyonlar teorisinde, basit bağlantılı bölgeler için ekstremal fonksiyon problemlerinin çözümünde kullanılan Schwarz Lemması şu şekilde ifade edilir:

Lemma 2.2.1. *([2], 135) $\phi(z) \in \Omega$ olsun. Bu durumda, her $z \in \mathbb{U}$ için $|\phi(z)| \leq |z|$ ve $|\phi'(0)| \leq 1$ eşitsizlikleri geçerlidir. Eşitlik hali, $|c| = 1$ olmak üzere, $\phi(z) = cz$ fonksiyonları için geçerlidir.*

Yalınkat fonksiyonlar teorisindeki temel argümanlardan birisi de, sırası ile, fonksiyonların ve türevlerinin modüllerin alt ve üst sınırlarının belirlendiği genişleme (growth), distorsiyon (distortion) ve örtülüş teoremleridir.

Teorem 2.2.2. *([14], s. 31-33) $h(z) \in \mathcal{S}$ ise her $|z| = r < 1$ için*

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |h(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \quad \textit{(Genişleme Teoremi)}$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |h'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad \textit{(Distorsiyon Teoremi)}$$

ve

$$h(\mathbb{U}) \supset \mathcal{D}(0, 1/4) \quad \textit{(Örtülüş Teoremi)}$$

ifadeleri sağlanır. Burada $\mathcal{D}(0, 1/4)$, orijin merkezli ve $1/4$ yarıçaplı diski göstermektedir.

$\mathcal{S}$ sınıfına ait en önemli fonksiyonlardan biri *Koebe fonksiyonu* olarak adlandırılan

$$k(z) = z/(1-z)^2 = z + \sum_{n=2}^{\infty} nz^n \tag{2.2}$$

fonksiyonudur. Koebe fonksiyonunun *rotasyon fonksiyonu*

$$k_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}, \quad (z \in \mathbb{U})$$

olarak tanımlanır ve her $\theta \in \mathbb{R}$ için $k_\theta(z) \in \mathcal{S}$'dir.

Koebe fonksiyonu ve rotasyonları pek çok eşitsizlikte ekstremal fonksiyon rolünü oynar. Örneğin Teorem 2.2.2'deki eşitsizliklerde eşit hali, h'nin (2.2) ifadesi ile verilen Koebe fonksiyonunun uygun bir rotasyonu olması durumunda elde edilir.

Koebe fonksiyonu $\mathbb{U}$'yu tüm kompleks düzlemden $(-\infty, -1/4]$ yarı-doğrusunun çıkarılması ile elde edilen bölge üzerine resmeder. Bu olgu

$$k(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

yazılımı ve $w = (1+z)/(1-z)$ fonksiyonunun $\mathbb{U}$'yu konform olarak Re $w > 0$ sağ-yarı düzlemine resmetmesinden görülebilir (Şekil 2.4).

Şekil 2.4: $\mathbb{U}$ birim diskinin Koebe fonksiyonu altında resmi

1907 yılının başlarında Koebe ([21]) aşağıdaki sonucu ortaya koymuştur.

Teorem 2.2.3. $\bigcap_{h\in\mathcal{S}} h(\mathbb{U}) \supset \{w : |w| \leq c\}$ *koşulunu sağlayan bir pozitif* c *sabiti vardır.*

Bu teorem Bieberbach'ın ([8]) $c = 1/4$ olduğunu bulduğu 1916 yılına kadar pek uygulama bulamamıştır. $c = 1/4$ olmasının anlamı, birim diskin $h \in \mathcal{S}$ fonksiyonu altındaki görüntüsünün $|w| < 1/4$ açık diskini örttüğüdür. Ayrıca k, (2.2) ifadesi ile verilen Koebe fonksiyonu olmak üzere $k(\mathbb{U})$ içinde kalan en büyük diskin yarıçapı 1/4'tür. Aynı makalede Bieberbach aşağıdaki sanıyı vermiştir.

Sanı 2.2.4. *([8]) $h \in \mathcal{S}$ ise her $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ geçerlidir. Her $n \geq 2$ için $|a_n| = n$ olması hali h'nin* (2.2) *ifadesi ile verilen Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olması durumunda elde edilir.*

Aslında Bieberbach makalesinde $|a_2| \leq 2$ olduğunu ispatlamış ve bu sonucun yukarıdaki şekilde genelleştirilebileceğini dipnotta öneri olarak "Dass $k_n \geq n$ zeigt das Beispiel $\sum nz^n$. Vielleicht ist überhaupt $k_n = n$." sözleri ile belirtmiştir. Bundan birkaç yıl sonra Loewner ([23]) bu tip fonksiyonların parametrik gösterilimlerini geliştirmiş ve bu yolla $|a_3| \leq 3$ olduğunu ispatlamıştır. Dördüncü katsayı için eşitsizlik 1955 yılına kadar bulunamamıştır. Garabedian ve Schiffer ([16]) bir varyasyonel metot kullanarak sonunda $|a_4| \leq 4$ olduğunu ispatlamayı başarmışlardır. Fakat ispat teknikleri oldukça uzun ve zordur. Beş yıl sonra, 1960 yılında Charzyński ve Schiffer ([10], [11]) bu katsayı için birbiri ile bağlantılı iki basit ispat vermişlerdir. 1968 yılında Pederson ([26]) ve Ozawa ([25]) $|a_6| \leq 6$ olduğunu ispatlamışlardır.

Koebe fonksiyonunun yalınkat fonksiyonlar teorisindeki ekstremal özelliğinden ötürü, (2.2) açılımındaki katsayılara bakılarak $|a_n| \leq n$ olduğunu tahmin etmek zor değildir. Aslında, Bieberbach Sanısı ile beraber $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonların katsayı problemi üzerine altı tane önemli sanı verilmiştir ve bu sanıların tamamı birbirleri ile bağlantılıdır. Bieberbach Sanısı'nın doğruluğu, 79 yıl sonra, 1985 yılında Luis de Branges tarafından ispatlanmıştır ([7]). Bu sanıyı kanıtlama çabaları $\mathcal{S}$'nin pek çok alt sınıfını tanımlama gereğini doğurmuştur. Bu sınıflardan bizim çalışmamız kapsamında olanı, yıldızıl fonksiyonların genelleştirilmiş hali, Janowski yıldızıl fonksiyonlar sınıfıdır.

2.2.1 Pozitif Reel Kısma Sahip Fonksiyonlar Sınıfı

$\mathbb{U}$'da analitik $P(z) = 1 + P_1 z + P_2 z^2 + \cdots$ fonksiyonu $\text{Re}P(z) > 0$ koşulunu gerçeklerse *pozitif reel kısma sahip fonksiyon* adı verilir ve bu sınıfa ait fonksiyonların cümlesi $\mathcal{P}$ ile gösterilir. Bu fonksiyon sınıfı *Carathéodory sınıfı* olarak da bilinir. $P(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{P}$ sınıfına ait olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$P(z) = \frac{1 + \phi(z)}{1 - \phi(z)} \quad (\phi(z) \in \Omega, z \in \mathbb{U})$$

eşitliğinin sağlanmasıdır ([9]).

$-1 \leq B < A \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan A ve B reel keyfi sabitleri göz önüne alınsın. $\mathbb{U}$'da analitik $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$ açılımına sahip $p(z)$ fonksiyonu $\phi(z) \in \Omega$ olmak üzere her $z \in \mathbb{U}$ için

$$p(z) = \frac{1 + A\phi(z)}{1 + B\phi(z)} \tag{2.3}$$

eşitliğini gerçeklerse $p(z) \in \mathcal{P}(A, B)$'dir denir ([20]). Buna göre $\mathcal{P}(A, B)$ sınıfı Carathédory fonksiyon sınıfının bir genelleştirilmesidir ($\mathcal{P}(1, -1) \equiv \mathcal{P}$).

$p(z) = (1 + Az)/(1 + Bz)$ fonksiyonu $|z| = r < 1$ birim diskini merkezi $\{(1 - ABr^2)/(1 - B^2r^2), 0\}$ noktasında bulunan ve yarıçapı $(A - B)r/(1 - B^2r^2)$ olan çemberler üzerine resmeder.

Şekil 2.5: $C_r = \partial\mathbb{U}_r$ çemberlerinin p dönüşümü altında resmi

Dolayısıyla

$$\left| p(z) - \frac{1 - ABr^2}{1 - B^2r^2} \right| \leq \frac{(A - B)r}{1 - B^2r^2}$$

yazılabilir.

$\mathcal{P}(A, B)$ sınıfı 1973 yılında W. Janowski tarafından tanımlandığından bu sınıfa *Janowski pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı* ([20]) adı verilir. $\mathcal{P}(A, B)$, A ve B parametrelerine bağlı olarak teorideki en genel sınıflardan biridir. Burada A ve B yerine özel değerler vererek üzerinde çalışılan diğer alt sınıfları elde etmek mümkündür.

2.2.2 Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı

$\mathcal{D}$, kompleks düzlemde basit bağlantılı bir bölge olsun ve $w_0 \in \mathcal{D}$ noktası verilsin. w_0 noktasından geçen her doğru $\mathcal{D}$'nun sınırını yalnız bir noktada kesiyorsa $\mathcal{D}$'ye *w_0 noktasına göre yıldızıl bölge* denir. Eğer w_0 noktası orijin ise bölgeye *yıldızıl bölge* (starlike domain) adı verilir.

Şekil 2.6: (a) Yıldızıl bölge (b) w_0 noktasına göre yıldızıl bölge

Birim diski yıldızıl bir bölge üzerine resmeden konform fonksiyonlara *yıldızıl fonksiyon* (starlike function) denir ve yıldızıl fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir. Buradan çıkan bir olgu $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ olduğudur.

