ÖNSÖZ

Çalışmanın süreklilik ve büyük bir azim gerektirdiğini bana bu tez çalışmam da idrak ettiren, büyük bir sabır ve destekle derin bilgisini benden esirgemeyen saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Yaşar POLATOĞLU'na,

Eğitimim süresince beni her zaman destekleyen geniş bir ufuk ve yüksek bir gelecek vizyonuna sahip olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Metin BOLCAL'a,

Elbette sonsuz sabrı ve hoşgörüsü ile eğitimime destek olan sevgili eşim Murat GENÇ'e ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Mayıs 2009 Nurcan GENÇ

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ	**iv**
SEMBOL LİSTESİ	**v**
ÖZET	**vii**
SUMMARY	**viii**
GİRİŞ	**1**
1. Subordinasyon Prensibi	**2**
2. Pozitif Reel Kısma Sahip Fonksiyonlar	**12**
3. Yalınkat Fonksiyonlar	**55**
4. Kesirsel Hesaplar	**70**
KAYNAKLAR	**87**
ÖZGEÇMİŞ	**91**

ŞEKİL LİSTESİ

		Sayfa No
Şekil 1.1	Subordinasyon kavramının geometrik yorumu	4
Şekil 1.2	$w = \dfrac{1+z}{1-z}$ transformasyonunun geometrik yorumu	10
Şekil 1.3	Lindelöf prensibinde subordinasyonun geometrik yorumu	11
Şekil 2.1	$w = \dfrac{1+z}{1-z}$ transformasyonunun geometrik yorumu	14
Şekil 2.2	$w = \dfrac{1+Az}{1-Bz}$ transformasyonunun geometrik yorumu	43
Şekil 3.1	$w = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ transformasyonlarının geometrik yorumu	59
Şekil 3.2	Konform homomorfizmalara geometrik yaklaşım	67

SEMBOL LİSTESİ

α	: $0 \le \alpha < 1$ koşuluna uyan reel sayı
$\boldsymbol{a < b}$	: a, b den küçüktür
$\boldsymbol{a > b}$	: a, b den büyüktür
$\boldsymbol{a = b}$	: a, b ye eşittir
$\boldsymbol{a \neq b}$	: a, b ye eşit değildir
$\boldsymbol{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, \ldots}$	: Fonksiyonların Taylor açılımındaki katsayılar
$\boldsymbol{p_1, p_2, \ldots}$	: Pozitif reel kısma sahip fonksiyonların Taylor açılımındaki katsayılar
$\boldsymbol{r}$	: Çemberin yarıçapı
$z, \zeta, z_1, z_2, \ldots$	: Kompleks sayılar
$\boldsymbol{A, B}$	: $-1 \le B < A \le 1$ koşulunu sağlayan reel sayılar
$\boldsymbol{D}$	: Birim dairenin iç bölgesi
$\boldsymbol{D_r}$	: D bölgesinin r yarıçaplı civarı
$\boldsymbol{C(r)}$	: Analitik Jordan eğrisi
$\boldsymbol{Im}\, z$	: z kompleks sayısının sanal (imajiner) kısmı
$\boldsymbol{Re}\, z$	: z kompleks sayısının reel kısmı
$\boldsymbol{f(D)}$	: D bölgesinin f tasviri altındaki resmi
$\boldsymbol{f(D) \subset g(D)}$	: D bölgesinin, g tasviri altındaki resim bölgesi, f tasviri altındaki resim bölgesini kapsar
$\boldsymbol{f(z) \prec g(z)}$	: $f(z)$ fonksiyonu $g(z)$ fonksiyonuna subordinedir
$\lvert \mathbf{z} \rvert$	: z kompleks sayısının modülü
Γ	: $\lvert z \rvert = r$ çemberinin $w = f(z)$ fonksiyonu ile yapılan tasvirinde elde edilen eğri

$\varphi(z)$	: Schwarz lemmasının koşullarını sağlayan bir fonksiyon
$\wp$	: Pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı
$\wp(A,B)$	: Genelleştirilmiş pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı
S	: Yalınkat fonksiyonlar sınıfı
$S^{(m)}$	: m-fold simetri fonksiyonları sınıfı
Γ	: Gamma fonksiyonu
B	: Beta fonksiyonu
$D^{\lambda} f(z)$	: λ - kesirsel operatörü
A	: $f(z)$ fonksiyonlar sınıfı
U	: Açık birim disk
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar

Üniversitesi	**:**	**İstanbul Kültür Üniversitesi**
Enstitüsü	**:**	**Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı	**:**	**Matematik-Bilgisayar**
Programı	**:**	**Matematik-Bilgisayar**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Yaşar POLATOĞLU**
Tez Türü ve Tarihi	**:**	**Yüksek Lisans – Mayıs 2009**

ÖZET

HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLAR ve DİFERANSİYEL OPERATÖRLER

Nurcan GENÇ

Leibniz 1695'te L'Hospital'a sorduğu "Tam sayı dereceden türevler, kesirli dereceden türevlere genelleştirilebilir mi?" sorusu kesirli diferansiyelin doğum tarihi olarak gösterilebilir. Leibniz'in yanı sıra Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler gibi ünlü birçok matematikçi de bu konu üzerinde çalışmışlardır.

Bu çalışmanın ilk üç bölümünde yalınkat fonksiyonlar teorisinin temelleri denilebilecek önbilgiler verilmiş ve özel yalınkat fonksiyonlar sınıfının genel özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümünde ise, son zamanlarda H.M.Srivastava ve Shipegoshi Owa tarafından kompleks fonksiyonlar için geliştirilen kesirli türev ve uygulamalarını temel alarak bu çalışmanın açık birim disk $D=\{z \mid |z|<1\}$'de tanımlanmış ve $f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1} z^{np+1}$ açılımına sahip fonksiyonlar için λ-kesirli operatörler tanımlanıp, bu operatörler için yeni neticeler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler	**:**	**Subordinasyon, Yalınkat Fonksiyonlar, Distorsiyon, Kesirli Türev, Kesirli Operatörler, Katsayı Eşitsizlikleri.**

University	**:**	**İstanbul Kültür University**
Institute	**:**	**Institute of Science**
Science Programme	**:**	**Mathematics and Computer Science**
Programme	**:**	**Mathematics and Computer Science**
Supervisor	**:**	**Ass. Prof. Dr. Yaşar POLATOĞLU**
Degree Awarded and Date	**:**	**MS – May 2009**

ABSTRACT

HARMONIC UNIVALENT FUNCTIONS AND DIFFERENTIAL OPERATORS

Nurcan GENÇ

The birth of fractional differential equations can be said to date back to 1695 when Leibniz asked L'Hospital the question, "Can integer derivatives be generalized to fractional derivatives?" Apart from Leibniz, many famous mathematician like Lioville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler also studied on this matter.The first tree parts of this work consists of basic knowledge of univalent functions and investigation of properties of special classes of univalent functions.

In Section Four of this study, basing on the fractional derivatives and their applications that were developed recently for complex functions by H. M. Srivastava and Shipegoshi, the open unit disk was defined as $D=\{z||z|<1\}$; and after defining λ- fractional operators for functions that have the expansion of $f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1}z^{np+1}$, new results were obtained for those operators.

Keywords	**:**	**Subordination, Univalent Function, Distortion, Fractional Derivative, Fractional Operators, Coefficient Inequality.**

GİRİŞ

Türev ve integral genel olarak teknolojinin temelini oluşturmaktadır ve aynı zamanda doğal ve yapay sistemlerin çalışma prensiplerini anlamada çok önemli bir araçtır. Kesirli diferansiyel, matematiksel analizin bir kolu olarak, kendi adından da tahmin edileceği üzere, türev ve integralin tam olmayan (keyfi) derecelere genişletilmiş bir şeklidir. Konu, diferansiyel hesap kadar eski olup Leibniz ve Newton'un diferansiyel hesaplama tekniğini bulmalarına kadar uzanır.

Bir fonksiyonun birinci, ikinci, üçüncü vs. türevlerinin nasıl alındığını biliyoruz fakat 3/2 nci türevini nasıl alabiliriz? Aynı şekilde bir fonksiyonu iki ya da üç defa integre edebiliriz ama ½ defa integre edebilir miyiz? Leibniz 1695'te L'Hospital'a sorduğu "Tam sayı dereceden türevler, kesirli dereceden türevlere genelleştirilebilir mi?" sorusu kesirli diferansiyelin doğum tarihi olarak gösterilebilir. Leibniz'in kesirli türevler üzerine ortaya attığı bu soru, 300 yıldan daha fazla bir zamandır üzerinde çalışılan bir konu olmuştur. Leibniz'in yanı sıra Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Grunwald ve Letnikov gibi ünlü birçok matematikçi de bu konu üzerinde çalışmışlardır (Loverro A., 2004).

Son zamanlarda H.M.Srivastava ve Shipegoshi Owa tarafından kompleks fonksiyonlar için geliştirilen kesirsel türev ve uygulamalarını temel alarak bu çalışmanın ikinci bölümünde açık birim disk $D=\{z \mid |z|<1\}$'de tanımlanmış ve $f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1}z^{np+1}$ açılımına sahip fonksiyonlar için λ-kesirsel operatörler tanımlayıp bu operatörler için yeni neticeler elde etmeye çalıştık.

1. SUBORDİNASYON PRENSİBİ

LEMMA 1.1: (Schwarz Lemması) $w(z) = c_1 z + c_2 z^2 + ...$ fonksiyonu birim disk $D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ de tanımlanmış ve analitik olsun. Ayrıca $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ koşullarını gerçeklesin. Bu durumda

$$|w(z)| \leq |z| \text{ ve } |w^{'}(0)| \leq 1$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. Eşitlik hali ancak ve ancak $w(z) = kz$, $|k| = 1$ fonksiyonu için
geçerlidir.

İSPAT:

(1.1) $$h(z) = \frac{w(z)}{z} = \frac{c_1 z + c_2 z^2 + ...}{z} = c_1 + c_2 z + ...$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon birim diskte tanımlı ve analitiktir. Maksimum Modül Teoremine göre fonksiyon maksimum değerini sınırda alır. Yani

(1.2) $$|h(z)| = \left|\frac{w(z)}{z}\right| \leq 1$$

eşitsizliği geçerlidir. (1.2) ifadesinden aşağıdaki işlemleri yaparak

$$\left|\frac{w(z)}{z}\right| \leq 1 \Rightarrow |w(z)| \leq |z|$$

olduğunu görürüz. Şimdi limitin

$$h^{'}(0) = \lim_{z \to 0} \frac{h(z+0) - h(0)}{z - 0}$$

tanımını kullanırsak

$$\left|w^{'}(0)\right| = \left|\lim_{z\to 0}\frac{w(z+0)-w(0)}{z-0}\right| = \left|\lim_{z\to 0}\frac{w(z)-0}{z}\right| = \left|\lim_{z\to 0}\frac{w(z)}{z}\right| = \lim_{z\to 0}\left|\frac{w(z)}{z}\right| \Rightarrow$$

$$\lim_{z\to 0}\left|h(z)\right| \le 1 \Rightarrow \left|w'(0)\right| \le 1$$

bulunur. Eşitlik hali

$$h(z) = \frac{w(z)}{z} \Rightarrow \left|\frac{w(z)}{z}\right| = 1 \Rightarrow \frac{w(z)}{z} = |1| \Rightarrow w(z) = |1|.z \Rightarrow$$

$$w(z) = kz \quad (k = |1|)$$

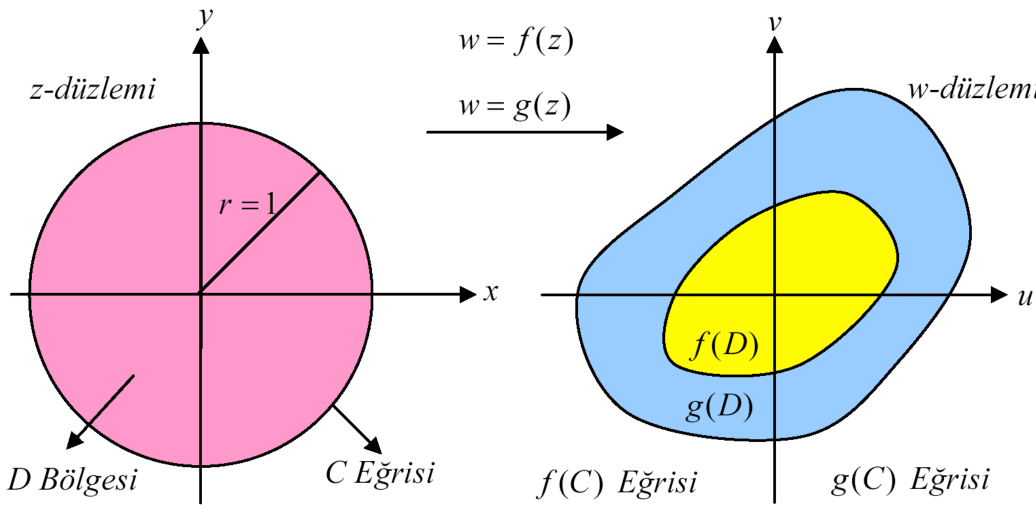
olduğu görülür.

TANIM 1.1: (Subordinasyon Prensibi) $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları $D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ bölgesinde tanımlanmış, analitik iki fonksiyon olsun. $w(z)$ fonksiyonu D de tanımlı, analitik ve $w(0) = 0, |w(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere $f(z) = g(w(z))$ şeklinde ifade edilebiliyorsa, $f(z)$ fonksiyonu $g(z)$ fonksiyonuna “Subordine” dir denir ve $f(z) \prec g(z)$ olarak yazılır.

Subordinasyon prensibi Schwarz lemmasının genelleştirilmişidir. $w(z) = z$ olarak alındığında ($w(z) = z$ fonksiyonu $|k| = 1 \Rightarrow k = 1$ hali için Schwarz lemmasında eşitlik halini veren fonksiyondur) subordinasyon prensibi Schwarz lemmasına indirgenir.

Subordinasyon prensibinin genel özellikleri aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

TEOREM 1.1: $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları D birim diskinde tanımlanmış analitik iki fonksiyon olsun. Eğer $f(z) \prec g(z)$ ise $f(D) \subset g(D)$ dir.



Şekil 1.1

İSPAT: Teoremin ispatına geçmeden önce geometrik yorumunu yapalım. Şekil 1.1 de gösterildiği gibi, D birim diskinin $f(z)$ fonksiyonu altındaki resim bölgesi $f(D)$, $g(z)$ fonksiyonu altındaki resim bölgesi $g(D)$ ise $f(D)$ bölgesi $g(D)$ bölgesinin alt cümlesidir.

Subordinasyon prensibinin Schwarz lemmasının genelleştirilmiş hali olduğunu Tanım 1.1'de belirtmiştik. Dolayısıyla Subordinasyon, Schwarz lemmasının koşullarını gerçekler. Bu gerçekten hareketle

(1.3) $$|w(z)| \le |z| \Rightarrow |w(z)| = |z| \Leftrightarrow w(z) = kz, \quad |k| = 1$$

ifadesini yazabiliriz. Öte yandan

(1.4) $z_1 \in w(D) \Rightarrow z_1 = w(z)$ olacak şekilde bir $z \in D$ vardır.

$$z_1 = w(z) \Rightarrow |z_1| = |w(z)| \le |z|, |z| < 1 \Rightarrow |z_1| = |w(z)| \le |z| < 1 \Rightarrow$$

$|z_1| < 1 \Rightarrow z_1 \in D$ bulunur.

Yani, $z_1 \in w(D)$ ise $z_1 \in D$ olur. Bu ise bize

(1.5) $\qquad w(D) \subset D$

olduğunu gösterir. Diğer taraftan $f(z) \prec g(z)$ subordinasyonunun (1.5) ifadesinde kullanılması ile

$$f(z) = g(w(z)) \Rightarrow f(D) = g(w(D)) \subset g(D) \Rightarrow$$

$$f(D) \subset g(D)$$

buluruz ki bu da ispatlanması istenen ifadedir.

SONUÇ 1.1: $f(z) = z + a_2 z^2 + ..., g(z) = z + b_2 z^2 + ...$ açılımlarına sahip $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları

$$f(0) = g(0)$$

eşitliği gerçeklenir.

İSPAT: Gerçekten,

$$\left.\begin{array}{l} f(z) \prec g(z) \Rightarrow f(z) = g(w(z)) \\ w(0) = 0 \Rightarrow f(0) = g(w(0)) \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = g(0)$$

sonucu elde edilir.

SONUÇ 1.2: $D_r = \{ z \in \ \big| |z| < r \}$ ve $0 < r < 1$ olmak üzere $f(z) \prec g(z)$ subordinasyonu varsa

$$\{ f(z) \big| |z| < r \subset \{ g(z) \big| |z| < r \}$$

bağıntısı gerçeklenir. Yani

$$f(D_r) \subset g(D_r)$$

dir.

SONUÇ 1.3: $f(z) \prec g(z)$ subordinasyonu geçerli ise

$$\underset{|z| \le r}{Max} |f(z)| \le \underset{|z| \le r}{Max} |g(z)|$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İSPAT: Gerçekten, $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları $D=\{z\,|\,|z|<1\}$ bölgesinde tanımlanmış analitik fonksiyonlar olduklarından maximum modül teoreminden dolayı maksimum değerlerini D bölgesinin sınırında alır. Teorem 1.1 den dolayı

(1.6) $\qquad f(D)\subset g(D)$

bağıntısının gerçeklendiğini biliyoruz. Maksimum Modül Teoremi ve (1.6) ifadelerinden

$$\underset{|z|\le r}{Max}\left|f(z)\right|\le \underset{|z|\le r}{Max}\left|g(z)\right|$$

eşitsizliği elde edilir.

SONUÇ 1.4: $f(z)\prec g(z)$ subordinasyonu geçerli ise

$$\underset{|z|\le r}{Max}\left(1-|z|^2\left|f^{'}(z)\right|\right)\le \underset{|z|\le r}{Max}\left(1-|z|^2\left|g^{'}(z)\right|\right)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İSPAT: Gerçekten, $f(z)$ ve $g(z)$ olduğundan, $w(z)$ fonksiyonu Schwarz lemmasının koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere

(1.7) $\qquad f(z)=g(w(z))$ (Subordinasyonun tanımından)

(1.8) $\qquad |w(z)|\le|z|$ (Schwarz Lemmasından)

bağıntıları yazılabilir. (1.18) eşitliğinden

(1.9) $\qquad (1-|z|^2)\left|f^{'}(z)\right|=(1-|z|^2)\left|w^{'}(z)\right|\left|g^{'}(w(z))\right|$

ifadesine ulaşılabilir. (1.9) bağıntısına Schwarz Lemması uygulanacak olursa

(1.10) $\qquad (1-|z|^2)\left|f^{'}(z)\right|=(1-|z|^2)\left|w^{'}(z)\right|\left|g^{'}(z))\right|\le(1-|w(z)|^2)\left|g^{'}(z))\right|\Rightarrow$

(1.11) $\qquad (1-|z|^2)\left|f^{'}(z)\right|\le(1-|w(z)|^2)\left|g^{'}(w(z))\right|$

elde edilir. (1.11) eşitsizliğinde (1.8) kullanılırsa

(1.12) $\qquad (1-|z|^2)\left|f^{'}(z)\right|\le(1-|z|^2)\left|g^{'}(z)\right|$

eşitsizliğini elde ederiz. (1.12) ifadesinde maksimum modül teoremi kullanılırsa

(1.13) $\qquad \underset{|z|\le r}{Max}\left(1-|z|^2\left|f^{'}(z)\right|\right)\le \underset{|z|\le r}{Max}\left(1-|z|^2\left|g^{'}(z)\right|\right)$, $(0<r<1)$

bulunur ki bu da ispatı istenen ifadedir.

SONUÇ 1.5: $f(z) \prec g(z)$ subordinasyonu geçerli ise

$$\left|f^{'}(0)\right| \leq \left|g^{'}(0)\right|$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İSPAT: Gerçekten, Sonuç 1.4'ün ispatında

(1.25) $$(1-\left|z\right|^2)\left|f^{'}(z)\right| \leq (1-\left|w(z)\right|^2)\left|g^{'}(w(z))\right|$$

eşitsizliğini elde etmiştik. (1.25) ifadesinde $w(0)=0$ olduğunu kullanırsak

$$\left|f^{'}(0)\right| \leq \left|g^{'}(0)\right|$$

eşitsizliğine ulaşılır.

TEOREM 1.2: $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları D birim diskinde tanımlanmış analitik fonksiyonlar olsunlar. $g(z)$ fonksiyonu D bölgesinde yalınkat ise $f(z)$ fonksiyonunun, $g(z)$ fonksiyonuna subordine olması için gerek ve yeter şart

$$f(0)=g(0) \text{ ve } f(D) \subset g(D)$$

olmasıdır.

İSPAT: (Gereklilik) $g(z)$ fonksiyonu D bölgesinde yalınkat ve $f(z) \prec g(z)$ olsun. 3. bölümde verilen yalınkat olmanın tanımından dolayı

(1.15) $$z_1 \neq z_2 \Rightarrow g(z_1) \neq g(z_2)$$

dir . Ayrıca $f(z)$ fonksiyonu , $g(z)$ fonksiyonuna subordine olduğundan

(1.16) $w(z)$, D de analitik

(1.17) $w(0)=0$, $(\left|z\right|<1'de)$

(1.18) $\left|z_1\right|<1$ için $\left|w(z)\right|<1$

olacak şekilde bir $w(z)$ fonksiyonu vardır. (1.15), (1.16), (1.17) ve (1.18) ifadelerinin birlikte düşünülmesi ile aşağıdaki sonuca varılabilir.

$z_1 \in w(D_r)$ (0 < r < 1) için $z_1 = w(z)$ olacak şekilde bir $z \in D_r$ vardır.

Dolayısıyla

$$z_1 = w(z) \Rightarrow \left|z_1\right| = \left|w(z)\right| < 1 \Rightarrow \left|z_1\right| < 1 \Rightarrow z_1 \in D_r$$

buluruz. Bu ise bize

(1.19) $$w(D_r) \subset D_r$$

olduğunu gösterir . (1.15) eşitliği (1.19) ifadesi ile birlikte düşünülürse

(1.20) $$g(w(D_r)) \subset g(D_r)$$

bağıntısı elde edilir. Diğer taraftan

(1.21) $$f(z) \prec g(z) \Rightarrow f(z) = g(w(z)) \Rightarrow f(D_r) = g(w(D_r))$$

eşitliğini de göz önüne alırsak (1.20) ve (1.21) ifadelerinden

(1.22) $$f(D_r) \subset g(D_r)$$

yazılabilir. (1.22) bağıntısında $r \to 1$ alınırsa

(1.23) $$f(D) \subset g(D)$$

buluruz .Öte yandan verilen tanımları kullanarak

$$\left.\begin{array}{l} f(z) \prec g(z) \Rightarrow f(z) = g(w(z)) \\ w(0) = 0 \Rightarrow f(0) = g(w(0)) \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = g(0)$$

elde ederiz.

(Yeterlilik) $g(z)$ fonksiyonu D bölgesinde yalınkat, $f(0) = g(0)$ ve $f(D) \subset g(D)$ olsun. Göstermeliyiz ki $f(z) \prec g(z)$ dir.

$g(z)$, D de yalınkat olduğundan (1.15) bağıntısını kullanarak

$$w = g(z) \Leftrightarrow z = g^{-1}(w)$$

fonksiyonunun $g(D)$ de analitik (Riemann tasvir teoreminden) ve yalınkat olduğunu söyleyebiliriz. Diğer yandan $f(D) \subset g(D)$ olduğundan $z = g^{-1}(w)$ fonksiyonu aynı zamanda $f(D)$ de yalınkattır. Şimdi

(1.24) $$w(z) = g^{-1}(f(z))$$

fonksiyonunu tanımlayalım. (1.24) şeklinde tanımlanan fonksiyon yukarıda söylediklerimizden ötürü $g(D)$ de analitiktir. $f(D) \subset g(D)$ olduğundan $w(z)$ fonksiyonu $f(D)$ 'de de analitiktir. Ayrıca

$$f(0) = g(0) \Rightarrow 0 = g^{-1}(f(0))$$

bulunur ki bu bağıntı bize

$$\left.\begin{array}{l} w(z) = g^{-1}(f(w)) \\ g^{-1}(f(0)) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow w(0) = 0$$

eşitliğini verir. Ayrıca $w(z) = g^{-1}(f(z))$ fonksiyonuna ait bütün değerler $z = g^{-1}(w)$

fonksiyonu ile verilebileceğinden $w(z)=g^{-1}(f(z))$ fonksiyonu D ‘de analitiktir ve $|w(z)|<1$ koşulunu gerçekler. Sonuç olarak $w(z)$, D ‘de analitik, $w(0)=0, |w(z)|<1$ koşullarını gerçekleyen fonksiyon olmak üzere

$$w(z)=g^{-1}(f(z)) \Rightarrow f(z)=g(w(z))$$

şeklinde yazılabilir ki bu da subordinasyon tanımından dolayı

$$f(z) \prec g(z)$$

olduğunu gösterir.

