

**T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜZ TANIMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MESUT YILDIRIM

Anabilim Dalı: Matematik-Bilgisayar

Programı: Matematik-Bilgisayar

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. S. Hikmet ÇAĞLAR

Eylül 2011

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda bana bugüne kadar büyük emekleri geçen Sayın Yrd. Doç. Dr. Hikmet ÇAĞLAR'a ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Levent CUHACI'ya, manevi emeklerini ve desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen başta tez çalışmam süresinde kaybettiğim rahmetli annem Atiye YILDIRIM, babam Yaşar YILDIRIM ve kardeşim Melike YILDIRIM'a, bu süreçte arkamda hep desteğini hissettiğim Gökçen BİNDAL'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Mesut YILDIRIM

Eylül 2011

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	ii
KISALTMALAR.....	v
TABLO LİSTESİ.....	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÖZET.....	viii
SUMMARY.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Yüz Tanıma Sisteminin Tarihçesi.....	2
1.2 Yüz Tanıma Sistemin Üzerine Önceki Çalışmalar.....	3
2. REGRESYON ANALİZİ.....	6
2.1 Tek Değişkenli Regresyon Analizi.....	6
2.2 Çok Değişkenli Regresyon Analizi.....	6
2.3 Değişkenler Arasındaki İlişkiler.....	7
2.3.1 Fonksiyonel İlişki.....	8
2.3.2 İstatistiksel İlişki.....	9
3. BASİT DOĞRUSAL REGRESYON ANALİZİ.....	11
3.1 En Küçük Kareler Yöntemi.....	14
3.2 Varyansın σ^2 Kestirimi.....	18
4. ÇOKLU LİNEER REGRESYON ANALİZİ.....	19
4.1 Doğrusal Çoklu Regresyon Analizinde Varsayımlar	20
4.2 Çoklu Bağlantı	22
4.3 Çoklu Bağlantıyı Belirleme Yöntemleri	23
4.4 Çoklu Bağlantıyı Giderme Teknikleri.....	24
5. RIDGE REGRESYON ANALİZİ.....	25
5.1 Ridge Kestiricisi ile En Küçük Kareler Kestiricisi Arasındaki İlişki.....	26
5.2 Ridge Parametresinin (k) Belirlenmesi.....	28
5.2.1 Ridge izi yöntemi.....	28
5.2.2 Tekrarlayıcı Kestirim Yöntemi.....	29
5.2.3 k'nın Nokta Kestirimi Yöntemi.....	29

6. UYGULAMA	30
6.1 Rakam Tanıma Üzerine Uygulama	30
6.2 Uygulamanın Yüz Resmi Üzerindeki Etkileri	36
6.2.1 Yüz Resmindeki Lokal Bölgelerin Alınması	36
6.2.2 Sistemin EKK Yöntemi ile Çözülmesi	39
6.2.3 Sistemin RR Yöntemi ile Çözülmesi	42
7. SONUÇ	44
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ	47
EKLER	48

KISALTMALAR

RR : Ridge Regresyon

EKK : En Küçük Kareler

σ^2 : Varyans

TS : Test Sonucu

TABLO LİSTESİ

Tablo 6.1 EKK Yöntemiyle Elde Edilen β_i 'ler.....	32
Tablo 6.2 RR Yöntemiyle Elde Edilen Hata Kareleri Ortalamaları.....	35
Tablo 6.3 EKK Yöntemi ile Yüz Resminden Elde Edilen β_i 'ler.....	39
Tablo 6.4 Resim Verisinden RR Yöntemiyle Elde Edilen Hata Kareleri Ortalamaları.....	42

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 2.1 : Fonksiyonel İlişkinin Grafıksel Gösterimi	8
Şekil 2.2 : Çalışanların Performans Değerlendirmesi	9
Şekil 3.1 : Basit Doğrusal Regresyon Modelinin Grafıksel Gösterimi	11
Şekil 3.2 : Hata Teriminin Normal Dağılımı	13
Şekil 4.1 : Çoklu Regresyon Analizi Model Grafiği	19
Şekil 6.1 : Rakamların Matrisel Formda Yazılması	30
Şekil 6.2 : Yüz Resminin Eşit Bölgelere Ayrılışı	37
Şekil 6.3 : Yüz Resminden Kare Bölğelerin Alınması	37

Üniversitesi : **İstanbul Kültür Üniversitesi**
Enstitüsü : **Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı : **Matematik-Bilgisayar**
Programı : **Matematik-Bilgisayar**
Tez Danışmanı : **Yard. Doç. Dr. S. Hikmet ÇAĞLAR**
Tez Türü ve Tarihi : **Yüksek Lisans – Eylül 2011**

ÖZET

YÜZ TANIMA

Mesut YILDIRIM

Bu zamana kadar yapılan çalışmalarda, EnKüçük Kareler metodu ve çoğu zaman istatistik alanında kullanılan Ridge Regresyon metoduna sıklıkla rastlanabilir. Bu çalışmada yüz tanıma sistemlerinde kullanılan sınıflandırma işlevi için en küçük kareler tahmin edicisine alternatif olan ridge tahmin edicisi, ortalama kare hatalarına dayanarak karşılaştırılmıştır. Bunun için insan yüzü resminin belirli lokal bölgelerinden alınan verilerle işlemler yapılmış ve ridge tahmin edicisinin çoklu bağlantıyı ortadan kaldırarak daha iyi bir model yaklaşımı gösterdiği görülmüştür. Bu çalışmada SPSS ve Matlab programları kullanılarak, yazılım kısmı C++ programlama dili ile gerçekleştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler : **Regresyon Analizi, Yüz Tanıma, Ridge Regresyon, En Küçük Kareler, Sınıflandırma**

University : **İstanbul Kültür University**
Institute : **Institute of Science**
Science Programme : **Mathematics and Computer Science**
Programme : **Mathematics and Computer Science**
Supervisor : **Asst. Prof. Dr. S. Hikmet ÇAĞLAR**
Degree Awarded and Date : **MS – September 2011**

SUMMARY

FACE RECOGNITION

Mesut YILDIRIM

Studies done up to now, the Least Squares method and Ridge Regression method are often used in the field of statistics can be found in most of the time. In this study, the classification function is used for facial recognition systems, which is an alternative to Least-Squares Estimators, Ridge Estimator, is compared on the basis of mean square errors. To do this, image of the human face of certain transactions made with data from local districts, Ridge Estimator eliminates the multicollinearity and it shows a better approach to the model. In this study, SPSS and Matlab programs carried out by using the C++ programming language.

Keywords : **Regression Analysis, Face Recognition, Ridge Regression, Least Square Method, Classification**

1. GİRİŞ

Bireylerin, insanlardan çok bilgisayarlar ile etkileşim halinde olacağını öngören dördüncü nesil bilgi teknolojilerinin[7] bize getirdikleri içerisinde, insan faktörünün günlük yaşantımıza olan etkisine yönelik çalışmaların arttığı görülmektedir. Geliştirilen akıllı sistemlerdeki etkileşimin esas içeriğini bireylerin tanınması ve kimliklendirilmesi oluşturmaktadır. Ancak kullanılan bu sistemlerde yine insan kaynaklı oluşan şifre unutulması, şifre çalınması, süre aşımına gidilmesi gibi problemler biyometrik sistemlerin üzerinde çalışılmasını yoğunlaştırmıştır.

Biyometrik (Biometric) yunanca Bio (yaşam) ve Metric (ölçüm) kelimelerinin birleşiminden oluşmuştur. Biyometrik tabiri kişinin fizyolojik veya davranışsal özelliklerini analiz eden teknolojileri ifade eder. Fiziksel biyometrik teknikleri, parmak izi, el ve parmak geometrisi, yüz tanıma, iris ve retina taraması ve vasküler desen tanımayı içerir. Davranışsal biyometrik teknikler, hoparlör ve ses tanıma, imza doğrulamayı içermektedir. Biyometrik tanıma sistemlerinin geliştiği bu yüzyılda, günümüz teknolojisinde özellikle güvenlik problemlerinin baş göstermesiyle yüz tanıma sistemleri gerek kullanım gerekse geliştirilme açısından büyük önem sahibi olmuştur. Araştırmacıların örüntü tanıma altında yer alan yüz tanımaya verdikleri önemin altında, bu sistemlerin maliyet ve hız açısından diğerlerinden üstün olduğu yatmaktadır.

Yüz tanıma sistemleri son zamanlarda yaygın bir şekilde kullanılmaya başlamıştır. Özellikle sıkı güvenlik gerektirecek alanlarda (havaalanları, emniyet müdürlükleri, bankalar, spor alanları, kurumsal firmaların iş giriş-çıkış takiplerinde) kullanılmaya başlanmıştır.

Araştırmacılar tarafından bir çok teknik geliştirilmiş olmasına karşın yüz tanıma sistemlerinin asıl probleminden bir tanesi olan ortam şartlarının değişmesi sorununa çeşitli çözüm önerileri getirilmeye çalışılmıştır.

Bir sonraki bölümde yüz tanıma sistemlerinin tarihçesi ve kullanım alanları ele alınmıştır.

1.1 Yüz Tanıma Sisteminin Tarihçesi

Yüz tanıma sistemi, gerek bilim adamlarının konuya teorik ilgileri gerekse konunun uygulamadaki önemi açısından bilgisayarda görüntü vizyonu kadar eskidir. Her ne kadar kimliklemede diğer yöntemler (parmak izi tanıma, iris tanıma v.b) doğru cevaplar verebilse de, yüz tanıma araştırmacıların odak noktası haline gelmiştir.

1960'ların başından itibaren bilim adamları bilgisayarla yüz tanıma konusunda çalışmaya başlamışlar ve o günden bu yana önemli gelişmelere imza atmışlardır. Bizi biz yapan yüzümüzdeki bireysel özellikleri kullanarak değişik yöntemler ortaya atılmıştır. Bunlardan ilki sayılabilecek 'Eigenfaces' yöntemi Matthew Turk ve Alex Pentland tarafından 1987 yılında ortaya atılmıştır. Yüz tanımda kullanılan başlıca yöntemler aşağıdaki gibidir:

- PCA (Principal Component Analysis)
- ICA (Independent Component Analysis)
- LDA (Linear Discriminant Analysis)
- EP (Evolutionary Pursuit)
- EBG (Elastic Bunch Graph Matching)
- Kernel Methods
- Trace Transform
- AAM (Active Appearance Model)
- 3-D Morphable Model
- 3-D Face Recognition
- Bayesian Framework
- SVM (Support Vector Machine)
- HMM (Hidden Markov Models)

- Boosting & Ensemble

Yüz tanıma yöntemi kullanılarak 2000 yılında Meksika’da yapılan seçimlerde birden fazla oy kullanılmasını engelleyecek bir sistem oluşturulmuştur. Ayrıca 2001 yılında ABD’de yapılan NFL (National Football League) finalinde 19 suçlu yakalanmıştır. ABD’de verilen ehliyet, kimlik gibi belgelerde bir kişinin farklı adlarla kayıt yaptırılması amacıyla yüz tanıma sistemi kullanılmaktadır.

1.2 Yüz Tanıma Sistemi Üzerine Önceki Çalışmalar

Geometrik şekillere dayalı yöntemler üzerindeki bazı çalışmalar (Bledsoe, 1966) ve (Goldstein, 1971) tarafından yapılmış olmasına rağmen ilk otomatikleştirilmiş yüz tanıma sistemini geliştiren insan Kanade’ idi [8]. Geometrik şekiller metodu insanların bir takım aynı olan özelliklerine bağlı olarak ortaya çıkar. Bunlar; iki göz, bir burun, bir ağız v.s. Bu bileşenler arasındaki göreceli boyut ve mesafe kişiden kişiye değiştiğinden dolayı bu farklılık sınıflandırma amaçlı kullanılabilir.

[10] Olivetti veritabanını (40 kişinin 10’ar farklı yüz ifadelerinden oluşan resmi) kullanarak yaptığı doğru tanımda %87’lik bir doğru tanıma elde etmiştir.

Bir başka çalışmada [9] test resimleri ve veritabanı için kullanılan örnekler, Hidden Markov modeli tarafından üretilmiş olup tanıma amaçlı kullanılırlar. Samaria, 40 kişinin 200 deneme ve 200 test resmini kullanarak bu metodu uygulamıştır. Gizli Markov Modelini uygulayarak yaptığı doğru tanımda %84’lük bir doğru tanıma elde edilmiştir. Gizli Markov Modeli ses tanımda da başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Ne yazık ki örnekleri oluşturmak için gereken zaman oldukça uzun olduğu için yüz tanımda pek tutulan bir yöntem değildir.

