İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STOKASTİK PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN YARIGRUP METODU YAKLAŞIMI

DOKTORA TEZİ
Mehmet Emin ŞAN

Anabilim Dalı: Matematik-Bilgisayar

Programı: Matematik Doktora

OCAK 2012

İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STOKASTİK PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN YARIGRUP METODU YAKLAŞIMI

DOKTORA TEZİ

Mehmet Emin ŞAN

0609241034

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih	:	**05 Ocak 2012**
Tezin Savunulduğu Tarih	:	**20 Ocak 2012**

Tez Danışmanı:	**Doç. Dr. Mert ÇAĞLAR, İKÜ**
Tez Eşdanışmanı:	**Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV, FÜ**
Diğer Jüri Üyeleri:	**Yrd.Doç.Dr. Yasar POLATOGLU, İKÜ**
	Prof. Dr. Alexey LUKASHOV, FÜ
	Yrd.Doç.Dr. Remzi Tunç MISIRLIOGLU, İKÜ

OCAK 2012

ÖNSÖZ

Başta bu çalışmamda en fazla emeği olan sevgili Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV hocama, eş danışmanım Doç. Dr. Mert ÇAĞLAR, sonra aileme, eşime, Fatih ve Kültür üniversitesindeki değerli arkadaşlarıma teşekkür ederim. Uzun süreli bir emeğin ürünü olan bu tezin tüm insanlığa fayda sağlamasını ümit ediyorum

Ocak 2012 Mehmet Emin ŞAN

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

$\sum$	:	Toplam
E()	:	Tahmini Değer
$\|\cdot\|$	:	Norm
$\int$	:	Integral
H	:	Hilbert Uzayı
A	:	Kendine Adjoint Operatör
δ	:	Keyfi Pozitif Reel Sayı

Üniversitesi	**:**	**İstanbul Kültür Üniversitesi**
Enstitüsü	**:**	**Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı	**:**	**Matematik-Bilgisayar**
Programı	**:**	**Matematik**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Mert ÇAĞLAR**
Tez Türü ve Tarihi	**:**	**Doktora - OCAK 2012**

ÖZET

STOKASTİK PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN YARIGRUP METODU YAKLAŞIMI

Mehmet Emin ŞAN

Bu tezde yerel olmayan sınır değer Stokastik parabolik denklemlerin tek basamaklı fark şemaları sunulmuştur. Bu fark şemalarının yaklaşım tahminleri yapılmıştır. Yerel olmayan parabolik sınır değer problemlerinin sayısal çözüm fark şemalarının yakınsama tahminleri yapılmıştır. Son olarak sayısal uygulamalarınada yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler	**:**	**Operatörlerin Yarı Grupları,**
		Stokastik Parabolik Eşitlikler,
		Fark Şeması,
		Tahminin Yakınsaması,
		Hilbert Uzayı.
Bilim Dalı Sayısal Kodu	**:**	**0924**

University	**:**	**İstanbul Kültür University**
Institute	**:**	**Institute of Science**
Science Programme	**:**	**Mathematics and Computer**
Programme	**:**	**Mathematics**
Supervisor	**:**	**Doç. Dr. Mert ÇAĞLAR**
Degree Awarded and Date	**:**	**Ph.D. - JANUARY 2012**

SUMMARY

An Approximation of Semigroups Method for Stochastic Parabolic Equations

Mehmet Emin ŞAN

In the present thesis, the single step difference schemes for the numerical solution of the nonlocal boundary value problem for stochastic parabolic equations are presented. The convergence estimates for the solution of these difference scheme are established. In applications, the convergence estimates for the solution of difference schemes for the numerical solution of nonlocal boundary value problems for parabolic equations are obtained. The numerical applications are given.

Keywords	**:**	**Semigroups of Operators,**
		Stochastic Parabolic Equations,
		Difference Scheme,
		Convergence Estimates,
		Hilbert space.
Science Code	**:**	**0924**

GİRİŞ

Hava tahminleri, fizyon hareketleri, finansal instrümentler örneğin bona değerleri, enflasyon tahminleri vs. ler belirsiz sistemlerdir ve bu belirsiz sistemler parabolik stokastik diferansiyel denklemler yardımı ile yorumlanırlar. Sınır değer problemleri çözümü bu belirsiz sitemlerin yorumlanmasında bir model oluşturur.

Stokastik diferansiyel denklemlerin Hilbert ve Banach uzaylarında araştırılmasında Operatörler metodundan istifade edilir. Bu konuda araştırma yapan yazarları kaynaklar kısmı içınde bulabilirsiniz (bkz. [1], [2], [3], [4]). Stokastik diferansiyel denklemlerin başlangıç sınır değer kısmı birçok araştırmacı tarafından ele alındı (bakınız, [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13]). Ancak, çoknoktalı yerel olmayan sınır değer problemleri için aynı şeyi pek söyleyemeyiz. Son olarak Hilbet ve Banach uzaylarındaki operetör yarıgrupları metodu, parçalı evülasyon diferansiyel denklemlerinde sistemli olarak ele alınıp geliştirilmiştir.(bakınız, [17], [18], [19], [20], [21], [22] kaynaklar).

Fiziğin matematik kısmında fark şemalarından sıklıkla istifade edilmektedir. Bilgisayar programları bizlere fark şemalarında uygulama yapma imkanı vermektedir. Böylece fark şemalari oluşturup yerel olmayan sınır değer problemlerine çözüm geliştirmek araştırmacıların ilgisini celp etti.

Fourier ve Laplace dönüşüm metotları ile yerel olmayan stokastik parabolik sınır değer problemlerini çözmek mümkün.

Şimdi yerel olmayan stokastik parabolik sınır değer eşitliğini ele alalım

$$\begin{cases} dv - v_{xx}dt = e^{-t}\sin x dw_t, \ 0 < t < 1, \quad 0 < x < \pi, \\ v(0,x,0\ ) = v(1,x,w_1\ ) - e^{-1}\sin x w_1, \quad 0 \le x \le \pi, \\ v(t,0,w_t) = v(t,\pi,w_t\ ) = 0, \quad 0 \le t \le 1, \\ w_t = \sqrt{t}\xi \quad \xi\tilde{\ }N(0,1). \end{cases} \tag{1.1}$$

Problem (1.1) in çözümü için, Fourier serisi metodunu kullanabiliriz. Problemi çözebilmek için ayrıştırmamız gerekmektedir

$$\begin{cases} du - u_{xx}dt = 0, \ 0 < t < 1, \ 0 < x < \pi, \\ u(0, x, 0) = u(1, x, w_1), \ 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0, w_t) = u(t, \pi, w_t) = 0, \ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

ve

$$\begin{cases} dz - z_{xx}dt = e^{-t} \sin x dw_t, \ 0 < t < 1, \ 0 < x < \pi, \\ z(0, x, 0) = z(1, x, w_1) - e^{-1} \sin x w_1, \ 0 \leq x \leq \pi, \\ z(t, 0, w_t) = z(t, \pi, w_t) = 0, \ 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

İlk olarak problem (1.2) nin çözümünü elde ederiz. Fourier serisi metodu ile, $u(t, x, w_t) = T(t, w_t)X(x) \neq 0$ ı elde ederiz. Dolayısı ile

$$T'(t, w_t)X(x) = T(t, w_t)X''(x),$$

veya

$$\frac{T'(t, w_t)}{T(t, w_t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

ve sınır değer şartlarını kullanarak

$$X(0) = 0, \ X(\pi) = 0.$$

elde edilir. Kolaylıkla göstermek mümkün ki eğer $\lambda \geq 0$ sınır değer problemi

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \ X(\pi) = 0$$

verilen başlangıç değer şartlarında trivial çözüm $X(x) = 0$ ise biz $\lambda < 0$ durumunda çözümleri inceleyeceğiz. Bunlar

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \ X(0) = 0, \ X(\pi) = 0$$

$$X_k(x) = \sin kx, k = 1, 2...,$$

ikinci eşitliği kullanarak ve $\lambda = -k^2$, den

$$T'(t,w_t)+k^2T(t,w_t)=0$$

elde edilir.

Lineer diferansiyel denklemin gerçek çözümü aşağıdaki gibidir,

$$T_k(t,w_t)=C_k(0)e^{-k^2t}.$$

Böylece

$$u(t,x,w_t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k(0)e^{-k^2t}\sin kx.$$

Sınır şarlarını kullanarak $u(0,x,0)=u(1,x,w_1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}C_k(0)\sin kx=\sum_{k=1}^{\infty}C_k(0)e^{-k^2}\sin kx.$$

elde ederiz. Buradan $C_k(0)-C_k(0)e^{-k^2}=0$ ve $C_k(0)=0$. Böylece $u(t,x,w_t)\equiv 0$. İkinci olarak, (1.3) ün çözümünü elde ederiz.

$$z(t,x,w_t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k(t,w_t)\sin kx,$$

olsun. Bundan

$$dz-z_{xx}dt=\sum_{k=1}^{\infty}(dA_k(t,w_t)+k^2A_k(t,w_t))dt\sin kx=e^{-t}\sin x dw_t.$$

Eğer $k\neq 1$ için $dA_k(t,w_t)+k^2A_k(t,w_t)dt=0$ yi çözersek, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz

$$A_k(t,w_t)=A_k(0,0)e^{-k^2t}.$$

Eğer $k=1$,

$$dA_1(t,w_t)+A_1(t,w_t)dt=e^{-t}dw_t\ .$$

dir çözerek şunu yazabiliriz

$$A_1(t,w_t)=A_1(0,0)e^{-t}+\int_0^t e^{-(t-s)}e^{-s}dw_s$$

$$=A_1(0,0)e^{-t}+e^{-t}w_t.$$

buradan

$$z(t,x,w_t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(0,0)e^{-k^2 t}\sin kx + e^{-t}w_t \sin x.$$

Yerel olmayan sınır değer şarlarını kullanirsak, $z(0,x,0) = z(1,x,0) - e^{-1}w_1 \sin x$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(0,0)\sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(0,0)e^{-k^2}\sin kx + e^{-1}w_1 \sin x - e^{-1}w_1 \sin x,$$

veya

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(0,0)\sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(0,0)e^{-k^2}\sin kx.$$

Buradan $A_k(0,0) = 0$ ve $z(t,x,w_t) = 0 + e^{-t}w_t \sin x = e^{-t}w_t \sin x$. Böylece,

$$v(t,x,w_t) = u(t,x,w_t) + z(t,x,w_t) = 0 + e^{-t}\sin xw_t,$$

veya

$$v(t,x,w_t) = e^{-t}\sin xw_t$$

ifadesi verilen sınır değer problemi (1.2) nin bir çözümüdür.

Aynı yoldan çok boyutlu yerel olmayan sınır değer stokastik diferansiyel problemini çözmek mümkün

$$\begin{cases} dv(t,x,w_t) - \sum\limits_{r=1}^{n} \alpha_r \frac{\partial^2 v(t,x,w_t)}{\partial x_r^2}dt + \delta v(t,x,w_t) = f(t,x)dw_t, \\ x = (x_1,\cdots,x_n) \in \Omega,\ 0 < t < T, \\ v(0,x,0) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j v(\lambda_j,x,w_{\lambda_j}) + \varphi(x,w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}), x \in \bar{\Omega}, \\ \sum\limits_{j=1}^{J} |\alpha_j| \le 1, 0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_J \le 1, \\ v(t,x,w_t) = 0,\ x \in S, \end{cases}$$

öyleki $\alpha_r, \delta > 0$ ve $f(t,x)(t \in [0,T], x \in \bar{\Omega})$, $\varphi(x,w_1)$, $x \in \bar{\Omega}$ iyi tanımlı fonksiyolar olarak veriliyor. Burada Ω açık n boyutlu birim küp Öklit Uzayıdır. $\mathbb{R}^n$ $(0 < x_k < 1,\ 1 \le k \le n)$ sınır şartları S, $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ dır

Değişkenlerin ayrışımı metodu sadece katsayılar sabit olması durumunda kullanılabilinir. Fark metodu, t ve uzay değişkenlerine bağlı değişken katsayılı parçalı diferansiyel denklemlerinde sıklıkla kullanılır.

İkinci olarak, stokastik terimli parabolik eşitliklerde sınır değer problemini ele alacağız.

$$\begin{cases} dv(t,x,w_t) - v_{xx}dt + 2vdt = e^{-(t+x)}dw_t, 0 < t < 1, 0 < x < \infty, \\ v(0,x,0) = v(1,x,w_1) - e^{-(1+x)}w_1,\ \ 0 \le x < \infty, \\ v(t,0,w_t) = e^{-t}w_t,\ \ v_x(t,0,w_t) = -e^{-t}w_t,\ \ 0 \le t \le 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Problem (1.4) ün çözümünde, son eşitliğin her iki tarafına Laplace dönüşüm metodunu kullanarak

$$L\{dv\} = L\{v_{xx}dt\} - L\{2vdt\} + L\{e^{-(t+x)}dw_t\}.$$

elde edilir.

$$dL\{v\} = s^2L\{v\}dt - sv(t,0,w_t)dt - v_x(t,0,w_t)dt - 2L\{v\}dt + \frac{e^{-t}dw_t}{s+1}.$$

$L\{v(t,x,w_t)\} = v(t,s,w_t)$ diyelim. Sonra

$$dv(t,s,w_t) - s^2v(t,s,w_t)dt + se^{-t}w_tdt - e^{-t}w_tdt + 2v(t,s,w_t)dt = \frac{e^{-t}dw_t}{s+1}.$$

Böylece, aşağıdaki denlklemi elde ederiz.

$$dv(t,s,w_t) + (2-s^2)v(t,s,w_t)dt = \frac{e^{-t}dw_t}{s+1} - (s-1)e^{-t}w_tdt.$$

Böylece,

$$\begin{aligned} v(t,s,w_t) = e^{-(2-s^2)t}v(0,s,0) + \frac{e^{-(2-s^2)t}}{s+1}{}_0^t e^{(1-s^2)p}dw_p \\ -e^{-(2-s^2)t}(s-1){}_0^t e^{(1-s^2)p}w_pdp. \end{aligned}$$

$v(0,s,0) = v(1,s,w_1) + \varphi(s,w_1)$ sınır değer şartlarını kullanarak ve kısmi integrasyon metoduyla şunu elde ederiz

$$v(t,s,w_t) = \frac{e^{-t}w_t}{s+1}.$$

Sonra

$$v(t,x,w_t) = L^{-1}\{v(t,s,w_t)\} = L^{-1}\{\frac{e^{-t}w_t}{s+1}\},$$

veya

$$v(t,x,w_t) = L^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}e^{-t}w_t.$$

Böylece,

$$v(t,x,w_t) = e^{-(t+x)}w_t$$

yerel olmayan sınır değer brobleminin (1.4) çözümüdür. Aynı yoldan çok boyutlu yerel olmayan sınır değer stokastik diferansiyel problemini çözmek mümkün

$$\begin{cases} dv(t,x,w_t) - \sum\limits_{r=1}^{n} \alpha_r \frac{\partial^2 v(t,x,w_t)}{\partial x_r^2} dt + \delta v(t,x,w_t) = f(t,x)dw_t, \\ x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega^+, \ 0 < t < T, \\ v(0,x,0) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j v(\lambda_j, x, w_{\lambda_j}) + \varphi(x, w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}), x \in \bar{\Omega}^+, \\ \sum\limits_{j=1}^{J} |\alpha_j| \le 1, 0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_J \le 1, \\ v(t,x,w_t) = 0, v_{x_k}(t,x,w_t) = 0, \ x \in S^+, k = 1, \cdots, n, \end{cases}$$

öyleki α_r, $\delta > 0$ ve $f(t,x)(t \in [0,T], x \in \bar{\Omega}^+), \varphi(x, w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J})$, $x \in \bar{\Omega}^+$ iyi tanımlı fonksiyonlar olsun. Burada Ω^+ n boyutlu açık Öklit uzayı $\mathbb{R}^n$ $(0 < x_k < \infty,$ $1 \le k \le n)$ sınırı S^+, $\bar{\Omega}^+ = \Omega^+ \cup S^+$.

Laplace değişim metodu sadece katsayılar sabit olması durumunda kullanılabilinir. Fark metodu, t ve uzay deişkenlerine bağlı değişken katsayılı parçalı diferansiyel denklemlerinde sıklıkla kullanılır.

Üçüncü olarak, stokastik terimli parabolik eşitliklerde sınır değer problemini Fourier değişim metodu ile çözümünü ele alacağız.

$$\begin{cases} dv - v_{xx}dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} dw_t, \\ v(0^+, x, 0^+) = v(1, x, w_1) - \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}} w_1, \ \ -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{1.5}$$

Eşitiğin (1.5) her iki tarafına Fourier değşimini uygulayalım. Sonra,

$$F\{dv\} - F\{v_{xx}dt\} = F\{\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} dw_t\}.$$

elde edilir. Buradan

$$dF\{v(t,x,w_t)\} - (is)^2F\{v(t,s,w_t)\}dt = F\{\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\}dw_t.$$

elde edilir.

$F\{v(t,x,w_t)\} = v(t,s,w_t)$ olsun, buradan

$$dv(t,s,w_t) + s^2v(t,s,w_t)dt = e^{-s^2t}dw_t$$

elde edilir.

Adi diferansiyel denkleminin çözümünden,

$$v(t,s,w_t) = v(0^+,s,0^+)e^{-s^2t} + e_0^{-s^2tt}dw_p$$

elde edilir.

sınır değerleri kullanılarak

$$v(t,s,w_t) = v(1,s,w_1)e^{-s^2t} - e^{-s^2}w_1e^{-s^2t} + e_0^{-s^2tt}dw_p.$$

Buradan

$$v(t,s,w_t) = e^{-s^2t}w_t.$$

Son olarak ters Fourier dönüşümünü kullanırsak

$$u(t,x,w_t) = F^{-1}\{F\{e^{-s^2t}w_t\}\}.$$

Böylece,

$$u(t,x,w_t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}w_t$$

problem (1.5) in çözümünü elde ederiz.

Aynı yoldan çok boyutlu yerel olmayan sınır değer stokastik diferansiyel problemini çözmek mümkün

$$\begin{cases} dv(t,x,w_t) - \sum\limits_{|r|=2m} \alpha_r \frac{\partial^{|r|} v(t,x,w_t)}{\partial x_1^{r_1} \cdots \partial x_n^{r_n}} dt + \delta v(t,x,w_t)dt = f(t,x)dw_t, \\ x, r \in \mathbb{R}^n \quad 0 \le t \le T, \ \ |r| = r_1 + \cdots + r_n, \\ v(0,x,0) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j v(\lambda_j, x, w_{\lambda_j}) + \varphi(x, w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}), \ x \in \mathbb{R}^n, \\ \sum\limits_{j=1}^{J} |\alpha_j| \le 1, 0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_J \le 1, \end{cases}$$

öyleki α_r, $\delta > 0$ ve $f(t,x)(t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^n), \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ iyi tanımlı fonksiyonlardır.

Ancak, Fourier dönüşümü yöntemi yalnızca denklem sabit katsayılı olması durumunda kullanılabilinir. Katsayıları t ve uzay değişkenli bağımlı kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için en faydalı yöntem fark şemaları yöntemi olduğu bilinmektedir.

Yerel olmayan stokastik parabolik sınır değer problemleri yerel olmayan sınır değer problemine indirgenebilinir.

$$\begin{cases} dv(t) = -Av(t)dt + f(t)dw_t, 0 < t < T, \\ v(0) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j v(\lambda_j) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}), \\ \sum\limits_{j=1}^{J} |\alpha_j| \le 1, 0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_J \le 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

Hilbert uzayında A kendine adjoint pozitif operatördür. Burada

i. w_t bu bir standart Wiener proses olduğu (Ω, F, P) ihtimal uzayında verilmiştir.

ii. $f(t)$, $M_w^2([0,T], H_1)$ uzayının elemanıdır. H_1- i içerir ve aşağıdaki şartı sağlar

$$E \int_0^T \|f(t)\|_{H_1}^2 dt < \infty, H_1 \subset H$$

Şimdi gelecekte ihtiyacımızın olacağı bazı lemmaları ve ispatlarını verelim. Bu tezin tamamında verilen bu tanımlama geçerlidir, H bir Hilbert uzayı olsun, A bir pozitif tanımlı kendine adjoint operatör $A \ge \delta I$, olsun öyleki $\delta > 0$.

Lemma 1.1. *Aşağıdaki souçları almak mümkün:*

$$\left\| e^{-tA} \right\|_{H \to H} \le e^{-\delta t} (t \ge 0), \left\| A e^{-tA} \right\|_{H \to H} \le \frac{1}{t} (t > 0). \tag{1.7}$$

Lemma 1.2. *Kabul edelimki*

$$\sum_{k=1}^{J} |\alpha_k| \leq 1 \tag{1.8}$$

sağlanır. Buradan, operatör

$$I - \sum_{k=1}^{J} \alpha_k e^{-\lambda_k A}$$

tersi elde edilir

$$\Upsilon = \left(I - \sum_{k=1}^{J} \alpha_k e^{-\lambda_k A} \right)^{-1} \tag{1.9}$$

aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$||\Upsilon||_{H \to H} \leq \frac{1}{1 - e^{-\lambda_1 \delta}} \leq C(\delta, \lambda_1). \tag{1.10}$$

İspat: Üçgen eşitsizli, kabul (1.8) ve sonuç

$$\left\| \left(I - \sum_{k=1}^{J} \alpha_k e^{-\lambda_k A} \right)^{-1} \right\|_{H \to H} \leq \sup_{\delta \leq \mu < \infty} \frac{1}{|1 - \sum_{k=1}^{J} \alpha_k e^{-\lambda_k \mu}|}$$

dan elde edebiliriz. Şimdi problem (1.6) için bir çözüm bulmaya çalışalım. $(i)-(ii)$ ve

$$E\|v(0)\|_{H_2}^2 < \infty, H_2 \subset H,$$

kabulleri altında Cauchy problemi

$$dv(t) = -Av(t)dt + f(t)dw_t, 0 < t < T, v(0) \text{ veriliyor} \tag{1.11}$$

nin tek çözümü vardır ve aşağıdaki gibi yazılır

$$v(t) = e^{-At}v(0) + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s)dw_s. \tag{1.12}$$

Sonra bu formül ve çok noktalı sınır değer şartlarından

$$v(0) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j v(\lambda_j) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}),$$

bunu elde ederiz

$$v(0) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j e^{-A\lambda_j} v(0) + \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - s)} f(s)dw_s + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}).$$

Lemma 1.2 den operatör $I-\sum\limits_{j=1}^{J}\alpha_j e^{-A\lambda_j}$ tersi sınırlıdır $\Upsilon=\left(I-\sum\limits_{j=1}^{J}\alpha_j e^{-A\lambda_j}\right)^{-1}$. Buradan

$$v(0)=\Upsilon\left\{\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\int\limits_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}f(s)dw_s+\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\}. \tag{1.13}$$

Böylece, Şu formülleri (1.12) ve (1.13) ü problem (1.6) nın çözümü için elde ederiz.

Şimdi $[0,T]$ aralığında tek adımlı tam fark şemasını inceleyeceğiz. Düzgün ağ (uniform grid) uzayını $\tau>0$ basamağında ele alalım

$$[0,T]_\tau=\{t_k=k\tau,k=0,1,\cdots,N,N\tau=T\}$$

N belirli pozitif tam sayıdır.

Teorem 1.1. *$v(t_k)$ifadesi (1.6) nın $t=t_k$ ağ noktalarında çözümü olsun . Sonra $\{v(t_k)\}_0^N$ ifadesi aşağıdaki çok noktalı yerel olmayan sınır değer fark denkleminin*

$$v\left(t_k\right)-v\left(t_{k-1}\right)+\left(I-e^{-\tau A}\right)v\left(t_{k-1}\right)=\int_{t_{k-1}}^{t_k}e^{-(t_k-s)A}f(s)dw_s, \tag{1.14a}$$

çözümdür.

$$1\leq k\leq N,$$

$$v\left(0\right)=\Upsilon\left\{\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\int\limits_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}f(s)dw_s+\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\}.$$

İspat $t=t_k$ ve $t=t_{k-1}$ yı formül (1.12) de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}v(t_k)&=e^{-t_kA}v(0)+\int_0^{t_k}e^{-(t_k-s)A}f(s)dw_s\\&=e^{-\tau A}\left[e^{-t_{k-1}A}v(0)+\int_0^{t_{k-1}}e^{-(t_{k-1}-s)A}f(s)dw_s\right]\\&\quad+\int_{t_{k-1}}^{t_k}e^{-(t_k-s)A}f(s)dw_s,\\v(t_{k-1})&=e^{-t_{k-1}A}v(0)+\int_0^{t_{k-1}}e^{-(t_{k-1}-s)A}f(s)dw_s,\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $v(t_k)$ ve $v(t_{k-1})$ arasındaki ilişkiyi

$$v(t_k)=e^{-\tau A}v(t_{k-1})+\int_{t_{k-1}}^{t_k}e^{-(t_k-s)A}f(s)dw_s$$

elde ederiz. Son eşitlik ve ilişkisi $(1.14a)$ a denk. Theorem 1.1 ispatlandı.

Mevcut çalışmalarla, yerel olmayan sınır değer problemi (1.6) nin sayısal çözümleri için tek adımlı fark şemaları oluşturulmuştur. Bu fark şemaları içinde yakınsak tahminler oluşturulmuştur. Uygulamada bu soyut sonuç bize yerel olmayan parabolik sınır değer problemlerinin sayısal çözümlerinde yakınsak tahminleri elde etmeye yarar. Teorik tüm sonuçları sayısal olarak ele alıp destekledik.

Şimdi tezimizdeki bölümleri kısaca özetleyelim. Tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm Giriş. İkinci bölüm de problem (1.6) nın yaklaşık çözümlerini bulmak için $1/2-$inci mertebeden doğru Rothe fark şemasını kurduk ve araştırdık. Uygulamada bu soyut sonuç bize yerel olmayan parabolik sınır değer problemlerinin sayısal çözümlerinde yakınsak tahminleri elde etmeye yarar. Üçüncü bölümde de problem (1.6) nın yaklaşık çözümlerini bulmak için $3/2-$inci mertebeden doğru fark şemasını, A^2 dan oluşturulan, kurduk ve araştırdık. Dördüncü bölümde de problem (1.6) nın yaklaşık çözümlerini bulmak için oluşturulan $3/2-$inci mertebeden doğru Crank-Nicholson fark şemasını kurduk ve araştırdık. Beşinci bölüm sayısal analize ve altıncı bölümde sonuç kısmına ayrıldı.

Rothe Fark Şeması

Bu bölümde $1/2-$ inci mertebeden doğru fark şemasını problem (1.6) in tahmini çözümü için kurduk ve araştırdık. Bu fark şemasının tahmini çözümü için yakınsama tahmini oluşturuldu. Uygulama olarak, yerel olmayan çok noktalı sınır değer stokastik parabolik eşitliklerin fark şemaları çözümlerinin yakınsama tahminleri elde edilmiştir.

