T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

S4 ve GL MODAL MANTIKLARININ MODELLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İlayda ATEŞ

Anabilim Dalı : Matematik - Bilgisayar
Programı : Matematik - Bilgisayar

Haziran 2012

T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

S4 ve GL MODAL MANTIKLARININ MODELLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İlayda ATEŞ

0909041019

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 4 Haziran 2012
Tezin Savunulduğu Tarih : 3 Temmuz 2012

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Çiğdem GENCER
Diğer Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Ali KARATAY
Yrd. Doç. Dr. Levent ÇUHACI

Haziran 2012

ÖNSÖZ

2005 yılından beri öğrencisi olduğum ve 2009'dan bu yana danışmanlığımı yürüten, yüksek lisans tez çalışmasının konusunu öneren, gerekli kaynakların sağlanmasında yardımcı olan, bu süreç boyunca bilgilerinden yararlandığım, her zaman yanımda olduğunu bildiğim Prof. Dr. Çiğdem GENCER'e; lisansüstü ders aşamasında verdiği modal mantık seminerleri ile modal mantık konusunda ilerlememe yardımcı olan, sorularıma her zaman içtenlikle yanıt veren, bu tezin hazırlanış aşamasındaki yardımlarından ötürü Prof. Dr. Dick de JONGH'a; lisansüstü ders aşamasında verdiği dersler ile mantık alanında ilerlememi sağlayan ve tezin yazımındaki yardımlarından ötürü Yrd. Doç. Dr. Ali KARATAY'a; tezin yazımı sırasındaki yardımlarından ötürü Yrd. Doç. Dr. Emel Yavuz DUMAN'a; ders ve tez süreçlerini beraberce yaşadığım takım arkadaşım Onur KAHRAMAN'a; desteklerinden ötürü sevgili annem Arzu ATEŞ ve sevgili babam Bülent ATEŞ'e sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Haziran 2012 İlayda ATEŞ

İÇİNDEKİLER

Üniversitesi	**:**	**İstanbul Kültür Üniversitesi**
Enstitüsü	**:**	**Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı	**:**	**Matematik - Bilgisayar**
Programı	**:**	**Matematik - Bilgisayar**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Çiğdem GENCER**
Tez Türü ve Tarihi	**:**	**Yüksek Lisans - Haziran 2012**

ÖZET

S4 ve GL MODAL MANTIKLARININ MODELLERİ ÜZERİNE

İlayda ATEŞ

Bu tezde, S4 ve GL modal mantıklarının sonlu Henkin ve filtreleme yöntemiyle elde edilen modellerinin izomorf olduğu ispatlanmıştır. Bu amaçla S4 ve GL modal mantıklarının modal tamlığından ve kanonik modellerinden yararlanılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Modal mantık, kanıtlanabilirlik, sağlamlık, tamlık, kanonik model, sonlu Henkin yöntemi, filtreleme yöntemi.

University	**:**	**İstanbul Kültür University**
Institute	**:**	**Institute of Science**
Science Programme	**:**	**Mathematics and Computer**
Programme	**:**	**Mathematics and Computer**
Supervisor	**:**	**Prof. Dr. Çiğdem GENCER**
Degree Awarded and Date	**:**	**M.Sc. - June 2012**

ABSTRACT

ON MODELS OF THE MODAL LOGICS S4 AND GL

İlayda ATEŞ

We prove in this thesis that the models for the modal logics S4 and GL obtained by the finite Henkin method are isomorphic to the ones obtained by the filtration. For that purpose, we use the completeness and canonical models.

Keywords : Modal logic, provability, soundness, completeness, canonical model, finite Henkin method, filtration method.

Bölüm 1

Giriş

Mantığın bir dalı olan modal mantık ilk olarak Aristo tarafından olanaklılık ve zorunluluk kavramlarının incelenmesiyle çalışılmaya başlanmıştır. Modal mantığın bir matematik disiplini olarak kabul edilmesi C.I. Lewis'in 1918'de yaptığı sembolik mantığın incelenmesi konulu çalışmasından sonra olmuştur. Lewis önermeler mantığına olanaksızdır anlamındaki birli 'I' operatörünü ve kesin zorunludur anlamını ifade eden '$\prec$' ikili operatörü ekleyerek yeni bir aksiyom sistemi geliştirmiştir. 1932 yılında Lewis'in düşüncesinden hareketle Lewis ve C.H. Langford modal mantığın modern anlamdaki ilk aksiyomatik sistemleri olan **S3**, **S4** ve **S5**'i tanımlamışlardır. Bu önemli sonuçlarına rağmen Lewis'in fikirleri hemen kabul görmemiştir çünkü, onun verdiği Hilbert tarzı sistemin aksiyomları, önermeler mantığını baz alarak bunları genişletmek yerine '$\prec$' operatörü cinsinden tanımlamıştı [3]. Modal sistemlere Hilbert yaklaşımını Gödel'e borçluyuz. Gödel önermesel sezgi mantığının teoremleri doğru kalacak şekilde **S4**'e çevrilebileceğini göstermiş ve Lewis-Langford aksiyomatizasyonunu kullanmak yerine '$\Box$' operatörünü primitif sembol olarak almıştır [4].

Günümüzde çalışılan modal mantık ile Lewis ve çağdaşlarının çalıştığı modal mantık arasındaki temel fark ikincisinin sentaktik olmasıdır çünkü, önermeler mantığı yeni modalitelerle zenginleştirilmiştir. Bundan sonraki çalışmalar önermeler mantığına yeni aksiyomlar ekleyerek elde edilen aksiyomatik sistemleri birbirinden ayırt etmeye yönelmiş ve bu amaçla cebirsel yöntemler yaygın olarak kullanılmıştır. Cebirsel yöntemler teknik kolaylıklarına rağmen modal diller için güvenilir yorum sağlamada sınırlı kalmıştır. Doğal semantiğin eksikliği ise sentaktik yaklaşımın ortaya çıkardığı tüm durumlar nelerdir problemini açıkta bırakmıştır. Saul Kripke'nin modal mantık için semantiği tanımladığı 1959 yılına kadar yapılan en önemli çalışmalardan biri Johnson ve Tarski'nin operatörlü Boole cebirlerinin (modal cebirler) gösteriliş teorisini incelemeleridir. Johnson ve Tarski'nin tekniği esas olarak bir model oluşturma tekniği idi ve sonraki yıllarda tamlık sonuçlarını kanıtlamak için gereken teknik araçları vermiştir. Bu yaklaşım onbeş yıl sonra ortaya çıkan kanonik model tekniğinin bir benzeridir.

