İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LOG-HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLAR

DOKTORA TEZİ

Hatice Esra ÖZKAN

0509240001

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih	:	04 Haziran 2009
Tezin Savunulduğu Tarih	:	18 Haziran 2009

Tez Danışmanı:	Yrd. Doç. Dr. Yaşar POLATOĞLU
Diğer Jüri Üyeleri:	Prof. Dr. Çiğdem GENCER
	Yrd. Doç. Dr. Mert ÇAĞLAR
	Yrd. Doç. Dr. R. Tunç MISIRLIOĞLU (İ.Ü.)
	Yrd. Doç. Dr. Hakan Mete TAŞTAN (İ.Ü.)

HAZİRAN 2009

ÖNSÖZ

Lisans öğrenimimden bu yana yanımda olan değerli danışman hocam Yaşar POLATOĞLU'na tüm emeklerinden dolayı, ayrıca çalışma arkadaşım Emel YAVUZ DUMAN'a yardımlarından ötürü çok teşekkür ederim.
Doktora öğrenimime başladığım sene İstanbul Kültür Üniversitesi'nde çalışmaya başlayan ve geldiği günden beri her türlü problemimi çözüme kavuşturan Mert ÇAĞLAR hocama ve aynı süreçte kendisini tanıma fırsatı bulduğum Tunç MISIRLIOĞLU hocama desteklerinden dolayı teşekkür ederim.
Her bakımdan bana yaptığı katkılardan dolayı Çiğdem GENCER hocama teşekkürü bir borç bilirim.
Ve tabi ki ailem... Onlara her daim yanımda olduklarını hissettirdikleri için minnettarım.

Haziran 2009 H. Esra ÖZKAN

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

A, B	:	$-1 \leq B < A \leq 1$ koşulunu sağlayan sabitler
$B(x, r)$	:	x merkezli r yarıçaplı açık top
$\mathbb{C}$	:	Kompleks düzlem
$C(r, A, B)$	:	$\mathcal{S}^*(A, B)$ sınıfına ait fonksiyonlar için sınır
$\mathbb{D}$	:	Açık birim disk
$D(x, r)$	:	x merkezli r yarıçaplı kapalı top
D, D_1, D_2	:	Basit bağlantılı bölge
$f \prec g$	:	f'nin g ile sabordinasyonu
$H(D)$	:	D bölgesinde tanımlı, analitik fonksiyonların cümlesi
J_f	:	f fonksiyonunun Jakobiyeni
$k(z)$	:	Koebe fonksiyonu
$k_\theta(z)$	:	Koebe fonksiyonunun rotasyonu
K	:	Konveks fonksiyonlar sınıfı
K_H	:	Harmonik konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{P}$	:	Carathéodory sınıfı
$\mathcal{P}(A, B)$	:	Janowski pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{P}_{lh}$	:	Log-harmonik pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}$	:	Yalınkat fonksiyonlar sınıfı
$S(x, r)$	:	x merkezli r yarıçaplı küre
S^o	:	S cümlesinin içi
$\overline{S}$	:	S cümlesinin kapanışı
$\mathcal{S}^*$	:	Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}_H$	:	Harmonik fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}_{lh}$	:	Log-harmonik yalınkat fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}_H^*$	:	Harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}_{lh}^*$	:	Log-harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}^*(A, B)$	:	Janowski yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$	:	Analitik kısmı Janowski yıldızıl olan Janowski yıldızıl log-harmonik fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}^*_{lh}(\alpha)$	:	α. dereceden yıldızıl log-harmonik fonksiyonlar sınıfı
w	:	İkinci dilatasyon fonksiyonu
$Z(f)$	:	Verilen bölgede f fonksiyonunu sıfır yapan noktaların cümlesi
Δ	:	Laplace operatörü
Ω	:	Schwarz fonksiyonlarının sınıfı
ϕ	:	Schwarz fonksiyonu

Üniversitesi	**:**	**İstanbul Kültür Üniversitesi**
Enstitüsü	**:**	**Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı	**:**	**Matematik-Bilgisayar**
Programı	**:**	**Matematik**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Yaşar POLATOĞLU**
Tez Türü ve Tarihi	**:**	**Doktora - HAZİRAN 2009**

ÖZET

LOG-HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLAR

H. Esra ÖZKAN

Çalışmada öncelikle analitik ve harmonik fonksiyonlar teorisi ele alınmıştır. Ardından çalışma alanı olarak log-harmonik fonksiyonlar teorisi seçilmiştir. Log-harmonik fonksiyonlar analitik ve co-analitik olmak üzere iki fonksiyonun çarpımı şeklinde gösterilen ve genel anlamda logaritması harmonik olan fonksiyonlardır. Tez çalışması için log-harmonik fonksiyonların bir alt sınıfı olan $\mathcal{S}_{lh}^{*}(A,B)$ sınıfı tanımlanmış ve çalışmalar bu sınıf üzerinden sürdürülmüştür. Bu sınıfa ait fonksiyonların özelliği analitik kısmının Janowski yıldızıl fonksiyon olmasıdır. Benzer şekilde analitik kısmı diğer bir analitik fonksiyon sınıfına ait olması koşulu altında yeni sonuçlar elde etmek de mümkün olmaktadır. Çalışmada sınıfa ait fonksiyonların yanı sıra analitik ve co-analitik kısımlara dair distorsiyonlar elde edilmiştir. Sınıf için Marx-Strohhacker Eşitsizliği elde edilmiş ve yıldızıllık yarıçapı bulunmuştur. Log-harmonik fonksiyonlar için jakobiyen fonksiyonu verilip, bu fonksiyon için distorsiyon elde edilmiştir. Ayrıca log-harmonik fonksiyonlar için bir katsayı eşitsizliği elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler : **Log-harmonik yalınkat fonksiyon, Yıldızıllık yarıçapı, Distorsiyon, Janowski yıldızıl fonksiyon, Marx-Strohhacker eşitsizliği**

Bilim Dalı Sayısal Kodu : **0924**

University	**:**	**İstanbul Kültür University**
Institute	**:**	**Institute of Science**
Science Programme	**:**	**Mathematics and Computer**
Programme	**:**	**Mathematics**
Supervisor	**:**	**Asist. Prof. Dr. Yaşar POLATOĞLU**
Degree Awarded and Date	**:**	**Ph.D. - JUNE 2009**

SUMMARY

LOG-HARMONIC UNIVALENT FUNCTIONS

H. Esra ÖZKAN

In the thesis, the theory of analytic and harmonic functions are taken up first. Then the so-called log-harmonic functions are studied. Log-harmonic functions are basically those complex mappings having a harmonic logarithm, and they are represented as a multiplication of an analytic and a co-analytic function. The subclass $\mathcal{S}^*_{lh}(A, B)$ of log-harmonic functions is introduced and studied. This is the subclass consisting of log-harmonic functions whose analytic part is a Janowski starlike. It should be noted that it is also possible to obtain new results provided that the analytic part of a log-harmonic function belongs to a well-known class of analytic functions. Distortion theorems for the functions in $\mathcal{S}^*_{lh}(A, B)$, as well as for their analytic and co-analytic parts, are obtained.Marx-Strohhacker inequality and the radius of starlikeness for the class $\mathcal{S}^*_{lh}(A, B)$ are derived. The Jacobian function and its distortion for the members of $\mathcal{S}^*_{lh}(A, B)$ are obtained.

Lastly, a coefficient inequality is also obtained for the class $\mathcal{S}^*_{lh}(A, B)$.

Keywords	**:**	**Log-harmonic univalent function, Radius of starlikeness, Distortion, Janowski starlike function, Marx-Strohhacker inequality**
Science Code	**:**	**0924**

Bölüm 1

GİRİŞ

Birim diskte analitik ve yalınkat olan tek kompleks değişkenli fonksiyonlar ilk olarak 1907 yılında Koebe tarafından incelenmiştir. Daha sonra birtakım matematikçiler bu fonksiyonları sınıflandırarak incelemişlerdir. Tek kompleks değişkenli analitik fonksiyonlarla ilgili temel problemler; bu fonksiyonlara ait Taylor açılımındaki a_n katsayısının modülünün üst sınırını bulmak, fonksiyon sınıfına ait distorsiyon teoremlerini araştırmak, sınıfa ait karakterizasyonu vermek, yarıçap belirlemek, resim bölgelerinin özelliklerini incelemek ve Koebe bölgelerini ifade etmektir.

Harmonik fonksiyonlar ise reel ve sanal kısımlarının eşlenik olması gerekmeyen kompleks değerli fonksiyonlardır. Diğer bir deyişle Cauchy-Riemann denklemlerini her zaman sağlamayan dolayısıyla her zaman analitik olmayan fonksiyonlardır. 1980 li yılların ortalarında harmonik fonksiyonlar teorisi bir çok matematikçi tarafından incelenmeye başlamıştır. 1984 yılında Clunie ve Terry Sheil-Small ([7]) tarafından yayınlanan ve teoride dönüm noktası olan makalede, konform fonksiyonlar için bilinen sonuçların harmonik fonksiyonlar için analogları ortaya konulmuştur. Bu çalışmanın sonrasında harmonik fonksiyonlar teorisi gelişme sürecine girmiştir.

Harmonik fonksiyonlar teorisi üzerine yapılan çalışmalar devam ederken, bunlara paralel olarak log-harmonik fonksiyonlar teorisi ortaya atılmıştır ve bu alan üzerine çalışmalara başlanmıştır. Bu kez de harmonik fonksiyonlar üzerine yapılan araştırmaların analogları log-harmonik fonksiyonlar için verilmeye çalışılmıştır. Bu alandaki çalışmalar 1984 yılında Z. Abdulhadi ile başlamış ve teoriyi açıklayan ilk yayın 1988 yılında olmuştur ([3]). Bu yayında $H.\overline{H}(D)$ ve $F(w, D)$ şeklinde iki sınıf tanımlanmıştır. Yayında bu iki sınıf arasında bağlantılar kurularak log-harmonik ve yalınkat log-harmonik fonksiyonların tanımları verilmiştir. Ardından yapılan çalışmalarda ise log-harmonik fonksiyonlara ait sınıflar tanımlanmış, bunlarla analitik fonksiyon sınıfları arasındaki ilişkilere yer verilmiştir. Kurulan bu bağlantılar ile log-harmonik fonksiyonlara dair distorsiyon teoremleri elde edilmiştir.

Bu bilgiler doğrultusunda bizim hazırladığımız tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde, analitik fonksiyonlar ve bunların tanım bölgelerine dair tanımlara ve analitik fonksiyonlarla ilgili kullanılacak temel kavramlara yer verilmektedir.

Üçüncü bölümde, harmonik ve log-harmonik fonksiyonlara dair tanım ve kavramlar ele alınmaktadır. Log-harmonik fonksiyonlarla ilgili yaptığımız çalışmaya kadar incelediğimiz makalelerdeki önemli kısımlar verilmektedir.

Dördüncü bölümde ise, yapılan orjinal çalışmaya yer verilmektedir. Çalışmada log-harmonik fonksiyonlara dair $\mathcal{S}^*_{lh}(A, B)$ alt sınıfı tanımlandı ve incelemeler bu sınıf üzerinden yapıldı. Bu sınıfa ait log-harmonik fonksiyonların analitik kısmı Janowski yıldızıl fonksiyon olmaktadır. Bu varsayım altında bir log-harmonik fonksiyonun artık analitik kısmının diğer analitik fonksiyon sınıflarından birine ait olmasıyla yeni sonuçlar elde edilmesi mümkündür. Bu tanımlamanın ardından $\mathcal{S}^*_{lh}(A, B)$ sınıfındaki fonksiyonlara, fonksiyonların analitik ve co-analitik kısımlarına dair distorsiyonlar ve bu sınıf için Marx-Strohhacker Eşitsizliği elde edilmiştir. Ayrıca sınıfa ait fonksiyonlar için yıldızıllık yarıçapı belirlenip, jakobiyen fonksiyonuna dair sınırlar elde edilmiştir. Çalışmanın sonunda da $\mathcal{S}^*_{lh}(A, B)$ sınıfına ait fonksiyonlar için bir katsayı eşitsizliği elde edilmiştir.

Beşinci bölümde de sonuç yer almaktadır.

Bölüm 2

ANALİTİK FONKSİYONLAR TEORİSİ

2.1 Analitik Fonksiyonlar ve Tanım Bölgeleri

Analitik fonksiyonların tanım bölgelerinden bahsetmek için öncelikle bazı eleman-ter topolojik kavramları vermek gerekmektedir.

Tanım 2.1.1. *([22])X boştan farklı bir cümle ve $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ şeklinde bir fonksiyon olsun. ρ fonksiyonu aşağıdaki üç özelliği gerçekliyorsa, ρ ya X cümlesi üzerinde bir metrik denir.*
(i) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (\forall x, y \in X)$
(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad (\forall x, y \in X)$
(iii) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad (\forall x, y, z \in X)$

Bu durumda (X, ρ) çiftine bir *metrik uzay* adı verilir.

Tanım 2.1.2. *([22])(X, ρ) bir metrik uzay olsun. $B(x, r) = \{y \in X| \quad \rho(x, y) < r\}$ cümlesine x merkezli, r yarıçaplı açık top ya da x in r topu adı verilir.*
$D(x, r) = \{y \in X| \quad \rho(x, y) \leq r\}$ cümlesine x merkezli disk/ kapalı top ya da x in $r-$ kapalı topu adı verilir.
$S(x, r) = \{y \in X| \quad \rho(x, y) = r\}$ cümlesine x merkezli r yarıçaplı küre adı verilir.

Tanım 2.1.3. *([22])(X, ρ) bir metrik uzay olsun ve $x \in X$ olarak alınsın. x merkezli bir açık topa x noktasının bir komşuluğu denir.*

Tanım 2.1.4. *([22])(X, ρ) bir metrik uzay ve $S \subset X$ olsun. Bir $x \in X$ için $B(x, r) \subset S$ olacak şekilde bir $r > 0$ bulunabiliyorsa, x noktasına S cümlesinin* *bir iç noktası adı verilir.*

Tanımdan dolayı bir iç nokta cümleye aittir. $S \subset X$ cümlesinin tüm iç noktalarının kümesine S nin içi denir ve S^o olarak gösterilir. Bu cümle S nin içerdiği en geniş açık cümledir.