Yıldızıl fonksiyonlara örnek olarak $k(z) = z/(1-z)^2$ Koebe fonksiyonundan elde edilen $\log k'(z)$ fonksiyonu verilebilir.

Aşağıdaki teorem bize yıldızıl fonksiyonların analitik karakterizasyonunu verir.

Teorem 2.2.5. *([14], s. 41) Birim disk $\mathbb{U}$'da analitik $h(z)$ fonksiyonu $h(0) = 0$ ve $h'(0) = 1$ koşullarını gerçeklesin. $h \in \mathcal{S}^*$ olması için gerek ve yeter şart her $z \in \mathbb{U}$ için*

$$Re\left\{\frac{zh'(z)}{h(z)}\right\} > 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

$\mathbb{U}$'da analitik $h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ açılımına sahip $h(z)$ fonksiyonu $p(z) \in \mathcal{P}(A, B)$ olmak üzere her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\frac{zh'(z)}{h(z)} = p(z) \tag{2.4}$$

eşitliğini gerçeklerse $h(z) \in \mathcal{S}^*(A, B)$'dir denir ve bu sınıfa ait fonksiyonlara *Janowski yıldızıl fonksiyon* ([20]) adı verilir ($\mathcal{S}^*(1, -1) = \mathcal{S}^*$).

Teorem 2.2.5, $\mathcal{S}^*(A,B)$ sınıfına ait fonksiyonlar için de geçerlidir. Yani $h(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik, $-1 \leq B < A \leq 1$ ve $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zh'(z)}{h(z)}\right\} > \frac{1-A}{1-B} \Leftrightarrow \frac{zh'(z)}{h(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}$$

ifadesi geçerlidir.

Bölüm 3

HARMONİK FONKSİYONLAR

Harmonik fonksiyonlar teorisi matematiğin, diğer bilim alanlarında uygulaması çok olan bir dalıdır. Özellikle mühendislik, tıp, yön-eylem araştırması, fizik ve uygulamalı matematiğin pek çok alanlarında bu tip fonksiyonlar sıklıkla kullanılır. Örneğin fizik ve mühendislikte bir harmonik fonksiyon, potansiyel fonksiyonu olarak isimlendirilir ve termal kararlı sistemler, ideal akışkanlar, elektromanyetik teori gibi konularda önemli bir yere sahiptir.

3.1 Temel Tanımlar

$w = f(z)$ fonksiyonu $z = x+iy$ ve $w = u+iv$ olmak üzere $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde konform bir fonksiyon olsun. Buna göre

$$du = u_x dx + u_y dy \quad \text{ve} \quad dv = v_x dx + v_y dy$$

yazılabilir. Bu eşitlikler aynı zamanda kompleks formda

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y) \quad \text{ve} \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y) \tag{3.1}$$

olmak üzere

$$dw = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z} \tag{3.2}$$

şeklinde de ifade edilebilir. (3.1) eşitliklerinden hareketle

$$f_z = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y), \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y)$$

elde edilir. Bu ise

$$J_f(z) = u_x v_y - u_y v_x = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$$

olduğunu gösterir.

Eğer Jakobiyeni pozitif ise fonksiyona *yön-koruyan* (sense-preserving), negatif ise *yön-değiştiren* (sense-reversing) denir. $f(z)$ fonksiyonu yön-koruyan, yani $|f_{\bar{z}}| < |f_z|$ ise (3.2) ifadesinden

$$(|f_z| - |f_{\bar{z}}|)|dz| \leq |dw| \leq (|f_z| + |f_{\bar{z}}|)|dz| \tag{3.3}$$

yazılabilir.

Yön-koruyan özelliği kullanılarak, bu tip fonksiyonlara ait dilatasyon ve kompleks dilatasyon kavramları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır ([3], s. 5):

- $D_f = \dfrac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} \geq 1$ ifadesine f fonksiyonunun *dilatasyonu* denir.
- $\mu_f = \dfrac{f_{\bar{z}}}{f_z}$ ifadesine f fonksiyonunun *kompleks dilatasyonu* denir.

Buradan $d_f = |\mu_f| = \frac{|f_{\bar{z}}|}{|f_z|} < 1$ olduğu görülür. Yön-koruyan fonksiyonların dilatasyonları arasında

$$D_f = \frac{1+d_f}{1-d_f}, \quad d_f = \frac{D_f - 1}{D_f + 1}$$

ilişkisi vardır.

Bir fonksiyonun z noktasında konform olması için gerek ve yeter şart $D_f = 1$, $d_f = 0$ eşitliklerinin sağlamasıdır. f fonksiyonu, D_f sınırlı ise *hemen-hemen-konform* (quasi-konform) olarak isimlendirilir. Eğer $D_f \leq K$ ise f, *K-hemen-hemen-konform*dur denir. $D_f \leq K$ koşulu $d_f \leq k = (K-1)/(K+1)$ olmasına denktir. 1-hemen-hemen-konform fonksiyonlar konform fonksiyonlardır.

3.2 Harmonik Fonksiyonlar ve Temel Özellikleri

$\mathcal{D}$ bölgesinde tanımlı, sürekli ikinci kısmi türeve sahip reel değerli $u(x, y)$ fonksiyonu

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanan Laplace diferansiyel denklemini gerçeklerlerse (reel) *harmonik* olarak adlandırılır. $\mathcal{D}$ bölgesinde tanımlı, kompleks değerli $f(z)$ fonksiyonunun reel ve imajiner kısmı $\mathcal{D}$'de harmonik ise $f(z)$ fonksiyonu *$\mathcal{D}$'de harmoniktir* denir.

Tanımdan hemen çıkan bir sonuç, her analitik fonksiyonun harmonik olduğudur. Bununla beraber kompleks değerli harmonik fonksiyonların analitik olması gerekmez. Örneğin $w = f(z) = -2xy + i(y^2 - x^2)$ fonksiyonu kompleks düzlemde harmonik olmakla beraber hiçbir yerde analitik değildir. Laplace denkleminin lineer karakterizasyonundan ötürü iki harmonik fonksiyonun toplamı ve bir sabit ile çarpımı yine harmoniktir. Analitik fonksiyonların aksine, iki harmonik fonksiyonun çarpımı veya bileşkesi harmonik olmak zorunda değildir. Hatta f harmonik ise $1/f$ ve f^{-1} fonksiyonları harmonik olmayabilir. Fakat bir harmonik fonksiyonun bir analitik fonksiyonla bileşkesi yine harmoniktir. En basit harmonik fonksiyon $ax + by$ lineer fonksiyonudur.

Cauchy-Riemann denklemlerini gerçekleyen bir (u, v) fonksiyon çifti *eşlenik çift* olarak adlandırılır ve v'ye u'nun *harmonik eşleniği* denir. Buradan çıkan bir sonuç $-u$'nun, v'nin harmonik eşleniği olduğudur.

$u(x, y)$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ bölgesinde harmonik olsun. Bu fonksiyon yardımı ile $g = u_x - iu_y$ fonksiyonunu tanımlayalım. $U = u_x$ ve $V = -u_y$ dersek $g = U + iV$ yazabiliriz. u harmonik fonksiyonunun verilen bölgede her mertebeden türevi olduğundan, u'nun türevi olan U fonksiyonu ve benzer şekilde V fonksiyonu ve bu fonksiyonların birinci mertebeden türevleri de süreklidir. Yani, $U_x = u_{xx}$ ve $V_y = -u_{yy}$ fonksiyonları da $\mathcal{D}$'de süreklidir. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ olduğundan

$$u_{xx} = U_x = -u_{yy} = V_y \Rightarrow U_x = V_y$$

ve

$$U_y = u_{xy} = u_{yx} = -V_x \Rightarrow U_y = -V_x$$

eşitlikleri sağlanır. g fonksiyonu $\mathcal{D}$'de Cauchy-Riemann denklemlerini gerçeklediğinden bu bölgede analitiktir. Dolayısıyla basit bağlantılı $\mathcal{D}$ bölgesinde $f' = g$ olacak şekilde analitik bir f fonksiyonu bulunabilir. Buradan,

$$U + iV = (\mathrm{Re}f)_x + i(\mathrm{Im}f)_x = -i((\mathrm{Re}f)_y + i(\mathrm{Im}f)_y)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$(\mathrm{Re}f)_x = U = u_x, (\mathrm{Re}f)_y = -V = u_y \Rightarrow \mathrm{Re}f = u + c$$

sonucuna ulaşılır ki bu ise her harmonik fonksiyonun, analitik bir fonksiyonun reel kısmı olarak yazılabileceğini gösterir. Burada $\mathrm{Im}f$, u'nun harmonik eşleniğidir.

$f = u + iv$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ bölgesinde harmonik olsun. Yukarıda anlatılanlardan dolayı

$$\mathrm{Re}F = \mathrm{Re}f = u, \quad \mathrm{Re}G = \mathrm{Im}f = v, \tag{3.5}$$

olacak şekilde $\mathcal{D}$ bölgesinde analitik F ve G fonksiyonları vardır.

$$h = (F + iG)/2 \ \text{ ve } g = (F - iG)/2 \tag{3.6}$$

olarak tanımlanan h, g fonksiyonları $\mathcal{D}$ bölgesinde analitiktir ve $f = h + \bar{g}$ eşitliğini sağlarlar. Gerçekten (3.5) ifadesinden hareketle $F = u + im$ ve $G = v + in$ olarak yazılır ve (3.6) eşitlikleri kullanılırsa

$$h = \frac{(u-n) + i(v+m)}{2} \quad \text{ve} \quad \bar{g} = \frac{(u+n) + i(v-m)}{2} \tag{3.7}$$

elde edilir. Bu ise $f = h + \bar{g}$ demektir.