Öz yüzler yaklaşımı ise ilk olarak [11] tarafından kullanılarak yüzü etkin bir şekilde göstermek için uygulanmıştır. Temel bileşen analizi olarak da bilinen Karhunen-Louve genişlemesine dayanmaktadır. Bu, bilgi teorisinde veriyi kodlama ve kodunu çözmede iyi bilinen bir tekniktir. Bu kişiler yüz resimleri gruplarından başlayarak bu resimlerin temel bileşenlerini hesaplamışlardır. Daha sonra da öz vektörün sadece küçük parçalarının ağırlıklı birleşimleri kullanılarak yüz resmini yeniden oluşturmuşlardır[12]. Bu metotlarını 115 yüz resmi veri tabanında test ettiler ve yaklaşık olarak %3 yanılma (hata) payıyla bir yüzü yeniden oluşturmak için sadece 40 öz vektörün yeterli olduğunu göstermişlerdir. Bundan kısa bir süre sonra yüzün simetrisini dikkate alarak (örneğin bütün yüzlerde gözler, burun v.s. aynı bölgede) orijinal metotlarını geliştirdiler. Algoritmayı 87 kişilik bir veritabanında test etmişlerdir.

Turk ve Petland[13] bu fikri daha da geliştirdi ve ilk tam otomatik sistemlerden birini üretmişlerdir. Kendi sistemlerini 16 kişinin 2500 resmi bulunan bir veri tabanında denemişlerdir. Resimler farklı bas uyumlarını, boyutları, ışıklandırma koşullarından seçilmiştir. Sistemleri, farklı ışıklandırmaya sahip resimler üzerinde %96, farklı bas uyumlarında %85, farklı görüntü ölçeklerinde %64 doğru sınıflandırma sonuçları elde edilmiştir.

[14] Kendi önceki sistemlerine kısmi özellikleri çıkarmak için tasarlanan bir öz şablon kullanmak ve tanıma işi için sadece özyüzler ile birlikte Bayesian tabanlı istatistik metotlar kullanmak gibi bir takım düzenlemeler yapmışlardır.

[15] Işık değişikliği çok fazla olduğu zaman özyüzler metodunun ciddi seviyede kötüleştiğini göstermişlerdir.

[16] Bir yüzü kodlamak için baskın özyüzü kullanmanın en uygun olduğunu ama tanıma işinde en uygun seçim olmadığını göstermişlerdir. 100 kişilik bir özyüz kullanılarak 45. ve 80. arasındaki herhangi bir 15 özyüz seçiminin, en iyi 15 özyüz kadar, iyi ayırım gücüne sahip olduğunu göstermişlerdir.

Bir diğer çalışmada [17] özyüzler ve bir yüzün cinsiyet ve ırk gibi özellikleri arasındaki ilişkileri incelemişlerdir. İkinci en büyük özyüzün tek başına bir kişinin

ırkını %88,8 oranında başarılı bir şekilde belirleyebildiğini göstermişlerdir. Aynı zamanda en büyük dört öz değerin toplamı %74,3 oranında doğru cinsiyet tahminini yapabildiğini göstermişlerdir. Her iki deneme de 50 bayan ve 50 erkekten oluşan 100 tane yüzde yapılmıştır.

[18] Az sayıda katsayılar kullanarak resmi göstermek için kesikli dalgacık dönüşümünü kullanmışlardır. Kullandıkları veri tabanı farklı nesnelerin 20000 renkli resminden oluşmuştur (bunların çoğu yüz resmi değildi). Burada ki amaç nesnenin şeklinin sadece taslağını veren bir deneme resmi kullanarak veritabanından en iyi karşılık gelen 20 nesneyi geri elde etmektir. Veritabanındaki her bir resmin kenar bilgisini elde etmek için kesikli dalgacık dönüşümünü kullanmışlardır. Kolay uygulamasından ve basitliğinden dolayı haar ana dalgacığı temel fonksiyon olarak kullanılmıştır. Bu deneyde veritabanındaki bütün resimler 128 x 128 boyutundaydı. Kesikli dalgacık dönüşümü bu resimlerin hepsine uygulandı ve bir dizi 128 x 128 katsayılı resimler oluşturulmuştur. En büyük 60 katsayı resmi görüntülemek için tutulmuştur. İlk katsayı nesnenin özet katsayılarını içermektedir. Diğer katsayılar nesne hakkında yatay, dikey ve diyagonal bilgiler vermektedir.

[19] Kesikli dalgacık dönüşümünü algılama ve sınıflandırma görevleri için ön cepheden çekilen resimlere uygulamışlardır.. Yüz bir kere algılanınca sadece iki sonuç adımı için yüz resmine kesikli dalgacık dönüşümünü uygulamışlardır. İkinci adımdan sonra asıl resim 16 katsayı matrisine bölünmüştür. İlk matris yüzün şeklinin tamamına karşılık gelen katsayıları içeriyordu (yaklaşık yüz olarak tanımlanıyordu) ve geriye kalan 15 matriste yüzün çapraz, dikey ve yatay katsayılarını gösteren katsayılardan ibarettir. Sunu da not etmek gerekir ki bu matrislerin her biri orijinal resmin 1/16 sı idi. Bu dalgacık katsayılarını kullanarak bir yüz için 21 tane özellik ortaya çıkarmışlardır.

2. REGRESYON ANALİZİ

Regresyon analizi, istatistiksel bir analiz yöntemi olup, bir bağımlı değişken ile bir veya birden çok bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi inceler. Regresyon analizi;

- Bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler arasında ilişki var mıdır?
- Eğer bir ilişki varsa bu ilişkinin gücü(bağımlılığı) nedir?
- Bağımlı değişkene ait ileri dönük değerleri tahmin etmek mümkün müdür?

gibi sorulara cevap aramaya çalışır.

Regresyon analizi tek ve çok değişkenli olmak üzere ikiye ayrılır.

2.1 Tek Değişkenli Regresyon Analizi

Tek değişkenli regresyon analizi(simple linear regression) bir bağımlı değişken ve bir bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi inceler.

2.2 Çok Değişkenli Regresyon Analizi

Çok değişkenli regresyon analizi(multiple linear regression) bir bağımlı değişken ve birden fazla bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi inceler.

Özünde regresyon analizinin amacı, bağımlı değişkenin bağımsız değişken ya da değişkenlerden herhangi birinin değişimine bağlı olarak nasıl hareket ettiğini incelemektir.

Bu analiz metodu; iş yaşamı ve davranış bilimleri başta olmak üzere, sosyal ve fen bilimlerinde ve bir çok farklı disiplinlerde sıklıkla kullanılmaktadır[4]. Bazı uygulamalardan örnekler verecek olursak;

- bir iş yerinde çalışanın performansı, yetenek testlerinde verdiği cevaplar ile iş yeri gerçek performans verileri arasındaki ilişkiden tahmin edilebilir,
- cerrahi bölümüne gelen hastaların hastanede yatış süreleri, hastanede geçirdiği süre ile operasyonun ciddiyeti arasındaki ilişkiden tahmin edilebilir,
- bir çocuğun kelime hazinesi bilgisi, çocuğun yaşı ve ailesinin eğitim düzeyleri arasındaki ilişkiden tahmin edilebilir,

şeklinde çoğu çalışma için regresyon analizi metodu uygulanabilir.

2.3 Değişkenler Arasındaki İlişkiler

İki değişken arasındaki değişken kavramı ile aile yapısındaki ev gelirleri ve ev giderleri arasındaki ilişki kavramı arasında benzer bir durum söz konusudur. Değişkenler arasındaki ilişkiyi iki başlık altında inceleyeceğiz ve bunlar şu şekildedir:

- Fonksiyonel İlişki
- İstatistiksel İlişki

2.3.1 Fonksiyonel İlişki

Fonksiyonel ilişkiyi bir matematik formülü olarak, x değişkenimizi bağımsız değişken, y değişkenimizi de bağımlı değişkenimiz olacak şekilde tanımlarsak, şu şekilde gösterebiliriz:

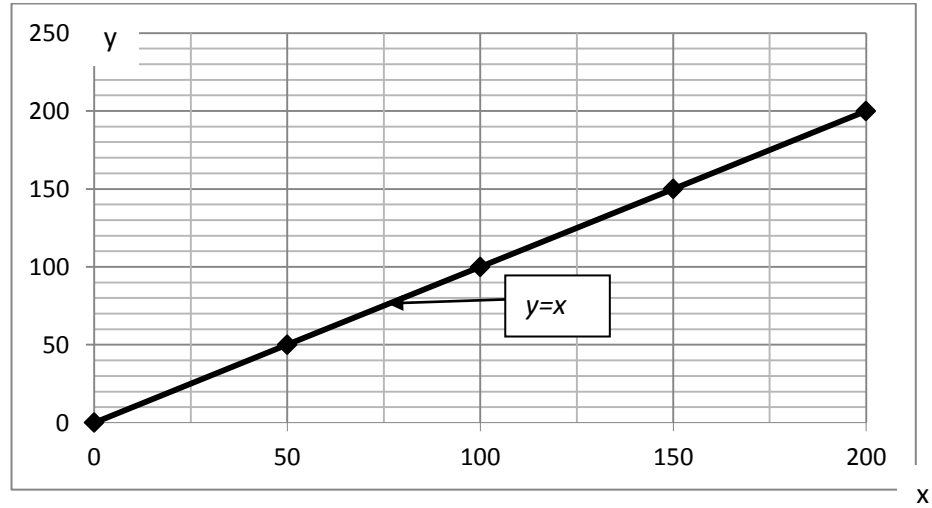
$$y = f(x) \quad (2.1)$$

Satış yapan bir firma için örnekleirsek;

x : satılan ürün miktarını

y : satılan her ürün için elde edilen kazanç

olacak şekilde tanımlarsak ve her bir ürünün 2TL'den satıldığını farzederseniz fonksiyonel ilişkimiz şu şekilde olmalı ve fonksiyonel ilişkinin grafiği Şekil 2.1'deki gibi olmalı.



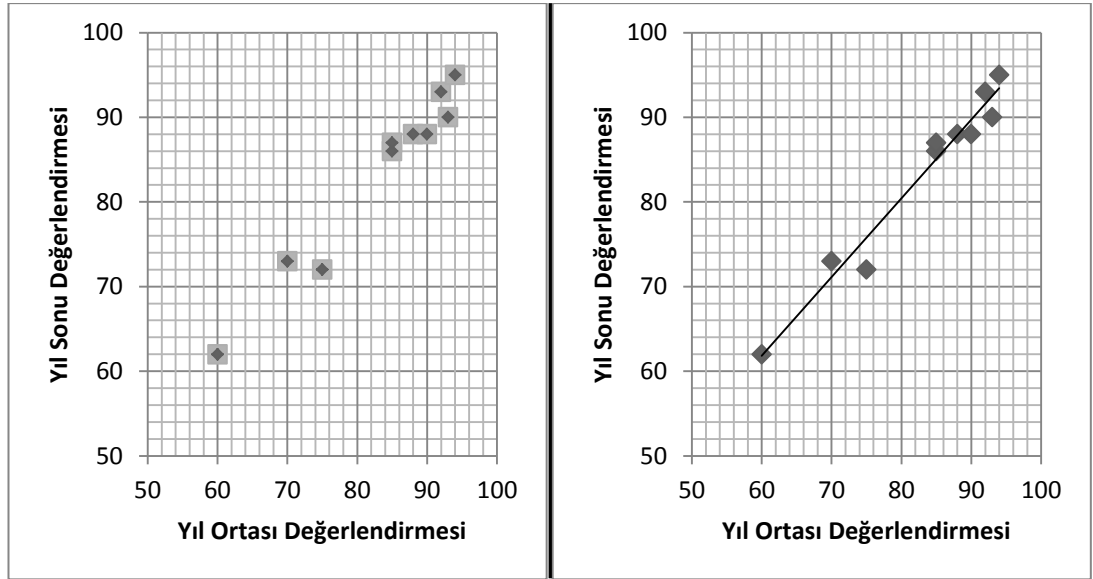
Şekil 2.1: Fonksiyonel İlişkinin Grafikselleştirilmesi

Grafik çizilirken fonksiyonel ilişkinin karakteristiğinden dolayı varolan her x değeri için elde edilen y değerlerimiz grafikteki doğrunun üstünde yer almıştır.