Tanım 2.1.5. *([22])(X, ρ) bir metrik uzay ve $S \subset X$ olsun. $S^o = S$ ise, S ye açık cümle adı verilir.*

Tanım 2.1.6. *([22]) (X, ρ) bir metrik uzay ve $S \subset X$ olsun. X uzayına ait bir x noktası için, x noktasının her $B(x, r)$ komşuluğunda $x \neq y$, $y \in B(x, r)$ olacak şekilde, S cümlesinin en az bir y elemanı bulunuyorsa, x noktasına S cümlesinin bir yığılma noktası veya limit noktası denir.*

Tanım 2.1.7. *([22])(X, ρ) bir metrik uzay ve $S \subset X$ olsun. S cümlesinin her yığılma noktası S nin bir noktası ise yani S cümlesi tüm yığılma noktalarını içinde bulunduruyorsa S ye kapalı cümle denir.*
Bir cümlenin kapanışı, cümleyi içeren en küçük kapalı cümledir ve $\overline{S}$ ile gösterilir.

Verilen tanımlar altında S nin *sınırı* ise, $\partial S = \overline{S} - S^\circ$ şeklinde, S nin içinde olmayıp kapanışında olan tüm noktaları içeren cümledir.

Tanım 2.1.8. ***(Bağlantılılık)*** *X bir metrik uzay ve A bu uzayın bir alt cümlesi olsun. A cümlesi, boştan farklı, ayrık, iki açık alt cümlenin birleşimi olarak gösterilemiyorsa, A cümlesine bağlantılıdır denir. Yani, $B \cap C = \emptyset$ olmak üzere $A = B \cup C$ olacak şekilde $B, C \subset A$ açık cümleleri bulunamıyorsa, A ya bağlantılıdır denir.*

Tanım 2.1.9. *Boştan farklı, açık, bağlantılı bir cümleye bölge denir.*

Tanım 2.1.10. *Sonsuz noktasının düzleme katılmasıyla elde edilen düzleme genişletilmiş düzlem denir.*

Tanım 2.1.11. *Bir bölgenin tümleyeni genişletilmiş düzleme göre bağlantılı ise, bu bölgeye basit bağlantılı bölge denir.*

Tanım 2.1.12. *([9])Başlangıç ve bitim noktaları farklı olan ve kendi kendini kesmeyen bir eğriye basit bağlantılı açık eğri denir .*

Şekil 2.1: Basit bağlantılı açık eğri

Tanım 2.1.13. *Başlangıç ve bitim noktaları farklı olan ve kendi kendini kesen bir eğriye çok bağlantılı açık eğri adı verilir.*

Şekil 2.2: Çok bağlantılı açık eğri

Tanım 2.1.14. *Başlangıç ve bitim noktaları aynı olan ve kendi kendini kesmeyen bir eğriye basit bağlantılı kapalı eğri adı verilir. Bu eğrinin kapattığı bölgeye basit bağlantılı kapalı bölge denir.*

Şekil 2.3: Basit bağlantılı kapalı eğri

Tanım 2.1.15. *Başlangıç ve bitim noktaları aynı olan ve kendi kendini kesen bir eğriye çok bağlantılı kapalı eğri adı verilir. Bu eğrinin kapattığı bölgeye de çok bağlantılı kapalı bölge denir.*

Şekil 2.4: Çok bağlantılı kapalı eğri

Buradan itibaren D, D_1, D_2 notasyonları ile belirttiğimiz tüm bölgeler basit bağlantılı bölgeyi işaret edecektir.

Tanım 2.1.16. *([11])D, $\mathbb{C}$ içinde bir bölge olsun. D bölgesinde sabit bir w_0 noktasından çıkan her doğru parçası bölgenin sınırını tek bir noktada kesiyorsa, D ye w_0 noktasına göre yıldızıl bölge denir.*

Şekil 2.5: w_0 noktasına göre yıldızıl bölge

w_0 noktası özel olarak orjin seçilirse, bu kez bölgeye *orjine göre yıldızıl bölge* adı verilir.

Tanım 2.1.17. *([12])D, $\mathbb{C}$ içinde bir bölge olsun. Her $w_1, w_2 \in D$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D içinde kalıyorsa D ye konveks bölge denir. D nin konveks olması için gerek ve yeter şart her noktasına göre yıldızıl olmasıdır.*

Tanım 2.1.18. *([5],[9])Kompleks düzlemdeki bir yay, bir doğru parçasının sürekli resmidir ve $z = z(t)$ fonksiyonu şeklinde $a \leq t \leq b$ aralığının $\mathbb{C}$ içine sürekli bir tasviri olarak ifade edilebilir. $z = z(t)$ şeklinde gösterilen bir yayın uzunluğu;*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |z'(u)|du, \quad t_0, t \in [a, b]$$

ifadesiyle tanımlanmaktadır. Eğer bu ifade sonlu ise yaya rektifiye edilebilir denir. Diferansiyellenebilir yaylar rektifiye edilebilirdir.

Bir *Jordan yayı* kendi kendini kesmeyen bir yaydır.
Kapalı eğri, bir çemberin veya başlangıç ve bitim noktaları aynı olan bir yayın sürekli resmidir.
Jordan eğrisi basit bağlantılı kapalı bir eğridir. Her Jordan eğrisi, düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı diye iki bölgeye ayırır. Bir Jordan eğrisinin içine *Jordan bölgesi* denir.

2.2 Yalınkat Fonksiyonlar

Tanım 2.2.1. *([9]) Kompleks değerli bir f fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

türevine sahipse diferansiyellenebilirdir. Aynı f fonksiyonu z_0 noktasının komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilir ise z_0 noktasında analitiktir.

Kompleks değerli f fonksiyonu bir bölgenin her z_0 noktasında tanımlı ve türevi varsa, bölgede *analitiktir.* $f = u + iv$ fonksiyonu analitik olduğunda reel ve sanal kısımları Cauchy Riemann Denklemleri'ni sağlamaktadır, yani

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

şeklindeki eşitlikler gerçeklenmektedir.
f fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilir ise her mertebeden türeve sahiptir ve z_0 merkezli açık diskte yakınsak olan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$$

şeklinde Taylor Serisi'ne sahip olur.

Lemma 2.2.2. *([9])f fonksiyonu birim disk $\mathbb{D}$ de analitik, $f(0) = 0$ ve $|f(z)| < 1$ olsun. Bu halde $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ eşitsizlikleri gerçeklenir.*

Bir eşitsizlikte eşitliği veren fonksiyona *ekstremal fonksiyon* denir. Analitik fonksiyonlar teorisinde basit bağlantılı bölgeler için ekstremal problemlerin çözümünde Schwarz Lemma'sı kullanılmaktadır.

Tanım 2.2.3. *Bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesindeki her $z_1, z_2 \in D$ için $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ (1-1) lik koşulu gerçekleniyorsa f fonksiyonuna yalınkat fonksiyon denir.*

Tanım 2.2.4. *f fonksiyonu bir z_0 noktasının komşuluğunda yalınkat ise yerel yalınkat fonksiyon adını alır.*
Bu koşul analitik bir f fonksiyonu için $f'(z_0) \neq 0$ olmasına denktir. Yani, f fonksiyonu, z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise z_0 noktasının komşuluğunda yalınkattır.
Tersine; f fonksiyonu z_0 noktasında yerel yalınkat ise, $f'(z_0) \neq 0$ dır.
$|f'(z)|^2$ ifadesine de f fonksiyonunun Jakobiyeni denir. Analitik fonksiyonlar için jakobiyenin sıfırdan farklı olması için gerek ve yeter şart yerel yalınkat olmasıdır.

Tanım 2.2.5. *İki diferansiyellenebilir yay arasındaki açıyı koruyan tasvire konform fonksiyon denir. f fonksiyonu bir z_0 noktasının komşuluğunda $f'(z_0) \neq 0$*

olacak şekilde regüler bir fonksiyon olsun. $x_1 = x_1(t)$, $y_1 = y_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $y_2 = y_2(t)$, $0 \leq t \leq 1$ *olmak üzere,* $z = z_0$ *noktasında* α *açısıyla kesişen iki yay olsun. Kompleks notasyonda bu yaylar sırasıyla;* $C_1 : z_1(t)$, $C_2 : z_2(t)$ *şeklinde ifade edilirler.* z_1 *ve* z_2 *de bu eğriler üzerinde* z_0 *noktasından* r *uzaklığındaki noktalar ise;*

$$z_1 - z_0 = re^{i\theta_1}, \quad z_2 - z_0 = re^{i\theta_2}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitliklerin oranından

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = e^{\theta_2 - \theta_1} i$$

eşitliği yazılabilir. $r \longrightarrow 0$ *için bu ifade* α *açısına yaklaşır.*

$$\alpha = \lim_{r \to 0} \arg \left\{ \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \right\} \tag{2.1}$$

Burada α*, başlangıcı* $z_1 = z_1(t)$*, bitişi* $z_2 = z_2(t)$ *olan yaya kadar olan açının ölçüsüdür.* w_1 *ve* w_2 *noktaları da sırasıyla* z_1 *ve* z_2 *noktalarının görüntüleri ise, bu kez görüntü eğrileri* $C_1' : w_1(t)$ *ve* $C_2' : w_2(t)$, $w_0 = f(z_0)$ *noktasında*

$$\beta = \lim_{r \to 0} \arg \left\{ \frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0} \right\} \tag{2.2}$$

açısı ile kesişirler. Buradan

$$\beta = \lim_{r \to 0} \arg \left\{ \frac{f(z_2) - f(z_0)}{f(z_1) - f(z_0)} \right\} = \lim_{r \to 0} \arg \left\{ \frac{\frac{f(z_2) - f(z_0)}{z_2 - z_0}}{\frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0}} . \left\{ \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \right\} \right\}$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca

$$\lim_{r \to 0} \frac{f(z_2) - f(z_0)}{z_2 - z_0} = \lim_{r \to 0} \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} = f'(z_0)$$

dır. Eğer $f'(z_0) \neq 0$ *ise*

$$\beta = \lim_{r \to 0} \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \alpha$$

olduğu açıkça görülür. Böylelikle $z = z_0$ *noktasında iki yay arasındaki açının* $w_0 = f(z_0)$ *noktasındaki görüntüleri arasındaki açı ile özdeş olduğu elde edilir.*

Şekil 2.6: Konform fonksiyon

Teorem 2.2.6. *([5]) f fonksiyonu analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulunu sağlıyorsa, $w = f(z)$ transformasyonu konformdur.*

Her Möbious transformasyonu; a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

genişletilmiş kompleks düzlemi kendi üzerine resmeden konform bir fonksiyonu gösterir.

Teorem 2.2.7. *([9])(Riemann Gönderim Teoremi)D, $z-$düzleminde basit bağlantılı bir bölge olmak üzere $z_0 \in D$ için $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ özelliklerini sağlayan ve D bölgesini açık birim disk üzerine konform olarak resmeden, D bölgesinde analitik ve yalınkat bir f fonksiyonu tek türlü belirli şekilde vardır.*

Riemann Gönderim Teoremi olarak bilinen bu teorem tam olarak anlaşılmamış olduğundan yirminci yüzyılın başlarına kadar pek fazla uygulama alanı bulamamıştır. 1907 yılında ise analitik ve yalınkat fonksiyonlar için Riemann Gönderim Teoremi'nin ispatı verilmiştir ([9], [11]).
Yalınkat fonksiyonların tanım bölgesi D yerine $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| < 1\}$ açık birim diski ve ayrıca $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ normalizasyonları yerine $f(0) = 0$, $f'(0) > 1$ şartlarını kullanarak normalize edilen birim diskte yalınkat olan fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}$ ile gösterilmektedir. Bu sınıfa ait fonksiyonların Taylor açılımı

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, z \in \mathbb{D} \tag{2.3}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Yalınkat fonksiyonlar teorisi $\mathcal{S}$ sınıfı üzerine kurulmuştur. $\mathcal{S}$ sınıfının önemli bir örneği;

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + ...$$

şeklinde verilen Koebe fonksiyonudur. Bu fonksiyon aynı zamanda

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right] \tag{2.4}$$

şeklinde de gösterilmektedir. Bu fonksiyon ve rotasyonları $\mathcal{S}$ sınıfı içindeki birçok

Şekil 2.7: Koebe fonksiyonunun resim bölgesi

ekstremal problemin çözümüdür ve $\mathbb{D}$ açık birim diskini yatay eksenden $-\infty$ dan $-1/4$ e kadar olan şeridin çıkarılmasıyla oluşan bölge üzerine resmeder ([12]).

- Koebe fonksiyonunun birtakım rotasyonları aşağıdaki biçimde olmaktadır ([12]):

  (1) Koebe fonksiyonunun $k_\theta(z) = z/(1-e^{i\theta}z)^2, \quad z \in \mathbb{D}$ şeklindeki rotasyonu her $\theta \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{S}$ sınıfına aittir. Bu fonksiyon altında birim diskin görüntüsü yatay eksen üzerinden $-\infty$ dan $e^{-i\theta/4}$ e kadar olan şeridin çıkarılmasıyla elde edilen kompleks düzlemdir.

  (2) $f(z) = \frac{1}{2\alpha}((\frac{1+z}{1-z})^\alpha - 1), z \in \mathbb{D}, 0 < \alpha \leq 2$ fonksiyonuna genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu denir ve bu fonksiyon $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

  (3) $f(z) = z/1 - z^2$, fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskini, kompleks düzlemden $1/2 \leq x < \infty$ ve $-\infty < x \leq -1/2$ yarı doğrularının çıkarılmasıyla elde edilen düzlem üzerine resmeder.

  (4) $f(z) = z/1 - z$ bir Möbious transformasyonudur ve birim disk $\mathbb{D}$ yi $\mathrm{Re}w > -1/2$ yarı düzlemi üzerine resmeder.

Şekil 2.8: $\mathbb{D}$ birim diskinin $\frac{z}{1-z}$ transformasyonu altındaki resim bölgesi

Teorem 2.2.8. ***(Koebe Teoremi)*** $\{w|\,|w| \leq c\} \subset \bigcap_{f \in \mathcal{S}} f(\mathbb{D})$ *olacak şekilde bir pozitif* c *sabiti vardır.*

1916 yılında Bieberbach tarafından $c = 1/4$ olduğu bulunmasıyla, $\mathbb{D}$ açık birim diskinin herhangi bir $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu ile $|w| < 1/4$ açık diskini örteceği sonucu elde edilmiştir.

Teorem 2.2.9. ***(Bieberbach Teoremi)*** $f \in \mathcal{S}$, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *şeklinde Taylor Açılımı'na sahip bir fonksiyon ise, her* $n \geq 2$ *için* $|a_n| \leq n$ *sağlanır.* k *ile gösterilen bütün Koebe fonksiyonları ve bunların rotasyonları için* $|a_n| = n (n \in \mathbb{N})$ *eşitliği gerçeklenir ([9]). Bu teorem 1984 yılında De Branges tarafından ispatlanmıştır ([8]).*

- $\mathcal{S}$ sınıfındaki fonksiyonlara dair birkaç örnek de aşağıdaki şekilde verilebilir ([12]):

  (1) $f(z) = z$ birim fonksiyondur.