1/2-inci Mertebeden Doğru Rothe Fark Şeması: Standard Wiener Prosesli

İleride gerekli olan lemmaları sırayla verelim.

Lemma 2.1. *Aşağıdaki sonuçları alamak mümkün:*

$$\left\|A^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-A(t_s-p)}-e^{-\tau A}\right)\right\|_{H\to H}\leq C_1\tau^{\frac{1}{2}},t_{s-1}\leq p\leq t_s,1\leq s\leq N, \tag{2.1}$$

$$\left\|A^{\alpha}R^{k}\right\|_{H\to H}\leq\frac{1}{(k\tau)^{\alpha}},\quad 1\leq k\leq N,\ 0\leq\alpha\leq 1, \tag{2.2}$$

$$\left\|A^{-\alpha}\left(R^{k}-e^{-k\tau A}\right)\right\|_{H\to H}\leq\frac{2\tau^{\alpha}}{k^{1-\alpha}},\ 1\leq k\leq N,\ 0\leq\alpha\leq 2, \tag{2.3}$$

öyleki $R=(I+\tau A)^{-1}$.

Lemma 2.2. *Kabul edelimki* (1.8) *doğrudur. Sonra, Aşağıdaki operatörün*

$$I-\sum_{j=1}^{J}\alpha_j R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}$$

tersi vardır ve operatör sınırlıdır

$$\Upsilon_\tau=\left(I-\sum_{j=1}^{J}\alpha_j R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\right)^{-1} \tag{2.4}$$

ve aşağıdaki sonuç sağlanır:

$$\|\Upsilon_\tau\|_{H\to H}\leq C(\delta,\lambda_1). \tag{2.5}$$

İspat İspat üçgen eşitsizliğinden ve kabul(1.8)den elde edilir, ve sonuç

$$\left\| \left(I - \sum_{j=1}^{J} \alpha_j R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} \right)^{-1} \right\|_{H \to H} \leq \sup_{\delta \leq \mu < \infty} \frac{1}{\left| 1 - \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_k \frac{1}{(1+\mu\tau)^{\left[\frac{\lambda_k}{\tau}\right]}} \right|}.$$

$(1.14a)$ nın yardımı ile çok noktalı yerel olmayan sınır değer problemlerinin tahmini değer çözümleri çok daha kolay. (1.6) ifadesini tahmin etmemiz gerekli

$$e^{-\tau A},$$

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-(t_k - s)A} f(s) dw$$

ve çoknoktalı yerel olmayan sınır değer şartı

$$v(0) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j v(\lambda_j) + \varphi(w_{\lambda_1, \cdots, } w_{\lambda_J}).$$

$f(t)$ için (ii) den daha kuvvetli bir kabulle bu mümkündür.

$$E \left\| A^{\frac{1}{2}} \varphi(w_{\lambda_1, \cdots, } w_{\lambda_J}) \right\|_H^2 + \max_{0 \leq s \leq T} E \left\| A^{\frac{1}{2}} f(s) \right\|_H^2 \leq C_1.$$

$e^{-\tau A}$, $e^{-(t_k - s)A}$ ifadelerini $R = (I + \tau A)^{-1}$, ile yer değiştirirsek problem (1.6) nin çözümü için Rothe fark şemasını aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\begin{cases} u_k - u_{k-1} + \tau A u_k = \varphi_k, \varphi_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(s) dw_s, \; t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, \\ u_0 = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} + \varphi(w_{\lambda_1, \cdots, } w_{\lambda_J}) \end{cases} \tag{2.6}$$

Rothe fark şemasının

$$\begin{cases} u_k - u_{k-1} + \tau A u_k = \varphi_k, \varphi_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(s) dw_s, \; t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, \\ u_0 = \varphi(w_{\lambda_1, \cdots, } w_{\lambda_J}) \end{cases}$$

Cauchy problemi çözümleri için

$$\begin{cases} dv(t) = -Av(t)dt + f(t)dw_t, 0 < t < T, \\ v(0) = \varphi(w_{\lambda_1, \cdots, } w_{\lambda_J}), \\ w_t = \sqrt{t}\xi, \xi \in N(0,1), 0 \leq t \leq T \end{cases} \tag{2.7}$$

tek çözümü vardır, aşağıdaki formülle şöyle ifade edilir

$$u_k = R^k u_0 + \sum_{s=1}^{k} R^{k-s+1} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(s) dw_s, \; 1 \leq k \leq N. \tag{2.8}$$

Bu formül ve çok noktalı yerel olmayan sınır değer şartlarından

$$u_0=\sum_{j=1}^{J}\alpha_j u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}+\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}),$$

aşağıdakini elde ederiz

$$u_0=\sum_{j=1}^{J}\alpha_j R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}u_0+\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\sum_{s=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]-s+1}\int_{t_{s-1}}^{t_s}f(p)dw_p+\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}).$$

Lemma 2.5 yardımı ile operatör $I-\sum_{j=1}^{J}\alpha_j R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}$ ün sınırlı tersi vardır

$$\Upsilon_\tau=\left(I-\sum_{j=1}^{J}\alpha_j R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\right)^{-1}.$$

Sonra

$$u_0=\Upsilon_\tau\left\{\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\sum_{s=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]-s+1}\int_{t_{s-1}}^{t_s}f(p)dw_p+\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\}. \tag{2.9}$$

Böylece, (2.8) ve (2.9) formüllerini problem (2.6) in çözümleri için elde ederiz. Şimdi fark şeması (2.6) nın yakınsama tahminini araştıracağız.

Teorem 2.1. *Aşağıdaki yakınsama tahmini*

$$\max_{0\le k\le N}\left(E\left\|v(t_k)-u_k\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\le C_1(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}} \tag{2.10}$$

elde edilir. Burada, C ve $C_1(\delta,\lambda_1)$ τ dan bağımsızdır.

İspat formül (1.13) ve (2.9) yi kullanarak, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz

$$v(0)-u_0=(\Upsilon-\Upsilon_\tau)\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})$$

$$+(\Upsilon-\Upsilon_\tau)\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\int_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}f(s)dw_s.$$

$$+\Upsilon_\tau\left(\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\int_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}f(s)dw_s-\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\sum_{s=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]-s+1}\int_{t_{s-1}}^{t_s}f(p)dw_p\right)$$

$$=P_{1,J}+P_{2,J}+P_{3,J}+P_{4,J}+P_{5,J}+P_{6,J},$$

öyleki

$$P_{1,J}=(\Upsilon-\Upsilon_\tau)\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}), \tag{2.11}$$

$$P_{2,J}=(\Upsilon-\Upsilon_\tau)\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\int_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}f(s)dw_s, \tag{2.12}$$

$$P_{3,J}=\Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\int_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau}^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}f(s)dw_s, \tag{2.13}$$

$$P_{4,J}=\Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\int_{t_{p-1}}^{t_p}\left(e^{-(\lambda_j-s)A}-e^{-\left(\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau-s\right)A}\right)f(s)dw_s, \tag{2.14}$$

$$P_{5,J}=\Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\left(e^{-\left(\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau-p\tau\right)A}-R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]-p}\right)\int_{t_{p-1}}^{t_p}e^{-(t_p-s)A}f(s)dw_s, \tag{2.15}$$

$$P_{6,J}=\Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]-p}\int_{t_{p-1}}^{t_p}\left[e^{-(t_p-s)A}-R\right]f(s)dw_s. \tag{2.16}$$

Bütün $k=1,\cdots,6$, ler için $P_{k,J}$ ı bulalım. $P_{1,J}$ den başlıyalım. (1.9) ve (2.4) formüllerini kullanarak, aşağıdaki ifadeyı elde ederiz

$$\Upsilon-\Upsilon_\tau=\Upsilon\Upsilon_\tau\left(\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\left(e^{-A\lambda_j}-R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\right)\right). \tag{2.17}$$

$P_{1,J}$ nin beklenen değerini tahmin edelim. Formül (2.11) ü kullanarak, üçgen eşitsizliği, (2.5), (1.10) ve (2.2) sonuçlarını kullanarak

$$\left(E\left\|P_{1,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left\|\Upsilon_\tau\right\|_{H\to H}\left\|\Upsilon\right\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{J}\left|\alpha_j\right|\left\|A^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-A\lambda_j}-R^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right)\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left(E\left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(E\left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

Şimdi $P_{2,J}$ yi tahmin edelim. (2.12) formülünü, üçgen eşitsizliğini, (2.5), (1.10), (2.3) ve (1.7) leri kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E\left\|P_{2,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left\|\Upsilon_\tau\right\|_{H\to H}\left\|\Upsilon\right\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{J}\left|\alpha_j\right|\left\|A^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-A\lambda_j}-R^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right)\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left(E\left\|\int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j-s)}A^{\frac{1}{2}}f(s)dw_s\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_5(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\max_{0\leq s\leq\lambda_j}E\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_6(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(\max_{0\leq s\leq T}E\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{3,J}$ i tahmin edelim. (2.13) formülünü, üçgen eşitsizliğini, (2.5) ve (1.7) leri kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E\left\|P_{3,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\|\Upsilon_\tau\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\left(\left\|e^{-A(\lambda_j-s)}\right\|_{H\to H}^2\int_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau}^{\lambda_j}E\left\|f(s)\right\|_H^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\left(\int_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau}^{\lambda_j}E\left\|f(s)\right\|_H^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\left(\lambda_j-\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\max_{0\leq s\leq T}E\left\|f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_7(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(\max_{0\leq s\leq T}E\left\|f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{4,J}$ i tahmin edelim. (2.14) formülünü, üçgen eşitsizliğini, (2.5) ve (2.3) yi kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E\left\|P_{4,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\|\Upsilon_\tau\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|$$

$$\times\left(\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}E\int_{t_{p-1}}^{t_p}\left\|A^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-(\lambda_j-s)A}-e^{-\left(\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau-s\right)A}\right)\right\|_{H\to H}^2E\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\left(\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\tau\int_{t_{p-1}}^{t_p}E\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\leq C_1(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(\max_{0\leq s\leq T}E\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{5,J}$ i tahmin edelim. (2.15) formülünü, üçgen eşitsizliğini, (2.5), (2.3) ve (1.7) yi kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E\left\|P_{5,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\Upsilon_\tau\right\|_{H\to H}\left(\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\left\|A^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-\left(\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau-p\tau\right)A}-R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]-p}\right)\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times E\int_{t_{p-1}}^{t_p}\left\|e^{-(t_p-s)A}\right\|_{H\to H}^2\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(E\int_0^T\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(\max_{0\leq s\leq T}E\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{6,J}$ yi tahmin edelim. (2.16) formülünü, üçgen eşitsizliğini, (2.5), (2.3) ve (2.2) yi kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E\left\|P_{6,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\Upsilon_\tau\right\|_{H\to H}\left(\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\left\|A^{-\frac{1}{2}}R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]-p}\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times E\int_{t_{p-1}}^{t_p}\left\|e^{-(t_p-s)A}-R\right\|_{H\to H}^2\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(\max_{0\leq s\leq T}E\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

yukarıdakileri kullanarak $P_{k,J}$, $k=1,\cdots,6$, şunu elde ederiz

$$\left(E\left\|v(t_0)-u_0\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_4(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}. \tag{2.18}$$

Theorem 2.1 i ispatlamak için aşağıdaki sonucu elde etmek yeterlidir.

$$\max_{1\leq k\leq N}\left(E\left\|v(t_k)-u_k\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\ . \tag{2.19}$$

(1.13) ve (2.8) formüllerini kullanarak şunu yazabiliriz

$$v(t_k)-u_k=e^{-k\tau A}v(0)+\sum_{s=1}^{k}e^{-(k-s)\tau A}\int_{t_{s-1}}^{t_s}e^{-A(t_s-p)}f(p)dw_p$$

$$-R^k u_0 - \sum_{s=1}^{k} R^{k-s+1} \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} f(p)dw_p = D_{1,k} + D_{2,k} + D_{3,k} + D_{4,k} + D_{5,k},$$

öyleki

$$D_{1,k} = (e^{-k\tau A} - R^k)\Upsilon \left\{ \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \int\limits_{0}^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - s)} f(s)dw_s + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}) \right\},$$

$$D_{2,k} = R^k(v(0) - u_0),$$

$$D_{3,k} = \sum_{s=1}^{k-1} \left(e^{-(k-s)\tau A} - R^{k-s}\right) \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} e^{-A(t_s - p)} f(p)dw_p,$$

$$D_{4,k} = \sum_{s=1}^{k} R^{k-s} \left(\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} e^{-A(t_s-p)} f(p)dw_p - e^{-\tau A} \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} f(p)dw_p \right),$$

$$D_{5,k} = \sum_{s=1}^{k} R^{k-s} \left(e^{-\tau A} - R\right) \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} f(p)dw_p.$$

$D_{m,k}$ i tüm $m = 1, \cdots, 5$ ler için ayrı ayrı bulalım. $D_{1,k}$ dan başlayalım. Üçgen eşitsizliğini, (1.10), (1.7), (2.3) ve (2.2) leri kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E \left\|D_{1,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\left\|(e^{-k\tau A} - R^k)A^{-\frac{1}{2}}\right\|_{H\to H}^2 \right.$$

$$\left. \times E \left\| \Upsilon \left\{ \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \int\limits_{0}^{\lambda_j} A^{\frac{1}{2}} e^{-A(\lambda_j - s)} f(s)dw_s + A^{\frac{1}{2}} \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}) \right\} \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta, \lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}} \left(E \left\| \Upsilon \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \int\limits_{0}^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - s)} A^{\frac{1}{2}} f(s)dw_s + A^{\frac{1}{2}} \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}) \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta, \lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}} \left\|\Upsilon\right\|_{H\to H} \left\{ \sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \int\limits_{0}^{\lambda_j} \left\|e^{-A(\lambda_j - s)}\right\|_{H\to H}^2 E \left\|A^{\frac{1}{2}} f(s)\right\|_H^2 ds \right.$$

$$\left. + \left\|A^{\frac{1}{2}} \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_3(\delta, \lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{0}^{T} E \left\|A^{\frac{1}{2}} f(s)\right\|_H^2 ds + E \left\|A^{\frac{1}{2}} \varphi\right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_4(\delta, \lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}} \left(\left(\max_{0\leq s\leq T} E \left\|A^{\frac{1}{2}} f(s)\right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(E \left\|A^{\frac{1}{2}} \varphi\right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Şimdi $D_{2,k}$ i tahmin edelim (2.3) ü kullanarak aşağıdaki ifadeyi

$$\left(E\left\|D_{2,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\left\|R^k\right\|_{H\to H}^2 E\left\|v(0)-u_0\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(E\left\|v(0)-u_0\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

ve (2.18) i kullanırsak, şu sonucu elde ederiz:

$$\left(E\left\|D_{2,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $D_{3,k}$ i tahmin edelim. üçgen eşitsizliğini, (1.7), (2.3) ve (2.2) yı kullanarak, şu sonucu elde ederiz

$$\left(E\left\|D_{3,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta,\lambda_1)\left(\sum_{s=1}^{k-1}\left\|A^{-\frac{1}{2}}\left[e^{-(k-s)\tau A}-R^{k-s}\right]\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times\left\|e^{-A(t_s-p)}\right\|_{H\to H}^2 E\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|A^{\frac{1}{2}}f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C(\delta,\lambda_1)\left(\sum_{s=1}^{k-1}\tau E\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|A^{\frac{1}{2}}f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(E\int_0^T\left\|A^{\frac{1}{2}}f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(\max_{0\leq s\leq T}E\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $D_{4,k}$ i tahmin edelim. üçgen eşitsizliğini, (2.5), (2.3) ve (2.1) i kullanarak şu sonucu elde ederiz

$$D_{4,k} = \sum_{s=1}^{k} R^{k-s}\left(\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left(e^{-A(t_s-p)}-e^{-\tau A}\right)f(p)dw_p\right)$$

$$\left(E\left\|D_{4,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{s=1}^{k}\left\|R^{k-s}\right\|_{H\to H}^2\left\|A^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-A(t_s-p)}-e^{-\tau A}\right)\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times E\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|A^{\frac{1}{2}}f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{s=1}^{k}E\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|A^{\frac{1}{2}}f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(\max_{0\leq s\leq T}E\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Son olarak, $D_{5,k}$ i tahmin edelim. üçgen eşitsizliğini, (2.3) ve (2.2) yı kullanarak şu sonucu elde ederiz

$$\left(E\left\|D_{5,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{s=1}^{k}\left\|R^{k-s}\right\|_{H\to H}^2 E\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left\| A^{-\frac{1}{2}} \left(e^{-\tau A} - R \right) \right\|_{H \to H} \leq C_2(\delta, \lambda_1) \tau^{\frac{1}{2}} \left(\max_{0 \leq s \leq T} E \left\| A^{\frac{1}{2}} f(s) \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$D_{1,k}$, $D_{2,k}$, $D_{3,k}$, $D_{4,k}$ ve $D_{5,k}$ leri toparlarsak (2.19) elde edilir ve Theorem 2.1 ispatlanmış olur.

Şimdi Theorem 2.1 in uygulamasına bir göz atalım. İlk önce, bir boyutlu yerel olmayan stokastik parabolik diferansiyel denklem için sınır değer problemine bakalım

$$\begin{cases} du(t,x) - (a(x)u_x)_x dt + \delta u(t,x)dt = f(t,x)dw_t, \\ 0 < t < T, 0 < x < 1, \\ u(0,x) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u(\lambda_j, x) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots}, w_{\lambda_J}, x), \ 0 \leq x \leq 1, \\ u(t,0) = u(t,1), \ u_x(t,0) = u_x(t,1), \ 0 \leq t \leq T, \end{cases} \tag{2.20}$$

öyleki $\delta > 0$, $a(x) \geq a > 0$ $\ (x \in (0,1))$, $\varphi(w_{\lambda_1,\cdots}, w_{\lambda_J}, x)$ $(x \in [0,1])$ ve $f(t,x)$ $(t, x \in [0,1])$ x e göre iyi tanımlı fonksiyonlardır.

Problem (2.20) ün diskritizasyonu iki aşamalıdır. İlk aşamada bir ağ uzayı tanımlayalım,

$$[0,1]_h = \{x = x_n : x_n = nh, \ 0 \leq n \leq M, \ Mh = 1\}.$$

Hilbert uzayını tanımlayalım. Ağ fonksiyonlarını $L_{2h} = L_2([0,1]_h)$ $\varphi^h(x) = \{\varphi_n\}_1^{M-1}$ ve $[0,1]_h$ de tanımlayalım, normuda

$$\|\varphi^h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x \in [0,1]_h} |\varphi(x)|^2 h \right)^{1/2}$$

olsun.

Problem (2.20) yardımı ile oluşturulan A fark operatörünü A_h^x i şöyle ifade edebiliriz

$$A_h^x \varphi^h(x) = \{-(a(x)\varphi_{\overline{x}})_{x,n} + \delta \varphi_n\}_1^{M-1} \tag{2.21}$$

ağ fonksiyonlar uzayında $\varphi^h(x) = \{\varphi_n\}_0^M$ $\varphi_0 = \varphi_M$, $\varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_M - \varphi_{M-1}$ şartlarını sağlıyor. A_h^x L_{2h} uzayında pozitif tanımlı kendinden adjoint bir operatördür. Yerel olmayan sınır değer problemine A_h^x ın yardımı ile ulaşırız.

$$\begin{cases} du^h(t,x) + A_h^x u^h(t,x)dt = f^h(t,x)dw_t, \ 0 < t < T, \ x \in [0,1]_h, \\ u^h(0,x) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u^h(\lambda_j, x) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots}, w_{\lambda_J}, x), x \in [0,1]_h. \end{cases} \tag{2.22}$$

İkinci aşamada, (2.22) yı fark şeması (2.6) ile yer değiştirelim

$$\begin{cases} u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x) + \tau A_h^x u_k^h(x) = f_{k-1}^h(x), f_{k-1}^h(x) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f^h(s,x)dw_s, \\ t_k = k\tau,\ 1 \le k \le N,\ x \in [0,1]_h, \\ u_0^h(x) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{[\frac{\lambda_j}{\tau}]}^h(x) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}, x), x \in [0,1]_h. \end{cases} \tag{2.23}$$

Teorem 2.2. *τ ve h keyfi ve yeterince küçük sayı olsun. Böylece,(2.23) nin çözümü aşağıdaki tahminin yakınsamasını sağlar*

$$\max_{0 \le k \le N} \left(E \left\| v^h(t_k) - u_k^h \right\|_{L_{2h}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le C(\delta, \lambda_1) \left(\tau^{\frac{1}{2}} + h \right), \tag{2.24}$$

öyleki $C(\delta, \lambda_1)$ τ ve h den bağımsızdır.

Theorem 2.2 in ispatı Theorem 2.1 in soyut formu temel alınarak ve A_h^x (2.21) de tanımlı fark şemaları operatörlerinin simetri özelliğinden istifade ile yapılır.

İkinci, Ω n boyutlu Öklit uzayında açık birim küp olsun $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \cdots, , x_n) : 0 < x_i < 1, i = 1, \cdots, n\}$ sınırları S. $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$. $[0,T] \times \Omega$ nın içinde çok boyutlu yerel olmayan parabolik eşitlik için sınır değer problemi olsun.

$$\begin{cases} du(t,x) - \sum\limits_{r=1}^{n} (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} dt = f(t,x) dw_t, \\ 0 < t < T, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega, \\ u(0,x) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u(\lambda_j, x) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}, x), x \in \overline{\Omega}, \\ u(t,x) = 0,\ x \in S,\ 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{2.25}$$

Dirichlet şartını ele alalım. Burada $a_r(x)$, $(x \in \Omega)$, $\varphi(x)$ $(x \in \overline{\Omega})$, ve $f(t,x)$ $(t \in (0,1),\ x \in \Omega)$ verilen x ve $a_r(x) \ge a > 0$ göre iyi tanımlı fonksiyonlardır.

Problem (2.25) nın diskritizasyonu iki aşamalıdır. İlk aşamada, ağ uzayını şöyle tanımlayalım $\widetilde{\Omega}_h = \{x = x_m = (h_1 m_1, \cdots, h_n m_n); m = (m_1, \cdots, m_n), 0 \le m_r \le N_r, h_r N_r = 1, r = 1, \cdots, n\}$, $\Omega_h = \widetilde{\Omega}_h \cap \Omega$, $S_h = \widetilde{\Omega}_h \cap S$.

L_{2h} Hilbert uzayını ifade eder

$$L_{2h} = L_2(\widetilde{\Omega}_h) = \left\{ \varphi^h(x) : \left(\sum_{x \in \widetilde{\Omega}_h} |\varphi^h(x)|^2 h_1 \cdots h_n \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

(2.25) daki Fark operatörü A yı aşağıdaki ifade ile yer değiştirelim

$$A_h^x u^h(x) = -\sum_{r=1}^{n} \left(a_r(x) u_{\overline{x}_r}^h\right)_{x_r, j_r}, \tag{2.26}$$

öyleki, fark operatörü A_h^x ağ fonksiyonlarında şöyle tanımlanmıştır $u^h(x) = 0$, S_h deki her $x \in ɕin.A_h^x$ ler L_{2h} uzayında kendine-adjoint pozitif tanımlıdır.

(2.25) ve (2.26) yı kullanarak, aşağıdakini elde ederiz

$$\begin{cases} du^h(t,x) + A_h^x u^h(t,x)dt = f^h(t,x)dw_t, \ 0 < t < T, \ x \in \Omega_h, \\ u^h(0,x) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u^h(\lambda_j, x) + \varphi(w_{\lambda_1, \cdots,} w_{\lambda_J}, x), x \in \widetilde{\Omega}_h. \end{cases} \tag{2.27}$$

İkinci aşamada, (2.27) yı fark şeması (2.6) ile yer değiştirelim

$$\begin{cases} u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x) + \tau A_h^x u_k^h(x) = f_{k-1}^h(x), f_{k-1}^h(x) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f^h(s,x)dw_s, \\ t_k = k\tau, \ 1 \le k \le N, \ x \in \Omega_h, \\ u_0^h(x) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{[\frac{\lambda_j}{\tau}]}^h(x) + \varphi(w_{\lambda_1, \cdots,} w_{\lambda_J}, x), x \in \widetilde{\Omega}_h. \end{cases} \tag{2.28}$$

Teorem 2.3. *τ ve $|h| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}$ keyfi küçük sayılar olsun. Böylece, fark şeması çözümleri (2.28) aşağıdaki yakınsama tahminini sağlar,*

$$\max_{0 \le k \le N} \left(E \left\| v^h(t_k) - u_k^h \right\|_{L_{2h}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le C(\delta, \lambda_1) \left(\tau^{\frac{1}{2}} + |h|^2\right), \tag{2.29}$$

öyleki $C(\delta, \lambda_1)$ τ ve $|h|$ den bağımsızdır.

Theorem 2.3 ün ispatı Theorem 2.1 in soyut formuna ve (2.26) de tanımlı fark operatörü A_h^x in simetri özelliğine bağlıdır.

Kabul edelimki,

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|A^{-\frac{1}{2}}f'(t)\right\|_H+\max_{t\in[0,T]}\left\|A^{\frac{1}{2}}f(t)\right\|_H\le C.$$

$e^{-\tau A}$ ve $e^{-(t_k-s)A}$ ifadelerini $R=(I+\tau A)^{-1}$ ifadesiyle, $v(\lambda_j)$ ifadesini $v\left(\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau\right)$ ifadesiyle ve $f(s)$ fonksiyonunu $f(t_{k-1})$ fonksiyonu ile yer değiştirirsek, Rothe fark şemasını

$$\begin{cases} u_k-u_{k-1}+\tau Au_k=f(t_{k-1})(w_{t_k}-w_{t_{k-1}}),\ 1\le k\le N, \\ u_0=\sum\limits_{j=1}^{J}\alpha_j u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}+\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}). \end{cases} \tag{2.30}$$

elde ederiz. Problem (2.6) in çözümü için formül bulalım. Cauchy problemi (2.7) için Rothe fark şeması

$$\begin{cases} u_k-u_{k-1}+\tau Au_k=f(t_{k-1})(w_{t_k}-w_{t_{k-1}}),\ 1\le k\le N, \\ u_0 \text{ is given} \end{cases}$$

nın tek çözümü vardır, ve aşağıdaki gibi temsil edilir

$$u_k=R^k u_0+\sum_{s=1}^{k}R^{k-s+1}f(t_{s-1})(w_{t_s}-w_{t_{s-1}}),\ 1\le k\le N. \tag{2.31}$$

Sonra bu formülden ve çoknoktalı yerel olmayan sınır şartlarından

$$u_0=\sum_{j=1}^{J}\alpha_j u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}+\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}),$$

şunu elde ederiz

$$u_0$$
$$=\sum_{j=1}^{J}\alpha_j R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}u_0+\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\sum_{s=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]-s+1}f(t_{s-1})(w_{t_s}-w_{t_{s-1}})+\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}).$$

Lemma 2.2 den operatör $I-\sum\limits_{j=1}^{J}\alpha_j R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}$ sınırlı tersi vardır,

$$\Upsilon_\tau=\left(I-\sum_{j=1}^{J}\alpha_j R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\right)^{-1},$$

sonra

$$u_0 = \Upsilon_\tau \left\{ \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \sum_{s=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]-s+1} f(t_{s-1})(w_{t_s} - w_{t_{s-1}}) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}) \right\}. \quad (2.32)$$

Böylece, problem (2.6) in çözümü için (2.8) ve (2.9) formüllerimiz vardır. Şimdi, farklar şemasının yakınsamasını (2.6) inceleyeceğiz.