2.3.2 İstatistiksel İlişki

İstatistiksel ilişki fonksiyonel ilişkinin aksine, gözlemlerden elde ettiğimiz değerlerimiz, grafik üzerindeki eğrimizin ya da doğrumuzun üzerinde yer almayabilir. Bir örnekleme üzerinden gidilecek olursa;

bir işyerinde çalışan 10 çalışan üzerinden yıl ortası ve yıl sonu performans bilgilerini (0-100 aralığında) inceleyelim. Yıl sonu değerlendirme (y) bağımlı değişken ve yıl ortası değerlendirme (x) bağımsız değişkeni arasındaki ilişkiye bakalım. Şekil 2.2’de çalışanların aldıkları yıl ortası ve yıl sonu başarı notlarının dağılımı gösterilmiştir.



Şekil 2.2 : Çalışanların Performans Değerlendirmesi

Şekil 2.2’den de anlaşılacağı üzere, yıl sonu başarı değerlendirmeyle yıl ortası başarı değerlendirme arasında bir ilişki vardır. Yani, yüksek yıl ortası başarı değerine sahip bir çalışanın yüksek yıl sonu başarı değeri alma eğilimi vardır. Yine de bu ilişkinin en iyi ilişki olduğu düşünülmemeli çünkü bir saçılma söz konusudur. Örneğin, iki çalışan kişi de yıl ortasında 87 puan almışken, onların yıl sonu başarı

puanları farklıdır. İstatistiksel ilişkide noktaların saçılmasından kaynaklanan bu durum Şekil 2.2’de açık bir şekilde görülebilir.

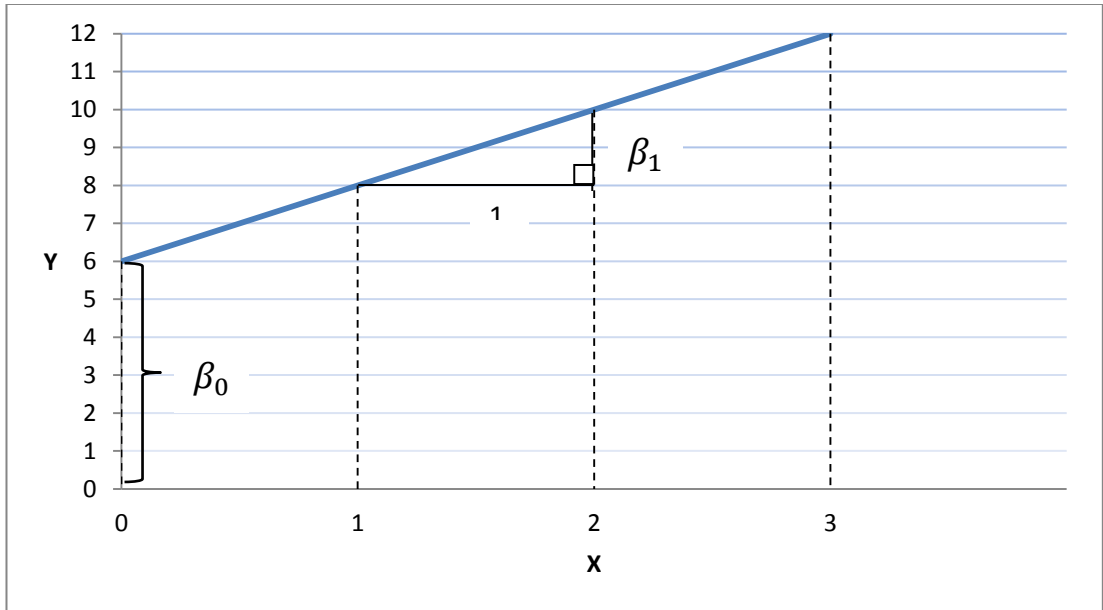
Şekil 2.2’de yıl sonu başarı değerleri ile yıl ortası başarı değerleri arasındaki istatistiksel ilişkiyi açıklayan doğru gösterilmiştir. Bu doğru, yıl ortası başarı değerlendirmesinin yıl sonu başarı değerlendirmesine ne kadar etki yaptığının eğilimini göstermektedir.

Her ne kadar fonksiyonel ilişki kadar kesin çözüm getirmesede istatistiksel ilişki, daha kullanışlıdır.

3. BASİT DOĞRUSAL REGRESYON ANALİZİ

Değişkenler arasında bulunduğu varsayılan gerçek doğrusal ilişki, tek bir serbest değişken içeren bir doğru denklemi ile gösterilirse basit doğrusal regresyon denklemi elde edilir. Basit doğrusal regresyon denklemi (3.1) şekilde tanımlanabilir.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (3.1)$$



Şekil 3.1 : Basit Doğrusal Regresyon Modelinin Grafikselleştirilmesi

Burada;

Y : Bağımlı değişken

x : Bağımsız değişken

ε : Rassal hata terimi

β_0 : Sabit terim (Regresyon doğrusunun y eksenini kestiği nokta)

β_1 : Regresyon katsayısıdır. Regresyon doğrusunun eğimini verir. x'in kendi birimi cinsinden bir birim değişmesine karşılık, y'de kendi birimi cinsinden meydana gelecek değişme miktarını ifade eder. β 'nın işareti iki değişken arasındaki ilişkinin yönünü göstermektedir. Her iki değişken birlikte artış veya azalış gösteriyorsa β_1 'in değeri pozitif (+), değişkenlerden biri artarken diğeri azalıyorsa β_1 'in işareti negatif (-) olacaktır. β_1 'in sıfır olması ise iki değişken arasında bir ilişki olmadığını gösterirken sıfırdan farklı olması ise iki değişken arasında bir ilişkinin olduğunu gösterir.

ε_i , Tesadüfi hata terimi olup, ortalaması sıfır, varyansı σ^2 olan normal dağılış gösterdiği varsayılır. Bu varsayım parametre tahminleri için değıil katsayıların önem kontrolleri için gereklidir.

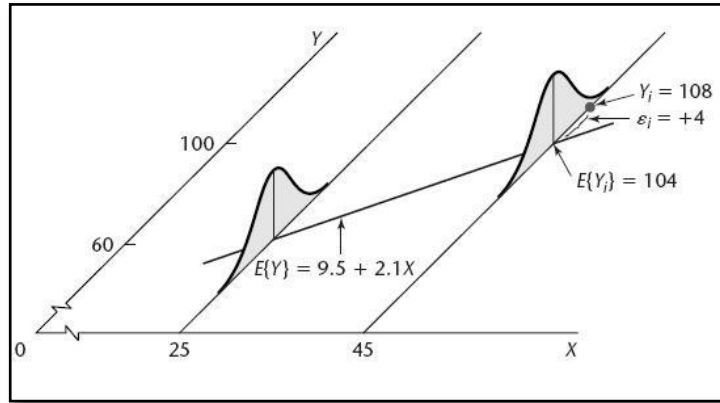
Regresyonda değişkenlerin bağımlı değişken ve bağımsız değişken olarak iki gruba ayrılması bir zorunluluktur. Bağımlı değişken, bağımsız değişken tarafından açıklanmaya çalışılan değişkendir.

Regresyonun amaçlarından biri, bağımlı değişken ile bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmaktır. Örneğın, Y ile x arasında eşitlik (3.1) gibi doğrusal bir ilişki öngörülüyorsa ilk adım modelin bilinmeyen β_0 ve β_1 parametrelerinin tahmin edilmesi olacaktır. Modelin bilinmeyen parametreleri tahmin edildiğinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için bağımlı değişkenin alacağı değeri tahmin etmek regresyonda bir diğeri amaçtır.

Doğrusal regresyon modeli bazı varsayımlara dayanmaktadır. Söz konusu varsayımlar şunlardır :

Varsayım 3.1 : “Hata terimi normal dağılıma sahiptir”. Diğer bir deyişle her x_i değeri için hata teriminin değerleri kendi ortalamaları etrafında çan eğrisi biçiminde simetrik bir bölünme gösterir.

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.2)$$



Şekil 3.2 : Hata Teriminin Normal Dağılımı

Varsayım 3.2 : “Hata terimlerinin ardışık değerleri birbirinden bağımsızdır”. Diğer bir deyişle, birbirini izleyen hata terimleri arasında otokorelasyon yoktur. Bu varsayıma göre $i \neq j$ olmak üzere e_i ve e_j 'nin kovaryansı sifıra eşittir (3.3).

$$Cov(e_i, e_{i-1}) = 0 \quad (3.3)$$

Varsayım 3.3 : “Hata teriminin varyansı x değerlerine göre değişmez yani sabittir”. Bütün x değerleri için ε hata terimleri kendi ortalamaları etrafında aynı değişkenliğe sabittir. Hata teriminin varyansı ayrıca bağımlı değişkenin varyansına da eşittir.

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 \quad (3.4)$$

Basit doğrusal lineer regresyon denkleminin çözümlenebilmesi için yukarıda belirtilmiş olan varsayımları sağlaması gerekir. Günümüzde β_0 ve β_1 parametrelerinin kestirimi için kullanılan en yaygın yöntem en küçük kareler yöntemidir.

3.1 En Küçük Kareler Yöntemi

En küçük kareler yöntemi, birbirine bağlı olarak değişen iki fiziksel büyüklük arasındaki matematiksel bağlantıyı, mümkün olduğunca gerçeğe uygun bir denklem olarak yazmak için kullanılan, standart bir regresyon yöntemidir. Bir başka deyişle bu yöntem, ölçüm sonucu elde edilmiş veri noktalarına "mümkün olduğu kadar yakın" geçecek bir fonksiyon eğrisi bulmaya yarar. Gauss-Markov Teoremi'ne göre en küçük kareler yöntemi, regresyon için optimal yöntemdir.

Bu yöntem ilk olarak 1795'te Carl Friedrich Gauss tarafından geliştirilmiştir. Gauss 1801 yılında bu yöntemi kullanarak, keşfinden kısa süre sonra kaybedilen Ceres asteroidinin tekrar gözlemlenebileceği pozisyonu hesaplayabilmiş, bu başarısıyla büyük üne kavuşmuştur. Gauss bu yöntemi ilk olarak 1809'da yayımlamıştır. 1806'da Fransız matematikçi Adrien-Marie Legendre ve 1808'de Amerikalı matematikçi Robert Adrain, Gauss'tan bağımsız olarak bu yöntemi geliştirip kullanmışlardır.

Yöntemi açıklamak için ilk adım olarak,

$$\varepsilon = Y - (\beta_0 + \beta_1 X) \quad (3.5)$$

modelini ele alalım. ε , elde edilen Y değerlerinin $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ doğrusu üzerine dikey uzaklıklarını temsil eder ve eğer β_0 ve β_1 biliniyor olsaydı yapmamız gereken $\sum \varepsilon^2$ 'yi minimize etmek olacaktı.

Kolaylık açısından (3.5) eşitliğini,

$$L = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2 \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. n elde edilen verinin sayısını göstermektedir. Hata karelerinin toplamını temsil eden L 'yi minimize etmek için gereken koşul, her bir parametre için (β_0, β_1) L 'nin kısmi türevlerinin sıfır olmasıdır. Buradan,

$$\frac{dL}{d\beta_0} = 2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)(-1) = 0 \quad (3.7)$$

ve

$$\frac{dL}{d\beta_1} = 2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)(-X_i) = 0 \quad (3.8)$$

bulunur. β_0 ve β_1 'in elde edilmesi için (3.9) denklemini çözmek yeterli olur.

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i) = 0 \quad (3.9)$$

(3.9) denkleminin her iki tarafını X_i ile genişletirsek,

$$\sum_{i=1}^n (X_i Y_i - X_i \beta_0 - \beta_1 X_i^2) = 0 \quad (3.10)$$

buradan

$$n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n Y_i \quad (3.11)$$

ve

$$\beta_0 \sum_{i=1}^n X_i + \beta_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i Y_i \quad (3.12)$$

elde edilir.

(3.11) ve (3.12) denklemlerinin çözümünden en küçük kareler tahmincileri β_0 ve β_1 ,

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum X_i Y_i - (\sum X_i)(\sum Y_i)/n}{\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2/n} \quad (3.13)$$

ve

$$\widehat{\beta}_0 = \bar{Y} - \widehat{\beta}_1 \bar{X} \quad (3.14)$$

şeklinde hesaplanır.