  (2) $f(z) = z/1 - z$ fonksiyonu, $\mathbb{D}$ birim diskini konform olarak sağ yarı düzleme resmeden fonksiyondur. Normalize edilebildiğinden $\mathcal{S}$ sınıfındadır ve $\mathcal{S}$ nin alt sınıfları için birçok problem içinde ekstremal fonksiyon rolü oynar.

  (3) $f(z) = z/1 - z^2$ fonksiyonu, $\mathbb{D}$ birim diskini kompleks düzlemden $1/2 \leq x < \infty$ ve $-\infty < x \leq -1/2$ yarı doğrularının çıkarılmasıyla elde edilen düzlem üzerine resmeder.

  (4) $f(z) = z - \dfrac{1}{2}z^2 = \dfrac{1}{2}\left[1 - (1-z)^2\right]$ fonksiyonu, $\mathbb{D}$ diskini bir kardioidin üzerine resmeder.

- $\mathcal{S}$ içindeki iki fonksiyonun toplamı yalınkat değildir. Örneğin; $\dfrac{z}{1-z}$ ve $\dfrac{z}{1+iz}$ fonksiyonlarının toplamı $\dfrac{1}{2}(1+i)$ noktasında sıfırlanan bir türeve sahiptir.

- $\mathcal{S}$ sınıfı elemanter transformasyonlar altında korunurlar. Bunlara dair birkaç örnek aşağıdaki şekilde verilebilir ([9]):

  (1)Eşlenik: $f \in \mathcal{S}$ ve $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a_2}z^2 + \overline{a_3}z^3 + \ldots$ ise $g \in \mathcal{S}$ dir.

  (2)Dönme: $f \in \mathcal{S}$ ve $g(z) = e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$ ise $g \in \mathcal{S}$ dir.

  (3)Dilatasyon: $f \in \mathcal{S}$ ve $g(z) = \dfrac{1}{r}f(rz)$, $(0 < r < 1)$ ise $g \in \mathcal{S}$ dir.

  (4)Disk otomorfizması: $f \in \mathcal{S}$ ve

  $$g(z) = \frac{f(\frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}}) - f(\alpha)}{(1-|\alpha|^2)f'(\alpha)}, \quad |\alpha| < 1$$

  ise $g \in \mathcal{S}$ dir.

  (5)Değer bölgesi transformasyonu: $f \in \mathcal{S}$ ve ξ, f nin değer bölgesinde $\xi(0) = 0, \xi'(0) = 1$ olacak şekilde analitik ve yalınkat bir fonksiyon ise $g = \xi \circ f \in \mathcal{S}$ dir.

  (6)Alınmamış değer transformasyonu: $f \in \mathcal{S}$ ve $f(z) \neq u$ ise $g = uf/(u - f) \in \mathcal{S}$ dir.

Tanım 2.2.10. *$\mathcal{P}$, $\mathbb{D}$ birim diski içinde analitik, $p(0) = 1, Re(p(z)) > 0(z \in \mathbb{D})$ koşullarını sağlayan $p(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$ şeklindeki regüler fonksiyonların sınıfıdır. Bu sınıfa Carathéodory sınıfı da denilmektedir.*

Örneğin; $p(z) = (1+z)/(1-z), z \in \mathbb{D}$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfındadır. $p(z)$, $\mathbb{D}$ birim diskinin sağ yarı düzlem üzerine konform bir tasviridir ve $\mathcal{P}$ sınıfı içinde önemli bir rol oynamaktadır.

Lemma 2.2.11. *([12])Schwarz fonksiyonlarının sınıfını Ω ile gösterelim. ϕ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de tanımlı fonksiyon olmak üzere, $\phi \in \Omega$ olması için gerek ve yeter şart, $\phi(z)$; $\mathbb{D}$ de analitik, $\phi(0) = 0$ ve $|\phi(z)| < 1$ $(z \in \mathbb{D})$ olmasıdır.*

Sonuç 2.2.12. *([20])$p(z) = 1 + c_1 z + \ldots \in \mathcal{P}$ ise $|c_n| \leq 2$, $n = 1, 2, \ldots$ dir. Eşitliğin gerçeklenmesi için gerek ve yeter şart, α, $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n \geq 0$ için $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \ldots + \psi_n = 1$ olmak üzere*

$$p(z) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \frac{e^{i\alpha + 2\pi ik/n} + z}{e^{i\alpha + 2\pi ik/n} + z}$$

olmasıdır.

$\mathcal{P}$ ve Ω sınıfları arasındaki bağıntı şu şekilde verilmektedir:

$$p(z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow p(z) = \frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)}, \quad \phi(z) \in \Omega.$$

Tanım 2.2.13. *$f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları $\mathbb{D}$ bölgesinde analitik fonksiyonlar olsun. $f(z)$ fonksiyonunun $g(z)$ fonksiyonuna subordine olması $f(z) = g(\phi(z))$ olacak şekilde bir $\phi(z) \in \Omega$ bulunabilmesi ile gerçeklenir ve bu sabordinasyon $f(z) \prec g(z)$ ile gösterilir.*

Şekil 2.9: f fonksiyonunun g fonksiyonu ile sabordinasyonu

Lemma 2.2.14. *$f \prec g$ ise $f(0) = g(0)$ ve $f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$ dir.*

Teorem 2.2.15. *$f \prec g$ olsun. Bu halde $|f'(0)| \leq |g'(0)|$ eşitsizliği gerçeklenir.*

Lemma 2.2.16. *g fonksiyonu $\mathbb{D}$ üzerinde yalınkat ise $f \prec g$ olması için gerek ve yeter şart $f(0) = g(0)$ ve $f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$ olmasıdır.*

$\mathcal{S}$ sınıfının iki önemli alt sınıfını aşağıdaki şekilde verebiliriz:

Tanım 2.2.17. *([20])$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ bölgesinde yalınkat ve $F = f(\mathbb{D})$ görüntü bölgesi orjine göre yıldızıl bölge ise, yani analitik olarak; $u \in F$ için, $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere, $tu \in F$ ise f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. Yıldızıl fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilmektedir.*

Teorem 2.2.18. *([20])$f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik, $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ olsun. Bu halde*

$$f(z) \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow z\frac{f'(z)}{f(z)} \in \mathcal{P}$$

gerçeklenir

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f, \mathbb{D} \quad de\ analitik \quad | f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, Re(z\frac{f'(z)}{f(z)}) > 0 \right\}. \tag{2.5}$$

Tanım 2.2.19. *([20])$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + ...$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ bölgesinde yalınkat ve $F = f(\mathbb{D})$ tasvir bölgesi konveks bölge ise, yani analitik olarak; $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere her $u_1, u_2 \in F$ için $tu_1 + (1-t)u_2 \in F$ koşulu gerçekleniyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Konveks fonksiyonlar sınıfı ise $\mathcal{K}$ ile gösterilmektedir.*

Teorem 2.2.20. *([20])$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + ... + a_nz^n + ...$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ bölgesinde konveks fonksiyon ise her $n = 2, 3, ...$ için $|a_n| \leq 1$ dir. $|a_n| = 1$ eşitliğinin gerçeklenmesi $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$ için $f(z) = \dfrac{z}{1-\lambda z}$ şeklinde olması ile mümkündür.*

Teorem 2.2.21. *([20])$f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik, $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ olsun. Bu halde*

$$f(z) \in \mathcal{K} \Leftrightarrow 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P}$$

gerçeklenir

$$\mathcal{K} = \left\{ f, \mathbb{D} \quad de\ analitik \quad | f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, Re(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}) > 0 \right\}. \tag{2.6}$$

Tanım 2.2.22. *([14]) $-1 \leq B < A \leq 1$ olmak üzere $\mathcal{P}(A, B)$, $p(z) = 1 + p_1z + ...$ şeklinde $\mathbb{D}$ de regüler fonksiyonların sınıfıdır ve*

$$p(z) \in \mathcal{P}(A, B) \Leftrightarrow p(z) = \frac{1 + A\phi(z)}{1 + B\phi(z)}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad \phi(z) \in \Omega$$

bağıntısı gerçeklenmektedir.

Teorem 2.2.23. *([6])$p(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + ... + p_nz^n + ... \in \mathcal{P}(A, B)$ ise her $n = 1, 2, 3, ...$ için $|p_n| \leq A - B$ dir.*

Tanım 2.2.24. *([14])$f(z) = z + a_2z^2 + ...$ şeklinde Taylor açılımına sahip olan, $\mathbb{D}$ de regüler ve*

$$f(z) \in \mathcal{S}^*(A, B) \Leftrightarrow z\frac{f'(z)}{f(z)} = p(z), \quad p(z) \in \mathcal{P}(A, B), \quad z \in \mathbb{D}$$

bağıntısını gerçekleyen fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*(A, B)$ ile gösterilmektedir.

Teorem 2.2.25. *([19])*$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + ... + a_nz^n + ... \in \mathcal{S}^*(A, B)$ *ise her* $n = 2, 3, ...$ *için*

$$|a_n| \leq \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-2} \frac{|(A-B)+kB|}{k+1}, & B \neq 0; \\ \prod_{k=0}^{n-2} \frac{|A|}{k+1}, & B = 0. \end{cases}$$

eşitsizlikleri vardır.

Lemma 2.2.26. *([14])*$p(z) \in \mathcal{P}(A, B)$ *fonksiyonu,* $\mathbb{D}$ *birim diskini, merkezi* $C(r) = (\frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}, 0)$*, yarıçapı* $\rho(r) = \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}$ *olan kapalı diske resmeder.*

Teorem 2.2.27. *([14])*$f(z) \in \mathcal{S}^*(A, B)$ *ise* $|z| = r$*,* $0 \leq r < 1$ *için*

$$C(r; A, B) = \begin{cases} r(1 + Br)^{\frac{(A-B)}{B}}, & B \neq 0; \\ re^{Ar}, & B = 0; \end{cases}$$

olmak üzere

$$C(r; -A, -B) \leq |f(z)| \leq C(r; A, B)$$

distorsiyonu vardır.

Bölüm 3

LOG-HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLAR TEORİSİ

3.1 Harmonik Fonksiyonlar

Reel değerli, ikinci kısmi türevlere sahip, sürekli bir $u(x, y)$ fonksiyonu Laplace diferansiyel denklemi olarak adlandırılan

$$\Delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ifadesini gerçeklerse *harmonik fonksiyon* olarak adlandırılır. Bir D bölgesinde tanımlı, sürekli ve kompleks değerli $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonunun harmonik fonksiyon olması için, D üzerinde u ve v nin reel değerli harmonik fonksiyonlar olması gerekir. Yani, $\Delta(u) = u_{xx} + u_{yy} = 0$ ve $\Delta(v) = v_{xx} + v_{yy} = 0$ Laplace denklemleri'nin sağlanması gerekir. $f = u + iv$ fonksiyonunun sürekli kısmi türevleri var ise *analitiktir*. Analitiklik için gerek ve yeter şart, $u_x = v_y$ ve $u_y = -v_x$ olarak tanımlanan Cauchy Riemann Denklemleri'nin sağlanmasıdır. Dolayısıyla, her analitik fonksiyon kompleks değerli bir harmonik fonksiyondur. Bunu aşağıdaki şekilde ispatlayabiliriz:

$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde tanımlanmış ve analitik olsun. $f(z)$ fonksiyonundaki reel değişkenli fonksiyonlar harmoniktir. Gerçekten; $f(z)$ fonksiyonu verilen bölgede analitik olduğundan Cauchy

Riemann Denklemleri'ni gerçekler. Buna göre;

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \tag{3.1}$$

eşitlikleri yazılabilir. Schwarz eşitliği

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

(3.1) eşitliklerinde kullanlırsa,

$$\Delta(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \Delta(v)=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

elde edilir. Böylece $u=u(x,y), v=v(x,y)$ fonksiyonlarının D bölgesinde harmonik olduğu söylenebilir. Bununla beraber her kompleks değerli harmonik fonksiyon analitik değildir.

Cauchy Riemann Denklemleri'ni gerçekleyen bir (u,v) fonksiyon çifti *eşlenik çift* olarak adlandırılır ve v ye u nun *harmonik eşleniği* denir. Dolayısıyla $-u$ da v nin harmonik eşleniği olur.

Herhangi iki analitik fonksiyonun çarpımı ve bileşkesi yine analitiktir. Fakat iki harmonik fonksiyonun bileşkesi harmonik olmayabilir.

Harmonik bir fonksiyonun tersi harmonik olmak zorunda değildir.

$f=u+iv$ basit bağlantılı $\mathbb{D}$ bölgesinde harmonik ve $f(0)=0$ olsun. $F(0)=G(0)=0, ReF=Ref=u, ReG=imf=v$ olacak şekilde $\mathbb{D}$ bölgesinde analitik F ve G fonksiyonları tanımlansın. Ayrıca $h=(F+iG)/2$ ve $g=(F-iG)/2$ olsun. Bu durumda $f=h+\overline{g}$ şeklinde olur ve h,g fonksiyonları $\mathbb{D}$ bölgesinde analitiktirler. Gerçekten, $Ref=ReF=u$ ve $imf=ReG=v$ kabulü altında $F=u+m$ ve $G=v+in$ olarak alınabilir. Buna göre $h=(F+iG)/2$ ve $g=(F-iG)/2$ olarak yazılırsa

$$h=\frac{(u-n)+i(v+m)}{2}$$

ve

$$g=\frac{(u+n)-i(v-m)}{2}\Rightarrow\overline{g}=\frac{(u+n)+i(v-m)}{2}$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla $f = h + \overline{g}$ olarak yazılabilir. Bu gösterilişe f nin *kanonik gösterilişi* adı verilir. h ye f nin analitik kısmı, g ye f nin co-analitik kısmı denir. Örneğin; $f(z) = z - 1/\overline{z} + 2ln\,|z|$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskini $\mathbb{C} - \{0\}$ üzerine resmeden harmonik yalınkat bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun analitik kısmı $h(z) = z + logz$ ve co-analitik kısmı $g(z) = logz - 1/z$ şeklindedir.

Harmonik bir $f = u + iv$ fonksiyonu için *Jakobiyen* $J_f = u_x(z)v_y(z) - u_y(z)v_x(z)$ şeklinde tanımlanır. Jakobiyen, $f = h + \overline{g}$ harmonik fonksiyonu için f_z ve $f_{\overline{z}}$ ifadelerine bağlı olarak

$$J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\overline{z}}(z)|^2 = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$$

şeklinde de yazılabilir. J_f jakobiyeni D içinde pozitif ise f ye, D içinde *yön-koruyan fonksiyon*, negatif ise *yön-değiştiren fonksiyon* denir. Eğer f yön-koruyan ise $\overline{f}$ yön-değiştiren'dir([10]).