Tersine, $h = h_1 + ih_2$, $g = g_1 + ig_2$ verilen bölgede analitik ve $f = h + \bar{g}$ olsun. Buradan $\mathrm{Re}f = h_1 + g_1$ ve $\mathrm{Im}f = h_2 - g_2$ yazılabilir. h ve g analitik olduklarından h_1, h_2, g_1 ve g_2 fonksiyonları harmoniktir. Laplacian operatörünün lineerliğinden $h_1 + g_1$ ve $h_2 - g_2$ fonksiyonlarının harmonik olduğu görülür. Bu ise f fonksiyonunun verilen bölgede harmonik olması demektir.

Yukarıda söylenenlerden ötürü aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 3.2.1. *Basit bağlantılı $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı kompleks değerli $f = u + iv$ fonksiyonunun harmonik olması için gerek ve yeter şart h ve g verilen bölgede analitik olmak üzere $f = h + \bar{g}$ şeklinde yazılabilmesidir.*

$f = h + \bar{g}$ gösterilişine f'nin *kanonik gösterilimi* adı verilir. Burada h, f'nin *analitik kısmı*, g, f'nin *eş-analitik kısmı* (co-analytic part) olarak isimlendirilir. Ayrıca $h' = f_z$ ve $g' = \overline{f_{\bar{z}}}$ fonksiyonları f'nin tanımlı olduğu bölgede analitiktir.

3.3 Harmonik Yalınkat Fonksiyonlar

$\mathcal{D}$ bölgesinde tanımlı f harmonik fonksiyonu bire-bir ise *harmonik yalınkat fonksiyon* adını alır. Örneğin, $f(z) = z - 1/\bar{z} + 2\log|z|$ fonksiyonu birim diskin dışından $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ üzerine bir harmonik yalınkat fonksiyondur. f'nin analitik kısmı $h = z + \log z$ ve eş-analitik kısmı ise $g(z) = \log z - 1/z$ şeklindedir. Bölüm

2.2'de anlatıldığı üzere $\log z$ fonksiyonu seçilen sabit bir dal üzerinde tek-değerli fonksiyondur.

Konform olması gerekmeyen harmonik yalınkat fonksiyonlara en basit örnek $f(z) = \alpha z + \gamma + \beta \bar{z}$ ($|\alpha| \neq |\beta|$) afin fonksiyonudur. Bu fonksiyon bir takım önemli özelliklere sahiptir. Örneğin $\mathbb{C}$ kompleks düzlemini kendi üzerine resmeden en genel harmonik yalınkat fonksiyon afin fonksiyondur. Ayrıca, $\mathcal{D}$ basit bağlantılı bir bölge olmak üzere, f afin fonksiyonu $f(\mathcal{D}) = \mathbb{C}$ eşitliğini sağlayan tek harmonik yalınkat fonksiyondur.

Teorem 2.1.1'den analitik f fonksiyonunun z noktasında yerel yalınkat olması için gerek ve yeter şartın, bu noktada $f'(z) \neq 0$ ($\equiv J_f(z) \neq 0$) eşitsizliğinin sağlanması olduğunu biliyoruz. Lewy, 1936 yılında bir harmonik fonksiyonun yerel yalınkat olma koşulunu aşağıdaki şekilde vermiştir:

Teorem 3.3.1. *([22]) f harmonik fonksiyonunun bir z_0 noktasının bir komşuluğunda yerel yalınkat olması için gerek ve yeter şart, z_0 noktasında $J_f(z) \neq 0$ eşitsizliğini sağlamasıdır.*

Teorem 3.3.1'den anlaşılacağı üzere bir harmonik yalınkat fonksiyonun Jakobiyeni yalınkatlık özelliğinin ortaya konması bakımından büyük önem taşır. Bir harmonik yalınkat fonksiyon ya yön-koruyan yada yön-değiştirendir. Eğer f yön-koruyan harmonik ise $\overline{f}$ yön-değiştiren harmonik olur. Konform fonksiyonlar yön-koruyan fonksiyonlardır.

Bu çalışmada üzerinde durulan harmonik yalınkat fonksiyon sınıfları, Jakobiyeni pozitif olan yani, yön-koruyan harmonik fonksiyonlardır.

$f = u + iv$ harmonik ise, $f = h + \bar{g}$ kanonik gösterilimi kullanılarak f'nin Jakobiyeni

$$J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$$

eşitliği ile de verilebilir. f yön-koruyan ise $|h'(z)| > |g'(z)|$ dır ve

$$\frac{|f_{\bar{z}}|}{|f_z|} = \frac{|g'(z)|}{|h'(z)|} < 1$$

ifadesi sağlanır.

Teorem 3.3.1'e göre, $\mathcal{D}$ bölgesinde tanımlı $f = h + \bar{g}$ harmonik fonksiyonunun yerel yalınkat ve yön-koruyan olması için gerek ve yeter şart $|g'(z)| < |h'(z)|$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

$\nu = g'/h'$ fonksiyonu f'nin *ikinci dilatasyon*u olarak adlandırılır ve bu fonksiyonların cümlesi $\mathcal{V}$ ile gösterilir. Yön-koruyan harmonik yalınkat fonksiyonlar için $|\nu| < 1$ sağlanır.

Birim disk $\mathbb{U}$'da harmonik $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{ve} \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_{-n} z^n \tag{3.8}$$

olmak üzere

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta} \quad (0 \le r < 1)$$

şeklinde bir seri açılımına sahiptir.

3.4 Normalize Edilmiş Yön-Koruyan Harmonik Fonksiyonlar

Bölüm 2.2'de olduğu gibi yön-koruyan harmonik yalınkat fonksiyonlar teorisinde de araştırmacılar bazı normalizasyonlar yapmışlardır. Bu amaçla herhangi bir basit bağlantılı $\mathcal{D}$ bölgesi yerine açık birim disk $\mathbb{U}$ alınmıştır.

Birim disk $\mathbb{U}$'da harmonik f fonksiyonunun kanonik gösterilişinin h ve g analitik fonksiyonlarına bağlı olarak $f = h + \bar{g}$ şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. (3.8)'de verilen serisi açılımında $\bar{a}_{-n}$ katsayısı yerine b_n yazarsak

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \tag{3.9}$$

ifadesi elde edilir. f fonksiyonu $\mathbb{U}$'da yön-koruyan ve harmonik olduğundan Jakobiyeni pozitiftir. Dolayısıyla her $z \in \mathbb{U}$ için $|g'(z)| < |h'(z)|$ eşitsizliği sağlanır. Buradan $h'(z) \neq 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla genelliği bozmadan $h(0) = 0, h'(0) = 1$ kabul edilebilir.

$a_0 = b_0 = 0$, $a_1 = 1$ normalizasyonunu gerçekleyen birim diskte yön-koruyan harmonik fonksiyonların cümlesi $\mathcal{S}_H$ ile gösterilir. Bu tanımlama altında analitik yalınkat fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{S}$ ile $\mathcal{S}_H$ arasında $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_H$ içerme bağıntısı olduğu görülür. Normalizasyondan dolayı $\mathcal{S}_H$ sınıfına ait bir $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ fonksiyonu $h(z)$ ve $g(z)$, $\mathbb{U}$'da analitik olmak üzere

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n} = h(z) + \overline{g(z)} \tag{3.10}$$

açılımına sahiptir. Yön-koruyan özelliğinden $|b_1| < 1$ olmak zorundadır. Dolayısıyla, $f \in \mathcal{S}_H$ ise $(f - \overline{b_1 f})/(1 - |b_1|^2) \in \mathcal{S}_H$ dir. Böylece, $\mathcal{S}_H^0 = \{f \in \mathcal{S}_H : g'(0) = b_1 = 0\}$ sınıfını tanımlayabiliriz.

Lewy'nin Teorem 3.3.1'i ortaya koymasından yaklaşık kırk sekiz yıl sonra Clunie ve S. Small ([12]), yön-koruyan harmonik fonksiyonların, analitik yalınkat fonksiyonların sahip olduğu temel özellikleri ve eşitsizlikleri sağlayıp sağlamadığını araştırdıkları makalelerini yayınladılar. Bu makale harmonik yalınkat fonksiyonlar teorisinin gelişiminde önemli bir role sahiptir.

Clunie ve Sheil-Small ([12]) (2.2) ile verilen analitik Koebe fonksiyonunun analoğunu $\mathcal{S}_H^0$ sınıfı için aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}, \quad G(z) = \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$$

olmak üzere $k_0 = H + \overline{G} \in \mathcal{S}_H^0$ fonksiyonuna *harmonik Koebe fonksiyonu* adı verilir. k_0 fonksiyonu, $\mathbb{U}$ birim diskini kompleks düzlemden $(-\infty, -1/6]$ reel aralığının çıkarılması ile elde edilen bölge üzerine resmeder. Ayrıca $z = 1$ noktası dışında birim disk üzerindeki her nokta için $k_0(z) = -1/6$ dır.

Aynı makalede Clunie ve Sheil-Small, $\mathcal{S}_H^0$ sınıfı için aşağıdaki teoremi vermişlerdir:

Teorem 3.4.1. *([12]) $f \in \mathcal{S}_H^0$ ise*

$$|f(z)| \geq \frac{1}{4}\frac{|z|}{(1+|z|)^2}$$

eşitsizliği her $z \in \mathbb{U}$ için geçerlidir. Ayrıca $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1/16\} \subset f(\mathbb{U})$ içermesi her $f \in \mathcal{S}_H^0$ için sağlanır.

Teorem 3.4.1'de verilen sınırlar kesin (sharp) değildir. Yani eşitliği sağlayan ekstremal fonksiyon bulunamamıştır. Yalınkat fonksiyonlar teorisinde ki Koebe fonksiyonunun ekstremal özelliği göz önüne alındığında, k_0 harmonik Koebe fonksiyonu 1/16 yarıçapının, 1/6 olarak iyileştirilebileceğini sezdirir. Dolayısıyla aşağıdaki sanıyı verebiliriz.