Buradan,

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \quad (3.15)$$

ve

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (3.16)$$

şeklinde yazılırsa

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad (3.17)$$

olarak bulunur.

Elde edilen model parametrelerinden sonra, bu parametrelerin doğruluğunun ya da lineer modelin veriye ne kadar uyduğunu incelememiz gerekiyor. Rassal hata terimi ε , bize bu durumu açıklayacaktır(3.18). ε 'u (model ile gözlemler arasındaki fark) en aza indirmek verilerimize uyan en iyi regresyon modelini bulmamızı sağlayacaktır. En küçük kareler yönteminde bu, hata karelerinin toplamını en küçük yapacak şekilde gerçekleşir(3.19).

$$\varepsilon_i = Y_i - \widehat{Y}_i \quad (3.18)$$

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \widehat{Y}_i)^2 = \min. \quad (3.19)$$

3.2 Varyansın σ^2 Kestirimi

Basit doğrusal regresyon modelinde, β_0 ve β_1 kestirimlerine ek olarak, aralık kestirimlerinde ve hipotez testlerinde kullanılmak amacıyla varyans (σ^2) kestirimi yapılır. Varsayım 3.3'ten de görüleceği üzere, ε_i hata terimlerinin varyansı da σ^2 'nin bir kestirimi olacaktır.

Hata karelerinin toplamı,

$$SSE = \sum \varepsilon_i^2 = \sum (Y - \hat{Y}_i)^2 \quad (3.19)$$

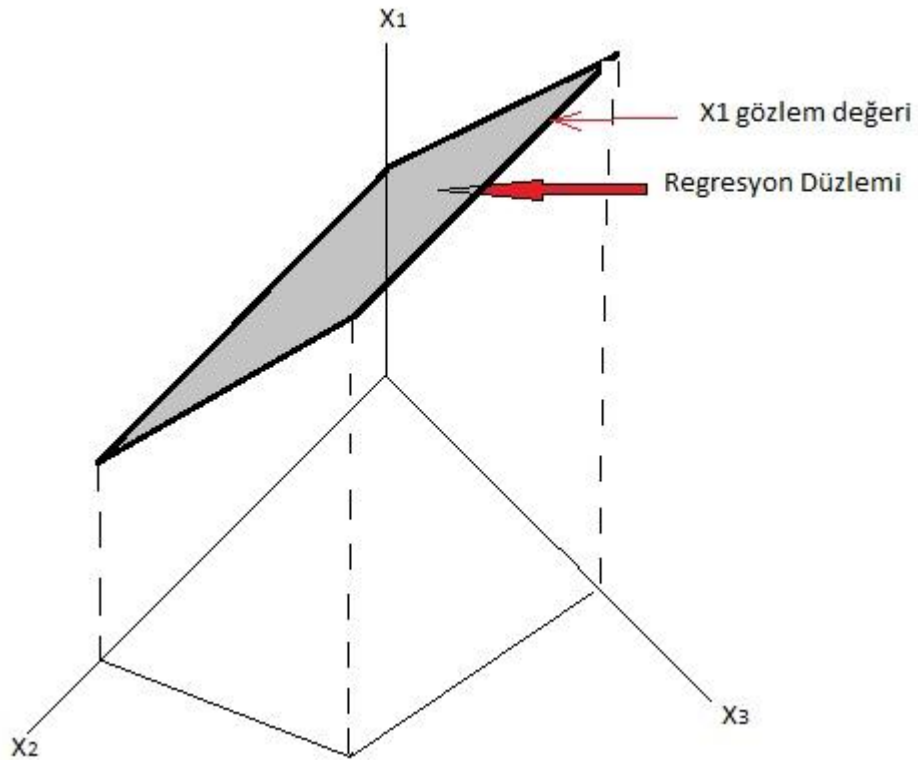
şeklinde yazılabilir. SSE'nin serbestlik derecesine bölümüyle

$$MSE = \frac{\sum (Y - \hat{Y}_i)^2}{n-1} \quad (3.20)$$

hata karelerinin ortalaması (hataların varyansı), σ^2 'nin kestirimi elde edilir.

4. ÇOKLU LİNEER REGRESYON ANALİZİ

Çeşitli bilimsel alanlarda herhangi bir bağımlı değişkeni tek bir bağımsız değişken ile açıklamak mümkün değildir. Bir çok bağımsız değişken bir araya gelerek bir değişkeni etkileyebildikleri gibi, kendi aralarında da birbirlerini etkileyebilmektedirler. Birden fazla bağımsız değişkenli analize “Çoklu Lineer Regresyon Analizi” (Multiple Linear Regression Analysis) denir. Basit lineer regresyonda verilerden elde ettiğimiz tahmini sonuç değerlerimiz bir doğru üzerinde dağılım gösterirken, çoklu lineer regresyon analizinde bir yüzey çevresinde dağılım gösterir.



Şekil 4.1 : Çoklu Regresyon Analizi Model Grafiği

Çoklu lineer regresyon analizinde bağımlı değişken Y , bağımsız değişkenler X_1, X_2, \dots, X_n ile gösterilirken tesadüfî hata değişkenleri ε_i 'lerle gösterilir. Çoklu lineer regresyon modeli en basit haliyle,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.1)$$

şeklinde ifade edilir.

4.1 Doğrusal Çoklu Regresyon Analizinde Varsayımlar

Varsayım 1: Tahmin hataları tesadüfidir ve normal dağılım gösterirler[4].

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \quad (4.2)$$

Varsayım 2: Tahmin hataları birbirinden bağımsızdır. Yani hata terimleri arasında otokorelasyon yoktur[4].

$$\text{Cov}(e_i, e_{i-1}) = 0 \quad (4.3)$$

Varsayım 3: Bütün x değerleri için ε hata terimleri kendi ortalamaları etrafında aynı değişkenliğe sabittir. Hata teriminin varyansı ayrıca bağımlı değişkenin varyansına da eşittir[4].

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 \quad (4.4)$$

Varsayım 4: Bağımsız değişkenler arasında basit doğrusal ilişkiler yoktur. Açıklayıcı değişkenler seçilirken, bunların bağımlı değişkenlerle basit doğrusal korelasyon katsayılarının yüksek (1'e yakın) ancak birbirleri arasındaki basit doğrusal korelasyon katsayılarının düşük (0 veya 0'a yakın) olmasına dikkat edilmelidir[4].

Çoklu lineer regresyon analizinde en küçük kareler yöntemi kullanılmakla beraber matris yaklaşımı da kullanılabilir. Matris yaklaşımında değişkenler şu şekilde tanımlanır:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdot & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \cdot & x_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n1} & \cdot & x_{np} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \beta_p \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Y, n x 1 boyutunda vektör matrisi, X, n x (p+1) boyutunda bağımsız değişkenlerin matrisi olmak üzere bağımsız değişkenlerin katsayıları (regresyon katsayıları) olan β_i 'lerin temsil eden β matrisi ise p x 1 boyutunda vektör matrisi olacaktır. Tesadüfi hata terimlerini ise n x 1 boyutundaki ε matrisi temsil eder.

Matris yönteminde, çoklu regresyon modeli,

$$\begin{matrix} Y \\ nx1 \end{matrix} = \begin{matrix} X \\ nxp \end{matrix} \begin{matrix} \beta \\ px1 \end{matrix} + \begin{matrix} \varepsilon \\ nx1 \end{matrix} \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanır.

Elde edilen (4.6) denklemin, n her iki tarafını soldan X' ile genişletirsek,

$$(X'X)\beta = X'Y \quad (4.7)$$

elde edilir ve regresyon katsayıları olan β_i 'ler,

$$\beta = (X'X)^{-1}X'Y \quad (4.8)$$

olarak bulunur.

Regresyon katsayılarının tahmincileri bulunduktan sonra, basit lineer regresyon modelinde anlatıldığı üzere hata terimleri hesaplanır, varyans kesitirimi yapılır ve hata terimlerinin ortalaması incelendikten sonra modelin uygunluğu için karar aşamasına geçilir.

4.2 Çoklu Bağlantı

Çoklu regresyon modeline ilişkin varsayımlardan biri de, bağımsız değişkenler arasında bir ilişli olmaması varsayımdır. Bu varsayım sağlanmadığında, yani bağımsız değişkenler arasında doğrusal ya da doğrusala yakın bir ilişki olduğunda, çoklu bağlantı sorunu ortaya çıkar. Eğer bağımsız değişkenler arasında doğrusal bir ilişki varsa regresyon katsayılarının değerini ve işaretini etkilediğinden, gerçekte olması gerekenden oldukça farklı kestirimler ortaya çıkabilir[4].

Çoklu bağlantı sorununun olması durumunda, bağımsız değişkenlerin bağımlı değişken üzerindeki etkisi, bağımlı değişkeni açıklama netliğini açıklamakta

zorluklarla karşılaşılmaktadır. Çoklu bağlantının en küçük kareler kestiricilerine de etkisi olduğundan, yapılacak yorumların güvenilirliğinden şüphe duyulmalıdır.

Bu gibi durumlarda yapılması gereken çoklu bağlantıyı ortadan kaldırmak ya da etkisini azaltmaktır. Çoğu araştırmacı bu durumdan kurtulmak için çoklu bağlantıya sebep olan bir ve ya birkaç bağımsız değişkeni modelden çıkarma yöntemini uygular fakat araştırmacının netliği açısından bu yöntem yanlış bulgulara sebep olabilir. Bunun yerine regresyon katsayılarını yanlı olarak tahmin eden Ridge Regresyon modelini uygulamak bize çoklu bağlantı sorununu çözmemizi sağlayacaktır.

4.3 Çoklu Bağlantıyı Belirleme Yöntemleri

Bağımsız değişkenler arasında çoklu bağıntı varsa, en küçük kareler yöntemiyle çözüm aramak uygun olmaz. Bunun için çoklu bağlantının olup olmadığının araştırılması gerekir. Bu araştırma şu yöntemlerle ilerlemelidir: [21-24]

1. Bağımsız değişkenler arasındaki korelasyon katsayıları 1'e yakınsa,
 2. $X'X$ matrisinin rankı bağımsız değişken sayısından küçük olursa,
 3. $X'X$ matrisinin özdeğerleri bir ya da birden fazlası sıfır veya sıfıra yakın olursa,
 4. j. bağımsız değişkenin öteki bağımsız değişkenlerce belirleme katsayısı R_j^2 olmak üzere, $VBF_j = (1 - R_j^2)^{-1}$ (Varyans büyütme faktörü), $j = 1, 2, \dots, k$ değerinin en büyüğü 10'un üzerinde olursa,
 5. En büyük özdeğerin en küçük özdeğere bölümü olan Koşul Sayısı 100'den büyük olursa,
 6. Standartlaştırılmış $X'X$ matrisinin determinanı sıfır veya sıfıra çok yakın olursa,
- çoklu bağlantı sorunu ortaya çıkar.

4.4 Çoklu Bağlantıyı Giderme Teknikleri

Çoklu bağlantıyı gidermek için kullanılan tekniklerden bazıları veri toplama ve modeldeki bağımsız değişkenlerin çıkarılmasıyla yapılırken, bir kısmı da modeldeki değişkenleri çıkarmaktansa yanlış kestirimler kullanarak çözüm yolu aramaktır.

Bu sorunları ortadan kaldırmak için en küçük kareler kestiricilerine göre daha küçük hata kareler ortalaması veren kestiriciler kullanılmaktadır[21]. Bunlar;

- Temel bileşenler kestiricisi,
- Stein kestiricisi,
- Ridge kestiricisi,
- Liu kestiricisidir.

5. RİDGE REGRESYON ANALİZİ

Ridge Regresyon, çoklu bağlantı durumunda (bağımsız değişkenlerin bağımsızlık varsayımına aykırı geldiği zaman) değişkenler arasındaki bağımlılıktan kurtulmak için geliştirilen bir istatistiksel bir yöntemdir.

İlk olarak Hoerl ve Kennard tarafından ortaya atılan Ridge regresyon yöntemi, çoklu bağlantı olduğu zaman en küçük kareler yönteminin yetersiz kalmasından dolayı geliştirilmiştir. [25] Ridge regresyon yöntemini şu amaçlar doğrultusunda önermiştir:

- Kuvvetli çoklu bağlantının varlığı durumunda, katsayılarda meydana gelen kararsızlıkların grafik üzerinde gösterilmesinde,
- Çoklu doğrusal regresyon analizinde çoklu bağlantı durumunda en küçük kareler yönteminin tahmininden daha küçük varyanslı tahminler elde edilmesinde,
- Modeldeki bazı değişkenlerin çıkartılmasında.