$xy-$ düzlemindeki bir D_1 bölgesinden, $uv-$düzlemindeki bir D_2 bölgesine tanımlı, bire-bir $f(z) = u(z) + iv(z)$ fonksiyonu u ve v harmonik iseler harmonik yalınkat fonksiyon adını alır.

Harmonik tasvirler için Lewy tarafından aşağıdaki önemli sonuç verilmiştir.

Teorem 3.1.1. *([16]) Harmonik bir fonksiyonun z_0 noktasının komşuluğunda yerel yalınkat olması için gerek ve yeter şart, $J_f(z_0) \neq 0$ olmasıdır.*

Teorem 3.1.2. *([7])$f = h + \overline{g}$ fonksiyonunun yerel yalınkat ve yön-koruyan olması için gerek ve yeter şart,*

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 > 0 \quad (z \in D)$$

şeklinde olmasıdır.

Tanım 3.1.3. *Bir harmonik f fonksiyonu için $w = g'/h'$ ifadesine f nin ikinci dilatasyon fonksiyonu adı verilir. Yön-koruyan bir f harmonik fonksiyonu için $|w(z)| < 1$ dir.*

Tanım 3.1.4. *$\mathbb{D}$ üzerindeki harmonik, kompleks değerli, yön-koruyan, normalize edilmiş yalınkat harmonik fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}_H$ ile gösterilir. $\mathcal{S}_H$ sınıfına ait* *bir f fonksiyonu $f = h+\overline{g}$ olarak gösterilebilir. Burada $h(z)$ ve $g(z)$, $\mathbb{D}$ de analitik ve*

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \tag{3.2}$$

şeklindeki seri açılımlarına sahip fonksiyonlardır. Yön-koruyan olma özelliğinden $|b_1| < 1$ olmak zorundadır.

Yön-koruyan bir harmonik $f \in \mathcal{S}_H$ tasviri, $f(\mathbb{D})$ değer bölgesi orijine göre yıldızıl ise $\mathcal{S}_H^*$ sınıfına aittir. $\mathcal{S}_H^*$ sınıfına ait bir f fonksiyonu $\mathbb{D}$ içinde *harmonik yıldızıl fonksiyon* olarak adlandırılır. Benzer şekilde, $f \in \mathcal{S}_H$ tasviri altında $f(\mathbb{D})$ bölgesi konveks ise, f fonksiyonu $\mathcal{K}_H$ sınıfına aittir. $\mathcal{K}_H$ sınıfına ait bir f fonksiyonu $\mathbb{D}$ içinde *harmonik konveks fonksiyon* olarak adlandırılır.
Bu tanımlar analitik olarak

$$f \in \mathcal{S}_H^* \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}(\arg f(re^{i\theta})) > 0 \quad z \in \mathbb{D} \tag{3.3}$$

$$f \in \mathcal{K}_H \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}\arg(\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta})) > 0 \quad z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 \tag{3.4}$$

şeklinde ifade edilir.
$\mathcal{S}$ ailesi için ortaya konan ve 69 yıl sonra doğruluğu 1984 yılında Louis De Branges ([8]) tarafından ispatlanan Bieberbach sanısının ispatından sonra $\mathcal{S}$ ailesi için bilinen klasik sonuçların $\mathcal{S}_H$ ve bu sınıfın alt aileleri için de geçerli olup olmadığı sorusu düşünülmeye başlanmıştır. 1984 yılında Clunie ve Sheil Small ([7]) yalınkat fonksiyonlar için elde edilen sonuçların harmonik tasvirlerle aynı olmadığını, fakat analoglarının verilebileceğini ortaya koymuşlardır.

3.2 Log-harmonik Fonksiyonlar

Harmonik fonksiyonlar teorisi üzerine çalışmalar devam ederken, 1984 yılında Zayid Abdulhadi ve Walter Hengartner tarafından log-harmonik fonksiyonlar incelenmeye başlanmıştır. Bu tür fonksiyonlarla ilgili çalışmalardaki temel konular, harmonik ve analitik fonksiyonlarla ilgili özelliklerin log-harmonik fonksiyonlarda ne şekilde gerçekleneceğinin araştırılması, bilinen yalınkat analitik ve yalınkat harmonik fonksiyon sınıfları ile log-harmonik yalınkat fonksiyon sınıfları arasında bağlantılar kurulması, yeni fonksiyon sınıfları belirlenmesi ve bu sınıfların özelliklerinin incelenmesidir. 1988 yılında yayınlanan ilk çalışmada log-harmonik fonksiyonların çıkış noktası ortaya konulmuştur ([3]).

Tanım 3.2.1. *D, $\mathbb{C}$ nin bir bölgesi olmak üzere $H(D)$, normal yakınsama topolojisiyle D de tanımlı tüm analitik fonksiyonların cümlesi olsun. $H.\overline{H}(D)$, D bölgesinde tanımlı,*

$$f = H.\overline{G} \tag{3.5}$$

şeklinde gösterilen, açık ve yön-koruyan tüm kompleks değerli fonksiyonların cümlesini göstermektedir. Bu fonksiyonlar

$$w \in H(D), \quad w(D) \subset \mathbb{D} = \{\xi | \, |\xi| < 1\} \tag{3.6}$$

olmak üzere lineer olmayan eliptik

$$\overline{f_{\overline{z}}} = [w\overline{f}/f]f_z \tag{3.7}$$

diferansiyel denklemini gerçeklemektedir. Bu sınıf içindeki sıfırlanmayan fonksiyonlar H_1 ve G_1, $H(D)$ de olmak üzere, herhangi bir yön-koruyan, harmonik $u = H_1 + \overline{G_1}$ fonksiyonu için e^u şeklindedirler. Bunun yanısıra $H.\overline{H}(D)$ nin sıfırlanan fonksiyonlarıyla da çalışılmaktadır.
$F(w, D)$, w daima (3.6) yı gerçeklemek üzere, D de (3.7) nin sabitten farklı tüm çözümlerinin cümlesidir. $f \in F(w, D)$ olmak üzere f, açık ve yön-koruyan bir fonksiyondur.
Bu tanımlar gözönünde bulundurularak $F(w, D)$ ve $H.\overline{H}(D)$ sınıfları arasındaki ilişkiler aşağıdaki akışta sıralanmıştır ([3]).

- $Z(f) = \{z \in D \quad | \quad f(z) = 0\}$

Lemma 3.2.2. *([3]) D, $\mathbb{C}$ nin basit bağlantılı bir bölgesi olsun. Sıfırlanmayan bir f fonksiyonunun $H.\overline{H}(D)$ de olması için gerek ve yeter şart, w, (3.6) yı gerçeklemek üzere, $F(w, D)$ cümlesinde olmasıdır.*

Lemma 3.2.3. *([3]) f fonksiyonu $F(w, D)$ cümlesinde olsun. $f(z_0) = 0$ ve $B(z_0, \rho)/\{z_0\} \subset D/Z(f)$ olsun. Bu halde f fonksiyonu*

$$f(z) = (z - z_0)^n \, |z - z_0|^{2\beta n} \, h(z)\overline{g(z)}; \quad z \in B(z_0, \rho) \tag{3.8}$$

şeklinde gösterilir. Burada,

$n \in \mathbb{N}$, $\beta = n\overline{w(z_0)}(1 + w(z_0))/(1 - |w(z_0)|^2)$ *dır, böylece* $Re\beta > -n/2$ *dir.* h, $g \in H(B(z_0, \rho))$ *dır ve* $h(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 1$ *dir.*

Teorem 3.2.4. *([3])* D, $\mathbb{C}$ *nin bir bölgesi olsun.* f *fonksiyonu* $H.\overline{H}(D)$ *içindeyse,* w (3.6) *da tanımlandığı şekilde,* $[0, 1)$ *içinde bir rasyonel sayı ve* $z \in Z(f)$ *olmak üzere* $F(w, D)$ *dedir. Tersine,* $f \in F(w, D)$ *ise ve her* $z_0 \in Z(f)$ *için* $p(z_0) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $q(z_0) \in \mathbb{N}$ *ve* $q(z_0) - p(z_0)$, $p(z_0)$ *ın bir böleni olmak üzere* $w(z_0) = p(z_0)/q(z_0) \in [0, 1)$ *elde edilir ve böylece* $f \in H.\overline{H}(D)$ *dir.*

3.3 Log-harmonik Yalınkat Fonksiyonlar

D, $\mathbb{C}$ nin bir bölgesi ve $z_0 \in D$ olsun. Aşağıdaki karakterizasyon, Teorem 3.2.4 den elde edilir.

Teorem 3.3.1. *([3])* f, D *üzerinde* $f(z_0) = 0$ *olacak şekilde yalınkat bir tasvir olsun. Bu halde* $f \in H.\overline{H}(D)$ *olması için gerek ve yeter şart,* w, $w(z_0) = \frac{m}{m+1}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *olacak şekilde* (3.6) *yı tanımlamak üzere* $f \in F(w, D)$ *olmasıdır.*

Lemma 3.3.2. *([3])* D, $\mathbb{C}$ *içinde bir bölge ve* $f \in F(w, D)$ *yalınkat bir fonksiyon olsun. Bu halde*

(a) $f(z) \neq 0$ *olduğunda* $f_z(z) \neq 0$ *dır,*

(b) $f(z_0) = 0$ *ise*

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f_z(z)/f(z)$$

vardır ve $\mathbb{C} - \{0\}$ *dadır.*

Böylece $(z - z_0)f_z/f$, $H(D)$ *de sıfırlanmayan bir fonksiyondur.*

Tanım 3.3.3. *([3])* $\mathcal{S}_{lh}$; *birim diskte tanımlı, kompleks değerli, normalize edilmiş yalınkat log-harmonik fonksiyonların sınıfıdır.*

$$\mathcal{S}_{lh} = \bigcup_{w \in H(\mathbb{D})} \{f \in F(w, \mathbb{D}) \quad \textit{yalınkat} \quad | \quad f(0) = 0, f_z(0) = 1\} =$$

$$\left\{f = zh(z)\overline{g(z)} \in H.\overline{H}(\mathbb{D}) \quad | \quad f \quad \textit{yalınkat ve} \quad h(0) = g(0) = 1\right\}.$$

Bu ilk çalışmanın ardından log-harmonik fonksiyon tanımı $H.\overline{H}(D)$ ve $F(w, D)$ cümlelerinden bağımsız olarak aşağıdaki şekilde genelleştirilmiştir.

Tanım 3.3.4. *([4]) $H(\mathbb{D})$, $\mathbb{D}$ açık birim diskinde tanımlı tüm analitik fonksiyonların lineer uzayı ve B, her $z \in \mathbb{D}$ için $|w(z)| < 1$ koşuluna uyan $w(z) \in H(\mathbb{D})$ fonksiyonlarının cümlesi olsun. Bir log-harmonik fonksiyon ikinci dilatasyon fonksiyonu $w \in B$ olmak üzere, lineer olmayan*

$$\frac{\overline{f_{\bar{z}}}}{\overline{f}} = w(z)\frac{f_z}{f} \tag{3.9}$$

eliptik kısmi diferansiyel dekleminin bir çözümüdür. f, $\mathbb{D}$ de sıfırlanmayan bir log-harmonik fonksiyon ise, $h, g \in H(\mathbb{D})$ olmak üzere

$$f = h\overline{g}$$

formundadır. Diğer yandan f fonksiyonu sadece bir z_0 noktasında sıfırlanıyorsa,

- *m negatif olmayan bir tamsayı,*
- *$\beta = \overline{w(0)}(1 + w(0))/(1 - |w(0)|^2)$ ve böylece $Re\beta > -1/2$,*
- *h ve g, $\mathbb{D}$ de analitik fonksiyonlar, $h(0) \neq 0$, $g(0) = 1$*

olmak üzere

$$f = (z - z_0)^m |z - z_0|^{2m\beta} h\overline{g}$$

şeklinde bir gösterilime sahiptir. $z_0 = 0$ seçildiğinde bu gösterilim

$$f = z^m |z|^{2m\beta} h\overline{g}$$

şekline dönüşür.
Ayrıca f fonksiyonu $\mathbb{D}$ üzerinde yalınkat log-harmonik bir fonksiyon ise; $0 \notin f(\mathbb{D})$ iken $\log f$, $\mathbb{D}$ üzerinde harmonik yalınkat bir fonksiyondur, $f(0) = 0$ durumunda ise (yani f fonksiyonu sıfır noktasında sıfırlanıyorsa) $F(\zeta) = \log f(e^\zeta)$, $\{\zeta \quad |Re\zeta < 0\}$ yarı-düzlemi üzerinde harmonik yalınkat fonksiyon olup $f = z|z|^{2\beta} h\overline{g}$, $Re\beta > -1/2$, $0 \notin h.g(\mathbb{D})$ biçimindedir.

Log-harmonik fonksiyonlar için yapılan bu tanımın ardından harmonik fonksiyonlar teorisindeki ikinci dilatasyon ve Jakobiyen fonksiyon kavramlarını log-harmonik yalınkat fonksiyonlar için verebiliriz.

Bu fonksiyonları, seçilen f fonksiyonu ve türevinin, ikinci dilatasyon fonksiyonu için

$$w(z) = \frac{\overline{f_{\overline{z}}}}{\overline{f}} / \frac{f_z}{f}$$

ifadesinde ve Jakobiyen fonksiyonu için de

$$J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$$

ifadesinde yerine yazılmasıyla elde edebiliriz. Bu tanımlar aşağıdaki şekillerde verilebilir.

Tanım 3.3.5. *$f(z) = h(z)\overline{g(z)}$ şeklinde bir fonksiyon ise, ikinci dilatasyon fonksiyonu,*

$$w(z) = \frac{g'(z)/g(z)}{h'(z)/h(z)}$$

biçimindedir.

f fonksiyonu $f(z) = (z - z_0)\,|z - z_0|^{2\beta}\,h(z)\overline{g(z)}$ şeklinde ise bu fonksiyona dair ikinci dilatasyon fonksiyonu ise,

$$w(z) = \frac{\overline{\beta} + (z - z_0)\dfrac{g'(z)}{g(z)}}{1 + \beta + (z - z_0)\dfrac{h'(z)}{h(z)}}$$

şeklinde elde edilmektedir.

Yıldızıl fonksiyonlar için $z_0 = 0$ noktası alındığı için bu kez ikinci dilatasyon fonksiyonu,

$$w(z) = \frac{\overline{\beta} + z\dfrac{g'(z)}{g(z)}}{1 + \beta + z\dfrac{h'(z)}{h(z)}}$$

şeklinde olur.

$f(z) = zh(z)\overline{g(z)}$ fonksiyonu için, $\beta = 0$ yani; $w(0) = 0$ durumunda ise ikinci dilatasyon fonksiyonu,

$$w(z) = \frac{zg'(z)/g(z)}{1 + zh'(z)/h(z)}$$

biçimine dönüşür.