Sanı 3.4.2. *([12]) Her $f \in \mathcal{S}_H^0$ için $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1/6\} \subset f(\mathbb{U})$ içermesi doğrudur.*

$f(z) \in \mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonların ikinci katsayıları için kesin sınır bulma problemi eski fakat çok önemli bir problemdir. 1926 yılında Bieberbach $|a_2| \leq 2$ ([8]) olduğunu ispatlamış ve bu sonucu genişleme, distorsiyon ve örtülüş teoremlerinin kesin formlarını bulmada kullanmıştır. Harmonik yalınkat fonksiyonlar teorisinde ise henüz $\mathcal{S}_H^0$ sınıfına ait fonksiyonların analitik kısmının ikinci katsayısı için kesin bir üst sınır verilememiştir. Fakat eş-analitik kısım için aşağıdaki kesin sınır söz konusudur:

$f = h + \bar{g}$ fonksiyonu yön-koruyan ise ikinci dilatasyonu $\nu = g'/h'$, $|\nu(z)| < 1$ koşulunu gerçekler. Eğer $f \in \mathcal{S}_H^0$ sınıfından bir fonksiyon ise $g'(0) = 0$ olduğundan $\nu(0) = 0$'dır. Yani $f \in \mathcal{S}_H^0$ sınıfına ait fonksiyonların dilatasyonları Schwarz fonksiyonudur. Dolayısıyla Schwarz Lemması'ndan (Lemma 2.2.1) $|\nu'(0)| \leq 1$ sağlanır. Eşitlik hali $|c| = 1$ olmak üzere $\nu(z) = cz$ fonksiyonu için geçerlidir. Diğer taraftan

$$\nu(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)} = \frac{2b_2 z + 3b_3 z^3 + \cdots}{1 + 2a_2 z + \cdots} = 2b_2 z + (3b_3 - 4a_2 b_2)z^2 \Rightarrow \nu'(0) = 2b_2$$

olduğundan Schwarz Lemması kullanılarak $|b_2| \leq 1/2$ sonucuna ulaşırız. Burada eşitlik hali $\nu(z) = z$ ve birim fonksiyonun rotasyonları için geçerlidir.

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}, \quad G(z) = \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$$

olmak üzere $k_0 = H + \overline{G} \in \mathcal{S}_H^0$ harmonik Koebe fonksiyonunu

$$H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n \quad G(z) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n z^n$$

şeklinde yazarsak, H ve G'nin katsayıları

$$A_n = \frac{1}{6}(2n+1)(n+1), \quad B_n = \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $\mathcal{S}_H^0$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki sanıyı verebiliriz:

Sanı 3.4.3. *([12])* $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$ *ise*

$$\begin{aligned} ||a_n| - |b_n|| &\leq n \quad (n = 2, 3, \cdots), \\ |a_n| &\leq \frac{(2n+1)(n+1)}{6}, \\ |b_n| &\leq \frac{(2n-1)(n-1)}{6} \quad (n = 2, 3, \cdots) \end{aligned} \tag{3.11}$$

dır. Eşitlik hali $f = k_0$ *için geçerlidir.*

Clunie ve Sheil-Small'ın bu sanısı (Sanı 3.4.3), Bieberbach Sanısı'nın (Sanı 2.2.4), $\mathcal{S}_H^0$ sınıfına ait fonksiyonlar için verilen analoğudur.

Sanı 3.4.3'den çıkan bir sonuç $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$ için $|a_2| \leq 5/2$ olduğudur. Bu eşitsizlik teoride önemli bir yere sahiptir. Sheil-Small eğer bu eşitsizlik doğru ise $\mathcal{S}_H^0$ sınıfına ait fonksiyonların örtülüş, genişleme ve distorsiyon teoremleri için kesin sınırlar verilebileceğini belirtmiştir ([28]). Ayrıca $|a_2| \leq 5/2$ ise $|b_2| \leq 1/2$ olmasından dolayı $||a_2| - |b_2|| \leq 2$ olarak elde edilir ki $\mathcal{S}_H^0$ sınıfı için Bieberbach Sanısı'nın $n = 2$ olması durumunda doğruluğu kolayca görülür. Bütün bu anlatılanlara karşılık a_2 katsayısı için şu ana kadar elde edilen sınırlar istenilen sonucu vermekten uzaktır. Cluine ve Sheil-Small ([12]) $|a_2| < 12,172$ olduğunu göstermiş ve daha sonra Sheil-Small ([28]) $|a_2| < 57$ eşitsizliğini ispatlamıştır. Sheil-Small'ın bulduğu bu sınıra Duren ([15], s. 96) küçük bir modifikasyon yaparak $|a_2| < 49$ olduğunu göstermiştir. Ayrıca $\mathcal{S}_H^0$ sınıfı için verilen örtülüş sanısı (Sanı 3.4.2) doğru olsa bile, yani Teorem 3.4.1'deki 1/16 yarıçapının 1/6 olarak değiştirilebileceği ispatlansa dahi, Sheil-Small'ın ispat tekniğini kullanarak bulunacak yeni katsayı sınırının $|a_2| < 17$ olacağını belirtmiştir.

$f_0 \in \mathcal{S}_H^0$, $|b_1| < 1$ olmak üzere $f \in \mathcal{S}_H$ sınıfına ait fonksiyonlar $f = f_0 + \overline{b_1 f_0}$ şeklinde yazılabileceğinden

$$|a_n| \leq \frac{1}{6}(2n+1)(n+1), \quad |b_n| \leq \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)$$

eşitsizlikleri $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H$ için

$$|a_n| < \frac{1}{3}(2n^2+1), \quad |b_n| < \frac{1}{3}(2n^2+1)$$

haline gelir. Dolayısıyla, $\mathcal{S}_H^0$ sınıfı için yapılan $|a_2| \leq 5/2$ sanısı $\mathcal{S}_H$ sınıfı için $|a_2| < 3$ haline gelir. Dolayısıyla $\mathcal{S}_H$ sınıfına ait fonksiyonların katsayıları için aşağıdaki sanı söz konusudur:

Sanı 3.4.4. *([28])* $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n} \in \mathcal{S}_H$ *ise*

$$|a_n| \leq \frac{2n^2+1}{3} \quad (|n| = 2, 3, \cdots)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Sheil-Small'ın Sanı 3.4.4'ü vermesinden on bir yıl sonra Wang benzer bir sanı ortaya koymuştur:

Sanı 3.4.5. *([30])* $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n} \in \mathcal{S}_H$ *ise*

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad ||a_n| - |b_n|| \leq (1 + |b_1|)n \quad (n = 2, 3, \cdots), \\
&(2) \quad |a_n| \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6} + |b_1| \frac{(n-1)(2n-1)}{6} \quad (n = 2, 3, \cdots), \\
&(3) \quad |b_n| \leq \frac{(n-1)(2n+1)}{6} + |b_1| \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \quad (n = 2, 3, \cdots)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

$\mathcal{S}_H$ sınıfına ait fonksiyonlar için $|b_1| < 1$ olduğu kullanılarak Sanı 3.4.5 aşağıdaki şekilde yazılabilir:

Sanı 3.4.6. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n} \in \mathcal{S}_H$ *ise*

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad ||a_n| - |b_n|| \leq 2n \quad (n = 2, 3, \cdots), \\
&(2) \quad |a_n| \leq \frac{2n^2+1}{3} \quad (n = 2, 3, \cdots), \\
&(3) \quad |b_n| \leq \frac{2n^2+1}{3} \quad (n = 2, 3, \cdots)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Sheil-Small, $\mathcal{S}_H^0$ sınıfına ait f fonksiyonları için genişleme teoremini aşağıdaki şekilde vermiştir:

Teorem 3.4.7. *([28]) Tüm $f \in \mathcal{S}_H$ fonksiyonlarına ait a_2 katsayılarının modüllerinin supremumu α olsun. Bu durumda $\mathcal{S}_H^0$ sınıfına ait her f fonksiyonu*

$$\frac{1}{2\alpha}\left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] \leq |f(z)| \leq \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha} - 1\right] \quad (r = |z| < 1) \tag{3.12}$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca her $f \in \mathcal{S}_H^0$ fonksiyonunun görüntü bölgesi $|w| < \frac{1}{2\alpha}$ diskini içerir.

Eğer Sanı 3.4.4 doğru ise, yani $\mathcal{S}_H$ sınıfı için $|a_2| = \alpha = 3$ ise Teorem 3.4.7'nin sınırları mümkün olan en iyi sınırlar haline gelir.

Teorideki bir diğer problem ise Riemann Gönderim Teoremi'nin, yön-koruyan harmonik fonksiyonlar teorisindeki anoloğunu ortaya koymaktır. Analitik yalınkat fonksiyonlardaki Riemann Gönderim Teoremi'ne bakılarak, yön-koruyan harmonik fonksiyonlar için teoremin ifadesinin

"$\mathcal{D} \neq \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge olsun ve $|\nu(z)| < 1$ koşulunu sağlayan $\nu \in \mathbb{U}$ analitik fonksiyonu verilsin. $\nu = \overline{f_{\bar{z}}}/f_z$ dilatasyonuna sahip, $\mathbb{U}$'yu $\mathcal{D}$ üzerine resmeden yön-koruyan harmonik bir f fonksiyonu vardır. Ayrıca bu f fonksiyonu $w_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere $f(0) = w_0$ ve $f_z(0) > 0$ normalizasyonları altında tektürlü belirlidir."