Kripke'nin tanımladığı matematiksel modeller (Kripke modeller) Leibnitz'in tüm olanaklı dünyalardan birinin gerçek dünya olduğu öngörüsüne ve bu dünyalar arasındaki ilişkileri gösteren ulaşılabilirlik bağıntısına dayanır. Bu nedenle, günümüzde, Kripke semantiği veya bağıntısal semantik, olanaklı dünyalar semantiği olarak adlandırılır. Kripke semantiğinde önermeler çeşitli dünyalarda doğru ya da yanlıştır ve tüm dünyalar diğerleri ile ilişkili olmayabilir. Kripke'den bağımsız olarak Kanger ve Hintikka tarafından da verilen bağıntısal semantik Kripke'nin çalışmaları ile etkili olarak tanınır hale gelmiştir [14].Kripke semantiği ile ortaya çıkan çatı, model, gerçekleme ve geçerlilik gibi kavramlar devrim niteliğinde bir araştırma programına neden olmuş ve bu program tamlık kavramı etrafında odaklanmıştır. 1960'lı yılların başlarında Kripke semantiği modal mantıkları sınıflandırmak için önemli bir araç olmuş ve kanonik model yöntemini kullanmıştır. Kanonik modeller ilk olarak Makinson - Creswell ve Lemon - Scott tarafından çalışılmış ve Lemmon - Scott'ın 'Modal Mantığa Giriş' adlı monograflarında yer almıştır. Bu monograf sonlu model oluşturma yöntemi olan filtrelemeyi de tanıtmış ve filtreleme yöntemini bir mantığın saptanabilirliğini göstermede kullanmıştır.

Modal mantığın bundan sonra ele aldığı konular çatı tamsızlığı ve modal dillerin teorik bilgisayar bilimine uyarlanmasıdır. Bu bağlamda tam olmayan modal mantıkların var olduğu ve temel modal dil için bunların örnekleri verilmiştir. Bu çalışmalar teorik bilgisayar bilimi açısından ifade edilebilirlik gücü yüksek modal dillerin ortaya çıkmasına vesile olmuştur. Uygulama alanlarından bazıları oyun teorisi, bilimsel dilbilim, yapay zeka ve formel felsefe olan önermesel dinamik mantık bunlardan biridir ve günümüzde aktif bir araştırma alanıdır.

Giriş dahil beş bölümden oluşan bu tezde, **S4** ve **GL** modal mantıklarının sonlu Henkin yöntemi ve filtreleme yöntemiyle elde edilen modelleri incelenmiştir.

Çalışmanın birinci ve ikinci bölümünde tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak için gerekli önbilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde sonlu Henkin ve filtreleme yöntemleri tanımlanarak **S4** ve **GL** modal mantıklarının sağlam ve tam oldukları kanıtlanmıştır.

Dördüncü bölümde ise **S4** ve **GL** modal mantığının tanımlanan yöntemlerle elde edilen modellerinin izomorf olduğu ispatlanmıştır.

Bölüm 2

Ön Bilgiler

Bu bölümde tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak amacıyla temel tanım, teorem ve kavramlar verilmiştir. Buradaki tüm bilgiler [2], [4], [5], [6], [7], [8], [14] ve [15] de bulunabilir.

2.1 Önermeler Mantığı

Önermeler mantığı, her muhakemenin doğru ya da yanlış olduğu varsayımına dayalı en temel muhakeme modelini temsil eden bir mantıktır. Diğer mantıkların çoğu ya bu mantık tarafından kapsanır ya da dili yeni bağlaçlarla zenginleştirilerek onun üzerine inşa edilir.

2.1.1 Önermeler Mantığı Sentaksı

Tanım 2.1.1. ***Önermeler mantığı dili*** *L, önerme değişkenleri $p_1, p_2, \cdots$, bağlaçlar $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$, önerme sabitleri $\top, \bot$ ve parantezler $(,)$'den oluşur.*

Tanım 2.1.2. ***Önermeler mantığının formülleri*** *indaktif olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:*

(i) *Herbir önerme değişkeni bir formüldür,*

(ii) *$\top$ ve $\bot$ birer formüldür,*

(iii) *φ bir formül ise, $\neg\varphi$'de bir formüldür,*

(iv) *φ ve ψ birer formül ise, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ ve $\varphi \leftrightarrow \psi$'ler de birer formüldür.*

L dilindeki tüm formüllerin kümesi **ForL**, tüm değişkenlerin kümesi ise **VarL** ile gösterilir. Bu tez boyunca **VarL** sayılabilir bir kümeyi gösterecektir.

Önermeler mantığının aksiyom şemaları aşağıdaki gibidir:

(i) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$,

(ii) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$,

(iii) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

Önermeler mantığının türetim kuralı Modus Ponens (MP): $\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$'dir.

2.1.2 Önermeler Mantığı Semantiği

Önermeler mantığını karakterize eden semantik aşağıdaki gibi verilir:

(i) Her önerme değişkeni (atomik önerme) ya doğru ya da yanlıştır,

(ii) $\top$ daima doğru ve $\bot$ daima yanlıştır (burada $\top$ doğruluk değeri hep doğru olan ve $\bot$ ise doğruluk değeri hep yanlış olan bir formülü göstermektedir),

(iii) Bileşik önermelerin doğruluk değerleri aşağıdaki doğruluk tablosu ile tek türlü tanımlanır:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

L dili için bir model $\mathcal{M}$, **VarL**'nin bir alt kümesidir.

Tanım 2.1.3. *$\mathcal{M}$, L dili için bir model olsun. $\mathcal{M}$ modeli üzerinde semantik gerektirme bağıntısı $\models$, φ formülünün karmaşıklığı üzerinde tümevarımla aşağıdaki gibi tanımlanır:*

(i) *$\mathcal{M} \models p$ olması için gerek ve yeter koşul her $p \in VarL$ için $p \in \mathcal{M}$ olmasıdır.*

(ii) *$\mathcal{M} \models \bot$ durumu hiçbir zaman gerçeklenmez.*

(iii) *$\mathcal{M} \models \psi \wedge \chi$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{M} \models \psi$ ve $\mathcal{M} \models \chi$ olmasıdır.*

(iv) *$\mathcal{M} \models \psi \vee \chi$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{M} \models \psi$ veya $\mathcal{M} \models \chi$ olmasıdır.*

(v) *$\mathcal{M} \models \psi \to \chi$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{M} \models \psi$ ise $\mathcal{M} \models \chi$ olmasıdır.*

$\mathcal{M} \models \varphi$ ifadesi, φ formülünün $\mathcal{M}$ modelinde doğru olduğunu veya $\mathcal{M}$'nin φ için bir model olduğunu ifade eder ve $\mathcal{M}$ semantik olarak φ formülünü gerektirir diye okunur. Bir başka deyişle önermeler mantığında herhangi bir φ formülünün doğruluğu $\mathcal{M}$ modeli ile φ formülünün önerme değişkenlerine atanan doğruluk değerlerinden elde edilir.

$\mathcal{M} \models \varphi$ gerçeklenmiyor ise, $\mathcal{M} \not\models \varphi$ yazılır ve φ formülü $\mathcal{M}$ modelinde yanlıştır veya $\mathcal{M}$, φ formülü için bir karşı modeldir denir.

Γ bir formül kümesi olduğunda $\Gamma \models \varphi$ ifadesi, Γ için her model φ için de bir modeldir anlamındadır.