Tanım 3.3.6. *$f = h(z)\overline{g(z)}$ şeklindeki log-harmonik fonksiyona dair jakobiyen fonksiyonu,*

$$J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\overline{z}}(z)|^2 = |f(z)|^2 \left(\left| \frac{h'(z)}{h(z)} \right|^2 - \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 \right)$$

şeklinde elde edilmektedir.

$f = (z - z_0)|z - z_0|^{2\beta} h(z)\overline{g(z)}$ şeklindeki fonksiyon için de,

$$J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\overline{z}}(z)|^2 = |f(z)|^2 \left(\left| \frac{1+\beta}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)} \right|^2 - \left| \frac{\beta}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 \right)$$

biçiminde olmaktadır.

Yıldızıl fonksiyonlar için $z_0 = 0$ noktası alınarak fonksiyona ait jakobiyen

$$J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\overline{z}}(z)|^2 = |f(z)|^2 \left(\left| \frac{1+\beta}{z} + \frac{h'(z)}{h(z)} \right|^2 - \left| \frac{\beta}{z} + \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 \right)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

$f(z) = zh(z)\overline{g(z)}$ fonksiyonu için, $\beta = 0$ yani; $w(0) = 0$ durumunda ise jakobiyen fonksiyonu

$$J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\overline{z}}(z)|^2 = |f(z)|^2 \left(\left| \frac{1}{z} + \frac{h'(z)}{h(z)} \right|^2 - \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 \right)$$

şeklinde elde edilmektedir.

Sabitten farklı bir f log-harmonik fonksiyonu daima yön-koruyan bir fonksiyondur ([1]). Dolayısıyla bu tür fonksiyonlar için kullanacağımız $J_f(z)$ daima pozitif olmaktadır.

Bir z_0 noktasında sıfırlanan yalınkat log-harmonik f fonksiyonunun $h(z)\overline{g(z)}$ şeklinde gösterilebilmesi için gerek ve yeter şart, $w(z_0) = \frac{m}{m+1}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olması idi ([3]). Bu tanım yıldızıl fonksiyonlar için $w(0) = \frac{m}{m+1}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmasına denk düşmektedir. O halde $f(z) = zh(z)\overline{g(z)}$ fonksiyonu ile çalışıldığında ise $\beta = 0$ yani $w(0) = 0$ olmaktadır. Bu durumda fonksiyon $f(z) = zh(z)\overline{g(z)} = s(z)\overline{g(z)}$ şeklinde yazılabilmektedir. Burada $s(z) = zh(z)$ şeklinde olup, $h(0) = 1 = g(0)$, $s(0) = 0$ normalizasyonları mevcuttur. Tez çalışmasında bu tür fonksiyonlarla ilgilenilecektir.

Harmonik ve analitik fonksiyonlarda olduğu gibi log-harmonik fonksiyonlar için de birtakım önemli alt sınıflar tanımlanmıştır. Bunlardan ilki $\mathcal{S}^*_{lh}$ dır.

Tanım 3.3.7. *([1]) $\mathcal{S}^*_{lh}$; birim disk $\mathbb{D}$ üzerinde $f(0) = 0$ olacak şekilde tanımlı, $h(0) = g(0) = 1$ eşitliğini gerçeklemek üzere, $f(\mathbb{D})$ nin yıldızıl bir bölge olduğu tüm yalınkat log-harmonik fonksiyonların cümlesidir.*
$\mathcal{S}^* = \{f \in \mathcal{S}^*_{lh} \quad ve \quad f \in H(\mathbb{D})\}$ olmak üzere $\mathcal{S}^*_{lh}$ ve $\mathcal{S}^*$ sınıfları arasındaki bağlantı aşağıdaki teoremle verilmektedir.

Teorem 3.3.8. *$H(\mathbb{D})$; $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$ birim diskinde tanımlı tüm analitik fonksiyonların uzayı ve $B = \{w \in H(\mathbb{D}) \mid |w(z)| < 1, z \in \mathbb{D}\}$ olmak üzere*
(a) $f = z\,|z|^{2\beta}\, h\overline{g} \in \mathcal{S}^*_{lh} \Rightarrow \upsilon(z) = zh/g \in \mathcal{S}^*$ dir.
(b) Verilen herhangi $\upsilon(z) \in \mathcal{S}^*$ ve $w \in B$ için, $H(\mathbb{D})$ içinde aşağıdaki şekilde tanımlanan tek türlü belirli h ve g fonksiyonları vardır:
(i) $0 \notin hg(\mathbb{D}), h(0) = g(0) = 1$,
(ii) $\upsilon(z) = zh/g$,
(iii) $\beta = \overline{w(0)}(1+w(0))/(1-|w(0)|^2)$ olmak üzere $f = z\,|z|^{2\beta}\, h\overline{g}$, $\mathcal{S}^*_{lh}$ sınıfı içinde eliptik diferansiyel denklemin bir çözümüdür.

Aşağıda verilen sonuç ise $\beta = 0$, yani $w(0) = 0$ için $\mathcal{S}^*_{lh}$ sınıfına dair bir distorsiyondur.

Teorem 3.3.9. *([1]) $f = zh\overline{g} \in \mathcal{S}^*_{lh}$ olsun. $w(0) = 0$ olmak üzere her $z \in \mathbb{D}$ için*

(i) $|z| \exp\left(\frac{-4\,|z|}{1+|z|}\right) \le |f(z)| \le |z| \exp\left(\frac{4\,|z|}{1+|z|}\right)$

(ii) $\frac{1-|z|}{(1+|z|)^2} \exp\left(\frac{-4\,|z|}{1+|z|}\right) \le |f_z(z)| \le \frac{1-|z|}{(1+|z|)^2} \exp\left(\frac{4\,|z|}{1+|z|}\right)$

(iii) $|f_{\overline{z}}(z)| \le \frac{|z|\,(1-|z|)}{(1+|z|)^2} \exp\left(\frac{4\,|z|}{1+|z|}\right)$
distorsiyonları vardır.

$$f_0(z) = \frac{z(1-\overline{z})}{(1-z)} \exp\left[Re\frac{4z}{1-z}\right]$$

olmak üzere $f(z) = \overline{\xi} f_0(\xi z), |\xi| = 1$ şeklinde olması durumunda eşitlikler gerçeklenir.

Log-harmonik fonksiyonlar teorisinde diğer önemli bir fonksiyon sınıfı $\mathcal{P}_{lh}$ dır.

Tanım 3.3.10. *([1]) $\mathcal{P}_{lh}$, tüm $z \in \mathbb{D}$ ler için $Ref(z) > 0$ olacak şekilde $h, g \in H(\mathbb{D})$, $h(0) = g(0) = 1$ koşullarını sağlayan $f(z) = h(z)\overline{g(z)}$ şeklinde ifade edilen, birim disk $\mathbb{D}$ de tanımlı tüm log-harmonik fonksiyonların sınıfıdır.*
$Rep(z) > 0$, $p(0) = 1$ olan $p(z)$ analitik fonksiyonların sınıfı $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_{lh}$ sınıfının alt cümlesidir.

Teorem 3.3.11. *([1]) $f(z) = h(z)\overline{g(z)} \in \mathcal{P}_{lh}$ ise $p = h/g \in \mathcal{P}$ dir. Tersine, verilen $p \in \mathcal{P}$ ve $w \in B$ ye karşılık $H(\mathbb{D})$ de, h ve g gibi sıfırlanmayan fonksiyonlar vardır öyle ki, $p = h/g$, $f = h\overline{g} \in \mathcal{P}_{lh}$ ve f fonksiyonu verilen w ya göre (3.7) nin bir çözümüdür.*

Ayrıca $\mathcal{P}_{lh}$ sınıfı için elde edilmiş olan distorsiyonlar da aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 3.3.12. *([1]) $f(z) = h(z)\overline{g(z)} \in \mathcal{P}_{lh}$, $w(0) = 0$ olması durumunda*
(i) $\exp\left(-2\left|z\right|/(1-\left|z\right|)\right) \leq \left|f(z)\right| \leq \exp\left(2\left|z\right|/(1-\left|z\right|)\right)$,
(ii) $\left|f_z(z)\right| \leq \dfrac{2}{(1-\left|z\right|)(1-\left|z\right|^2)}\exp\left(2\left|z\right|/(1-\left|z\right|)\right)$,
(iii) $\left|f_{\overline{z}}(z)\right| \leq \dfrac{2\left|z\right|}{(1-\left|z\right|)(1-\left|z\right|^2)}\exp\left(2\left|z\right|/(1-\left|z\right|)\right)$
eşitsizlikleri elde edilir.

$$f_0(z) = \frac{1+z}{1-z}\left|\frac{1-z}{1+z}\right| e^{Re\frac{z}{1-z}}$$

olmak üzere, $f(z)$ nin

$$f_0(\xi z), \left|\xi\right| = 1$$

şeklinde fonksiyon olması durumunda eşitsizliklerin sağ yanları için eşitlik,

$$1/f_0(\xi z), \left|\xi\right| = 1$$

şeklinde bir fonksiyon ise de eşitsizliklerin sol yanları için eşitlik oluşur.

2006 yılında ise Z. Abdulhadi ve A. Muhanna'nın beraber yayınladıkları çalışmada α-yıncı dereceden yıldızıl log-harmonik fonksiyon sınıfı ortaya atılmıştır.

Tanım 3.3.13. *([2]) $f(z) = z\left|z\right|^{2\beta} h(z)\overline{g(z)}$ yalınkat log-harmonik bir fonksiyon olsun.*

$$\frac{\partial \arg f(re^{i\theta})}{\partial\theta} = Re\frac{zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}}{f} > \alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1$$

eşitsizliğinin gerçeklenmesi halinde f *fonksiyonuna* α*-yıncı mertebeden yıldızıl log-harmonik fonksiyon denir.* $S_{lh}^{*}(\alpha)$*, tüm* α*-yıncı mertebeden yıldızıl log-harmonik fonksiyonların sınıfıdır.*

$\alpha = 0$ *için yıldızıl log-harmonik fonksiyonların sınıfı elde edilmektedir.*

Bölüm 4

ANALİTİK KISMI JANOWSKİ YILDIZIL FONKSİYON OLAN JANOWSKİ YILDIZIL LOG-HARMONİK FONKSİYONLAR SINIFI

4.1 $\mathcal{S}^{*}_{lh}(A,B)$ Sınıfı

Tanım 4.1.1. *$f = zh(z)\overline{g(z)}$ yalınkat log-harmonik bir fonksiyon olsun. f nin Janowski yıldızıl log-harmonik bir fonksiyon olması için $h(0) = g(0) = 1$ normalizasyonları altında, her $z \in \mathbb{D}$ için $p(z) \in P(A,B)$ olmak üzere*

$$Rep(z) = \frac{\partial \arg f(re^{i\theta})}{\partial \theta} = Re\left(\frac{zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}}{f}\right) > \frac{1-A}{1-B} \tag{4.1}$$

koşulu gerçeklenmelidir ([14]). Analitik kısmı $(zh(z))$ Janowski yıldızıl fonksiyon olan Janowski yıldızıl log-harmonik fonksiyonların sınıfı $S^{*}_{lh}(A,B)$ ile gösterilmektedir.

Yaptığımız çalışmalarda kullanılacak üç temel lemma aşağıdaki şekilde verilmektedir.

Lemma 4.1.2. *([13]) $\phi(z)$, $\mathbb{D}$ de $\phi(0) = 0$ olacak şekilde tanımlı, analitik bir fonksiyon olsun. $|\phi(z)|$, $|z| = r < 1$ çemberinde bir $z_0 \in \mathbb{D}$ noktasında maksimum değerine ulaşıyorsa, $k \geq 1$, reel bir sayı olmak üzere*

$$z_0\phi'(z_0) = k\phi(z_0) \tag{4.2}$$

eşitliği vardır.

Lemma 4.1.3. *([15]) $p(z)$, $P(A,B)$ sınıfının bir elemanı ise*

$$Rep(z) > \frac{1-A}{1-B} \geq 0 \tag{4.3}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

Lemma 4.1.4. *([21]) $s(z) \in \mathcal{S}^*(A,B)$ ise*

$$\left| z\frac{s'(z)}{s(z)} - \frac{1-ABr^2}{1-B^2r^2} \right| \leq \frac{(A-B)r}{1-B^2r^2}$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 4.1.5. *$f = zh(z)\overline{g(z)}$, $\mathbb{D}$ de log-harmonik bir fonksiyon ve $0 \notin h.g(\mathbb{D})$ olsun.*

$$\frac{zh'(z)}{h(z)} - \frac{zg'(z)}{g(z)} \prec \begin{cases} \dfrac{(A-B)z}{1+Bz} = F_1(z), & B \neq 0; \\ Az = F_2(z), & B = 0; \end{cases}$$

sabordinasyonun gerçeklenmesi halinde $f \in \mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ dir.

İspat. İspatı yapmak için

$$\frac{h(z)}{g(z)} = \begin{cases} (1+B\phi(z))^{\frac{A-B}{B}}, & B \neq 0; \\ e^{A\phi(z)}, & B = 0; \end{cases} \tag{4.4}$$

fonksiyonunu $z = 0$ noktasında $(1+B\phi(z))^{\frac{A-B}{B}}$ ifadesi 1 değerini alacak şekilde tanımlarız (Burada uygun bir Riemann dalı seçilmektedir). Sabordinasyon koşullarının gerçeklenmesi için $\phi(z)$, $\mathbb{D}$ de analitik, $\phi(0) = 0$, $|\phi(z)| < 1$ olmalıdır. (4.4) ile verilen fonksiyonun tanımından dolayı ilk iki koşul gerçeklenmektedir. Son koşulu gerçeklemek için (4.4) ifadesinden logaritmik türev alınarak,

$$\frac{zh'(z)}{h(z)} - \frac{zg'(z)}{g(z)} = \begin{cases} \dfrac{(A-B)z\phi'(z)}{1+B\phi(z)}, & B \neq 0; \\ Az\phi'(z), & B = 0; \end{cases} \tag{4.5}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden hareketle $\phi(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{D}$ de maksimum değere ulaştığı düşünülürse, bir $z_0 \in \mathbb{D}$ için Lemma 4.1.2 nin yazılmasıyla $z_0\phi'(z_0) = k\phi(z_0), k \geq 1$ eşitliği elde edilir, böylece

$$\frac{z_0h'(z_0)}{h(z_0)} - \frac{z_0g'(z_0)}{g(z_0)} = \begin{cases} \dfrac{k(A-B)\phi(z_0)}{1+B\phi(z_0)} = F_1(\phi(z_0)) \notin F_1(\mathbb{D}), & B \neq 0; \\ \\ kA\phi(z_0) = F_2(\phi(z_0)) \notin F_2(\mathbb{D}), & B = 0; \end{cases} \tag{4.6}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.6) da görüldüğü gibi eşitliklerin sağ yanlarındaki ifadeler $k \neq 1$ için resim bölgesinin dışında kalmaktadır. Bu halde her $z \in \mathbb{D}$ için $|\phi(z)| < 1$ gerçeklenmek zorundadır.