şeklinde olabileceğini düşünebiliriz. Fakat $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve $|\nu(z)| < 1$ koşulunu sağlayan $\mathbb{U}$'da analitik bir fonksiyon olmak üzere, ν dilatasyonuna sahip, $\mathbb{U}$'yu $\mathcal{D}$ üzerine resmeden bir yön-koruyan harmonik fonksiyon her zaman olmayabilir. Hengartner ve Schober ([19]), $\nu(z) = z$ dilatasyonuna sahip, birim diski kendi içine resmeden bir yön-koruyan harmonik fonksiyonun var olmadığını ispatlamışlardır. Bununla beraber ifadenin prensipte doğru olduğu, üzerinde bazı değişiklikler yapılarak kullanılabilir hale getirilebileceğini de göstermişlerdir. Hengartner ve Schober ya teoremin ifadesindeki w dilatasyonu veya resim bölgesi $\mathcal{D}$ üzerine bazı kısıtlamalar getirilmesi ya da "f birim diski $\mathcal{D}$ *üzerine* resmeder" sonucunun tekrar yorumlanması gerektiğini belirtmiş ve aşağıdaki teoremleri vermişlerdir:

Teorem 3.4.8. *([19]) $\mathcal{D}$, sınırı analitik Jordan yayı olan basit bağlantılı sınırlı bir bölge ve w_0 bu bölgede bir nokta olsun. $\mathbb{U}$'da analitik ve $k < 1$ olmak üzere $|\nu(z)| \leq k$ koşulunu sağlayan ν fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu durumda, $f(0) = w_0$ ve $f_z(0) > 0$ koşullarını sağlayan, ν dilatasyonuna sahip, $\mathbb{U}$'yu $\mathcal{D}$ üzerine resmeden bir harmonik f fonksiyonu vardır.*

Teorem 3.4.9. *([19]) $\mathcal{D}$, sınırı analitik Jordan yayı Γ olan basit bağlantılı sınırlı bir bölge ve w_0 bu bölgede bir nokta olsun. $\mathbb{U}$'da analitik, $|\nu(z)| < 1$ koşulunu sağlayan ν fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu durumda, her θ açısı için $\hat{f}(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ radyal limiti Γ'ya ait olan, $f(0) = w_0$, $f_z(0) > 0$ koşullarını sağlayan, ν dilatasyonlu, $\mathbb{U}$'yu $\mathcal{D}$ içine resmeden bir harmonik f fonksiyonu vardır.*

Burada önemle belirtmek gerekir ki her iki teoremde de teklik problemi henüz çözülememiştir. Dolayısıyla bazı araştırmacılar, yön-koruyan harmonik fonksiyonlar için Riemann Gönderim Teoremi'ni halen açık problem olarak değerlendirmektedirler.

Aynı $\mathcal{S}$ sınıfında olduğu gibi $\mathcal{S}_H$ ve $\mathcal{S}_H^0$ sınıfları için de alt sınıflar tanımlanmıştır. $\mathbb{U}$ birim disk olmak üzere bir $f \in \mathcal{S}_H(f \in \mathcal{S}_H^0)$ yön-koruyan harmonik fonksiyonun değer bölgesi $f(\mathbb{U})$, orijine göre yıldızıl ise $f \in \mathcal{S}_H^*(f \in \mathcal{S}_H^{*0})$ yazılır. $\mathcal{S}_H^*$ $(\mathcal{S}_H^{*0})$ sınıfına ait fonksiyonlara $\mathbb{U}$'da *yıldızıl harmonik fonksiyon* adı verilir ve analitik olarak

$$f \in \mathcal{S}_H \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}(\arg f(re^{i\theta})) > 0 \quad (z \in re^{i\theta}, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

şeklinde ifade edilir.

Genel yön-koruyan harmonik fonksiyonların aksine, yıldızıl harmonik fonksiyonlar için bazı kesin sonuçlar elde edilmiştir:

Teorem 3.4.10. *([28]) $f \in \mathcal{S}_H^0$ sınıfına ait her yıldızıl fonksiyon aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar ve bu eşitsizliklerin sınırları mümkün olan en iyi sınırlardır.*

$$|a_n| \leq \frac{1}{6}(2n+1)(n+1), \quad |b_n| \leq \frac{1}{6}(2n-1)(n-1), \quad ||a_n| - |b_n|| \leq n \quad (n \geq 2).$$

Dikkat edilirse Teorem 3.4.10 ve Sanı 3.4.3'deki eşitsizlikler aynır. Yani Sanı 3.4.3, $f \in \mathcal{S}_H^{*0}$ olması durumunda doğrudur.

Teorem 3.4.11. *([15], s. 107) $f \in \mathcal{S}_H$ sınıfına ait her yıldızıl fonksiyon aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar ve bu eşitsizliklerin sınırları mümkün olan en iyi sınırlar olmakla beraber hiç bir fonksiyon için eşitlik hali olamaz.*

$$|a_n| < \frac{1}{3}(2n^2+1), \quad |b_n| < \frac{1}{3}(2n^2+1) \quad (n \geq 2).$$

Burada da, Teorem 3.4.11 ve Sanı 3.4.4 arasında, yukarıdakine benzer bir durum söz konusudur. Sanı 3.4.4, $f \in \mathcal{S}_H^*$ için doğrudur. Ayrıca Silverman bu sınıfa ait fonksiyonlar için aşağıdaki teoremin vermiştir:

Teorem 3.4.12. *([29]) $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu h ve g (3.10)'da verilen formda olmak üzere*

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| \leq 1$$

eşitsizliği sağlanırsa $f \in \mathcal{S}_H^*$ dır.

$\mathcal{S}_H^0$ sınıfına ait yıldızıl fonksiyonlar için genişleme teoremi aşağıdaki şekilde verilmiştir:

Teorem 3.4.13. *([15], s. 107) $f \in \mathcal{S}_H^0$ sınıfına ait her yıldızıl fonksiyon*

$$|f(z)| \leq \frac{1}{3}\frac{3r + r^3}{(1-r)^3}, \quad (|z| = r < 1)$$

eşitsizliğini sağlar. Bu sınır mümkün olan en iyi sınırdır ve eşitlik hali f'ni harmonik Koebe fonksiyonu k_0 olması ile mümkündür.

Yukarıda anlatılanlardan anlaşılacağı üzere, yirmi beş yıllık normalize edilmiş yön-koruyan harmonik fonksiyonlar teorisinde çözülmeyi bekleyen daha pek çok problem vardır. Bu özelliğinden dolayı teori, araştırmacıların ilgisini çeken son zamanların en popüler sahalarından biridir.

Bölüm 4

ANALİTİK KISMI JANOWSKI YILDIZIL FONKSİYON SINIFINA AİT YÖN-KORUYAN HARMONİK FONKSİYONLAR

Sabordinasyon prensibi yalınkat fonksiyonlar teorisindeki temel problemlerin çözümünde önemli rol oynar. Yön-koruyan harmonik fonksiyonlar teorisinde ise sabordinasyon prensibindeki istenen özellikleri sağlayan Schwarz fonksiyonunu bulma problemi ortaya çıkmıştır. (3.10) şeklinde tanımlanan $\mathcal{S}_H$ sınıfına ait yön-koruyan harmonik fonksiyonların seri açılımlarından dolayı $\nu(0) = b_1 \neq 0$ dır. Dolayısıyla ikinci dilatasyon fonksiyonu ν Schwarz fonksiyonunun özelliklerini sağlamaz. İkinci dilatasyonun Bölüm 3.4'de anlatılan teorideki yeri düşünülerek, bazı araştırmacılar ikinci dilatasyon fonksiyonu $\nu = g'/h'$ üzerinde bazı kısıtlamalar getirerek, örneğin $\nu(z) = z$, $\nu(z) = z^2$, $\nu(z) = -z$,... alarak istenen Schwarz fonksiyonunu elde etme yoluna gitmişlerdir.

Bu çalışmada, ikinci dilatasyon fonksiyonu yardımıyla yeni bir dönüşüm tanımlanarak, bu dönüşümün istenen Schwarz fonksiyonu olduğu olgusu altında ortaya konulan yeni bir yön-koruyan harmonik fonksiyonlar sınıfına ait temel problemlerin çözümleri araştırılmıştır.

Çalışmamızın ana eksenini oluşturan fonksiyon sınıfı aşağıda tanımlanmaktadır.

Tanım 4.0.14. *([31]) $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H$ olsun. h fonksiyonunun bir Janowski yıldızıl fonksiyon olduğu, yani $h \in \mathcal{S}^*(A, B)$ olan normalize edilmiş yön-koruyan* *harmonik fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{S}_H^*(A,B)$ ile gösterilir.*

4.1 Sonuçlar

Lemma 4.1.1. *([20]) $h(z) \in \mathcal{S}^*(A,B)$ ise her $|z| = r$, $0 \leq r < 1$ için*

$$C(-r;A,B) \leq |h'(z)| \leq C(r;A,B) \tag{4.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$C(r;A,B) = \begin{cases} (1+Br)^{(A-2B)/B}(1+Ar), & B \neq 0, \\ e^{Ar}(1+Ar), & B = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

dır.

Lemma 4.1.2. *([27]) $h(z) = z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n + \cdots$ fonksiyonu $\mathcal{S}^*(A,B)$ sınıfına ait ise*

$$|a_n| \leq \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-2} \frac{|(A-B)+kB|}{k+1}, & B \neq 0, \\ \prod_{k=0}^{n-2} \frac{|A|}{k+1}, & B = 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

eşitsizlikleri her $z \in \mathbb{U}$ için sağlanır. Eşitlik hali aşağıdaki fonksiyon için geçerlidir.

$$h_*(z) = \begin{cases} z(1-B\delta z)^{(A-B)/B}, & |\delta| = 1, \quad B \neq 0, \\ ze^{Az}, & B = 0. \end{cases}$$

Lemma 4.1.3. *([31]) $\nu(z)$ fonksiyonu (3.10) ifadesi ile verilen $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H$ yön-koruyan harmonik fonksiyonun ikinci dilatasyonu olmak üzere*

$$\phi(z) = \frac{\nu(z) - b_1}{1 - \overline{b_1}\nu(z)} = \frac{\nu(z) - \nu(0)}{1 - \overline{\nu(0)}\nu(z)}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon her $z \in \mathbb{U}$ için bir Schwarz fonksiyonudur.