Tanım 2.1.4. *Γ bir formül kümesi ve φ bir formül olsun. φ formülünün Γ'dan **türetilebilir** olması için gerek ve yeter koşul (g.y.k.) $\varphi = \varphi_n$ olacak şekilde bir $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ formül dizisinin var olmasıdır öyle ki her $1 \leq i \leq n$ için φ_i formülü ya*

(i) *bir aksiyom şeması veya*

(ii) *Γ'nın bir elemanı ya da,*

(iii) *kendinden önce gelen formüllere bir türetim kuralı uygulanarak elde edilir.*

Tanım 2.1.4'te tanımlanan $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ dizisi, φ formülünün Γ'dan bir türetimi olarak adlandırılır ve $\Gamma \vdash \varphi$ ile gösterilir. Γ boş küme ise, yukarıdaki dizi φ'nin bir türetimi olarak adlandırılır ve $\vdash \varphi$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. *Bir φ formülü L için her $\mathcal{M}$ modelinde doğru oluyorsa bir **totoloji** olarak adlandırılır ve $\models \varphi$ ile gösterilir.*

Teorem 2.1.6. *Γ bir formül kümesi ve φ bir formül olmak üzere*
(i) *n. $\Gamma \vdash \varphi$ Öncül veya* (ii) *n. $\Gamma \vdash \varphi$ $n_1, n_2, \cdots, n_k$ Totoloji*
bir ispatın satırları ise, Γ'daki tüm formüller doğru olduğunda φ'de doğrudur.

İspat.

(i) Bu durumda φ formülü Γ'nın bir elemanıdır ve dolayısı ile φ doğrudur.

(ii) φ formülünün Γ'dan türetiminin uzunluğu üzerinde tümevarımla yapılır.

Temel adım: φ formülünün türetiminin uzunluğu 1 ise, φ bir totolojidir. Bu durumda, her Γ kümesi için $\Gamma \models \varphi$'dir.

Tümevarım hipotezi: Teorem, türetiminin uzunluğu $n+1$'den küçük olan formüller için doğru olsun.

Tümevarım adımı: φ formülünün Γ'dan türetiminin uzunluğunun $n+1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, her $i = 1, 2, 3, \cdots, k$ için $n_i < n+1$ olmak üzere

$n_i.$ $\quad \Gamma \vdash \psi_i$

$\vdots$

$n+1.$ $\quad \Gamma \vdash \varphi \quad n_1, n_2, \cdots, n_k$ Totoloji

olduğundan $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_k \to \varphi$ formülü bir totolojidir. O halde, tümevarım hipotezinden her $i = 1, 2, 3, \cdots, k$ için $\Gamma \models \psi_i$ ve bundan dolayı $\Gamma \models \varphi$'dir.

$\boxtimes$

Teorem 2.1.7 (**Türetim Teoremi**). *Γ bir formül kümesi, φ ve ψ'de birer formül olsun. Bu durumda, $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ ise, $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$'dir.*

İspat. $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ olsun. $\varphi = \varphi_n$ olmak üzere φ formülünün $\Gamma \cup \{\psi\}$ kümesinden türetiminin $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ olduğunu varsayalım. Her $i \in \{1, \cdots, n\}$ için φ_i üzerinde tümevarım ile $\Gamma \vdash \psi \to \varphi_i$ olduğunu göstermeliyiz.

φ_i bir aksiyom veya Γ'nın bir elemanı olsun. Bu durumda,

1. φ_i	Öncül
2. $\varphi_i \to (\psi \to \varphi_i)$	Aksiyom
3. $\psi \to \varphi_i$	1, 2 MP

O halde, $\Gamma \vdash \psi \to \varphi_i$'dir.

$\varphi_i = \psi$ olsun. Bu durumda,

1. $(\psi \to ((\psi \to \psi) \to \psi)) \to ((\psi \to (\psi \to \psi)) \to (\psi \to \psi))$	Aksiyom
2. $\psi \to ((\psi \to \psi) \to \psi)$	Aksiyom
3. $(\psi \to (\psi \to \psi)) \to (\psi \to \psi)$	1, 2 MP
4. $\psi \to (\psi \to \psi)$	Aksiyom
5. $\psi \to \psi$	3, 4 MP

O halde $\vdash \psi \to \varphi_i$ yani, $\Gamma \vdash \psi \to \varphi_i$'dir.

φ_i, φ_j ve $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$'den MP ile elde edilmiş olsun. Bu durumda,

1. $\psi \to (\varphi_j \to \varphi_i)$	Öncül
2. $\psi \to \varphi_j$	Öncül
3. $(\psi \to (\varphi_j \to \varphi_i)) \to ((\psi \to \varphi_j) \to (\psi \to \varphi_i))$	Aksiyom
4. $(\psi \to \varphi_j) \to (\psi \to \varphi_i)$	1, 3 MP
5. $\psi \to \varphi_i$	3, 4 MP

O halde, $\Gamma \vdash \psi \to \varphi_i$'dir.

$\boxtimes$

Teorem 2.1.8 (Sağlamlık Teoremi). *φ önermeler mantığının herhangi bir formülü olmak üzere φ'nin bir türetimi var ise, φ bir totolojidir. Bu sembollerle $\vdash \varphi$ ise, $\models \varphi$'dir şeklinde gösterilir.*

İspat. φ formülünün türetiminin uzunluğu üzerinde tümevarım ile yapılır. $\vdash \varphi$ olduğunu varsayalım.

Temel adım: φ formülünün türetiminin uzunluğu 1 olsun. Bu durumda, φ formülünün doğru olduğu Teorem 2.1.6 (i)'den anlaşılır.

Tümevarım Hipotezi: φ formülünün türetiminin uzunluğu $n+1$ ve teorem türetiminin uzunluğu $n+1$'den küçük olan formüller için doğru olsun.

Tümevarım adımı: Teoremin, MP'yi koruduğunu göstermeliyiz. Teorem $\psi \to \varphi$ ve ψ formülleri için doğru yani, $\vdash \psi \to \varphi$ ise $\models \psi \to \varphi$ ve $\vdash \psi$ ise $\models \psi$ olsun. Bu durumda, MP ile $\vdash \varphi$ formülünü elde ederiz. Teorem 2.6.1 (ii) ile $((\psi \to \varphi) \wedge \psi) \to \varphi$ formülü bir totolojidir. O halde, tümevarım hipotezinden $\models \psi \to \varphi$, $\models \psi$ ve bundan dolayı $\models \varphi$'dir.