O halde üç koşul da gerçeklendiğinden sabordinasyon mevcuttur ve bu sabordinasyon kullanılarak

$$1 + \frac{zh'(z)}{h(z)} - \frac{zg'(z)}{g(z)} = \begin{cases} \dfrac{1 + A\phi(z)}{1 + B\phi(z)} = p(z), & B \neq 0; \\ 1 + A\phi(z) = p(z), & B = 0; \end{cases} \tag{4.7}$$

eşitlikleri elde edilir ve Lemma 4.1.3 ün kullanılmasıyla

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zh'(z)}{h(z)} - \frac{zg'(z)}{g(z)}\right) = \mathrm{Re}p(z) > \frac{1-A}{1-B} \tag{4.8}$$

olduğu bilinmektedir. Diğer yandan f fonksiyonunun tanımından,

$$f = zh(z)\overline{g(z)} \Rightarrow \frac{zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}}{f} = 1 + \frac{zh'(z)}{h(z)} - \frac{\overline{z}\overline{g'(z)}}{\overline{g(z)}}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanının reel kısımları alınacak olursa,

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(\frac{zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}}{f}\right) &= \mathrm{Re}\left(1 + \frac{zh'(z)}{h(z)} - \frac{\overline{z}\overline{g'(z)}}{\overline{g(z)}}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(1 + \frac{zh'(z)}{h(z)} - \frac{zg'(z)}{g(z)}\right) \end{aligned} \tag{4.9}$$

eşitliği elde edilir. (4.7), (4.8) ve (4.9) un birlikte düşünülmesiyle de yıldızıllık koşulu gerçeklendiğinden $f \in \mathcal{S}^*_{lh}(A, B)$ olduğu sonucu elde edilir. □

Sonuç 4.1.6. *$f \in \mathcal{S}^*_{lh}(A, B)$ ise*

$$\begin{cases} \left|\left(\dfrac{h(z)}{g(z)}\right)^{\frac{B}{A-B}} - 1\right| < |B|, & B \neq 0; \\ \left|\log\left(\dfrac{h(z)}{g(z)}\right)\right| < |A|, & B = 0. \end{cases} \tag{4.10}$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat. (4.4) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{cases} \left(\dfrac{h(z)}{g(z)}\right)^{\frac{B}{A-B}} - 1 = B\phi(z), \quad B \neq 0; \Rightarrow \left|\left(\dfrac{h(z)}{g(z)}\right)^{\frac{B}{A-B}} - 1\right| < |B|, \quad B \neq 0; \\ \log\left(\dfrac{h(z)}{g(z)}\right) = A\phi(z), \quad B = 0; \Rightarrow \left|\log\left(\dfrac{h(z)}{g(z)}\right)\right| < |A|, \quad B = 0; \end{cases}$$

şeklinde istenen sonuç elde edilebilir. □

Bu eşitsizlikler Teorem 4.1.5 in basit bir sonucu olarak ortaya çıkmaktadır. Ayrıca bu eşitsizlik çifti $\mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ sınıfı için Marx-Strohhacker Eşitsizlikleri olarak adlandırılmaktadır.

Lemma 4.1.7. *$h(z)$, $\mathbb{D}$ birim diskinde $h(0)=1$ olacak şekilde tanımlı, analitik bir fonksiyon olsun. Bu halde,*

$$Re\left(\frac{(zh(z))'}{h(z)}\right)=r\frac{\partial}{\partial r}\log|zh(z)|$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat. İspatı yapmak için $zh(z)$ ifadesini modülü cinsinden yazıp logaritmik türev alırsak,

$$zh(z)=|zh(z)|\,e^{i\theta}\Rightarrow\log(zh(z))=\log|zh(z)|+i\theta\Rightarrow$$

$$\log(re^{i\xi}h(re^{i\xi}))=\log\left|re^{i\xi}h(re^{i\xi})\right|+i\theta\Rightarrow$$

$$1+re^{i\xi}.\frac{h'(re^{i\xi})}{h(re^{i\xi})}=r\frac{\partial}{\partial r}\log\left|re^{i\xi}h(re^{i\xi})\right|$$

sonucunu elde ederiz. Bulduğumuz bu ifadeyi z cinsinden yazıp eşitliğin reel kısmını alırsak

$$\mathrm{Re}\left(1+z\frac{h'(z)}{h(z)}\right)=r\frac{\partial}{\partial r}\log|zh(z)|\Rightarrow\mathrm{Re}\left(\frac{(zh(z))'}{h(z)}\right)=r\frac{\partial}{\partial r}\log|zh(z)|$$

şeklinde istenen sonucu elde ederiz. □

Teorem 4.1.8. *$f\in\mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ ve $s(z)=zh(z)\in\mathcal{S}^*(A,B)$ olsun. Bu takdirde*

$$\begin{cases}\dfrac{1}{(1-Br)^{\frac{B-A}{B}}}\le|h(z)|\le\dfrac{1}{(1+Br)^{\frac{B-A}{B}}}, & B\neq 0;\\[2ex] e^{-Ar}\le|h(z)|\le e^{Ar}, & B=0;\end{cases}\tag{4.11}$$

distorsiyonları vardır.

İspat. $f\in\mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ varsayımı altında $h(z)$ analitik fonksiyonu $h(0)=1$ koşulu ile $h(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ şeklinde bir Taylor açılımına sahip olur. $s(z)=zh(z)\in\mathcal{S}^*(A,B)$ olduğundan yıldızıllık koşulu

$$\mathrm{Re}\left(z\frac{s'(z)}{s(z)}\right)=\mathrm{Re}\left(z\frac{(zh(z))'}{zh(z)}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{(zh(z))'}{h(z)}\right)=\mathrm{Re}\left(1+z\frac{h'(z)}{h(z)}\right)>0\tag{4.12}$$

şeklinde gerçeklenmektedir. Bu halde Lemma 4.1.7 nin kullanılmasıyla

$$\begin{cases} \left|\dfrac{(zh(z))'}{h(z)} - \dfrac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right| \leq \dfrac{(A-B)r}{1-B^2r^2}, & B \neq 0; \\ \\ \left|\dfrac{(zh(z))'}{h(z)} - 1\right| \leq Ar, & B = 0; \end{cases} \tag{4.13}$$

eşitsizlikleri bilinmektedir. Bu adımdan sonra

$$\begin{cases} \left|1 + \dfrac{zh'(z)}{h(z)} - \dfrac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right| \leq \dfrac{(A-B)r}{1-B^2r^2}, & B \neq 0; \\ \\ \left|1 + \dfrac{zh'(z)}{h(z)} - 1\right| \leq Ar, & B = 0; \end{cases} \tag{4.14}$$

eşitsizlikleri yazılabilir,

$$-|z| \leq \mathrm{Re} z \leq |z|$$

eşitsizliğinin bir önceki eşitsizliklerde kullanılmasıyla da istenen distorsiyonlar elde edilir. $\square$

Teorem 4.1.9. *$f \in \mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ ise*

$$\begin{cases} r\left(\dfrac{1-Br}{1+Br}\right)^{\frac{A-B}{B}} \leq |g(z)| \leq r\left(\dfrac{1+Br}{1-Br}\right)^{\frac{A-B}{B}}, & B \neq 0; \\ \\ re^{-2Ar} \leq |g(z)| \leq re^{2Ar}, & B = 0; \end{cases} \tag{4.15}$$

distorsiyonları vardır.

İspat. Teorem 4.1.5 ve Janowski yıldızıl fonksiyonlar için distorsiyon koşulu (Lemma 4.1.4) kullanılarak,

$$\begin{cases} \left|\left(z\dfrac{h'(z)}{h(z)} - z\dfrac{g'(z)}{g(z)}\right) - \dfrac{B(B-A)r^2}{1-B^2r^2}\right| \leq \dfrac{(A-B)r}{1-B^2r^2}, & B \neq 0; \\ \\ \left|z\dfrac{h'(z)}{h(z)} - z\dfrac{g'(z)}{g(z)}\right| \leq Ar, & B = 0; \end{cases} \tag{4.16}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Öte yandan

$$-|z| \leq \mathrm{Re} z \leq |z| \tag{4.17}$$

eşitsizlikleri bilinmektedir. (4.16) eşitsizliklerinde (4.17) ifadesinin kullanılmasıyla

$$\begin{cases} \dfrac{-(A-B)r}{1-Br} \leq \operatorname{Re}\left(z\dfrac{h'(z)}{h(z)} - z\dfrac{g'(z)}{g(z)}\right) \leq \dfrac{(A-B)r}{1+Br}, & B \neq 0; \\ \\ -Ar \leq \operatorname{Re}\left(z\dfrac{h'(z)}{h(z)} - z\dfrac{g'(z)}{g(z)}\right) \leq Ar, & B = 0; \end{cases} \tag{4.18}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Diğer yandan

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{g'(z)}{g(z)} - z\frac{h'(z)}{h(z)}\right) = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\log|g(z)| - \log|h(z)|\right) \tag{4.19}$$

eşitliği kullanılarak (4.18) eşitsizlikleri

$$\begin{cases} \dfrac{-(A-B)}{1+Br} \leq \dfrac{\partial}{\partial r}\log|g(z)| - \dfrac{\partial}{\partial r}\log|h(z)| \leq \dfrac{(A-B)}{1-Br}, & B \neq 0; \\ \\ -A \leq \dfrac{\partial}{\partial r}\log|g(z)| - \dfrac{\partial}{\partial r}\log|h(z)| \leq A, & B = 0; \end{cases} \tag{4.20}$$

şeklinde yazılabilir. Eşitsizliklerin her yanı 0 dan r ye integre edilerek,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1+Br)^{\frac{A-B}{B}}} \leq \left|\dfrac{g(z)}{h(z)}\right| \leq \dfrac{1}{(1-Br)^{\frac{A-B}{B}}}, & B \neq 0; \\ \\ e^{-Ar} \leq \left|\dfrac{g(z)}{h(z)}\right| \leq e^{Ar}, & B = 0; \end{cases} \tag{4.21}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler ayrıca,

$$\begin{cases} |h(z)|\dfrac{1}{(1+Br)^{\frac{A-B}{B}}} \leq |g(z)| \leq |h(z)|\dfrac{1}{(1-Br)^{\frac{A-B}{B}}}, & B \neq 0; \\ \\ |h(z)|\,e^{-Ar} \leq |g(z)| \leq |h(z)|\,e^{Ar}, & B = 0; \end{cases} \tag{4.22}$$

şeklinde de yazılabilir. (4.22) eşitsizliklerinde ise (4.11) eşitsizliklerinin kullanılmasıyla istenen distorsiyonlar elde edilir. □

Teorem 4.1.10. *$f = zh(z)\overline{g(z)} \in \mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ olsun. Bu halde*

$$\begin{cases} r^2\left(\dfrac{(1-Br)^2}{1+Br}\right)^{\frac{A-B}{B}} \leq |f| \leq r^2\left(\dfrac{(1+Br)^2}{1-Br}\right)^{\frac{A-B}{B}}, & B \neq 0; \\ \\ r^2e^{-3Ar} \leq |f| \leq r^2e^{3Ar}, & B = 0; \end{cases} \tag{4.23}$$

distorsiyonları vardır.

İspat. Teorem 4.1.8 ve Teorem 4.1.9 da $h(z)$ ve $g(z)$ için distorsiyonlar elde edilmiştir. Bu distorsiyonlar ve f fonksiyonunun tanımı kullanılarak,

$$\begin{cases} r^2\left(\dfrac{(1-Br)^2}{1+Br}\right)^{\frac{A-B}{B}} \leq |f| = \left|zh(z)\overline{g(z)}\right| = |zh(z)|\,|g(z)| \leq r^2\left(\dfrac{(1+Br)^2}{1-Br}\right)^{\frac{A-B}{B}}, & B \neq 0; \\ \\ r^2e^{-3Ar} \leq |f| = \left|zh(z)\overline{g(z)}\right| = |zh(z)|\,|g(z)| \leq r^2e^{3Ar}, & B = 0; \end{cases}$$

şeklinde istenen sonuçlar elde edilebilir. □

Tanım 4.1.11. *([17]) Birim disk $\mathbb{D}$ de $f = z + a_2z^2 + ...$ şeklinde yalınkat bir f fonksiyonu için yıldızıllık yarıçapı*

$$R(f) = \sup\left\{R| \quad Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) > 0, \quad |z| < R\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.1.12. *$f \in \mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ ise bu fonksiyona ait yıldızıllık yarıçapı*

$$r_s = \begin{cases} \dfrac{-(A-B) - |A+B|}{2AB}, & B \neq 0; \\ \dfrac{1}{A}, & B = 0; \end{cases} \tag{4.24}$$

şeklindedir. Bu sonuç kesindir, çünkü ekstremal fonksiyon

$$\begin{cases} (1+B\phi(z))^{\frac{A-B}{B}}, & B \neq 0; \\ e^{A\phi(z)}, & B = 0; \end{cases} \tag{4.25}$$

eşitlikleri ile verilmektedir.