Teorem 2.4. *Kabul edelimki*

$$E \left\| A^{\frac{1}{2}} \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}) \right\|_H^2 \leq C,$$

aşağıdaki yakınsama tahmini

$$\max_{0 \leq k \leq N} \left(E \left\| v(t_k) - u_k \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1(\delta, \lambda_1) \tau^{\frac{1}{2}}, \quad (2.33)$$

doğrudur. Burada C ve $C_1(\delta, \lambda_1)$ τ dan bağımsızdır.

İspat. (1.13) ve (2.32) formüllerini kullanarak, aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$v(0) - u_0 = (\Upsilon - \Upsilon_\tau)\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})$$
$$+\Upsilon \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - s)} f(s) dw_s$$
$$-\Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \sum_{s=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]-s+1} f(t_{s-1})(w_{t_s} - w_{t_{s-1}})$$

$$= P_{1,J} + P_{2,J} + P_{3,J} + P_{4,J} + P_{5,J} + P_{6,J} + P_{7,J},$$

öyleki

$$P_{1,J} = (\Upsilon - \Upsilon_\tau)\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}), \quad (2.34)$$

$$P_{2,J} = (\Upsilon - \Upsilon_\tau) \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - s)} f(s) dw_s, \quad (2.35)$$

$$P_{3,J} = \Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \int_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau}^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - s)} f(s) dw_s, \quad (2.36)$$

$$P_{4,J} = \Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} \int_{t_{p-1}}^{t_p} \left(e^{-(\lambda_j - s)A} - e^{-\left(\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau - s\right)A} \right) f(s) dw_s, \quad (2.37)$$

$$P_{5,J}=\Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\left(e^{-\left(\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau-p\tau\right)A}-R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]-p}\right)\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}e^{-(t_p-s)A}f(s)dw_s, \quad (2.38)$$

$$P_{6,J}=\Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]-p}\left(\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}e^{-(t_p-s)A}f(s)dw_s-\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}e^{-\tau A}f(t_{p-1})dw_s\right), \quad (2.39)$$

$$P_{7,J}=\Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]-p}\left(e^{-\tau A}-R\right)f(t_{p-1})\Delta w_{t_p}. \quad (2.40)$$

$P_{k,J}$ yı bütün $k=1,\cdot\cdot\cdot,7$, ler için ayrı ayrı tahmin edelim. $P_{1,J}$ den başlayalım. (2.34), (1.9), (2.4) formüllerini, (2.5) ve (2.3) sonuçlarını, üçgen eşitsizliğini kullanılarak aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$\Upsilon-\Upsilon_\tau=\Upsilon\Upsilon_\tau\left(\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\left(e^{-A\lambda_j}-R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\right)\right) \quad (2.41)$$

$$\left(E\left\|P_{1,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\|\Upsilon_\tau\|_{H\to H}\|\Upsilon\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\left\|A^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-A\lambda_j}-R^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right)\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left(E\left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(E\left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{2,J}$ i tahmin edelim. (2.35) formülünü, üçgen eşitsizliğini (1.7) yi kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E\left\|P_{2,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\le C_5(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{J}E\left\|\int\limits_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}A^{\frac{1}{2}}f(s)dw_s\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C_5(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{J}\int\limits_0^{\lambda_j}\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C_6(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\max_{0\le s\le T}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{3,J}$ i tahmin edelim. (2.36) formülünü , üçgen eşitsizliğini ve (2.5) u kullanarak şunu eldeederiz

$$\left(E\left\|P_{3,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left\|\Upsilon_\tau\right\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\left(\left\|e^{-A(\lambda_j-s)}\right\|_{H\to H}^2\left\|A^{-\frac{1}{2}}\right\|_{H\to H}^2\int\limits_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau}^{\lambda_j}\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\leq C_6(\delta,\lambda_1)\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\left(\int\limits_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau}^{\lambda_j}\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\leq C_6(\delta,\lambda_1)\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\left(\lambda_j-\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau\right)^{\frac{1}{2}}\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_7(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{4,J}$ i tahmin edelim. (2.37) formülünü , üçgen eşitsizliğini (2.5) u kullanarak şunu elde ederiz(2.2),

$$\left(E\left\|P_{4,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left\|\Upsilon_\tau\right\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|$$

$$\times\left(\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}\left\|A^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-(\lambda_j-s)A}-e^{-\left(\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau-s\right)A}\right)\right\|_{H\to H}^2\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\left(\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\tau\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\leq C_1(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{5,J}$ i tahmin edelim. formül (2.38) yi, üçgen eşitsizliğini, (2.5), (2.3) ve (2.2) yı kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E\left\|P_{5,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left\|\Upsilon_\tau\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\left\|A^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-\left(\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau-p\tau\right)A}-R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]-p}\right)\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}\left\|e^{-(t_p-s)A}\right\|_{H\to H}^2\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^T \left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{6,J}$ yi tahmin edelim. Formül (2.39) ü, üçgen eşitsizliğini, (2.5), (2.3), (1.7) ve (2.1), i kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(\|P_{6,J}\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\Upsilon_\tau\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|$$

$$\times\left(\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}\left\|R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]-p}\right\|_{H\to H}^2\left\|e^{-(t_p-s)A}f(s)-e^{-\tau A}f(t_{p-1})\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}\left\|e^{-(t_p-s)A}f(s)-e^{-(t_p-t_{p-1})A}f(t_{p-1})\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= C_1(\delta,\lambda_1)\sum_{j=1}^{J}\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}$$

$$\times\left(\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}\left\|\left(e^{-(t_p-s)A}-e^{-(t_p-t_{p-1})A}\right)f(s)+e^{-(t_p-t_{p-1})A}\left(f(s)-f(t_{p-1})\right)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}\left\|A^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-(t_p-s)A}-e^{-(t_p-t_{p-1})A}\right)A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2\right.$$

$$\left.+\left\|e^{-(t_p-t_{p-1})A}\left(f(s)-f(t_{p-1})\right)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_3(\delta,\lambda_1)\sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}\left(\tau\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2+\|f(s)-f(t_{p-1})\|_H^2\right)ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_4(\delta,\lambda_1)\sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}\left(\tau\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2+\left\|f'(s)\tau\right\|_H^2\right)ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_4(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^T \left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds + \int\limits_0^T \left\|f^{'}(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_5(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} + \max_{0\leq s\leq T}\left(\|f'(s)\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Son olarak, $P_{7,J}$ yi tahmin edelim. Formül (2.40) ü, üçgen eşitsizliğini, (2.5), (2.3) ve (2.2) i kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E\|P_{7,J}\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\Upsilon_\tau\|_{H\to H}\sum_{j=1}^J|\alpha_j|$$

$$\times\left(\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\left\|R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]-p}\right\|_{H\to H}^2 \left\|A^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-\tau A}-R\right)\right\|_{H\to H}^2 \left\|A^{\frac{1}{2}}f(t_{p-1})\right\|_H^2 E\left\|\Delta w_{t_p}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C(\delta,\lambda_1)\left(\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\tau\left\|A^{\frac{1}{2}}f(t_{p-1})\right\|_H^2 E\left\|\Delta w_{t_p}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Δw_{t_p} bir wiener prosesi olduğundan aşağıdaki sonuç

$$E\left\|\Delta w_{t_p}\right\|^2 \leq \Delta t_p = \tau$$

elde edilir. Böylece,

$$\left(E\|P_{7,J}\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{p=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}\left\|A^{\frac{1}{2}}f(t_{p-1})\right\|_H^2\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$P_{k,J}$, $k=1,\cdots,7$ i kullanarak aşağıdaki tahmini elde ederiz,

$$\left(E\|v(t_0)-u_0\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_4(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}. \tag{2.42}$$

Teorem 2.4 in ispati için aşağıdaki tahmini elde etmek yeterlidir.

$$\max_{1\leq k\leq N}\left(E\|v(t_k)-u_k\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\ . \tag{2.43}$$

(1.13) ve (2.31) formüllerini kullanarak şunu yazabiliriz,

$$v(t_k)-u_k = e^{-k\tau A}v(0) + \sum_{s=1}^k e^{-(k-s)\tau A}\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} e^{-A(t_s-p)}f(p)dw_p$$

$$-R^k u_0 - \sum_{s=1}^{k} R^{k-s+1} f(t_s)(w_{t_s} - w_{t_{s-1}}) = D_{1,k} + D_{2,k} + D_{3,k} + D_{4,k} + D_{5,k},$$

öyleki,

$$D_{1,k} = (e^{-k\tau A} - R^k)\Upsilon \left\{ \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - s)} f(s) dw_s + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}) \right\},$$

$$D_{2,k} = R^k (v(0) - u_0),$$

$$D_{3,k} = \sum_{s=1}^{k-1} \left[e^{-(k-s)\tau A} - R^{k-s} \right] \int_{t_{s-1}}^{t_s} e^{-A(t_s - p)} f(p) dw_p,$$

$$D_{4,k} = \sum_{s=1}^{k} R^{k-s} \int_{t_{s-1}}^{t_s} e^{-A(t_s - p)} f(p) dw_p - e^{-\tau A} f(t_{s-1})(w_{t_s} - w_{t_{s-1}}),$$

$$D_{5,k} = \sum_{s=1}^{k} R^{k-s} \left[e^{-\tau A} - R \right] f(t_{s-1})(w_{t_s} - w_{t_{s-1}}).$$

$D_{m,k}$ yi bütün $m = 1, \cdots, 5$ ler için ayrı ayrı tahmin edelim. $D_{1,k}$ ile başlayalım.

üçgen eşitsizliğini ve önceki sonuçları (1.10), (1.7), (2.3) ve (2.2) kullanarak şunu yazabiliriz

$$\left(E \left\| D_{1,k} \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\left\| (e^{-k\tau A} - R^k) A^{-\frac{1}{2}} \right\|_{H \to H}^2 \right.$$

$$\left. \times E \left\| \Upsilon \left\{ \sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| A^{\frac{1}{2}} \int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - s)} f(s) dw_s + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}) \right\} \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta, \lambda_1) \tau^{\frac{1}{2}} \left(E \left\| \Upsilon \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - s)} A^{\frac{1}{2}} f(s) dw_s + A^{\frac{1}{2}} \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}) \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta, \lambda_1) \tau^{\frac{1}{2}} \left\| \Upsilon \right\|_{H \to H}$$

$$\times \left(\sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \int_0^{\lambda_j} \left\| e^{-A(\lambda_j - s)} \right\|_{H \to H}^2 \left\| A^{\frac{1}{2}} f(s) \right\|_H^2 ds + E \left\| A^{\frac{1}{2}} \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}) \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_3(\delta, \lambda_1) \tau^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \left\| A^{\frac{1}{2}} f(s) \right\|_H^2 ds + E \left\| A^{\frac{1}{2}} \varphi \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_4(\delta, \lambda_1) \tau^{\frac{1}{2}} \left(\max_{0 \leq s \leq T} \left(\left\| A^{\frac{1}{2}} f(s) \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\left\| A^{\frac{1}{2}} \varphi \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Şimdi $D_{2,k}$ i tahmin edelim. (2.3) sonucunu kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E \left\| D_{2,k} \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\left\| R^k \right\|_{H \to H}^2 E \left\| v(0) - u_0 \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(E \left\| v(0) - u_0 \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(2.42) tahminini kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E\left\|D_{2,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $D_{3,k}$ i tahmin edelim. Üçgen eşitsizliğini, (2.3) ve (2.2) sonuçlarını kullanrak şunu yazabiliriz

$$\left(E\left\|D_{3,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta,\lambda_1)\left(\sum_{s=1}^{k-1}\left\|A^{-\frac{1}{2}}\left[e^{-(k-s)\tau A}-R^{k-s}\right]\right\|_{H\to H}^2\right.$$
$$\left.\times\left\|e^{-A(t_s-p)}\right\|_{H\to H}^2\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|A^{\frac{1}{2}}f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq C(\delta,\lambda_1)\left(\sum_{s=1}^{k-1}\tau\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|A^{\frac{1}{2}}f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\left\|A^{\frac{1}{2}}f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $D_{4,k}$ i tahmin edelim. Yardımcı bir değişken tanımlayalım

$$b_j=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\int_{t_{j-1}}^{s}\left(e^{-\tau A}A^{-\frac{1}{2}}f'(z)+A^{\frac{1}{2}}\,e^{-(t_j-z)A}f(s)\right)dzdw_s$$

ve

$$b_j^*=\begin{cases} b_j, & 1\leq j\leq k-1,\\ 0, & \text{değilse.}\end{cases}$$

Sonra

$$D_{4,k}=\sum_{s=1}^{k}R^{k-s}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left(e^{-A(t_s-p)}f(p)-e^{-\tau A}f(t_{s-1})\right)dw_p$$
$$=\sum_{s=1}^{k}R^{k-s}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left(\left(e^{-A(t_s-p)}-e^{-\tau A}\right)f(p)+e^{-\tau A}\left(f(p)-f(t_{s-1})\right)\right)dw_p$$
$$=\sum_{s=1}^{k}A^{\frac{1}{2}}R^{k-s}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\int_{t_{j-1}}^{s}\left(e^{-\tau A}A^{-\frac{1}{2}}f'(z)+A^{\frac{1}{2}}\,e^{-(t_j-z)A}f(s)\right)dzdw_s$$
$$=\sum_{i=1}^{N}R^iA^{\frac{1}{2}}b_{k-i}^*$$

ve

$$\left(E\left\|D_{4,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(E\left\|\sum_{i=1}^{N} R^i A^{\frac{1}{2}} b_{k-i}^*\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Üçgen eşitsizliğini, (1.7) ve (2.3) sonuçlarını kullanarak şunu yazabiliriz

$$\left(E\left\|D_{4,k}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} E\left\|R^i A^{\frac{1}{2}} b_{k-i}^*\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{N} \left\|A^{\frac{1}{2}} R^i\right\|_{H\to H} E\left\|b_{k-i}^*\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\left(E\left\|b_j^*\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\left\|\int_{t_{j-1}}^{t_j}\int_{t_{j-1}}^{s} \left(e^{-\tau A} A^{-\frac{1}{2}} f'(z) + A^{\frac{1}{2}}\, e^{-(t_j-z)A} f(s)\right) dz dw_s\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\int_{t_{j-1}}^{s} \left\|\left(e^{-\tau A} A^{-\frac{1}{2}} f'(z) + A^{\frac{1}{2}}\, e^{-(t_j-z)A} f(s)\right)\right\|_H^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} ds$$

$$\leq \int_{t_{j-1}}^{t_j}\int_{t_{j-1}}^{s} \left\|\left(e^{-\tau A} A^{-\frac{1}{2}} f'(z) + A^{\frac{1}{2}}\, e^{-(t_j-z)A} f(s)\right)\right\|_H^2 dz ds$$

$$\leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}} f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} + \max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{-\frac{1}{2}} f'(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

olduğundan, şu elde edilir,

$$\left(E\left\|P_{4,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{C_1}{\sqrt{i\tau}}\left(E\left\|b_{k-i}^*\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{C_1}{\sqrt{i\tau}} C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}$$

$$\times\left(\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}} f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} + \max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{-\frac{1}{2}} f'(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}\left(\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}} f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} + \max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{-\frac{1}{2}} f'(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Son olarak, $D_{5,k}$ i tahmin edelim. Aşağıdaki değişkene ihtiyacımız olacak

$$q_j = A^{\frac{1}{2}} f(t_{j-1})\Delta w_{t_j}$$

ve

$$q_j^* = \begin{cases} q_j, & 1 \le j \le k-1, \\ 0, & \text{değilse.} \end{cases}$$

Böylece,

$$D_{5,k} = \sum_{i=1}^{N} A^{\frac{1}{2}} R^i A^{-1} \left(e^{-\tau A} - R\right) q_{k-i}^*.$$

Üçgen eşitsizliğini, (2.3) ve (2.2) sonuçlarını kullanarak, aşağıdaki elde edilir

$$\left(E \left\| D_{5,k} \right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{i=1}^{N} \left\| A^{\frac{1}{2}} R^i \right\|_{H \to H} \left\| A^{-1} \left(e^{-\tau A} - R\right) \right\|_{H \to H} \left(E \left\| q_{k-i}^* \right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \sum_{i=1}^{N} \frac{2\tau}{\sqrt{i\tau}} \left(E \left\| q_{k-i}^* \right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \le C \max_{1 \le j \le N} \left(E \left\| q_j \right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\left(E \left\| q_j \right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(E \left\| A^{\frac{1}{2}} f(t_{j-1}) \Delta w_{t_j} \right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

olduğundan

$$\le C_1(\delta, \lambda_1) \tau^{\frac{1}{2}} \max_{0 \le s \le T} \left(\left\| A^{\frac{1}{2}} f(s) \right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

şu elde edilir

$$\left(\left\| D_{5,k} \right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \le C_2(\delta, \lambda_1) \tau^{\frac{1}{2}} \max_{0 \le s \le T} \left(\left\| A^{\frac{1}{2}} f(s) \right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$D_{1,k}$, $D_{2,k}$, $D_{3,k}$, $D_{4,k}$ ve $D_{5,k}$ leri birleştirirsek, (2.43) elde edilir. Teorem 2.4 ispatlanmıştır.

Şimdi Teorem 2.4 ün uygulamasına bir göz atalım. İlk olarak, bir boyutlu yerel olmayan stokastik parabolik denklem için sınır değer problemine bakalım. Problem (2.20) ün diskritizasyonu benzer şekilde iki aşamalıdır. İlki bir önceki gibi. İkinci aşamada, (2.22) yı fark şeması (2.30) ile yer değştirsek, aşağıdaki fark şemasını elde ederiz.

$$\begin{cases} u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x) + \tau A_h^x u_k^h(x) = f_{k-1}^h(x)(w_{t_k} - w_{t_{k-1}}), 1 \le k \le N, \\ f_{k-1}^h(x) = f^h(t_{k-1}, x),\ t_k = k\tau,\ 1 \le k \le N,\ x \in [0,1]_h, \\ u_0^h(x) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{[\frac{\lambda_j}{\tau}]}^h(x) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}, x), x \in [0,1]_h. \end{cases} \tag{2.44}$$

Teorem 2.5. *τ ve h yeterince küçük keyfi sayılar olsun. Sonra, (2.44) fark şemasının çözümü, aşağıdaki tahminin yakınsamasını sağlar:*

$$\max_{0\le k\le N}\left(E\left\|v^h(t_k)-u_k^h\right\|_{L_{2h}}^2\right)^{\frac{1}{2}}\le C(\delta,\lambda_1)\left(\tau^{\frac{1}{2}}+h\right), \tag{2.45}$$

öyleki $C(\delta,\lambda_1)$ τ ve h den başımsızdır.

Teorem 2.5 in ispatı teorem 2.4 in soyut formu temel alınarak ve A_h^x (2.21) de tanımlı fark şemaları operatörlerinin simetri özelliğinden istifade ile yapılır.

İkici olarak, çoknoktalı yerel olmayan parabolik sınır değer problemini (2.25) ele alalım. (2.44) nun diskritizasyonu önce yapılanlar gibi. İkinci aşamada, (2.22) yı (2.30) ile yer değiştirirsek

$$\begin{cases} u_k^h(x)-u_{k-1}^h(x)+\tau A_h^x u_k^h(x)=f_{k-1}^h(x)(w_{t_k}-w_{t_{k-1}}), 1\le k\le N,\\ f_{k-1}^h(x)=f^h(t_{k-1},x),\ t_k=k\tau,\ 1\le k\le N,\ x\in\Omega_h,\\ u_0^h(x)=\sum\limits_{j=1}^{J}\alpha_j u_{[\frac{\lambda_j}{\tau}]}^h(x)+\varphi(w_{\lambda_1,\dots,}w_{\lambda_J},x), x\in\widetilde{\Omega}_h. \end{cases} \tag{2.46}$$

elde edilir.

Teorem 2.6. *τ ve $|h|=\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}$ yeterince küçük keyfi sayılar olsun. Sonra, (2.46) fark şemasının çözümü aşağıdaki tahminin yakınsamasını sağlar.*

$$\max_{0\le k\le N}\left(E\left\|v^h(t_k)-u_k^h\right\|_{L_{2h}}^2\right)^{\frac{1}{2}}\le C(\delta,\lambda_1)\left(\tau^{\frac{1}{2}}+|h|^2\right), \tag{2.47}$$

öyleki $C(\delta,\lambda_1)$ τ ve $|h|$ den bağımsızdır.

Teorem 2.6 in ispatı Teorem 2.4 in soyut formu temel alınarak ve A_h^x (2.21) de tanımlı fark şemaları operatörlerinin simetri özelliğinden istifade ile yapılır.

Kapalı Fark Şeması

Bu bölümde 3/2− inci mertebeden doğru fark şemasını problem (1.6) in tahmini çözümü için kurduk ve araştırdık. A ve A^2 den oluşturulan bu fark şemasının tahmini çözüm yakınsaması oluşturuldu. Uygulama olarak, yerel olmayan çok noktalı sınır değer stokastik parabolik eşitliklerin fark şemaları çözümlerinin tahmini yakınsamaları elde edilmiştir.

3/2-inci Mertebeden Doğru Kapalı Fark Şeması: Standard Wiener Prosesli

İleride gerekli olan lemmaları sırayla verelim.

Lemma 3.1. *Aşağıdaki sonuçları almak mümkün,*

$$\left\| A^{\alpha} R^{k} \right\|_{H \to H} \leq \frac{1}{(k\tau)^{\alpha}}, \quad 1 \leq k \leq N, \ 0 \leq \alpha \leq 1, \tag{3.1}$$

$$\left\| A^{-\alpha} \left(R^{k} - e^{-k\tau A} \right) \right\|_{H \to H} \leq \frac{2\tau^{\alpha}}{k^{2-\alpha}}, \ 1 \leq k \leq N, \ 0 \leq \alpha \leq 2, \tag{3.2}$$

öyleki $R = \left(I + \tau A + \frac{(\tau A)^2}{2} \right)^{-1}$.

Lemma 3.2. *Kabul edelimki* (1.8) *doğruysa aşağıdaki operatörün*

$$I - \sum_{j=1}^{J} \alpha_j R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}$$

$$\Upsilon_{\tau} = \left(I - \sum_{j=1}^{J} \alpha_j R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} \right)^{-1} \tag{3.3}$$

tersi vardır ve sınırlıdır

$$\left\| \Upsilon_{\tau} \right\|_{H \to H} \leq C(\delta, \lambda_1). \tag{3.4}$$

İspat İspat üçgen eşitsizli, (1.8) ve (1.10) un kabulünden elde edilir. Sonucu şöyle ifade edilir,

$$\left\| \Upsilon_{\tau} \right\|_{H \to H} \leq \left\| \Upsilon \right\|_{H \to H} + \left\| \Upsilon_{\tau} \right\|_{H \to H} \left\| \Upsilon \right\|_{H \to H} C(\delta, \lambda_1)\tau.$$

Şimdi, çoknoktalı sınır değer probleminin yaklaşık çözümünün 3/2-inci mertebeden doğru fark şeması (1.6) nı ele alalım. (1.14a) nın da yardımıyla Çoknoktalı yerel olamayan sınır değer probleminin çözümünün yakınsaklığı aşikardır. Aşağıdaki ifadelerin yakınsaklıklarına bakalım,

$$e^{-\tau A},$$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-(t_k-p)A} f(p)dw_p$$

ve çoknoktalı sınır değer şartları

$$v(0) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j v(\lambda_j) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}).$$

Yerel olmayan sınır değer şartları için şunu kabul edelim $\lambda_j \in [0,T]_\tau$ then $\frac{\lambda_j}{\tau} = \left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]$

$e^{-\tau A}$ yı $R = \left(I + \tau A + \frac{(\tau A)^2}{2}\right)^{-1}$ ile
$e^{-(t_k-p)A} f(p)$ ifadesini $\left(I + (p - t_{k-1})\, A\right) Rf(p)$ ile yer değiştirirsek, kapalı fark şeması elde edilir

$$\begin{cases} u_k - u_{k-1} + (I-R)u_{k-1} = R\varphi_k, \\ \varphi_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(p)dw_p + A\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (p-t_{k-1})f(p)dw_p, \\ u_0 = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\frac{\lambda_j}{\tau}} + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}) \end{cases} \tag{3.5}$$

Problem (1.6) in yakınsak çözümleri için kapalı fark şemasının

$$\begin{cases} u_k - u_{k-1} + (I-R)u_{k-1} = R\varphi_k, \\ \varphi_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(p)dw_p + A\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (p-t_{k-1})f(p)dw_p, \\ u_0 \ veriliyor \end{cases}$$

Cauchy problemi (2.7) nin çözümü için tek çözümü vardır ve şöyle ifade edilir

$$u_k = R^k u_0 + \sum_{s=1}^{k} R^{k-s+1}\varphi_s,\ 1 \le k \le N. \tag{3.6}$$

Bu formül ve çok noktalı yerel olmayan sınır değer şartlarından

$$u_0 = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\frac{\lambda_j}{\tau}} + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}),$$

aşağıdakini elde ederiz

$$u_0 = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \left(R^{\frac{\lambda_j}{\tau}} u_0 + \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} R^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s+1} \ \varphi_s \right) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}).$$

Lemma 3.7 yardımı ile operatör

$$I - \sum_{j=1}^{J} \alpha_j R^{\frac{\lambda_j}{\tau}}$$

ün sınırlı tersi vardır

$$\Upsilon_\tau = \left(I - \sum_{j=1}^{J} \alpha_j R^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \right)^{-1}.$$

Sonra

$$u_0 = \Upsilon_\tau \left\{ \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} R^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s+1} \varphi_s + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}) \right\}. \tag{3.7}$$

Böylece, (3.6) ve (3.7) formüllerini problem (3.5) in çözümleri için elde ederiz. Şimdi fark şeması (3.5) nın yakınsama tahminini araştıracağız.