$\boxtimes$

Tanım 2.1.9. *φ, ψ, χ birer formül ve p bir önerme değişkeni olmak üzere φ formülünün uzunluğu l indaktif olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:*

(i) $\varphi = p$ *ise,* $l(\varphi) = 1$,

(ii) $\varphi = \neg\psi$ *ise,* $l(\varphi) = l(\psi) + 1$,

(iii) $* = \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ *olmak üzere* $\varphi = \psi * \chi$ *ise,* $l(\varphi) = l(\psi) + l(\chi) + 3$*'tür.*

Tamlık teoremini ispatlamak için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 2.1.10. *φ bir formül olsun öyle ki $p_1, p_2, \cdots, p_k$'lar bu formüldeki önerme değişkenlerini göstersin. p_i $(1 \leq i \leq k)$'ler üzerindeki herhangi bir doğruluk değer ataması için p_i' aşağıdaki gibi tanımlansın:*

$$p_i' = \begin{matrix} p_i, & p_i : T \text{ ise} \\ \neg p_i, & p_i : F \text{ ise} \end{matrix}$$

φ formülü $p_1, p_2, \cdots, p_k$'lara yapılan doğruluk değer atamaları altında T değerini alıyorsa $\varphi' = \varphi$, F değerini alıyor ise $\varphi' = \neg\varphi$ olsun. Bu durumda,

$$p_1', p_2', \cdots, p_k' \vdash \varphi' \text{'dir.}$$

İspat. φ formülünün uzunluğu üzerinde tümevarımla yapılır.

Temel adım: $l(\varphi) = 1$ olsun. O halde, $\varphi = p_1$ ve p_1 değişkenine yapılan $\top$ ve F doğruluk değer atamaları altında sırası ile ya $p_1 \vdash p_1$ ya da $\neg p_1 \vdash \neg p_1$ elde edilir. Türetim teoremi ile $\vdash p_1 \to p_1$ ve $\vdash \neg p_1 \to \neg p_1$'dir ki totolojilerin her zaman boştan bir türetimi var olduğundan doğrudur.

Tümevarım Hipotezi: Lemma, uzunluğu $n+1$'den küçük olan formüller için doğru olsun.

Tümevarım adımı: $l(\varphi) = n+1$ olsun. $\{\neg, \to\}$ bağlaçların bir tam kümesi olduğundan φ'nin $\neg\psi$ ve $\psi \to \chi$ durumlarını incelemek yeterli olacaktır.

- $\varphi = \neg\psi$ olsun. $l(\psi) < n+1$ olduğundan lemma ψ formülü için doğrudur yani, $p_1', p_2', \cdots, p_k' \vdash \psi'$'dür.

ψ formülü yapılan doğruluk değer atamaları altında T değerini alıyor ise, $\psi' = \psi$ ve φ formülü F değerini alır. Bu durumda, $\varphi' = \neg\varphi$ yani $\neg\neg\psi$'dir. Tümevarım hipotezinden $p_1', p_2', \cdots, p_k' \vdash \psi$ ve $\psi \leftrightarrow \neg\neg\psi$ olduğundan $p_1', p_2', \cdots, p_k' \vdash \neg\neg\psi$'dir. $\varphi' = \neg\neg\psi$ olduğundan $p_1', p_2', \cdots, p_k' \vdash \varphi'$'dür.

ψ formülü yapılan doğruluk değer atamaları altında F değerini alıyor ise, $\psi' = \neg\psi$ ve φ formülü T değerini alır. Bu durumda, $\varphi' = \varphi$ yani $\neg\psi$'dir. Tümevarım hipotezinden $p_1', p_2', \cdots, p_k' \vdash \neg\psi$ ve $\varphi' = \neg\psi$ olduğundan $p_1', p_2', \cdots, p_k' \vdash \varphi'$'dür.

- $\varphi = \psi \to \chi$ olsun. $l(\psi) < n+1$ ve $l(\chi) < n+1$ olduğundan lemma bu formüller için doğru yani, $p_1', p_2', \cdots, p_k' \vdash \psi'$ ve $p_1', p_2', \cdots, p_k' \vdash \chi'$'dür.

ψ formülü yapılan doğruluk değer atamaları altında F değerini alıyor ise, $\psi' = \neg\psi$ ve φ formülü T değerini alır. Bu durumda, $\varphi' = \psi \to \chi$'dir. Tümevarım hipotezinden $p_1', p_2', \cdots, p_k' \vdash \neg\psi$ ve $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$ olduğundan $p_1', p_2', \cdots, p_k' \vdash \varphi'$'dür.

χ formülü yapılan doğruluk değer atamaları altında T değerini alıyor ise, $\chi' = \chi$ ve φ formülü T değerini alır. Bu durumda, $\varphi' = \psi \to \chi$'dir. Tümevarım hipotezinden $p_1', p_2', \cdots, p_k' \vdash \chi$ ve $\varphi \vdash \psi \to \varphi$ olduğundan $p_1', p_2', \cdots, p_k' \vdash \varphi'$'dür.

ψ formülü yapılan doğruluk değer atamaları altında $\top$ ve χ formülü F değerini alıyor ise, $\psi' = \psi$, $\chi' = \neg\chi$ ve φ formülü F değerini alır. Bu durumda, $\varphi' = \neg(\psi \to \chi)$'dir. Tümevarım hipotezinden $p_1', p_2', \cdots, p_k' \vdash \psi$, $p_1', p_2', \cdots, p_k' \vdash \neg\chi$ ve $\varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \to \psi)$ olduğundan $p_1', p_2', \cdots, p_k' \vdash \varphi'$'dür.

O halde, lemma φ formülü için doğrudur.

$\boxtimes$

Teorem 2.1.11 (Tamlık Teoremi). *φ önermeler mantığının herhangi bir formülü olmak üzere φ bir totoloji ise, φ'nin bir türetimi vardır. Bu sembollerle $\models \varphi$ ise, $\vdash \varphi$'dir şeklinde gösterilir.*

İspat. φ'nin bir totoloji yani, $\models \varphi$ olduğunu varsayalım. $p_1, p_2, \cdots, p_k$'lar φ formülündeki önerme değişkenleri olsun. Herhangi bir doğruluk değer ataması için p_i' ve φ' Lemma 2.1.10'daki gibi tanımlansın. φ bir totoloji olduğundan herhangi bir doğruluk değer ataması altında $\varphi' = \varphi$ olacaktır.

p_i'ler için iki farklı doğruluk değer ataması aşağıdaki gibi olsun; ilkinde p_k doğru olsun, bundan dolayı $p_k' = p_k$ ve ikincisinde p_k yanlış olsun, bundan dolayı $p_k' = \neg p_k$'dır. Lemma 2.1.10'dan

$$p_1', p_2', \cdots, p_{k-1}', p_k \vdash \varphi$$
$$p_1', p_2', \cdots, p_{k-1}', \neg p_k \vdash \varphi$$

elde edilir. Türetim Teoremi'nden

$$p_1', p_2', \cdots, p_{k-1}' \vdash p_k \to \varphi$$
$$p_1', p_2', \cdots, p_{k-1}' \vdash \neg p_k \to \varphi$$

ve $(\varphi \to \psi) \wedge (\neg\varphi \to \psi) \vdash \psi$ olduğundan da $p_1', p_2', \cdots, p_{k-1}' \vdash \varphi$ elde edilir. Aynı işlemler $k-1$ kez uygulanırsa, $\vdash \varphi$'dir.