Ridge regresyonun en küçük kareler yöntemine göre iki önemli etkisi vardır. Bunlar;

- Bağımsız değişkenlerde çoklu bağlantıyı giderme,
- Regresyonda yanlılık karesiyle varyansı değiştirerek hata kareler ortalamasını azaltmaktır.

Basit doğrusal regresyon analizinde en küçük kareler kestiricisini, eşitlik (4.8)'de ifade etmiştik[4]. Ridge regresyon modelinde $X'X$ matrisi korelasyon formunda olmak üzere, $X'X$ matrisinin 1. Köşegen öğelerine küçük k değerlerinin ($0 \leq k \leq 1$) eklenmesiyle ridge kestiricisi elde edilir. Buradan,

$$\hat{\beta}^* = (X'X + kI)^{-1}X'Y \quad (5.2)$$

ridge kestiricisi ifade edilir[26].

5.1 Ridge Kestiricisi ile En Küçük Kareler Kestiricisi Arasındaki İlişki

En küçük kareler yöntemini matrissel olarak inceleyecek olursak, en küçük kareler kestiricisini (4.8)'de göstermiştik. Buradan eşitliğin her iki tarafını $X'X$ ile çarpacak olursak ($X'X$ matrisi non-singular yapıdadır)

$$X'X\hat{\beta} = X'Y \quad (5.3)$$

olarak yazılır.

Ridge kestiricisini (5.2)'de göstermiştik. Bu denklemde $X'Y$ yerine eşiti yazıldığında,

$$\hat{\beta}^* = (X'X + kI)^{-1}X'X\hat{\beta} \quad (5.4)$$

elde edilir.

$X'X$ matrisinin tersinin tersi kendisi olduğundan,

$$\hat{\beta}^* = (X'X + kI)^{-1}[(X'X)^{-1}]^{-1}\hat{\beta} \quad (5.5)$$

yazılabilir. Her iki matris tekil olmadıklarından,

$$\hat{\beta}^* = [(X'X)^{-1}(X'X + kI)]^{-1}\hat{\beta} \quad (5.6)$$

yazılabilir. Buradan da,

$$\hat{\beta}^* = [(X'X)^{-1}X'X + k(X'X)^{-1}]^{-1}\hat{\beta} \quad (5.7)$$

yazılabilir. Gerekli iřlemlerden sonra,

$$\hat{\beta}^* = [I + k(X'X)^{-1}]^{-1}\hat{\beta} \quad (5.8)$$

olur. $T = [I + k(X'X)^{-1}]^{-1}$ olarak tanımlanırsa,

$$\hat{\beta}^* = T\hat{\beta} \quad (5.9)$$

olarak yazılır. Bu eşitlik ridge kestiricisinin en kúçük kareler kestiricinin bir lineer dónuřümü olduğunu göstermektedir.

5.2 Ridge Parametresinin (k) Belirlenmesi

Bu bölümde ridge parametresinin(k) belirlenmesinde kullanılan yöntemlerden bir kaçını inceleyeceğiz. Bunlar,

- Ridge izi yöntemi,
- Tekrarlayıcı kestirim yöntemi,
- k'nın nokta kestirimi yöntemidir.

5.2.1 Ridge izi yöntemi

Ridge izi k için bir özel çözüm üretilmesinde kullanılan grafiksel bir yöntemdir. $X'X$ korelasyon matrisi pek çok büyük korelasyon içerdiğinde, basit korelasyon katsayılarının incelenmesiyle açıklayıcı değişkenler arasındaki ilişkiyi açığa çıkarmak güçleşir. Ridge izi hangi katsayıların verilere göre hassas olduğu yani daha fazla değiştiği konusunda yardımcı olur. Katsayıların toplam varyansı k'nın azalan bir fonksiyonu, yan kareler ise k'nın artan bir fonksiyonudur. Böylece k artarken β^* katsayılarının hata kareler ortalaması minimuma gider ve daha sonra artar. Amaç, ridge kestiricisi β^* için, en küçük kestiricisi $\hat{\beta}$ 'dan daha küçük hata kareler ortalaması veren k parametresini bulmak ve k parametresine karşılık gelen "kararlı" β^* katsayılarının kümesini oluşturmaktır. Kararlılıktaki amaç ise verilerdeki küçük değişikliklere karşılık katsayıların hassas olmamasıdır.

Burada katsayıların değişimini bağımsız değişkenler arasındaki çoklu bağıntı da etkilemektedir. Çoklu bağlantı var ise katsayılar k'nın küçük artımlarında çok hızlı değişecektir. k'nın büyük değerlerinde ise katsayılar belli bir kararlılığa sahip olacaktır.

5.2.2 Tekrarlayıcı Kestirim Yöntemi

Arthur E.Hoerl ve Robert W.Kennad standartlaştırılmış β 'lar olmak üzere k için tek iterasyon kestirimini;

$$k_a = \frac{p \cdot \sigma^2}{\hat{\beta} \cdot \beta} \quad (5.10)$$

olarak göstermişlerdir[27].

5.2.3 k'nın Nokta Kestirimi Yöntemi

Ridge regresyonda koşul sayısının 10'dan küçük olması durumunda çoklu bağlantının olmadığını gösteriyordu. Çoklu bağlantıyı belirleme yöntemlerinde 5. maddede anlatılan koşul sayısını

$$\sqrt{\frac{\lambda_{max} + k}{\lambda_{min} + k}} \geq 10 \quad (5.11)$$

eşitsizliği ile gösterecek olursak,

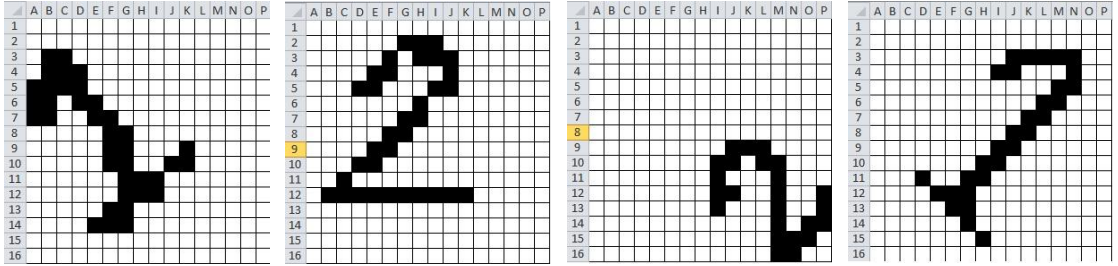
$$k \leq \frac{\lambda_{max} - 100\lambda_{min}}{99} \quad (5.12)$$

gibi bir k değeri elde edilir ve buna k'nın nokta kestirimi yöntemi adı verilir[4].

6.UYGULAMA

6.1 Rakam Tanıma Üzerine Uygulama

Yüz tanıma sistemindeki sınıflandırma işleminden önce daha basite indirmek adına rakamlar üzerinde bir çalışma yapıldı. 16x16 boyutlarındaki bir matris üzerinde farklı şekillerde 1(bir) ve 2(iki) rakamları Şekil 6.1’de görüldüğü gibi yazıldı.



Şekil 6.1 : Rakamların Matrisel Formda Yazılması

Rakamlar yazılırken matrisin içi doldurulan her bir elemanına 1 değeri verilirken diğer doldurulmayan elemanlarına 0 değeri atandı. Bir sınıflandırma gereksinimi olan etiketleme işlemi uygulandı. Bununla birlikte 1 rakamına karşılık gelen etiket “1” olarak, 2 rakamına karşılık gelen etiket “2” olarak etiketlendi. Toplamda 10 adet 1 sayısı ve 10 adet 2 sayısı 16x16 boyutlarında matrisler halinde oluşturuldu. EKK ve RR yöntemleriyle sınıflandırmanın uygulanabilmesi için X matrisi oluşturuldu. 16x16 boyutlarındaki matrislerle ifade edilen her bir rakam 256x1 boyutlarındaki sütun matrislerine çevrildi. Böylece X matrisi 256x20 boyutunda, her bir satırı bir rakamı ifade edecek şekilde tasarlandı. EKK yönteminin çözümündeki eşitlik (4.8)’de Y bağımlı değişkeni 1(bir) rakamını temsil eden etiket

olan 1, 2(iki) rakamını temsil eden etiket 2 olacak şekilde (6.1)'de görüldüğü gibi oluşturuldu.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

EKK yöntemi kullanılarak, (4.1) denklemindeki β_i , $i=0,1,\dots,255$ katsayıları Tablo 6.1'de gösterildiği gibi bulunmuştur.

Tablo 6.1 : EKK Yöntemiyle Elde Edilen β_i 'ler

β_0	0,04017	β_{41}	-0,00211	β_{82}	0,08756	β_{123}	-0,00211
β_1	-0,00211	β_{42}	0,00841	β_{83}	-0,08941	β_{124}	0,04735
β_2	-0,00227	β_{43}	-0,05717	β_{84}	-0,07919	β_{125}	-0,00211
β_3	-0,04455	β_{44}	-0,11468	β_{85}	0,02462	β_{126}	-0,00211
β_4	-0,00211	β_{45}	-0,05962	β_{86}	0,03888	β_{127}	-0,00211
β_5	-0,00211	β_{46}	0,01938	β_{87}	-0,00311	β_{128}	-0,00211
β_6	-0,00211	β_{47}	-0,00211	β_{88}	0,04017	β_{129}	-0,00211
β_7	-0,00211	β_{48}	-0,04455	β_{89}	-0,05830	β_{130}	-0,01868
β_8	-0,00211	β_{49}	-0,00211	β_{90}	-0,02986	β_{131}	-0,04697
β_9	-0,00211	β_{50}	0,05069	β_{91}	0,01612	β_{132}	0,01955
β_{10}	-0,00211	β_{51}	-0,06552	β_{92}	-0,00211	β_{133}	0,04878
β_{11}	-0,04845	β_{52}	0,05372	β_{93}	-0,00211	β_{134}	-0,01794
β_{12}	-0,00211	β_{53}	0,05967	β_{94}	-0,00211	β_{135}	-0,02284
β_{13}	-0,00211	β_{54}	-0,02322	β_{95}	-0,00211	β_{136}	0,09514
β_{14}	-0,00211	β_{55}	-0,00951	β_{96}	-0,00211	β_{137}	0,02473
β_{15}	-0,00211	β_{56}	0,01602	β_{97}	0,12050	β_{138}	0,01612
β_{16}	-0,00211	β_{57}	-0,00724	β_{98}	0,03670	β_{139}	0,02989
β_{17}	-0,04455	β_{58}	0,01500	β_{99}	-0,00211	β_{140}	0,04735
β_{18}	0,04017	β_{59}	-0,02908	β_{100}	-0,03433	β_{141}	-0,00211
β_{19}	-0,04455	β_{60}	0,00820	β_{101}	-0,03433	β_{142}	0,04113
β_{20}	-0,00211	β_{61}	0,00820	β_{102}	0,01656	β_{143}	0,04113
β_{21}	-0,00211	β_{62}	0,03888	β_{103}	0,09144	β_{144}	0,04113
β_{22}	-0,04272	β_{63}	0,01739	β_{104}	0,05048	β_{145}	0,04113
β_{23}	-0,02436	β_{64}	0,01739	β_{105}	-0,07797	β_{146}	-0,01868
β_{24}	-0,00211	β_{65}	0,01739	β_{106}	0,03078	β_{147}	0,03827
β_{25}	0,02791	β_{66}	0,06554	β_{107}	0,02072	β_{148}	0,03827
β_{26}	0,02791	β_{67}	0,06691	β_{108}	-0,04697	β_{149}	0,00841
β_{27}	-0,02895	β_{68}	0,04483	β_{109}	-0,00211	β_{150}	-0,00211
β_{28}	-0,04845	β_{69}	-0,02970	β_{110}	-0,00211	β_{151}	-0,05395
β_{29}	-0,00211	β_{70}	-0,00174	β_{111}	-0,00211	β_{152}	0,03877
β_{30}	-0,00211	β_{71}	-0,04813	β_{112}	-0,00211	β_{153}	0,05410
β_{31}	-0,00211	β_{72}	0,13033	β_{113}	0,03670	β_{154}	0,01147
β_{32}	-0,04455	β_{73}	0,08995	β_{114}	0,02618	β_{155}	0,06883
β_{33}	-0,02505	β_{74}	0,00820	β_{115}	-0,00211	β_{156}	0,01938
β_{34}	0,05967	β_{75}	-0,02908	β_{116}	-0,03433	β_{157}	0,04113
β_{35}	-0,00227	β_{76}	-0,00211	β_{117}	-0,00676	β_{158}	0,04113
β_{36}	0,01274	β_{77}	-0,00211	β_{118}	0,01656	β_{159}	-0,00211
β_{37}	0,05777	β_{78}	-0,00211	β_{119}	-0,00334	β_{160}	-0,04455
β_{38}	-0,02459	β_{79}	-0,00211	β_{120}	0,08768	β_{161}	0,04372
β_{39}	0,01602	β_{80}	-0,00211	β_{121}	0,06521	β_{162}	0,06737
β_{40}	0,04292	β_{81}	0,10998	β_{122}	0,02664	β_{163}	-0,00417
β_{164}	-0,00417	β_{202}	0,01504	β_{240}	-0,00211		