PROBLEM 1.1: (Lindelöf Prensibi) Subordinasyon prensibini kullanarak $w=f(z)$ fonksiyonu için

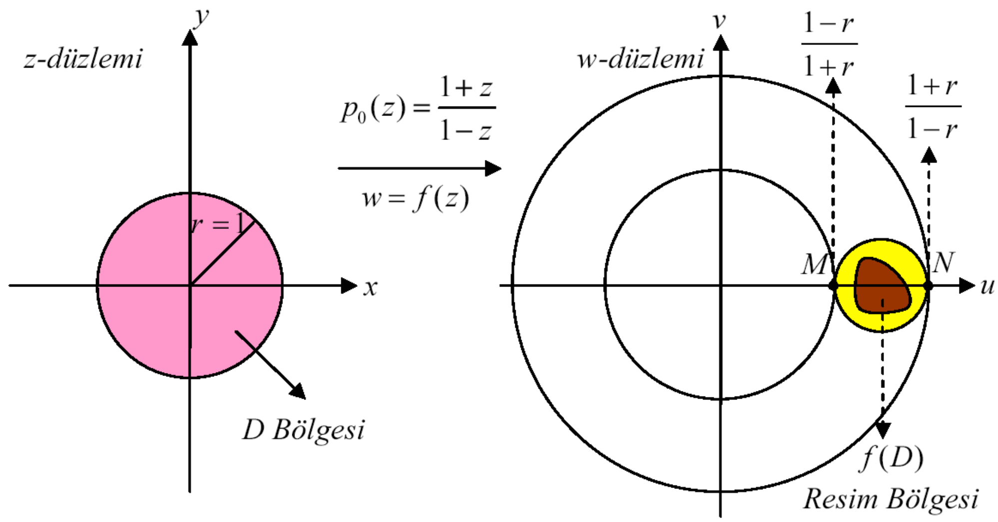
$$M_2(r) \le |f(z)| \le M_1(r)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada $M_1(r)$ üst sınır, $M_2(r)$ alt sınırdır.

ÇÖZÜM : Problemin çözümü için aşağıdaki şekilde hareket edilir.

$f(z) \prec \dfrac{1+z}{1-z}$ olsun. Bu durumda $p_0(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonunun $|z|=r$ çemberini nasıl çemberler üzerine resmettiğini bulalım. $D=\{z \,|\, |z|<1\}$ birim diskinin resmi, subordinasyon prensibinden dolayı, $f(D)\subset p_0(D)$ olacağından $f(z)$ resim çemberinin içinde olacaktır.

Örneğin, Teorem 2.1’den dolayı $p_0(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu $|z|=r$ çemberini merkezi $c(r)=\dfrac{1+r^2}{1-r^2}$, yarıçapı $\rho(r)=\dfrac{2r}{1-r^2}$ olan çemberler üzerine resmeder. Dolayısıyla aşağıdaki şekil çizilebilir.



Şekil 1.2

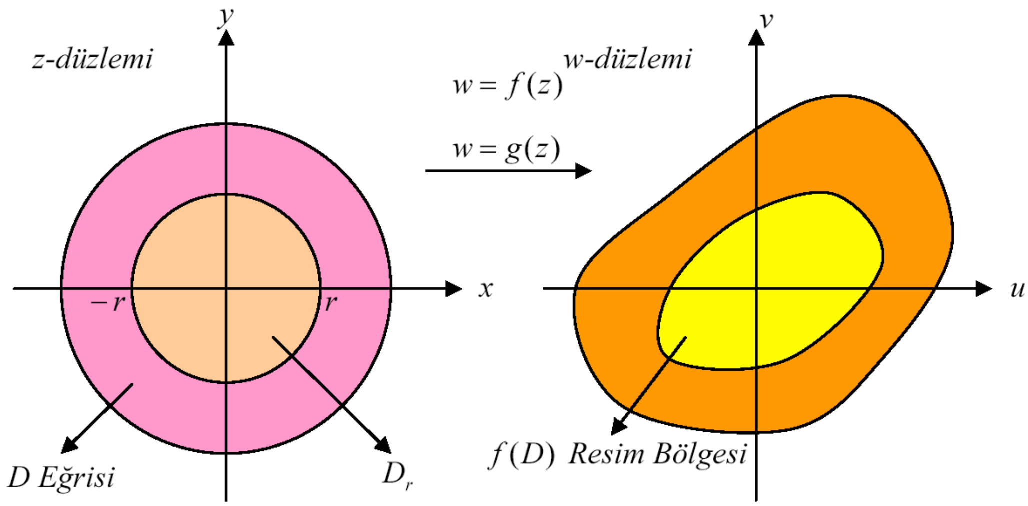
Bu ise çapın uç noktalarının

$$M=\frac{1-r}{1+r},N=\frac{1+r}{1-r}$$

olduğunu gösterir. Şekil 1.2 de görüldüğü gibi $f(D)$ bölgesi bu çemberin içinde olacağından

$$\frac{1-r}{1+r}\leq\left|f(z)\right|\leq\frac{1+r}{1-r}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Dolayısıyla Lindelöf Prensibine $f(z)\prec g(z)$ ise $f(D_r)\subset g(D_r)$ dir. Buna ait şekil aşağıdaki gibidir.


y
z-düzlemi
$w = f(z)$
w-düzlemi
v
$w = g(z)$
x
u
$-r$
r
D Eğrisi
D_r
$f(D)$ Resim Bölgesi

Şekil 1.3

2. POZİTİF REEL KISMA SAHİP FOKSİYONLAR

Birim diskte analitik pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı Carathedory tarafından inşa edilmiştir. Bu sınıf yalınkat fonksiyonlar teorisinde çok önemli yere sahiptir.

TANIM 2.1: (Pozitif Reel Kısma Sahip Fonksiyonlar Sınıfı) $D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ bölgesinde tanımlanmış analitik ve $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots$ Taylor açılımına sahip, $p(0) = 1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ koşullarını gerçekleyen $p(z)$ fonksiyonlarından oluşan cümleye "Pozitif Reel Kısma Sahip Fonksiyon Sınıfı" denir. Bu sınıf ayrıca "Carathedory Sınıfı" olarak da adlandırılır ve "$\wp$" ile gösterilir.

TEOREM 2.1: $w = f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu $|z| = r$ çemberini merkezi $c(r) = \left(\dfrac{1+r^2}{1-r^2}, 0\right)$ de bulunan ve yarıçapı $\rho(r) = \dfrac{2r}{1-r^2}$ olan çemberler üzerine resmeder.

İSPAT:

$$w = \frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow w(1-z) = 1+z \Leftrightarrow w - wz = 1+z$$

$$\Leftrightarrow w - 1 = z + wz \Leftrightarrow (w-1) = z(1+w) \Rightarrow z = \frac{w-1}{w+1}$$

$$z=\frac{w-1}{w+1}\Rightarrow |z|=r=\left|\frac{w-1}{w+1}\right|\Rightarrow |z|^2=r^2=\frac{|w-1|^2}{|w+1|^2}\Rightarrow |z|^2=\frac{|(u-1)+iv|^2}{|(u+1)+iv|^2}$$

$$\Rightarrow r^2=\frac{|(u-1)+iv|^2}{|(u+1)+iv|^2}\Rightarrow r^2=\frac{(u-1)^2+v^2}{(u+1)^2+v^2}\Leftrightarrow r^2\left[(u+1)^2+v^2\right]=(u-1)^2+v^2$$

$$\Leftrightarrow r^2\left[u^2+2u+1+v^2\right]=u^2-2u+1+v^2\Rightarrow r^2u^2+2ur^2+r^2+r^2v^2=u^2+v^2-2u+1$$

$$u^2+v^2-2u+1-r^2u^2-r^2v^2-2ur^2-r^2=0\Rightarrow$$

$$(1-r^2)u^2+(1-r^2)v^2-2(1+r^2)u+1-r^2=0\Rightarrow$$

$$u^2+v^2-2\frac{(1+r^2)}{1-r^2}u+1=0\Rightarrow \tag{2.1}$$

çember denklemini buluruz $(x^2+y^2+Ax+By+C=0)$. Bu çemberin merkezi

$$\left.\begin{aligned} a&=-\frac{A}{2}=\frac{2\frac{1+r^2}{1-r^2}}{2}=\frac{1+r^2}{1-r^2}\\ b&=-\frac{B}{2}=\frac{0}{2}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow c(r)=\left(\frac{1+r^2}{1-r^2},0\right)$$

yarıçapı

$$\rho(r)=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}=\frac{\sqrt{\left(-2\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2+0-4.1}}{2}=\frac{\sqrt{\frac{4(1+r^2)^2}{(1-r^2)^2}-4}}{2}$$

$$\rho(r)=\frac{2\sqrt{\frac{(1+r^2)^2}{(1-r^2)^2}-1}}{2}=\frac{\sqrt{\frac{(1+r^2)^2-(1-r^2)^2}{(1-r^2)^2}}}{1}=\frac{\sqrt{(1+r^2)^2-(1-r^2)^2}}{(1-r^2)}$$

$$=\frac{\sqrt{1+2r^2+r^4-1+2r^2-r^4}}{1-r^2}=\frac{\sqrt{4r^2}}{1-r^2}=\frac{2r}{1-r^2}$$

$$\rho(r)=\frac{2r}{1-r^2}$$

olarak bulunur. Bu ifade aynı zamanda

$$\left|f(z)-\frac{1+r^2}{1-r^2}\right|\leq\frac{2r}{1-r^2}$$

olarak da yazılabilir.

TEOREM 2.2: $w = f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu $D = \{z \mid |z| < 1\}$ birim diskini $\operatorname{Re} w > 0$ sağ yarım düzlemi üzerine resmeder.

İSPAT: w fonksiyonunun tanımından hareketle

$$w = \frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow w(1-z) = 1+z \Leftrightarrow w - wz = 1+z$$

$$\Leftrightarrow w-1 = z+wz \Leftrightarrow (w-1) = z(1+w) \Rightarrow z = \frac{w-1}{w+1} \Leftrightarrow 1|z| = \frac{|w-1|}{w+1} \Rightarrow$$

$$|w+1| > |w-1|$$

elde edilir. Burada $w = u + iv$ olduğu kullanılırsa

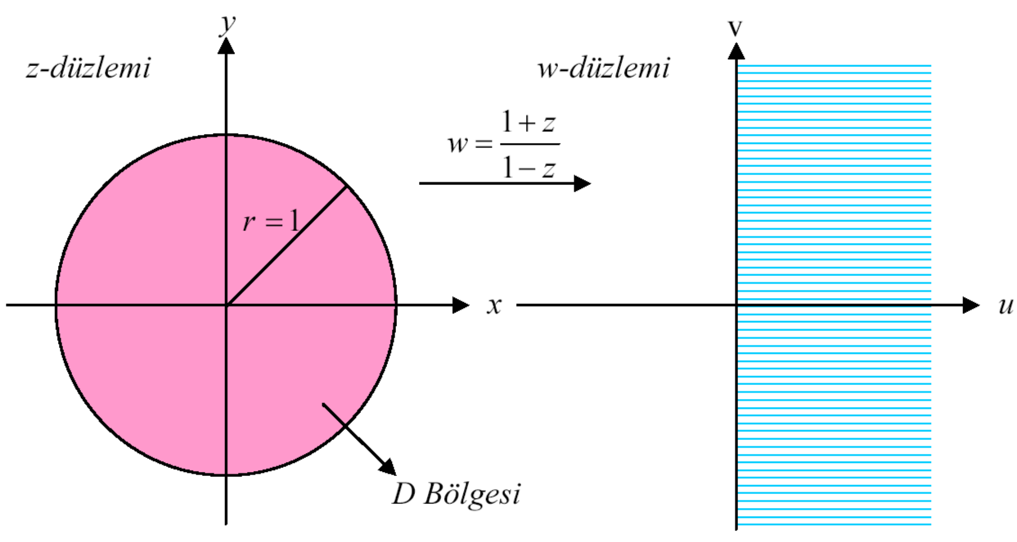
$$|u+iv+1| > |u+iv-1| \Rightarrow |(u+1)+iv| > |(u-1)+iv| \Rightarrow$$

$$(u+1)^2 + v^2 > (u-1)^2 + v^2 \Rightarrow u^2 + 2u + 1 + v^2 > u^2 - 2u + 1 + v^2 \Rightarrow$$

$$2u > -2u \Rightarrow 4u > 0 \Rightarrow u > 0 \Rightarrow$$

$$u = \operatorname{Re} w > 0 \tag{2.2}$$

bulunur. (2.2) eşitliği bize $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonunun $D = \{z \mid |z| < 1\}$ bölgesini w-düzleminde $\operatorname{Re} w = u > 0$ sağ yarım düzlemi üzerine gösterir.



Şekil 2.1

NOT 2.1 : Yukarıda incelenen $w=f(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu "$\wp$" sınıfına aittir ve extremal fonksiyondur. (Bir eşitsizlikte eşitliği veren fonksiyona extremal fonksiyon adı verilir.)

TEOREM 2.3: $p(z)=1+p_1z+p_2z^2+...$ fonksiyonu $D=\{z\,\big|\,|z|<1\}$ de tanımlanmış analitik $p(0)=1, \operatorname{Re} p(z)>0$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $p(z)$ fonksiyonu $w(z)$, D de analitik $w(0)=0$, $|w(z)|<1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere

$$p(z)=\frac{1+w(z)}{1-w(z)}$$

şeklinde yazılabilir.

İSPAT:

(2.4) $$w=f(z)=\frac{1+z}{1-z}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonu Teorem 2.2 de incelemiştik ve $D=\{z\,\big|\,|z|<1\}$ bölgesini $\operatorname{Re} w>0$ sağ yarı düzlem üzerine resmettiğini gördük. Diğer yandan Teorem 1.2 den biliyoruz ki "$f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları D birim diskinde tanımlanmış analitik fonksiyonlar olsunlar. $g(z)$ fonksiyonu D bölgesinde yalınkat ise $f(z)$ fonksiyonunun, $g(z)$ fonksiyonuna subordine olması için gerek ve yeter şart $f(0)=g(0)$ ve $f(D)\subset g(D)$ olmasıdır".

Dolayısıyla,

(i) $p(0)=1,$ verilen hipotez şartı

(ii) $w(0)=\dfrac{1+0}{1-0}=1, \left(w=\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ lineer transformasyonu

(iii) $w(z)=\dfrac{1+z}{1-z},$ Möbius transformasyonu yalınkattır.

(iv) $\operatorname{Re} p(0)>0, \operatorname{Re}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)>0,$ $(p(D)\subset w(D)$ demektir.)

ifadeleri subordinasyon prensibinin koşullarının gerçeklendiğini gösterir. Yani

(2.5) $\quad p(z) \prec \dfrac{1+z}{1-z}$

ifadesini yazabiliriz. Subordinasyon prensibi tanımı kullanılırsa

(2.5) $\quad p(z) \prec \dfrac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow p(z) = \dfrac{1+w(z)}{1-w(z)}$

yazılır ki bu da teoremin ispatını verir.

TEOREM 2.4: $f(z)$ fonksiyonu "$\wp$" sınıfına ait ise

$$\frac{1+r}{1-r} \leq |p(z)| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

dir.

İSPAT: Sonuç 1.2 de gösterdik ki "$0 < r < 1$ olmak üzere $f(z) \prec g(z)$ subordinasyonu varsa $\{f(z) \,|\, |z| < r\} \subset \{g(z) \,|\, |z| < r\}$ bağıntısı gerçeklenir."

Ayrıca Teorem 2.1 den dolayı

"$w = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu $|z| = r$ çemberini merkezi $c(r) = \dfrac{1+r^2}{1-r^2}$ de bulunan ve yarıçapı $\rho(r) = \dfrac{2r}{1-r^2}$ olan çemberler üzerine resmeder."

sonucunu yazabiliriz ve yine Teorem 2.3 te ispatladık ki

"$p(z) \in \wp$ ise $p(z) \prec \dfrac{1+z}{1-z}$ dir."

ifadesi geçerlidir. Bu üç ifadeden dolayı

(2.7) $$\left| p(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{2r}{1-r^2}$$

eşitsizliği yazılabilir. Diğer yandan herhangi iki z_1 ve z_2 kompleks sayısı için yazılabilen

(2.8) $$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

ifadesi (2.7) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$|p(z)|-\left|\frac{1+r^2}{1-r^2}\right| \le \left|p(z)-\frac{1+r^2}{1-r^2}\right| \le \frac{2r}{1-r^2} \Rightarrow$$

$$|p(z)| \le \frac{2r}{1-r^2}+\frac{1+r^2}{1-r^2}=\frac{1+r^2+2r}{1-r^2}=\frac{(1+r)^2}{(1-r)(1+r)}=\frac{1+r}{1-r}$$

(2.9) $$|p(z)| \le \frac{1+r}{1-r}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi aşağıdaki yardımcı teoremi ispatlayalım.

Eğer $p(z)$ fonksiyonu $\wp$ sınıfına ait ise $\dfrac{1}{p(z)}$ fonksiyonu da $\wp$ sınıfına aittir.

Gerçekten, $p(z)$ fonksiyonu $\wp$ sınıfına ait olsun. Şimdi

$$q(z)=\frac{1}{p(z)}$$

fonksiyonunu tanımlayalım ve $q(z)$ fonksiyonunun pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfının özelliklerini sağladığını gösterelim.

$$q(0)=\frac{1}{p(0)}=\frac{1}{1}=1 \Rightarrow$$

(2.10) $$q(0)=1$$

$$q(z)=\frac{1}{p(z)}=\frac{\overline{p(z)}}{p(z).\overline{p(z)}}=\frac{\overline{p(z)}}{|p(z)|^2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} q(z)=\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{p(z)}}{|p(z)|^2}\right)=\frac{1}{|p(z)|^2}\operatorname{Re}(\overline{p(z)}) \Rightarrow$$

(2.11) $$\operatorname{Re} q(z)=\frac{1}{|p(z)|^2}\operatorname{Re}(\overline{p(z)}) .$$

Son eşitlikte, bir kompleks sayının ve eşleniğinin reel kısımlarının eşit olduğu, yani

(2.12) $$\operatorname{Re} q(z)=\operatorname{Re}(\overline{p(z)}) \Rightarrow$$

ifadesi kullanılırsa

$$\operatorname{Re} q(z)=\frac{1}{|p(z)|^2}\operatorname{Re}\left(\overline{p(z)}\right)=\frac{1}{|p(z)|^2}\operatorname{Re} p(z) \Rightarrow$$

(2.13) $$\operatorname{Re} q(z) = \frac{1}{|p(z)|^2} \operatorname{Re} p(z)$$

eşitliği elde edilir. Öte yandan

$$\frac{1}{|p(z)|^2} > 0, \operatorname{Re} p(z) > 0$$

eşitsizlikleri (2.13) de kullanılırsa

(2.14) $$\operatorname{Re} q(z) > 0$$

elde edilir.

$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + ...$ fonksiyonu D de analitik olduğundan $q(z)$ fonksiyonu da D analitiktir. Dolayısıyla bulduğumuz bu özelliklerden dolayı $q(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ fonksiyonunun da $\wp$ sınıfına ait olduğunu göstermiş oluruz.

Yardımcı teoremden hareketle

$$q(z) = \frac{1}{p(z)} \Rightarrow |q(z)| = \left|\frac{1}{p(z)}\right| \leq \frac{1+r}{1-r} \Rightarrow$$

(2.15) $$|p(z)| \geq \frac{1-r}{1+r}$$

buluruz. (2.9) ve (2.15) ifadeleri birlikte düşünülürse

$$\frac{1-r}{1+r} \leq |p(z)| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da bize teoremin ispatını verir.

LEMMA 2.1: (I. S. Jack Lemması) $w(z)$ fonksiyonu birim diskte ($D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ 'de) tanımlanmış, analitik $w(0) = 0, |w(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|w(z)|, |z| = r$ çemberi üzerinde bir z_1 noktasında maksimum değerini alırsa, $k \geq 1$ olmak üzere

$$z_1 w'(z_1) = k w(z_1)$$

eşitliği gerçeklenir ([14]).

İSPAT: $|z| = r$ çemberi üzerinde $|w(z)|$'nün maksimum değerini *M(r,w)* ile gösterelim. $\log M(r, w)$ fonksiyonunun sürekli ve konveks, ayrıca $w(0) = 0$ eşitliğinden $\log r$'nin artan bir fonksiyonu olduğunu biliyoruz.

$|z| = r$ çemberi üzerinde herhangi bir noktada

(2.16) $$|w(z)| = M(r, w)$$

olsun. $z = re^{i\theta}$ ve $w(z) = Re^{i\phi}\,(R \neq 0)$ olmak üzere maksimum alma durumundan dolayı

$$(w(z) = Re^{i\phi}, z = re^{i\theta} \Rightarrow |w(z)| = |Re^{i\phi}| \Rightarrow |w(z)| = R \Rightarrow |w(z)| = R(r, \theta))$$

(2.17) $$\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0$$

eşitliği yazılabilir. Diğer yandan

(2.18) $$\frac{\partial}{\partial \theta}(\log R(r, \phi)) = \frac{\frac{\partial R}{\partial \theta}}{R(r, \theta)} = \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0$$

bulunur. Ayrıca

(2.19) $$\log w(z) = \log(Re^{i\phi}) = \log R + \log e^{i\phi} = \log R + i\phi$$

yazılışı göz önüne alınırsa

(2.20) $$\mathrm{Re}(\log w(z)) = \log R(r, \theta)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla (2.18) ve (2.20) eşitlikleri birlikte düşünülürse

(2.21) $$0 = \frac{\partial}{\partial \theta}(\log R(r, \phi)) = \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta} = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\log(w(z))\right)$$

ifadesi bulunur. Diğer taraftan

$$\log w(z) = \log(|w(z)|e^{i\phi}) = \log|w(z)| + i\phi = \log R(r, \theta) = \log w(re^{i\theta}) \Rightarrow$$

(2.22) $$\log w(z) = \log(w(re^{i\theta}))$$

olduğu düşünülürse ve (2.22) eşitliğinden her iki tarafın θ 'ya göre türevi alınırsa

(2.23) $$ire^{i\theta}\frac{w'(re^{i\theta})}{w(re^{i\theta})} = \frac{\frac{\partial R}{\partial \theta}}{R} = \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta}$$

eşitliği elde edilir. (2.23) aynı zamanda

(2.24) $$re^{i\theta}\frac{w^{'}(re^{i\theta})}{w(re^{i\theta})}=\mathrm{Z}=X+iY$$

olduğunu düşünerek her iki tarafını i ile çarparsak

(2.25) $$ire^{i\theta}\frac{w^{'}(re^{i\theta})}{w(re^{i\theta})}=i\mathrm{Z}=iX-Y$$

eşitliği elde edilir. (2.20), (2.21), (2.22), (2.23), (2.24) ve (2.25) ifadelerinden

(2.26) $$-\mathrm{Im}\left(re^{i\theta}\frac{w^{'}(re^{i\theta})}{w(re^{i\theta})}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log w(z)\right)$$

bulunur. Dolayısıyla yukarıdaki eşitliklerden

(2.27)

$$0=\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial\theta}(\log R)=\frac{\partial}{\partial\theta}(\log R)=\mathrm{Re}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log w(z)\right)=-\mathrm{Im}\left(re^{i\theta}\frac{w^{'}(re^{i\theta})}{w(re^{i\theta})}\right)$$

bulunur. Bu ise

(2.28) $$-\mathrm{Im}\left(re^{i\theta}\frac{w^{'}(re^{i\theta})}{w(re^{i\theta})}\right)=0$$

olduğunu gösterir. (2.28) bize $k(r)=k(|z_1|)$ olmak üzere $w(z)$ fonksiyonunun $|z|=r$ çemberi üzerinde bir z_1 noktasında maksimum değerini alması durumunda

(2.29) $$z_1\frac{w^{'}(z_1)}{w(z_1)}=k(|z_1|)$$

şeklinde bir reel değere eşit olduğunu gösterir.