$\boxtimes$

2.2 Modal Mantık

Modal mantık, önermeler mantığına bir ya da daha fazla operatör ekleyerek oluşturulan ve belirli türetim kuralları altında geçerli olan formüller kümesidir. Modal mantığın temel kavramları zorunluluk ve olanaklılıktır. Bu kavramlar birer birli modal operatör olan $\Box$ ve $\Diamond$ ile temsil edilirler. Bir φ formülü için $\Box\varphi$, φ'nin zorunlu olduğunu ve $\Diamond\varphi$ ise φ'nin olanaklı olduğunu ifade eder. Bu iki kavramın arkasında yatan düşünce farklı ifadelerin yine farklı ve mümkün dünyalarda doğru olabileceğidir. Zorunluluk ve olanaklılık birbiri cinsinden tanımlanabilirdir: Bir ifadenin zorunlu olması için gerek ve yeter koşul onun değilinin olanaklı olmamasıdır ve bu nedenle bir ifadenin olanaklı olması için gerek ve yeter koşul değilinin zorunlu olmamasıdır.

2.2.1 Modal Mantık Sentaksı

Tanım 2.2.1. ***Modal dil****, Önermeler Mantığı diline birli bir modal operatör olan $\Box$ (box)-operatörünün eklenmesi ile elde edilir.*

Modal dilin iyi-oluşturulmuş formülleri, Φ önerme değişkenlerinin bir kümesi ve $p \in \Phi$ olmak üzere aşağıdaki kural ile verilir:

$$\varphi := p \mid \bot \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \psi \mid \Box\varphi.$$

Genel olarak $\Box$ modal operatörü primitif sembol olarak alınır ve duali olan $\Diamond$ (diamond) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi.$$

Φ önerme değişkenleri kümesi tez boyunca sayılabilir bir kümeyi gösterecektir.

Tanım 2.2.2. ***Kripke mantığı* $\mathbf{K}$***, aşağıdaki formülleri içeren ve verilen türetim kuralları altında kapalı olan en küçük normal modal mantıktır:*

(i) *Modal dildeki tüm önermesel totolojiler,*

(ii) **K:** $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$,

(iii) *Türetim kuralları, MP ve Gereklilik Kuralı (NR): $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$'dir.*

Tanım 2.2.3. *Bir φ formülünün $\mathbf{K}$ modal mantığında bir Δ* ***öncül kümesinden türetilebilir*** *($\Delta \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$) olması için gerek ve yeter koşul $\varphi = \varphi_n$ olacak şekilde bir $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ formül dizisinin var olmasıdır öyle ki φ_i formülleri ya Δ'nın bir elemanı veya $\mathbf{K}$'nın bir aksiyomu, ya da kendinden önce gelen φ_j $(1 < j < i)$ formüllerine herhangi bir türetim kuralı uygulanarak elde edilir.*

Örnek 2.2.4. $(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \leftrightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$ *formülü $\mathbf{K}$'da türetilebilirdir.*

İspat.

($\Rightarrow$): $\vdash_{\mathbf{K}} (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$ olduğunu göstermeliyiz.

1. $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$ Totoloji
2. $\vdash_{\mathbf{K}} \Box(\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi)))$ 1 NR
3. $\vdash_{\mathbf{K}} \Box(\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))) \to (\Box\varphi \to \Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi)))$ K Aksiyomu
4. $\vdash_{\mathbf{K}} \Box\varphi \to \Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi))$ 2, 4 MP
5. $\vdash_{\mathbf{K}} \Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi)) \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi))$ K Aksiyomu
6. $\vdash_{\mathbf{K}} \Box\varphi \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi))$ 4, 5 Totoloji
7. $\vdash_{\mathbf{K}} (\Box\varphi \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi))) \to (\Box\varphi \wedge \Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi))$ Totoloji
8. $\vdash_{\mathbf{K}} (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$ 6, 7 MP

(⇐): $\vdash_{\mathbf{K}} \Box(\varphi \wedge \psi) \to (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$ olduğunu göstermeliyiz.

1. $\vdash_{\mathbf{K}} (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	Totoloji
2. $\vdash_{\mathbf{K}} \Box((\varphi \wedge \psi) \to \varphi)$	1 NR
3. $\vdash_{\mathbf{K}} \Box((\varphi \wedge \psi) \to \varphi) \to (\Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\varphi)$	K Aksiyomu
4. $\vdash_{\mathbf{K}} \Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\varphi$	2, 3 MP
5. $\vdash_{\mathbf{K}} (\varphi \wedge \psi) \to \psi$	Totoloji
6. $\vdash_{\mathbf{K}} \Box((\varphi \wedge \psi) \to \psi)$	5 NR
7. $\vdash_{\mathbf{K}} \Box((\varphi \wedge \psi) \to \psi) \to (\Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\psi)$	K Aksiyomu
8. $\vdash_{\mathbf{K}} \Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\psi$	6, 7 MP
9. $\vdash_{\mathbf{K}} \Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\varphi \wedge \Box\psi$	4, 8 MP

⊠

Teorem 2.2.5 (K için Türetim Teoremi). $\varphi_1, \cdots, \varphi_n, \psi \vdash_{\mathbf{K}} \chi$ *ise,* $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \vdash_{\mathbf{K}} \psi \to \chi$*'dir.*

İspat. $\varphi_1, \cdots, \varphi_n, \psi \vdash_{\mathbf{K}} \chi$ olduğunu varsayalım. $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \vdash_{\mathbf{K}} \psi \to \chi$ olduğunu göstermeliyiz. $\varphi_1, \cdots, \varphi_n, \psi \vdash_{\mathbf{K}} \chi$ olduğundan **K** modal mantığının sadece MP uygulanarak elde edilmiş teoremleri $\theta_1, \cdots, \theta_m$ olmak üzere, χ formülü $\varphi_1, \cdots, \varphi_n, \psi$ ve $\theta_1, \cdots, \theta_m$ formüllerinden türetilebilirdir. Bu nedenle, önermeler mantığında

$$\theta_1, \cdots, \theta_m, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \psi \vdash \chi$$

sağlanır ve önermeler mantığı için türetim teoreminden aşağıdaki yazılabilir:

$$\vdash \theta_1 \to (\theta_2 \to (\cdots(\theta_m \to (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\psi \to \chi))))\cdots)).$$

O halde, önermeler mantığı için sağlamlık teoreminden bu formül bir totolojidir ve bundan dolayı **K**'nın bir aksiyomudur. $\vdash_{\mathbf{K}} \theta_1, \cdots, \vdash_{\mathbf{K}} \theta_m$ (herbir $1 \leq i \leq m$ için θ_i, **K**'nın bir teoremi) olduğundan, m-kez MP uygulanarak;

$$\vdash_{\mathbf{K}} \varphi_1 \to (\cdots(\varphi_n \to (\psi \to \chi))\cdots)$$

elde edilir. Herbir $1 \leq j \leq n$ için φ_j, **K**'nın bir teoremi olduğundan n-kez MP uygulanarak $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \vdash_{\mathbf{K}} \psi \to \chi$ elde edilir.