β165	0,00635	β203	-0,01217	β241	-0,01217		
β166	-0,00417	β204	0,04735	β242	-0,00211		
β167	-0,01863	β205	0,02179	β243	-0,00211		
β168	-0,03498	β206	0,04113	β244	-0,02767		
β169	0,06115	β207	-0,00211	β245	-0,00211		
β170	-0,05488	β208	-0,00211	β246	-0,00211		
β171	-0,01823	β209	-0,00211	β247	-0,00211		
β172	-0,00211	β210	-0,02767	β248	0,00841		
β173	0,04113	β211	-0,01716	β249	0,00841		
β174	-0,00211	β212	-0,01716	β250	-0,00211		
β175	-0,03433	β213	0,00551	β251	-0,00211		
β176	-0,00211	β214	0,00551	β252	-0,00211		
β177	-0,00211	β215	0,00551	β253	-0,02767		
β178	-0,00604	β216	-0,11057	β254	-0,00211		
β179	0,00891	β217	-0,02767	β255	-0,00211		
β180	0,05165	β218	0,02179				
β181	-0,00211	β219	0,02179				
β182	-0,00211	β220	0,02179				
β183	0,00656	β221	-0,02767				
β184	0,04108	β222	0,04113				
β185	0,04947	β223	0,04113				
β186	0,04735	β224	-0,00211				
β187	0,04735	β225	-0,00211				
β188	-0,06768	β226	-0,01217				
β189	0,04113	β227	-0,03773				
β190	0,04113	β228	-0,02721				
β191	-0,00211	β229	-0,00165				
β192	-0,00211	β230	0,05165				
β193	-0,00211	β231	0,01943				
β194	0,02618	β232	-0,00211				
β195	-0,00211	β233	-0,00211				
β196	0,02940	β234	-0,00211				
β197	0,01888	β235	-0,00211				
β198	-0,02436	β236	-0,00211				
β199	0,01888	β237	-0,02767				
β200	-0,02345	β238	-0,00211				
β201	-0,06664	β239	-0,00211				

Elde edilen modelden hata karelerini inceleyecek olursak, (4.1)'den matrissel yöntem ile hata terimleri,

$$\varepsilon_i = Y_i - X_i\beta_i \quad (6.2)$$

şeklinde bulunur.

Buradan uygulamamızdaki hata terimleri,

$$\varepsilon_i = \begin{bmatrix} -5,7731 \times 10^{-15} \\ -1,0214 \times 10^{-14} \\ 1,8984 \times 10^{-14} \\ 5,8841 \times 10^{-14} \\ -1,6875 \times 10^{-14} \\ -4,44089 \times 10^{-14} \\ 3,6630 \times 10^{-14} \\ 1,3211 \times 10^{-14} \\ 3,6859 \times 10^{-14} \\ 1,4210 \times 10^{-14} \\ -5,3290 \times 10^{-15} \\ 1,4654 \times 10^{-14} \\ 1,2878 \times 10^{-14} \\ 1,7763 \times 10^{-15} \\ 1,5543 \times 10^{-14} \\ 1,7763 \times 10^{-14} \\ 2,7422 \times 10^{-14} \\ 1,9539 \times 10^{-14} \\ -3,1086 \times 10^{-15} \\ -2,2204 \times 10^{-14} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

şeklinde bulundu.

Hata kareler ortalaması ise,

$$HKO = 3,3279 \times 10^{-28} \quad (6.4)$$

olarak elde edildi.

EKK yöntemi ile çözülen problemde değişkenler arasındaki korelasyon matrisi, matristeki hemen hemen her değer 1'e yakın olmasından dolayı çoklu bağlantının varlığını belirtmektedir. Bundan dolayı probleme bir de ridge regresyon yaklaşımı getirdik.

Bu yöntemde ridge modelini kurmamızda, (5.2) denklemi çözüm getirecektir.

Matlab programı aracılığıyla elde edilen ridge parametresi (k) değerleriyle hata kareleri ortalamaları Tablo 6.2'de verilmiştir.

Tablo 6.2 : RR Yöntemiyle Elde Edilen Hata Kareleri Ortalamaları

Ridge Parametresi (k)	Hata Kareleri Ortalamaları
10^{-10}	$1,5588 \times 10^{-23}$
10^{-9}	$1,8614 \times 10^{-8}$
10^{-8}	$1,3969 \times 10^{-10}$
10^{-7}	$7,9894 \times 10^{-12}$
10^{-6}	$8,9927 \times 10^{-15}$
10^{-5}	$1,5602 \times 10^{-13}$
10^{-4}	$1,5624 \times 10^{-11}$
10^{-3}	$1,5621 \times 10^{-9}$
10^{-2}	$1,5588 \times 10^{-7}$
10^{-1}	$1,5261 \times 10^{-5}$
1	0,0012

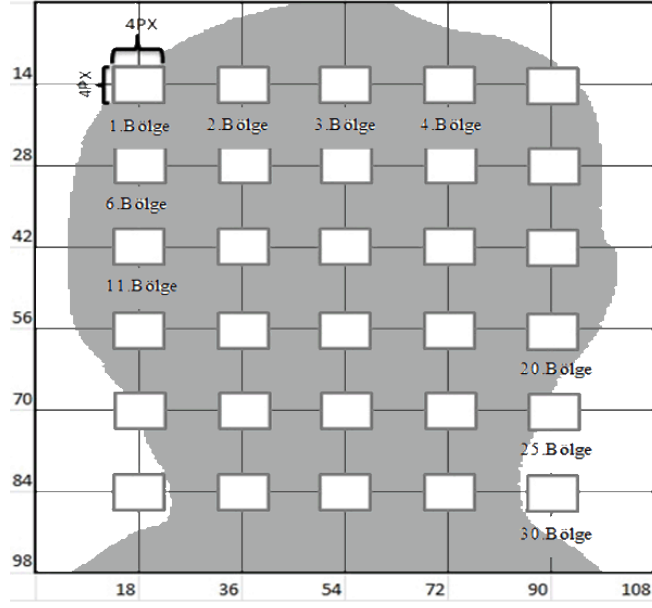
6.2 Uygulamanın Yüz Resmi Üzerindeki Etkileri

6.2.1 Yüz Resmindeki Lokal Bölgelerin Alınması

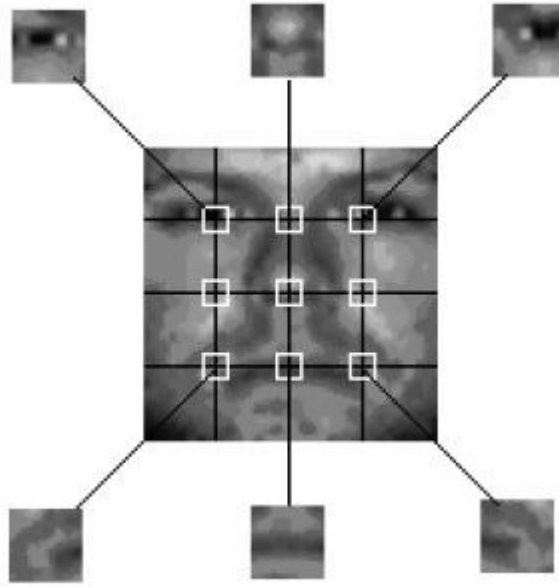
Genel olarak bir yüz resmini lokal parçalara ayırmada 2 farklı teknik kullanılır. Bunlar lokal bileşenler ve lokal bölgeler teknikleridir. Lokal bileşenleri, insan yüzünde ayırt edici olarak kullanılan gözler, burun ve çene-ağız gibi organlar temsil ederken, lokal bölgeleri ortak koordinat sisteminde resmin belirlenmiş ölçülerde eşit parçalara ayrılmasıyla oluşan alanlar temsil eder[31]. [31] Lokal bölgelerin karşılaştırılmasının yüz bileşenlerinin karşılaştırılmasından daha iyi olduğunu doğrulamışlardır.

Bundan dolayı bu çalışmaya, veritabanından aldığımız yüz resimlerini eşit uzunluktaki basit dikdörtgen bölgelere ayırma işlemini gerçekleştirerek başladık. Bu yöntem kolay kullanılabilir olmamasına rağmen orijinal resimlerdeki uzaysal ve geometrik bilgilerin daha iyi korunmasını sağlayabilir[28-30].

Bu çalışmada Yalebase veritabanından[3] 2 farklı kişinin, her bir kişiye ait 10 farklı durumdaki pozları olmak üzere toplam 20 resmi eğitim amaçlı kullandık. Bu 20 resmi belirli resim işleme yöntemlerinden geçirip uygun hale getirdikten sonra lokal bölgelere ayırma işlemine geçtik.



Şekil 6.2 : Yüz Resminin Eşit Bölgelere Ayrılışı



Şekil 6.3 : Yüz Resminden Kare Bölgelerin Alınması

108x98 piksel boyutlarına indirdiğimiz bu resimleri yukarıda Şekil 6.3'de görüldüğü gibi eşit uzunlukta kare bölgelere ayırdık. Kare bölgelerin kesiştiği noktalarda Şekil 6.2'de görüldüğü gibi 4*4 boyutunda kare piksel bölgeleri elde ettik ve istatistiki analizlerde kullanacağımız X matrisinin verilerini buradan aldığımız piksel aydınlık değerleri ile oluşturduk.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix}
 1 & 147 & 153 & 147 & . & . & . & . & . & . & 125 & 110 & 98 \\
 1 & 104 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 104 \\
 1 & 98 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 98 \\
 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 6 \\
 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 1 & 78 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 98 \\
 1 & 104 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 55 \\
 1 & 104 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 49
 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

[20x480]

Sistemde gereksinim duyduğumuz Y bağımlı değişkenini ise yine etiketleme metodunu kullanarak her iki kişi içinde oluşturduk. Bununla birlikte 1. Kişi için “1” etiketini kullanırken 2. Kişi için “2” etiketini kullandık. Böylece Y matrisimiz

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix}
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 2 \\
 2 \\
 2 \\
 2 \\
 2 \\
 2 \\
 2 \\
 2 \\
 2 \\
 2 \\
 2 \\
 2 \\
 2 \\
 2 \\
 2 \\
 2 \\
 2
 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

şeklinde elde edildi.

6.2.2 Sistemin EKK Yöntemi ile Çözülmesi

Sistemi EKK tahmin edicisi, (4.1) ile çözümlediğimizde β_i 'ler $i=0,1,\dots,479$ aşağıdaki tablodaki gibi hesaplanmıştır.