Şimdi $k\geq 1$ olduğunu gösterelim. $w(z)$ fonksiyonu $w(0)=0$ koşulunu gerçeklediğinden $w(z)$ fonksiyonunun $z=0$ civarındaki Taylor açılımı

(2.30) $$w(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

şeklindedir. Yani $w(z)$ fonksiyonunun sabit terimi sıfırdır. Diğer yandan (2.30) ifadesinden türev alıp z ile çarparsak

(2.31) $$w^{'}(z)=a_1+2a_2z+\ldots$$

(2.32) $$zw^{'}(z)=a_1z+2a_2z^2+\ldots$$

sonuçları elde edilir. (2.29) ifadesinin

$$z_1 \frac{w'(z_1)}{w(z_1)} = k(|z_1|) \Leftrightarrow z_1 w'(z_1) = w(z_1)k(|z_1|) \Rightarrow$$

(2.33) $$a_1 z + 2a_2 z^2 + 3a_3 z^3 + ... + na_n z^n + ... = ka_1 z + ka_2 z^2 + ka_3 z^3 + ... + ka_n z^n + ...$$

şeklinde yazılabileceği göz önüne alınırsa $k = n$ olduğu görülür. Burada n, $w(z)$ fonksiyonunun $z = 0$ noktası civarında Taylor açılımındaki n 'inci katsayıyı göstermektedir. Yukarıda söylenenlerden dolayı bu açılımda sabit terim sıfır olduğundan $n \geq 1$dir. Yani $k \geq 1$dir. Eğer $k(|z_1|) = k(r)$ fonksiyonunun r 'nin artan fonksiyonu olduğunu gösterirsek $n \geq 1$eşitsizliğini göstermiş oluruz.

$\log M(r,w)$ fonksiyonu $(\log r)$ 'nin konveks fonksiyonu olduğundan

(2.34) $$\frac{d(\log M(r,w))}{d(\log r)} = r \frac{M'(r,w)}{M(r,w)}$$

ifadesini yazabiliriz. (2.34) eşitliği bize $\left(r \frac{M'(r,w)}{M(r,w)} \right)$ifadesinin, $(\log r)$'nin ve aynı zamanda r'nin artan fonksiyonu olduğunu gösterir. Ayrıca

$$\frac{d(\log M(r,w))}{d(\log r)}$$

türevi bu tür noktalarda vardır. Türevin bu tür noktalarda olmadığını farz etmemiz halinde; sağ ve sol türevlerin bu tür noktalarda var olduğunu biliyoruz ve yine biliyoruz ki bu tür noktalarda sol türev sağ türevi geçemez. Böyle herhangi bir durumda $\left(r \frac{M'(r,w)}{M(r,w)} \right)$ artandır. Buna karşılık r'nin fonksiyonunun sürekli olması gerekmez. Fakat

$$k(r) = z_1 \frac{w'(z_1)}{w(z_1)} = \operatorname{Re}\left(z_1 \frac{w'(z_1)}{w(z_1)} \right) = r \operatorname{Re}\left(\frac{\partial}{\partial r} (\log w(z)) \Big|_{z=z_1} \right)$$

$$= r \frac{\partial \log R}{\partial r} \bigg|_{z=z_1} = r \left. \frac{\frac{\partial R}{\partial r}}{R} \right|_{z=z_1} \quad , R\big|_{z=z_1} = M(r,w)$$

olduğu göz önüne alınırsa $k \geq 1$ olduğu görülür.

TEOREM 2.5: $p(z)$ fonksiyonu $D=\{z||z|<1\}$ bölgesinde analitik, $\operatorname{Re} p(z)>0$ ve $p(0)=\alpha+i\beta$ $(\alpha,\beta>0$ ve reel sayı) koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

(2.35) $$q(z)=\frac{1}{\alpha}(p(z)-i\beta)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $\wp$ sınıfına aittir.

İSPAT: $p(z)$ fonksiyonu D de analitik olduğundan, fonksiyonun bir pozitif reel sayı ile çarpılması ve paralel kaydırmaya tabi tutulması analitikliğini bozmaz. Dolayısıyla

(2.36) $p(z)-i\beta$ (paralel kaydırma)

(2.37) $\frac{1}{\alpha}(p(z)-i\beta)$ (reel sayıyla çarpma)

fonksiyonları da analitik olacaktır. Bunu göre (2.35) şeklinde tanımlanan fonksiyon D de analitiktir. Diğer yandan

$$q(0)=\frac{1}{\alpha}(p(0)-i\beta)=\frac{1}{\alpha}(\alpha+i\beta-i\beta)=\frac{1}{\alpha}(\alpha)=1\Rightarrow$$

$$q(0)=1$$

koşulunu gerçekler. Ayrıca

$$\operatorname{Re} q(z)=\operatorname{Re}\left[\frac{1}{\alpha}(p(z)-i\beta)\right]=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha}p(z)\right)=\frac{1}{\alpha}\operatorname{Re} p(z)>0\Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} q(z)>0$$

sonucuna ulaşılır ki bu bize $q(z)$ fonksiyonunun $\wp$ sınıfına ait olduğunu gösterir.

TEOREM 2.6: $p(z)=1+p_1z+p_2z^2+p_3z^3+...+p_nz^n+...$ fonksiyonu birim disk $D=\{z||z|<1\}$ de tanımlanmış ve analitik olsun. $p(z)$ fonksiyonunun $\wp$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart , $w(z)$ fonksiyonu D de analitik, $w(0)=0$, $|w(z)|<1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere,

$$p(z)=\frac{1+w(z)}{1-w(z)}$$

şeklinde ifade edilmesidir.

İSPAT: (Gereklilik) $p(z)\in \wp$ olsun, dolayısıyla aşağıdaki üç koşul gerçeklenir.

(2.38) $p(z)$ fonksiyonu D de analitiktir.

(2.39) $p(0)=1$ dir.

(2.40) $\operatorname{Re} p(z)>0$ dir.

Diğer yandan ,

(2.41) $$w(z)=\frac{z-1}{z+1}$$

lineer kesirsel transformasyonu $\operatorname{Re} z>0$ sağ yarım düzlemini birim disk içine resmeder. Dolayısıyla (2.40) koşulu (2.41) eşitliğinde kullanılırsa

(2.42) $$w(z)=\frac{p(z)-1}{p(z)+1}$$

fonksiyonunda sağ yarım düzlemini birim disk içine resmeder. Şimdi (2.42) fonksiyonundaki durumları inceleyelim.

$$w(0)=\frac{p(0)-1}{p(0)+1}=\frac{1-1}{1+1}=0 \Rightarrow$$

(2.43) $$w(0)=0$$

dır. Diğer yandan sağ yarım düzlem birim disk içine resmedildiğinden

(2.43) $$|w(z)|<1$$

koşulu gerçeklenir. Öte yandan $w(z)=\dfrac{p(z)-1}{p(z)+1}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon gözönüne alındığında , $p(z)$ analitik olduğundan $\dfrac{p(z)-1}{p(z)+1}$ Möbius transformasyonu da analitiktir. Yani sonuç olarak (2.42) eşitliği ile tanımlanan $w(z)$ fonksiyonu $D=\{z\,\big|\,|z|<1\}$ de analitiktir.

$$w(z)=\frac{p(z)-1}{p(z)+1} \Leftrightarrow p(z)=\frac{1+w(z)}{1-w(z)}$$

eşitliği elde edilir.

(Yeterlilik) $w(z)$ fonksiyonu $D=\{z\,\big|\,|z|<1\}$ de tanımlanmış

(i) $$w(0)=0$$

(ii) $$|w(z)|<1$$

(iii) $w(z)$, $D=\{z\,\|z|<1\}$ de analitik

koşullarını gerçekleyen fonksiyon olsun . $w(z)$ fonksiyonu yardımıyla

(2.45) $$f(z)=\frac{1+w(z)}{1-w(z)}$$

fonksiyonunu tanımlayalım . (2.45) ifadesindeki fonksiyon bir lineer transformasyon

olduğundan , $f(z)$, $D=\{z\,\|z|<1\}$ de analitiktir ve

$$f(0)=\frac{1+w(0)}{1-w(0)}=\frac{1+0}{1-0}=1\Rightarrow$$

(2.46) $$f(0)=1$$

koşulunu sağlar. Ayrıca

$$\operatorname{Re} f(z)=\frac{1}{2}\left[f(z)+\overline{f(z)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1+w(z)}{1-w(z)}+\overline{\left(\frac{1+w(z)}{1-w(z)}\right)}\right]\Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} f(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1+w(z)}{1-w(z)}+\overline{\left(\frac{1+w(z)}{1-w(z)}\right)}\right]\Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} f(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{(1+w(z))\overline{(1-w(z))}+\overline{(1+w(z))}(1-w(z))}{(1-w(z))\overline{(1-w(z))}}\right]\Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} f(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1-\overline{w(z)}+w(z)-|w(z)|^2+1-w(z)+\overline{w(z)}-|w(z)|^2}{(1+w(z))\overline{(1+w(z))}}\right]\Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} f(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{2-2|w(z)|^2}{|1-w(z)|^2}\right]=\frac{1-|w(z)|^2}{|1-w(z)|^2}>0\Rightarrow$$

(2.47) $$\operatorname{Re} f(z)>0$$

koşulu gerçeklenir. (2.45) , (2.46) ve (2.47) yazılışları bize $f(z)=\dfrac{1+w(z)}{1-w(z)}$

fonksiyonunun $\wp$ sınıfına ait olduğunu gösterir.

TANIM 2.2: D bölgesinde analitik $w=f(z)$ fonksiyonunun modülünü üsten ve alttan sınırlayan değerler verirsek distorsiyonu vermiş oluruz.

TEOREM 2.7: $w = f(z)$ fonksiyonu $\wp$ sınıfına ait ise

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \operatorname{Re} f(z) \leq \frac{1+r}{1-r}$$

distorsiyonu gerçeklenir.

İSPAT: Teorem 2.1 ‘de $w = f(z)$ fonksiyonu $\wp$ sınıfına ait ise

(2.48) $$\left| f(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{2r}{1-r^2}$$

eşitsizliğinin gerçekleneceğini göstermiştik. Ayrıca herhangi bir z kompleks sayısı için

(2.49) $$-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$$

bağıntısı vardır. Eğer $w = f(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2}$ alınırsa

(2.50) $$-\left| f(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| \leq \operatorname{Re}\left(f(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right) \leq \left| f(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right|$$

eşitsizliği elde edilir. (2.48) ve (2.50) eşitsizlikleri birlikte düşünülürse,

(2.51) $$-\frac{2r}{1-r^2} \leq -\left| f(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| \leq \operatorname{Re}\left(f(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right) \leq \left| f(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{2r}{1-r^2}$$

yazılır. Bu ise aynı zamanda

(2.52) $$-\frac{2r}{1-r^2} \leq \operatorname{Re}\left(f(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right) \leq \frac{2r}{1-r^2}$$

demektir ve

$$-\frac{2r}{1-r^2} \leq \operatorname{Re} f(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \leq \frac{2r}{1-r^2} \Rightarrow$$

$$-\frac{2r}{1-r^2} + \frac{1+r^2}{1-r^2} \leq \operatorname{Re} f(z) \leq \frac{2r}{1-r^2} + \frac{1+r^2}{1-r^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1+r^2-2r}{1-r^2} \leq \operatorname{Re} f(z) \leq \frac{1+r^2+2r}{1-r^2} \Rightarrow$$

$$\frac{(1-r)^2}{(1-r)(1+r)} \leq \operatorname{Re} f(z) \leq \frac{(1+r)^2}{(1-r)(1+r)} \Rightarrow$$

$$\frac{(1-r)}{(1+r)} \leq \operatorname{Re} f(z) \leq \frac{(1+r)}{(1-r)}$$

şeklinde ifade edilir.

TEOREM 2.8: $|a|<1$ koşulunu sağlayan bir kompleks sayı için

$$\left|\frac{1+a}{1-a}\right| \le \frac{1+|a|}{1-|a|}$$

eşitsizliği daima vardır.

İSPAT: Kompleks sayılarda ki üçgen eşitsizliğinden

(2.53) $$|1+a| \le 1+|a|$$

ifadesini yazabiliriz. Ayrıca,

$$1=|1|=|1-a+a| \le |1-a|+|a| \Rightarrow$$

(2.54) $$1-|a| \le |1-a|$$

bağıntısını (2.53) eşitsizliğinde kullanırsak

$$\frac{|1+a|}{|1-a|} \le \frac{1+|a|}{1-|a|} \Rightarrow \left|\frac{1+a}{1-a}\right| \le \frac{1+|a|}{1-|a|}$$

elde edilir ki buda bize teoremin ispatını verir.

TEOREM 2.9: $w=f(z)$ fonksiyonu $\wp$ sınıfına ait ise

$$\left|f'(z)\right| \le \frac{2}{(1-|z|)^2}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İSPAT: $w=f(z)$ fonksiyonu $\wp$ sınıfına ait ise, $\varphi(z)$ fonksiyonu Schwarz Lemmasının koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

(2.55) $$f(z)=\frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$$

şeklinde yazılabilir. (2.55) ifadesinden türev alırsak

$$f'(z)=\frac{\varphi'(z)(1-\varphi(z))+\varphi'(z)(1+\varphi(z))}{\left(1-\varphi(z)\right)^2} \Rightarrow$$

$$f'(z)=\frac{\varphi'(z)-\varphi'(z)\varphi(z)+\varphi'(z)+\varphi(z)\varphi'(z)}{\left(1-\varphi(z)\right)^2} \Rightarrow$$

$$f'(z)=\frac{2\varphi'(z)}{\left(1-\varphi(z)\right)^2}\Rightarrow$$

(2.56) $$\left|f'(z)\right|=\frac{2\left|\varphi'(z)\right|}{\left|1-\varphi(z)\right|^2}$$

eşitliği bulunur. Ayrıca $\varphi(z)$ fonksiyonu Schwarz Lemmasının koşullarını gerçeklediğinden

(2.57) $$\left|\varphi'(z)\right|\leq\frac{1-\left|\varphi(z)\right|^2}{1-\left|z\right|^2}$$

yazılabilir. (2.56) ve (2.57) birlikte düşünüldüğünde

$$\left|f'(z)\right|=\frac{2\left|\varphi'(z)\right|}{\left|1-\varphi(z)\right|^2}\leq\frac{2\left(\dfrac{1-\left|\varphi(z)\right|^2}{1-\left|z\right|^2}\right)}{\left|1-\varphi(z)\right|^2}=\frac{2(1-\left|\varphi(z)\right|^2)}{(1-\left|z\right|^2)\left|1-\varphi(z)\right|^2}$$

(2.58) $$\left|f'(z)\right|\leq\frac{2(1-\left|\varphi(z)\right|)(1+\left|\varphi(z)\right|)}{(1-\left|z\right|)(1+\left|z\right|)\left|1-\varphi(z)\right|^2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Diğer yandan $\varphi(z)$ fonksiyonunun $\left|\varphi(z)\right|\leq\left|z\right|$ eşitsizliğini sağladığı göz önüne alınırsa

(2.59) $$1+\left|\varphi(z)\right|\leq 1+\left|z\right|\Rightarrow\frac{1+\left|\varphi(z)\right|}{1+\left|z\right|}\leq 1$$

ifadesi bulunur ki (2.59) ifadesi (2.58) de kullanılırsa

(2.60) $$\left|f'(z)\right|\leq\frac{2(1-\left|\varphi(z)\right|)}{(1-\left|z\right|)\left|1-\varphi(z)\right|^2}$$

elde edilir. (Carathedory teoremi)

Ayrıca z_1 ve z_2 herhangi iki kompleks sayı olmak üzere

(2.61) $$\left|z_1-z_2\right|\geq\left|z_1\right|-\left|z_2\right|$$

eşitsizliği daima geçerlidir. Bu ifadede $z_1=1$ ve $z_2=\varphi(z)$ olarak alınırsa

(2.62) $$\left|1-\varphi(z)\right|\geq 1-\left|\varphi(z)\right|\Rightarrow\left|1-\varphi(z)\right|^2\geq(1-\left|\varphi(z)\right|)^2$$

elde edilir. (2.62) ifadesi (2.60) da kullanılırsa

$$\left|f^{'}(z)\right| = \frac{2(1-|\varphi(z)|)}{(1-|z|)|1-\varphi(z)|^2} \leq \frac{2(1-|\varphi(z)|)}{(1-|z|)(1-|\varphi(z)|)^2} \Rightarrow$$

(2.63) $$\left|f^{'}(z)\right| \leq \frac{2}{(1-|z|)(1-|\varphi(z)|}$$

bulunur. $|\varphi(z)| \leq |z|$ eşitsizliği (2.63) ifadesinde kullanılırsa

$$\left|f^{'}(z)\right| \leq \frac{2}{(1-|z|)(1-|\varphi(z)|} \leq \frac{2}{(1-|z|)(1-|z|)} \Rightarrow$$

$$\left|f^{'}(z)\right| \leq \frac{2}{(1-|z|)^2}$$

SONUÇ 2.1: $w = f(z)$ fonksiyonu $\wp$ sınıfına ait ise

$$\frac{1-r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{1+r}{1-r} \text{ ve } \left|f^{'}(z)\right| \leq \frac{2}{(1-|z|)^2}$$

eşitsizlikleri gerçeklendiğinden $\wp$ sınıfı normal bir aile oluşturur ve $\wp$ sınıfı kompak bir fonksiyon ailesidir.

SONUÇ 2.2: $\left|f^{'}(z)\right| \leq \frac{2}{(1-|z|)^2} \Rightarrow \left|f^{'}(0)\right| \leq 2$ eşitsizliği vardır. Bu ise

$$f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots \Rightarrow f^{'}(z) = p_1 + 2p_2 z + \ldots \Rightarrow f^{'}(z) = p_1$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\left|f^{'}(0)\right| = |p_1| \leq 2$$

demektir.

TEOREM 2.10: $f(z)$ fonksiyonu $\wp$ sınıfına ait ise $0 \leq t \leq 2\pi$ olmak üzere $f(e^{it}z)$ fonksiyonu da $\wp$ sınıfına aittir.

İSPAT : $f(z) \in \wp$ olduğundan

(2.64) $$f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots$$

açılımına sahip, $D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ bölgesinde analitik ve

(2.65) $$\operatorname{Re} f(z) > 0$$

(2.66) $$f(0) = 1$$

koşullarını gerçekler. Şimdi

(2.67) $$h(z) = f(e^{it}z) = 1 + p_1 e^{it} z + p_2 e^{2it} z^2 + ...$$

fonksiyonunu düşünelim. (2.67) yazılışından dolayı $h(z)$ fonksiyonu $D = \{z \| z| < 1\}$ de analitiktir, $h(0) = 1$ koşulunu gerçekler.

$$\zeta = e^{it} z \Rightarrow |\zeta| = |e^{it} z| = |e^{it}||z| = |z| < 1$$

ifadesi göz önüne alacak olursak $\zeta \in D = \{z \| z| < 1\}$ dır ve

$$h(z) = f(e^{it} z) \Rightarrow \operatorname{Re} h(z) = \operatorname{Re} f(\zeta) > 0$$

koşulunu gerçekler. Yani $h(z)$ fonksiyonu $\wp$ sınıfına aittir.

TEOREM 2.11: $w = f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + ...$ fonksiyonu $\wp$ sınıfına ait ise

$$|p_n| \leq 2$$

dir.

İSPAT : Teoremin ispatında aşağıdaki integral kullanılır.

(2.68) $$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{C:|z|=1} f(z) \left[2 - z^n - \frac{1}{z^n} \right] \frac{dz}{z}$$

integralini göz önüne alalım. (2.68) integrali aynı zamanda

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{C:|z|=1} f(z) \left[2 - z^n - \frac{1}{z^n} \right] \frac{dz}{z} \Rightarrow$$

(2.69) $$I = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{C:|z|=1} 2 \frac{f(z)}{z} dz}_{i} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{C:|z|=1} z^{n-1} f(z) dz}_{ii} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{C:|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz}_{iii}$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.69) yazılışındaki

(i) integral ;

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C:|z|=1} 2 \frac{f(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C:|z|=1} 2 \frac{1 + p_1 z + p_2 z^2 + ...}{z} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C:|z|=1} 2 \left(\frac{1}{z} p_1 + p_2 z + .. \right) dz$$

şeklinde yazılırsa integralin sadece $z=0$ noktasında rezidüsü vardır (Laurent açılımı düşünülür). Rezidü teoreminden dolayı, integralin değeri Laurent açılımındaki ilk katsayıya eşit olduğundan (i) integralinin değeri 2 olarak bulunur.

(ii) integral;

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} z^{n-1} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} z^{n-1}\left(1+p_1 z+p_2 z^2+\ldots+p_n z^n+\ldots\right)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1}(z^{n-1}+p_1 z^n+p_2 z^{n+1}+\ldots+p_n z^{2n-1}+\ldots)dz$$

şeklinde yazılırsa Cauchy-İntegral Teoremine göre integralin değeri 0 olarak bulunur.

(iii) integral;

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

integrali olduğu göz önüne alınırsa Cauchy-Türev formülünden dolayı p_n katsayısına eşittir.

Bulduğumuz sonuçları (2.69) ifadesinde yazarsak, I integrali

$$I=\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} 2\frac{f(z)}{z}dz}_{2}-\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} z^{n-1}f(z)dz}_{0}-\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz}_{(p_n)}\Rightarrow$$

(2.70) $$I=2-p_n$$

olarak bulunur.

I integralinin diğer bir çözümü ise aşağıdaki şekilde yapılabilir.

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} f(z)\left[2-z^n-\frac{1}{z^n}\right]\frac{dz}{z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} f(z)\left[2-z^n-z^{-n}\right]\frac{dz}{z}\Rightarrow$$

(2.71) $$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} f(z)\left[2-z^n-z^{-n}\right]\frac{dz}{z}$$

$$z=e^{i\theta}\Rightarrow dz=ie^{i\theta}d\theta,\ z^n=e^{in\theta},\ z^{-n}=e^{-in\theta}$$

$$2-(z^n+z^{-n})=2-(e^{in\theta}+e^{-in\theta})=$$

$$2-(\cos n\theta+i\sin n\theta+\cos n\theta-i\sin n\theta)=$$

$$2-(2\cos n\theta)=2-2\cos n\theta=$$

$$2(1-\cos \underbrace{n\theta}_{\theta_1}) = 2(1-\cos\theta_1) = 2(\sin^2\frac{\theta_1}{2} + \cos^2\frac{\theta_1}{2} - \cos\left(\frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_1}{2}\right) =$$

$$2(\sin^2\frac{\theta_1}{2} + \cos^2\frac{\theta_1}{2} - \cos^2\frac{\theta_1}{2} + \sin^2\frac{\theta_1}{2}) = 4\sin^2\frac{\theta_1}{2} = 4\sin^2\frac{n\theta}{2} \Rightarrow$$

$$2-(z^n + z^{-n}) = 4\sin^2\frac{n\theta}{2}$$

(2.71) integralinde yukarıda bulduğumuz ifadeler yazılacak olursa

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} f(z)\left[2-(z^n - z^{-n})\right]\frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=1} f(e^{i\theta})4\sin^2\frac{n\theta}{2}\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta$$

(2.72) $$I = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} f(e^{i\theta})4\sin^2\frac{n\theta}{2}d\theta$$

eşitliği bulunur. Diğer taraftan $0 \le \theta \le 2\pi \Rightarrow 0 \le n\theta \le 2\pi$ olduğu açıktır. $|z|=1$ çemberi üzerinde çalıştığımızdan (2.72) integrali

(2.73) $$I = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} f(e^{i\theta})4\sin^2\frac{n\theta}{2}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})4\sin^2\frac{n\theta}{2}d\theta$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonu $\wp$ sınıfına ait olduğundan $\operatorname{Re} f(z) \ge 0 \Rightarrow \operatorname{Re} f(e^{i\theta}) \ge 0$ eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla

$$\operatorname{Re} I = \operatorname{Re}(2-p_n) = \operatorname{Re}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\frac{n\theta}{2}d\theta\right) \ge 0 \Rightarrow$$

(2.74) $$\operatorname{Re}(2-p_n) \ge 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} p_n \le 2 \Rightarrow$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan $\wp$ sınıfının orijin etrafındaki rotasyon altında invaryant kaldığını, yani $f(z) \in \wp$ ise $f(e^{it}z) \in \wp$ olduğunu, Teorem 2.10 da göstermiştik.

$f(e^{it}z)$ fonksiyonunun Taylor açılımındaki n'inci katsayının $e^{int}p_n$ olduğu göz önüne alınırsa (7) eşitsizliği,

(2.75) $$\operatorname{Re}(e^{int}p_n) \le 2, 0 \le t \le 2\pi$$

şeklinde ifade edilebilir. t 'nin özellikle

(2.76) $$\begin{cases} p_n = |p_n| e^{i\arg p_n} \Leftrightarrow e^{i\arg p_n} p_n = |p_n| \\ nt = -\arg p_n \Leftrightarrow nt + \arg p_n = 0 \end{cases}$$

olacak şekilde değeri seçilirse (2.75) ve (2.76) eşitliklerinden

$$\mathrm{Re}(e^{int} p_n) = |p_n| \le 2$$

olduğu bulunur.