⊠

Tanım 2.2.6. **S4** *modal mantığı,* **K** *modal mantığına aşağıdaki aksiyomların eklenmesi ile elde edilir:*

T: $\Box\varphi \to \varphi$,

4: $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$.

Örnek 2.2.7. $\Box\Box\varphi \to \Box\varphi$ *formülü* **S4***'te türetilebilirdir.*

İspat.

1. $\vdash_{\mathbf{S4}} \Box\varphi \to \varphi$ — T Aksiyom
2. $\vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\Box\varphi \to \varphi)$ — 1 NR
3. $\vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\Box\varphi \to \varphi) \to (\Box\Box\varphi \to \Box\varphi)$ — K Aksiyom
4. $\vdash_{\mathbf{S4}} \Box\Box\varphi \to \Box\varphi$ — 2, 3 MP

Ayrıca, $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ **S4**'ün bir aksiyomu olduğundan $\vdash_{\mathbf{S4}} \Box\varphi \leftrightarrow \Box\Box\varphi$'dir.

$\boxtimes$

Gödel-Löb (**GL**) veya kanıtlanabilirlik mantığı, **K** ve **S4** modal mantıklarından farklı olarak zorunluluk kavramını değil kanıtlanabilirlik kavramını inceler. Bu kavramın incelenmesine neden olan çalışmalar Gödel'in 1931'de verdiği tamsızlık teoremleri ile Löb'ün 1953'teki teoremidir. Bir modal mantık olarak kanıtlanabilirlik mantığı 1970'li yılların başlarında çalışılmaya başlanmış ve bu çalışmanın anafikri kanıtlanabilirlik kavramının bir modal operatör olarak görülebileceği olmuştur. Dolayısı ile **GL** kanıtlanabilirlik kavramını inceler ve bu dildeki bir φ formülü için $\Box\varphi$, φ kanıtlanabilirdiri ve $\Diamond\varphi$ ise, φ'nin tutarlı olduğunu ifade eder.

Tanım 2.2.8. **GL** *modal mantığı,* **K** *modal mantığına Löb aksiyomunun eklenmesi ile elde edilir:*

GL: $\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$.

Örnek 2.2.9. $\Box\psi \to \Box\Box\psi$ *formülü* **GL***'de türetilebilirdir.*

İspat.

1. $\vdash_{\mathbf{GL}} \psi \to ((\Box\Box\psi \wedge \Box\psi) \to (\Box\psi \wedge \psi))$ — Totoloji
2. $\vdash_{\mathbf{GL}} (\Box\Box\psi \wedge \Box\psi) \leftrightarrow \Box(\Box\psi \wedge \psi)$ — $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{GL}$
3. $\vdash_{\mathbf{GL}} \psi \to (\Box(\Box\psi \wedge \psi) \to (\Box\psi \wedge \psi))$ — 1, 2 Totoloji
4. $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box(\psi \to (\Box(\Box\psi \wedge \psi) \to (\Box\psi \wedge \psi)))$ — 3 NR
5. $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box(\psi \to (\Box(\Box\psi \wedge \psi) \to (\Box\psi \wedge \psi))) \to$ $(\Box\psi \to \Box(\Box(\Box\psi \wedge \psi) \to (\Box\psi \wedge \psi)))$ — K Aksiyomu
6. $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box\psi \to \Box(\Box(\Box\psi \wedge \psi) \to (\Box\psi \wedge \psi))$ — 4, 5 MP
7. $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box(\Box(\Box\psi \wedge \psi) \to (\Box\psi \wedge \psi)) \to \Box(\Box\psi \wedge \psi)$ — Löb Aksiyomu

8. $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box\psi \to \Box(\Box\psi \wedge \psi)$ 6, 7 Totoloji

9. $\vdash_{\mathbf{GL}} (\Box\psi \wedge \psi) \to \Box\psi$ Totoloji (Örnek 2.2.4)

10. $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box((\Box\psi \wedge \psi) \to \Box\psi)$ 8 NR

11. $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box((\Box\psi \wedge \psi) \to \Box\psi) \to (\Box(\Box\psi \wedge \psi) \to \Box\Box\psi)$ K Aksiyomu

12. $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box(\Box\psi \wedge \psi) \to \Box\Box\psi$ 10, 11 MP

13. $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box\psi \to \Box\Box\psi$ 8, 12 Totoloji

$\boxtimes$

2.2.2 Modal Mantık Semantiği

Tanım 2.2.10. *Modal dil için bir **Kripke çatı** $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R} \rangle$ ikilisidir. Burada W elemanları noktalar veya dünyalar olarak adlandırılan boştan farklı bir küme ve W çatının evreni olarak adlandırılır. $\mathcal{R}$, W üzerinde tanımlı ikili bir bağıntıdır.*

Tanım 2.2.11. *Modal dil için bir **model** $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ ikilisidir öyle ki $\mathcal{F}$ temel modal dil için bir çatı ve V,*

$$\begin{aligned} V: \ \Phi &\to \ \mathcal{P}(W) \\ p &\mapsto \ V(p) \end{aligned}$$

*şeklinde tanımlı bir fonksiyondur. Burada $\mathcal{P}(W)$, W'nun kuvvet kümesini, $V(p)$'de p değişkeninin modelde doğru olduğu dünyaların kümesini göstermektedir. Bu şekilde tanımlı V fonksiyonu **doğruluk değer ataması** olarak adlandırılır. Doğruluk değer ataması V, önerme değişkenleri kümesinden bir fomül kümesine genişletilebilir. φ herhangi bir fomül olmak üzere $V(\varphi)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır;*

$$V(\varphi) := \{w \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}.$$

$\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ modeline $\mathcal{F}$ çatısından elde edilen model denir.

Tanım 2.2.12. *w, $\mathcal{M} = \langle W, \mathcal{R}, V \rangle$ modelinde bir dünya olsun. Bu durumda, bir φ formülünün $\mathcal{M}$ modelindeki bir w dünyasında **doğruluğu** (veya **gerçeklenebilirliği**) indaktif olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:*

(i) *$\mathcal{M}, w \models p$ olması için gerek ve yeter koşul $p \in \Phi$ olmak üzere $w \in V(p)$ olmasıdır.*

(ii) *$\mathcal{M}, w \models \bot$ durumu hiçbir zaman gerçeklenmez (yanlış bir formül modelde hiçbir dünyada doğru değildir).*

(iii) *$\mathcal{M}, w \models \neg\varphi$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{M}, w \models \varphi$'nin gerçeklenmemesidir.*

(iv) *$\mathcal{M}, w \models \varphi \vee \psi$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{M}, w \models \varphi$ veya $\mathcal{M}, w \models \psi$ olmasıdır.*

(v) *$\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ olması için gerek ve yeter koşul $w\mathcal{R}v$ olacak şekilde her $v \in W$ için $\mathcal{M}, v \models \varphi$ olmasıdır.*

$\mathcal{M}$ modelinde $\Diamond$'lı bir formülün bir w dünyasında gerçeklenebilirliği (v)'ten yararlanılarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi$ olması için gerek ve yeter koşul $w\mathcal{R}v$ olacak şekilde herhangi bir $v \in W$ için $\mathcal{M}, v \models \varphi$ olmasıdır.