Tablo 6.3 : EKK Yöntemi İle Yüz Resminden Elde Edilen β_i 'ler

β_0	-0,010855	β_{80}	0,0099035	β_{160}	0,0025075	β_{240}	-0,000454	β_{320}	-0,006849	β_{400}	-0,000141
β_1	-0,001781	β_{81}	0,0061207	β_{161}	-0,006902	β_{241}	-0,008097	β_{321}	-0,002247	β_{401}	-0,00232
β_2	-0,000696	β_{82}	-0,002262	β_{162}	-0,009675	β_{242}	0,0035401	β_{322}	-0,007037	β_{402}	0,0079705
β_3	-0,003739	β_{83}	-0,007904	β_{163}	-0,007227	β_{243}	-0,009101	β_{323}	-0,007265	β_{403}	0,001102
β_4	0,0001211	β_{84}	0,0152186	β_{164}	-0,011819	β_{244}	-0,001337	β_{324}	-0,00648	β_{404}	-0,001098
β_5	-0,006344	β_{85}	0,0007368	β_{165}	-0,009369	β_{245}	-0,004616	β_{325}	-0,003906	β_{405}	-0,001181
β_6	-0,000698	β_{86}	0,0075225	β_{166}	-0,003104	β_{246}	-0,00695	β_{326}	0,0038126	β_{406}	-0,009312
β_7	-0,00069	β_{87}	-0,015214	β_{167}	-0,016336	β_{247}	0,0033435	β_{327}	-0,00244	β_{407}	0,0041809
β_8	-0,001632	β_{88}	0,0098757	β_{168}	-0,001781	β_{248}	-0,001035	β_{328}	0,0075966	β_{408}	0,0038996
β_9	0,003406	β_{89}	0,0035666	β_{169}	-0,003319	β_{249}	-0,007615	β_{329}	0,0118906	β_{409}	0,009936
β_{10}	0,0002768	β_{90}	0,0025524	β_{170}	-0,016047	β_{250}	0,0007836	β_{330}	-0,007131	β_{410}	0,0014392
β_{11}	0,0010239	β_{91}	0,0012228	β_{171}	-0,003277	β_{251}	-0,006896	β_{331}	-0,006157	β_{411}	0,0056432
β_{12}	-0,004668	β_{92}	0,0085091	β_{172}	-0,011015	β_{252}	-0,009149	β_{332}	0,01798	β_{412}	-0,009489
β_{13}	-0,007098	β_{93}	0,0057481	β_{173}	-0,009785	β_{253}	-0,00611	β_{333}	0,0009507	β_{413}	-0,00514
β_{14}	0,0071942	β_{94}	-0,000197	β_{174}	0,0017794	β_{254}	-0,005413	β_{334}	0,0027258	β_{414}	-0,004897
β_{15}	-0,003216	β_{95}	-0,006392	β_{175}	-0,012289	β_{255}	-0,004301	β_{335}	1,26E-05	β_{415}	-0,003684
β_{16}	-0,005878	β_{96}	0,0008001	β_{176}	0,0026223	β_{256}	0,0052682	β_{336}	-0,00705	β_{416}	0,0030636
β_{17}	0,002491	β_{97}	0,0006641	β_{177}	-0,002905	β_{257}	0,0135986	β_{337}	-0,002645	β_{417}	0,0010402
β_{18}	-0,005839	β_{98}	-0,00301	β_{178}	0,001001	β_{258}	0,0036625	β_{338}	-0,003061	β_{418}	-0,001573
β_{19}	-6,27E-05	β_{99}	0,0034976	β_{179}	0,0011772	β_{259}	0,0123366	β_{339}	-0,003682	β_{419}	-0,007767
β_{20}	0,0040778	β_{100}	0,0003706	β_{180}	-0,000357	β_{260}	0,0046919	β_{340}	-0,000311	β_{420}	-0,001629
β_{21}	-0,002648	β_{101}	0,000687	β_{181}	0,000581	β_{261}	0,0070721	β_{341}	0,0006346	β_{421}	-0,001446
β_{22}	0,0017534	β_{102}	-0,000959	β_{182}	-0,002356	β_{262}	0,0129681	β_{342}	-0,005175	β_{422}	0,0020308
β_{23}	0,0038184	β_{103}	-0,006266	β_{183}	-0,002794	β_{263}	0,0051028	β_{343}	-0,001747	β_{423}	-0,000349
β_{24}	-0,00319	β_{104}	-0,0012	β_{184}	-0,000212	β_{264}	0,0042031	β_{344}	-0,003824	β_{424}	0,0040688
β_{25}	0,0057456	β_{105}	-0,000375	β_{185}	-0,004934	β_{265}	0,0044876	β_{345}	-0,007508	β_{425}	0,0023638
β_{26}	0,0016901	β_{106}	-0,005675	β_{186}	0,0021994	β_{266}	-0,001724	β_{346}	-0,003235	β_{426}	-0,001078
β_{27}	-0,005193	β_{107}	0,0044473	β_{187}	0,0022734	β_{267}	0,0052576	β_{347}	-0,00618	β_{427}	0,0002122
β_{28}	0,0067461	β_{108}	-0,000543	β_{188}	-0,000916	β_{268}	-0,003062	β_{348}	-0,003701	β_{428}	-0,001287
β_{29}	-0,003125	β_{109}	0,0001891	β_{189}	-0,001184	β_{269}	0,002981	β_{349}	-0,000384	β_{429}	-0,001803
β_{30}	0,0026803	β_{110}	-0,000286	β_{190}	-0,004768	β_{270}	0,0085392	β_{350}	-0,002345	β_{430}	-0,001423
β_{31}	0,0021194	β_{111}	-0,002411	β_{191}	-0,00629	β_{271}	-0,001861	β_{351}	-0,003982	β_{431}	0,0007369
β_{32}	0,0066466	β_{112}	-0,00231	β_{192}	-0,000283	β_{272}	-0,001979	β_{352}	-0,004746	β_{432}	-0,007976
β_{33}	0,0010053	β_{113}	-0,001978	β_{193}	0,0039464	β_{273}	0,002269	β_{353}	-0,006754	β_{433}	0,0052546
β_{34}	-0,000757	β_{114}	-0,005698	β_{194}	0,0062474	β_{274}	0,0036873	β_{354}	-0,006057	β_{434}	-0,008332
β_{35}	0,0011821	β_{115}	-0,002887	β_{195}	0,0002225	β_{275}	0,0033015	β_{355}	-0,000698	β_{435}	-0,003588
β_{36}	-0,001768	β_{116}	-0,001563	β_{196}	0,0057044	β_{276}	-0,00087	β_{356}	-0,009612	β_{436}	0,0003348
β_{37}	-0,001917	β_{117}	0,0009581	β_{197}	0,0029991	β_{277}	0,0024144	β_{357}	-0,001187	β_{437}	-0,002822
β_{38}	-0,000127	β_{118}	-0,005271	β_{198}	0,0009153	β_{278}	0,0017561	β_{358}	-0,006052	β_{438}	-0,005335
β_{39}	-0,003572	β_{119}	-0,00303	β_{199}	-0,000263	β_{279}	0,0053785	β_{359}	-0,007669	β_{439}	-0,002633
β_{40}	0,0003704	β_{120}	-0,00285	β_{200}	-0,004778	β_{280}	0,0005651	β_{360}	-0,007124	β_{440}	-0,003663
β_{41}	0,0013726	β_{121}	-0,007482	β_{201}	0,0034628	β_{281}	0,0036303	β_{361}	-0,004559	β_{441}	-0,00537
β_{42}	-0,001758	β_{122}	-0,002782	β_{202}	0,0057462	β_{282}	0,0047595	β_{362}	-0,007816	β_{442}	0,0011405
β_{43}	0,0033684	β_{123}	-0,00496	β_{203}	0,0015347	β_{283}	0,0028661	β_{363}	-0,002695	β_{443}	-0,00477
β_{44}	0,0016632	β_{124}	-0,004729	β_{204}	0,0047411	β_{284}	-0,0059	β_{364}	-0,000851	β_{444}	-0,00951

β45	0,0016628	β125	-0,007251	β205	-0,003116	β285	0,0110105	β365	-0,004054	β445	-0,00037
β46	0,0021392	β126	-0,004723	β206	-0,002286	β286	0,0008797	β366	-0,001303	β446	-0,006995
β47	0,0016211	β127	-0,003479	β207	-0,00084	β287	0,00321	β367	-0,004833	β447	-0,003305
β48	0,0016098	β128	0,0030092	β208	-0,002472	β288	-0,004212	β368	0,0003384	β448	-0,007373
β49	-0,00067	β129	-0,004213	β209	-0,000599	β289	-0,001206	β369	-0,005654	β449	-0,004943
β50	-0,005747	β130	-0,004395	β210	-0,002986	β290	0,0006992	β370	-0,00776	β450	0,0007283
β51	0,0003961	β131	-0,002748	β211	-0,008163	β291	0,0035663	β371	-0,004125	β451	-0,005414
β52	-0,010178	β132	0,0045215	β212	0,0077612	β292	0,010088	β372	0,0018486	β452	-0,000366
β53	0,0060965	β133	-0,005729	β213	-0,000421	β293	-0,000579	β373	-0,004019	β453	-0,001784
β54	-0,001881	β134	0,0003128	β214	-0,009199	β294	0,0010653	β374	-0,004558	β454	-0,003739
β55	0,003867	β135	-0,002018	β215	0,0031936	β295	-0,003238	β375	-0,005907	β455	-0,001274
β56	0,0042446	β136	0,0062321	β216	-0,001321	β296	0,0017053	β376	-0,004004	β456	-0,000543
β57	-0,004472	β137	0,0028608	β217	-0,002852	β297	-0,000995	β377	0,0009687	β457	-0,005353
β58	-0,001174	β138	-0,003279	β218	-0,003318	β298	-0,001461	β378	-0,001783	β458	-0,00481
β59	-0,006374	β139	-0,004875	β219	0,0026312	β299	0,0019185	β379	-0,009368	β459	-0,001478
β60	-0,008717	β140	0,0018689	β220	0,0004995	β300	0,0077435	β380	-0,0022	β460	-0,012699
β61	0,0057483	β141	-0,003761	β221	-0,000156	β301	-0,001043	β381	-0,004745	β461	0,0007172
β62	-0,000401	β142	0,0021982	β222	-0,004421	β302	-0,00223	β382	-0,010262	β462	-0,001943
β63	0,0070555	β143	-0,00393	β223	-0,001597	β303	0,0015706	β383	-0,007738	β463	-0,004165
β64	0,0027812	β144	-0,004737	β224	-0,001305	β304	0,0055541	β384	0,000808	β464	0,0001825
β65	0,0027216	β145	0,0046324	β225	-0,000894	β305	0,0008314	β385	-0,003101	β465	-0,006538
β66	0,001366	β146	-0,003578	β226	-0,001382	β306	-0,002561	β386	0,0021074	β466	-0,003208
β67	-0,000716	β147	0,0022525	β227	-0,002816	β307	-0,005194	β387	0,0019872	β467	0,0068186
β68	-0,00563	β148	0,0018207	β228	-0,000233	β308	-0,002296	β388	0,0014997	β468	-0,00437
β69	0,005131	β149	-0,006106	β229	-0,006279	β309	-0,001415	β389	-0,006045	β469	-0,002037
β70	0,0026247	β150	0,0020074	β230	-0,004758	β310	0,0004575	β390	0,0004278	β470	-0,00568
β71	0,0084473	β151	-0,003403	β231	-0,001296	β311	0,0001314	β391	-0,002076	β471	-0,012837
β72	0,0099749	β152	-0,002995	β232	-0,003181	β312	0,0019036	β392	0,0021282	β472	-0,005224
β73	-0,003902	β153	-0,002016	β233	-0,002463	β313	0,0049783	β393	-0,00425	β473	-0,008442
β74	0,0032994	β154	-0,000181	β234	-0,000667	β314	-0,001986	β394	0,0030645	β474	0,0009926
β75	0,000998	β155	-0,000114	β235	-0,001355	β315	-0,004502	β395	-0,00475	β475	-0,002093
β76	-0,007349	β156	-0,001984	β236	0,0015192	β316	0,0003037	β396	0,0020604	β476	-0,010573
β77	0,0063782	β157	-0,00492	β237	-0,003539	β317	-0,003319	β397	-0,000237	β477	0,0017997
β78	0,0024278	β158	-0,002407	β238	-0,00166	β318	0,0014099	β398	-0,002768	β478	-0,012461
β79	-0,00119	β159	-0,002054	β239	-0,00021	β319	0,0003254	β399	-0,001936	β479	-0,00497

Bu aşamadan itibaren hata terimleri,

$$\varepsilon_i = Y_i - X_i\beta_i$$

eşitliğiyle aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

$$\varepsilon_i = \begin{bmatrix} -7,3274 \times 10^{-15} \\ -2,8865 \times 10^{-15} \\ 7,2164 \times 10^{-15} \\ 5,5511 \times 10^{-15} \\ -1,9984 \times 10^{-15} \\ 1,0658 \times 10^{-14} \\ 1,7874 \times 10^{-14} \\ -5,1070 \times 10^{-15} \\ -7,5495 \times 10^{-15} \\ 7,7715 \times 10^{-16} \\ 2,6867 \times 10^{-14} \\ 8,2156 \times 10^{-15} \\ 5,5511 \times 10^{-15} \\ 9,1038 \times 10^{-15} \\ -1,1546 \times 10^{-14} \\ 1,2212 \times 10^{-14} \\ 1,9984 \times 10^{-15} \\ -8,8817 \times 10^{-16} \\ 4,6629 \times 10^{-15} \\ -5,3290 \times 10^{-15} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Buradan hata kareleri ortalaması,

$$HKO = 9,5306 \times 10^{-29} \quad (6.8)$$

olarak bulundu.