TEOREM 2.12: $f(z)$ fonksiyonu $\wp$ sınıfına ait ise

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\gamma(t), \gamma(2\pi, r) - \gamma(0, r) = 1$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\gamma(t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathrm{Re}\, f(re^{i\theta}) d\theta$$

şeklinde bir fonksiyondur.

İSPAT: Teoremin ispatı, analitik fonksiyonlar için Schwarz formülü kullanarak yapılır. Analitik fonksiyonlar için Schwarz formülü aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$h(z)$ fonksiyonu $|z| < R$ de analitik olsun. Bu durumda

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + ic$$

yazılışı geçerlidir. Burada c keyfi reel sayı, $u(\zeta)$ fonksiyonu, $h(z)$ fonksiyonunun reel kısmıdır.

$$|\zeta| = r \Rightarrow \zeta = re^{it} \Rightarrow d\zeta = ire^{it} dt \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \mathrm{Re}\, f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} \mathrm{Re}\, f(re^{it}) \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt \Rightarrow$$

(2.77) $$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} \mathrm{Re}\, f(re^{it}) dt$$

Diğer yandan Helly seçme teoremine göre, $[a,b]$ aralığında sonsuz elemana sahip bir $F=\{f(x)\}$ ailesi tanımlanmış olsun. Aileye ait bütün fonksiyonlar ve bu fonksiyonların toplam değişimi sınırlı, yani $\forall f(x)\in F$ için $|f(x)|\leq K$ ve $\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)\leq K$ ise, F ailesinden bir $\{f_n(x)\}$ dizisi seçmek mümkündür ki $\{f_n(x)\}$ dizisi $[a,b]$ nin her noktasında bir $\varphi(x)$ fonksiyonuna yakınsar. $n\to\infty$ için $r_n\to 1$ olmak üzere $\{r_n\}$ dizisi, $\gamma(t,r_n)$ fonksiyonunun bütün süreklilik noktaları için $\gamma(t)$ fonksiyonuna yakınsar. Burada $\gamma(t,r_n)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^t \operatorname{Re} f(r_n e^{i\theta})d\theta$ dir. Dolayısıyla (2.77) eşitliği

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}\operatorname{Re} f(re^{it})dt \Rightarrow$$

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re} f(re^{it})dt\right)}_{d\gamma(t)}=\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}d\gamma(t)$$

şeklinde yazılabilir.

TEOREM 2.13: $w=f(z)$ fonksiyonu $\wp$ sınıfına ait olsun. Bu durumda

$$\gamma(t,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t \operatorname{Re} f(re^{it})d\theta$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $0\leq t\leq 2\pi$ aralığında monoton artan bir fonksiyondur.

İSPAT : $w=f(z)$ fonksiyonu $\wp$ sınıfına ait olduğundan

(2.78) $$\operatorname{Re} f(z)>0$$

koşulunu gerçekler. Dolayısıyla

(2.79) $$\gamma(t,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t \operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta>0$$

dır. Şimdi $0\leq t_1\leq t_2\leq 2\pi$ olmak üzere

(2.80) $$0<\gamma(t,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{t_2}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{t_1}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta$$

ifadesini yazalım. Diğer taraftan

$$(2.81)\quad 0<\gamma(t_2,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{t_1}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta>\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{t_1}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta}_{\gamma(t_1,r)}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\gamma(t_2,r)>\gamma(t_1,r)$$

bulunur ki buda teoremin ispatını verir.

SONUÇ 2.3: $\gamma(2\pi,r)=1, \gamma(0,r)=0$ eşitlikleri geçerlidir.

Gerçekten,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}\operatorname{Re} f(re^{it})dt$$

ifadesinde $z=0$ alınacak olursa

$$f(0)=1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}}{re^{it}}\operatorname{Re} f(re^{it})dt\Rightarrow$$

$$1=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re} f(re^{it})dt=\gamma(2\pi,r)\Rightarrow\gamma(2\pi,r)=1$$

bulunur. Ayrıca

$$\gamma(t,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{t}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta$$

tanımında $t=0$ alınırsa

$$\gamma(0,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{0}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta=0\Rightarrow\gamma(0,r)=0$$

elde edilir.

TEOREM 2.14: $p(z)=1+p_1z+p_2z^2+...$ fonksiyonu $D=\{z\,|\,|z|<1\}$ de tanımlanmış ve analitik olsun ve $\operatorname{Re} p(z)>0,\ \ p(0)=1$ koşullarını gerçeklesin. Eğer $\operatorname{Re} p(z), |z|=r$ çemberi üzerinde bir z_0 noktasında minimum değerini alıyorsa

$$z_0p'(z_0)=t(1-(p(z_0))^2),\left(t\le-\frac{1}{2}\right)$$

eşitliği geçerlidir. Daha fazla olarak $p(z_0)=0+Ai$ bağıntısı gerçeklenirse

$$z_0 p^{'}(z_0) = t(1 + A^2 \leq -\frac{1}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İSPAT: $p(z)$ fonksiyonu yardımıyla

(2.82) $$w(z) = \frac{p(z)-1}{p(z)+1}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $w(z)$ fonksiyonu *D* de analitik ve $p(0)=1$ olduğundan $w(0)=0$ koşulu gerçeklenir. Ayrıca $\frac{z-1}{z+1}$ lineer transformasyonu sağ yarım düzlemi, birim çembere resmettiğinden (2.82) den dolayı $|w(z)|<1$ koşulunu gerçekler. Diğer taraftan $\operatorname{Re} p(z)$, $|z|=r$ çemberi üzerinde bir z_0 noktasında minimum değerine alıyorsa (2.82) yazılışından dolayı $w(z)$ aynı noktada maksimum değerini alır. Dolayısıyla I.S Jack Lemmasından (Lemma 2.1)

(2.83) $$z_0 w^{'}(z_0) = kw(z_0), \quad k \geq 1$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Diğer taraftan (2.82) ifadesinden türev alırsak

$$w^{'}(z) = \frac{p^{'}(z)(p(z)+1) - p^{'}(z)(p(z)-1)}{(p(z)+1)^2}$$

$$w^{'}(z) = \frac{p^{'}(z)p(z) + p^{'}(z) - p^{'}(z)p(z) + p^{'}(z)}{(p(z)+1)^2}$$

(2.84) $$w^{'}(z) = \frac{2p^{'}(z)}{(p(z)+1)^2}$$

eşitliğini elde ederiz. (2.84) eşitliğinin her iki tarafı *z* ile çarpılırsa

(2.85) $$zw^{'}(z) = \frac{2zp^{'}(z)}{(p(z)+1)^2}$$

ifadesi elde edilir. (2.82) ve (2.85) bağıntılarından hareketle

$$\frac{zw^{'}(z)}{w(z)} = \frac{2zp^{'}(z)}{(p(z)+1)^2}\frac{p(z)+1}{p(z)-1} = \frac{2zp^{'}(z)}{p^2(z)-1}$$

(2.86) $$-\frac{zw^{'}(z)}{w(z)} = \frac{2zp^{'}(z)}{1-p^2(z)}$$

elde edilir. (2.83) eşitliğini (2.86) da kullanılırsa

$$-\frac{kw(z_0)}{2w(z_0)} = \frac{z_0 p^{'}(z_0)}{1-p^2(z_0)} \Rightarrow -\frac{k}{2} = \frac{z_0 p^{'}(z_0)}{1-p^2(z_0)} \Rightarrow$$

(2.87) $$z_0 p^{'}(z_0) = -\frac{k}{2}(1-p^2(z_0))$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan

(2.88) $$k \geq 1 \Rightarrow -k \leq -1 \Rightarrow -\frac{k}{2} \leq -\frac{1}{2}$$

bulunur. (2.87) ve (2.88) bağıntıları birlikte düşünülürse

$$z_0 p^{'}(z_0) = t(1-p^2(z_0)), t = -\frac{k}{2} \leq -\frac{1}{2}$$

olarak bulunur. Eğer

$$p(z_0) = 0 + Ai$$

ise bu durumda

$$p^2(z_0) = (0+Ai)^2 = A^2 i^2 = -A^2$$

bulunur.

$$z_0 p^{'}(z_0) = -\frac{k}{2}(1-p^2(z_0))$$

(2.89) $$z_0 p^{'}(z_0) = -\frac{k}{2}(1+A^2)$$

$A \in \mathbb{R} \Rightarrow A^2 > 0, k \geq 1$ olduğundan $-k \leq -1 \Rightarrow -\frac{k}{2} \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow$

(2.90) $$-\frac{k}{2}(1+A^2) \leq -\frac{1}{2}(1+A^2)$$

eşitliği elde edilir.

$$1 + A^2 \geq 1 \Rightarrow -(1+A^2) \leq -1.$$

(2.91) $$-\frac{(1+A^2)}{2} \leq -\frac{1}{2}$$

(2.90) ve (2.91) eşitlikleri birlikte düşünülürse

(2.92) $$-\frac{k}{2}(1+A^2) \leq -\frac{1}{2}(1+A^2) \leq -\frac{1}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.(2.92) ve (2.89) eşitlikleri birlikte düşünülürse

$$z_0 p'(z_0) = -\frac{k}{2}(1+A^2) \leq -\frac{1}{2} \qquad (2.93)$$

bulunur . $t = -\frac{k}{2}$ alınırsa (2.93) ifadesi

$$z_0 p'(z_0) = t(1+A^2) \leq -\frac{1}{2}$$

şeklinde gelir.

TEOREM 2.15 : $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu $D = \{z \| z| < 1\}$ de tanımlanmış, analitik olsun ve $\operatorname{Re} p(z) > 0$, $p(0) = 1$ koşullarını gerçeklesin. $w(z)$, D de analitik $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{A(z) - B(z)}{4} \leq \operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)}{1-w^2(z)}\right) \leq \frac{A(z)+B(z)}{4}$$

eşitsizliği

$$A(z) = \operatorname{Re}\left(p(z) - \frac{1}{p(z)}\right), \quad B(z) = \frac{r^2|p(z)+1|^2 - |p(z)-1|^2}{(1-r^2)|p(z)|}$$

açılımına sahip fonksiyonlar için gerçeklenir.

İSPAT : $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu D de tanımlanmış analitik $p(0) = 1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ koşullarını gerçekleyen fonksiyon olmak üzere

$$p(z) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)} \Rightarrow \frac{1}{p(z)} = \frac{1-w(z)}{1+w(z)} \qquad (2.94)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla (2.94) eşitliklerinden

$$p(z) - \frac{1}{p(z)} = \frac{1+w(z)}{1-w(z)} - \frac{1-w(z)}{1+w(z)} \Rightarrow$$

$$\left(p(z) - \frac{1}{p(z)}\right) = \frac{4w(z)}{1-w^2(z)} \qquad (2.95)$$

ifadesi elde edilir. (2.95) den hareketle

(2.96) $$A(z) = \operatorname{Re}\left(p(z) - \frac{1}{p(z)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{4w(z)}{1-w^2(z)}\right)$$

bulunur. Benzer tarzda hareket ederek.(2.94) yazılışından

$$r^2\left|p(z)+1\right|^2 = r^2\left|\frac{1+w(z)}{1-w(z)}+1\right|^2 = r^2\left|\frac{1+w(z)+1-w(z)}{1-w(z)}\right|^2 = r^2\left|\frac{2}{1-w(z)}\right|^2 \Rightarrow$$

(2.97) $$r^2\left|p(z)+1\right|^2 = \frac{4r^2}{\left|1-w(z)\right|^2}$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan

$$\left|p(z)-1\right|^2 = \left|\frac{1+w(z)}{1-w(z)}-1\right|^2 = \left|\frac{1+w(z)-1+w(z)}{1-w(z)}\right|^2 = \left|\frac{2w(z)}{1-w(z)}\right|^2 \Rightarrow$$

(2.98) $$\left|p(z)-1\right|^2 = \frac{4\left|w(z)\right|^2}{\left|1-w(z)\right|^2}$$

dır. (2.97) ve (2.98) ifadelerinin birlikte kullanılmasıyla

$$B(z) = \frac{r^2\left|p(z)+1\right|^2 - \left|p(z)-1\right|^2}{(1-r^2)\left|p(z)\right|} = \frac{\dfrac{4r^2}{\left|1-w(z)\right|^2} - \dfrac{4\left|w(z)\right|^2}{\left|1-w(z)\right|^2}}{(1-r^2)\left|\dfrac{1+w(z)}{1-w(z)}\right|^2} \Rightarrow$$

(2.99) $$B(z) = \frac{4(r^2-\left|w(z)\right|^2)}{(1-r^2)\left|1-w^2(z)\right|^2}$$

bulunur. Diğer taraftan $w(z)$ fonksiyonu

(2.100) $$\left|zw'(z)-w(z)\right| \leq \frac{r^2-\left|w(z)\right|^2}{1-r^2}$$

eşitsizliğini gerçekler. (2.100) ifadesi $\left|1-w^2(z)\right|$ ile bölersek

(2.101) $$\left|\frac{zw'(z)-w(z)}{1-w^2(z)}\right| \leq \frac{r^2-\left|w(z)\right|^2}{\left(1-r^2\right)\left|1-w^2(z)\right|}$$

bağıntısını buluruz. z herhangi bir kompleks sayı olduğuna göre

(2.102) $$-\left|z\right| \leq \operatorname{Re} z \leq \left|z\right|$$

eşitsizliği gerçeklenir. Dolayısıyla (2.102)'ye göre (2.101) ifadesinden

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)-w(z)}{1-w^2(z)}\right)\le\left|\frac{zw'(z)-w(z)}{1-w^2(z)}\right|\le\frac{r^2-|w(z)|^2}{\left(1-r^2\right)\left|1-w^2(z)\right|}\Rightarrow$$

(2.103) $$\operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)-w(z)}{1-w^2(z)}\right)\le\frac{r^2-|w(z)|^2}{\left(1-r^2\right)\left|1-w^2(z)\right|}$$

eşitsizliği yazılabilir.(2.103) ifadesi aynı zamanda

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)-w(z)}{1-w^2(z)}\right)\le\operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)}{1-w^2(z)}-\frac{w(z)}{1-w^2(z)}\right)\le\frac{r^2-|w(z)|^2}{\left(1-r^2\right)\left|1-w^2(z)\right|}\Rightarrow$$

(2.104) $$\operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)}{1-w^2(z)}\right)\le\frac{r^2-|w(z)|^2}{\left(1-r^2\right)\left|1-w^2(z)\right|}+\operatorname{Re}\left(\frac{w(z)}{1-w^2(z)}\right)$$

şeklinde yazılabilir. (2.96) ve (2.99) ifadeleri (2.104) eşitsizliğinde göz önüne alınırsa

(2.105) $$\operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)}{1-w^2(z)}\right)\le\frac{A(z)}{4}+\frac{B(z)}{4}$$

elde edilir. Ayrıca (2.101) ve (2.102) ifadelerinden

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)-w(z)}{1-w^2(z)}\right)\ge-\frac{r^2-|w(z)|^2}{\left(1-r^2\right)\left|1-w^2(z)\right|}\Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)}{1-w^2(z)}\right)-\operatorname{Re}\left(\frac{w(z)}{1-w^2(z)}\right)\ge-\frac{r^2-|w(z)|^2}{\left(1-r^2\right)\left|1-w^2(z)\right|}\Rightarrow$$

(2.106) $$\operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)}{1-w^2(z)}\right)\ge\operatorname{Re}\left(\frac{w(z)}{1-w^2(z)}\right)-\frac{r^2-|w(z)|^2}{\left(1-r^2\right)\left|1-w^2(z)\right|}$$

eşitsizliği yazılır. (2.106) ifadesinde (2.96) ve (2.99) kullanılırsa

(2.107) $$\operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)}{1-w^2(z)}\right)\ge\frac{A(z)}{4}-\frac{B(z)}{4}$$

bulunur .(2.105) ve (2.107) eşitsizliklerinden

$$\frac{A(z)-B(z)}{4}\le\operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)}{1-w^2(z)}\right)\le\frac{A(z)+B(z)}{4}$$

elde edilir.

TANIM 2.2 : (Genelleştirilmiş Pozitif Reel Kısma Sahip Fonksiyonlar Sınıfı) : $w = f(z)$ fonksiyonu birim diskte analitik, $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ ve A, B reel sayılar olmak üzere $-1 \leq B < A \leq 1$ koşullarını gerçeklesin. Eğer

(2.108) $$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$$

açılımına sahip $p(z)$ fonksiyonu

(2.109) $$p(z) = \frac{1 + Aw(z)}{1 + Bw(z)}$$

şeklinde ifade edilebilirse " $p(z)$ fonksiyonu $\wp(A, B)$ sınıfına aittir" denir.

(2.109) yazılışı, subordinasyon prensibi ve

(2.110) $$p_0(z) = \frac{1 + Az}{1 + Bz}$$

fonksiyonu göz önüne alındığında (2.108) açılımına sahip bir fonksiyonun $\wp(A, B)$ sınıfına ait olabilmesi için gerek ve yeter şart

(2.111) $$p(z) \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz}$$

subordinasyonunu gerçeklemesidir.

Bu fonksiyon sınıfı W. Janowski tarafından tanımlanmıştır ve yalınkat fonksiyonlar teorisindeki en genel fonksiyon sınıfı olma özelliğini taşır. Bu durum aşağıdaki şekilde açıklanabilir.

1. Durum: $A = 1, B = -1$ ise (2.109) yazılışından dolayı $p(z) = \dfrac{1 + w(z)}{1 - w(z)}$ halinde gelir ki $\wp(1, -1)$ sınıfı, pozitif reel kısma sahip fonksiyon sınıfıdır.

2. Durum: $A = 1 - 2\alpha$, $B = -1$, $0 \leq \alpha \leq 1$ olması halinde $p(z)$ fonksiyonu, $p(0) = 0$, $\operatorname{Re} p(z) > \alpha$ koşullarını gerçekleyen birim diskte analitik fonksiyonların sınıfındadır.

3. Durum: $A = 1, B = 0$ olması durumunda $\wp(1, 0)$ sınıfı, birim diskte analitik $p(0) = 1$ ve $|p(z) - 1| < 1$ koşullarını gerçekleyen fonksiyonların sınıfıdır.

4. Durum: $A=\alpha,\quad B=0,\quad 0\le\alpha<1$ olması durumunda $\wp(\alpha,0)$ sınıfı, birim diskte analitik $p(0)=1$ ve $|p(z)-1|<\alpha$ koşullarını gerçekleyen fonksiyonların sınıfıdır.

5. Durum: $A=1, B=-1+\dfrac{1}{M}, M>\dfrac{1}{2}$ olması durumunda $\wp\left(1,-1+\dfrac{1}{M}\right)$ sınıfı, birim diskte analitik $p(0)=1$ ve $|p(z)-M|<M$ koşullarını gerçekleyen fonksiyonların sınıfıdır.

6. Durum: $A=\alpha, B=-\alpha, 0<\alpha<1$ olması durumunda $\wp(\alpha,-\alpha)$ sınıfı, birim diskte analitik $p(0)=1$ ve $\left|\dfrac{p(z)-1}{p(z)+1}\right|<\alpha$ koşullarını gerçekleyen fonksiyonların sınıfıdır.

Bu fonksiyon sınıfına ait genel özellikler aşağıdaki şekilde verilebilir.

ÖZELLİK 2.1 : $p(z)\in\wp(A,B)$ ise $\wp(D)$ resim bölgesi

$$D_1=p_0(-1)=\frac{1-A}{1-B}, D_2=p_0(1)=\frac{1+A}{1+B}$$

noktaları bir çapın uç noktaları olan ve merkezi reel eksen üzerinde bulunan diskin içindedir. Başka bir değişle, $0<D_1<1<D_2$ koşullarını gerçekleyen bir nokta çifti için $-1\le B<A\le 1$ koşullarını gerçekleyen A ve B reel sayıları vardır ki $\wp(D)$, D_1 ve D_2 noktalarını bir çapın uç noktaları kabul eden disktir.

Gerçekten, $w=u+iv$ olmak üzere

$$w=\frac{1+Az}{1-Bz}\Leftrightarrow w(1-Bwz)=1+Az\Leftrightarrow w-1=(A-Bw)z\Leftrightarrow z=\frac{w-1}{A-Bw}$$

$$z=\frac{u+iv-1}{A-B(u+iv)}\Rightarrow|z|^2=r^2=\frac{|(u-1)+iv|^2}{|(A-Bu)+iBv)|^2}=\frac{(u-1)^2+v^2}{(A-Bu)^2+(Bv)^2}$$

$$=\frac{u^2+2u+1+v^2}{A^2-2ABu+B^2u^2+B^2v^2}\Rightarrow$$

$$u^2-2u+1+v^2-A^2r^2+2ABr^2u-B^2r^2u^2-B^2r^2v^2=0\Rightarrow$$

$$(1-B^2r^2)u^2+(1-B^2r^2)v^2-2(1+ABr^2)u+(1-A^2r^2)=0 \Rightarrow$$

$$u^2+v^2-2\frac{(1-ABr^2)}{1-B^2r^2}u+\frac{1-A^2r^2}{1-B^2r^2}=0$$

çember denklemini buluruz $(x^2+y^2+Ax+By+C=0)$. Bu çemberin merkezi

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{A}{2}=\frac{2\dfrac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}}{2}=\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2} \\ b &= -\frac{B}{2}=\frac{0}{2}=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c(r)=\left(\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2},0\right)$$

yarıçapı

$$\rho(r)=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}=\frac{\sqrt{\left(2\dfrac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right)^2+0-4\left(\dfrac{1-A^2r^2}{1-B^2r^2}\right)}}{2} \Rightarrow$$

$$\rho(r)=\sqrt{\left(\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right)^2-\left(\frac{1-A^2r^2}{1-B^2r^2}\right)}=\sqrt{\frac{(1-ABr^2)^2-(1-B^2r^2)(1-A^2r^2)}{(1-B^2r^2)^2}}$$

$$\rho(r)=\sqrt{\frac{1-2ABr^2+A^2B^2r^4-1+A^2r^2+B^2r^2-A^2B^2r^4}{\left(1-B^2r^2\right)^2}}$$

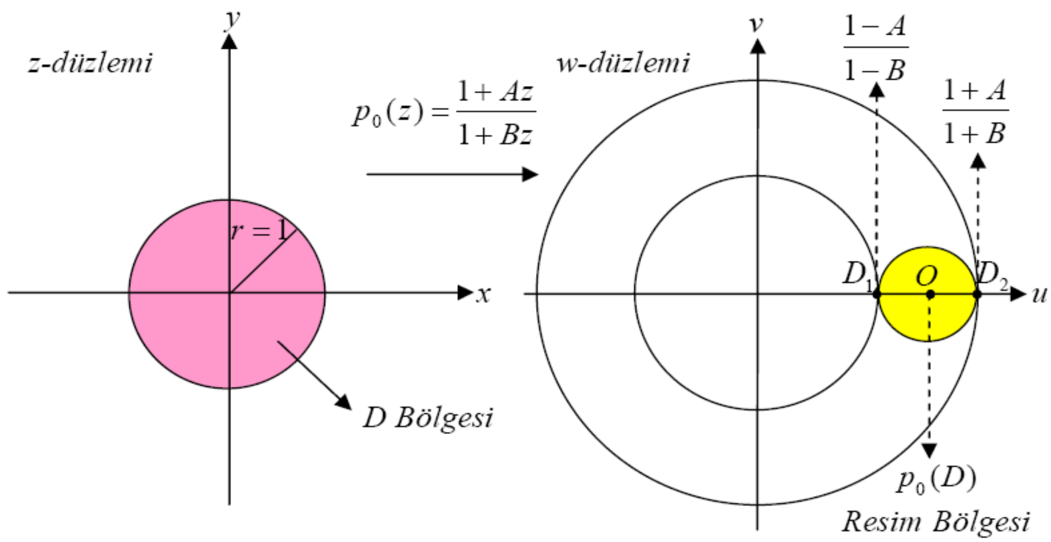
$$\rho(r)=\sqrt{\frac{-2ABr^2+A^2r^2+B^2r^2}{\left(1-B^2r^2\right)^2}}=r\sqrt{\frac{A^2-2AB+B^2}{\left(1-B^2r^2\right)^2}}=r\sqrt{\frac{(A-B)^2}{\left(1-B^2r^2\right)^2}}$$

$$\rho(r)=\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}$$

olarak bulunur. Bu ifade ayrıca

$$\left|p(z)-\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right|\leq\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}$$

şeklinde ifade edilebilir. Özelliğin geometrik ifadesi Şekil 2.2'de verilmiştir.