Teorem 3.1. *Eğer*

$$E \left\| A^{\frac{3}{2}} \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}) \right\|_H^2 + \int_0^T E \left\| A^2 f(s) \right\|_H^2 ds \le C_1,$$

doğruysa,bundan yakınsama tahmini,

$$\max_{0 \le k \le N} \left(E \left\| v(t_k) - u_k \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le C_2(\delta, \lambda_1) \tau^{\frac{3}{2}} \tag{3.8}$$

sağlanır. Burada C_1 ve $C_2(\delta, \lambda_1)$ τ dan bağımsızdır

İspat formül (1.13) ve (3.7) i kullanırsak aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz

$$v(0) - u_0 = (\Upsilon - \Upsilon_\tau) \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})$$

$$+ (\Upsilon - \Upsilon_\tau) \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - p)} f(p) dw_p$$

$$+ \Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \left(\int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - p)} f(p) dw_p - \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} R^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s+1} \int_{t_{s-1}}^{t_s} \left(A(p - t_{s-1}) + I \right) f(p) dw_p \right)$$

$$= P_{1,J} + P_{2,J} + P_{3,J} + P_{4,J} + P_{5,J},$$

öyleki

$$P_{1,J} = (\Upsilon - \Upsilon_\tau)\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}), \tag{3.9}$$

$$P_{2,J} = (\Upsilon - \Upsilon_\tau)\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j-s)}f(s)dw_s, \tag{3.10}$$

$$P_{3,J} = \Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} e^{-A(\lambda_j-t_s)} \tag{3.11}$$

$$\times\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left(e^{-A(t_s-p)} - (A(p-t_{s-1})+I)\,e^{-\tau A}\right)f(p)dw_p,$$

$$P_{4,J} = \Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\left(e^{-(\lambda_j-t_s)A} - R^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s}\right)\int_{t_{s-1}}^{t_s}(A(p-t_{s-1})+I)\,e^{-\tau A}f(p)dw_p, \tag{3.12}$$

$$P_{5,J} = \Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}}R^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s}\int_{t_{s-1}}^{t_s}(A(p-t_{s-1})+I)\left(e^{-\tau A} - R\right)f(p)dw_p. \tag{3.13}$$

Bütün $k = 1, \cdots, 5$, ler için $P_{k,J}$ yi bulalım. $P_{1,J}$ den başlıyalım. (1.13) ve (3.7) formüllerini kullanarak, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz

$$\Upsilon - \Upsilon_\tau = \Upsilon\Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\left(e^{-A\lambda_j} - R^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right). \tag{3.14}$$

(3.14) ve (3.9) yi kullanarak aşağıdaki gibi yazarız

$$P_{1,J} = \Upsilon\Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\left(e^{-A\lambda_j} - R^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right)\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}).$$

$P_{1,J}$ nin beklenen değerini tahmin edelim.

$$\left(E\left\|P_{1,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \|\Upsilon\|_{H\to H}\,\|\Upsilon_\tau\|_{H\to H}$$

$$\times\left(E\left\|\sum_{j=1}^{J}\alpha_j A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-A\lambda_j} - R^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right)A^{\frac{3}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(1.10), (3.4) ve (3.2) leri kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz

$$\left(E\left\|P_{1,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \le C_1(\delta,\lambda_1)\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\left\|A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-A\lambda_j}-R^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right)\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left(E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$P_{2,J}$ nin beklenen değerini tahmin edelim. (3.14) ve (3.10) formüllerini kullanarak şunu yazabiliriz

$$P_{2,J}=\Upsilon\Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\left(e^{-A\lambda_j}-R^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right)\int_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}f(s)dw_s.$$

(1.10), (3.4) ve (3.2) lerden şunu elde ederiz

$$\left(E\left\|P_{2,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C_1(\delta,\lambda_1)\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\left\|A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-A\lambda_j}-R^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right)\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left(E\left\|\int_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}A^{\frac{3}{2}}f(s)dw_s\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\,E\left\|\int_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}A^{\frac{3}{2}}f(s)dw_s\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C_3(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\,E\int_0^{\lambda_j}\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C_4(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(E\int_0^{T}\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{3,J}$ yi tahmin edelim.

$$e^{-A(t_s-p)}-e^{-\tau A}-A(p-t_{s-1})e^{-\tau A}$$

$$=\int_{t_{s-1}}^{p}\int_{t_{s-1}}^{z}A^2e^{-A(t_s-\lambda)}d\lambda dz=\int_{t_{s-1}}^{p}(p-\lambda)\,A^2e^{-A(t_s-\lambda)}d\lambda, \tag{3.15}$$

formüllerini kullanarak aşağıdakini yazabiliriz

$$P_{3,J} = \Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} e^{-A(\lambda_j - t_s)} \int_{t_{s-1}}^{t_s} \int_{t_{s-1}}^{p} (p-\lambda) A^2 e^{-A(t_s-\lambda)} d\lambda f(p) dw_p.$$

son formülü, üçgen eşitsizliğini, (1.7) ve (3.4) formüllerini kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E \|P_{3,J}\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\Upsilon_\tau\|_{H\to H} \left(\sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \, E \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \left\| e^{-(\lambda_j - s\tau)A} \right\|_{H\to H}^2 \right.$$

$$\left. \times \int_{t_{s-1}}^{t_s} \int_{t_{s-1}}^{p} (t_s-\lambda)^2 \left\| e^{-A(t_s-\lambda)} \right\|_{H\to H}^2 \left\| A^2 f(p) \right\|_H^2 dp d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1) \left(\sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \, E \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \int_{t_{s-1}}^{t_s} \int_{t_{s-1}}^{p} (t_s-\lambda)^2 \left\| A^2 f(p) \right\|_H^2 dp d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1) \tau^{\frac{3}{2}} \left(E \int_0^T \left\| A^2 f(p) \right\|_H^2 dp \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{4,J}$ yi tahmin edelim. (3.12) formülünü , üçgen eşitsizliğini, (3.4) , (1.7) ve (3.2) yi kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E \|P_{4,J}\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\Upsilon_\tau\|_{H\to H} \left(\sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \left\| A^{-\frac{3}{2}} \left(e^{-(\lambda_j - t_s)A} - R^{\frac{\lambda_j}{\tau} - s} \right) \right\|_{H\to H}^2 \right.$$

$$\left. \times E \int_{t_{p-1}}^{t_p} \left\| \left(A(s - t_{p-1}) + I \right) e^{-\tau A} \right\|_{H\to H}^2 \left\| A^{\frac{3}{2}} f(s) \right\|_H^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1) \tau^{\frac{3}{2}} \left(E \int_0^T \left\| A^{\frac{3}{2}} f(s) \right\|_H^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{5,J}$ yi tahmin edelim. (3.13) formülünü, üçgen eşitsizliğini, (3.4) , (3.1) ve (3.2) leri kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E \|P_{5,J}\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\Upsilon_\tau\|_{H\to H} \left(\sum_{j=1}^{J} \alpha_j \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \left\| R^{\frac{\lambda_j}{\tau} - s} \right\|_{H\to H}^2 \right.$$

$$\times E\int_{t_{p-1}}^{t_p}\left\|\left(A(s-t_{p-1})+I\right)A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-\tau A}-R\right)\right\|_{H\to H}^2\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\Bigg)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(E\int_0^T\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Yukarıdakileri kullanarak $P_{k,J}$, $k=1,\cdots,5$ şunu elde ederiz

$$\left(E\left\|v(t_0)-u_0\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C_4(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}. \tag{3.16}$$

Teorem 3.1 ü ispatlamak için aşağıdaki sonucu elde etmek yeterlidir.

$$\max_{1\leq k\leq N}\left(E\left\|v(t_k)-u_k\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}. \tag{3.17}$$

(1.13) ve (3.6) formüllerini kullanarak şunu yazabiliriz

$$v(t_k)-u_k=e^{-k\tau A}v(0)+\sum_{s=1}^{k}e^{-(k-s)\tau A}\int_{t_{s-1}}^{t_s}e^{-A(t_s-p)}f(p)dw_p$$

$$-R^k u_0-\sum_{s=1}^{k}R^{k-s+1}\left(\int_{t_{s-1}}^{t_s}f(p)dw_p+A\int_{t_{s-1}}^{t_s}(p-t_{s-1})f(p)dw_p\right)$$

$$=D_{1,k}+D_{2,k}+D_{3,k}+D_{4,k}+D_{5,k},$$

öyleki

$$D_{1,k}=(e^{-k\tau A}-R^k)\Upsilon\left\{\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\int_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}f(s)dw_s+\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\},$$

$$D_{2,k}=R^k(v(0)-u_0),$$

$$D_{3,k}=\sum_{s=1}^{k}e^{-(k-s)\tau A}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left(e^{-A(t_s-p)}-\left(A(p-t_{s-1})+I\right)e^{-\tau A}\right)f(p)dw_p,$$

$$D_{4,k}=\sum_{s=1}^{k-1}\left(e^{-(k-s)\tau A}-R^{k-s}\right)\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left(A(p-t_{s-1})+I\right)e^{-\tau A}f(p)dw_p,$$

$$D_{5,k}=\sum_{s=1}^{k}R^{k-s}\left(e^{-\tau A}-R\right)\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left(A(p-t_{s-1})+I\right)e^{-\tau A}f(p)dw_p.$$

$D_{m,k}$ tüm $m=1,\cdots,5$ ler için ayrı ayrı bulalım. $D_{1,k}$ dan başlayalım. Üçgen eşitsizliği, $(3.4)\,,(3.1)$ ve (3.2) leri kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E\left\|D_{1,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\left\|(e^{-k\tau A}-R^k)A^{-\frac{3}{2}}\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times E\left\|\Upsilon\left\{\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\int_0^{\lambda_j}A^{\frac{3}{2}}e^{-A(\lambda_j-s)}f(s)dw_s+A^{\frac{3}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(E\left\|\Upsilon\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\int_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}A^{\frac{3}{2}}f(s)dw_s+A^{\frac{3}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau\left\|\Upsilon\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{J}\left|\alpha_j\right|E\int_0^{\lambda_j}\left\|e^{-A(\lambda_j-s)}\right\|_{H\to H}^2\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2ds+E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_3(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(E\int_0^T\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2ds+E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_4(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\left(\int_0^T E\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2ds+E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Şimdi $D_{2,k}$ yı tahmin edelim. (3.2) ü kullanarak şu sonuç elde edilir

$$\left(E\left\|D_{2,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\left\|R^k\right\|_{H\to H}^2E\left\|v(0)-u_0\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(E\left\|v(0)-u_0\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(3.16) i kullanırsak aşağıdaki tahminelde edilir.

$$\left(E\left\|D_{2,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C(\delta,\lambda_1)\tau.$$

Şimdi $D_{3,k}$ yı tahmin edelim (3.15) formülünü kullanarak şunu yazabiliriz

$$D_{3,k}=\sum_{s=1}^{k}e^{-(k-s)\tau A}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\int_{t_{s-1}}^{p}(p-\lambda)A^2e^{-A(t_s-\lambda)}d\lambda f(p)dw_p.$$

Son formülü, üçgen eşitsizliğini ve (1.7) yi kullanırsak, şu sonucu elde ederiz

$$\left(E\left\|D_{3,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(E\sum_{s=1}^{k}\left\|e^{-(\lambda_j-s\tau)A}\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\int\limits_{t_{s-1}}^{p} (t_s-\lambda)^2 \left\|e^{-A(t_s-\lambda)}\right\|_{H\to H}^2 \left\|A^2 f(p)\right\|_H^2 dpd\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\left(E\sum_{s=1}^{k}\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\int\limits_{t_{s-1}}^{p}(t_s-\lambda)^2\left\|A^{\frac{3}{2}}f(p)\right\|_H^2 dpd\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(E\int\limits_0^T\left\|A^{\frac{3}{2}}f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $D_{4,J}$ yi tahmin edelim. Üçgen eşitsizliğini, $(3.1)\,,(1.7)$ ve (3.2) ü kullanarak şu sonucu elde ederiz

$$\left(E\left\|D_{4,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{s=1}^{k-1}\left\|A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-(k-s)\tau A}-R^{k-s}\right)\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times E\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|\left(A(p-t_{s-1})+I\right)e^{-\tau A}\right\|_{H\to H}^2\left\|A^{\frac{3}{2}}f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{s=1}^{k-1}E\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|A^{\frac{3}{2}}f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(E\int\limits_0^T\left\|A^{\frac{3}{2}}f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\left(E\left\|D_{4,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{s=1}^{k-1}\left\|A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-(k-s)\tau A}-R^{k-s}\right)\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times E\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|\left(A(p-t_{s-1})+I\right)e^{-\tau A}\right\|_{H\to H}^2\left\|A^{\frac{3}{2}}f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{s=1}^{k-1}E\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|A^{\frac{3}{2}}f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(E\int\limits_0^T\left\|A^{\frac{3}{2}}f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Son olarak, $D_{5,k}$ i tahmin edelim. Üçgen eşitsizliğini, (3.1) ve (3.2) i kullanarak şu sonucu elde ederiz

$$\left(E\left\|D_{5,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{s=1}^{k}\left\|A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-\tau A}-R\right)\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times E\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|\left(A(p-t_{s-1})+I\right)R^{k-s}\right\|_{H\to H}^2\left\|A^{\frac{3}{2}}f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{s=1}^{k}E\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|A^{\frac{3}{2}}f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(E\int\limits_0^T\left\|A^{\frac{3}{2}}f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$D_{1,k},\ D_{2,k},\ D_{3,k},\ D_{4,k}$ ve $D_{5,k}$leri toparlarsak (3.17) elde edilir ve teorem 3.1 ispatlanır.

Şimdi teorem 3.1 ün uygulamasına bir göz atalım. İlk olarak, bir boyutlu yerel olmayan stokastik parabolik denklem için sınır değer problemine bakalım. Problem (2.20) in diskritizasyonu benzer şekilde iki aşamalıdır. İlki bir önceki gibi. İkinci aşamada, (2.22) yı (3.5) fark şeması ile yer değiştirirsek

$$\begin{cases} u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x) + \left(\tau A_h^x + \frac{\left(\tau A_h^x\right)^2}{2}\right) u_k^h(x) = \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x,k) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f^h(p,x)dw_p + A_h^x \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (p - t_{k-1}) f^h(p,x)dw_p,\ t_k = k\tau, \\ 1 \le k \le N,\ x \in [0,1]_h, \\ u_0^h(x) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u^h_{\frac{\lambda_j}{\tau}}(x) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}, x), x \in [0,1]_h \end{cases} \tag{3.18}$$

elde edilir.

Teorem 3.2. *τ ve h yeterince küçük keyfi sayılar olsun. Sonra, (3.18) fark şemasının çözümü aşağıdaki tahminin yakınsamasını sağlar*

$$\max_{0 \le k \le N} \left(E \left\| v^h(t_k) - u_k^h \right\|_{L_{2h}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le C(\delta, \lambda_1) \left(\tau^{\frac{3}{2}} + h\right), \tag{3.19}$$

öyleki $C(\delta, \lambda_1)$ τ ve h den bağımsızdır.

Teorem 2.5 in ispatı Teorem 3.2 in soyut formu temel alınarak ve A_h^x (2.21)de tanımlı fark şemaları operatörlerinin simetri özelliğinden istifade ile yapılır.

İkici olarak, çoknoktalı yerel olmayan parabolik sınır değer problemini (2.25) ele alalım. (3.18) nun diskritizasyonu önce yapılanlar gibi. İkinci aşamada, (2.27) i (3.5) ile yer değiştirirsek,

$$\begin{cases} u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x) + \left(\tau A_h^x + \frac{\left(\tau A_h^x\right)^2}{2}\right) u_k^h(x) = \varphi_k^h(x), 1 \le k \le N, \\ \varphi_k^h(x,k) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f^h(p,x)dw_p + A_h^x \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (p - t_{k-1}) f^h(p,x)dw_p,\ t_k = k\tau, \\ 1 \le k \le N,\ x \in \Omega_h, \\ u_0^h(x) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u^h_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}(x) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}, x), x \in \widetilde{\Omega}_h. \end{cases} \tag{3.20}$$

elde edilir.

Teorem 3.3. *τ ve h yeterince küçük keyfi sayılar olsun. Sonra, (3.18) fark şemasının çözümü aşağıdaki tahminin yakınsamasını sağlar,*

$$\max_{0\leq k\leq N}\left(E\left\|v^h(t_k)-u_k^h\right\|_{L_{2h}}^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C(\delta,\lambda_1)\left(\tau^{\frac{3}{2}}+|h|^2\right),$$

öyleki $C(\delta,\lambda_1)$ τ ve $|h|$ den bağımsızdır.

Teorem 3.3 ün ispatı teorem 3.1 in soyut formu temel alınarak ve A_h^x (2.26) de tanımlı fark şemaları operatörlerinin simetri özelliğinden istifade ile yapılır.

Kapalı Fark Şeması: Standard Dışı Wiener Prosesli

$e^{-\tau A}$ ifadesini $R=\left(I+\tau A+\frac{(\tau A)^2}{2}\right)^{-1}$ ifadesi ile
$\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-(t_k-s)A}f(s)dw_s$
ifadesini

$$R\left(f(t_{k-1})\Delta w_{t_k}+(f'(t_{k-1})+Af(t_{k-1}))\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(s-t_{k-1})dw_s\right)$$

ifadesi ile yer değiştirirsek kapalı fark şemasını elde ederiz. Yerel olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için şunu kabul edelim $\lambda_j\in[0,T]_\tau$ ise $\frac{\lambda_j}{\tau}=\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]$,

$$\begin{cases} u_k-u_{k-1}=(R-I)u_{k-1}+R\varphi_k,\\ \varphi_k=f(t_{k-1})\Delta w_{t_k}+(f'(t_{k-1})+Af(t_{k-1}))\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(s-t_{k-1})dw_s,1\leq k\leq N,\\ \Delta w_{t_k}=w_{t_k}-w_{t_{k-1}},\\ u_0=\sum\limits_{j=1}^{J}\alpha_j u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}+\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}).\end{cases}$$

Problem (1.6) nin yaklaşık çözümü için bu fark şeması ve aşağıdaki kapalı fark şeması

$$\begin{cases} u_k-u_{k-1}+\left(\tau A+\frac{(\tau A)^2}{2}\right)u_k=\varphi_k,\ 1\leq k\leq N,\\ \varphi_k=f(t_{k-1})\Delta w_{t_k}+(f'(t_{k-1})+Af(t_{k-1}))\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(s-t_{k-1})dw_s,\\ \Delta w_{t_k}=w_{t_k}-w_{t_{k-1}},1\leq k\leq N,\\ u_0=\sum\limits_{j=1}^{J}\alpha_j u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}+\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\end{cases}\tag{3.21}$$

problem (1.6) nin denk yaklaşık çözümüdür. Problem (3.21) için çözüm formülleri bulalım. kapalı fark şemasının

$$\begin{cases} u_k - u_{k-1} + \left(\tau A + \frac{(\tau A)^2}{2}\right) u_k = \varphi_k, \ 1 \leq k \leq N, \\ u_0 \text{ is given} \end{cases}$$

Cauchy problem (2.7) için tek çözümü vardır, ve aşağıdaki gibi temsil edilir

$$u_k = R^k u_0 + \sum_{s=1}^{k} R^{k-s+1} \varphi_s, \ 1 \leq k \leq N. \tag{3.22}$$

Sonra bu formülden ve çoknoktalı yerel olmayan sınır şartlarından

$$u_0 = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}),$$

şunu elde ederiz

$$u_0 = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} u_0$$

$$+ \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \sum_{s=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]-s+1} \ \varphi_s + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}).$$

Lemma 3.7 den aşağıdaki operatörün

$$I - \sum_{j=1}^{J} \alpha_j R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}$$

sınırlı tersi vardır

$$\Upsilon_\tau = \left(I - \sum_{j=1}^{J} \alpha_j R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} \right)^{-1}.$$

Buradan

$$u_0$$

$$= \Upsilon_\tau \left\{ \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \left(\sum_{s=1}^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]-s+1} \right) \right.$$

$$\left. \times \left(f(t_{s-1}) \Delta w_{t_s} + (f'(t_{s-1}) + Af(t_{s-1})) \int_{t_{s-1}}^{t_s} (p - t_{s-1}) dw_p \right) \right\}$$

$$+\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}) \}$$

.

böylece, problem (3.21) nin çözümü için (3.22) ve () formüllerimiz var. Şimdi, (3.21) fark şemasının yakınsamasını inceleyeceğiz.

Teorem 3.4. *Eğer*

$$E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2+\max_{t\in[0,T]}\left\|f''(t)\right\|_H^2+\max_{t\in[0,T]}\left\|A^{\frac{3}{2}}f'(t)\right\|_H^2+\max_{t\in[0,T]}\left\|A^2f(t)\right\|_H^2\leq C,$$

doğruysa, aşağıdaki yakınsama tahmini

$$\max_{0\leq k\leq N}\left(E\left\|v(t_k)-u_k\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C_1(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}, \tag{3.23}$$

doğrudur. Burada C ve $C_1(\delta,\lambda_1)$ τ dan bağımsızdır.

İspat (1.13) ve () formüllerini kullanarak, aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$v(0)-u_0=(\Upsilon-\Upsilon_\tau)\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})$$

$$+(\Upsilon-\Upsilon_\tau)\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\int_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-p)}f(p)dw_p$$

$$+\Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\left(\int_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-p)}f(p)dw_p\right.$$

$$\left.-\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}}R^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s+1}\left(f(t_{s-1})\Delta w_{t_s}+\left(f'(t_{s-1})+Af(t_{s-1})\right)\int_{t_{s-1}}^{t_s}(p-t_{s-1})dw_p\right)\right)$$

$$\Upsilon-\Upsilon_\tau=\Upsilon\Upsilon_\tau\left(\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\left(e^{-A\lambda_j}-R^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right)\right) \tag{3.24}$$

$$=P_{1,J}+P_{2,J}+P_{3,J}+P_{4,J}+P_{5,J},$$

öyleki

$$P_{1,J}=(\Upsilon-\Upsilon_\tau)\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}), \tag{3.25}$$

$$P_{2,J}=(\Upsilon-\Upsilon_\tau)\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\int_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}f(s)dw_s, \tag{3.26}$$

$$P_{3,J}=\Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}}e^{-A(\lambda_j-t_s)} \tag{3.27}$$

$$\times \left(\int_{t_{s-1}}^{t_s} e^{-A(t_s-p)} f(p)dw_p \right.$$

$$\left. -e^{-\tau A} \left(f(t_{s-1})\Delta w_{t_s} + (f'(t_{s-1}) + Af(t_{s-1})) \int_{t_{s-1}}^{t_s} (p-t_{s-1})dw_p \right) \right)$$

$$P_{4,J} = \Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \left(e^{-(\lambda_j - t_s)A} - R^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s} \right) e^{-\tau A} \tag{3.28}$$

$$\times \left(f(t_{s-1})\Delta w_{t_s} + (f'(t_{s-1}) + Af(t_{s-1})) \int_{t_{s-1}}^{t_s} (p-t_{s-1})dw_p \right),$$

$$P_{5,J} = \Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} R^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s} \ \left(e^{-\tau A} - R \right) \tag{3.29}$$

$$\times \left(f(t_{s-1})\Delta w_{t_s} + (f'(t_{s-1}) + Af(t_{s-1})) \int_{t_{s-1}}^{t_s} (p-t_{s-1})dw_p \right)$$

Şimdi $P_{k,J}$ ya bakalım. Bütün $k = 1, \cdots, 5$ lar için ayrı ayrı ele alalım. $P_{1,J}$ den başlayalım. (1.9) ve () formüllerini kullanarak şunu elde ederiz

$$\Upsilon - \Upsilon_\tau = \Upsilon \Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \left(e^{-A\lambda_j} - R^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \right). \tag{3.30}$$

(3.30) ve (3.25) formüllerini kullanarak şunu yazabiliriz

$$P_{1,J} = \Upsilon \Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \left(e^{-A\lambda_j} - R^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \right) \varphi(w_{\lambda_1, \cdots, } w_{\lambda_J}).$$

$P_{1,J}$ nin beklenen değerini tahmin edelim.

$$\left(E \left\| P_{1,J} \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \Upsilon \right\|_{H \to H} \left\| \Upsilon_\tau \right\|_{H \to H}$$

$$\times \left(E \left\| \sum_{j=1}^{J} \alpha_j A^{-\frac{3}{2}} \left(e^{-A\lambda_j} - R^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \right) A^{\frac{3}{2}} \varphi(w_{\lambda_1, \cdots, } w_{\lambda_J}) \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(1.10), (3.4) ve (3.2) ifadelerinden şunu elde ederiz

$$\left(E \left\| P_{1,J} \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1(\delta, \lambda_1) \sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \left\| A^{-\frac{3}{2}} \left(e^{-A\lambda_j} - R^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \right) \right\|_{H \to H}$$

$$\times \left(E \left\| A^{\frac{3}{2}} \varphi(w_{\lambda_1, \cdots, } w_{\lambda_J}) \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\dots,}w_{\lambda_J})\right\|_H\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{2,J}$ i tahmin edelim. (3.30) ve (3.26) formüllerini ve üçgen eşitsizliğini kullanarak şunu elde ederiz

$$P_{2,J}=\Upsilon\Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\left(e^{-A\lambda_j}-R^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right)\int_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}f(s)dw_s.$$

(1.10) (3.4) ve (3.2) lerden istifade ile aşağıdaki ifade elde edilir

$$\left(E\left\|P_{2,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\left\|A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-A\lambda_j}-R^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right)\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left(\left\|\int_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}A^{\frac{3}{2}}f(s)dw_s\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\left\|\int_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}A^{\frac{3}{2}}f(s)dw_s\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_3(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\int_0^{\lambda_j}\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_4(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\int_0^{T}\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_5(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{3,J}$ yi tahmin edelim.

$$e^{-A(t_s-p)}f(p)-e^{-\tau A}f(t_{s-1})-e^{-\tau A}\left(f'(t_{s-1})+Af(t_{s-1})\right)(p-t_{s-1})$$

$$=\int_{t_{s-1}}^{p}\int_{t_{s-1}}^{z}\left(A^2f(\lambda)+2Af'(\lambda)+f''(\lambda)\right)(e^{-A(t_s-\lambda)}d\lambda dz \tag{3.31}$$

$$=\int_{t_{s-1}}^{p}(p-\lambda)\left(A^2f(\lambda)+2Af'(\lambda)+f''(\lambda)\right)e^{-A(t_s-\lambda)}d\lambda,$$

formüllerinden aşağıdaki ifade elde edilir

$$P_{3,J} = \Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} e^{-A(\lambda_j - t_s)}$$

$$\times \int_{t_{s-1}}^{t_s} \int_{t_{s-1}}^{p} (p-\lambda) \left(A^2 f(\lambda) + 2Af'(\lambda) + f''(\lambda)\right) e^{-A(t_s-\lambda)} d\lambda dw_p.$$