İspat. $\phi(z)$ fonksiyonunun tanımından $\phi(z)$'nin $\mathbb{U}$'da analitik ve $\phi(0) = 0$ olduğu açıktır. Şimdi $|\phi(z)| < 1$ koşulunun sağlandığını gösterelim. Bölüm 3.3'den biliyoruz ki her $z \in \mathbb{U}$ için $|\nu(z)| < 1$ eşitsizliği gerçeklenir. Buna göre

$$|\phi(z)| = \left| \frac{\nu(z) - b_1}{1 - \overline{b_1}\nu(z)} \right| < 1 \Leftrightarrow |\nu(z) - b_1|^2 < |1 - \overline{b_1}\nu(z)|^2$$

$$\Leftrightarrow |\nu(z)|^2 - 2\mathrm{Re}\overline{b_1}\nu(z) + |b_1|^2 < 1 - 2\mathrm{Re}\overline{b_1}\nu(z) + |b_1|^2|\nu(z)|^2$$

$$\Leftrightarrow |b_1|^2(1-|\nu(z)|^2) < 1-|\nu(z)|^2 \Leftrightarrow |\nu(z)| < 1$$

sağlanır. Dolayısıyla $\phi(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini yine birim disk üzerine resmeden analitik bir dönüşümdür ve Schwarz fonksiyonu olma koşullarını sağlar. □

Lemma 4.1.4. *([31]) $\nu(z)$ fonksiyonu $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H$ yön-koruyan harmonik fonksiyonun ikinci dilatasyonu ve $b_1 = \alpha e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ olmak üzere*

$$\left| e^{-i\theta}\nu(z) - \frac{\alpha(1-r^2)}{1-\alpha^2 r^2} \right| \leq \frac{r(1-\alpha^2)}{1-\alpha^2 r^2} \quad (|z| = r < 1) \tag{4.4}$$

eşitsizliği sağlanır. Yani, $e^{-i\theta}\nu(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{U}$ birim diskini merkezi $C(r) = \left(\frac{\alpha(1-r^2)}{1-\alpha^2 r^2}, 0\right)$'da ve yarıçapı $\rho(r) = \frac{r(1-\alpha^2)}{1-\alpha^2 r^2}$ olan çemberler üzerine resmeder.

İspat. $\phi(z) = \frac{\nu(z)-b_1}{1-\overline{b_1}\nu(z)}$ şeklinde tanımlanan $\phi(z)$ fonksiyonu Schwarz fonksiyonu olduğunundan $|\phi(z)| \leq |z| = r$ sağlanır. Buna göre

$$\phi(z) = \frac{\nu(z) - b_1}{1 - \overline{b_1}\nu(z)} = \frac{\nu(z) - \alpha e^{i\theta}}{1 - \alpha e^{-i\theta}\nu(z)} \Rightarrow$$

$$|\phi(z)| = \left| \frac{e^{-i\theta}\nu(z) - \alpha}{1 - \alpha e^{-i\theta}\nu(z)} \right| \leq r \Leftrightarrow |e^{-i\theta}\nu(z) - \alpha| \leq r|1 - \alpha e^{-i\theta}\nu(z)|$$

bulunur. $e^{-i\theta}\nu(z) = u + iv$ alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$u^2 + v^2 - 2\alpha\frac{1-r^2}{1-\alpha^2 r^2}u + \frac{\alpha^2 - r^2}{1-\alpha^2 r^2} \leq 0$$

çember denklemi elde edilir. Buradan istenen gösterilmiş olur. □

Lemma 4.1.5. *([31]) $\nu(z)$ fonksiyonu $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H$ yön-koruyan harmonik fonksiyonun ikinci dilatasyonu ve $|b_1| = \alpha < 1$ olmak üzere her $|z| = r < 1$ için*

$$\frac{|\alpha - r|}{1 - \alpha r} \leq |\nu(z)| \leq \frac{\alpha + r}{1 + \alpha r}, \tag{4.5}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. (4.4) ifadesi kullanılarak elde edilir. □

Lemma 4.1.5'de bir yön-koruyan harmonik fonksiyonun ikinci dilatasyonuna ait genişleme teoremi ilk defa verilmiştir. Dolayısıyla bu lemma ve ikinci dilatasyonun tanımı kullanılarak pek çok yeni netice elde edilebilir. Bunlara geçmeden önce, aslında ikinci dilatasyona ait (4.5) eşitsizliğini bulabilmek için kullandığımız

ϕ fonksiyonu yardımıyla elde ettiğimiz, bir yön-koruyan harmonik fonksiyonun analitik ve eş-analitik kısımlarının ikinci katsayıları arasındaki ilişkiyi ortaya koyan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.1.6. *([31]) $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H$ ise her $z \in \mathbb{U}$ için*

$$|b_2| - |a_2| \leq \frac{1}{2}$$

gerçeklenir.

İspat. $\phi(z)$ fonksiyonu Schwarz Lemması'nın koşullarını gerçeklediğinden $|\phi'(0)| \leq 1$ sağlanır. Dolayısıyla

$$\phi'(z) = \frac{\nu'(z)(1 - |b_1|^2)}{(1 - \overline{b_1}\nu(z))^2} \Rightarrow \phi'(0) = \frac{\nu'(0)}{1 - |b_1|^2}$$

ifadesinde $\nu'(0) = 2(b_2 - a_2 b_1)$ eşitliği yerine yazılırsa

$$|\phi'(0)| = \frac{2|b_2 - a_2 b_1|}{1 - |b_1|^2} \leq 1$$

elde edilir. Son ifadede üçgen eşitsizlikleri ve $|b_1| < 1$ olduğu kullanarak istenen sonuca ulaşılır. □

Sanı 3.4.6 bize $\mathcal{S}_H$ sınıfına ait fonksiyonların katsayılarının $n = 2$ için $|b_2| - |a_2| \leq 4$ eşitsizliğini sağlayabileceğini söyler. Teorem 4.1.6'te ise bu üst sınır $1/2$ olarak iyileştirilmiştir. Ayrıca $\mathcal{S}_H^0$ sınıfına ait fonksiyonların b_1 katsayıları 0 olduğundan, yukarıdaki teoremde bu olgu kullanılırsa $|b_2| \leq 1/2$ elde edilir ki bu sonucun doğruluğu Bölüm 3.4'de gösterilmiştir.

Şimdi yukarıda tanımladığımız $\mathcal{S}_H^*(A, B)$ sınıfına ait fonksiyonlar ile ilgili elde ettiğimiz neticeleri verelim.

Teorem 4.1.7. *([31]) $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu $\mathcal{S}_H^*(A, B)$ sınıfına ait olsun. Bu durumda $|z| = r < 1$ için $|b_1| = \alpha < 1$ olmak üzere*

$$C(-r; A, B)\frac{|\alpha - r|}{1 - \alpha r} \leq |g'(z)| \leq \frac{\alpha + r}{1 + \alpha r}C(r; A, B) \tag{4.6}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $C(r; A, B)$ ifadesi (4.2) eşitliği ile verilmiştir.

İspat. $f = h + \bar{g}$ fonksiyonunun ikinci dilatasyon fonksiyonu $\nu = g'/h'$ olarak tanımlandığına göre

$$|g'(z)| = |\nu(z)||h'(z)| \quad (z \in \mathbb{U}) \tag{4.7}$$

yazabiliriz. (4.7) eşitliğinde (4.5) ve (4.1) eşitsizlikleri kullanılırsa istenen sonuç elde edilir. □

Bir sonraki sonucu ifade etmek için, bazı özel fonksiyonların tanımlarına ihtiyaç duyulmaktadır.

Tanım 4.1.8. *$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $c \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ olsun.*

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n$$

ifadesine Gauss hipergeometrik fonksiyonu adı verilir ([4], s. 64). Burada $(x)_n$

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$$

olarak tanımlanan Pochhammer sembolüdür. Gauss hipergeometrik fonksiyonunun bir genelleştirmesi olan Appell hipergeometrik fonksiyonu, $|x|, |y| < 1$ olmak üzere

$$F_1(a, b, c, d, x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(a)_{(m+n)} (b)_{(m)} (c)_n}{(d)_{(m+n)} m! n!} x^m y^n$$

ifadesi ile verilir ([5]). Ayrıca üstel integral $x > 0$ için

$$E_i(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt$$

olarak tanımlanır ([1], s. 228).