Şekil 2.2

İki nokta arasındaki uzaklık formülünden yada orta nokta formülünden hareket edilirse

$$\frac{|D_1D_2|}{2} = \sqrt{\left(\frac{1+A}{1+B} - \frac{1-A}{1-B}\right)^2} = \frac{A-B}{1-B^2} \text{ (çap)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1+A}{1+B} - \frac{A-B}{1-B^2}\right)^2} = \frac{1-AB}{1-B^2} \text{ (merkez)}$$

olarak bulunur.

ÖZELLİK 2.2: $p(z)$ fonksiyonu $\wp(A,B)$ sınıfına, $q(z)$ fonksiyonu ise $\wp(1,-1)$ sınıfına ait fonksiyonlar olsun. Bu iki fonksiyon arasındaki bağıntı, bulundukları sınıfların tanımlarından hareketle aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$q(z)$ fonksiyonu $\wp(1,-1)$ sınıfına ait bir fonksiyon (pozitif reel kısma sahip fonksiyon) olduğundan

(2.112) $$q(z) \in \wp(1,-1) \Leftrightarrow q(z) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)} \Leftrightarrow q(z) \prec \frac{1+z}{1+z}$$

bağıntıları geçerlidir.

$p(z)$ fonksiyonu $\wp(A,B)$ sınıfına ait olduğundan

$$p(z) \in \wp(A,B) \Leftrightarrow p(z) = \frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)} \Leftrightarrow p(z) \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \tag{2.112}$$

(2.112) ve (2.113) ifadelerindeki $w(z)$ fonksiyonu Schwarz Lemmasının koşullarını gerçekleyen bir fonksiyondur. (2.112) bağıntısından hareket ederek $w(z)$ fonksiyonunu $q(z)$ cinsinden ifade edersek

$$q(z) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)} \Leftrightarrow q(z) - q(z)w(z) = 1 + w(z) \Leftrightarrow$$

$$q(z) - 1 = w(z)(q(z)+1) \Leftrightarrow$$

$$w(z) = \frac{q(z)-1}{q(z)+1} \tag{2.114}$$

yazabiliriz. (2.114) eşitliği (2.113) de kullanılırsa

$$p(z) = \frac{1 + A\dfrac{q(z)-1}{q(z)+1}}{1 + B\dfrac{q(z)-1}{q(z)+1}} \Rightarrow$$

$$p(z) = \frac{(1+A)q(z) + (1-A)}{(1+B)q(z) + (1-B)} \tag{2.115}$$

ifadesine ulaşılır. (2.115) eşitliği $\wp(A,B)$ sınıfı ile $\wp(1,-1)$ sınıfı arasındaki bağıntıyı gösterir.

ÖZELLİK 2.3: $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n + \ldots$ fonksiyonu $\wp(A,B)$ sınıfına ait ise

$$|p_n| \leq (A-B)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Bu özelliğin ispatında Möbius transformasyonları için Y. POLATOĞLU tarafından verilen aşağıdaki lemma kullanılır. Buna göre *a, b, c, d* kompleks sayılar olmak üzere birim disk $D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ de tanımlanmış olan $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ Möbius transformasyonunun Taylor açılımındaki n.katsayının modülü

$$\left|\frac{c}{d}\right|^n \frac{1}{|bd|} \le 1, \left|\frac{b}{d}\right| = 1$$

koşullarını gerçeklerse

$$|a_n| \le \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\| = |ad - bc| \tag{2.116}$$

ifadesi geçerlidir.

Diğer yandan Rogosinski tarafından ispatlanan aşağıdaki teoremi kullanarak (2.117) eşitsizliğini yazabiliriz. (2.116) ve (2.117) ifadelerinden, $\wp(A,B)$ sınıfının tanımından dolayı

$$p(z) \in \wp(A,B) \Leftrightarrow p(z) = \frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)} \Leftrightarrow p(z) \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \tag{2.117}$$

$$|p_n| \le \left\| \begin{matrix} A & 1 \\ B & 1 \end{matrix} \right\| = (A-B) \Rightarrow |p_n| \le (A-B)$$

bulunur.

ÖZELLİK 2.4: $p(z) \in \wp(A,B)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1-Ar}{1+Br} \le |p(z)| \le \frac{1+Ar}{1+Br} \tag{2.118}$$

$$\frac{1-Ar}{1+Br} \le \operatorname{Re} p(z) \le \frac{1+Ar}{1+Br} \tag{2.119}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

Gerçekten, herhangi bir z kompleks sayısı için

$$-|z| \le \operatorname{Re} z \le |z| \tag{2.120}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu biliyoruz. Bu ifadeyi Özellik 2.1' de gösterdiğimiz

$$\left| p(z) - \frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2} \right| \le \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2} \tag{2.121}$$

eşitsizliğinde kullanırsak

$$\operatorname{Re}\left(p(z)-\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right)\geq-\left|p(z)-\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right|\geq-\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}\Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}p(z)-\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\geq-\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}\Rightarrow\operatorname{Re}p(z)\geq\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}-\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}\Rightarrow$$

(2.122) $$\operatorname{Re}p(z)\geq\frac{1-(A-B)r-ABr^2}{1-B^2r^2}$$

elde edilir. Buradan

$$1-(A-B)r-ABr^2=0\Rightarrow$$

$$r_{1,2}=\frac{\left(A-B\right)\pm\sqrt{\left(A-B\right)^2+4AB}}{2AB}\Rightarrow$$

$$r_{1,2}=\frac{\left(A-B\right)\pm\sqrt{A^2-2AB+B^2+4AB}}{2AB}\Rightarrow$$

$$r_{1,2}=\frac{\left(A-B\right)\pm\sqrt{A^2+B^2+2AB}}{2AB}=\frac{\left(A-B\right)\pm\sqrt{\left(A+B\right)^2}}{2AB}\Rightarrow$$

$$r_{1,2}=\frac{\left(A-B\right)\pm\left(A+B\right)}{2AB}$$

$$r_1=-\frac{\left(A-B\right)-\left(A+B\right)}{2AB}=\frac{-A+B-A-B}{2AB}=-\frac{2A}{2AB}=-\frac{1}{B}\Rightarrow Br+1=0$$

$$r_2=-\frac{\left(A-B\right)+\left(A+B\right)}{2AB}=\frac{-A+B+A+B}{2AB}=-\frac{2B}{2AB}=\frac{1}{A}\Rightarrow 1-Ar=0$$

(2.123) $$1-(A-B)r-ABr^2=(1+Br)(1-Ar)$$

ifadesini yazabiliriz. (2.123) eşitliği (2.122) eşitliğinde kullanılırsa

$$\operatorname{Re}p(z)\geq\frac{1-(A-B)r-ABr^2}{1-B^2r^2}=\frac{(1+Br)(1-Ar)}{(1+Br)(1-Br)}=\frac{(1-Ar)}{(1-Br)}\Rightarrow$$

(2.124) $$\operatorname{Re}p(z)\geq\frac{1-Ar}{1-Br}$$

elde edilir. Ayrıca

$$|p(z)| \geq \operatorname{Re} p(z)$$

eşitliğini (2.124) eşitliğine uygularsak

$$|p(z)| \geq \frac{1-Ar}{1-Br} \tag{2.125}$$

bulunur. Diğer yandan z_1 ve z_2 herhangi iki kompleks sayı olmak üzere

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizlikten hareketle

$$|p(z)| - \left|\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right| \leq \left|p(z) - \frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right| \leq \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2} \Rightarrow$$

$$|p(z)| - \left|\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right| \leq \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2} \Rightarrow |p(z)| \leq \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2} + \frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2} \Rightarrow$$

$$|p(z)| \leq \frac{1+(A-B)r-ABr^2}{1-B^2r^2}$$

elde edilir.

$$1-(A-B)r-ABr^2 = (1+Ar)(1-Br)$$

ve

$$\operatorname{Re} p(z) \leq |p(z)| \tag{2.126}$$

ifadeleri (2.126) eşitliğinde kullanılırsa

$$\operatorname{Re} p(z) \leq |p(z)| \leq \frac{(1+Ar)(1-Br)}{(1-Br)(1+Br)} = \frac{1+Ar}{1+Br}$$

$$|p(z)| \leq \frac{1+Ar}{1+Br} \Rightarrow \tag{2.127}$$

$$\operatorname{Re} p(z) \leq \frac{1+Ar}{1+Br} \tag{2.128}$$

bulunur. (2.124), (2.128) ve (2.125), (2.127) eşitlikleri birlikte düşünülürse

$$\frac{1-Ar}{1-Br} \le |p(z)| \le \frac{1+Ar}{1+Br}$$

$$\frac{1-Ar}{1-Br} \le \operatorname{Re} p(z) \le \frac{1+Ar}{1+Br}$$

eşitsizlikleri elde edilir ki bu da özelliğin gerçekleştiğini gösterir.

TEOREM 2.16: $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + ...$ fonksiyonu $D = \{z \| z| < 1\}$ de tanımlanmış ve analitik olsun. $w(z)$ fonksiyonu birim diskte analitik, $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere

$$p(z) = \frac{1 + Aw(z)}{1 + Bw(z)}, (-1 \le B < A \le 1)$$

şeklinde yazılabilsin. Bu taktirde

$$\frac{|b|}{2} \max_{|zt|=tr} \left(\frac{p(z)+1}{z} \right) = \frac{|b|}{r} + \frac{|b|(A-B)}{2} \frac{1}{1+Br}, b \in \mathbb{C} - \{0\}$$

eşitliği geçerlidir.

İSPAT: Özellik 2.1' den

(2.129) $$\left| p(z) - \frac{1 - ABr^2}{1 - B^2 r^2} \right| \le \frac{(A-B)r}{1 - B^2 r^2}$$

eşitsizliği yazılabilir. (2.129) ifadesinden hareketle

$$\left| p(z) + 1 - 1 - \frac{1 - ABr^2}{1 - B^2 r^2} \right| \le \frac{(A-B)r}{1 - B^2 r^2} \Rightarrow$$

(2.130) $$\left| \left(p(z) + 1 \right) - \frac{2 - (AB + B^2) r^2}{1 - B^2 r^2} \right| \le \frac{(A-B)r}{1 - B^2 r^2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada üçgen eşitsizliğinin

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$$

ifadesi kullanılırsa

$$\left|p(z)+1\right|-\left|\frac{2-(AB+B^2)r^2}{1-B^2r^2}\right|\leq\left|\left(p(z)+1\right)-\frac{2-(AB-B^2)r^2}{1-B^2r^2}\right|\leq\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}\Rightarrow$$

$$\left|p(z)+1\right|\leq\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}+\frac{2-(AB+B^2)r^2}{1-B^2r^2}\Rightarrow$$

(2.131) $$\left|p(z)+1\right|\leq\frac{2+(A-B)r-(AB+B^2)r^2}{1-B^2r^2}$$

bulunur. (2.131) eşitsizliğinden

(2.132) $$\frac{|b|}{2}\left|p(z)+1\right|\leq\frac{2|b|+|b|(A-B)r-|b|(AB+B^2)r^2}{2(1-B^2r^2)}$$

$$\frac{|b|}{2}\left|\frac{p(z)+1}{z}\right|\leq\frac{2|b|+|b|(A-B)r-|b|(AB+B^2)r^2}{2|z|(1-B^2r^2)},|z|=r$$

alınarak

(2.133) $$\left|\frac{b}{2}\frac{p(z)+1}{z}\right|\leq\frac{2|b|+|b|(A-B)r-|b|(AB+B^2)r^2}{2r(1-B^2r^2)},|z|=r$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Maksimum kavramına kullanarak

(2.134) $$\frac{|b|}{2}\max_{|zt|=tr}\left(\frac{p(z)+1}{z}\right)=\frac{1}{2}\frac{2|b|+|b|\left(A-B\right)r-|b|(AB+B^2)r^2}{r(1-B^2r^2)}$$

yazılabilir. Şimdi sağ taraftaki ifadeyi çarpanlarına ayıralım.

$$\frac{2|b|+|b|(A-B)r-|b|(AB+B^2)r^2}{r(1-Br)(1+Br)}\equiv\frac{X}{r}+\frac{Y}{1+Br}+\frac{Z}{1-Br}\Rightarrow$$

$$\equiv\frac{X(1-B^2r^2)+Yr(1-Br)+Zr(1+Br)}{r(1+Br)(1-Br)}\Rightarrow$$

$$\frac{2|b|+|b|(A-B)r-|b|(AB+B^2)r^2}{r(1-Br)(1+Br)}\equiv$$

$$\frac{X+(Y+Z)r+(-XB^2-YB+ZB)r^2}{r(1+Br)(1-Br)}\Rightarrow$$

$$X=2|b|,Y=|b|(A-B),Z=0\Rightarrow$$

$$\frac{2|b|+|b|(A-B)r-|b|(AB+B^2)r^2}{2r(1-Br)(1+Br)} \equiv \frac{2|b|}{r}+\frac{|b|(A-B)}{1+Br} \Rightarrow$$

(2.135) $$\frac{1}{2}\frac{2|b|+|b|(A-B)r-|b|(AB+B^2)r^2}{2r(1-Br)(1+Br)} \equiv \frac{|b|}{r}+\frac{|b|(A-B)}{2}\frac{1}{1+Br} \Rightarrow$$

(2.134) ve (2.135) ifadelerinden

$$\frac{|b|}{2}\max_{|zt|=tr}\left(\frac{p(z)+1}{z}\right)=\frac{|b|}{r}+\frac{|b|\left(A-B\right)}{2}\frac{1}{1+Br}$$

eşitsizliği elde edilir.

TEOREM 2.17: $p(z)=1+p_1z+p_2z^2+...$ fonksiyonu birim disk $D=\{z||z|<1\}$ de tanımlanmış ve analitik olsun. $w(z)$ fonksiyonu birim diskte analitik, $w(0)=0$, $|w(z)|<1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere

$$p(z)=\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)},(-1\leq B<A\leq 1)$$

şeklinde yazılabilsin. Bu taktirde

$$\frac{|b|}{2}\max_{|zt|=tr}\left(\frac{p(z)-1}{z}\right)=\frac{|b|\left(A-B\right)}{1+Br},b\in\mathbb{C}-\{0\}$$

eşitliği geçerlidir.

İSPAT: Özellik 2.1' den biliyoruz ki

(2.136) $$\left|p(z)-\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right|\leq\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}$$

eşitsizliği vardır. Burada aşağıdaki gibi hareket ederek

$$\left|p(z)+1-1-\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right|\leq\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}\Rightarrow$$

(2.137) $$\left|(p(z)-1)-\frac{(B^2-AB)r^2}{1-B^2r^2}\right|\leq\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Üçgen eşitsizliğinin

$$|z_1|-|z_2|\le |z_1-z_2|$$

ifadesi (2.137) de kullanılırsa

$$|p(z)-1|-\left|\frac{(B^2-AB)r^2}{1-B^2r^2}\right|\le\left|\left(p(z)-1\right)-\frac{(B^2-AB)r^2}{1-B^2r^2}\right|\le\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}\Rightarrow$$

(2.138) $$|p(z)-1|\le\frac{r\left[(A-B)-B(A-B)r\right]}{1-B^2r^2}$$

elde edilir. (2.138) eşitsizliği aynı zamanda

$$\frac{|b|}{2}\left|\frac{p(z)-1}{z}\right|\le\frac{|b|\left[(A-B)-B(A-B)r\right]r}{2|z|(1-B^2r^2)}\Rightarrow, |z|=r \text{ alınarak}$$

$$\frac{|b|}{2}\left|\frac{p(z)-1}{z}\right|\le\frac{|b|\left[(A-B)-B(A-B)r\right]r}{2(1-B^2r^2)r}\Rightarrow$$

$$\frac{|b|}{2}\left|\frac{p(z)-1}{z}\right|\le\frac{|b|\left[(A-B)-B(A-B)r\right]}{2(1-B^2r^2)}\le\frac{|b|\left[(A-B)-B(A-B)r\right]}{(1-B^2r^2)}\Rightarrow$$

$$\frac{|b|}{2}\left|\frac{p(z)-1}{z}\right|\le\frac{|b|(A-B)(1-Br)}{(1-Br)(1+Br)}=\frac{|b|(A-B)}{(1+Br)}\Rightarrow$$

(2.139) $$\frac{|b|}{2}\left|\frac{p(z)-1}{z}\right|\le\frac{|b|(A-B)}{(1+Br)}$$

şeklinde yazılabilir. (2.139) ifadesinde maksimum kavramını kullanırsak

$$\frac{|b|}{2}\max_{|zt|=tr}\frac{p(z)-1}{z}=\frac{|b|(A-B)}{1+Br}$$

elde edilir.

TEOREM 2.18: $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ fonksiyonu birim disk $D=\{z\,|\,|z|<1\}$ de tanımlanmış, analitik, $-1\le B<A\le 1$ ve $B\ne 0$ olmak üzere

(2.140) $$2\left[1+\frac{1}{b}\left(z\frac{f^{'}(z)}{f(z)}-1\right)\right]-1=\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}, b\in\mathbb{C}-\{0\}$$

koşulunu gerçeklerse

$$\left|r^{1-b}\right|r^{|b|}(1-Br)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}}\le|f(z)|\le\left|r^{1-b}\right|r^{|b|}(1+Br)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}}$$

eşitsizliği vardır. Burada $w(z)$ fonksiyonu birim diskte analitik, $w(0)=0, |w(z)|<1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyondur.

İSPAT : Özellik 2.1'de gösterdik ki

$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + ...$ fonksiyonu birim diskte analitik bir fonksiyon olmak üzere

$$(2.141) \qquad p(z) = \frac{1 + Aw(z)}{1 + Bw(z)}$$

şeklinde yazılabiliyorsa

$$(2.142) \qquad \left| p(z) - \frac{1 - ABr^2}{1 - B^2 r^2} \right| \leq \frac{(A - B)r}{1 - B^2 r^2}$$

eşitsizliğini gerçekler.

(2.141) yazılışı (2.140) ifadesi ile karşılaştırılırsa

$$(2.143) \qquad 2\left[1 + \frac{1}{b}\left(z\frac{f^{'}(z)}{f(z)} - 1\right)\right] - 1 = p(z)$$

eşitliği yazılabilir. (2.143) ifadesinden hareketle

$$\frac{1}{b}\left(z\frac{f^{'}(z)}{f(z)} - 1\right) = \frac{1}{2}(p(z) + 1) - 1 \Rightarrow z\frac{f^{'}(z)}{f(z)} - 1 = \frac{b}{2}(p(z) + 1) - b \Rightarrow$$

$$(2.144) \qquad z\frac{f^{'}(z)}{f(z)} = \frac{b}{2}(p(z) + 1) + (1 - b)$$

yazılışını elde ederiz.

$$\left| p(z) - \frac{1 - ABr^2}{1 - B^2 r^2} \right| \leq \frac{(A - B)r}{1 - B^2 r^2} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{1}{2}(p(z) + 1) - \frac{2 - (B^2 + AB)r^2}{2(1 - B^2 r^2)} \right| \leq \frac{(A - B)r}{2(1 - B^2 r^2)} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{b}{2}(p(z) + 1) - \frac{2b - b(B^2 + AB)r^2}{2(1 - B^2 r^2)} \right| \leq \frac{|b|(A - B)}{2(1 - B^2 r^2)} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{b}{2}(p(z) + 1) + (1 - b) - (1 - b) - \frac{2b - b(B^2 + AB)r^2}{2(1 - B^2 r^2)} \right| \leq \frac{|b|(A - B)}{2(1 - B^2 r^2)} \Rightarrow$$

(2.145) $$\left|\left[\frac{b}{2}(p(z)+1)+(1-b)\right]-\frac{2-\left[2B^2+b(B^2-AB)r^2\right]}{2(1-B^2r^2)}\right|\leq\frac{|b|(A-B)r}{2(1-B^2r^2)}$$

Öte yandan (2.144) eşitliğinden

(2.146) $$z\frac{f^{'}(z)}{f(z)}=\frac{b}{2}(p(z)+1)+(1-b)\Rightarrow\frac{f^{'}(z)}{f(z)}=\frac{b}{2}\frac{(p(z)+1)}{z}+\frac{(1-b)}{z}$$

elde ederiz. (2.146) ifadesinde integral alırsak

$$\log f(z)=(1-b)\log z+\frac{b}{2}\int_0^z\frac{p(\zeta)+1}{\zeta}d\zeta\Rightarrow$$

$$\log f(z)-\log z^{(1-b)}=\frac{b}{2}\int_0^z\frac{p(\zeta)+1}{\zeta}d\zeta\Rightarrow\log\frac{f(z)}{z^{(1-b)}}=\frac{b}{2}\int_0^z\frac{p(\zeta)+1}{\zeta}d\zeta\Rightarrow$$

$$\frac{f(z)}{z^{(1-b)}}=\exp\left[\frac{b}{2}\int_0^z\frac{p(\zeta)+1}{\zeta}d\zeta\right]\Rightarrow$$

(2.147) $$f(z)=z^{(1-b)}\exp\left[\frac{b}{2}\int_0^z\frac{p(\zeta)+1}{\zeta}d\zeta\right]\Rightarrow$$

eşitliği bulunur. (2.147) ifadesinden

(2.148) $$|f(z)|\leq\left|z^{(1-b)}\right|\exp\left(\frac{b}{2}\int_0^z\left[\max_{|zt|=rt}\left(\mathrm{Re}\frac{p(\zeta)+1}{\zeta}\right)\right]dt\right)$$

yazılabilir. Öte yandan Teorem 2.16 dan

(2.149) $$\frac{|b|}{2}\max_{|zt|=rt}\left(\mathrm{Re}\frac{p(zt)+1}{t}\right)=\frac{|b|}{2}+\frac{|b|(A-B)}{2(1+Br)},b\in\mathbb{C}-\{0\}$$

elde ederiz. (2.149) ifadesinde integral alırsak

$$\frac{|b|}{2}\int_0^1 \max_{|zt|=rt}\left(\operatorname{Re}\frac{p(zt)+1}{t}\right)dt=\int_0^1\frac{|b|}{2}\frac{2}{r}dr+\int_0^1\frac{|b|(A-B)}{2(1+Br)}dr\Rightarrow$$

$$\frac{|b|}{2}\int_0^1 \max_{|zt|=rt}\left(\operatorname{Re}\frac{p(zt)+1}{z}\right)dt=\log r^{|b|}+\frac{|b|(A-B)}{2B}\log(1+Br)\Rightarrow$$

(2.150) $$\frac{|b|}{2}\int_0^1 \max_{|zt|=rt}\left(\operatorname{Re}\frac{p(zt)+1}{z}\right)dt=\log r^{|b|}(1+Br)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}}$$

bulunur. (2.148) ve (2.150) ifadelerinden

$$|f(z)|\le\left|r^{(1-b)}\right|\exp\left[\log r^{|b|}.(1+Br)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}}\right]\Rightarrow$$

(2.151) $$|f(z)|\le\left|r^{(1-b)}\right|r^{|b|}.(1+Br)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}}$$

eşitsizliği elde edilir. Tamamen benzer şekilde hareket edersek alt sınır içinde

(2.152) $$\left|r^{(1-b)}\right|r^{|b|}.(1-Br)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}}\le|f(z)|$$

ifadesini buluruz. (2.151) ve (2.152) eşitsizlikleri bize

$$\left|r^{(1-b)}\right|r^{|b|}.(1-Br)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}}\le|f(z)|\le\left|r^{(1-b)}\right|r^{|b|}.(1+Br)^{\frac{|b|(A-B)}{2B}}$$

ifadesini verir.

3. YALINKAT FONKSİYONLAR

TANIM 3.1 (Yalınkat Fonksiyonlar) $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış, analitik olsun. Eğer

$$z_1, z_2 \in D, z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

injektiflik (bire-bir) koşulu gerçeklenirse $f(z)$ fonksiyonuna " Yalınkat Fonksiyon" denir. Bire-bir olma koşulu aşağıdaki şekilde de ifade edilir.

$$z_1, z_2 \in D, z_1 = z_2 \Leftrightarrow f(z_1) = f(z_2)$$

TANIM 3.2: (*S* Sınıfı) $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ fonksiyonu birim disk $D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ de tanımlanmış, analitik ve yalınkat olsun. $f(z)$ fonksiyonu $f'(0) = 1$ ve $f(0) = 0$ olacak şekilde normalize edilmiştir. Bu tür fonksiyonların cümlesini " S Sınıfı " olarak adlandıracağız.