Son formül, üçgen eşitsizliği, (1.7) ve (3.4) ifadelerinin yardımı ile şöyle yazmak mümkün

$$\left(E\left\|P_{3,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\Upsilon_\tau\right\|_{H\to H} \left(\sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \, E \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \left\| e^{-(\lambda_j - s\tau)A} \right\|_{H\to H}^2 \right.$$

$$\left. \times \int_{t_{s-1}}^{t_s} \int_{t_{s-1}}^{p} (t_s-\lambda)^2 \left\|e^{-A(t_s-\lambda)}\right\|_{H\to H}^2 \left\|\left(A^2 f(p) + 2Af'(p) + Af''(p)\right)\right\|_H^2 dp d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1) \left(\sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \int_{t_{s-1}}^{t_s} \int_{t_{s-1}}^{p} (t_s-\lambda)^2 \left\|\left(A^2 f(p) + 2Af'(p) + f''(p)\right)\right\|_H^2 dp d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^T \left\|\left(A^2 f(p) + 2Af'(p) + f''(p)\right)\right\|_H^2 dp \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_3(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}} \max_{0\leq s\leq T} \left(\left\|A^2 f(s)\right\|_H^2 + \left\|Af'(s)\right\|_H^2 + \left\|f''(s)\right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{4,J}$ i tahmin edelim. (3.28) formülü üçgen eşitsizli, (3.4), (1.7) ve (3.2) ifadelerinin yardımı ile şöyle yazabiliriz.

$$\left(E\left\|P_{4,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\Upsilon_\tau\right\|_{H\to H} \left(\sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \left\| A^{-\frac{3}{2}} \left(e^{-(\lambda_j - t_s)A} - R^{\frac{\lambda_j}{\tau} - s} \right) \right\|_{H\to H}^2 \right.$$

$$\times \int_{t_{p-1}}^{t_p} \left(\left\|\left(I + A\left(p - t_{s-1}\right)\right) e^{-\tau A}\right\|_{H\to H}^2 \left\|A^{\frac{3}{2}} f(t_{s-1})\right\|_H^2 \right.$$

$$\left. + \left\|(p-t_{s-1}) e^{-\tau A}\right\|_{H\to H}^2 \left\|A^{\frac{3}{2}} f'(t_{s-1})\right\|_H^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^T \left\|A^{\frac{3}{2}} \left(f(s) + f'(s-1)\right)\right\|_H^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_3(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}} \max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2+\left\|A^{\frac{3}{2}}f'(s-1)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{5,J}$ i tahmin edelim. (3.29) formülü üçgen eşitsizliği, $(3.4), (3.1)$ ve (3.2) ifadelerinden istifade ile şunu elde ederiz

$$P_{5,J}=\Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}}R^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s}\left(e^{-\tau A}-R\right)$$

$$\times\left(f(t_{s-1})\Delta w_{t_s}+(f'(t_{s-1})+Af(t_{s-1}))\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}(p-t_{s-1})dw_p\right)$$

$$P_{5,J}=\Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}}R^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s}\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\left(A(p-t_{s-1})+I\right)\left(e^{-\tau A}-R\right)f(p)dw_p.$$

$$\left(E\left\|P_{5,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left\|\Upsilon_\tau\right\|_{H\to H}\left(\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\left\|R^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s}\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\times\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}\left(\left\|\left(I+A\left(p-t_{s-1}\right)\right)e^{-\tau A}\right\|_{H\to H}^2\left\|\left(e^{-\tau A}-R\right)\right\|_H^2\left\|A^{\frac{3}{2}}f(t_{s-1})\right\|_H^2\right.$$

$$\left.+\left\|(p-t_{s-1})e^{-\tau A}\right\|_{H\to H}^2\left\|\left(e^{-\tau A}-R\right)\right\|_H^2\left\|A^{\frac{3}{2}}f'(t_{s-1})\right\|_H^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\int\limits_0^T\left\|A^{\frac{3}{2}}\left(f(t_{s-1})+f'(t_{s-1})\right)\right\|_H^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_3(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}} \max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2+\left\|A^{\frac{3}{2}}f'(s-1)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$P_{k,J},\ k=1,\cdots,5$ i kullanarak aşağıdaki tahmini elde ederiz

$$\left(E\left\|v(t_0)-u_0\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C_4(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}. \tag{3.32}$$

Teorem 3.4 in ispati için aşağıdaki tahmini elde etmek yeterlidir.

$$\max_{1\leq k\leq N}\left(E\left\|v(t_k)-u_k\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{1}{2}}. \tag{3.33}$$

(1.13) ve (3.22) formüllerini kullanarak şunu yazabiliriz

$$v(t_k) - u_k = e^{-k\tau A}v(0) + \sum_{s=1}^{k} e^{-(k-s)\tau A} \int_{t_{s-1}}^{t_s} e^{-A(t_s-p)} f(p)dw_p$$

$$-R^k u_0 - \sum_{s=1}^{k} R^{k-s+1} \left(\int_{t_{s-1}}^{t_s} \left[f(t_{s-1}) + (f'(t_{s-1}) + Af(t_{s-1}))(p - t_{s-1})\right] dw_p \right)$$

$$= D_{1,k} + D_{2,k} + D_{3,k} + D_{4,k} + D_{5,k},$$

öyleki

$$D_{1,k} = (e^{-k\tau A} - R^k)\Upsilon \left\{ \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - s)} f(s)dw_s + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}) \right\},$$

$$D_{2,k} = R^k(v(0) - u_0),$$

$$D_{3,k} = \sum_{s=1}^{k} e^{-(k-s)\tau A}$$

$$\times \int_{t_{s-1}}^{t_s} \left[e^{-A(t_s-p)} f(p) - f(t_{s-1}) - (f'(t_{s-1}) + Af(t_{s-1}))(p - t_{s-1})e^{-\tau A}\right] dw_p,$$

$$D_{4,k} = \sum_{s=1}^{k-1} \left(e^{-(k-s)\tau A} - R^{k-s}\right)$$

$$\times \left(\int_{t_{s-1}}^{t_s} \left[f(t_{s-1}) + (f'(t_{s-1}) + Af(t_{s-1}))(p - t_{s-1})\right] dw_p \right)$$

$$D_{5,k} = \sum_{s=1}^{k} R^{k-s} \left(e^{-\tau A} - R\right)$$

$$\times \int_{t_{s-1}}^{t_s} \left[e^{-A(t_s-p)} f(p) - f(t_{s-1}) - (f'(t_{s-1}) + Af(t_{s-1}))(p - t_{s-1})e^{-\tau A}\right] dw_p$$

Bütün $m = 1, \cdots, 5$ ler için ayrı ayrı $D_{m,k}$ yı tahmin edelim. $D_{1,k}$ ile başlayalım. Üçgen eşitsizliğini, önceki sonuçlar, (3.4), (3.1) ve (3.2) ifadelerinden istifadeyle şunu yazabiliriz

$$\left(E \left\| D_{1,k} \right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\left\| (e^{-k\tau A} - R^k)A^{-\frac{3}{2}} \right\|_{H\to H}^2 \right.$$

$$\left. \times E \left\| \Upsilon \left\{ \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \int_0^{\lambda_j} A^{\frac{3}{2}} e^{-A(\lambda_j - s)} f(s)dw_s + A^{\frac{3}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}) \right\} \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(E\left\|\Upsilon\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\int_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}A^{\frac{3}{2}}f(s)dw_s+A^{\frac{3}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left\|\Upsilon\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\int_0^{\lambda_j}\left\|e^{-A(\lambda_j-s)}\right\|_{H\to H}^2\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2ds+E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_3(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\int_0^{T}\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2ds+E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_4(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\left(\int_0^{T}\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2ds+E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\leq C_5(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\left(\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2\right)+E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Şimdi $D_{2,k}$ yı tahmin edelim. (3.2) ifadesinden istifade ile şu elde edilir

$$\left(E\left\|D_{2,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\left\|R^k\right\|_{H\to H}^2E\left\|v(0)-u_0\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(E\left\|v(0)-u_0\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tahmin(3.32) den istifadeyle şunu elde ederiz

$$\left(E\left\|D_{2,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}.$$

Şimdi $D_{3,k}$ i tahmin edelim. Formül (3.31) ü kullanarak, şöyle yazmak mümkün

$$D_{3,k}=\sum_{s=1}^{k}e^{-(k-s)\tau A}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\int_{t_{s-1}}^{p}(p-\lambda)\left(A^2f(\lambda)+2Af'(\lambda)+f''(\lambda)\right)e^{-A(t_s-\lambda)}d\lambda dw_p.$$

son formül, üçgen eşitsizliği ve ifade (1.7) den istifade edersek, şu elde edilir

$$\left(E\left\|D_{3,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\sum_{s=1}^{k}\left\|e^{-(\lambda_j-s\tau)A}\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times\int_{t_{s-1}}^{t_s}\int_{t_{s-1}}^{p}(t_s-\lambda)^2\left\|e^{-A(t_s-\lambda)}\right\|_{H\to H}^2\left\|\left(A^2f(p)+2Af'(p)+f''(p)\right)\right\|_H^2dpd\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\left(\sum_{s=1}^{k}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\int_{t_{s-1}}^{p}(t_s-\lambda)^2\left\|\left(A^2f(p)+2Af'(p)+f''(p)\right)\right\|_H^2dpd\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\int_0^T \left\|\left(A^2 f(p)+2Af'(p)+Af''(p)\right)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_3(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^2 f(p)\right\|_H^2+\|2Af'(p)\|_H^2+\|f''(p)\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Şimdi $D_{4,J}$ i tahmin edelim. Üçgen eşitsizliği, (3.1), (1.7) ve (3.2) ifadelerinden şunu yazabiliriz

$$\left(E\left\|D_{4,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\sum_{s=1}^{k-1}\left\|A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-(k-s)\tau A}-R^{k-s}\right)\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|\left(A(p-t_{s-1})+I\right)e^{-\tau A}\right\|_{H\to H}^2\left\|\left(A^{\frac{3}{2}}f(t_{s-1})+A^{\frac{3}{2}}f'(t_{s-1})\right)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{s=1}^{k-1}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|\left(A^{\frac{3}{2}}f(t_{s-1})+A^{\frac{3}{2}}f'(t_{s-1})\right)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{3}{2}}f(p-1)\right\|_H^2+\left\|A^{\frac{3}{2}}f'(p-1)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Son olarak, $D_{5,k}$ yı tahmin edelim. Üçgen eşitsizliği, (3.1) ve (3.2) ifadelerinden şunu yazabiliriz

$$\left(E\left\|D_{5,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\sum_{s=1}^{k}\left\|A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-\tau A}-R\right)\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|\left(A(p-t_{s-1})+I\right)R^{k-s}\right\|_{H\to H}^2\left\|\left(A^{\frac{3}{2}}f(t_{s-1})+A^{\frac{3}{2}}f'(t_{s-1})\right)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{s=1}^{k}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|\left(A^{\frac{3}{2}}f(t_{s-1})+A^{\frac{3}{2}}f'(t_{s-1})\right)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{3}{2}}f(p-1)\right\|_H^2+\left\|A^{\frac{3}{2}}f'(p-1)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

$D_{1,k}$, $D_{2,k}$, $D_{3,k}$, $D_{4,k}$ ve $D_{5,k}$ leri birleştirirsek, (3.33) elde edilir. Teorem 3.4 ispatlanmıştır.

Şimdi teorem 3.4 ün uygulamasına bir göz atalım. İlk olarak, bir boyutlu yerel olmayan stokastik parabolik denklem için sınır değer problemine bakalım.

Problem (2.20) ün diskritizasyonu benzer şekilde iki aşamalıdır. İlki bir önceki gibi. İkinci aşamada, (2.22) yı (3.21) fark şeması ile yer değiştiririz ve aşağıdaki fark şemasısını,

$$\begin{cases} u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x) + \left(\tau A_h^x + \frac{\left(\tau A_h^x\right)^2}{2}\right) u_k^h(x) = \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x,k) = f^h(t_{k-1},x)\Delta w_{t_k} \\ + \left(\frac{\left(f^h(t_k,x) - f^h(t_{k-1},x\right)}{\tau} + A_h^x f^h(t_{k-1},x)\right) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (p - t_{k-1}) dw_p,\ t_k = k\tau \\ \ 1 \le k \le N,\ x \in [0,1]_h, \\ u_0^h(x) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\frac{\lambda_j}{\tau}}^h(x) + \varphi(w_{\lambda_1,\dots,}w_{\lambda_J}, x), x \in [0,1]_h, \end{cases} \tag{3.34}$$

elde ederiz.

Teorem 3.5. *τ ve h yeterince küçük keyfi sayılar olsun. Sonra, (3.34) fark şemasının çözümü aşağıdaki tahminin yakınsamasını sağlar*

$$\max_{0 \le k \le N} \left(E \left\| v^h(t_k) - u_k^h \right\|_{L_{2h}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le C(\delta, \lambda_1) \left(\tau^{\frac{3}{2}} + h\right), \tag{3.35}$$

öyleki $C(\delta, \lambda_1)$ τ ve h den başımsızdır.

Teorem 3.5 in ispatı Teorem 3.4 in soyut formu temel alınarak ve A_h^x (2.21)de tanımlı fark şemaları operatörlerinin simetri özelliğinden istifade ile yapılır.

İkici olarak, çoknoktalı yerel olmayan parabolik sınır değer problemini (2.25) ele alalım. (3.34) nun diskritizasyonu önce yapılanlar gibi. İkinci aşamada, (2.27) i (3.21) ile yer değiştiririsek aşağıdaki fark şeması

$$\begin{cases} u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x) + \left(\tau A_h^x + \frac{\left(\tau A_h^x\right)^2}{2}\right) u_k^h(x) = \varphi_k^h(x), 1 \le k \le N, \\ \varphi_k^h(x,k) = f^h(t_{k-1},x)\Delta w_{t_k} \\ + \left(\frac{\left(f^h(t_k,x) - f^h(t_{k-1},x\right)}{\tau} + A_h^x f^h(t_{k-1},x)\right) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (p - t_{k-1}) dw_p,\ t_k = k\tau \\ \ 1 \le k \le N,\ x \in \Omega_h, \\ u_0^h(x) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\frac{\lambda_j}{\tau}}^h(x) + \varphi(w_{\lambda_1,\dots,}w_{\lambda_J}, x), x \in \widetilde{\Omega}_h, \end{cases} \tag{3.36}$$

elde edilir.

Teorem 3.6. *τ ve h yeterince küçük keyfi sayılar olsun. Sonra, (3.36) fark şemasının çözümü aşağıdaki tahminin yakınsamasını sağlar,*

$$\max_{0\leq k\leq N}\left(E\left\|v^h(t_k)-u_k^h\right\|_{L_{2h}}^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C(\delta,\lambda_1)\left(\tau^{\frac{3}{2}}+|h|^2\right),$$

öyleki $C(\delta,\lambda_1)$ τ ve $|h|$ den bağımsızdır.

Teorem 3.6 in ispatı Teorem 3.4 in soyut formu temel alınarak ve A_h^x (2.21) de tanımlı fark şemaları operatörlerinin simetri özelliğinden istifade ile yapılır.

Crank-Nicholson Fark Şeması

Bu bölümde 3/2− inci mertebeden doğru fark şemasını problem (1.6) in tahmini çözümü için kurduk ve araştırdık. Bu fark şemasının tahmini çözüm yakınsaması oluşturuldu. Uygulama olarak, yerel olmayan çok noktalı sınır değer stokastik parabolik eşitliklerin fark şemaları çözümlerinin yakınsama tahminleri elde edilmiştir.

3/2-inci Mertebeden Doğru Crank-Nicholson Fark Şeması: Standard Wiener Prosesli

İleride gerekli olan lemmaları sırayla verelim.

Lemma 4.1. *Aşağıdaki sonuçları almak mümkün,*

$$\left\|A^{\beta}B^{k-r}(\tau A)C^{r}(\tau A)\right\|_{H\to H}\leq\frac{C_1}{(k\tau)^{\beta}},1\leq k\leq N,0\leq\beta\leq r/2,r=1,2,\cdots,\tag{4.1}$$

$$\left\|A^{-1-\beta}\left(B^{k}-\exp(-k\tau A)\right)\right\|_{H\to H}\leq\frac{C_1\tau^{2}}{\beta\left(k\tau\right)^{1-\beta}},\ 1\leq k\leq N,\ 0<\beta\leq 1,\tag{4.2}$$

$$\left\|A^{-2}\left(e^{-\tau A}-C^{2}\right)\right\|_{H\to H}\leq C_1\tau^{2},\left\|\left(A(s-t_{p-1})+I\right)A^{-2}\left(e^{-\tau A}-C^{2}\right)\right\|_{H\to H}\leq C_1\tau^{2},\tag{4.3}$$

öyleki $B=\left(I-\frac{\tau A}{2}\right)\left(I+\frac{\tau A}{2}\right)^{-1}$, $C=\left(I+\frac{\tau A}{2}\right)^{-1}$.

Lemma 4.2. *Kabul edelimki* (2.2) *doğrudur. Sonra, aşağıdaki operatörün,*

$$I-\sum_{j=1}^{J}\alpha_j B^{\frac{\lambda_j}{\tau}}$$

tersi vardır ve sınırlıdır,

$$\Upsilon_{\tau}=\left(I-\sum_{j=1}^{I}\alpha_j B^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right)^{-1}\tag{4.4}$$

ve aşağıdaki sonuç sağlanır,

$$\left\|\Upsilon_{\tau}\right\|_{H\to H}\leq C(\delta,\alpha).\tag{4.5}$$

Burada $\alpha=\sum\limits_{j=1}^{J}|\alpha_j|<1$.

İspat İspat üçgen eşitsizliği ve kabul (1.8) den elde edilir, ve sonuç,

$$\|\Upsilon_\tau\|_{H\to H} \leq \|\Upsilon\|_{H\to H} + \|\Upsilon_\tau\|_{H\to H} \|\Upsilon\|_{H\to H} C(\delta,\alpha)\tau.$$

Şimdi, çoknoktalı sınır değer probleminin yaklaşık çözümünün 3/2-inci mertebeden doğru fark şemasını ele alalım. (1.6) ve ($1.14a$) nın da yardımıyla çoknoktalı yerel olamayan sınır değer probleminin çözümünün yakınsaklığı aşikardır. Aşağıdaki ifadelerin yakınsaklıklarına bakalım,

$$e^{-\tau A},$$
$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-(t_k-s)A} f(s)dw_s,$$

ve çoknoktalı sınır değer şartları

$$v(0) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j v(\lambda_j) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}).$$

Yerel olamayan sınır değer şartları için şunu kabul edelim $\lambda_j \in [0,T]_\tau$ sonra $\frac{\lambda_j}{\tau} = \left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]$ dır.

$e^{-\tau A}$ ifadesi ile $B = \left(I - \frac{\tau A}{2}\right)\left(I + \frac{\tau A}{2}\right)^{-1}$ve $C^2 = \left(I + \frac{\tau A}{2}\right)^{-2}$ ifadelerini, $e^{-(t_k-p)A} f(p)$ ifadesi ile $(I + (p - t_{k-1})A)\, C^2 f(p)$ ifadesini yer değiştirirsek, Crank-Nicholson fark şemasını buluruz.

$$\begin{cases} u_k - u_{k-1} + (I-B)u_{k-1} = C^2\varphi_k, \\ \varphi_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(p)dw_p + A\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (p-t_{k-1})f(p)dw_p, t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, \\ u_0 = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\frac{\lambda_j}{\tau}} + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}) \end{cases}$$

Problem (1.6) in yakınsak çözümleri için fark şemasını denk formda tekrar yazalım,

$$\begin{cases} u_k - u_{k-1} + \left(\tau A + \frac{(\tau A)^2}{4}\right) u_k + \frac{(\tau A)^2}{4} u_{k-1} = \varphi_k, \\ \varphi_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(p)dw_p + A\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (p-t_{k-1})f(p)dw_p, t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, \\ u_0 = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\frac{\lambda_j}{\tau}} + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}). \end{cases} \tag{4.6}$$

Crank-Nicholson fark şeması,

$$\begin{cases} u_k - u_{k-1} + \left(\tau A + \frac{(\tau A)^2}{4}\right) u_k + \frac{(\tau A)^2}{4} u_{k-1} = \varphi_k, \\ \varphi_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(p)dw_p + A \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (p - t_{k-1}) f(p) dw_p, 1 \leq k \leq N, \\ u_0 \; veriliyor, \end{cases}$$

Cauchy problemi (2.7) için tek çözümlüdür ve şöyle temsil edilir,

$$u_k = B^k u_0 + \sum_{s=1}^{k} B^{k-s} C^2 \varphi_s. \tag{4.7}$$

Bu formül ve çok noktalı yerel olmayan sınır değer şartlarından

$$u_0 = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\frac{\lambda_j}{\tau}} + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}),$$

aşağıdakini elde ederiz

$$u_0 = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \left(B^{\frac{\lambda_j}{\tau}} u_0 + \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} B^{\frac{\lambda_j}{\tau} - s} \; C^2 \varphi_s \right) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}).$$

Lemma 4.9 yardımı ile operatör

$$I - \sum_{j=1}^{J} \alpha_j B^{\frac{\lambda_j}{\tau}}$$

ün sınırlı tersi vardır

$$\Upsilon_\tau = \left(I - \sum_{j=1}^{I} \alpha_j B^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \right)^{-1}.$$

Sonra

$$u_0 = \Upsilon_\tau \left\{ \sum_{j=1}^{I} \alpha_j \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} B^{\frac{\lambda_j}{\tau} - s} C^2 \varphi_s + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}) \right\}. \tag{4.8}$$

Böylece, (4.7) ve (4.8) formüllerini problem (4.6) nın çözümleri için elde ederiz. Şimdi fark şeması (4.6) nın yakınsama tahminini araştıracağız.

Teorem 4.1. *Eğer*

$$E \left\| A^{\frac{3}{2}} \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}) \right\|_H^2 + E \int\limits_0^T \left\| A^2 f(s) \right\|_H^2 ds \leq C,$$

doğruysa, buradan yakınsama tahmini,

$$\max_{0 \leq k \leq N} \left(E \left\| v(t_k) - u_k \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1(\delta, \alpha) \tau^{\frac{3}{2}}$$

sağlanır. Burada C_1 ve $C_2(\delta, \lambda_1)$ τ dan bağımsızdır.

İspat formül (1.13) ve (4.8) i kullanarak, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz

$$v(0) - u_0 = (\Upsilon - \Upsilon_\tau)\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})$$

$$+(\Upsilon - \Upsilon_\tau)\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - p)} f(p)dw_p$$

$$+\Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\left(\int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - p)} f(p)dw_p\right.$$

$$\left.-\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} B^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s}\left(\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left(A(p-t_{s-1})+I\right)e^{-\tau A} f(p)C^2 dw_p\right)\right)$$

$$= P_{1,J} + P_{2,J} + P_{3,J} + P_{4,J} + P_{5,J},$$

öyleki

$$P_{1,J} = (\Upsilon - \Upsilon_\tau)\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}), \tag{4.9}$$

$$P_{2,J} = (\Upsilon - \Upsilon_\tau)\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - s)} f(s)dw_s, \tag{4.10}$$

$$P_{3,J} = \Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} e^{-A(\lambda_j - t_s)} \tag{4.11}$$

$$\times\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left(e^{-A(t_s - p)} - \left(A(p-t_{s-1})+I\right)e^{-\tau A}\right) f(p)dw_p,$$

$$P_{4,J} = \Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\left(e^{-(\lambda_j - t_s)A} - B^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s}\right) \tag{4.12}$$

$$\times\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left(A(p-t_{s-1})+I\right)e^{-\tau A} f(p)dw_p,$$

$$P_{5,J} = \Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} B^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left(A(p-t_{s-1})+I\right)\left(e^{-\tau A} - C^2\right) f(p)dw_p. \tag{4.13}$$

Bütün $k = 1, \cdots, 5$ ler için $P_{k,J}$ yi bulalım. $P_{1,J}$ den başlıyalım. (1.13) ve (4.8) formüllerini kullanarak aşağıdaki ifadeyı elde ederiz,

$$\Upsilon - \Upsilon_\tau = \Upsilon\Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \left(e^{-A\lambda_j} - B^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \right). \tag{4.14}$$

(4.14) ve (4.9) yi kullanarak aşağıdaki gibi yazarız

$$P_{1,J} = \Upsilon\Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \left(e^{-A\lambda_j} - B^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \right) \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}).$$

$P_{1,J}$ nin beklenen değerini tahmin edelim.

$$\left(E \left\| P_{1,J} \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \Upsilon \right\|_{H\to H} \left\| \Upsilon_\tau \right\|_{H\to H}$$

$$\times \left(E \left\| \sum_{j=1}^{J} \alpha_j A^{-\frac{3}{2}} \left(e^{-A\lambda_j} - B^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \right) A^{\frac{3}{2}} \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}) \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(4.2) yi kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz

$$\left(E \left\| P_{1,J} \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1(\delta, \lambda_1) \sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \left\| A^{-\frac{3}{2}} \left(e^{-A\lambda_j} - B^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \right) \right\|_{H\to H}$$

$$\times \left(E \left\| A^{\frac{3}{2}} \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}) \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta, \alpha) \tau^{\frac{3}{2}} \left(E \left\| A^{\frac{3}{2}} \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}) \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$P_{2,J}$ nin beklenen değerini tahmin edelim. (4.14) ve (4.10) formüllerini kullanarak şunu yazabiliriz

$$P_{2,J} = \Upsilon\Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \left(e^{-A\lambda_j} - B^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \right) \int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - s)} f(s) dw_s.$$

(1.7) ve (4.2) formüllerini kullanarak şunu yazabiliriz

$$\left(E \left\| P_{2,J} \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta, \alpha) \sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \left\| A^{-\frac{3}{2}} \left(e^{-A\lambda_j} - B^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \right) \right\|_{H\to H} \left(E \left\| \int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - s)} A^{\frac{3}{2}} f(s) dw_s \right\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta, \alpha) \tau^{\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \left(E \int_0^{\lambda_j} \left\| e^{-A(\lambda_j - s)} \right\|_{H\to H}^2 \left\| A^{\frac{3}{2}} f(s) \right\|_H^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_3(\delta,\alpha)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\,E\int_0^{\lambda_j}\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_4(\delta,\alpha)\tau^{\frac{3}{2}}\left(E\int_0^{T}\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{3,J}$ tahmin edelim.

$$e^{-A(t_s-p)}-e^{-\tau A}-A(p-t_{s-1})e^{-\tau A}$$

$$=\int_{t_{s-1}}^{p}\int_{t_{s-1}}^{z}A^2e^{-A(t_s-\lambda)}d\lambda dz=\int_{t_{s-1}}^{p}(p-\lambda)\,A^2e^{-A(t_s-\lambda)}d\lambda, \tag{4.15}$$

formüllerini kullanarak aşağıdakini yazabiliriz

$$P_{3,J}=\Upsilon_\tau\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}}e^{-A(\lambda_j-t_s)}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\int_{t_{s-1}}^{p}(p-\lambda)\,A^2e^{-A(t_s-\lambda)}d\lambda f(p)dw_p.$$