Teorem 4.1.9. *([31]) $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^*(A, B)$ ise her $|z| = r < 1$ için*

$$I_1 \leq |f(z)| \leq I_2, \quad B \neq 0,$$
$$I_3 \leq |f(z)| \leq I_4, \quad B = 0,$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada ${}_2F_1$, F_1 ve E_i, Tanım 4.1.8'de anlatılan özel fonksi-

yonlar olmak üzere

$$I_1 = (1-\alpha)\left\{ \frac{\left(-\frac{\alpha}{B}\right)^{1-\frac{A}{B}} \ {}_2F_1\left(2-\frac{A}{B}, 2-\frac{A}{B}, 3-\frac{A}{B}, \frac{B+\alpha}{B}\right)}{A-2B} \right.$$
$$- \frac{(1+A)r^2F_1\left(2, 2-\frac{A}{B}, 1, 3, Br, -\alpha r\right)}{2(A-2B)B(1+\alpha r)^2}$$
$$+ \frac{Ar^3F_1\left(3, 2-\frac{A}{B}, 1, 4, Br, -\alpha r\right)}{3(A-2B)B(1+\alpha r)^2}$$
$$\left. + \frac{\alpha(1-Br)^{\frac{A}{B}}\left(\frac{\alpha(-1+Br)}{B+B\alpha r}\right)^{-\frac{A}{B}} \ {}_2F_1\left(2-\frac{A}{B}, 2-\frac{A}{B}, 3-\frac{A}{B}, \frac{B+\alpha}{B+B\alpha r}\right)}{(A-2B)B(1+\alpha r)^2} \right\},$$

$$I_2 = (1+\alpha)\left\{ -\frac{\left(\frac{\alpha}{B}\right)^{1-\frac{A}{B}} \ {}_2F_1\left(2-\frac{A}{B}, 2-\frac{A}{B}, 3-\frac{A}{B}, \frac{B-\alpha}{B}\right)}{A-2B} \right.$$
$$+ \frac{(1+A)r^2F_1\left(2, 2-\frac{A}{B}, 1, 3, -Br, -\alpha r\right)}{2(A-2B)B(1+\alpha r)^2}$$
$$+ \frac{Ar^3F_1\left(3, 2-\frac{A}{B}, 1, 4, -Br, -\alpha r\right)}{3(A-2B)B(1+\alpha r)^2}$$
$$\left. + \frac{\alpha(1+Br)^{\frac{A}{B}}\left(\frac{\alpha(1+Br)}{B+B\alpha r}\right)^{-\frac{A}{B}} \ {}_2F_1\left(2-\frac{A}{B}, 2-\frac{A}{B}, 3-\frac{A}{B}, \frac{B-\alpha}{B+B\alpha r}\right)}{(A-2B)B(1+\alpha r)^2} \right\},$$

$$I_3 = (1-\alpha)\left\{ -\frac{2(1+\alpha)(A+\alpha)e^{\frac{A}{\alpha}}Ei\left(-\frac{A}{\alpha}\right) + \alpha(1+\alpha)}{2\alpha^3} \right.$$
$$\left. + \frac{2(1+\alpha)(A+\alpha)e^{\frac{A}{\alpha}}E_i\left(-\frac{A(1+\alpha r)}{\alpha}\right) + e^{-Ar}\alpha(1+\alpha-\alpha r)}{2\alpha^3} \right\},$$

$$I_4 = (1+\alpha)\left\{ -\frac{-2(-1+\alpha)(A-\alpha)e^{-\frac{A}{\alpha}}Ei\left(\frac{A}{\alpha}\right) + \alpha(1+\alpha)}{2\alpha^3} \right.$$
$$\left. + \frac{-2(-1+\alpha)(A-\alpha)e^{-\frac{A}{\alpha}}E_i\left(\frac{A(1+\alpha r)}{\alpha}\right) + e^{Ar}\alpha(-1+\alpha+\alpha r)}{2\alpha^3} \right\}$$

dır ($|b_1| = \alpha < 1, -1 \leq B < A \leq 1$).

İspat. $f = h + \bar{g}$ yön-koruyan harmonik fonksiyonu için

$$(|h'(z)| - |g'(z)|)|dz| \leq |df(z)| \leq (|h'(z)| + |g'(z)|)|dz| \quad (z \in \mathbb{U}) \tag{4.8}$$

eşitsizliğinin sağlandığını biliyoruz. Diğer taraftan (4.7) eşitliğinden

$$|h'(z)| - |g'(z)| = |h'(z)|(1 - |\nu(z)|) \quad (z \in \mathbb{U}) \tag{4.9}$$

yazabiliriz. (4.9) ifadesinde (4.5) ve (4.1) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\frac{(1-\alpha)(1-r)}{(1+\alpha r)} C(-r; A, B) \leq |h'(z)| - |g'(z)| \tag{4.10}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$|h'(z)| + |g'(z)| = |h'(z)|(1 + |\nu(z)|) \tag{4.11}$$

yazılışında yine (4.5) ve (4.1) ifadeleri kullanılırsa

$$|h'(z)| + |g'(z)| \leq \frac{(1+\alpha)(1+r)}{(1+\alpha r)} C(r; A, B) \tag{4.12}$$

eşitsizliği bulunur. (4.8) eşitsizliğinde (4.10) ve (4.12) kullanılır ve 0'da r'ye integral alınırsa

$$\int_0^r (1 - A\rho)(1 - B\rho)^{\frac{A-2B}{B}} \frac{(1-\alpha)(1-\rho)}{(1+\alpha\rho)} d\rho \leq |f(z)| \leq$$
$$\int_0^r (1 + A\rho)(1 + B\rho)^{\frac{A-2B}{B}} \frac{(1+\alpha)(1+\rho)}{(1+\alpha\rho)} d\rho, \quad B \neq 0 \text{ için},$$
$$\int_0^r (1 - A\rho)e^{-A\rho} \frac{(1-\alpha)(1-\rho)}{(1+\alpha\rho)} d\rho \leq |f(z)| \leq$$
$$\int_0^r (1 + A\rho)e^{A\rho} \frac{(1+\alpha)(1+\rho)}{(1+\alpha\rho)} d\rho, \quad B = 0 \text{ için},$$

bulunur. Bu integraller hesaplanarak istenilen sonuç elde edilir. □

Sonuç 4.1.10. *([31]) $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^*(A, B)$ için Heinz eşitsizliği, $|b_1| = \alpha < 1$ olmak üzere her $|z| = r < 1$ için*

$$|h'(0)|^2 + |g'(0)|^2 \geq 1 + \alpha^2$$

ifadesi ile verilir.

İspat. Her $z \in \mathbb{U}$ için

$$|h'(z)|^2 + |g'(z)|^2 = |h'(z)|^2(1 + |\nu(z)|^2) \tag{4.13}$$

ifadesi sağlandığından (4.13) eşitliğinde (4.5) ve (4.1) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$|h'(z)|^2 + |g'(z)|^2 \geq \begin{cases} (1 - Br)^{\frac{2A-4B}{B}} (1 - Ar)^2 \left(1 + \left(\frac{\alpha - r}{1 - \alpha r}\right)^2\right), & B \neq 0, \\ e^{-2Ar}(1 - Ar)^2 \left(1 + \left(\frac{\alpha - r}{1 - \alpha r}\right)^2\right), & B = 0, \end{cases}$$

elde edilir. $r \to 0$ için istenilen sonuç bulunur. □

Teorem 4.1.11. *([31]) $f = h+\bar{g}$ fonksiyonu $\mathcal{S}_H^*(A,B)$ sınıfına ait ve $|b_1| = \alpha < 1$ olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun Jakobiyeninin sınırları, $C(r;A,B)$ ifadesi (4.2) eşitliğinde verilmek üzere, aşağıdaki şekildedir*

$$C^2(-r;A,B)\frac{(1-r^2)(1-\alpha^2)}{(1+\alpha r)^2} \le J_f(z) \le C^2(r;A,B)\frac{(1-r^2)(1-\alpha^2)}{(1-\alpha r)^2}.$$

İspat. Lemma 4.1.5 ve

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$$

olduğu kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir. □

Teorem 4.1.12. *$f = h+\bar{g}$ fonksiyonu $\mathcal{S}_H^*(A,B)$ sınıfına ait olsun. Bu durumda*

$$|b_n| \le \frac{(1+|B|)^n}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{(1+|B|)^k}\prod_{j=0}^{n-2}\frac{|(A-B)+jB|}{j+1}\right\} \tag{4.14}$$

katsayı eşitsizliği her $n \in \mathbb{N}$ için sağlanır.

İspat. $f(z) \in \mathcal{S}_H$ için $\nu(z) \in \mathcal{V}$ fonksiyonunun $\nu(0) = b_1 \neq 0$ eşitsizliğini sağladığından $\nu(z) \notin \Omega$ olduğunu biliyoruz. Bununla beraber $z\nu(z) \in \Omega$'dır. Dolayısıyla $p(z) \in \mathcal{P}(A,B)$ ise $\nu(z) \in \mathcal{V}$ ve $\phi(z) \in \Omega$ olmak üzere

$$p(z) = \frac{1+A\phi(z)}{1+B\phi(z)} = \frac{1+Az\nu(z)}{1+Bz\nu(z)} = \frac{h'(z)+Azg'(z)}{h'(z)+Bzg'(z)} \Rightarrow$$

$$p(z)(h'(z)+Bzg'(z)) = h'(z)+Azg'(z), \tag{4.15}$$

eşitliği yazılabilir. (4.15) ifadesinde $p(z)$, $h(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonlarının Taylor açılımları yazılırsa

$$\begin{aligned}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n\right)&\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\{(n+1)a_{n+1}+Bnb_n\}z^n\right)\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+1)a_{n+1}+Anb_n\right)z^n\end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir. (4.16) eşitliğinde z^n'li terimlerin katsayıları eşitlenirse

$$(A-B)nb_n = p_n + \sum_{k=1}^{n-1}\left(p_{n-k}\{(k+1)a_{k+1}+Bkb_k\}\right) \tag{4.17}$$

eşitliğini bulunur.

$p(z) \in \mathcal{P}(A,B)$ ise $|p_k| \leq A - B$ eşitsizliğinin her $k \in \mathbb{N}$ için sağlandığı M. K. Aouf tarafından ispatlanmıştır ([6]). Bu eşitsizlik (4.17) ifadesinde kullanılırsa

$$n|b_n| \leq \sum_{k=1}^{n} (k|a_k| + |B|(k-1)|b_{k-1}|) \quad (|a_1| = 1, |b_0| = 0) \tag{4.18}$$

elde edilir. Teoremde verilen (4.14) ifadesinin doğruluğunu matematiksel indüksiyon ile gösterelim.

(4.18) eşitsizliği ve

$$n|b_n| \leq \sum_{k=1}^{n} k(1+|B|)^{n-k}|a_k| \quad (|a_1| = 1) \tag{4.19}$$

ifadesi göz önüne alınsın. Her iki eşitsizliğin sağ yanları aynıdır:

$n = 1$ için sonuç aşikardır.