Bu normalizasyon, aşağıdaki şekilde ifade edilen Riemann Tasvir Teoremindeki $f(\zeta) = 0, f'(\zeta) > 0$ koşullarından sağlanmaktadır.

" Kompleks düzlemin özel basit bağlantılı bir alt cümlesini göz önüne alalım. ζ, D bölgesinde verilen bir nokta olmak üzere, $f(\zeta) = 0, f'(\zeta) > 0$ koşullarını gerçekleyen ve D'yi birim disk üzerine konform olarak resmeden bir tasvir vardır ve bu tasvir tek türlü belirlidir."

S sınıfına ait önemli fonksiyonlar aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

ÖZELLİK 3.1: $w = f(z) = z$ idantik fonksiyonu (birim fonksiyon) D bölgesini D bölgesi üzerine resmeder.

ÖZELLİK 3.2: $w = f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ fonksiyonu D bölgesini $\operatorname{Re} w > -\dfrac{1}{2}$ yarı düzlemi üzerine resmeder.

Gerçekten, $w = u + iv$ alınırsa

$$w = \frac{z}{1-z} \Leftrightarrow w - wz = z \Leftrightarrow w = z(1+w) \Leftrightarrow z = \frac{w}{1+w} \Leftrightarrow |z| = \left|\frac{w}{1+w}\right| \Rightarrow$$

$$|z|^2 = 1 = \frac{|w|^2}{|1+w|^2} \Rightarrow 1 = \frac{|u+iv|^2}{|(1+u)+iv|^2} = \frac{u^2+v^2}{(1+u)^2+v^2} \Rightarrow$$

$$(1+u)^2 + v^2 = u^2 + v^2 \Rightarrow$$

$$(1+u)^2 + v^2 - u^2 - v^2 = 0 \Rightarrow 1 + 2u = 0 \Rightarrow u = -\frac{1}{2}$$

bulunur. Buna göre $|z| = 1$ çemberi $\operatorname{Re} w = u = -\dfrac{1}{2}$ doğrusu üzerine resmedilir.

Dolayısıyla D bölgesi

$$1 > |z|^2 = \frac{|w|^2}{|1+w|^2} = \frac{|u+iv|^2}{|(1+u)+iv|^2} = \frac{u^2+v^2}{(1+u)^2+v^2} \Rightarrow$$

$$(1+u)^2 + v^2 > u^2 + v^2$$

$$(1+u)^2 + v^2 - u^2 - v^2 > 0 \Rightarrow 1 + 2u > 0 \Rightarrow u = \operatorname{Re} w = \operatorname{Re} f(z) > -\frac{1}{2}$$

yarım düzlemi üzerine resmedilir.

ÖZELLİK 3.3: $w=\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonu D bölgesini dik $-\dfrac{\pi}{4}<\operatorname{Im} w<\dfrac{\pi}{4}$ şeritsel bölge üzerine resmeder.

Gerçekten, $\eta=\dfrac{1+z}{1-z}$ ara transformasyonu $D=\{z\,|\,|z|<1\}$ birim diskinin $w=u_1+iv_1$ alınırsa,

$$\eta=\frac{1+z}{1-z}\Leftrightarrow \eta-\eta z=1+z\Leftrightarrow \eta-1=z(\eta+1)\Leftrightarrow z=\frac{\eta-1}{\eta+1}\Leftrightarrow |z|=\left|\frac{\eta-1}{\eta+1}\right|$$

$$1>|z|=\frac{|\eta-1|}{|\eta+1|}\Rightarrow 1>|z|^2=\frac{|\eta-1|^2}{|\eta+1|^2}\Rightarrow 1>\frac{|\eta-1|^2}{|\eta+1|^2}\Rightarrow |\eta+1|^2>|\eta-1|^2\Rightarrow$$

$$|(u_1+1)+iv_1|^2>|(u_1-1)+iv_1|^2\Rightarrow (u_1+1)^2+v_1^2>(u_1-1)^2+v_1^2\Rightarrow u_1>0$$

$\operatorname{Re}\eta>u_1>0$ sağ yarım düzlemine resmedildiğini buluruz. Diğer yandan sağ yarım düzlemde bulunan kompleks sayıların argümanlarının $-\dfrac{\pi}{2}\,ile\,\dfrac{\pi}{2}$ arasında olduğu göz önüne alınırsa

(3.1) $$-\frac{\pi}{4}<\arg\eta<\frac{\pi}{4}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

(3.2) $$w=\frac{1}{2}\log\eta=\frac{1}{2}\log|\eta|e^{i\theta}=\frac{1}{2}\log|\eta|e^{i\arg\eta}$$

olduğunu düşünürsek

$$w=\frac{1}{2}\log|\eta|+\frac{1}{2}\log e^{i\arg\eta}=\frac{1}{2}\log|\eta|+i\frac{1}{2}\arg\eta\log e=\frac{1}{2}\log|\eta|+i\frac{1}{2}\arg\eta$$

(3.3) $$\operatorname{Im} w=\frac{1}{2}\arg\eta$$

eşitliği bulunur. (3.1) ve (3.3) birlikte düşünülürse

$$-\frac{\pi}{4}<\frac{1}{2}\arg\eta<\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}<\operatorname{Im} w<\frac{\pi}{4}$$

elde edilir ki buda iddianın doğru olduğunu gösterir.

ÖZELLİK 3.4: $w = k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu D birim diskini $-\dfrac{1}{4}$'den sonsuza kadar negatif eksen boyunca kesilmiş tüm düzleme resmeder.

Gerçekten,

$$w = k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\frac{4z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\frac{2z+2z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-1+2z+2z+z^2-z^2}{(1-z)^2} \Rightarrow$$

$$w = k(z) = \frac{1}{4}\cdot\frac{(1+2z+z^2)-(1-2z+z^2)}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{(1+z)^2}{(1-z)^2} - \frac{(1-z)^2}{(1-z)^2}\right] \Rightarrow$$

$$w = k(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+z)^2}{(1-z)^2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

olarak $w = k(z)$ fonksiyonu yazılabilir. Özellik 3.3 de olduğu gibi

$$\eta = \frac{1+z}{1-z} \tag{3.4}$$

ara transformasyonunu düşünelim. Bu transformasyon altında $|z| = 1$ çemberinin resmi $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ olarak alınır ve yukarıdaki tarzda hareket edilirse

$$\eta = \frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow \eta - \eta z = 1 + z \Leftrightarrow \eta - 1 = z(\eta+1) \Leftrightarrow z = \frac{\eta-1}{\eta+1} \Leftrightarrow |z| = \left|\frac{\eta-1}{\eta+1}\right|$$

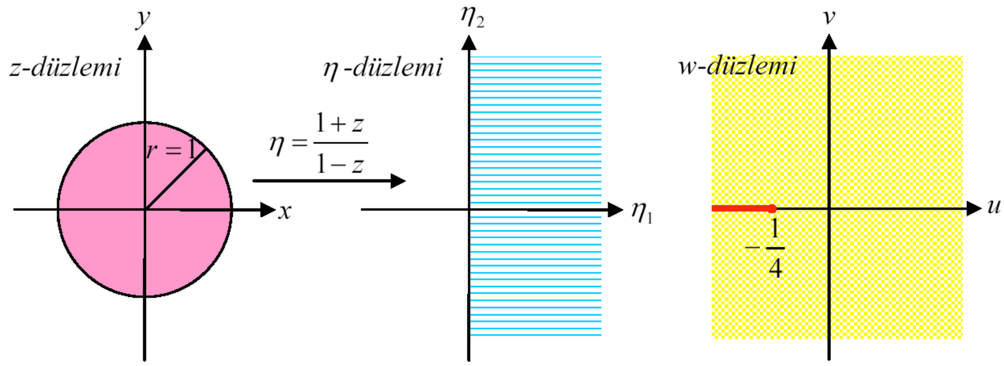
$$1 = |z| = \frac{|\eta-1|}{|\eta+1|} \Rightarrow 1 = |z|^2 = \frac{|\eta-1|^2}{|\eta+1|^2} \Rightarrow 1 = \frac{|\eta-1|^2}{|\eta+1|^2} \Rightarrow |\eta+1|^2 = |\eta-1|^2 \Rightarrow$$

$$|(\eta_1+1)+i\eta_2|^2 = |(\eta_1-1)+i\eta_2|^2 \Rightarrow (\eta_1+1)^2 + \eta_2^2 = (\eta_1-1)^2 + \eta_2^2 \Rightarrow \eta_1 = 0$$

bulunur. Bu da $|z| = 1$'in resminin $u = \operatorname{Re}\eta = 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$w = k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{4}$$

ifadesi göz önüne alınılırsa $\eta_1 = 0$'in, yani η düzleminde imajiner eksenin, resmi $-\dfrac{1}{4}$ noktasından $-\infty$'a kadar giden doğrudur. Şekil aşağıda gösterildiği gibidir.



Şekil 3.1

TEOREM 3.1: Yalınkat iki fonksiyonun bileşke fonksiyonu da yalınkattır.

İSPAT: İspatı iki adımda yaparız. Birinci adımda “ İnjektif iki fonksiyonun bileşke fonksiyonu da injektiftir “ olduğunu gösterelim.

$$f : D \to D_1 = f(D)$$
$$z_1 \to f(z_1)$$
$$z_2 \to f(z_2)$$

şeklinde tanımlanan $f(z)$ fonksiyon injektif ise

(3.5) $$z_1, z_2 \in D, z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

bağıntısı gerçeklenir. Diğer taraftan

$$g : f(D) \to H$$
$$f(z_1) \to g(f(z_1))$$
$$f(z_2) \to g(f(z_2))$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon injektif ise

(3.6) $$f(z_1), f(z_2) \in f(D), f(z_1) \neq f(z_2) \Rightarrow g(f(z_1)) \neq g(f(z_2))$$

bağıntısı gerçeklenir. (3.5) ve (3.6) bağıntıları birlikte düşünülürse

(3.7) $$z_1, z_2 \in D, z_1 \neq z_2 \Rightarrow g(f(z_1)) \neq g(f(z_2))$$

bağıntısını yazabiliriz Bu bize $(g \circ f)(z)$ fonksiyonunun injektif olduğunu gösterir. İspatın ikinci adımında $(g \circ f)(z)$ fonksiyonunun analitik olduğunu göstermeliyiz.

Bunun içinde bileşke fonksiyonunun türevinin var olduğunu göstermemiz gerekir.

$$\lim_{z\to z_0}\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{f(z)-f(z_0)}$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right]$$

$$w=f(z),w_0=f(z_0),z\to z_0,w\to w_0$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0}=\left[\lim_{z\to z_0}\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)}\right]\left[\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right]$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0}=\left[\lim_{w\to w_0}\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}\right]\left[\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right]$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0}=g^{'}(w_0)f^{'}(z_0)$$

bu eşitlik bize türevin var olduğunu gösterir. Bu ise teoremi ispatlar.

TEOREM 3.2: $f(z)\neq 0$ olmak üzere $\left(\frac{1}{f(z)}\right)$ fonksiyonunun yalınkat olması için gerek ve yeter şart $f(z)$ fonksiyonunun yalınkat olmasıdır.

İSPAT: (Gereklilik) $g(z)=\frac{1}{z}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $g(z)$ fonksiyonu her $D^*=\{z\,|\,z\in\mathbb{C}-(0)\}$ bölgesinde yalınkattır. Zira

$$z_1,z_2\in D\Rightarrow\frac{1}{z_1}\neq\frac{1}{z_2}\Rightarrow g(z_1)\neq g(z_2)$$

dır. Teorem 3.1' den dolayı

$$g\left(\frac{1}{f(z)}\right)=\frac{1}{\frac{1}{f(z)}}=f(z)$$

yazabiliriz. Bu da bize $f(z)$' nin yalınkat olduğunu gösterir.

(Yeterlilik) $f(z)$ yalınkat olsun. Benzer tarzda $g(z)=\frac{1}{z}$ yalınkat fonksiyonunu göz önüne alalım. Önceki teoremden

$$g(f(z)) = \frac{1}{f(z)}$$

bileşke fonksiyonu yalınkat olduğundan $\left(\frac{1}{f(z)}\right)$ fonksiyonu yalınkattır.

S sınıfını koruyan bazı önemli elemanter transformasyonlar aşağıda tanımlanmıştır.

TANIM 3.3 (Eşlenik Transformasyonları) $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu S sınıfına ait olsun. $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + a_2 z^2 + \dots$ şeklinde tanımlanan $\overline{f(\overline{z})}$ fonksiyonu da S sınıfına aittir.

Gerçekten, S sınıfının normalizasyonu

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a}_2 z^2 + \dots \Rightarrow g(0) = 0$$

$$g'(z) = 1 + 2\overline{a}_2 z + \dots \Rightarrow g'(0) = 1$$

şeklindedir. Diğer taraftan $f(z)$ yalınkat olduğundan

(3.8) $$z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

(3.9) $$z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow \overline{z_1} \neq \overline{z_2}$$

dır. (3.8) ve (3.9) ifadelerinden

$$\overline{z_1} \neq \overline{z_2} \Leftrightarrow f(\overline{z_1}) \neq f(\overline{z_2}) \Leftrightarrow \overline{f(z_1)} \neq \overline{f(z_2)} \Leftrightarrow g(z_1) \neq g(z_2)$$

bağıntısını elde ederiz. Bu da bize $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ fonksiyonunun S sınıfına ait olduğunu gösterir.

TANIM 3.4: (Rotasyon Transformasyonları)

$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu S sınıfına ait olsun. Bu durumda $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$ şeklinde tanımlanan $g(z)$ fonksiyonu da S sınıfına aittir.

Gerçekten,

$$f(e^{i\theta} z) = e^{i\theta} z + a_2 (e^{i\theta} z)^2 + \dots = e^{i\theta} z + a_2 e^{2i\theta} z^2 + \dots \Rightarrow$$

(3.10) $$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + a_2 e^{i\theta} z^2 + \dots$$

fonksiyonun da S sınıfının normalizasyonunu düşünürsek

(3.11) $$g(0)=0$$

ve

$$g^{'}(z)=1+2a_2e^{i\theta}z\ +\ldots\Rightarrow$$

(3.12) $$g^{'}(0)=1$$

bulunur. (3.11) ve (3.12) eşitlikleri S sınıfı normalizasyonunun gerçeklendiğini gösterir.

Diğer yandan injektiflik koşulundan

$$z_1\neq z_2\Leftrightarrow e^{i\theta}z_1\neq e^{i\theta}z_2\Leftrightarrow f(e^{i\theta}z_1)\neq f(e^{i\theta}z_2)\Leftrightarrow$$

$$g(z_1)=e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z_1)\neq e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z_2)=g(z_2)$$

bulunur. Bu da g(z) fonksiyonunun yalınkat olduğunu gösterir. Sonuç olarak $g(z)=e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$ fonksiyonunun S sınıfına ait olduğunu söyleyebiliriz.

TANIM 3.5: (Genişleme yada Daralma Transformasyonları)

$w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ fonksiyonu S sınıfına ait olsun. Bu durumda 0 < r < 1 olmak üzere $g(z)=r^{-1}f(rz)$ şeklinde tanımlanan $g(z)$ fonksiyonu da S sınıfına aittir. Gerçekten,

$$g(z)=r^{-1}f(rz)=z+a_2rz^2+a_3r^2z^3+\ldots\Rightarrow$$

$$g(0)=0,\quad g^{'}(0)=1$$

eşitliklerinden S sınıfı normalizasyonunun gerçeklendiği görülür. Ayrıca

$$0<r<1\Rightarrow z_1\neq z_2\Leftrightarrow rz_1\neq rz_2\Leftrightarrow g(z_1)=r^{-1}f(rz_1)\neq r^{-1}f(rz_2)=g(z_2)$$

olduğundan $g(z)$ fonksiyonu bire-birdir. Bu ise bize $g(z)=r^{-1}f(rz)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun S sınıfına ait olduğunu gösterir.

TANIM 3.6: (Disk Transformasyonları) $w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ fonksiyonu S sınıfına ait olsun. Bu durumda $|a|<1$ olmak üzere

$$g(z)=\frac{f\left(\dfrac{z+a}{1+\overline{a}z}\right)-f(a)}{(1-|a|^2)f^{'}(a)}$$

şeklinde tanımlanan $g(z)$ fonksiyonu da S sınıfına aittir.

Gerçekten,

(3.13) $$f\left(\frac{z+a}{1+\overline{a}z}\right)$$

transformasyonunu göz önüne alalım. Bu transformasyon

$$w_1(z)=\frac{z+a}{1+\overline{a}z}$$

birim diskini invaryant bıraktığından (yani birim disk üzerine resmeden Möbius transformasyonu olduğundan) yalınkattır. Yalınkat iki fonksiyonunun bileşke fonksiyonu da yalınkat olduğundan (3.13) şeklinde tanımlanan fonksiyon yalınkattır. Ayrıca bu fonksiyonun $z=0$ noktasındaki Taylor açılımı

(3.14) $$f\left(\frac{z+a}{1+\overline{a}z}\right)=f(a)+\frac{f^{'}(a)}{1!}(1-|a|^2)z+...$$

şeklindedir. Dolayısıyla (3.14) eşitliğinden

$$g(z)=\frac{f\left(\frac{z+a}{1+\overline{a}z}\right)-f(a)}{(1-|a|^2)f^{'}(a)}=z+...$$

yazılabilir. Bu son ifade $g(z)$ fonksiyonu *S* sınıfına ait normalizasyonu gerçekler ve injektiftir. Dolayısıyla $g(z)$ fonksiyonu *S* sınıfına aittir.

TANIM 3.7 : (Karekök Transformasyonları) $w=f(z)=z+a_2z^2+...$ fonksiyonu *S* sınıfına ait olsun. Bu durumda,

$g(z)=\sqrt{f(z^2)}$ şeklinde tanımlanan $g(z)$ fonksiyonu da *S* sınıfına aittir.

Gerçekten,

$$g(z)=\sqrt{f(z^2)}=\sqrt{z^2+a_2z^4+...}=\sqrt{z^2\left(1+a_2z^2+...\right)}\Rightarrow$$

$$g(z)=z\sqrt{(1+a_2z^2+...)}=z+...$$

yazılabileceğinden $g(0)=0$ ve $g^{'}(0)=1$ eşitlikleri gerçeklenir. Ayrıca

$$g(z_1)=\sqrt{f(z_1^2)}=\sqrt{(z_2^2)}=g(z_2)\Rightarrow$$

$$f(z_1^2)=f(z_2^2)\Rightarrow z_1^2=z_1^2\Rightarrow z_1=\pm z_2$$

bulunur. $f(z)$ fonksiyonu bire-bir olduğunu $z_1=\pm z_2$ ifadesinde kullanırsak $z_1=z_2$

elde edilir ki bu aynı zamanda $g(z)=\sqrt{f(z^2)}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun bire bir olduğunu gösterir. Bu ise $g(z)$ fonksiyonu S sınıfına aittir demektir.

TANIM 3.8: (Alınmayan Değer Transformasyonları)

$w=f(z)=z+a_2z^2+...$ fonksiyonu S sınıfına ait olsun. S sınıfının tanımından dolayı $f(z)$ fonksiyonu $D=\{z\,|\,|z|<1\}$ bölgesinde tanımlanmış, analitik ve bire-bir fonksiyondur. Yani,

(3.15) $\qquad z_1,z_2\in D$ ve $z_1\neq z_2$ için $f(z_1)\neq f(z_2)$

dir.

$z\in D$ için $f(z)$ fonksiyonu tarafından alınmayan bir değer c olsun. Yani

(3.16) $\qquad \forall z\in D$ için $f(z)\neq c$

bağıntısı gerçeklensin.

(3.17) $$g(z)=\frac{cf(z)}{c-f(z)}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon S sınıfına aittir.

Gerçekten,

$z_1\neq z_2$ için $f(z_1)\neq f(z_2)\Leftrightarrow cf(z_1)\neq cf(z_2)$ ve $-f(z_1)\neq -f(z_2)\Rightarrow$

(3.18) $\qquad c-f(z_1)\neq c-f(z_2)$

ifadesinden

$$z_1,z_2\in D \text{ ve } z_1\neq z_2 \text{ için } g(z_1)=\frac{cf(z_1)}{c-f(z_1)}\neq\frac{cf(z_2)}{c-f(z_2)}=g(z_2)\Rightarrow$$

$$g(z_1)\neq g(z_2)$$

bulunur. Diğer yandan

$$g(0)=\frac{cf(0)}{c-f(0)}\neq\frac{c0}{c-0}=0$$

$$g'(z)=\frac{cf'(z)\left(c-f(z)\right)-\left(-f'(z)\right)cf(z)}{\left(c-f(z)\right)^2}=\frac{c^2f'(z)}{c^2-2cf(z)+f^2(z)}\Rightarrow$$

$$g'(0)=\frac{c^2f'(0)}{c^2-2cf(0)+f^2(0)}=\frac{c^21}{c^2-2c0+0}=1$$

yazılırsa $g(z)$ fonksiyonunun S sınıfına ait olduğunu bulunmuş olur.

TANIM 3.9: (M-Fold Simetri Transformasyonları) Bu transformasyonlar genel olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

(3.19) $$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn+1} z^{mn+1} = z + a_{m+1} z^{m+1} + a_{2m+1} z^{2m+1} + ...$$

fonksiyonu $D = \{z \| z| < 1\}$ birim diskinde tanımlanmış, analitik ve bire-bir olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonuna "birim diskte m-fold simetri fonksiyonu" adı verilir ve bu fonksiyonların sınıfı $S^{(m)}$ ile gösterilir. Aşikar olarak $S^{(m)}$ sınıfında

(3.20) $$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f^{'}(0) = 1 \end{cases}$$

normalizasyonu vardır. Dolayısıyla $f(z) \in S$ olmak üzere

$$g(z) = \left(f(z^m) \right)^{\frac{1}{m}}$$

şeklinde tanımlanan $g(z)$ fonksiyonu $S^{(m)}$ sınıfına aittir (bunun terside doğrudur).

NOT 3.1: $m = 2$ hali karekök transformasyonunu verir ve bu transformasyon aynı zamanda S sınıfındaki $f(-z) = -f(z)$ eşitliğini gerçekleyen tek yalınkat fonksiyon sınıfıdır.

Yalınkat fonksiyonlar ait genel özellikler aşağıdaki şekilde verilebilir.

TEOREM 3.3: Yalınkat fonksiyonlar topolojik kavramları korurlar. Yani topolojik özellikler yalınkat fonksiyonlar altında invaryant kalır.

İSPAT : Eğer yalınkat fonksiyonun makus fonksiyonunun türevinin daima var olduğunu gösterirsek iddiayı ispatlamış oluruz.

$$\lim_{w \to w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} \Rightarrow$$

$$\lim_{w \to w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} = \frac{1}{f^{'}(z_0)} \Rightarrow$$

$f^{'}(z_0) > 0$ olduğundan $\dfrac{1}{f^{'}(z_0)}$ ifadesi daima tanımlıdır. Bu da bize teoremin ispatını verir.

TEOREM 3.4: Yalınkat fonksiyonlar birer konform homomorfizmadır.