Son formülü, üçgen eşitsizliğini, (1.7) ve (4.5) formüllerini kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E\left\|P_{3,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left\|\Upsilon_\tau\right\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\left\|e^{-(\lambda_j-s\tau)A}\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left(E\int_{t_{s-1}}^{t_s}\int_{t_{s-1}}^{p}(t_s-\lambda)^2\left\|e^{-A(t_s-\lambda)}\right\|_{H\to H}^2\left\|A^2f(p)\right\|_H^2 dpd\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\left(\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\,E\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\int_{t_{s-1}}^{p}(t_s-\lambda)^2\left\|A^2f(p)\right\|_H^2 dpd\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(E\int_0^{T}\left\|A^2f(p)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{4,J}$ yi tahmin edelim. (4.12) formülünü , üçgen eşitsizliğini, (4.5) , (1.7) ve (4.2) yi kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E\left\|P_{4,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left\|\Upsilon_\tau\right\|_{H\to H}\left(\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\left\|A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-(\lambda_j-t_s)A}-B^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s}\right)\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times\,E\int_{t_{p-1}}^{t_p}\left\|\left(A(s-t_{p-1})+I\right)e^{-\tau A}\right\|_{H\to H}^2\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(E\int\limits_0^T \left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{5,J}$ i tahmin edelim. (4.13) formülünü, üçgen eşitsizliğini, (4.5), (4.1) ve (4.3) leri kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E\left\|P_{5,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\Upsilon_\tau\right\|_{H\to H}\left(\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\left\|B^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s}\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times E\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}\left\|\left(A(s-t_{p-1})+I\right)A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-\tau A}-C^2\right)\right\|_{H\to H}^2\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\alpha)\tau^{\frac{3}{2}}\left(E\int\limits_0^T\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Yukarıdakileri kullanarak $P_{k,J}$, $k=1,\cdots,5$ leri birleştirirsek şunu elde ederiz,

$$\left(E\left\|v(t_0)-u_0\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_4(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}. \tag{4.16}$$

Teorem 4.1 i ispatlamak için aşağıdaki sonucu elde etmek yeterlidir.

$$\max_{1\leq k\leq N}\left(E\left\|v(t_k)-u_k\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}. \tag{4.17}$$

(1.13) ve (4.6) formüllerini kullanarak şunu yazabiliriz

$$v(t_k)-u_k = e^{-k\tau A}v(0)+\sum_{s=1}^{k}e^{-(k-s)\tau A}\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}e^{-A(t_s-p)}f(p)dw_p$$

$$-B^k u_0-\sum_{s=1}^{k}B^{k-s}\left(\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\left(I+A(p-t_{s-1})\right)C^2 f(p)dw_p\right)$$

$$= D_{1,k}+D_{2,k}+D_{3,k}+D_{4,k}+D_{5,k},$$

öyleki,

$$D_{1,k}=(e^{-k\tau A}-R^k)\Upsilon\left\{\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\int\limits_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}f(s)dw_s+\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\},$$

$$D_{2,k}=B^k(v(0)-u_0),$$

$$D_{3,k}=\sum_{s=1}^{k}e^{-(k-s)\tau A}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left(e^{-A(t_s-p)}-(A(p-t_{s-1})+I)\,e^{-\tau A}\right)f(p)dw_p,$$

$$D_{4,k}=\sum_{s=1}^{k-1}\left(e^{-(k-s)\tau A}-B^{k-s}\right)\int_{t_{s-1}}^{t_s}(A(p-t_{s-1})+I)\,e^{-\tau A}f(p)dw_p,$$

$$D_{5,k}=\sum_{s=1}^{k}R^{k-s}\left(e^{-\tau A}-C^2\right)\int_{t_{s-1}}^{t_s}(A(p-t_{s-1})+I)\,e^{-\tau A}f(p)dw_p.$$

$D_{m,k}$ tüm $m=1,\cdots,5$ ler için ayrı ayrı bulalım. $D_{1,k}$ dan başlayalım. Üçgen eşitsizliğini, $(4.5),(4.2)$ ve (4.1) leri kullanarak şunu elde ederiz,

$$\left(E\left\|D_{1,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\left(\left\|(e^{-k\tau A}-B^k)A^{-\frac{3}{2}}\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times E\left\|\Upsilon\left\{\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\int_0^{\lambda_j}Ae^{-A(\lambda_j-s)}f(s)dw_s+A\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(E\left\|\Upsilon\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\int_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}Af(s)dw_s+A\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left\|\Upsilon\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\,E\int_0^{\lambda_j}\left\|e^{-A(\lambda_j-s)}\right\|_{H\to H}^2\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2ds+E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_3(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(E\int_0^{T}\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2ds+E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $D_{2,k}$ yı tahmin edelim (4.2) i kullanarak şu sonucu elde ederiz,

$$\left(E\left\|D_{2,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\left\|R^k\right\|_{H\to H}^2E\left\|v(0)-u_0\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(E\left\|v(0)-u_0\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(4.16) yı kullanırsak aşağıdakini,

$$\left(E\left\|D_{2,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}},$$

elde ederiz.

Şimdi $D_{3,k}$ yı tahmin edelim. (4.15) formülünü kullanarak şunu yazabiliriz,

$$D_{3,k} = \sum_{s=1}^{k} e^{-(k-s)\tau A} \int_{t_{s-1}}^{t_s} \int_{t_{s-1}}^{p} (p-\lambda) A^2 e^{-A(t_s-\lambda)} d\lambda f(p) dw_p.$$

Son formülü, üçgen eşitsizliğini ve (1.7) yi kullanarak şu sonucu elde ederiz,

$$\left(E \left\| D_{3,J} \right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(E \sum_{s=1}^{k} \left\| e^{-(\lambda_j - s\tau)A} \right\|_{H\to H}^2 \right.$$

$$\left. \times \int_{t_{s-1}}^{t_s} \int_{t_{s-1}}^{p} (t_s-\lambda)^2 \left\| e^{-A(t_s-\lambda)} \right\|_{H\to H}^2 \left\| A^2 f(p) \right\|_H^2 dp d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1) \left(E \sum_{s=1}^{k} \int_{t_{s-1}}^{t_s} \int_{t_{s-1}}^{p} (t_s-\lambda)^2 \left\| A^2 f(p) \right\|_H^2 dp d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1) \tau^{\frac{3}{2}} \left(E \int_0^T \left\| A^2 f(p) \right\|_H^2 dp \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $D_{4,k}$ yi tahmin edelim. Üçgen eşitsizliğini, (4.1) ve (4.2) yi kullanarak, şu sonucu elde ederiz,

$$\left(E \left\| D_{4,k} \right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{s=1}^{k-1} \left\| A^{-\frac{3}{2}} \left(e^{-(k-s)\tau A} - B^{k-s} \right) \right\|_{H\to H}^2 \right.$$

$$\left. \times E \int_{t_{s-1}}^{t_s} \left\| \left(A(p-t_{s-1}) + I\right) e^{-\tau A} \right\|_{H\to H}^2 \left\| A^{\frac{3}{2}} f(p) \right\|_H^2 dp \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}} \left(\sum_{s=1}^{k-1} E \int_{t_{s-1}}^{t_s} \left\| A^{\frac{3}{2}} f(p) \right\|_H^2 dp \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}} \left(E \int_0^T \left\| A^{\frac{3}{2}} f(p) \right\|_H^2 dp \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Son olarak, $D_{5,k}$ yı tahmin edelim. Üçgen eşitsizliğini, (4.1) ve (4.3) ü kullanarak şu sonucu elde ederiz,

$$\left(E \left\| D_{5,k} \right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{s=1}^{k} \left\| A^{-\frac{3}{2}} \left(e^{-\tau A} - C^2 \right) \right\|_{H\to H}^2 \right.$$

$$\left. \times E \int_{t_{s-1}}^{t_s} \left\| \left(A(p-t_{s-1}) + I\right) B^{k-s} \right\|_{H\to H}^2 \left\| A^{\frac{3}{2}} f(p) \right\|_H^2 dp \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}} \left(\sum_{s=1}^{k} E \int_{t_{s-1}}^{t_s} \left\| A^{\frac{3}{2}} f(p) \right\|_H^2 dp \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}} \left(E \int_0^T \left\| A^{\frac{3}{2}} f(p) \right\|_H^2 dp \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$D_{1,k}$, $D_{2,k}$, $D_{3,k}$, $D_{4,k}$ ve $D_{5,k}$ leri toparlarsak (4.17) elde edilir ve teorem 4.1 ispatlanır.

Şimdi teorem 4.1 ün uygulamasına bir göz atalım. İlk olarak, bir boyutlu yerel olmayan stokastik parabolik denklem için sınır değer problemine bakalım. Problem (2.20) in diskritizasyonu benzer şekilde iki aşamalıdır. İlki bir önceki gibi. İkinci aşamada, (2.22) yı (4.6) fark şeması ile yer değiştirirsek,

$$\begin{cases} u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x) + \left(\tau A_h^x + \frac{\left(\tau A_h^x\right)^2}{4}\right) u_k^h(x) + \frac{\left(\tau A_h^x\right)^2}{4} u_{k-1}^h(x) = \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f^h(p,x)dw_p + A_h^x \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (p - t_{k-1}) f^h(p,x)dw_p, \ t_k = k\tau, \\ 1 \le k \le N, \ x \in [0,1]_h, \\ u_0^h(x) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\frac{\lambda_j}{\tau}}^h(x) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}, x), x \in [0,1]_h, \end{cases} \tag{4.18}$$

elde edilir.

Teorem 4.2. *τ ve h yeterince küçük keyfi sayılar olsun. Sonra, (4.18) fark şemasının çözümü aşağıdaki tahminin yakınsamasını sağlar,*

$$\max_{0 \le k \le N} \left(E \left\| v^h(t_k) - u_k^h \right\|_{L_{2h}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le C(\delta, \lambda_1) \left(\tau^{\frac{3}{2}} + h \right), \tag{4.19}$$

öyleki $C(\delta, \lambda_1)$ τ ve h den bağımsızdır.

Teorem 4.3 ün ispatı Teorem 4.2 in soyut formu temel alınarak ve A_h^x (2.21) de tanımlı fark şemaları operatörlerinin simetri özelliğinden istifade ile yapılır.

İkici olarak, çoknoktalı yerel olmayan parabolik sınır değer problemini (2.25) ele alalım. (4.18) nun diskritizasyonu önce yapılanlar gibi. İkinci aşamada, (2.27) i (4.6) ile yer değiştirirsek

$$\begin{cases} u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x) + \left(\tau A_h^x + \frac{\left(\tau A_h^x\right)^2}{4}\right) u_k^h(x) + \frac{\left(\tau A_h^x\right)^2}{4} u_{k-1}^h(x) = \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x,k) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f^h(p,x)dw_p + A_h^x \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (p - t_{k-1}) f^h(p,x)dw_p, \ t_k = k\tau, \\ 1 \le k \le N, \ x \in \Omega_h, \\ u_0^h(x) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\frac{\lambda_j}{\tau}}^h(x) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}, x), x \in \widetilde{\Omega}_h. \end{cases} \tag{4.20}$$

Teorem 4.3. *τ ve h yeterince küçük keyfi sayılar olsun. Sonra, fark şeması (4.20) nın çözümü aşağıdaki tahminin yakınsamasını sağlar,*

$$\max_{0\leq k\leq N}\left(E\left\|v^h(t_k)-u_k^h\right\|_{L_{2h}}^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C(\delta,\alpha)\left(\tau^{\frac{3}{2}}+|h|^2\right),$$

öyleki, $C(\delta,\lambda_1)$, τ ve $|h|$ den bağımsızdır.

Teorem 4.3 ün ispatı teorem 4.1 in soyut formu temel alınarak ve A_h^x (2.26) de tanımlı fark şemaları operatörlerinin simetri özelliğinden istifade ile yapılır.

Lemma 4.3. *Aşağıdaki ifadeler,*

$$\left\|A^{\beta}B^{k-r}(\tau A)C^{r}(\tau A)\right\|_{H\to H}\leq\frac{C_1}{(k\tau)^{\beta}},1\leq k\leq N,0\leq\beta\leq r/2,r=1,2,\cdots,\tag{4.21}$$

$$\left\|A^{-1-\beta}\left(B^{k}-\exp(-k\tau A)\right)\right\|_{H\to H}\leq\frac{C_1\tau^2}{\beta\left(k\tau\right)^{1-\beta}},\ 1\leq k\leq N,\ 0<\beta\leq 1,\tag{4.22}$$

$$\left\|A^{-2}\left(e^{-\tau A}-C^2\right)\right\|_{H\to H}\leq C_1\tau^2,\left\|\left(A(s-t_{p-1})+I\right)A^{-2}\left(e^{-\tau A}-C^2\right)\right\|_{H\to H}\leq C_1\tau^2,\tag{4.23}$$

öyleki $B=\left(I-\frac{\tau A}{2}\right)\left(I+\frac{\tau A}{2}\right)^{-1}$, $C=\left(I+\frac{\tau A}{2}\right)^{-1}$ *doğrudur.*

Lemma 4.4. *Eğer* (2.2) *doğruysa, operatör*

$$I-\sum_{j=1}^{J}\alpha_j B^{\frac{\lambda_j}{\tau}}$$

sınırlı bir tersi vardır,

$$\Upsilon_\tau=\left(I-\sum_{j=1}^{I}\alpha_j B^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right)^{-1}\tag{4.24}$$

ve aşağıdaki ifade sağlanır,

$$\|\Upsilon_\tau\|_{H\to H}\leq C(\delta,\alpha).\tag{4.25}$$

Burada $\alpha=\sum\limits_{j=1}^{J}|\alpha_j|<1.$

İspat İspat üçgen eşitsizliği, ifade (1.8) ve 4.25) den istifade ile yapılır.

$$\|\Upsilon_\tau\|_{H\to H}\leq\|\Upsilon\|_{H\to H}+\|\Upsilon_\tau\|_{H\to H}\|\Upsilon\|_{H\to H}C(\delta,\alpha)\tau.$$

Şimdi çoknoktalı yerel olmayan sınır değer 3/2-inci mertebeden yakınsak Crank-Nicholson fark şemasını problem (1.6) için ele alalım. (1.13) ifadesinden çoknoktalı yerel olmayan sınır değer problemi yakınsaktır. Şimdi şu ifadelerin yakınsaması incelenmelidir,

$$e^{-\tau A},$$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-(t_k-s)A} f(s)dw_s,$$

ve çoknoktalı yerel olmayan sınır değer şartları,

$$v(0)=\sum_{j=1}^{J}\alpha_j v(\lambda_j)+\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}).$$

Yerel olmayan sınır değer şartları için şu kabulleri yapıyoruz,

$\lambda_j \in [0,T]_\tau$ ise $\frac{\lambda_j}{\tau}=\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]$ dir

$e^{-\tau A}$ ifadesini $B=\left(I-\frac{\tau A}{2}\right)\left(I+\frac{\tau A}{2}\right)^{-1}$ve $C^2=\left(I+\frac{\tau A}{2}\right)^{-2}$ ifadesiyle, $e^{-(t_k-p)A}f(p)$ ifadesini $(I+(p-t_{k-1})A)\,C^2 f(p)$ ifadesi ile yer değiştirirsek, Crank-Nicholson fark şemasını elde ederiz.

$$\begin{cases} u_k-u_{k-1}+(I-B)u_{k-1}=C^2\varphi_k, \\ \varphi_k=f(t_{k-1})\Delta w_{t_k}+(f'(t_{k-1})+Af(t_{k-1}))\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(s-t_{k-1})dw_s, 1\le k\le N, \\ \Delta w_{t_k}=w_{t_k}-w_{t_{k-1}}, 1\le k\le N, \\ u_0=\sum\limits_{j=1}^{J}\alpha_j u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}+\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}) \end{cases}$$

Problem (1.6) nin yakınsak çözümü için denk formu tekrar yazarsak,

$$\begin{cases} u_k-u_{k-1}+\left(\tau A+\frac{(\tau A)^2}{4}\right)u_k+\frac{(\tau A)^2}{4}u_{k-1}=\varphi_k, \\ \varphi_k=f(t_{k-1})\Delta w_{t_k}+(f'(t_{k-1})+Af(t_{k-1}))\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(s-t_{k-1})dw_s, 1\le k\le N, \\ \Delta w_{t_k}=w_{t_k}-w_{t_{k-1}}, 1\le k\le N, \\ u_0=\sum\limits_{j=1}^{J}\alpha_j u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}+\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}). \end{cases} \tag{4.26}$$

elde edilir.

Crank-Nicholson fark şemasının,

$$\begin{cases} u_k-u_{k-1}+(I-B)u_{k-1}=C^2\varphi_k, \\ \varphi_k=f(t_{k-1})\Delta w_{t_k}+(f'(t_{k-1})+Af(t_{k-1}))\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(s-t_{k-1})dw_s, \\ 1\le k\le N, \\ u_0 \text{ veriliyor} \end{cases}$$

Cauchy problem (2.7) için tek çözümü vardır ve şöyle formüle edilir,

$$u_k=B^k u_0+\sum_{s=1}^{k}B^{k-s}C^2\varphi_s. \tag{4.27}$$

Bu formülden ve yerel olmayan sınır değer şartlarından

$$u_0 = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\frac{\lambda_j}{\tau}} + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}),$$

elde edilir ve,

$$u_0 = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \left(B^{\frac{\lambda_j}{\tau}} u_0 + \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} B^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s} \ C^2 \varphi_s \right) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}).$$

Lemma 4.11 operatör,

$$I - \sum_{j=1}^{J} \alpha_j B^{\frac{\lambda_j}{\tau}},$$

sınırlı tersi vardır,

$$\Upsilon_\tau = \left(I - \sum_{j=1}^{I} \alpha_j B^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \right)^{-1}.$$

Böylece

$$u_0 = \Upsilon_\tau \left\{ \sum_{j=1}^{I} \alpha_j \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} B^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s} C^2 \varphi_s + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}) \right\}. \tag{4.28}$$

Buradan, problem (4.26) in çözümü için (4.27) ve (4.28) formüllerimiz vardır. Şimdi, fark şeması (4.26) nın yakınsamasını araştıralım.

Teorem 4.4. *Eğer,*

$$E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2 + \max_{t\in[0,T]}\left\|f''(t)\right\|_H^2 + \max_{t\in[0,T]}\left\|A^{\frac{3}{2}}f'(t)\right\|_H^2 + \max_{t\in[0,T]}\left\|A^2 f(t)\right\|_H^2 \le C,$$

doğruysa,

$$\max_{0\le k\le N}\left(E\left\|v(t_k)-u_k\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \le C_1(\delta,\alpha)\tau^{\frac{3}{2}}$$

yakınsaktır. Burada C ve $C_1(\delta,\lambda_1)$ τ dan bağımsızdır.

İspat (1.13) ve (4.28) formüllerini kullanarak şunu yazabiliriz

$$v(0) - u_0 = (\Upsilon - \Upsilon_\tau)\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})$$

$$+(\Upsilon - \Upsilon_\tau)\sum_{j=1}^{J}\alpha_j \int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j-p)} f(p) dw_p$$

$$+\Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \left(\int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - p)} f(p) dw_p \right.$$

$$\left. \left. - \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} B^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s} \left(\int_{t_{s-1}}^{t_s} \left[f(t_{s-1}) + (f'(t_{s-1}) + Af(t_{s-1}))(p - t_{s-1}) \right] C^2 dw_p \right) \right) \right)$$

$$= P_{1,J} + P_{2,J} + P_{3,J} + P_{4,J} + P_{5,J},$$

öyleki,

$$P_{1,J} = (\Upsilon - \Upsilon_\tau)\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}), \tag{4.29}$$

$$P_{2,J} = (\Upsilon - \Upsilon_\tau) \sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - s)} f(s) dw_s, \tag{4.30}$$

$$P_{3,J} = \Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} e^{-A(\lambda_j - t_s)} \left(\int_{t_{s-1}}^{t_s} e^{-A(t_s - p)} f(p) dw_p \right. \tag{4.31}$$

$$\left. - \int_{t_{s-1}}^{t_s} \left[f(t_{s-1}) + (f'(t_{s-1}) + Af(t_{s-1}))(p - t_{s-1}) \right] e^{-\tau A} C^2 dw_p \right)$$

$$P_{4,J} = \Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \left(e^{-(\lambda_j - t_s)A} - B^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s} \right) \tag{4.32}$$

$$\times \int_{t_{s-1}}^{t_s} \left[f(t_{s-1}) + (f'(t_{s-1}) + Af(t_{s-1}))(p - t_{s-1}) \right] e^{-\tau A} dw_p.$$

$$P_{5,J} = \Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}} B^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s} \tag{4.33}$$

$$\times \int_{t_{s-1}}^{t_s} \left[f(t_{s-1}) + (f'(t_{s-1}) + Af(t_{s-1}))(p - t_{s-1}) \right] e^{-\tau A} \left(e^{-\tau A} - C^2 \right) dw_p$$

Şimdi $P_{k,J}$ ya bakalım. Bütün $k = 1, \cdots, 5$ lar için ayrı ayrı ele alalım. $P_{1,J}$ den başlayalım. (1.13) ve (4.28) formüllerini kullanarak şunu elde ederiz,

$$\Upsilon - \Upsilon_\tau = \Upsilon \Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \left(e^{-A\lambda_j} - B^{\frac{\lambda_j}{\tau}} \right). \tag{4.34}$$

(4.34) ve (4.29) formüllerini kullanarak şunu yazabiliriz

$$P_{1,J} = \Upsilon\Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \left(e^{-A\lambda_j} - B^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right) \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J}).$$

$P_{1,J}$ nin beklenen değerenini tahmin edelim. Aşağıdaki ifadeden

$$\left(E\left\|P_{1,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\Upsilon\right\|_{H\to H}\left\|\Upsilon_\tau\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left(E\left\|\sum_{j=1}^{J}\alpha_j A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-A\lambda_j} - B^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right)A^{\frac{3}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(4.22) ifadesini kullanarak şunu elde ederiz

$$\left(E\left\|P_{1,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1(\delta,\lambda_1)\sum_{j=1}^{J}\left|\alpha_j\right|\left\|A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-A\lambda_j} - B^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right)\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left(E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\alpha)\tau^{\frac{3}{2}}\left(E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $P_{2,J}$ yi tahmin edelim. (4.34) ve (4.30) formüllerini kullanarak şunu yazmak mümkün,

$$P_{2,J} = \Upsilon\Upsilon_\tau \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \left(e^{-A\lambda_j} - B^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right)\int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - s)} f(s)dw_s.$$

(1.7) ve (4.22) ifadelerinden hareketle şunu elde ederiz,

$$\left(E\left\|P_{2,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\alpha)\sum_{j=1}^{J}\left|\alpha_j\right|\left\|A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-A\lambda_j} - B^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\right)\right\|_{H\to H}\left(\left\|\int_0^{\lambda_j} e^{-A(\lambda_j - s)}A^{\frac{3}{2}}f(s)dw_s\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\alpha)\tau^{\frac{3}{2}}\sum_{j=1}^{J}\left|\alpha_j\right|\left(\int_0^{\lambda_j}\left\|e^{-A(\lambda_j - s)}\right\|_{H\to H}^2\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_3(\delta,\alpha)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{j=1}^{J}\left|\alpha_j\right|\int_0^{\lambda_j}\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_4(\delta,\alpha)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\int_0^T \left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_5(\delta,\alpha)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\max_{0\leq s\leq T}\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sıradaki $P_{3,J}$ yi tahmin edelim. (4.15) ifadesinin yardımı ile, son formülü, üçgen eşitsizliğini, (1.7) ve (3.4) tahminlerini kullanarak aşağıdaki ifade elde edilir,

$$\left(E\left\|P_{3,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\Upsilon_\tau\right\|_{H\to H}\left(\sum_{j=1}^J|\alpha_j|\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\left\|e^{-(\lambda_j-s\tau)A}\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times\int_{t_{s-1}}^{t_s}\int_{t_{s-1}}^{p}(t_s-\lambda)^2\left\|C^2e^{-A(t_s-\lambda)}\right\|_{H\to H}^2\left\|\left(A^2f(p)+2Af'(p)+Af''(p)\right)\right\|_H^2 dpd\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)$$

$$\left(\sum_{j=1}^J|\alpha_j|\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\int_{t_{s-1}}^{p}(t_s-\lambda)^2\left\|\left(A^2f(p)+2Af'(p)+f''(p)\right)\right\|_H^2 dpd\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\int_0^T\left\|\left(A^2f(p)+2Af'(p)+f''(p)\right)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_3(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^2f(s)\right\|_H^2+\left\|Af'(s)\right\|_H^2+\left\|f''(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sıradaki $P_{4,J}$ yi tahmin edelim. (4.32) formülünü, üçgen eşitsizliğini, (4.25) , (1.7) ve (4.22) tahminlerinden hareketle şu denebilir,

$$\left(E\left\|P_{4,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\Upsilon_\tau\right\|_{H\to H}\left(\sum_{j=1}^J|\alpha_j|\sum_{s=1}^{\frac{\lambda_j}{\tau}}\left\|A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-(\lambda_j-t_s)A}-B^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s}\right)\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|\left(A(p-t_{s-1})+I\right)e^{-\tau A}\right\|_{H\to H}^2\left\|\left(A^{\frac{3}{2}}f(t_{s-1})+A^{\frac{3}{2}}f'(t_{s-1})\right)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{s=1}^{k-1}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|\left(A^{\frac{3}{2}}f(t_{s-1})+A^{\frac{3}{2}}f'(t_{s-1})\right)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}} \max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s-1)\right\|_H^2+\left\|A^{\frac{3}{2}}f'(s-1)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Son olarak $P_{5,J}$ yı tahmin edelim. (4.33) formülünü, üçgen eşitsizliğini, (4.25) , (4.21) ve (4.23) tahminlerinden istifade ile aşağıdaki,

$$\left(\|P_{5,k}\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{s=1}^{k}\left\|A^{-\frac{3}{2}}B^{\frac{\lambda_j}{\tau}-s}\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\times\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|\left(A(p-t_{s-1})+I\right)A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-\tau A}-C^2\right)\right\|_{H\to H}^2$$

$$\left.\times\left\|\left(A^{\frac{3}{2}}f(t_{s-1})+A^{\frac{3}{2}}f'(t_{s-1})\right)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{s=1}^{k}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|\left(A^{\frac{3}{2}}f(t_{s-1})+A^{\frac{3}{2}}f'(t_{s-1})\right)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}} \max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s-1)\right\|_H^2+\left\|A^{\frac{3}{2}}f'(s-1)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

$P_{k,J}$, $k=1,\cdots,5$ i kullanarak aşağıdaki tahmini elde ederiz

$$\left(E\left\|v(t_0)-u_0\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C_4(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}. \tag{4.35}$$

teorem 4.4 in ispati için aşağıdaki tahmini elde etmek yeterlidir

$$\max_{1\leq k\leq N}\left(E\left\|v(t_k)-u_k\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\ . \tag{4.36}$$

(1.13) ve (4.22) formüllerini kullanarak,

$$v(t_k)-u_k=e^{-k\tau A}v(0)+\sum_{s=1}^{k}e^{-(k-s)\tau A}\int_{t_{s-1}}^{t_s}e^{-A(t_s-p)}f(p)dw_p$$

$$-B^k u_0-\sum_{s=1}^{k}B^{k-s}\left(\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left(I+A(p-t_{s-1})\right)C^2f(p)dw_p\right)$$

$$=D_{1,k}+D_{2,k}+D_{3,k}+D_{4,k}+D_{5,k},$$

şeklinde yazabiliriz,

öyleki,

$$D_{1,k}=(e^{-k\tau A}-R^k)\Upsilon\left\{\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\int_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}f(s)dw_s+\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\},$$

$$D_{2,k}=B^k(v(0)-u_0),$$
$$D_{3,k}=\sum_{s=1}^{k}e^{-(k-s)\tau A}$$
$$\times\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\left[e^{-A(t_s-p)}f(p)-f(t_{s-1})-(f'(t_{s-1})+Af(t_{s-1}))(p-t_{s-1})e^{-\tau A}\right]dw_p,$$
$$D_{4,k}=\sum_{s=1}^{k-1}\left(e^{-(k-s)\tau A}-B^{k-s}\right)$$
$$\times\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\left[e^{-A(t_s-p)}f(p)-f(t_{s-1})-(f'(t_{s-1})+Af(t_{s-1}))(p-t_{s-1})e^{-\tau A}\right]dw_p,$$
$$D_{5,k}=\sum_{s=1}^{k}R^{k-s}\left(e^{-\tau A}-C^2\right)$$
$$\times\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\left[e^{-A(t_s-p)}f(p)-f(t_{s-1})-(f'(t_{s-1})+Af(t_{s-1}))(p-t_{s-1})e^{-\tau A}\right]dw_p,$$
elde edilir.