Bir φ formülü, bir $\mathcal{M}$ modelinin w dünyasında gerçeklenmez ise, φ formülü w dünyasında yanlıştır denir ve $\mathcal{M}, w \not\models \varphi$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.13.

(i) *Bir φ formülünün, bir $\mathcal{M} = \langle W, \mathcal{R}, \models\rangle$ modelinde **doğru** ($\mathcal{M} \models \varphi$) olması için gerek ve yeter koşul her $w \in W$ için $w \models \varphi$ olmasıdır.*

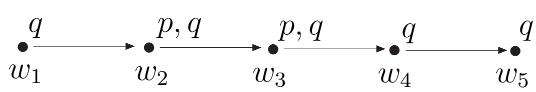
(ii) *Bir φ formülünün, bir $\mathcal{F}$ çatısındaki bir w **dünyasında geçerli** ($\mathcal{F}, w \models \varphi$) olması için gerek ve yeter koşul φ formülünün $\mathcal{F}$ çatısından elde edilen bir $\langle \mathcal{F}, V\rangle$ modelindeki w dünyasında doğru olmasıdır.*

(iii) *Bir φ formülünün, bir $\mathcal{F}$ **çatısında geçerli** ($\mathcal{F} \models \varphi$) olması için gerek ve yeter koşul φ formülünün $\mathcal{F}$ çatısından elde edilen her $\langle \mathcal{F}, V\rangle$ modelinde geçerli olmasıdır.*

(iv) *Bir φ formülünün **geçerli** ($\models \varphi$) olması için gerek ve yeter koşul her $\mathcal{F}$ çatısı için $\mathcal{F} \models \varphi$ olmasıdır.*

(v) *Bir φ formülünün Γ **öncüller kümesinden semantik olarak elde edilebilir** ($\Gamma \models \varphi$) olması için gerek ve yeter koşul her $\mathcal{M}$ modeli, her $\psi \in \Gamma$ ve $w \in W$ için $\mathcal{M}, w \models \psi$ ise $\mathcal{M}, w \models \varphi$ olmasıdır.*

Örnek 2.2.14. *$\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R}\rangle$; $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ ve $\mathcal{R} = \{(w_i, w_j) \mid$ her $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ için $j = i + 1\}$ şeklinde tanımlı bir çatı olsun.*



Şekil 2.1: $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R}\rangle$

$\mathcal{F}$ çatısı üzerinde tanımlı bir V doğruluk değer ataması; $V(p) = \{w_2, w_3\}$, $V(q) = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ ve $V(r) = \varnothing$ şeklinde tanımlansın ve $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V\rangle$ $\mathcal{F}$ çatısı üzerinde tanımlı bir model olsun. $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V\rangle$ modelinde; $\Diamond\Box p$, $\Box q$ ve $\Diamond(p \wedge \neg r)$ formülleri gerçeklenebilir, $\Diamond\Box p \to p$ formülü yanlıştır.

İspat. $\mathcal{M}, w_1 \models \Diamond\Box p$'dir çünkü $w_1\mathcal{R}w_2$, $\mathcal{M}, w_2 \models \Box p$ ve $w_2\mathcal{R}w_3$, $\mathcal{M}, w_3 \models p$'dir.

$\mathcal{M}, w_2 \models \Diamond(p \wedge \neg r)$'dir çünkü $w_2\mathcal{R}w_3$, $\mathcal{M}, w_3 \models p \wedge \neg r$ ve $\mathcal{M}, w_3 \models p$, $\mathcal{M}, w_3 \not\models r$'dir.

$\mathcal{M}, w_1 \not\models \Diamond\Box p \rightarrow p$'dir çünkü $\mathcal{M}, w_1 \models \Diamond\Box p$ olmasına rağmen $\mathcal{M}, w_1 \not\models p$'dir.

$\mathcal{M} \models \Box q$'dur çünkü $i = 1, 2, 3, 4, 5$ için $\mathcal{M}, w_i \models q$'dur. Burada $V(q)$'nun tanımından $\Box q$ formülünün w_1, w_2, w_3 ve w_4 dünyalarındaki doğrulu Tanım 2.2.12 (v) ile elde edilir. $\Box q$ formülünün w_5 dünyasındaki doğruluğu ise w_5'in bir **son nokta** (kendiside dahil hiçbir dünya ile bağlantısı olmayan noktalar) olmasından anlaşılır; çünkü böyle dünyalarda herşey mümkündür.

$\boxtimes$

Örnek 2.2.15. *$(\Box p \wedge \Box q) \leftrightarrow \Box(p \wedge q)$ formülü herhangi bir Kripke çatıda geçerlidir.*

İspat. $\mathcal{F}$ herhangi bir Kripke çatı olmak üzere $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ bir model ve w da bu modelde keyfi bir dünya olsun. Tanım 2.2.13 (iii) ile $\mathcal{M}, w \models (\Box p \wedge \Box q) \leftrightarrow \Box(p \wedge q)$ olduğunu göstermeliyiz.

($\Rightarrow$): $\mathcal{M}, w \models \Box p \wedge \Box q$ olduğunu varsayalım. $\wedge$'li fomüllerin bir $\mathcal{M}$ modelindeki bir w dünyasında geçerlilik tanımından $\mathcal{M}, w \models \Box p$ ve $\mathcal{M}, w \models \Box q$'dur. Tanım 2.2.12 (v) ile $w\mathcal{R}v$ olacak şeklide her v dünyası için $\mathcal{M}, v \models p$ ve $\mathcal{M}, v \models q$'dur. Bu durumda, her v dünyası için $\mathcal{M}, v \models p \wedge q$ yani, $\mathcal{M}, w \models \Box(p \wedge q)$ elde edilir. O halde $\models (\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$'dur.

($\Leftarrow$): $\mathcal{M} \models \Box(p \wedge q)$ olduğunu varsayalım. Tanım 2.2.12 (v) ile $w\mathcal{R}v$ olacak şeklide her v dünyası için $\mathcal{M}, v \models p \wedge q$'dur. $\wedge$'li fomüllerin bir $\mathcal{M}$ modelindeki bir w dünyasında geçerlilik tanımından her v dünyası için $\mathcal{M}, v \models p$ ve $\mathcal{M}, v \models q$ yani, $\mathcal{M}, w \models \Box p$ ve $\mathcal{M}, w \models \Box q$'dur. Bu durumda $\mathcal{M}, w \models \Box p \wedge \Box q$ elde edilir. O halde $\models \Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$'dur.

$\boxtimes$

Örnek 2.2.16. *$\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ formülü her çatıda geçerli değildir.*

İspat. Bunu göstermek için bir $\mathcal{F}$ çatısı, bu çatıda bir w dünyası ve bu w dünyasında formülü yanlışlayacak bir doğruluk değer ataması bulmalıyız.