İSPAT : C eğrisi, $a \le t \le b$ olmak üzere $z(t) = x(t) + iy(t)$ denklemiyle verilsin (Düzgün, basit bağlantılı yani kendi kendini kesmeyen eğri veya Jordan yayı). $w = f\left(z\right)$ Yalınkat fonksiyonu ile C eğrisinin resim eğrisi $f(C)$ de düzgün bir Jordan yayı olacaktır. Dolayısıyla

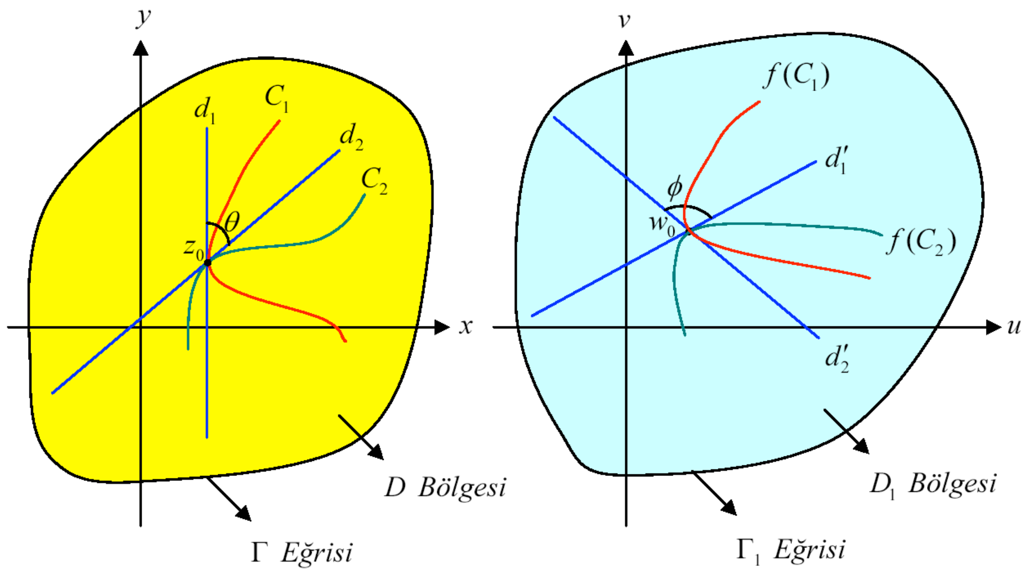
(3.21) $\qquad z^{'}(t) \ne 0, z(t)$ sürekli

ifadeleri yazılabilir. $z_0 = z(t_0)$ olmak üzere $f\left(z_0\right)$ noktasında $f(C)$ eğrisinin teğeti ile pozitif eksen doğrultusundaki açı

(3.22) $$\arg\left(\left.\frac{df}{dz}\right|_{z=z_0}\right) = \arg\left[\left(\left.\frac{df}{dt}\right|_{z=z_0}\right)\left(\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}\right)\right] = \arg\left(\left.\frac{df}{dt}\right|_{z=z_0}\right)\arg\left(\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}\right)$$

eşitliği ile verilir. Burada önemli belirtmek gerekir ki (3.22) eşitliğinde $z_0 = \infty$ ve $f(z_0) = \infty$ durumları göz ardı edilmiştir.

Şimdi z-düzleminde $w = f\left(z\right)$ fonksiyonunun tanım bölgesinde bulunan, $\alpha \le t \le \beta$ ve $\alpha_1 \le s \le \beta_1$ olmak üzere $C_1 : z(t), C_2 : z(s)$ şeklinde iki eğri düşünelim öyle ki $z_0 = z(t_0) = z(s_0)$ eşitliği gerçeklensin. Yani, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi C_1 ve C_2 eğrileri z_0 noktasında geçsinler. Başka bir deyişle C_1 ve C_2 eğrileri z_0 noktasında kesişsinler.



Şekil 3.2

$w = f(z)$ yalınkat fonksiyonu ile Γ eğrisi Γ_1 eğrisi üzerinde, D bölgesi üzerinde ve z_0 noktasında kesişen C_1 ve C_2 eğrileri sırasıyla $f(C_1)$ ve $f(C_2)$ eğrilerine resmedilsin. Yukarıda anlatılanlardan dolayı

(3.23) $\qquad w_t^{'}(t) = f^{'}(z_0)z^{'}(t_0) \qquad$ ($f(C_1)$ eğrisi düzgün Jordan yayı)

(3.24) $\qquad w_s^{'}(s_0) = f^{'}(z_0)z^{'}(s_0) \qquad$ ($f(C_2)$ eğrisi düzgün Jordan yayı)

eşitlikleri yazılabilir. Öte yandan (3.23) ve (3.24) eşitliklerinden hareketle

(3.25) $\qquad \arg w_{t_0}^{'}(t) = \arg f^{'}(z_0)z^{'}(t_0) = \arg f^{'}(z_0) + \arg z^{'}(t_0)$

(3.24) $\qquad \arg w_s^{'}(s_0) = \arg(f^{'}(z_0)z^{'}(s_0)) = \arg f^{'}(z_0) + \arg z^{'}(s_0)$

ifadelerini elde ederiz. (3.25) ve (3.26) taraf tarafa çıkarılacak olursa

$$\arg w_t^{'}(t_0) - \arg w_s^{'}(s_0) = \arg z^{'}(t_0) - \arg z^{'}(s_0)$$

yada,

(3.27) $\qquad \arg \dfrac{w_t^{'}(t_0)}{w_s^{'}(s_0)} = \arg \dfrac{z^{'}(t_0)}{z^{'}(s_0)} \Rightarrow \theta = \phi$

eşitliği bulunur. (3.27) ifadesi açıların korunduğunu gösterir.

TEOREM 3.5: $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı kapalı C eğrisinin kapattığı D bölgesinde tanımlanmış ve yalınkat olsun. D bölgesinin $w = f(z)$ yalınkat fonksiyonu altındaki resmi $f(D)$ ise

$$Alanf(D) = \iint_D \left| f'(z) \right|^2 dxdy$$

dir.

İSPAT: $w = f(z)$ fonksiyonu D bölgesinde analitik ve yalınkat olduğundan Cauchy-Riemann denklemlerini gerçekler. Bu ise

(3.28) $$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

denklemlerinin sağlanması demektir. Diğer taraftan analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun türevi

(3.29) $$f^{'}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

eşitlikleri ile verilebilir. (3.29) eşitliklerinin kullanılması ile

(3.30) $$\left| f^{'}(z) \right|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

eşitliği bulunur.

Diğer taraftan $Alanf(D)$ ifadesi

(3.31) $$Alanf(D) = \iint_{f(D)} dudv$$

ile verilir.

Ayrıca çok katlı integrallerde ki değişken dönüşümü göz önüne alınarak Cauchy-Riemann denklemlerinin kullanılması ile

$$\left.\begin{array}{l} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{array}\right\} \Rightarrow dudv = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} - \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow$$

$$dudv = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left| f^{'}(z) \right|^2$$

eşitsizliğini buluruz. Dolayısıyla (3.31) eşitliği

$$Alanf\,(D) = \iint\limits_D dudv = \int\limits_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dxdy = \int\limits_D \left| f^{'}(z) \right|^2 dxdy$$

bulunur.

4. KESİRSEL HESAPLAR

A, $U=\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,|z|<1\}$ açık birim diskinde analitik olan $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ şeklindeki $f(z)$ fonksiyonlar sınıfı olsun. Owa $[1]$ ve Srivastava ve Owa $[2]$ tarafından verilen Kesirsel Türev ve Kesirsel İntegral tanımları aşağıdaki şekildedir.

TANIM 4.1: Bir $f(z)$ fonksiyonu için λ mertebeli Kesirsel İntegral

$$D_z^{-\lambda}f(z)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^z\frac{f(\xi)}{(z-\zeta)^{1-\lambda}}d\zeta,(\lambda>0)$$

şeklinde tanımlanır. Bu integralde $f(z)$ fonksiyonu orijini ihtiva eden kompleks düzlemin basit bağlantılı bir bölgesinde analitiktir ve $(z-\zeta)>0$ olduğunda $\log(z-\zeta)$ nın reeldir. Bu durumda $(z-\zeta)^{\lambda-1}$ in çok değerliliği ortadan kaldırılmış olur.

TANIM 4.2: Bir $f(z)$ fonksiyonu için λ mertebeli Kesirsel Türev

$$D_z^{\lambda}f(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\frac{d}{dz}\int_0^z\frac{f(\xi)}{(z-\zeta)^{\lambda}}d\zeta,(0\leq\lambda<1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $f(z)$ fonksiyonu orijini içeren kompleks düzlemin basit bağlantılı bir bölgesinde analitiktir ve $(z-\zeta)>0$ olduğunda $\log(z-\zeta)$ nın reeldir. Bu durumda $(z-\zeta)^{-\lambda}$ in çok değerliliği ortadan kaldırılmış olur.

TANIM 4.3: Tanım 4.2 deki hipotez altında bir $f(z)$ fonksiyonu için $n+\lambda$ mertebeli Kesirsel İntegral

$$D_z^{n+\lambda} f(z) = \frac{d^n}{dz^n} D_z^{\lambda} f(z), \quad (0 \leq \lambda < 1; n \in N_0 = N \cup \{0\})$$

şeklinde tanımlanır.

$$D_z^n f(z) = f^{(n)}(z) = p(p-1)(p-2)...(p-n+1)z^{p-n} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} z^{p-n}$$

$$D_z^3 f(z) = f^{'''}(z) = p(p-1)(p-2)z^{p-3} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-3+1)} z^{p-3} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-2)} z^{p-3}$$

$$D_z^2 f(z) = f^{''}(z) = p(p-1)z^{p-2} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-2+1)} z^{p-2} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-1)} z^{p-2}$$

$$D_z^1 f(z) = f^{'}(z) = pz^{p-1} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-1+1)} z^{p-1} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)} z^{p-1}$$

$$D_z^0 f(z) = f(z) = z^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1)} z^p$$

$$D_z^{-1} f(z) = \int_0^z f(t)dt = \frac{1}{p+1} z^{p+1} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1+1)} z^{p+1} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+2)} z^{p+1}$$

$$D_z^{-2} f(z) = \int_0^z (D_z^{-1} f(t)dt = \frac{1}{(p+1)(p+2)} z^{p+2} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+2+1)} z^{p+2} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+3)} z^{p+2}$$

$$D_z^{-3} f(z) = \int_0^z (D_z^{-2} f(t)dt = \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)} z^{p+3} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+3+1)} z^{p+3}$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+4)} z^{p+3}$$

$$D_z^{-n} f(z) = \int_0^z (D_z^{-n+1} f(t)dt = \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)...(p+n)} z^{p+n}$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+n+1)} z^{p+n}$$

$$D_z^{\lambda} f(z) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\lambda+1)} z^{p-\lambda}$$

$$D_z^{-\lambda} f(z) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\lambda+1)} z^{p+\lambda}$$

$$D_z^{-\lambda} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^{1-\lambda}} d\zeta \,, \qquad (\lambda > 0)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z \frac{z^{\alpha}(1-u)^{\alpha}}{z^{1-\lambda}.u^{1-\lambda}} .(-zdu)$$

$$= \frac{z^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z u^{\lambda-1}(1-u)^{(\alpha+1)-1}$$

$$= \frac{z^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \beta(\lambda, \alpha+1)$$

$$= \frac{z^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(\lambda).\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\lambda+\alpha+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\lambda+\alpha+1)} z^{\alpha+\lambda}$$

$$z - \zeta = zu$$

$$\zeta = z(1-u) \Rightarrow d\zeta = -zdu$$

$$\zeta^{\alpha} = z^{\alpha}(1-u)^{\alpha}$$

$$(z-\zeta)^{1-\lambda} = z^{1-\lambda} u^{1-\lambda}$$

$$D_z^{\lambda} f(z) = \frac{d}{dz}(D_z^{-(1-\lambda)} f(z)) = \frac{d}{dz}\left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \int_0^z \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^{\lambda}} d\zeta \right\}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^{\lambda}} d\zeta \quad , \qquad (0 \le \lambda < 1)$$

$$D_z^{\lambda} z^{\alpha} = \frac{d}{dz}(D_z^{-(1-\lambda)} z^{\alpha}) = \frac{d}{dz}\left\{ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2-\lambda)} z^{\alpha+1-\lambda} \right\}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2-\lambda)} (\alpha+1-\lambda) z^{\alpha-\lambda}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-\lambda)} z^{\alpha-\lambda}$$

$$D_z^{n+\lambda} f(z) = \frac{d^n}{dz^n}(D_z^{\lambda} f(z)) \qquad (0 \le \lambda < 1; n = 0, 1, 2, ...)$$

$$D_z^{n+\lambda} z^{\alpha} = \frac{d^n}{dz^n}(D_z^{\lambda} z^{\alpha}) = \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-\lambda)} z^{\alpha-\lambda}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-n-\lambda)} z^{\alpha-n-\lambda}, \lambda \in R$$

$$D_z^{\lambda} z^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-\lambda)} z^{\alpha-\lambda}$$

$$f(z) = a_0 z^{\alpha} + a_1 z^{\alpha+1} + a_2 z^{\alpha+2} + \ldots$$

$$= z^{\alpha}(a_0 + a_1 z \;\; + a_2 z^2 + \ldots)$$

$$D_z^{\alpha} f(z) = a_0 \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1)} + a_1 \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(2)} z + a_2 \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(3)} z^2 + \ldots$$

$$a_0 = \frac{D_z^{\alpha} f(0)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$D_z^{\alpha+1} f(z) = a_1 \Gamma(\alpha+2) + a_2 \Gamma(\alpha+2) z + \ldots$$

$$a_1 = \frac{D_z^{\alpha+1} f(0)}{\Gamma(\alpha+2)}$$

$$D_z^{\alpha+2} f(z) = a_2 \Gamma(\alpha+3) + \ldots$$

$$a_2 = \frac{D_z^{\alpha+2} f(0)}{\Gamma(\alpha+3)}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{D_z^{\alpha+n} f(0)}{\Gamma(\alpha+n+1)}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_z^{\alpha+n} f(0)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \cdot z^{\alpha+n}$$

yukarıdaki (4.1), (4.2), (4.3) tanımlarında da görülüyor ki,

$$D_z^{-\lambda} z^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\lambda+1)} z^{p+\lambda}, (\lambda > 0)$$

$$D_z^{\lambda} z^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\lambda+1)} z^{p-\lambda}, (0 \leq \lambda < 0)$$

ve

$$D_z^{n+\lambda} z^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n-\lambda+1)} z^{p-n-\lambda}, (0 \leq \lambda < 0; n \in N_0)$$

dolayısıyla

$$D_z^{\lambda} z^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\lambda+1)} z^{p-\lambda}, (0 \leq \lambda < 0)$$

yazılabilir.

Bu bölümde $f(z)=z+a_{p+1}z^{p+1}+a_{2p+1}z^{2p+1}+...$ açılımına sahip fonksiyonlar ile tanımlanan $D^{\lambda}f(z)$ λ- kesirsel operatörünün yıldızıl fonksiyon olması durumunda, bu operatör için özel halde katsayı eşitsizliği genel halde katsayı eşitsizliği ve yine genel halde de distorsiyon teoremleri verip bunların özel halini inceledik. Genel halde $D^{\lambda}f(z)$ kesirsel operatörünün yıldızıl olma koşulu analitik olarak

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{\left(D^{\lambda}f(z)\right)'}{D^{\lambda}f(z)}\right)>0$$

ile verilir.

TEOREM 4.1

$f(z)=z+a_{p+1}z^{p+1}+a_{2p+1}z^{2p+1}+a_{3p+1}z^{3p+1}+...+a_{np+1}z^{np+1}+...$ fonksiyonu $D=\{z\,\big|\,|z|<1\}$ açık birim diskinde tanımlanmış analitik fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$D^{\lambda}f(z)=\Gamma(2-\lambda).z^{\lambda}D_z^{\lambda}f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{np+1}\frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(np+2-\lambda)}z^{np+1}$$

şeklinde tanımlanan $\lambda-$kesirsel operatör aşağıdaki özellikleri gerçekler.

(i)

$$\underset{\lambda\to 1}{Lim}\,D^{\lambda}f(z)=Df(z)=\Gamma(2-\lambda).z^{1}D_z^{1}f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{np+1}\frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2-1)}{\Gamma(np+2-1)}z^{np+1}$$

$$=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{np+1}\frac{\Gamma(np+2)\Gamma(1)}{\Gamma(np+1)}z^{np+1}$$

$$=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{np+1}\frac{\Gamma(np+2)}{\Gamma(np+1)}z^{np+1}$$

$$=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(np+1)+1)}{\Gamma(np+1)}.a_{np+1}z^{np+1}$$

$$=z+\sum_{n=1}^{\infty}(np+1).a_{np+1}z^{np+1}$$

(4.1) $$\lim_{\lambda\to 1} D^{\lambda} f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} (np+1).a_{np+1} z^{np+1}$$

diğer taraftan

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1} z^{np+1}$$

$$f^{'}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (np+1).a_{np+1} z^{np+1-1}$$

$$f^{'}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (np+1).a_{np+1} z^{np}$$

(4.2) $$zf^{'}(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} (np+1).a_{np+1} z^{np+1}$$

(4.1) ve (4.2) eşitliklerinin sağ tarafları eşit olduğundan sol tarafları da eşit olacaktır. Dolayısıyla

$$\lim_{\lambda\to 1} D^{\lambda} f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} (np+1).a_{np+1} z^{np+1} = zf^{'}(z)$$

yazabiliriz.

(ii) $\lambda \to 0$ için

$$\lim_{\lambda\to 0} D^{\lambda} f(z) = D^{0} f(z) = \Gamma(2-0).z^{0} D_{z}^{0} f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1} \frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2-0)}{\Gamma(np+2-0)} z^{np+1}$$

$$= z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1} \frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2)}{\Gamma(np+2)} z^{np+1}$$

$$= z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1} \frac{\Gamma(np+2)}{\Gamma(np+2)} z^{np+1}$$

$$= z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1} z^{np+1} = f(z)$$

(iii)

$$(D^{\lambda} f(z))^{'} = \left(z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1} \frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(np+2-\lambda)} z^{np+1} \right)^{'}$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(np+2-\lambda)} a_{np+1}.(np+1).z^{np}$$

$$\frac{z(D^{\lambda} f(z))'}{D^{\lambda} f(z)} = z.\frac{1+\sum_{n=2}^{\infty}(np+1).a_{np+1}\frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(np+2-\lambda)}z^{np}}{z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{np+1}\frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(np+2-\lambda)}z^{np+1}}$$

$$= \frac{z\left[1+\sum_{n=2}^{\infty}(np+1).a_{np+1}\frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(np+2-\lambda)}z^{np}\right]}{z\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{np+1}\frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(np+2-\lambda)}z^{np+1}\right]}$$

$$\left.\frac{z(D^{\lambda} f(z))'}{D^{\lambda} f(z)}\right|_{z=0} = 1$$

LEMMA 4.1. $f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1} z^{np+1}$ fonksiyonu $D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ açık birim diskinde tanımlanmış analitik olsun. Bu taktirde

$$D^{\lambda} f(z) = \Gamma(2-\lambda).z^{\lambda} D_z^{\lambda} f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1} \frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(np+2-\lambda)} z^{np+1}$$

şeklinde tanımlanan $D^{\lambda} f(z)$ $\lambda-$kesirsel operatörü

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z(D^{\lambda} f(z))'}{D^{\lambda} f(z)}\right) = r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\log\left|D^{\lambda} f(z)\right|, |z| = r$$

eşitliğini gerçekler.

İSPAT:

(4.3) $D^{\lambda} f(z) = \left|D^{\lambda} f(z)\right| e^{i\theta}$ eşitliğini yazabiliriz.

(4.3) den hareketle

$$\log D^{\lambda} f(z) = \log(\left|D^{\lambda} f(z)\right|).e^{i\theta}$$

$$\log D^{\lambda} f(z) = \log\left|D^{\lambda} f(z)\right| + \log e^{i\theta}$$

$$\log D^{\lambda} f(z) = \log\left|D^{\lambda} f(z)\right| + i\theta \log e$$

(4.4) $\log D^{\lambda} f(z) = \log\left|D^{\lambda} f(z)\right| + i\theta$

ifadesini elde ederiz. $z = re^{i\theta}$ alınırsa

(4.5) $$\log(D^{\lambda} f(re^{i\theta})) = \log\left|D^{\lambda} f(re^{i\theta})\right| + i\theta$$

bulunur. (4.5) ifadesinden r'ye göre türev alırsak

(4.6) $$e^{i\theta} \frac{(D^{\lambda} f(re^{i\theta}))'}{D^{\lambda} f(re^{i\theta})} = \frac{\partial}{\partial r} \log\left|D^{\lambda} f(re^{i\theta})\right| + i\theta$$

eşitliğini elde ederiz. (4.6) eşitliğinin her iki yanını r ile çarparsak

(4.7) $$re^{i\theta} \frac{(D^{\lambda} f(re^{i\theta}))'}{D^{\lambda} f(re^{i\theta})} = r \frac{\partial}{\partial r} \log\left|D^{\lambda} f(re^{i\theta})\right|$$

bulunur. (4.7) eşitliğini aynı zamanda

(4.8) $$z \frac{(D^{\lambda} f(z))'}{D^{\lambda} f(z)} = r \frac{\partial}{\partial r} \log\left|D^{\lambda} f(z)\right|$$

şeklinde de yazılabilir.

(4.8) ifadesinin reel kısmı alınırsa

$$\operatorname{Re}\left(z \frac{(D^{\lambda} f(z))'}{D^{\lambda} f(z)} \right) = r \frac{\partial}{\partial r} \log\left|D^{\lambda} f(z)\right|, |z| = r$$

bulunur ki buda ispatı istenen ifadedir.

TEOREM 4.2 $f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1} z^{np+1}$ fonksiyonu $D = \{z \,\big|\, |z| < 1\}$ açık birim diskinde tanımlanmış analitik olsun. Bu taktirde

$$\frac{r^{1-\lambda}}{(1+r^k)^{2/k}.\Gamma(2-\lambda)} \le \left| D_z^{\lambda} f(z) \right| \le \frac{r^{1-\lambda}}{(1-r^k)^{2/k}.\Gamma(2-\lambda)}$$

gerçeklenir.

İSPAT: Subordinasyon prensibini ve pozitif reel kısma sahip fonksiyonun tanımını kullanarak

(4.9) $$\left| z\frac{(D^{\lambda} f(z))'}{D^{\lambda} f(z)} - \frac{1+r^{2k}}{1-r^{2k}} \right| \le \frac{2r^k}{1-r^{2k}}$$

ifadesini yazabiliriz.

Bu ifadede herhangi bir z_1 komplex sayısı için reel kısmı ile modülü arasında

(4.10) $$-|z_1| \le \operatorname{Re} z \le |z_1|$$

bağıntısı vardır. Bu ifadeden hareketle

(4.11) $$z_1 = z\frac{(D^{\lambda} f(z))'}{D^{\lambda} f(z)} - \frac{1+r^{2k}}{1-r^{2k}}$$

alınarak

$$-\frac{2r^k}{1-r^{2k}} \le \left| z\frac{(D^{\lambda} f(z))'}{D^{\lambda} f(z)} - \frac{1+r^{2k}}{1-r^{2k}} \right| \le \operatorname{Re}\left(z\frac{(D^{\lambda} f(z))'}{D^{\lambda} f(z)} \right) - \frac{1+r^{2k}}{1-r^{2k}} \le$$

$$\left| z\frac{(D^{\lambda} f(z))'}{D^{\lambda} f(z)} - \frac{1+r^{2k}}{1-r^{2k}} \right| \le \frac{2r^k}{1-r^{2k}}$$

(4.12) $$-\frac{2r^k}{1-r^{2k}} \le \operatorname{Re}\left(z\frac{(D^{\lambda} f(z))'}{D^{\lambda} f(z)} - \frac{1+r^{2k}}{1-r^{2k}} \right) \le \frac{2r^k}{1-r^{2k}}$$

eşitliği elde edilir. (4.12) ifadesi aynı zamanda

$$-\frac{2r^k}{1-r^{2k}} \le \operatorname{Re} z\frac{(D^\lambda f(z))'}{D^\lambda f(z)} - \frac{1+r^{2k}}{1-r^{2k}} \le \frac{2r^k}{1-r^{2k}}$$

$$-\frac{2r^k}{1-r^{2k}} + \frac{1+r^{2k}}{1-r^{2k}} \le \operatorname{Re} z\frac{(D^\lambda f(z))'}{D^\lambda f(z)} \le \frac{2r^k}{1-r^{2k}} + \frac{1+r^{2k}}{1-r^{2k}} \tag{4.13}$$

$$\frac{1+r^{2k}-2r^k}{1-r^{2k}} \le \operatorname{Re} z\frac{(D^\lambda f(z))'}{D^\lambda f(z)} \le \frac{1+r^{2k}+2r^k}{1-r^{2k}}$$

$$\frac{(1-r^k)^2}{(1-r^k)(1+r^k)} \le \operatorname{Re} z\frac{(D^\lambda f(z))'}{D^\lambda f(z)} \le \frac{(1+r^k)^2}{(1-r^k)(1+r^k)}$$

$$\frac{(1-r^k)}{(1+r^k)} \le \operatorname{Re} z\frac{(D^\lambda f(z))'}{D^\lambda f(z)} \le \frac{(1+r^k)}{(1-r^k)} \tag{4.14}$$

şeklinde ifade edilir. Diğer taraftan Lemma 4.1 de gösterilen

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{(D^\lambda f(z))'}{D^\lambda f(z)} \right) = r\frac{\partial}{\partial r}\log\left|D^\lambda f(z)\right| \tag{4.15}$$

ifadesi olduğu göz önüne alınırsa (4.14) ,(4.15) ‘de kullanıldığında

$$\frac{\left(1-r^k\right)}{\left(1+r^k\right)} \le r\frac{\partial}{\partial r}\log\left|D^\lambda f(z)\right| \le \frac{\left(1+r^k\right)}{\left(1-r^k\right)}$$

ifadesi elde edilir.