Bütün $m=1,\cdots,5$ ler için ayrı ayrı $D_{m,k}$ yı tahmin edelim. $D_{1,k}$ ile başlıyalım. üçgen eşitsizliğini, önceki sonuçlar (4.21), (4.22) ve (4.21) ı kullanarak, şöyle yazabiliriz,

$$\left(E\left\|D_{1,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq\left(\left\|(e^{-k\tau A}-B^k)A^{-\frac{3}{2}}\right\|_{H\to H}^2\right.$$
$$\left.\times\, E\left\|\Upsilon\left\{\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\int\limits_0^{\lambda_j}Ae^{-A(\lambda_j-s)}f(s)dw_s+A\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\left\|\Upsilon\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\int\limits_0^{\lambda_j}e^{-A(\lambda_j-s)}Af(s)dw_s+A\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left\|\Upsilon\right\|_{H\to H}$$
$$\left(\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|\int\limits_0^{\lambda_j}\left\|e^{-A(\lambda_j-s)}\right\|_{H\to H}^2\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2ds+E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J})\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq C_3(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\int\limits_0^{T}\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2ds+E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_4(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\left(\int\limits_0^T \left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2 ds + E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi\right\|_H^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_3(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\left(\max_{0\leq s\leq T}\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s)\right\|_H^2\right) + E\left\|A^{\frac{3}{2}}\varphi\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şimdi $D_{2,k}$ i tahmin edelim. (4.22) formülünü kullanırsak,

$$\left(E\left\|D_{2,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\left\|R^k\right\|_{H\to H}^2 E\left\|v(0)-u_0\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(E\left\|v(0)-u_0\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

(4.35) ifadesinin yardımıyla,

$$\left(E\left\|D_{2,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}},$$

formülünü yazabiliriz.

Şimdi $D_{3,k}$ yı tahmin edelim. (4.15) formülünü kullanarak,

$$D_{3,k} = \sum_{s=1}^{k} e^{-(k-s)\tau A}\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\int\limits_{t_{s-1}}^{p}(p-\lambda)\left(A^2 f(\lambda)+2Af'(\lambda)+f''(\lambda)\right)e^{-A(t_s-\lambda)}d\lambda dw_p,$$

şeklinde yazabiliriz.

Son formülü kullanarak ve (1.7) ifadesinden istifadeyle,

$$\left(\left\|D_{3,J}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{s=1}^{k}\left\|e^{-(\lambda_j-s\tau)A}\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\int\limits_{t_{s-1}}^{p}(t_s-\lambda)^2\left\|e^{-A(t_s-\lambda)}\right\|_{H\to H}^2\left\|\left(A^2f(p)+2Af'(p)+f''(p)\right)\right\|_H^2 dpd\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\left(\sum_{s=1}^{k}\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\int\limits_{t_{s-1}}^{p}(t_s-\lambda)^2\left\|\left(A^2f(p)+2Af'(p)+f''(p)\right)\right\|_H^2 dpd\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\int\limits_0^T\left\|\left(A^2f(p)+2Af'(p)+Af''(p)\right)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_3(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^2f(s)\right\|_H^2+\left\|Af'(s)\right\|_H^2+\left\|f''(s)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

Sıradaki $D_{4,J}$ yı tahmin edelim. Üçgen eşitsizliğinden, (3.1) , (1.7) ve (3.2) tahminlerinden istifade ile,

$$\left(E\left\|D_{4,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{s=1}^{k-1}\left\|A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-(k-s)\tau A}-B^{k-s}\right)\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|\left(A(p-t_{s-1})+I\right)e^{-\tau A}\right\|_{H\to H}^2\left\|\left(A^{\frac{3}{2}}f(t_{s-1})+A^{\frac{3}{2}}f'(t_{s-1})\right)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{s=1}^{k-1}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|\left(A^{\frac{3}{2}}f(t_{s-1})+A^{\frac{3}{2}}f'(t_{s-1})\right)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s-1)\right\|_H^2+\left\|A^{\frac{3}{2}}f'(s-1)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

Son olarak $D_{5,k}$ yı tahmin edelim. Üçgen eşitsizliğinden, (3.1) ve (3.2) tahminlerinden istifade ile aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

$$\left(E\left\|D_{5,k}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{s=1}^{k}\left\|A^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-\tau A}-C^2\right)\right\|_{H\to H}^2\right.$$

$$\left.\times\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|\left(A(p-t_{s-1})+I\right)B^{k-s}\right\|_{H\to H}^2\left\|\left(A^{\frac{3}{2}}f(t_{s-1})+A^{\frac{3}{2}}f'(t_{s-1})\right)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{s=1}^{k}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\|\left(A^{\frac{3}{2}}f(t_{s-1})+A^{\frac{3}{2}}f'(t_{s-1})\right)\right\|_H^2 dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1(\delta,\lambda_1)\tau^{\frac{3}{2}}\max_{0\leq s\leq T}\left(\left\|A^{\frac{3}{2}}f(s-1)\right\|_H^2+\left\|A^{\frac{3}{2}}f'(s-1)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$D_{1,k}$, $D_{2,k}$, $D_{3,k}$, $D_{4,k}$ ve $D_{5,k}$ leri birleştirirsek, (3.33) elde edilir. Teorem 4.4 ispatlanmıştır.

Şimdi teorem 4.4 ün uygulamasına bir göz atalım. İlk olarak, bir boyutlu yerel olmayan stokastik parabolik denklem için sınır değer problemine bakalım. Problem (2.20) nın diskritizasyonu benzer şekilde iki aşamalıdır. İlki bir önceki gibi. İkinci aşamada, (2.22) bunu (4.26) fark şeması ile yer değiştirirsek,

$$
\begin{cases}
u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x) + \left(\tau A_h^x + \frac{\left(\tau A_h^x\right)^2}{4}\right) u_k^h(x) + \frac{\left(\tau A_h^x\right)^2}{4} u_{k-1}^h(x) = \varphi_k^h(x), \\
\varphi_k^h(x,k) = f^h(t_{k-1},x)\Delta w_{t_k} \\
+ \left(\frac{\left(f^h(t_k,x) - f^h(t_{k-1},x\right)}{\tau} + A_h^x f^h(t_{k-1},x)\right) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (p - t_{k-1}) dw_p, \ t_k = k\tau \\
\ 1 \leq k \leq N, \ x \in [0,1]_h, \\
u_0^h(x) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\frac{\lambda_j}{\tau}}^h(x) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J},x), x \in [0,1]_h,
\end{cases} \tag{4.37}
$$

elde edilir.

Teorem 4.5. *τ ve h yeterince küçük keyfi sayılar olsun. Sonra, (4.37) fark şemasının çözümü aşağıdaki tahminin yakınsamasını sağlar,*

$$
\max_{0 \leq k \leq N} \left(E \left\| v^h(t_k) - u_k^h \right\|_{L_{2h}}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta, \lambda_1) \left(\tau^{\frac{3}{2}} + h\right), \tag{4.38}
$$

öyleki $C(\delta, \lambda_1)$ τ ve h den bağımsızdır.

Teorem 4.5 in ispatı Teorem 4.4 in soyut formu temel alınarak ve A_h^x (2.21) de tanımlı fark şemaları operatörlerinin simetri özelliğinden istifade ile yapılır.

İkici olarak, çoknoktalı yerel olmayan parabolik sınır değer problemini (2.25) ele alalım. (4.37) nun diskritizasyonu önce yapılanlar gibi. İkinci aşamada, (2.27) yi (4.26) ile yer değiştirirsek,

$$
\begin{cases}
u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x) + \left(\tau A_h^x + \frac{\left(\tau A_h^x\right)^2}{4}\right) u_k^h(x) + \frac{\left(\tau A_h^x\right)^2}{4} u_{k-1}^h(x) = \varphi_k^h(x), \\
\varphi_k^h(x,k) = f^h(t_{k-1},x)\Delta w_{t_k} \\
+ \left(\frac{\left(f^h(t_k,x) - f^h(t_{k-1},x\right)}{\tau} + A_h^x f^h(t_{k-1},x)\right) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (p - t_{k-1}) dw_p, \ t_k = k\tau \\
\ 1 \leq k \leq N, \ x \in \Omega_h, \\
u_0^h(x) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\frac{\lambda_j}{\tau}}^h(x) + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,}w_{\lambda_J},x), x \in \widetilde{\Omega}_h,
\end{cases} \tag{4.39}
$$

elde edilir.

Teorem 4.6. *τ ve h yeterince küçük keyfi sayılar olsun, sonra, (4.39) fark şemasının çözümü aşağıdaki tahminin yakınsamasını sağlar,*

$$\max_{0\leq k\leq N}\left(E\left\|v^h(t_k)-u_k^h\right\|_{L_{2h}}^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C(\delta,\alpha)\left(\tau^{\frac{3}{2}}+|h|^2\right),$$

öyleki $C(\delta, \lambda_1)$ τ ve $|h|$ den bağımsızdır.

Teorem 4.6 in ispatı Teorem 4.4 in soyut formu temel alınarak ve A_h^x (2.21) de tanımlı fark şemaları operatörlerinin simetri özelliğinden istifade ile yapılır.

SAYISAL SONUÇLAR

Şimdi yerel olmayan sınır değer problemi için sayısal uygulama yapacağız.

$$\begin{cases} dv - v_{xx}dt = e^{-t}\sin x dw_t, \ 0 < t < 1, \quad 0 < x < \pi, \\ v(0,x,0\ ) = v(1,x,w_1\ ) + \sin x - e^{-1}\sin x w_1 - e^{-1}\sin x, \quad 0 \le x \le \pi, \\ v(t,0,w_t) = v(t,\pi,w_t\ ) = 0, \quad 0 \le t \le 1, \\ w_t = \sqrt{t}\xi, \quad \xi \in N(0,1), \quad 0 \le t \le 1 \end{cases} \tag{5.1}$$

Bir boyutlu stokastik parabolik denklemi (5.1) nin düzgün ağ uzayında sayısal çözümüne bir göz atalım.

$$\begin{aligned} [0,1]_\tau \times [0,\pi]_h &= \{(t_k, x_n) : t_k = k\tau, \ 0 \le k \le N, \quad N\tau = 1, \\ x_n &= nh, \ 0 \le n \le M, \quad Mh = \pi\}. \end{aligned}$$

İlk önce şunu hatırlayalım, yerel olmayan sınır değer problemi (5.1) için fark şeması t de $1/2-$inci mertebeden x de ise ikinci mertebeden yakınsaktır ve problem şudur,

$$\begin{cases} u_n^k - u_n^{k-1} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2}\tau = f(t_k, x_n)\tau(\sqrt{k\tau} - \sqrt{(k-1)\tau})\ \xi, \\ f(t_k, x_n) = e^{-t_k}\sin x_n, 1 \le k \le N-1, \ 1 \le n \le M-1, \\ u_0^k = u_M^k = 0, \ 0 \le k \le N, \\ u_n^0 = u_n^N + \sin x_n - e^{-1}\sin x_n w_1 - e^{-1}\sin x_n, \ 0 \le n \le M. \end{cases} \tag{5.2}$$

Böylece, $(N+1)\times(M+1)$ tane lineer denklemler sistemi vardır. Bunu matris formda yazalım,

$$\begin{cases} A\ u_{n+1} + B\ u_n + C\ u_{n-1} = D\varphi_n, \quad 1 \le n \le M-1, \\ U_0 = \overrightarrow{0}, \ U_M = \overrightarrow{0}. \end{cases} \tag{5.3}$$

Burada $\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \varphi_n^2 \\ .. \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1}$, $\overrightarrow{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1}$,

$\varphi_n^0 = 0,\ 1 \leq n \leq M, \varphi_n^k = f(t_k, x_n)\tau(\sqrt{k\tau} - \sqrt{(k-1)\tau})\ \xi,\ 1 \leq k \leq N,\ 1 \leq n \leq M,$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .. & ... & ... & ... & ... & .. & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & -1 \\ b & c & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .. & ... & ... & ... & ... & .. & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & b & c \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},$$

$a = \left(-\frac{\tau}{h^2}\right), b = (-1), c = \left(1 + \frac{2\tau}{h^2}\right)$ ve $C = A$,

$$D=\begin{bmatrix}1&0&0&...&0&0\\0&1&0&...&0&0\\0&0&1&...&0&0\\..&...&...&...&...&...\\0&0&0&...&1&0\\0&0&0&...&0&0\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},u_s=\begin{bmatrix}u_s^0\\u_s^1\\u_s^2\\u_s^3\\..\\u_s^{N-1}\\u_s^N\end{bmatrix}_{(N+1)\times(1)}, \quad s=n-1,\ n,\ n+1.$$

Son matris denkleminin çözümünde düzeltilmiş Gauss eleme metodu kullanılmıştır. Aşağıdaki form dan istifadeyle matris denklemine çözüm arayacağız.

$$u_n=\alpha_{n+1}u_{n+1}+\beta_{n+1},\quad n=M-1,\cdots,1,u_M=\overrightarrow{0}=[0]_{(N+1)\times 1}, \tag{5.4}$$

α_j , lar $(N+1)\times(N+1)$ kare matrisleri ve β_j, ler $(N+1)\times 1$ sütun matrisleri ve $(j=1,...,M-1)$ aşağıdaki gibi tanımlı,

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1}&=-\left(B+C\alpha_n\right)^{-1}A,\\ \beta_{n+1}&=\left(B+C\alpha_n\right)^{-1}\left(D\varphi_n-C\beta_n\right),n=1,\cdots,M-1.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Burada $\alpha_1=\begin{bmatrix}0&0&0&...&0\\0&0&0&...&0\\0&0&0&...&0\\..&...&...&...&...\\0&0&0&...&0\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},\beta_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \\ \\0\end{bmatrix}_{(N+1)\times 1}.$

Son olarak 0 beklenen değer ve 1 varyanslı 1000 rastgele sayı oluşturalım. ξ=[y_1,y_2,.....,y_{1000}]^T : ve $\xi_j=y_j$ j:1 to 1000 olsun.

Tam ve tahmini çözümlerin ağ noktalarında farklar karesinin beklenen değeri şöyledir;

1. Tablo Hata Analizi

N/M	10/30	20/60	30/90	40/120	50/150
Fark Şeması(5.2)	0.0929	0.0401	0.0355	0.0187	0.0175

İkinci olarak, yerel olmayan sınır değer problemi (5.1) için fark şeması t de $3/2-$inci mertebeden x de ise ikinci mertebeden yakınsakdır ve problem şu dur,

$$\begin{cases} u_n^k - u_n^{k-1} - \left(\tau \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + \tau^2 \frac{u_{n+2}^k - 4u_{n+1}^k + 6u_n^k - 4u_{n-1}^k + u_{n-2}^k}{2h^4}\right) \\ = f(t_{k-1}, x_n)\Delta w_{t_k} \\ +(-f_{xx}(t_{k-1}, x_n) + f'(t_{k-1}, x_n))_{t_{k-1}}^{t_k}(s - t_{k-1})dw_s + \frac{\tau}{2} f(t_{k-1}, x_n\ ), \\ f(t,x) = e^{-t}\sin x,\ \Delta w_{t_k} = (\sqrt{k\tau} - \sqrt{(k-1)\tau})\ \xi, \\ 1 \le k \le N,\ 2 \le n \le M-2, \\ u_0^k = u_M^k = 0,\ 0 \le k \le N, \\ u_1^k = \frac{4}{5}u_2^k - \frac{1}{5}u_3^k,\ \ 0 \le k \le N, \\ u_{M-1}^k = \frac{4}{5}u_{M-2}^k - \frac{1}{5}u_{M-3}^k,\ \ 0 \le k \le N, \\ u_n^0 - u_n^N = \sin x_n - e^{-1}\sin x_n w_1 - e^{-1}\sin x_n,\ 0 \le n \le M. \end{cases} \quad . \tag{5.6}$$

Böylece, elimizde $(N+1) \times (M+1)$ lineer denklemler sistemi var.

$$\begin{cases} \frac{\tau}{2h^4}u_{n+2}^k + \left[-\frac{1}{h^2} - 4\frac{\tau}{2h^4}\right]u_{n+1}^k \\ +(\frac{-1}{\tau})u_n^{k-1} + \left[\frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + \frac{3\tau}{h^4}\right]u_n^k \\ + \left[-\frac{1}{h^2} - 4\frac{\tau}{2h^4}\right]u_{n-1}^k + \frac{\tau}{2h^4}u_{n-2}^k \\ = \varphi_n^k,\ 0 \le k \le N,\ 2 \le n \le M-2, \\ u_0^k = u_M^k = 0,\ 0 \le k \le N, \\ u_1^k = \frac{4}{5}u_2^k - \frac{1}{5}u_3^k,\ \ 0 \le k \le N, \\ u_{M-1}^k = \frac{4}{5}u_{M-2}^k - \frac{1}{5}u_{M-3}^k,\ \ 0 \le k \le N, \\ u_n^0 - u_n^N = \sin x_n - e^{-1}\sin x_n w_1 - e^{-1}\sin x_n,\ 0 \le n \le M, \end{cases}$$

öyleki,

$$\begin{cases} \varphi_n^0 = 0,\ 1 \leq n \leq M, \\ \varphi_n^k = f(t_{k-1}, x_n)\Delta w_{t_k} + (-f_{xx}(t_{k-1}, x_n) \\ +f'(t_{k-1}, x_n))_{t_{k-1}}^{t_k}(s - t_{k-1})dw_s + \frac{\tau}{2}f(t_{k-1}, x_n\ ), \\ 1 \leq k \leq N,\ 2 \leq n \leq M-2. \end{cases}$$

Bunu matris formda yazacağız

$$\begin{cases} A\ u_{n+2} + B\ u_{n+1} + C\ u_n + Du_{n-1} + Eu_{n-2} = R\varphi_n, \\ u_0 = u_M = \overrightarrow{0},\ u_1 = \frac{4}{5}u_2 - \frac{1}{5}u_3, \\ u_{M-1} = \frac{4}{5}u_{M-2} - \frac{1}{5}u_{M-3}, \quad 2 \leq n \leq M-2, \end{cases}$$

öyleki

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \varphi_n^2 \\ .. \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1} .$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & ... & 0 & 0 \\ & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & x \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} ,$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & ... & 0 & 0 \\ & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & y \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & -1 \\ p & z & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & p & z & ... & 0 & 0 \\ & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & p & z \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

ve $D=B,\quad E=A,$

$$p=-1,\ x=\frac{\tau^2}{2h^4},\ y=-\frac{\tau}{h^2}-\frac{2\tau^2}{h^4}, z=[1+\frac{2\tau}{h^2}+\frac{3\tau^2}{h^4}],$$

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} ,$$

$$u_s=\begin{bmatrix} u_s^0 \\ u_s^1 \\ u_s^2 \\ u_s^3 \\ .. \\ u_s^{N-1} \\ u_s^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times(1)} ,\quad \text{öyleki } s=n-2,n-1,n,n+1,n+2.$$

Son matris denkleminin çözümünde düzeltilmiş Gauss eleme metodu kullanılmıştır. Aşağıdaki form dan istifadeyle matris denklemine çözüm arayacağız.

$$\begin{cases} u_n=\alpha_{n+1}u_{n+1}+\beta_{n+1}u_{n+2}+\gamma_{n+1}, \quad n=M-2,\cdots,1,0, \\ u_M=\overrightarrow{0}, \\ u_{M-1}=[(\beta_{M-2}+5I)-(4I-\alpha_{M-2})\alpha_{M-1}]^{-1} \\ \times[(4I-\alpha_{M-2})\gamma_{M-1}-\gamma_{M-2}]. \end{cases}$$

Burada α_j , β_j, $(j = 1 : M - 1)$ lar $(N+1) \times (N+1)$ kare matrisleri ve γ_j-s ler $(N+1) \times 1$ sütun matrisleridir.

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} , \quad \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} ,$$

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(1)} , \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(1)} ,$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & ... & 0 \\ & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & \frac{4}{5} \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} , \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & ... & 0 \\ & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} .$$

Son olarak 0 beklenen değer ve 1 varyanslı 1000 rastgele sayı oluşturalım.

ξ=[y_1,y_2,.....,y_{1000}]^T : ve $\xi_j = y_j$ j:1 to 1000 olsun.

Tam ve tahmini çözümlerin ağ noktalarında farklar karesinin beklenen değeri şöyledir;

2. Tablo Hata analizi

N/M	10/30	20/60	30/90	40/120	50/150
Fark Şeması(5.6)	0.0072	0.0057	0.0043	0.0037	0.0030

Üçüncü olarak , yerel olmayan sınır değer problemi (5.1) için Crank-Nicholson fark şeması t de $3/2-$ inci x de ikinci mertebeden yakınsakdır ve problem şu dur,

$$\left\{\begin{array}{l} u_n^k - u_n^{k-1} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + \tau^2 \frac{u_{n+2}^k - 4u_{n+1}^k + 6u_n^k - 4u_{n-1}^k + u_{n-2}^k}{4h^4} \\ +\tau^2 \frac{u_{n+2}^{k-1} - 4u_{n+1}^{k-1} + 6u_n^{k-1} - 4u_{n-1}^{k-1} + u_{n-2}^{k-1}}{4h^4} \\ = f(t_{k-1}, x_n)\Delta w_{t_k} \\ +(-f_{xx}(t_{k-1}, x_n) + f'(t_{k-1}, x_n))_{t_{k-1}}^{t_k}(s - t_{k-1})dw_s + \frac{\tau}{2} f(t_{k-1}, x_n\ ), \\ f(t,x) = e^{-t}\sin x,\ \Delta w_{t_k} = (\sqrt{k\tau} - \sqrt{(k-1)\tau})\ \xi, \\ 1 \le k \le N,\ 2 \le n \le M-2, \\ u_0^k = u_M^k = 0,\ 0 \le k \le N, \\ u_1^k = \frac{4}{5}u_2^k - \frac{1}{5}u_3^k,\ \ 0 \le k \le N, \\ u_{M-1}^k = \frac{4}{5}u_{M-2}^k - \frac{1}{5}u_{M-3}^k,\ \ 0 \le k \le N, \\ u_n^0 - u_n^N = \sin x_n - e^{-1}\sin x_n w_1 - e^{-1}\sin x_n,\ 0 \le n \le M. \end{array}\right. \tag{5.7}$$

Böylece, elimizde $(N+1)\times(M+1)$ lineer denklemler sistemi var.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\tau^2}{4h^4}u_{n+2}^k + \frac{\tau^2}{4h^4}u_{n+2}^{k-1} + \left[-\frac{1}{h^2} - \frac{\tau^2}{h^4}\right]u_{n+1}^k \\ + \left[\frac{\tau^2}{h^4}\right]u_{n+1}^{k-1} + \left[-1 + \frac{3\tau^2}{2h^4}\right]u_n^{k-1} + \left[1 + \frac{3\tau^2}{2h^4}\right]u_n^k \\ + \left[-\frac{1}{h^2} - \frac{\tau^2}{h^4}\right]u_{n-1}^k + \left[-\frac{\tau^2}{h^4}\right]u_{n-1}^k \\ + \frac{\tau}{4h^4}u_{n-2}^k + \frac{\tau}{4h^4}u_{n-2}^{k-1} = \varphi_n^k,\ 1 \le k \le N,\ 2 \le n \le M-2, \\ u_0^k = u_M^k = 0,\ 0 \le k \le N, \\ u_1^k = \frac{4}{5}u_2^k - \frac{1}{5}u_3^k,\ \ 0 \le k \le N, \\ u_{M-1}^k = \frac{4}{5}u_{M-2}^k - \frac{1}{5}u_{M-3}^k,\ \ 0 \le k \le N, \\ u_n^0 - u_n^N = \sin x_n - e^{-1}\sin x_n w_1 - e^{-1}\sin x_n,\ 0 \le n \le M, \end{array}\right.$$

öyleki,

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_n^0 = 0,\ 1 \le n \le M, \\ \varphi_n^k = f(t_{k-1}, x_n)\Delta w_{t_k} + (-f_{xx}(t_{k-1}, x_n) \\ +f'(t_{k-1}, x_n))_{t_{k-1}}^{t_k}(s - t_{k-1})dw_s + \frac{\tau}{2} f(t_{k-1}, x_n\ ), \\ \ 1 \le k \le N,\ 2 \le n \le M-2. \end{array}\right.$$

Bunu matris formda yazacağız.

$$\begin{cases} A\,u_{n+2} + B\,u_{n+1} + C\,u_n + Du_{n-1} + Eu_{n-2} = R\varphi_n, \quad 2 \leq n \leq M-2, \\ u_0 = u_M = \overrightarrow{0},\ u_1 = \frac{4}{5}u_2 - \frac{1}{5}u_3, \\ u_{M-1} = \frac{4}{5}u_{M-2} - \frac{1}{5}u_{M-3}, \end{cases}$$

öyleki,

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \varphi_n^2 \\ .. \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1} .$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ x & x & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & x & x & ... & 0 & 0 \\ & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & x & x \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} ,$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ t & y & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & t & y & ... & 0 & 0 \\ & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & t & y \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & -1 \\ p & z & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & p & z & ... & 0 & 0 \\ & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & p & z \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

ve $D = B, \quad E = A,$

$$\begin{aligned} p &= -1 + \frac{3\tau^2}{2h^4},\ x = \frac{\tau^2}{4h^4},\ y = -\frac{1}{h^2} - \frac{\tau^2}{h^4}, \\ t &= -\frac{\tau^2}{h^4},\ z = [1 + \frac{2}{h^2} + \frac{3\tau^2}{2h^4}], \end{aligned}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},$$

$$u_s = \begin{bmatrix} u_s^0 \\ u_s^1 \\ u_s^2 \\ u_s^3 \\ .. \\ u_s^{N-1} \\ u_s^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times(1)}, \quad \text{öyleki } s = n-2, n-1, n, n+1, n+2.$$

Son matris denkleminin çözümünde düzeltilmiş Gauss eleme metodu kullanılmıştır. Aşağıdaki form dan istifadeyle matris denklemine çözüm arayacağız.

$$\begin{cases} u_n = \alpha_{n+1}u_{n+1} + \beta_{n+1}u_{n+2} + \gamma_{n+1}, \quad n = M-2, \cdots, 1, 0, \\ u_M = \overrightarrow{0}, \quad u_{M-1} = [(\beta_{M-2} + 5I) - (4I - \alpha_{M-2})\alpha_{M-1}]^{-1} \\ \times[(4I - \alpha_{M-2})\gamma_{M-1} - \gamma_{M-2}]. \end{cases}$$

Burada α_j , β_j, $(j = 1 : M-1)$ lar $(N+1) \times (N+1)$ kare matrisleri ve γ_j-s are $(N+1) \times 1$ sütun matrisleridir.