İspat. $f \in \mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ olduğundan

$$\begin{cases} \left|\left(1 + z\dfrac{h'(z)}{h(z)} - z\dfrac{g'(z)}{g(z)}\right) - 1 - \dfrac{B(B-A)r^2}{1-B^2r^2}\right| \leq \dfrac{(A-B)r}{1-B^2r^2}, & B \neq 0; \\ \\ \left|\left(1 + z\dfrac{h'(z)}{h(z)} - z\dfrac{g'(z)}{g(z)}\right) - 1\right| \leq Ar, & B = 0; \end{cases} \tag{4.26}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Yine (4.17) eşitsizliğinden hareketle

$$\begin{cases} \text{Re}\left(1 + z\dfrac{h'(z)}{h(z)} - z\dfrac{g'(z)}{g(z)} - \dfrac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right) \geq -\dfrac{(A-B)r}{1-B^2r^2}, & B \neq 0; \\ \\ \text{Re}\left(1 + z\dfrac{h'(z)}{h(z)} - z\dfrac{g'(z)}{g(z)} - 1\right) \geq -Ar, & B = 0; \end{cases} \tag{4.27}$$

eşitsizlikleri elde edilir. f fonksiyonunun

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}}{f}\right) = \operatorname{Re}\left(1 + z\frac{h'(z)}{h(z)} - z\frac{g'(z)}{g(z)}\right) > \frac{1-A}{1-B} \geq 0 \tag{4.28}$$

yıldızıllık koşulunu gerçeklediği de kullanılarak eşitsizliklerin sağ yanlarını sıfır yapan r değerinin supremumu istenen yarıçapı vermektedir. $\square$

Teorem 4.1.13. *$f = zh(z)\overline{g(z)} \in \mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ olsun. Bu halde,*

$$\left|\frac{h'(z)}{h(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\right| < \begin{cases} \dfrac{A-B}{|B|\,(1-r)}, & B \neq 0; \\ \\ \dfrac{1-|s(z)|^2}{r(1-r^2)}, & B = 0; \end{cases} \tag{4.29}$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat. $\mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ sınıfı için elde ettiğimiz Marx-Strohhacker Eşitsizlikleri kullanılarak;
$B \neq 0$ için

$$s_1(z) = \left(\frac{h}{g}\right)^{\frac{B}{A-B}} - 1$$

fonksiyonu gözönüne alındığında; $s_1(0) = 0$, $|s_1(z)| < 1$ dir. Bu halde $s_1(z) = z\phi(z)$, $(\phi(z) \in \Omega)$ yazılabilir. Buradan hareketle

$$\left(\frac{h}{g}\right)^{\frac{B}{A-B}} = z\phi(z) + 1 \Rightarrow \left(\frac{B}{A-B}\right)\left(\log\frac{h}{g}\right) = \log\left(z\phi(z)+1\right)$$

eşitlikleri yazılabilmektedir. Son eşitlikten türev alınmasıyla,

$$\frac{B}{A-B}\left(\frac{h'}{h} - \frac{g'}{g}\right) = \frac{\phi(z) + z\phi'(z)}{z\phi(z)+1}$$

elde edilir ki bu adımda

$$\left|\frac{\phi(z) + z\phi'(z)}{z\phi(z)+1}\right| \leq \frac{1}{1-r}$$

eşitsizliği de gözönünde bulundurulursa istenen ifade elde edilir.
$B = 0$ için

$$s_1(z) = \log\frac{h}{g}$$

şeklinde yazıldığında yine aynı şekilde $s_1(0) = 0$, $|s_1(z)| < 1$ dir. Bu halde $s_1(z)$ ifadesinden türev alınarak

$$s_1'(z) = \frac{h'}{h} - \frac{g'}{g} \Rightarrow \left|z\frac{h'}{h} - z\frac{g'}{g}\right| = |zs_1'(z)|$$

eşitliği elde edilir. Bulunan bu ifadenin sağ yanı için de

$$|zs_1'(z)| \leq \frac{1-|s_1(z)|^2}{1-z^2}$$

eşitsizliğinin varolduğu gözönüne alınarak istenen eşitsizlik elde edilir. $\square$

Lemma 4.1.14. *$s(z) \in \mathcal{S}^*(A,B)$ ise*

$$\begin{cases} \dfrac{1-Ar}{r(1-Br)} \leq \left|\dfrac{s'(z)}{s(z)}\right| \leq \dfrac{1+Ar}{r(1+Br)}, & B \neq 0; \\ \\ \dfrac{1-Ar}{r} \leq \left|\dfrac{s'(z)}{s(z)}\right| \leq \dfrac{1+Ar}{r}, & B = 0; \end{cases} \tag{4.30}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

İspat. $s(z) \in \mathcal{S}^*(A,B)$ olduğundan dolayı

$$\begin{cases} \left|z\dfrac{s'(z)}{s(z)} - \dfrac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right| \leq \dfrac{(A-B)r}{1-B^2r^2}, & B \neq 0; \\ \\ \left|z\dfrac{s'(z)}{s(z)} - 1\right| \leq Ar, & B = 0; \end{cases} \tag{4.31}$$

eşitsizlikleri yazılabilir (Lemma 4.1.4). Bu eşitsizliklerden hareketle,

$$\begin{cases} \dfrac{1-Ar}{1-Br} \leq \left|z\dfrac{s'(z)}{s(z)}\right| \leq \dfrac{1+Ar}{1+Br}, & B \neq 0; \\ \\ 1-Ar \leq \left|z\dfrac{s'(z)}{s(z)}\right| \leq 1+Ar, & B = 0; \end{cases} \tag{4.32}$$

elde edilir ki bu eşitsizlikler de $|z| = r$ ile kısaltılırsa istenen sonuç elde edilir. $\square$

Lemma 4.1.15. *$f(z) = zh(z)\overline{g(z)} = s(z)\overline{g(z)} \in \mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ ise*

$$\begin{cases} -\dfrac{1-Ar}{1-Br} < \left|\dfrac{g'(z)}{g(z)}\right| < \dfrac{1+Ar}{1+Br}, & B \neq 0; \\ \\ -(1-Ar) < \left|\dfrac{g'(z)}{g(z)}\right| < 1+Ar, & B = 0; \end{cases} \tag{4.33}$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat. $f(z) = s(z)\overline{g(z)}$ olmak üzere ikinci dilatasyon fonksiyonu eliptik diferansiyel denklemden elde edilerek

$$w(z) = \frac{\frac{g'(z)}{g(z)}}{\frac{s'(z)}{s(z)}}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda, $w(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ diskinde analitik, $|w(z)| < 1$ (yön-koruyan) ve $w(0) = 0$ olduğundan Schwarz Lemma'sı gereği

$$-r < |w(z)| < r$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu halde

$$-r < \left| \frac{\frac{g'(z)}{g(z)}}{\frac{s'(z)}{s(z)}} \right| < r$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu adımda ise Lemma 4.1.14 ün kullanılmasıyla istenen eşitsizlikler elde edilir. $\square$

Teorem 4.1.16. *$f(z) = zh(z)\overline{g(z)} = s(z)\overline{g(z)} \in \mathcal{S}^*_{lh}(A, B)$ ise*

$$\begin{cases} F(-r, A, B) \leq J_f(z) \leq F(r, A, B), & B \neq 0; \\ \\ F(-r, A) \leq J_f(z) \leq F(r, A), & B = 0; \end{cases} \tag{4.34}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. Burada,

$$F(r, A, B) = r^2(1 + r)(1 + Ar) \left[\frac{1 + Ar}{(1 + Br)^2} + \frac{r(1 - Ar)}{1 - B^2r^2} \right] \left(\frac{(1 + Br)^2}{1 - Br} \right)^{\frac{2(A-B)}{B}},$$

$$F(-r, A, B) = r^2(1 - r)(1 - Ar) \left[\frac{1 - Ar}{(1 - Br)^2} - \frac{r(1 + Ar)}{1 - B^2r^2} \right] \left(\frac{(1 - Br)^2}{1 + Br} \right)^{\frac{2(A-B)}{B}},$$

$$F(r, A) = r^2(1 + r)(1 + Ar)\left[1 + Ar + r(1 - Ar)\right] e^{6Ar},$$

$$F(-r, A) = r^2(1 - r)(1 - Ar)\left[1 - Ar - r(1 + Ar)\right] e^{-6Ar}$$

eşitlikleri mevcuttur.

İspat. $f(z)=zh(z)\overline{g(z)}=s(z)\overline{g(z)}$ log-harmonik fonksiyonu için Jakobiyen fonksiyonu

$$J_f(z)=|f_z(z)|^2-|f_{\overline{z}}(z)|^2=|f(z)|^2\left(\left|\frac{s'(z)}{s(z)}\right|^2-\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2\right)$$

şeklindedir. Bu ifadeye dair sınırları elde etmek için Lemma 4.1.14 ve Lemma 4.1.15 kullanılarak;

$$\begin{cases}\dfrac{(1-r)(1-Ar)}{r(1-Br)}<\left|\dfrac{s'(z)}{s(z)}\right|+\left|\dfrac{g'(z)}{g(z)}\right|<\dfrac{(1+r)(1+Ar)}{r(1+Br)}, & B\neq 0;\\ \\ \dfrac{(1-r)(1-Ar)}{r}<\left|\dfrac{s'(z)}{s(z)}\right|+\left|\dfrac{g'(z)}{g(z)}\right|<\dfrac{(1+r)(1+Ar)}{r}, & B\neq 0;\end{cases} \tag{4.35}$$

ve

$$\begin{cases}\frac{(1+Br)(1-Ar)-r(1+Ar)(1-Br)}{r(1-B^2r^2)}<\left|\frac{s'(z)}{s(z)}\right|-\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|<\frac{(1-Br)(1+Ar)+r(1-Ar)(1+Br)}{r(1-B^2r^2)}, & B\neq 0;\\ \\ \frac{1-Ar-r(1+Ar)}{r}<\left|\frac{s'(z)}{s(z)}\right|-\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|<\frac{1+Ar+r(1-Ar)}{r}, & B=0;\end{cases} \tag{4.36}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Ayrıca Teorem 4.1.10 da f fonksiyonunun modülü için bulunan sınırlar da kullanılırsa istenen sonuç elde edilir. □

Teorem 4.1.17. $f(z)=zh(z)\overline{g(z)}=s(z)\overline{g(z)}\in\mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ *ise*

$$\begin{cases}-r(\dfrac{1-Br}{1+Br})^{\frac{A-B}{B}}(\dfrac{1-Ar}{1-Br})<|g'(z)|<r(\dfrac{1+Br}{1-Br})^{\frac{A-B}{B}}(\dfrac{1+Ar}{1+Br}), & B\neq 0;\\ \\ -re^{-2Ar}\left(1-Ar\right)<|g'(z)|<re^{2Ar}\left(1+Ar\right), & B=0;\end{cases} \tag{4.37}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

İspat. $f(z)\in\mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ fonksiyonu için Lemma 4.1.15 ün kullanılmasıyla

$$\begin{cases}-\left(\dfrac{1-Ar}{1-Br}\right)<\left|\dfrac{g'(z)}{g(z)}\right|<\left(\dfrac{1+Ar}{1+Br}\right), & B\neq 0;\\ \\ -\left(1-Ar\right)<\left|\dfrac{g'(z)}{g(z)}\right|<\left(1+Ar\right), & B=0;\end{cases}$$

eşitsizlikleri bilinmektedir. Bu eşitsizlikte $|g(z)|$ için Teorem 4.1.9 da bulunan sınırlar gözönüne alınarak istenen distorsiyonlar elde edilir. □

Teorem 4.1.18. *$(zh(z))\in\mathcal{S}^*(A,B)$ ise*

$$\begin{cases}\dfrac{1}{(1-Br)^{\frac{B-A}{B}}}\left(\frac{1-(A-B)r-ABr^2}{1-B^2r^2}\right)\leq |h(z)+zh'(z)|\leq \dfrac{1}{(1+Br)^{\frac{B-A}{B}}}\left(\frac{1+(A-B)r-ABr^2}{1-B^2r^2}\right), & B\neq 0;\\ \\ e^{-Ar}(1-Ar)\leq |h(z)+zh'(z)|\leq e^{Ar}(1+Ar), & B=0;\end{cases} \tag{4.38}$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat. $(zh(z))\in\mathcal{S}^*(A,B)$ ise Janowski yıldızıl fonksiyonlar için

$$\begin{cases}\left|1+z\dfrac{h'(z)}{h(z)}-\dfrac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right|\leq\dfrac{(A-B)r}{1-B^2r^2}, & B\neq 0;\\ \\ \left|1+z\dfrac{h'(z)}{h(z)}-1\right|\leq Ar, & B=0;\end{cases}$$

eşitsizlikleri yazılabilmektedir. Bu eşitsizliklerden hareketle

$$\begin{cases}\dfrac{1-(A-B)r-ABr^2}{1-B^2r^2}\leq\left|1+z\dfrac{h'(z)}{h(z)}\right|\leq\dfrac{1+(A-B)r-ABr^2}{1-B^2r^2}, & B\neq 0;\\ 1-Ar\leq\left|1+z\dfrac{h'(z)}{h(z)}\right|\leq 1+Ar, & B=0;\end{cases}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizliklerde de $|h(z)|$ için Teorem 4.1.8 de elde edilen sınırların kullanılmasıyla istenen sonuç elde edilir. □

Teorem 4.1.19. *$f(z)=zh(z)\overline{g(z)}$ $\mathbb{D}$ üzerinde $0\notin h.g(\mathbb{D})$ olacak şekilde log-harmonik bir fonksiyon olsun. Bu halde $f\in\mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ olması için gerek ve yeter şart $\upsilon(z)=zh(z)/g(z)\in\mathcal{S}^*(A,B)$ olmasıdır.*

İspat. $f(z)=zh(z)\overline{g(z)}\in\mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ olsun. Bu halde,

$$\mathrm{Re}\frac{zf_z-\overline{z}f_{\overline{z}}}{f}=\mathrm{Re}\left(1+z\frac{h'(z)}{h(z)}-\overline{z}\frac{\overline{g'(z)}}{\overline{g(z)}}\right)=\mathrm{Re}\left(1+z\frac{h'(z)}{h(z)}-z\frac{g'(z)}{g(z)}\right)>\frac{1-A}{1-B}$$

olduğunu bilmekteyiz. $\upsilon(z)=z\frac{h(z)}{g(z)}$ olduğundan

$$\mathrm{Re}\quad z\frac{\upsilon'(z)}{\upsilon(z)}=\mathrm{Re}\left(1+z\frac{h'(z)}{h(z)}-z\frac{g'(z)}{g(z)}\right)>\frac{1-A}{1-B}$$

yıldızıllık koşulu elde edilir.

$h(0)=g(0)=1$ olduğundan $\upsilon(0)=0.\frac{h(0)}{g(0)}=0$ elde ederiz. Ayrıca f fonksiyonu yalınkat olduğundan $0\notin f_z(\mathbb{D})$ dir.

$$\left(\upsilon\circ f^{-1}\right)(\varphi)=q_1(\varphi)=\upsilon|\left(g\circ f^{-1}\right)(\varphi)|^{-2}$$

fonksiyonu $f(\mathbb{D})$ de yerel yalınkattır. Böylece

$$z\frac{\upsilon'(z)}{\upsilon(z)} = (1-w(z))z\frac{f_z}{f} \neq 0(\forall z \in \mathbb{D})$$

dir (Lemma 3.3.2). Dolayısıyla υ fonksiyonu, $\mathbb{D}$ üzerinde yalınkattır ([4] Lemma 2.3'den). Böylece $\upsilon \in \mathcal{S}^*(A,B)$ elde ederiz.

Tersine, $\upsilon \in \mathcal{S}^*(A,B)$ olsun ve her $z \in \mathbb{D}$ için $w \in H(\mathbb{D})$, $|w(z)| < 1$ şeklinde verilsin.

$z\frac{\upsilon'(z)}{\upsilon(z)} = (1-\frac{1-A}{1-B})p(z) + \frac{1-A}{1-B}$ ve $p(0)=1$, $Rep(z) > 0$, $p(z) \in H(\mathbb{D})$ olmak üzere

$$g(z) = exp\left[\int_0^z \frac{w(s)\upsilon'(s)}{(1-w(s))\upsilon(s)}ds\right]$$

fonksiyonunu inceleyelim.