Elde ettiğimiz modelden yola çıkarak, 10 farklı durumda resimlerini aldığımız iki kişinin normal (tam karşıdan normal ışık altında) çekilmiş resimlerini test ettik. Bu testte beklentimiz 1 ve 2 olarak etiketlediğimiz kişilerin yeni resimlerini modelle test ettiğimizde test sonucumuzun (TS), $1 \leq TS \leq 1,5$ ya da $1,5 < TS < 2$ gelmesi yönündeydi. Bu doğrultuda modelimizin doğruluğunu değerlendirme imkanı bulduk. Sonuç olarak birinci kişinin normal resmini test ettiğimizde,

$$TS1 = 1,4358$$

ikinci kişinin normal resmini test ettiğimizde ise

$$TS2 = 1,76432$$

sonuçlarını elde ettik.

6.2.3 Sistemin RR Yöntemi ile Çözülmesi

Sistemin EKK yöntemi ile çözülebilmesi için aslında çoklu bağlantının olmaması gerekir. Çoklu bağlantının olduğu durumlarda daha öncede bahsedildiği üzere çeşitli yöntemlere başvurulabilir. Bunlardan birisi yanlı çözümlerden birisi olan Ridge Regresyondur.

Sistemin çoklu bağlantıya sahip olup olmadığını Bölüm 4.3’de anlatıldığı üzere çeşitli yöntemlerle belirleyebiliriz. 2.,3. ve 6. Maddelere bakacak olursak,

- $Rank(X'X) = 20$, *Bağımsız Değişken Sayısı* = 480
- $Rank(X'X) < Bağımsız Değişken Sayısı$
- $det(X'X) = 0$ ve
- $X'X$ matrisinin özdeğerleri 0’a çok yakındır.

Bu durumda çoklu bağlantıdan bahsetmek mümkün olur ve ridge regresyon yöntemi ile bu çoklu bağlantı yok edilebilir.

Ridge regresyon yöntemiyle farklı ridge parametreleriyle (k) elde edilen hata kareleri ortalamaları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 6.4 : Resim Verisinden RR Yöntemiyle Elde Edilen Hata Kareleri Ortalamaları

Ridge Parametresi (k)	Hata Kareleri Ortalamaları
10^{-10}	$7,0659 \times 10^{-29}$
10^{-9}	$1,1934 \times 10^{-28}$
10^{-8}	$3,4186 \times 10^{-28}$
10^{-7}	$2,3124 \times 10^{-26}$
10^{-6}	$2,1441 \times 10^{-24}$
10^{-5}	$4,4123 \times 10^{-7}$
10^{-4}	$2,2724 \times 10^{-10}$
10^{-3}	$2,9737 \times 10^{-12}$
10^{-2}	$2,0419 \times 10^{-14}$
10^{-1}	$2,4421 \times 10^{-14}$
1	$2,1400 \times 10^{-14}$

RR modelini test ettiğimizde ise birinci kişinin normal resmi sonucunda,

$$TS1 = 1,2456$$

ikinci kişinin normal resmini test ettiğimizde ise

$$TS2 = 1,9454$$

sonuçlarını elde ettik.

7. SONUÇ

En küçük kareler yöntemiyle yapılan parametre tahminleri için gerekli varsayımlardan bağımsız değişkenler arasında bir ilişki olmaması varsayımı sağlanmadığında çoklu bağlantı problemi ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle EKK yöntemi kullanılarak elde edilen analiz sonuçları yanlış sonuçlara ve yanlış modellerin oluşumuna neden olabilmektedir.

Bu çalışmada ilk olarak EKK yöntemi ile tahminler yapıp daha sonra çoklu bağlantının varlığı araştırılmıştır. Çoklu bağlantının varlığının saptanması ile beraber bunu giderme yollarından birisi olan RR yöntemi uygulanmıştır. Ridge Regresyon yönteminin çoklu bağlantıyı ortadan kaldırması [4]'te ifade edilmiştir. Biz de bu çalışmamızda uygun ridge parametrelerinde(k) EKK yöntemine çok yakın sonuçlar aldık. Hata kareleri ortalamalarını baz aldığımızda, ridge parametresini (k) ne kadar sıfıra yakın değerler alırsak o kadar iyi sonuçlar elde edebileceğimizi gördük. Sınıflandırma işlemi sonucunda ise ridge modelinden aldığımız TS değerleri, EKK yönteminden aldığımız TS değerlerine göre kişinin ait olduğu sınıfa daha yakın değerler verdiğini gördük. Aynı zamanda her iki yöntemde de hata terimlerinin rassal olması kurulan model için iyi sonuçlar verdiğinin işaretidir.

Sonuç olarak, çoklu bağlantı varlığı durumunda uygun koşullar sağlandıktan sonra EKK yönteminden ziyade RR yöntemi tercih edilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Hui Xue, Yulian Zhu, Songcan Chen, "Local ridge regression for face recognition", *Neurocomputing* 72 (2009) 1342-1346.
- [2] Senjian An, Wanquan Liu and Svetha Venkatesh, "Face Recognition Using Kernel Ridge Regression", *CVPR*, 2007.
- [3] The extended Yale face database B <http://ews.uiuc.edu/dengcai2/Data/data.html>.
- [4] *Applied Linear Regression*, Third Edition, by Sanford Weisberg, ISBN 0-471-66379-4, John Wiley & Sons, 2005.
- [5] Imran Naseem, Roberto Togneri, Senior Member, IEEE, and Mohammed Bennamoun, "Linear Regression for Face Recognition", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 32, No. 11, 2010.
- [6] *Handbook of Face Recognition*, S.Z Li, and A.K. Jain, eds. Springer, 2005.
- [7] Pentland, A., Choudhury, T., 2000. Face recognition for smart environments. *IEEE Computer* 33 (2), 50–55.
- [8] Kanade, T. (1973). Picture processing system by computer complex and recognition of human faces. Dept. of Information Science, Kyoto University, Nov.
- [9] Samaria, F. S., Harter, A. C. 1994. "Parameterization of a Stochastic Model for Human Face Identification", *Proceedings of the 2nd IEEE workshop on Applications of Computer Vision*, Sarasota, Florida.
- [10] Samaria, F. S. 1994. "Face Recognition using Hidden Markov Models", PhD thesis, Trinity College, University of Cambridge, Cambridge.
- [11] L. Siravich and M. Kirby, "A Low-Dimensional Procedure for the Characterization of Human Faces", *J. Optical Soc. Am. A*, 1987, Vol. 4, No.3, 519-524.
- [12] M. Kirby and L. Sirovich (1990). "Application of the Karhunen-Loeve procedure for the characterization of human faces". *IEEE Transactions on Pattern analysis and Machine Intelligence* 12 (1): 103–108.
- [13] M. Turk and A. Pentland (1991). "Face recognition using eigenfaces". *Proc. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. pp. 586–591.
- [14] Pentland, A.; Moghaddam, B. & Starner, T. (1994). Viewbased and modular eigenspaces for face recognition, In *Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 84–91, 0-8186-5825-8, USA, June 1994. IEEE Computer Society.
- [15] Zhang, J., Yan, Y., & Lades, M. (1997). Face recognition: Eigenface, elastic matching, and neural nets. *Proceedings of IEEE*, 85, 1423–1435.

- [16] O'Toole, A., Abdi, H., Deffenbacher, K., and Valentin, D. (1993). "A low dimensional representation of faces in the higher dimensions of the space", *Journal of the Optical Society of America A*, 10, 405-411.
- [17] O'Toole, A.J., Deffenbacher, K., Abdi, H., Bartlett, J.C. (1991). "Simulating the other race effect", *Connection Science*, 3, 163-178.
- [18] Jacobs, C. E., Finkelstein, A., & Salesin, D. H. (1995). "Fast multiresolution image querying", In *SIGGRAPH 95*.
- [19] C. Garcia, G. Zikos, and G. Tziritas, Wavelet packet analysis for face recognition, *Image and Vision Computing*, Vol. 18, No. 4, pp.289-297, Feb. 2000.
- [20] David S., Moore, George P., McCabe, *Introduction to the Practice of Statistics*, ISBN: 0-7167-1989-4.
- [21] Montgomery, D.C., and Peck, E.A., *Introduction to Linear Regression Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1982, 297-302.
- [22] İmir, E., Çoklu Bağlantılı Doğrusal Modellerde Ridge Regresyon Yöntemiyle Parametre Kestirimi, *Anadolu Üniversitesi Yayınları*, No. 212 Eskişehir, 1986, 22.
- [23] Erar, A., Çoklubağlantı Varlığında Doğrusal Regresyon Modellerinde Değişken Seçimi, *Doktora Tezi*, 1982, 101.
- [24] Myers, R.H., *Classical and Modern Regression With Applications*, Duxbury Press, Boston, 1986, 79.
- [25] Hoerl, A.E and Kennard, R.W. (1970a), "Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems", *Technometric*, 12, 55-67.
- [26] Hoerl, A.E. (1962), "Application of Ridge Analysis to Regression Problems", *Chemical Engineering Progress*, 58, 54-59.
- [27] Hoerl, A.E., and Kennard R.W. (1976), "Ridge Refression : Iterative Estimation of the Baising Parameter", *Communications in Statistics*, 5, 77-88.
- [28] S. Chen and Y. Zhu. Subpattern-based principle component analysis, *Patter Recognition*, 37(5): 1081-1083, 2004.
- [29] A.M. Martinez. Recognizing imprecisely localized, partically occluded and expression variant faces from a single sample per class. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(6): 748-763, 2002.
- [30] R.O. Duda, P.E. Hart, and D.G. Stork. *Pattern Classification*. Wiley, 2001.
- [31] J. Zou, Q. Ji, and G. Nagy. A comparative study of local matching approach for face recognition, *IEEE Trans. on Image Processing*, 16(10): 2617-2628, 2007.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Adana’da doğdu. İlk ve Orta Öğrenimimi Ankara’da tamamladı. 2004 yılında İstanbul Kültür Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümünü tam burslu olarak kazandı. 2008 yılında mezun olduktan sonra aynı yıl İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar programına kabul görerek aynı bölümde araştırma görevlisi olarak iş hayatına başladı. Bugün hala araştırma görevlisi olarak görevine aynı zamanda lisansüstü eğitimine devam etmektedir.

EK-1 Normal resimlerin matlab ortamında okunmasını sağlayan fonksiyon.

```
function beta=imageNormal()
sdirectory = 'D:\tez\yalefaces\classification\normal';
giffiles = dir([sdirectory '/*.gif']);

beta=zeros(480,15);
for image = 1:length(giffiles)
    filename = [sdirectory '/' giffiles(image).name];
    im=imread(filename);
    % im=cov(double(im));

    a=1;
    x=16;
    y=12;
    for i=1:30

        if i==1
            x=16;
            y=12;
        else
            if mod(i,5)==1
                y=y+14;
                x=x-72;
            else
                x=x+18;
            end
        end
    end

    for j=0:3

        for k=0:3
            column=y+j;
            row=x+k;
            beta(a, image)=im(row, column);
            a=a+1;
        end
    end

end

end
end
```

EK-2 Resimlerin matlab ortamında okunmasını sağlayan fonksiyon.

```
function matris=imageRead()

sdirectory = 'D:\tez\yalefaces\classification';
giffiles = dir([sdirectory '/*.gif']);
matris=zeros(480,20);
for h=1:480
    matris(h,1)=1;
end

for image = 1:length(giffiles)
    filename = [sdirectory '/' giffiles(image).name];
    im=imread(filename);

    a=1;
    x=16;
    y=12;
    for i=1:30

        if i==1
            x=16;
            y=12;
        else
            if mod(i,5)==1
                y=y+14;
                x=x-72;
            else
                x=x+18;
            end
        end
    end

    for j=0:3

        for k=0:3
            column=y+j;
            row=x+k;
            matris(a, image+1)=im(row, column);
            a=a+1;
        end
    end

end

end

end
end
```