$n = 2$ için

$$2|b_2| \leq 1 + 2|a_2| + |B||b_1| < 1 + 2|a_2| + |B||a_1| = (1+|B|) + 2|a_2|$$
$$2|b_2| \leq (1+|B|)|a_1| + 2|a_2| = (1+|B|) + 2|a_2|$$

olduğundan doğrudur.

$n = p$ için hipotez doğru olsun. Dolayısıyla aşağıdaki ifadelerin sağ yanları eşittir.

$$\begin{aligned} p|b_p| &\leq \sum_{k=1}^{p} (k|a_k| + |B|(k-1)|b_{k-1}|), \\ p|b_p| &\leq \sum_{k=1}^{p} k(1+|B|)^{p-k}|a_k| \quad (|a_1| = 1, |b_0| = 0). \end{aligned} \tag{4.20}$$

(4.20) eşitsizlikleri ve indüksiyon hipotezinden

$$\sum_{k=1}^{p} (k|a_k| + |B|(k-1)|b_{k-1}|) = \sum_{k=1}^{p} k(1+|B|)^{p-k}|a_k| \quad (|a_1| = 1, |b_0| = 0) \tag{4.21}$$

yazılabilir. (4.21) eşitliği kullanılarak,

$$\sum_{k=1}^{p+1} (k|a_k| + |B|(k-1)|b_{k-1}|) = \sum_{k=1}^{p} (k|a_k| + |B|(k-1)|b_{k-1}|) + (p+1)|a_{p+1}| + |B|p|b_p|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{p} k(1+|B|)^{p-k}|a_k| + (p+1)|a_{p+1}| + |B|p|b_p| \\
&= \frac{1}{1+|B|}\left(\sum_{k=1}^{p} k(1+|B|)^{p+1-k}|a_k| + (1+|B|)((p+1)|a_{p+1}| + |B|p|b_p|)\right) \\
&= \frac{1}{1+|B|}\sum_{k=1}^{p+1} k2^{p+1-k}|a_k| + \frac{1}{1+B}\left(|B|(p+1)|a_{p+1}| + \sum_{k=1}^{p} k(1+|B|)^{p+1-k}|a_k|\right) \\
&= \frac{1}{1+|B|}\sum_{k=1}^{p+1} k(1+|B|)^{p+1-k}|a_k| + \frac{|B|}{1+|B|}\sum_{k=1}^{p+1} k(1+|B|)^{p+1-k}|a_k| \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} k(1+|B|)^{p+1-k}|a_k|.
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise bize varsayımın $n = p+1$ için doğru olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$
|b_n| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(1+|B|)^{n-k}|a_k| \tag{4.22}
$$

eşitsizliği doğrudur.

Diğer taraftan $h \in \mathcal{S}^*(A,B)$ ise Lemma 4.1.2'den

$$
|a_n| \leq \prod_{j=0}^{n-2} \frac{|(A-B)+jB|}{j+1}
$$

eşitsizliğinin sağlandığını biliyoruz. Bu ifade (4.22) eşitsizliğinde kullanılırsa istenen elde edilmiş olur. □

Bölüm 5

SONUÇ

Geometrik fonksiyonlar teorisi, $\mathcal{S}$'nin pekçok altsınıfını içerir. Bu tezde $f = h+\bar{g}$ yön-koruyan harmonik fonksiyonunun analitik kısmının $\mathcal{S}^*(A,B)$ sınıfından seçilmesinin en önemli nedeni, A ve B parametrelerine bağlı olarak tanımlanmış en genel yıldızıl fonksiyon sınıfı olmasıdır. Dolayısıyla dördüncü bölümde bulunan neticelerde, A ve B skalerlerine değerler verilerek, değişik altsınıflara ait eşitsizlikler elde edilir. Bu sınıflardan bazıları, $0 < a < 1$ ve $M > 1/2$ olmak üzere:

- $A = 1$, $B = -1$
- $A = 1-2a$, $B = -1$
- $A = 1$, $B = 0$
- $A = 1$, $B = -1+1/M$
- $A = a$, $B = a$

değerleri için elde edilir. Ayrıca $\mathcal{S}_H^*(A,B)$ sınıfına ait fonksiyonların eş-analitik kısmının ilk katsayısı b_1'i sıfıra eşit alarak $\mathcal{S}_H^{0*}(A,B)$ sınıfı tanımlanabilir. Bu durumda da dördüncü bölümde elde edilen eşitsizliklerde $\alpha = 0$ yazarak $\mathcal{S}_H^{0*}(A,B)$ sınıfı için sonuçlar elde edilir. Yine yukarıda olduğu gibi A ve B parametreleri değiştirilerek $\mathcal{S}_H^{0*}(A,B)$'nin altsınıflarına ait fonksiyonlar için eşitsizlikler verilebilir. Ayrıca bu tezde ortaya konan yön-koruyan harmonik fonksiyonların ikinci dilatasyon fonksiyonuna ait genişleme teoreminin, yön-koruyan harmonik fonksiyonlar teorisinde çok kullanışlı bir araç olacağı inancındayız.

KAYNAKLAR

[1] M. Abramowitz, I. Stegun, *Hanbook of Mathematical Functions*, Dover Pub., New York, 1977.

[2] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis, An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Variable*, McGraw-Hill Inc., New York, 1979.

[3] L.V. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1966.

[4] G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Encyclopedia of Math. and Its Appl. 71, Cambridge Uni. Press., 1999.

[5] P. Appell, *Sur les Fonctions Hypergéométriques de Plusiers Variables*, Mém. des Sciences Math. de l'Acad. des Sciences de Paris, Gauthier-Villars, 1925.

[6] M.K. Aouf, On a class of p-valent starlike functions of order α, *IJMMS*, Volume 10 No 4 (1987), 733–744.

[7] L. De Branges, A proof of the Bieberbach conjecture, *Acta Math.*, **154** (1-2) (1985), 137-152.

[8] L. Bieberbach, Über die koeffizienten derjenigen potenzreihen, welche eine schlichte abbildung des einheitskreises vernitteln, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math.*, (1916), 940–955.

[9] C. Carathéodory, Zur ränderzuordnung bei konformed abbildung, *Nachr. Königl. Ges. Wiss Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, (1913), 509–518.

[10] Z. Charzyński, M. Schiffer, A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient., *Arch. Rational Mech. Anal.*, **5** (1960), 187–193.

[11] Z. Charzyński, M. Schiffer, A geometric proof of the Bieberbach conjec ture for the fourth coefficient, *Scpta Math.*, **25** (1960), 173–181.

[12] J. Clunie, T. Sheil-Small, Harmonic univalent functions, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **9** (1984), 3–25.

[13] J.W. Dettman, *Applied Complex Variables*, Dover Publications, Inc., New York, 1965.

[14] P.L. Duren, *Univalent Functions*, A Series of Compre. Stu. in Math., Springer-Verlag, New York, 1983.

[15] P.L. Duren, *Harmonic Mappings in the Plane, Cambridge Tracts in Math.*, Cambridge Uni. Press., Cambridge, 2004.

[16] R. Garabedian, M. Schiffer, A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient, *J. Rational Mech. Anal.*, **4** (1955), 427–465.

[17] A.W. Goodman, *Univalent Functions, Vol. 1*, Mariner Pub. Comp., Inc., Tampa, Florida, 1983.

[18] T.H. Gronwall, Some remarks on conformal representation, *Ann. Math.*, **16** (1914 / 1915), 72–76.

[19] W. Hengartner, G. Schober, Harmonic mappings with given dilatation, *J. London Math. Soc.*, **33** (3) (1986), 473–483.

[20] W. Janowski, Some extremal problems for certain families of analytic functions I, *Annales Polonici Mathematici*, **28** (1973), 297–326.

[21] P. Koebe, Uber die uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, *Nachr. Akad. Wiss., Gottingen Math.-Phys. KI.*, (1907), 191–210.

[22] H. Lewy, On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **42** (1936), 689–692.

[23] C. Lowner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I., *Math. Ann.*, **89** (1923), 103–121,

[24] Z. Nehari, *Conformal Mapping*, Dover Publications, New York, 1975.

[25] M. Ozowa, On the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient, *Kodai Math. Sem. Rep.*, **21** (1969), 97–128.

[26] R.N. Pederson, A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **31** (1968/1969), 331–351.

[27] Y. Polatoğlu, M. Bolcal, A coefficient inequality for the class of analytic functions in the unit disc, *IJMMS*, **59** (2003), 3753–3759.

[28] T. Sheil-Small, Constants for planar harmonic mappings, *J. London Math. Soc.*, **42** (2) (1990), 237–248.

[29] H. Silverman, Harmonic univalent functions with negative coefficients, *J. Math. Anal. Appl.*, **220** (1) (1998), 283–289.

[30] X.-T. Wang, X.-Q. Liang, Y.-L. Zhang, Precise coefficient estimates for close-to-convex harmonic univalent mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, **263** (2) (2001), 501–509.

[31] E. Yavuz, Harmonic univalent functions with a Janowski starlike analytic part, *International Short Joint Workshop, Study on Non-Analytic and Univalent Functions and Applications*, May 21-23, 2008, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University at Kyoto, Japan Kôkyôroku 1626, 127-134.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında İstanbul'da doğdu. 1999 yılında Marmara Üniversitesi Bilgisayar Programcılığı Bölümü'nden mezun olduktan sonra ve dikey geçiş yaparak 2001 yılında İstanbul Kültür Üniversitesi Matematik-Bilgisayar Bölümü'ne kaydoldu. 2004 yılında lisans öğrenimini tamamlayarak İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı ve 2006 yılında mezun oldu. 2006 yılından beri aynı enstitüde Matematik Programı doktora öğrenci olan Emel Yavuz Duman, 2004 senesinden bu yana İstanbul Kültür Üniversitesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.