Burada her iki tarafı r ye bölersek

$$\frac{1}{r}\frac{\left(1-r^k\right)}{\left(1+r^k\right)} \le \frac{\partial}{\partial r}\log\left|D^\lambda f(z)\right| \le \frac{1}{r}\frac{\left(1+r^k\right)}{\left(1-r^k\right)} \tag{4.16}$$

şeklinde yazılabilir. (4.16) eşitsizliğinde *0* dan r ye kadar integral alınırsa

$$\underbrace{\int_0^r \frac{1}{r}\frac{(1-r^k)}{(1+r^k)}dr}_{I_1} \le \int_0^r \frac{\partial}{\partial r}\log\left|D^\lambda f(z)\right|dr \le \underbrace{\int_0^r \frac{1}{r}\frac{(1+r^k)}{(1-r^k)}dr}_{I_2}$$

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^r \frac{1}{r}\frac{(1-r^k)}{(1+r^k)}dr$$

$$\frac{1}{r}\frac{(1-r^k)}{(1+r^k)} = \frac{\mathrm{A}}{\underbrace{r}_{(1+r^k)}} + \frac{Br^{k-1}+C}{\underbrace{1+r^k}_{(r)}} = \frac{\mathrm{A}.(1+r^k)+B.r^k+Cr}{r.(1+r^k)}$$

$$(1-r^k) = \mathrm{A} + \mathrm{A}r^k + Br^k + Cr$$

$$(1-r^k) = \mathrm{A} + r^k(\mathrm{A}+B)$$

$$\mathrm{A}+B = -1 \quad \mathrm{A} = 1$$

$$B = -2$$

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^r \frac{1}{r}\frac{(1-r^k)}{(1+r^k)}dr = \int_0^r \frac{1}{r}\cdot dr - 2\int_0^r \frac{r^{k-1}}{1+r^k}\cdot dr = \int_0^r \frac{1}{r}.dr - 2\int_0^r \frac{1/k}{u}\cdot du$$

$$= \ln|r|\Big\|_0^r - \frac{2}{k}\ln\left|1+r^k\right|\Big\|_0^r$$

$$= \log\frac{r}{(1+r^k)^{2/k}}$$

$$1+r^k = u$$

$$k.r^{k-1}.dr = du$$

$$r^{k-1}.dr = \frac{du}{k}$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^r \frac{1}{r}\frac{(1+r^k)}{(1-r^k)}dr$$

$$\frac{1}{r}\frac{(1+r^k)}{(1-r^k)} = \frac{\mathrm{A}}{\underbrace{r}_{(1-r^k)}} + \frac{Br^{k-1}+C}{\underbrace{1-r^k}_{(r)}} = \frac{\mathrm{A}.(1-r^k)+B.r^k+Cr}{r.(1-r^k)}$$

$$(1+r^k) = \mathrm{A} - \mathrm{A}r^k + Br^k + Cr$$

$$(1+r^k) = \mathrm{A} + r^k(-\mathrm{A}+B) + Cr$$

$$-\mathrm{A}+B = 1 \quad \mathrm{A} = 1$$

$$B = 2$$

$$\mathrm{I}_1=\int_0^r \frac{1}{r}\frac{(1+r^k)}{(1-r^k)}\cdot dr=\int_0^r \frac{1}{r}\cdot dr+2\int_0^r \frac{r^{k-1}}{1-r^k}\cdot dr=\int_0^r \frac{1}{r}.dr-2\int_0^r \frac{1/k}{u}\cdot du$$

$$=\ln|r|\Big\|_0^r-\frac{2}{k}\ln\left|1-r^k\right|\Big\|_0^r$$

$$=\log\frac{r}{(1-r^k)^{2/k}}$$

$$1-r^k=u$$

$$-k.r^{k-1}.dr=du$$

$$r^{k-1}.dr=\frac{-du}{k}$$

$$\int_0^r \frac{1}{r}\frac{(1-r^k)}{(1+r^k)}dr\le\int_0^r \frac{\partial}{\partial r}\log\left|D^\lambda f(z)\right|dr\le\int_0^r \frac{1}{r}\frac{(1+r^k)}{(1-r^k)}dr$$

$$\log\frac{r}{(1+r^k)^{2/k}}\le\log\left|D^\lambda f(z)\right|\le\log\frac{r}{(1-r^k)^{2/k}}$$

(4.17) $$\frac{r}{(1+r^k)^{2/k}}\le\left|D^\lambda f(z)\right|\le\frac{r}{(1-r^k)^{2/k}}$$

elde edilir.

Ayrıca $D^\lambda f(z)=\Gamma(2-\lambda)z^\lambda D_z^\lambda f(z)=D^\lambda f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{np+1}\frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(np+2-\lambda)}z^{np+1}$ de

$D^\lambda f(z)=\Gamma(2-\lambda)z^\lambda D_z^\lambda f(z)$ ifadesini (4.17) ifadesinde kullanırsak

$$\frac{r}{(1+r^k)^{2/k}}\le\left|\Gamma(2-\lambda)z^\lambda D_z^\lambda f(z)\right|\le\frac{r}{(1-r^k)^{2/k}}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{r}{(1+r^k)^{2/k}}\le r^\lambda.\Gamma(2-\lambda)\left|D_z^\lambda f(z)\right|\le\frac{r}{(1-r^k)^{2/k}}$$

$$\frac{r}{(1+r^k)^{2/k}.r^\lambda.\Gamma(2-\lambda)}\le\left|D_z^\lambda f(z)\right|\le\frac{r}{(1-r^k)^{2/k}.r^\lambda.\Gamma(2-\lambda)}$$

(4.18) $$\frac{r^{1-\lambda}}{(1+r^k)^{2/k}.\Gamma(2-\lambda)}\le\left|D_z^\lambda f(z)\right|\le\frac{r^{1-\lambda}}{(1-r^k)^{2/k}.\Gamma(2-\lambda)}$$

yazabiliriz.

SONUÇ 4.1.

$z\dfrac{(D^{\lambda}f(z))'}{D^{\lambda}f(z)}$ ifadesi $\lambda \to 1$ için

$$z\frac{(D^{\lambda}f(z))'}{D^{\lambda}f(z)} = z\frac{(zf'(z))'}{zf'(z)} = z\left(\frac{f'(z)+zf''(z)}{zf'(z)}\right) = z\left(\frac{f'(z)}{zf'(z)}+\frac{zf''(z)}{zf'(z)}\right)$$

$$= z\left(\frac{1}{z}+\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) = 1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

$z\dfrac{(D^{\lambda}f(z))'}{D^{\lambda}f(z)}$ ifadesi $\lambda \to 0$ için

$$z\frac{(D^{0}f(z))'}{D^{0}f(z)} = z\frac{(f(z))'}{f(z)} = z\frac{f'(z)}{f(z)}$$

yazılabilir.

(4.17) adımından dolayı

$$\frac{r}{(1+r^k)^{2/k}} \le \left|D^{\lambda}f(z)\right| \le \frac{r}{(1-r^k)^{2/k}}$$

yazabiliriz. Buradan

$\lambda \to 1$ için $\dfrac{r}{(1+r^k)^{2/k}} \le \left|D^{\lambda}f(z)\right| \le \dfrac{r}{(1-r^k)^{2/k}}$

$$\frac{r}{(1+r^k)^{2/k}} \le \left|zf'(z)\right| \le \frac{r}{(1-r^k)^{2/k}}$$

$$\frac{r}{(1+r^k)^{2/k}} \le r\left|f'(z)\right| \le \frac{r}{(1-r^k)^{2/k}}$$

$$\frac{1}{(1+r^k)^{2/k}} \le \left|f'(z)\right| \le \frac{1}{(1-r^k)^{2/k}}$$

bulunur.

$\lambda \to 0$ için $\dfrac{r}{(1+r^k)^{2/k}} \le \left|D^{0}f(z)\right| \le \dfrac{r}{(1-r^k)^{2/k}}$

$$\frac{r}{(1+r^k)^{2/k}} \le \left|f(z)\right| \le \frac{r}{(1-r^k)^{2/k}}$$

sonuçları elde edilir.

SONUÇ 4.2.

$$-\frac{2r^k}{1-r^{2k}}+\frac{1+r^{2k}}{1-r^{2k}}\le \operatorname{Re} z\frac{(D^\lambda f(z))^{'}}{D^\lambda f(z)}\le \frac{2r^k}{1-r^{2k}}+\frac{1+r^{2k}}{1-r^{2k}} \text{ adımından}$$

$$\operatorname{Re} z\frac{(D^\lambda f(z))^{'}}{D^\lambda f(z)}\ge \frac{1-2r^k+r^{2k}}{1-r^{2k}}=\frac{(1-r^k)^2}{(1-r^k)(1+r^k)}$$

$$\operatorname{Re} z\frac{(D^\lambda f(z))^{'}}{D^\lambda f(z)}\ge \frac{(1-r^k)}{(1+r^k)}$$

$\lambda\to 1$ için $\operatorname{Re} z\left(1+z\dfrac{f^{''}(z)}{f'(z)}\right)>\dfrac{(1-r^k)}{(1+r^k)}$

$\lambda\to 0$ için $\operatorname{Re} z\left(z\dfrac{f^{'}(z)}{f(z)}\right)>\dfrac{(1-r^k)}{(1+r^k)}$

bulunur.

TEOREM 4.3.

$f(z)=z+a_{p+1}z^{p+1}+a_{2p+1}z^{2p+1}+a_{3p+1}z^{3p+1}+...+a_{np+1}z^{np+1}+...$ fonksiyonu $D=\{z\,|\,|z|<1\}$ açık birim diskinde tanımlanmış analitik fonksiyon ve $p(z)=1+p_1z^1+p_2z^2+p_3z^3+...+p_nz^n+...$ fonksiyonu $D=\{z\,|\,|z|<1\}$ açık birim diskinde tanımlanmış analitik fonksiyon olsun. Bu taktirde

$p=1$ için a_{n+1} katsayısı

$$|a_{n+1}|\le\frac{1}{n}\cdot\frac{\Gamma(n+2-\lambda)}{\Gamma(n+2)}\cdot\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\lambda)}2\left(\sum_{m=1}^{n-1}|a_m|\right)$$

eşitsizliğini gerçekler.

İSPAT: $\dfrac{z(D^{\lambda}f(z))'}{D^{\lambda}f(z)} = p(z)$

$$z(D^{\lambda}f(z))' = (D^{\lambda}f(z)).p(z)$$

$$D^{\lambda}f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1}\frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(np+2-\lambda)}z^{np+1}$$

$$z(D^{\lambda}f(z))' = z\left(z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1}\frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(np+2-\lambda)}z^{np+1}\right)'$$

$$= z + \sum_{n=1}^{\infty}(np+1).a_{np+1}\frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(np+2-\lambda)}z^{np+1}$$

$$z + \sum_{n=1}^{\infty}(np+1).a_{np+1}\frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(np+2-\lambda)}z^{np+1}$$

$$= (1+p_1z^1+p_2z^2+...+p_nz^n+...)(z+\sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1}\frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(np+2-\lambda)}z^{np+1})$$

$$z+(p+1)a_{p+1}\frac{\Gamma(p+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(p+2-\lambda)}z^{p+1}+(2p+1)a_{2p+1}\frac{\Gamma(2p+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(2p+2-\lambda)}z^{2p+1}+$$

$$(3p+1)a_{3p+1}\frac{\Gamma(3p+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(3p+2-\lambda)}z^{3p+1}+...+(np+1).a_{np+1}\frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(np+2-\lambda)}z^{np+1}+...$$

$$= (1+p_1z^1+p_2z^2+...+p_nz^n+...)(z+a_{p+1}\frac{\Gamma(p+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(p+2-\lambda)}z^{p+1}+$$

$$a_{2p+1}\frac{\Gamma(2p+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(2p+2-\lambda)}z^{2p+1}+a_{3p+1}\frac{\Gamma(3p+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(3p+2-\lambda)}z^{3p+1}$$

$$+...+a_{np+1}\frac{\Gamma(np+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(np+2-\lambda)}z^{np+1}+...)$$

bu adımda $p=1$ alınarak her iki tarafta z^n lerin katsayıları eşitlendiğinde

$$z+2a_2\frac{\Gamma(3)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(3-\lambda)}z^2+3a_3\frac{\Gamma(4)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(4-\lambda)}z^3+4a_4\frac{\Gamma(5)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(5-\lambda)}z^4+...$$

$$+(n+1).a_{n+1}\frac{\Gamma(n+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n+2-\lambda)}z^{n+1}+...=(1+p_1z^1+p_2z^2+...+p_nz^n+...)$$

$$(z+a_2\frac{\Gamma(3)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(3-\lambda)}z^2+a_3\frac{\Gamma(4)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(4-\lambda)}z^3+a_4\frac{\Gamma(5)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(5-\lambda)}z^4+...$$

$$+a_{n+1}\frac{\Gamma(n+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n+2-\lambda)}z^{n+1}+...)$$

$$= z + a_2 \frac{\Gamma(3)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(3-\lambda)} z^2 + a_3 \frac{\Gamma(4)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(4-\lambda)} z^3 + a_4 \frac{\Gamma(5)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(5-\lambda)} z^4 + \ldots +$$

$$a_{n+1} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n+2-\lambda)} z^{n+1} + P_1 z^2 + P_1 a_2 \frac{\Gamma(3)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(3-\lambda)} z^3 + P_1 a_3 \frac{\Gamma(4)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(4-\lambda)} z^4$$

$$+ P_1 a_4 \frac{\Gamma(5)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(5-\lambda)} z^5 + \ldots + P_1 a_{n+1} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n+2-\lambda)} z^{n+2} + P_2 z^3$$

$$+ P_2 a_2 \frac{\Gamma(3)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(3-\lambda)} z^4 + P_2 a_3 \frac{\Gamma(4)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(4-\lambda)} z^5 + P_2 a_4 \frac{\Gamma(5)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(5-\lambda)} z^6 + \ldots$$

$$+ P_2 a_{n+1} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n+2-\lambda)} z^{n+3}$$

$$a_2 \frac{\Gamma(3)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(3-\lambda)} = P_1$$

$$a_2 = \frac{\Gamma(3)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(3-\lambda)} P_1$$

$$3a_3 \frac{\Gamma(4)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(4-\lambda)} = a_3 \frac{\Gamma(4)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(4-\lambda)} + P_1 a_2 \frac{\Gamma(3)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(3-\lambda)} + P_2$$

$$2a_3 \frac{\Gamma(4)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(4-\lambda)} = P_1 a_2 \frac{\Gamma(3)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(3-\lambda)} + P_2$$

$$4a_4 \frac{\Gamma(5)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(5-\lambda)} = a_4 \frac{\Gamma(5)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(5-\lambda)} + P_1 a_3 \frac{\Gamma(4)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(4-\lambda)} + P_2 a_2 \frac{\Gamma(3)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(3-\lambda)}$$

$$3a_4 \frac{\Gamma(5)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(5-\lambda)} = P_1 a_3 \frac{\Gamma(4)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(4-\lambda)} + P_2 a_2 \frac{\Gamma(3)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(3-\lambda)}$$

$$a_4 = \frac{1}{3} \frac{\Gamma(5-\lambda)}{\Gamma(5)\Gamma(2-\lambda)} (P_1 a_3 \frac{\Gamma(4)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(4-\lambda)} + P_2 a_2 \frac{\Gamma(3)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(3-\lambda)})$$

$$a_n = \frac{1}{n-1} \frac{\Gamma(n+1-\lambda)}{\Gamma(n+1)} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\lambda)} \cdot a_m P_{n-m}$$

$$|a_n| = \frac{1}{n-1} \frac{\Gamma(n+1-\lambda)}{\Gamma(n+1)} \left| \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\lambda)} \cdot a_m P_{n-m} \right|$$

$$\leq \frac{1}{n-1} \frac{\Gamma(n+1-\lambda)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\lambda)} \cdot (|a_1||P_{n-1}| + |a_2||P_{n-2}| + \ldots + |a_{n-1}||P_2| \right]$$

$$\leq \frac{1}{n-1} \frac{\Gamma(n+1-\lambda)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\lambda)} \cdot (2|a_1| + 2|a_2| + \ldots + 2|a_{n-1}| \right]$$

$$\left|a_n\right| = \frac{1}{n-1}\frac{\Gamma(n+1-\lambda)}{\Gamma(n+1)}\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\lambda)}2(\left|a_1\right| + \left|a_2\right| + ... + \left|a_{n-1}\right|)$$

buradan da

$$\left|a_{n+1}\right| = \frac{1}{n}\frac{\Gamma(n+2-\lambda)}{\Gamma(n+2)}\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\lambda)}2(\left|a_1\right| + \left|a_2\right| + ... + \left|a_n\right|), a_1 \equiv 1$$

buda ispatı istenen ifadedir.

KAYNAKLAR

[1] **Adam Loverro,** 2004. Fractional Calculus: History, Defination and Aplications for the Engineer, Depertment of Aerospace and Mechanical Engineering University of Notre Dame, IN 46555, USA

[2] **Altintas, O. and Srivastava, H.M.,** 2001. Some majorization problems associated with p-valently starlike and convex functions of complex order, *East Asian Math. J.*, **17,** 175-183.

[3] **Aouf, M.K.**, 1985. p -valent classes related to convex functions of complex order, *Rocky Mountain of Mathematics*, **15**, 853-863.

[4] **Bajpai, S.K. and Mehrok, J.S.**, 1973. On the coefficient structure and growth theorem for the functions $p(z)$ for which $zf^{'}(z)$ is spirallike, *Publ. Ins, Math. N.S.*, **16** (30), 5-12.

[5] **Chichra, P.N.**, 1975. Regular functions for which $zf^{'}(z)$ is α-spirallike, *Proc, Amer. Math. Soc.*, **49**, 151-160.

[6] **Clunie J.**, 1959. On meromorphic schlicht functions, *J. London Math. Soc.*, **34**, 215-216.

[7] **Dettman, W. Jhon,** 1965, Applied complex variables, Dover Publications, New York.

[8] **Duren, P.L.**, 1983. Univalent Function, Springer-Verlag, New York.

[9] **Eenigenburg, P.J. and Keogh, F.R.**, 1970. The Hardy class of some univalent functions and their derivatives, *Michigan Math. J.*, **17**, 335-346.

[10] **Goodman, A.W.**, 1950. On the Schwarz-Christoffel transformation and p -valent functions", *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, **68**, 204-223.

[11] **Goodman, A.W.**, 1984. Univalent functions Volume I and Volume II, Mariner Publishing Comp., Florida.

[12] **Goodman, A.W.**, 1972. Coefficients for the area theorem, *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, **33**, 438-444.

[13] **Hardy, G.H. and Littlewood, J.E.**, 1932. Some properties of fractional integrals II, *Math. Z.*, **34**, 403-439.

[14] **Hayman, W.K.**, 1994, Multivalent Functions, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[15] **Jack, I.S.**, 1971. Functions starlike and convex of order α, *J. London Math. Soc.*, **3** (2), 469-474.

[16] **Janowski, W.**, 1973. Some external problems for certain families of analytic functions, *Ann. Polon. Math.*, **28**, 297-326.

[17] **Kaplan, W.**, 1952. Close-to-convex schlicht functions, *Michigan Math. J.*, **1**, 169-185.

[18] **Keogh, F.R. and Merkes, E.P**, 1969. A coefficient inequality for certain classes of analytic functions, *Proe. Amer. Math. Soc.*, **20**, 8-12.

[19] **Krzyz, J.**, 1962. The radius of close-convexity within the family of univalent functions, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **10** (4), 201-204.

[20] **Kulshrestha, P.K.**, 1976. Bounded Robertson functions, *Rend. Mat.*, **9** (6), 137-150.

[21] **Kulshrestha, P.K.**, 1973. Distortion of spiral-like mappings, *Royal Irish Acad.*, **73**, 1-5.

[22] **Lehto, Olli,** 1986. Univalent Functions and Teichmüller Spaces, Springer-Verlay, New York.

[23] **Libera, R.J. and Ziegler, M.R.**, 1972. Regular functions $f(z)$ for which $zf^{'}(z)$ is α-spiral, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **166**, 361-370.

[24] **Libera, R.J**., 1967. Univalent α -spiral functions, *Canad. J. Math.*, **19**, 449-456.

[25] **MacGregor, T.H.**, The radius of Convexity for starlike functions of order ½, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14**, 71-76.

[26] **Miller, S.S.**, **Mocanu, P.T. and Reade, M.O.**, 1975. α -convex function and derivatives in Nevalinna class, *Studia, Babes-Bolyal, Mathematica*, **20**, 35-40.

[27] **Moretti, Gino,** 1968. Functions of a complex Variable, Prentice Hall, New Delhi.

[28] **Nasr, M.A. and Auof, M.K.**, 1982. On convex functions of complex order, *Mansoura Science Bulletin*, **9**, 565-582.

[29] **Natanson, I.P.**, 1955. Konstructive Funktionentheorie, Akademie Verlag, Berlin.

[30] **Pinchuk, B.**, 1968. On starlike and convex functions of order α , *Duke Math. J.*, **35**, 721-734.

[31] **Polatoğlu, Y., Bolcal, M., and Şen, A.**, 2002. Koebe domain of starlike functions of complex order with Montel Normalization, *Glasnik Matematicki*, **37** (57), 89-92.

[32] **Polatoğlu, Y., Bolcal, M., and Şen, A.**, 2003. Two point distortion theorems for certain families of analytic functions in the unit disc, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol. **64**.

[33] **Polatoğlu, Y. and Bolcal, M.,** 2003. Koebe domain for certain analytic functions in the unit disc under the Montel normalization, *Mathematica Pannonica* **14**, 283-291.

[34] **Pommerenke,** 1975. Univalent Functions, Vanlenhoeck&Ruprecht, Götingen.

[35] **Pommerenke, C.**, 1962. On starlike and convex functions, *J.L. Math. Soc.*, **37**, 209-224.

[36] **Priwalow, I.I.**, 1965. Randeigenshaften analytisc her funktionen, Veb, Deutscher Verl. Wissensch, Berlin.

[37] **Robertson, M.S.**, 1936. On the theory of univalent functions, *Ann. of Math.*, **37**, 374-408.

[38] **Robertson, M.S.**, 1956. Radii of star-likeness and close-to-convexity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16**, 847-852.

[39] **Robertson, M.S.**, 1963. Some radius of convexity problems, *Michigan Math. J.*, **10**, 231-236.

[40] **Robertson, M.S.**, 1969. Univalent functions $f(z)$ for which $z.f^{'}(z)z.$ is λ -spirallike, *Michigan Math. J.*, **16**, 97-101.

[41] **Schlid, A.**, 1965. On starlike functions of order α , *Amer. J. Math.*, **87**, 65-70.

[42] **Schwerdtfeger, Hans,** 1979, Geometry of complex numbers, Dover Pub., New York.

[43] **Silvia, E.M.**, 1992. A brief overview of subclasses of spirallike functions in Current Topics in Analytic Function Theory, *World Scientific*, 328-336.

[44] **Singh, V. and Goel, R.M.**, 1971. On radii of convexity and starlikeness of some classes of functions, *J. Math. Soc.*, **23**, 323-339.

[45] **Sizuk, P.I.**, 1975. Regular functions $f^{'}(z)$ for which $z.f^{'}(z)$ is θ -spirallike shaped of order α , *Sibirsk. Math. Z.*, **16**, 1286-1290.

[46] **Spacek, L.**, 1933. Prispeek *k* teorii funki, *Prostych, Casopis Pest. Math. Fys.*, **62**, 12-19.

[47] **Uluçay, Cengiz,** 1978. Fonksiyonlar teorisi ve Riemann yüzeyleri, KTÜ yayınları.

[48] **Wiatrowski, P.**, 1971. The coefficients of certain family of holomorphic functions, *Zeszyty Nauk. Univ. Todzk. Nauki Math. Przyrod. Ser. II, Zeszyt Math*, **39**, 75-85.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Giresun/Görele'de doğdu. 1997 yılında Namık Kemal Lisesi, Fen-Matematik Bölümünü, 2001 yılında Süleyman Demirel Üniversitesi Senirkent MYO, Bilgisayar Donanım ve Programcılığı Bölümünü bitirdi. 2001-2003 yılları arasında Çamlıca Özel Erdil Lisesi'nde Bilgisayar Öğretmeni olarak görev yaptı. 2003 yılında Özel Asır Lisesi'nde Bilgisayar Öğretmeni olarak görev yaptı ve aynı yıl TC İstanbul Kültür Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümüne dikey geçiş yaptı ve 2006 yılında mezun oldu. 2006 yılında TC İstanbul Kültür Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans programına kaydoldu. TC İstanbul Kültür Üniversitesi'nde halen webmaster olarak çalışmalarını devam ettirmektedir.