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} , \quad \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} ,$$

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(1)} , \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(1)} ,$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & ... & 0 \\ & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & \frac{4}{5} \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} , \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & ... & 0 \\ & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} .$$

Son olarak 0 beklenen değer ve 1 varyanslı 1000 rastgele sayı oluşturalım.

ξ=[y_1,y_2,.....,y_{1000}]^T : ve $\xi_j = y_j$ j:1 to 1000 olsun.

Tam ve tahmini çözümlerin ağ noktalarında farklar karesinin beklenen değeri şöyledir;

3. Tablo Hata analizi

N/M	10/30	20/60	30/90	40/120	50/150
Fark Şeması(6.7)	0.0117	0.0063	0.0053	0.0031	0.0029

SONUÇLAR

Bu tez yerel olmayan stokastik parabolik sınır değer denklemlerine fark şemaları araştırmak için yazılmıştır. Orjinal sonuçları aşağıda kısaca tekrarlayalım.

- $1/2-$inci mertebeden yakınsak Rothe fark şeması

$$\begin{cases} u_k - u_{k-1} + \tau A u_k = \varphi_k, \varphi_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(s) dw_s, \ t_k = k\tau, 1 \le k \le N, \\ u_0 = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}) \end{cases}$$

Problem (1.6) in yaklaşık çözümü için standard wiener prosesli olanı incelenmiştir. Fark şemasının tahmini çözümünün yakınsaması ispat edildi. Uygulama olarak, yerel olmayan iki çoknoktalı stokastik parabolik sınır değer denkleminin sayısal çözüm fark şemasının yakınsama tahmini elde edildi.

- $1/2-$inci mertebeden yakınsak Rothe fark şeması

$$\begin{cases} u_k - u_{k-1} + \tau A u_k = f(t_{k-1})(w_{t_k} - w_{t_{k-1}}), \ t_k = k\tau, 1 \le k \le N, \\ u_0 = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}) \end{cases}$$

Problem (1.6) in yaklaşık çözümü için standard wiener procesiz olanı incelenmiştir. Fark şemasının tahmini çözümünün yakınsaması ispat edildi. Uygulama olarak, yerel olmayan iki çoknoktalı stokastik parabolik sınır değer denkleminin çözüm fark şemasının yakınsama tahmini elde edildi.

- $3/2-$inci mertebeden yakınsak kapalı fark şeması

$$\begin{cases} u_k - u_{k-1} + \left(\tau A + \frac{(\tau A)^2}{2}\right) u_k = \varphi_k, \ t_k = k\tau, 1 \le k \le N, \\ \varphi_k =_{t_{k-1}}^{t_k} f(p) dw_p + A \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (p - t_{k-1}) f(p) dw_p, \\ u_0 = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\frac{\lambda_j}{\tau}} + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}) \end{cases}$$

Problem (1.6) in yaklaşık çözümü için standard wiener prosesli olanı incelenmiştir. Fark şemasının tahmini çözümünün yakınsaması ispat edildi. Uygulama olarak, yerel olmayan iki çoknoktalı stokastik parabolik sınır değer denkleminin çözüm fark şemasının yakınsama tahmini elde edildi.

- 3/2−inci mertebeden yakınsak kapalı fark şeması

$$\begin{cases} u_k - u_{k-1} + \left(\tau A + \frac{(\tau A)^2}{2}\right) u_k = \varphi_k, \ 1 \le k \le N, \\ \varphi_k = f(t_{k-1})\Delta w_{t_k} + (f'(t_{k-1}) + Af(t_{k-1})) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (s - t_{k-1}) dw_s, \\ \Delta w_{t_k} = w_{t_k} - w_{t_{k-1}}, 1 \le k \le N, \\ u_0 = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}) \end{cases}$$

Problem (1.6) in yaklaşık çözümü için standard wiener prosessiz olanı incelenmiştir. Fark şemasının tahmini çözümünün yakınsaması ispat edildi. Uygulama olarak, yerel olmayan iki çoknoktalı stokastik parabolik sınır değer denkleminin çözüm fark şemasının yakınsama tahmini elde edildi.

- 3/2−inci mertebeden yakınsak Crank-Nicholson fark şeması

$$\begin{cases} u_k - u_{k-1} + \left(\tau A + \frac{(\tau A)^2}{4}\right) u_k + \frac{(\tau A)^2}{4} u_{k-1} = \varphi_k, \\ \varphi_k =_{t_{k-1}}^{t_k} f(p) dw_p + A \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (p - t_{k-1}) f(p) dw_p, \\ u_0 = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\frac{\lambda_j}{\tau}} + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}) \end{cases}$$

Problem (1.6) in yaklaşık çözümü için standard wiener prosesli olanı incelenmiştir. Fark şemasının tahmini çözümünün yakınsaması ispat edildi. Uygulama olarak, yerel olmayan iki çoknoktalı stokastik parabolik sınır değer denkleminin çözüm fark şemasının yakınsama tahmini elde edildi.

- 3/2−inci mertebeden yakınsak Crank-Nicholson fark şeması

$$\begin{cases} u_k - u_{k-1} + \left(\tau A + \frac{(\tau A)^2}{4}\right) u_k + \frac{(\tau A)^2}{4} u_{k-1} = \varphi_k, \\ \varphi_k = f(t_{k-1})\Delta w_{t_k} + (f'(t_{k-1}) + Af(t_{k-1})) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (s - t_{k-1}) dw_s, \\ u_0 = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u_{\frac{\lambda_j}{\tau}} + \varphi(w_{\lambda_1,\cdots,} w_{\lambda_J}) \end{cases}$$

Problem (1.6) in yaklaşık çözümü için standard wiener prosessiz olanı incelenmiştir. Fark şemasının tahmini çözümünün yakınsaması ispat edildi. Uygulama olarak, yerel olmayan iki çoknoktalı stokastik parabolik sınır değer denkleminin çözüm fark şemasının yakınsama tahmini elde edildi.

- Bir boyutlu parabolik denklemlerin çözümleri için oluşturlulan fark şemalarının teori kısmı sayısal uygulamalarla desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] A. Ashyralyev, and I. Hasgur, *Linear Stochastic Differential Equations in a Hilbert Space*, in: Abs. of Statistic Conference-95, Ankara, Turkey, 1999, pp. 1–6

[2] R. F. Curtain, and P. L. Falb, *Stochastic Differential Equations in Hilbert Spaces*, J. of Differential Equations,**10**(1971), 412-430.

[3] G. Da Prato, Regularity Properties of a Stochastic Convolution Integral, *Analisi Matematica*, 217–219 (1982).

[4] G. Da Prato, and J. Zabczyk, Stochastic Equations in Infinite Dimensions, in: *Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 44*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[5] A. Ashyralyev, and G. Michaletsky, in: *Trudy Nauchno-Prakticheskoy Konferencii Differencialniye Uravneniya i ih Prilozheniya 1*, Ashgabat, 1993, pp. 85-95.

[6] E. J. Allen, S. J. Novosel, and Z. Zhang, Finite Element and Difference Approximation of Some Linear Stochastic Partial Differential Equations, *Stochastics and Stochastic Reports* **64**, 117–142 (1998).

[7] E. Hausenblas, Numerical Analysis of Semi-linear Stochastic Evolution Equations in Banach Spaces, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **147**(2), 485–516 (2002).

[8] A. Yurtsever, and A. Yazliyev, High Order Accuracy Difference Scheme for Stochastic Parabolic Equation in a Hilbert Space, in: *Some Problems of Applied Mathematics*, edited by A. Ashyralyev, and H. A. Yurtsever, Fatih University, Istanbul, Turkey, 2000, pp. 212–220.

[9] T. Shardlow, Numerical Methods for Stochastic Parabolic PDEs, *Numer. Funct. Anal. Optim.* **20**, 121–145 (1999).

[10] A. Ashyralyev, On Modified Crank-Nicholson Difference Schemes for Stochastic Parabolic Equation, *Numer. Funct. Anal. Optim.* **29**(3-4), 268–282 (2008).

[11] L. Han, L. G. Han, X. B. Gong, et al., Implicit Finite-Difference Plane Wave Migration in TTI Media, *Chinese Journal of Geophysics-Chinese Edition* **54**(4), 1090–1097 (2011).

[12] A. Jentzen, Higher Order Pathwise Numerical Approximations of OF SPDEs with Additive Noise, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **49**(2), 642–667 (2011).

[13] A. Jentzen, and P. E. Kloeden, The Numerical Approximation of Stochastic Partial Differential Equations, *Milan Journal of Mathematics* **77**(1), 205–244 (2009).

[14] A. Ashyralyev, Estimation of The Convergence of Modified Crank-Nicholson Difference Schemes for Parabolic Equations with Nonsmooth Imput Data, *Izv. Akad. Nauk Turkmen. SSR Ser. Fiz. -Tekhn. Khim. Geol. Nauk* **1**3–8 (1989) (Russian).

[15] A. Ashyralyev, and P. E. Sobolevskii, *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2004.

[16] A. Ashyralyev, and M. E. San, Finite Difference Method for Stochastic Parabolic Equations, *AIP Conf. Proc.* 1389, 589-592 (2011)

[17] A. Ashyralyev, Nonlocal boundary-value problems for abstract parabolic equations: well-posedness in Bochner spaces, *Journal of Evolution Equations,* **6**, no.1, 1-28, 2006.

[18] A. Ashyralyev and P.E. Sobolevskii, Well-Posedness of Parabolic Difference Equations, *Operator Theory Advances and Applications,* Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1994.

[19] D. Guidetti, B. Karasozen, and S. Piskarev, Approximation of abstract differential equations, *Journal of Math. Sci.,* **122**(2004), no.2, 3013-3054.

[20] A. Ashyralyev, S. Piskarev, S. Wei, *On well-posedness of the difference schemes for abstract parabolic equations in* $L_p([0,1], E)$ *spaces,* Num. Funct. Anal. and Opt. 23 (7-8) (2002) 669-693.

[21] A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems,* Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, Operator Theory and Appl., 1995, 448p.

[22] S. G. Krein, *Linear Differential Equations in a Banach Space.* Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).

ÖZGEÇMİŞ

Mart 1973 yılında istanbul da doğdum. İlk, orta, lise ve Üniversite eğitimimi İstanbul da tamamladım. Lisans eğtitimimi 1995 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik mühendisliğinde tamamladım. Üç yıl özel bir kurumda matematik öğretmenliği yaptım. 1998 yılında Amerika Birleşik Devletlerinin New Jersy eyaletine dil, Mastır ve doktora eğitimi almak için gittim. 2001 yılında New Jersey Institute of Technology den mastır diplomamı aldım. 2001 yılında aynı ünüversitede doktora proğramına kabul adildim. 2004 yılının haziran ayında tez aşamasında iken vize problemleri nedeni ile ABD ye dönemedim ve kaydımı Kültür Üniversitesine aldırdım. Burada tez aşamasında tekrar proğramıma kaldığım yerden devam ettim. Bu arada 2007 yılında ABD tekrar döndüm ve sahibi olduğum şirketimin başına geçtim. Halen aktif bir şekilde şirketimi yönetmekteyim.

EK

Rothe Fark Şeması için Rastgele 1000 Rakamla Oluşturulan Matlab Uygulaması.

```
function p=EulerRotherMethod(N,M)
    % Computes numerical solution of the equation by
    % using the Euler Rother Method.
    % dU-Uxxdt=ftx(t,x,Wt);
    % U(0,x,ksi)=0,U(t,0,ksi)=0,U(t,pi,ksi)=0 : boundary condition
    % A U(n+1)+B U(n)+C U(n-1)= fii(:,n);
    % f(t,x,ksi), rox(x), exact(t,x,ksi) are given sub functions.
    % INPUT: N, M step numbers:
    % dU-Uxxdt=E^(-t*sin(x)dwt;
    % U(0,x,ksi)=U(1,x,ksi);
    % U(t,0,ksi)=U(t,pi,ksi)=0;
    % U(t,x,ksi)=exp(-t)*sin(x)sqrt(t)ksi;
    if nargin¡1; N=50 ; M=150 ; end;
    close; close;
    aaa=1;
    ksi=randn(1,100);
    s=0;
    for m=ksi;
    s=s+1; % index of ksi
    tau=1/N; h=pi/M;
    v= -tau/(h^2);
    for i=1:N+1; A(i,i)=v;
    A(1,1)=0;A(i,1)=0;A(1,i)=0;end ;
    alfa= 1+ 2*tau/(h^2) ;
    for i=2:N+1; B(i,i)=alfa; end;
    for i=1:N; B(i+1,i)=-1 ;B(1,N+1)=-aaa ; end;
```

```
B(1,1)=1; C=A;
for i=1:N; D(i,i)=1; D(N+1,N+1)=0;end ;
alpha{1}= zeros(N+1,N+1) ; betha{1}= zeros(N+1,1) ;
%fii(:,j) :j-th column matrix' ;
for j=1:M;
x=j*h;
for k=1:N+1;
fii( k,j:j,s)= f(k-1,tau,x,m); 'right side function ';
end;
fii(1,j:j,s)=rox(x,m); 'given sub function ';
end;
%alpha(:,:,j) : j. alpha and betha(:,j) :j-th betha' ;
for j=1:M-1;
Q=inv(B+C*alpha{j});
alpha{j+1}= - Q*A ;
betha{j+1}= Q*(D*( fii(:,j,s))-(C* betha{j}) );
end;
COMPUTE U(n);
U( N+1,M:M,s)= 0; % U(M)=0 ;
for z= M-1:-1:1 ;
U(:,z,s)= alpha{z+1}* U(:,z+1,s) + betha{z+1};
end;
U(1,:,:)=0;
for z= 1:M ;
p(:,z+1,s)=U(:,z,s);'U(0)=0';
end;
EXACT SOLUTION OF THIS PDE ;
for j=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
x=(j-1)*h;
es(k,j,s)=exact(t,x,m);
```

```
end;
end;
end; % end for ksi
ERROR ANALYSIS;
normes2=h*tau*sum(sum(sum(es.^2)))/s;
normapp2=h*tau*sum(sum(sum(p.^2)))/s;
normerror2=h*tau*sum(sum(sum(es-p).^2))/s;
relativeerror=normerror2/normes2;
tots=es(:,:,1);
for d1=2:s;
tots=tots+es(:,:,d1);
end;
es=tots/s;
ptots=p(:,:,1);
for m1=2:s;
ptots=ptots+p(:,:,m1);
end;
p=ptots/s;
cevap= [normes2,normapp2,normerror2,relativeerror]
%table=[es;p];table(1:2:end,:)=es; table(2:2:end,:)=p;
GRAPH OF THE SOLUTION
q=min(min(table)); w=max(max(table));
surf(es); title('EXACT SOLUTION'); view(-60,16);
set(gca,'ZLim',[q w]);
surf(p); title('EULER YAKLAIK ÇÖZÜMLERÝ'); rotate3d ;view(-60,16);
set(gca,'ZLim',[q w]);
subplot(2,1,1), surf(es)
rotate3d;
subplot(2,1,2), surf(p)
SUB FUNCTIONS
function rx=rox(x,ksi)
E=exp(1);
```

```
rx=-E^(-1)*sin(x)*ksi;
function estx=exact(t,x,ksi)
E=exp(1);
estx=E^(-t)*sin(x)*(t^(1/2))*ksi;
function ftx=f(k,tau,x,ksi)
E=exp(1);
ftx=E^(-k*tau)*sin(x)*((k*tau)^(1/2)-(k*tau-tau)^(1/2))* ksi;
```

Kapalı Fark Şeması için Rastgele 1000 Rakamla Oluşturulan Matlab Uygulaması.

```
function [table,es,p]=secondorder(N,M)
% Computes numerical solution of the equation
% dU-Uxxdt=ftx(t,x,Wt);
% U(0,x,ksi)=0,U(t,0,ksi)=0,U(t,pi,ksi)=0 : boundary condition
% A U(n+1)+B U(n)+C U(n-1)= fii(:,n);
% f(t,x,ksi), rox(x), exact(t,x,ksi) are given sub functions.
% INPUT: N, M step numbers:
% dU-Uxxdt=E^(-t)*sin(x)dwt;
% U(0,x,ksi)=0;
% U(t,0,ksi)=U(t,pi,ksi)=0;
% U(t,x,ksi)=exp(-t)*sin(x)sqrt(t)ksi;
% A U(n+2)+B U(n+1)+C U(n)+DU(n)+EU(n-1)+FU(n-2)= R fii(:,n)
% rsf(t,x,a)=(I+(tau/2)A)f(t,x),
% alx(x), exact(t,x) are given sub functions
if nargin¡1; N= 50 ; M= 150 ; end;
close;close;
ksi=randn(1,100);
g=0;
for m=ksi;
g=g+1; % index of ksi
tau=1/N; h=pi/M;
aaa=1; %u(0)=aaa.u(1)+alx(x)
```

```
x= tau^2/(2*(h^4));      A=zeros(N+1,N+1);
for i=2:N+1;        A(i,i)=x;        end ;
E=A ;
y= -tau/(h^2)-2*tau^2/(h^4) ;B=zeros(N+1,N+1);
for i=2:N+1;        B(i,i)=y;end ;
D=B ;
z= 1 + 2*tau /(h^2) + 3*tau^2/(h^4) ; C=zeros(N+1,N+1);
for i=2:N+1;        C(i,i)= z ;       end; c(1,1)=0;
s= -1 ;
for i=1:N;              C(i+1,i)= s ;       end;
C(1,1)=1;        C(1,N+1)=-1 ;
R=eye(N+1,N+1);
alpha{1}= zeros(N+1,N+1) ;
betha{1}= zeros(N+1,N+1) ;
gamma{1}= zeros(N+1,1) ;
alpha{2}= (4/5)*eye(N+1) ;
betha{2}= (-1/5)*eye(N+1);
gamma{2}= zeros(N+1,1);
'fii(:,j) :j-th column matrix' ;
for j=1:M;
x=j*h;
for k=1:N+1;
fii(k,j:j,g)= f(k-1,tau,x,m); 'right side function ';
end;
fii(1,j:j,g)=rox(x,m); 'given sub function ';
end;
'alpha(N+1,N+1,j) ve betha(N+1,j) ler hesaplanacak' ;
for n= 2:M-2 ;
K=C+D*alpha{n}+E*betha{n-1}+E*alpha{n-1}*alpha{n} ;
betha{n+1}= - inv(K)*(A) ;
alpha{n+1}= - inv(K)*(B +D*betha{n}+E*alpha{n-1}*betha{n});
gamma{n+1}= inv(K)*( R*fii(:,n:n,g) - D*gamma{n} ...
```

```
- E*alpha{n-1}*gamma{n} - E*gamma{n-1} );
end;
'EXACT SOLUTION OF THIS PDE' ;
for j=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
x=(j-1)*h;
es(k,j,g)=exact(t,x,m);
end;
end;
INITIAL VALUES OF U IS OBTAINED HERE;
I=eye(N+1); U(1:N+1,M:M,g )= 0 ;
U(:, M-1,g)= inv( betha{M-2} + 5*I - (4*I-alpha{M-2} )*alpha{M-1} )*...
( 4*gamma{M-1} - alpha{M-2}*gamma{M-1} - gamma{M-2});
COMPUTE U(n)
for z= M-2:-1:1 ;%%%%M-3;
U(:,z,g)=alpha{z+1}*U(:,z+1,g)+betha{z+1}*U(:,z+2,g)+gamma{z+1};
end;
U(1,:,:)=0;
for z= 1 : M ; p(:,z+1,g)=U(:,z,g); end;
end; % end for ksi
'ERROR ANALYSIS' ;
normes2=h*tau*sum(sum(sum(es.^2)))/g;
normapp2=h*tau*sum(sum(sum(p.^2)))/g;
normerror2=h*tau*sum(sum(sum(es-p).^2))/g;
relativeerror=normerror2/normapp2;
cevap= [normes2,normapp2,normerror2,relativeerror]
tots=es(:,:,1);
for d1=2:g;
tots=tots+es(:,:,d1);
end;
es=tots/g;
```

```
ptots=p(:,:,1);
for m1=2:g;
ptots=ptots+p(:,:,m1);
end;
p=ptots/g;
%table=[es;p];table(1:2:end,:)=es; table(2:2:end,:)=p;
GRAPH OF THE SOLUTION
q=min(min(table)); w=max(max(table));
surf(es); title('EXACT SOLUTION'); view(-60,16);
set(gca,'ZLim',[q w]);
surf(p); title('EULER YAKLAIK ÇÖZÜMLERÝ'); rotate3d ;view(-60,16);
set(gca,'ZLim',[q w]);
subplot(2,1,1), surf(es)
rotate3d;
subplot(2,1,2), surf(p)
SUB FUNCTIONS
function rx=rox(x,ksi)
E=exp(1);
rx=-E^(-1)*sin(x)*ksi;
function estx=exact(t,x,ksi)
E=exp(1);
estx=E^(-t)*sin(x)*(t^(1/2))*ksi;
function ftx=f(k,tau,x,ksi)
E=exp(1);
ftx=E^(-k*tau+tau)*sin(x)*(((k*tau)^(1/2)-(k*tau-tau)^(1/2))*(1+tau/2)...
-2/3*(k*tau)^(3/2)-4/3*(k*tau-tau)^(3/2)...
+2*(k*tau-tau)*(k*tau)^(1/2))*ksi;
```

Crank Nıcholson Şeması için Rastgele 1000 Rakamla Oluşturulan Matlab Uygulaması.

```
function [table,es,p]=cranknicholsonmethod(N,M)
% Computes numerical solution of the equation by cranknicholson method
```

```
% dU-Uxxdt=ftx(t,x,dWt);
% U(0,x,ksi)=0,U(t,0,ksi)=0,U(t,pi,ksi)=0 : boundary condition
% A U(n+1)+B U(n)+C U(n-1)= fii(:,n);
% f(t,x,ksi), rox(x), exact(t,x,ksi) are given sub functions.
% INPUT: N, M step numbers:
% dU-Uxxdt=E^(-t)*sin(x)dwt;
% U(0,x)=u(1,x);
% U(t,0,ksi)=U(t,pi,ksi)=0;
% U(t,x,ksi)=exp(-t)*sin(x)sqrt(t)ksi;
if nargin¡1; N= 10 ; M= 30 ; end;
close; close;
ksi=randn(1,100);
s=0;
for m=ksi;
s=s+1; % index of ksi
tau=1/N; h=pi/M;
aaa=1; %u(0)=aaa.u(1)+alx(x)
x= -tau/(2*(h^2)) ;
for i=2:N+1;
A(i,i)=x;
end ;
for i=1:N;
A(i+1,i)= x ;
end ;
y= 1 + tau/(h^2) ;
z=-1 + tau/(h^2) ;
for i=2:N+1;
B(i,i)= y ;
end;
for i=1:N;
B(i+1,i)= z ;
end;
```

```
B(1,1)=1;
B(1,N+1)=-aaa;
C=A;
for i=1:N+1;
D(i,i)=1 ;
end;
alpha{1}= zeros(N+1,N+1) ;
betha{1}= zeros(N+1,1) ;
'fii(:,j) :j-th column matrix' ;
for j=1:M;
x=j*h;
for k=1:N+1;
fii(k,j:j,s)= f(k-1,tau,x,m); 'right side function ';
end;
fii(1,j:j,s)=rox(x,m); 'given sub function ';
end;
'alpha(:,:,j) : j. alpha and betha(:,j) :j-th betha' ;
for j=1:M-1;
Q=inv(B+C*alpha{j});
alpha{j+1}= - Q*A ;
betha{j+1}= Q*(D*( fii(:,j,s))-(C* betha{j}) );
end;
COMPUTE U(n);
U( N+1,M:M,s)= 0; % U(M)=0 ;
for z= M-1:-1:1 ;
U(:,z,s)= alpha{z+1}* U(:,z+1,s) + betha{z+1};
end;
for z= 1:M ;
p(:,z+1,s)=U(:,z,s);'U(0)=0';
end;
OBTAIN THE GRID VALUES OF EXACT SOILUTION OF THIS PDE;
for j=1:M+1;
```

```
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
x=(j-1)*h;
es(k,j,s)=exact(t,x,m);
end;
end;
end; % end for ksi
ERROR ANALYSIS;
normes2=h*tau*sum(sum(sum(es.^2)))/s;
normapp2=h*tau*sum(sum(sum(p.^2)))/s;
normerror2=h*tau*sum(sum(sum(es-p).^2))/s;
relativeerror=normerror2/normapp2;
cevap= [normes2,normapp2,normerror2,relativeerror]
tots=es(:,:,1);
for d1=2:s;
tots=tots+es(:,:,d1);
end;
es=tots/s;
ptots=p(:,:,1);
for m1=2:s;
ptots=ptots+p(:,:,m1);
end;
p=ptots/s;
%table=[es;p];table(1:2:end,:)=es; table(2:2:end,:)=p;
GRAPH OF THE SOLUTION
q=min(min(table)); w=max(max(table));
surf(es); title('EXACT SOLUTION'); view(-60,16);
set(gca,'ZLim',[q w]);
surf(p); title('EULER YAKLAIK ÇÖZÜMLERÝ'); rotate3d ;view(-60,16);
set(gca,'ZLim',[q w]);
subplot(2,1,1), surf(es)
rotate3d;
```

```
subplot(2,1,2), surf(p)
SUB FUNCTIONS
function rx=rox(x,ksi)
E=exp(1);
rx=-E^(-1)*sin(x)*ksi;
function estx=exact(t,x,ksi)
E=exp(1);
estx=E^(-t)*sin(x)*(t^(1/2))*ksi;
function ftx=f(k,tau,x,ksi)
E=exp(1);
ftx=E^(-k*tau+tau)*sin(x)*((k*tau)^(1/2)-(k*tau-tau)^(1/2)...
-2/3*(k*tau)^(3/2)-4/3*(k*tau-tau)^(3/2)...
+2*(k*tau-tau)*(k*tau)^(1/2))* ksi;
```