Ayrıca $h(z) = \frac{\upsilon(z)g(z)}{z}$ ve $f = zh(z)\overline{g(z)} = \upsilon(z)|g(z)|^2$ olsun. Bu halde h ve g fonksiyonları $\mathbb{D}$ üzerinde sıfırlanmayan, $h(0)=g(0)=1$ şeklinde normalize edilen analitik fonksiyonlardır ve f lineer olmayan

$$\overline{f_{\overline{z}}} = [w\overline{f}/f]f_z$$

eliptik diferansiyel denkleminin w ya göre bir çözümüdür.

İspatın ilk kısmında yıldızıllık koşulu için yapılan işlemlere benzer işlemler yapılarak

$$\frac{\partial \arg f(re^{i\theta})}{\partial\theta} = \mathrm{Re}\frac{zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}}{f} = \mathrm{Re} \quad z\frac{\upsilon'(z)}{\upsilon(z)} > \frac{1-A}{1-B}$$

elde edilir.

Ayrıca

$$\left(f \circ \upsilon^{-1}\right)(\varphi) = q_2(\varphi) = \varphi|\left(g \circ \upsilon^{-1}\right)(\varphi)|^2$$

fonksiyonu $\upsilon(\mathbb{D})$ üzerinde yerel yalınkattır. Böylece f nin yalınkat olduğu sonucunu elde ederiz ([4] Lemma 2.3'den). Bu halde $f \in \mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ dir. □

Teorem 4.1.20. *$f(z) = zh(z)\overline{g(z)} = s(z)\overline{g(z)} \in \mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ ise*

$$|a_n| \leq \begin{cases} |b_n| + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{i=0}^{k}\frac{|A-B+iB|}{i+1}\right)|b_{n-k-1}|, & B \neq 0; \\ \\ |b_n| + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{i=0}^{k}\frac{|A|}{i+1}\right)|b_{n-k-1}|, & B = 0 \end{cases} \tag{4.39}$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat. $f(z) = zh(z)\overline{g(z)} \in \mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ olduğunda $zh(z)/g(z) = s(z) \in \mathcal{S}^*(A,B)$ olacağını Teorem 4.1.19 da ispatladık. Bu halde

$$zh(z) = s(z)g(z) \tag{4.40}$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada hem $\mathcal{S}^*(A,B)$ sınıfının tanımından hem de normalizasyonlardan dolayı

$$s(z) = z + s_2z^2 + s_3z^3 + s_4z^4 + ... + s_nz^n + s_{n+1}z^{n+1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} s_nz^n, s_1 = 1$$

$$h(z) = 1 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + ... + a_nz^n + a_{n+1}z^{n+1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n, a_0 = 1$$

$$g(z) = 1 + b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 + b_4z^4 ... + b_nz^n + b_{n+1}z^{n+1} + ... \sum_{n=0}^{\infty} b_nz^n, b_0 = 1$$

Taylor Açılımları mevcuttur. (4.40) eşitliğinde yukarıdaki Taylor Açılımları kullanılırsa,

$$\begin{cases} s_2 + b_1 = a_1, \\ s_3 + s_2b_1 + b_2 = a_2, \\ s_4 + s_3b_1 + s_2b_2 + b_3 = a_3, \\ ... \\ s_{n-1} + s_{n-2}b_1 + ... + s_4b_{n-5} + s_3b_{n-4} + s_2b_{n-3} + b_{n-2} = a_{n-2}, \\ s_n + s_{n-1}b_1 + ... + s_4b_{n-4} + s_3b_{n-3} + s_2b_{n-2} + b_{n-1} = a_{n-1}, \\ s_{n+1} + s_nb_1 + ... + s_4b_{n-3} + s_3b_{n-2} + s_2b_{n-1} + b_n = a_n, \\ s_{n+2} + s_{n+1}b_1 + ... + s_4b_{n-2} + s_3b_{n-1} + s_2b_n + b_{n+1} = a_{n+1} \\ ... \end{cases} \tag{4.41}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklere üçgen eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\begin{cases} |a_1| \le |s_2| + |b_1|, \\ |a_2| \le |s_3| + |s_2||b_1| + |b_2|, \\ |a_3| \le |s_4| + |s_3||b_1| + |s_2||b_2| + |b_3|, \\ \dots \\ |a_{n-2}| \le |s_{n-1}| + |s_{n-2}||b_1| + \dots + |s_4||b_{n-5}| + |s_3||b_{n-4}| + |s_2||b_{n-3}| + |b_{n-2}|, \\ |a_{n-1}| \le |s_n| + |s_{n-1}||b_1| + \dots + |s_4||b_{n-4}| + |s_3||b_{n-3}| + |s_2||b_{n-2}| + |b_{n-1}|, \\ |a_n| \le |s_{n+1}| + |s_n||b_1| + \dots + |s_4||b_{n-3}| + |s_3||b_{n-2}| + |s_2||b_{n-1}| + |b_n|, \\ |a_{n+1}| \le |s_{n+2}| + |s_{n+1}||b_1| + \dots + |s_4||b_{n-2}| + |s_3||b_{n-1}| + |s_2||b_n| + |b_{n+1}| \\ \dots \end{cases} \tag{4.42}$$

eşitsizlikleri elde edilir. $\phi(z) \in \mathcal{S}^*(A, B)$ olduğundan dolayı

$$|s_n| \le \begin{cases} \prod_{p=0}^{n-2} \dfrac{|A - B + pB|}{p+1}, & B \neq 0; \\ \\ \prod_{p=0}^{n-2} \dfrac{|A|}{p+1}, & B = 0; \end{cases} \tag{4.43}$$

eşitsizlikleri de bilinmektedir([19]). Bu eşitsizliklerin kullanılmasıyla istenen eşitsizlikler elde edilir.

- Bu adımdan sonra yapacağımız hesapları yalnızca $B \neq 0$ halinde incelememiz yeterlidir çünkü ifadelerde $B = 0$ kullanılmasıyla benzer sonuçlar kolayca elde edilebilmektedir.

Şimdi matematiksel indüksiyon yöntemiyle (4.39) ifadesinin doğruluğunu inceleyelim:

$n = 1$ için:

(4.42) eşitliğinde a_1 katsayısı için (4.43) eşitsizliğinin kullanılmasıyla,

$$|a_1| \le |s_2| + |b_1| \le \prod_{p=0}^{n-2} \frac{|A - B + pB|}{p+1} + |b_1| = \prod_{p=0}^{0} \frac{|A - B + pB|}{p+1} + |b_1| = |A - B| + |b_1|$$

şeklinde bulunur. Bu kez de (4.39) de $n = 1$ halini incelersek,

$$|a_1| \le |b_1| + \sum_{k=0}^{0} \left(\prod_{i=0}^{k} \frac{|A - B + iB|}{i+1} \right) |b_{-k}| = |b_1| + |A - B||b_0| = |A - B| + |b_1|$$

buluruz ki bu da bize n=1 için (4.39) un doğru olduğunu gösterir.

İfadeyi n için doğru kabul edip $n+1$ için doğruluğunu araştıralım. (4.41) eşitliklerinden

$$a_{n+1} = s_{n+2} + s_{n+1}b_1 + s_nb_2 + s_{n-1}b_3 + ... + s_4b_{n-2} + s_3b_{n-1} + s_2b_n + b_{n+1} \Rightarrow$$

$$a_{n+1} = a_n + b_{n+1} + \sum_{i=0}^{n}(s_{i+2} - s_{i+1})b_{n-i} = a_n + b_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} s_{i+2}b_{n-i} - \sum_{i=1}^{n} s_{i+1}b_{n-i} - b_n$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu adımda

$$|s_{i+1}| \leq \prod_{p=0}^{i-1} \frac{|A-B+pB|}{p+1}, \quad |s_{i+2}| \leq \prod_{p=0}^{i} \frac{|A-B+pB|}{p+1}$$

eşitsizliklerini kullanarak;

$$|a_{n+1}| \leq |a_n| + |b_{n+1}| - |b_n| + \sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{p=0}^{i} \frac{|A-B+pB|}{p+1}\right)|b_{n-i}| - \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{p=0}^{i-1} \frac{|A-B+pB|}{p+1}\right)|b_{n-i}|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{p=0}^{i-1} \frac{|A-B+pB|}{p+1}\right)|b_{n-i}| = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{i=0}^{k} \frac{|A-B+iB|}{i+1}\right)|b_{n-k-1}|$$

olduğundan

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &\leq |a_n| + |b_{n+1}| + \sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{p=0}^{i} \frac{|A-B+pB|}{p+1}\right)|b_{n-i}| \\ &\quad - \left[|b_n| + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{i=0}^{k} \frac{|A-B+iB|}{i+1}\right)|b_{n-k-1}|\right] \\ &= |b_{n+1}| + \sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{p=0}^{i} \frac{|A-B+pB|}{p+1}\right)|b_{n-i}| \end{aligned}$$

bulunur ki bu da ifadenin $n+1$ için doğru olduğunu gösterir.

O halde her $n \in \mathbb{N}$ için (4.39) eşitsizlikleri doğrudur. □

Bölüm 5

SONUÇ

Tez çalışmasında, log-harmonik fonksiyonların bir alt ailesi olan $S^*_{lh}(A,B)$ sınıfı tanımlanmıştır. Bu aileye ait fonksiyonlar $f = zh(z)\overline{g(z)} = s(z)\overline{g(z)}$ biçiminde olup, $s(z) \in \mathcal{S}^*(A,B)$, $h(0) = g(0) = 1$ şeklindedir. Böylelikle sınıfa ait genel karakterizasyon, analitik kısmının Janowski Yıldızıl fonksiyon sınıfına ait olmasıdır. Bu fonksiyonların analitik ve co-analitik kısımlarına dair distorsiyonları elde edilerek, fonksiyonların kendilerinin sınırları belirlenmiştir. Ayrıca bu sınıfa ait Marx-Strohhacker eşitsizliği elde edilip, yıldızıllık yarıçapı hesaplanmıştır.

Log-harmonik fonksiyonlar için Jakobiyen tanımı kullanılarak ve bulunan birtakım distorsiyonlar yardımıyla da Jakobiyenin sınırları elde edilmiştir.

Katsayı eşitsizliği ise analitik fonksiyonlardan bu yana uğraşılagelen bir problemdir. Log-harmonik fonksiyonlarla ilgili yapılan çalışmalar henüz bu yönde olmamıştır. Bu çalışmanın son teoreminde, üzerinde çalışılan sınıfa ait fonksiyonların analitik ve co-analitik kısımlarının katsayıları arasında bir eşitsizlik elde edilmiştir.

$\mathcal{S}^*_{lh}(A,B)$ ile tanımlanan sınıf için A ve B parametrelerine değerler verilerek, yeni alt sınıfları elde etmek mümkündür. Bunun yanısıra bu sınıfın tanımından ötürü, analitik kısım yıldızıl fonksiyon sınıfına ait seçilebileceği gibi diğer analitik fonksiyon sınıflarına ait de seçilebilmesi mümkün olabilir.

KAYNAKLAR

[1] Z. Abdulhadi, Close-to-Starlike Logharmonic Mappings, *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, 19(3), 563-574, 1996.

[2] Z. Abdulhadi & Y. Abu Muhanna, Starlike Logharmonic Mappings of Order α, *JIPAM*, Vol. 7, 4(123), 2006.

[3] Z. Abdulhadi & D. Bshouty, Univalent Functions in $H.\overline{H}(D)$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 305, 841-849, 1988.

[4] Z. Abdulhadi & W. Hengartner, Spirallike Log-harmonic Mappings, *Complex Variables Theory Appl.*, 9(2-3)(1987), 121-130.

[5] L. V. Alfhors, *Complex Analysis*, Mc Graw-Hill, New York, 1966.

[6] M. K. Aouf, On a Class of p-Valent Starlike Functions of Order α, *Internat. J. Math. and Math. Sci.*, Vol.10, No. 4(1987), 733-744.

[7] J. Clunie & T. Sheil-Small, Harmonic Univalent Functions, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A. Math.*, 9, 3-25, 1984. MathSciNet.

[8] L. De Branges, A Proofofthe Bieberbach Conjecture, *Acta Math.*, 154(1-2), 137-152, 1985.

[9] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[10] P. L. Duren, *Harmonic Mappings in The Plane*, Cambridge University Press, 2004.

[11] A. W. Goodman, *Univalent Functions*, Mariner Publishing Co Tampa, FL, Vol. I(1983), xvii+246 pp. ISBN: 0-936166-10-X.

[12] I. Graham & G. Kohr, *Geometric Function Theory in the Higher Dimensions*, Pure and Applied Mathematics, CRC Press, 2003, ISBN: 0824709764, 9780824709761.

[13] I. S. Jack, Functions Starlike and Convex of Order α, *J. London Math. Soc.* 3**2**(1971), 469-474.

[14] W. Janowski, *Some Extremal Problems For Certain Families of Analytic Functions*, Annales Polinici Mathematics XXVIII(1973), 298-326.

[15] K. Kuroki & S. Owa, Some Applications of Janowski Functions, *International Short Joint Research Workshop (Study On Non-Analytic and Univalent Functions and Applications), Research Institute for Mathematical Science, Kyoto University(RIMS)*, May (2008).

[16] H. Lewy, On the Non-vanishing of the Jacobian in Certain One to One Mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42(1936), 689-692.

[17] Petru T. Mocanu & Maxwell O. Reade, The Radius of $\alpha-$ Convexity For The Class Of Starlike Univalent Functions, $\alpha-$Real, *Proceedings of AMS.*, Vol 51, 2(1975), 395-400.

[18] H. E. Özkan, Log-harmonic Univalent Functions For Which Analytic Part is Janowski Starlike Functions, *Internat. Symp. on Development of GFTA*, 222-226, ISBN: 978-976-5048-32-6, 2008.

[19] Y. Polatoğlu & M. Bolcal, A Coefficient Inequality For the Class of Analytic Functions in the Unit Dics, *Internat. J. Math. and Math. Sci.*, Vol.2003, No. 59(2003), 3753-3759.

[20] C. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen.

[21] H. Silverman & E. M. Silvia, Subclasses of Starlike Functions Subordinate to Convex Functions, *Canad J. Math.*, 37(1985), 48-61.

[22] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1970.

ÖZGEÇMİŞ

Hatice Esra Özkan, 5 Kasım 1982 de İstanbul'da doğmuştur. Lise eğitimini Bahçelievler Kemal Hasoğlu Lisesi'nde tamamladıktan sonra 1999 yılında İstanbul Kültür Üniversitesi Matematik-Bilgisayar Bölümü'ne kaydolmuştur. 2003 yılında mezuniyetinin ardından Kültür Üniversitesi Matematik-bilgisayar Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başlamıştır, aynı zamanda yüksek lisans öğrenimine de başlamıştır. Doktora öğrenimine 2005 yılında başlamıştır.