$\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R} \rangle$; $W = \{0, 1, 2\}$ ve $\mathcal{R} = \{(0, 1), (1, 2)\}$ şeklinde tanımlı bir çatı olsun. $\mathcal{F}$ çatısı üzerinde herhangi bir doğruluk değer ataması $V(p) = \{2\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $0 \models \Diamond\Diamond p$, $1 \models \Diamond p$ ve $2 \models p$ olmasına rağmen $0 \not\models \Diamond p$ olduğu için $0 \not\models \Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$'dir. O halde $\mathcal{F} \not\models \Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$'dir.

$\boxtimes$

Tanım 2.2.17. *$\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R} \rangle$ bir çatı olsun.*

(i) *Her $w, x, y \in W$ için $w\mathcal{R}x$ ve $x\mathcal{R}y$ iken $w\mathcal{R}y$ ise $\mathcal{R}$ bağıntısına **geçişlidir** denir.*

(ii) *Her $w \in W$ için $w\mathcal{R}w$ ise $\mathcal{R}$ bağıntısına **yansımalıdır** denir.*

(iii) *Her boştan farklı $X \subseteq W$ kümesi için X'in $\mathcal{R}$ bağıntısına göre bir en küçük elemanı varsa $\mathcal{R}$ bağıntısına **iyi-temellendirilmiştir** denir. Diğer bir ifadeyle; X in bir w elemanı için $x\mathcal{R}w$ olacak şeklide herhangi bir $x \in X$ elemanı (yani, $\cdots w_n\mathcal{R}w_{n-1}\cdots w_2\mathcal{R}w_1\mathcal{R}w_0$ olacak şeklide W'da $w_0, w_1, w_2, \cdots$ dünyalarının sonsuz bir dizisi) yok ise $\mathcal{R}$ bağıntısına iyi-temellendirilmiştir denir.*

(iv) *Her boştan farklı $X \subseteq W$ kümesi için X'in $\mathcal{R}$ bağıntısına göre bir en büyük elemanı varsa $\mathcal{R}$ bağıntısına **tersi iyi-temellendirilmiştir** denir. Diğer bir ifadeyle; X'in herhangi bir w elemanı için $w\mathcal{R}x$ olacak şeklide bir $x \in X$ elemanı yok ise $\mathcal{R}$ bağıntısına tersi iyi-temellendirilmiştir denir.*

Örnek 2.2.18. *Örnek 2.2.16'da verilen $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ formülü geçişli çatılarda geçerlidir.*

İspat. $\mathcal{F}$ geçişli bir çatı, w bu çatıda bir dünya ve $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ bu çatı ile tanımlı bir model olsun. $\mathcal{M}, w \models \Diamond\Diamond p$ olduğunu varsayalım. $\Diamond$'lı formüllerin bir $\mathcal{M}$ modelindeki bir w dünyasındaki doğruluk tanımından; $w\mathcal{R}u$ ve $u\mathcal{R}v$ olacak şekilde u ve v dünyaları vardır öyle ki $\mathcal{M}, v \models p$'dir. $\mathcal{R}$ geçişli bir bağıntı olduğundan, $w\mathcal{R}v$ ve bundan dolayı $\mathcal{M}, w \models \Diamond p$ elde edilir. O halde $\mathcal{M}, w \models \Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ sağlanır.

$\boxtimes$

Tanım 2.2.19.

(i) **S4** *modal mantığı için bir Kripke çatı $\langle W, \mathcal{R} \rangle$ geçişli ve yansımalıdır.*

(ii) **GL** *modal mantığı için bir Kripke çatı $\langle W, \mathcal{R} \rangle$ geçişli ve tersi iyi-temellendirilmiştir.*

Teorem 2.2.20. *$\Box p \rightarrow p$ formülünün $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R} \rangle$ çatısında geçerli olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{R}$ bağıntısının yansımalı olmasıdır.*

İspat. $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R} \rangle$ bir Kripke çatı ve $\mathcal{M}$ modeli $\mathcal{F}$ çatısı üzerinde tanımlı olsun.

($\Rightarrow$): $\Box p \rightarrow p$ formülünün $\mathcal{F}$ çatısında geçerli olduğunu varsayalım. Bu durumda, geçerlilik tanımından $\mathcal{M}, w \models \Box p$ ise $\mathcal{M}, w \models p$'dir. Tanım 2.2.12 (v) ile her x için $w\mathcal{R}x$ olmak üzere $\mathcal{M}, x \models p$'dir ve bundan dolayıda x, w olarak seçilebilir. O halde $w\mathcal{R}w$ yani, $\mathcal{R}$ bağıntısı yansımalıdır.

($\Leftarrow$): $\mathcal{R}$ bağıntısı yansımalı ve $\mathcal{M}, w \models \Box p$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $w\mathcal{R}w$ ve $w\mathcal{R}x$ olacak şekilde her $x \in W$ için $\mathcal{M}, x \models p$'dir. O halde, $\mathcal{M}, w \models p$ ve buradanda $\mathcal{M}, w \models \Box p \to p$ elde edilir.

$\boxtimes$

Teorem 2.2.21. $\Box p \to \Box\Box p$ *formülünün* $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R}\rangle$ *çatısında geçerli olması için gerek ve yeter koşul* $\mathcal{R}$ *bağıntısının geçişli olmasıdır.*

İspat. $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R}\rangle$ bir Kripke çatı ve $\mathcal{M}$ modeli $\mathcal{F}$ çatısı üzerinde tanımlı olsun.

($\Rightarrow$): $\Box p \to \Box\Box p$ formülü $\mathcal{F}$ çatısında geçerli ve $w\mathcal{R}x$, $x\mathcal{R}y$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, geçerlilik tanımından $\mathcal{M}, w \models \Box p$ ise $\mathcal{M}, w \models \Box\Box p$'dir. Tanım 2.2.12 (v) ile $\mathcal{M}, x \models \Box p$ ve bundan dolayı $\mathcal{M}, y \models p$'dir. O halde $w\mathcal{R}y$ yani, $\mathcal{R}$ bağıntısı geçişlidir.

($\Leftarrow$): $\mathcal{R}$ bağıntısı geçişli ve $\mathcal{M}, w \models \Box p$, $w\mathcal{R}x$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $x\mathcal{R}y$ ise $w\mathcal{R}y$ ve $\mathcal{M}, y \models p$'dir. Bundan dolayı, $\mathcal{M}, w \models \Box\Box p$ elde edilir. O halde $\mathcal{F} \models \Box p \to \Box\Box p$'dir.

$\boxtimes$

Teorem 2.2.22. $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ *formülünün* $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R}\rangle$ *çatısında geçerli olması için gerek ve yeter koşul* $\mathcal{R}$ *bağıntısının geçişli ve tersinin iyi-temellendirilmiş olmasıdır.*

İspat. $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R}\rangle$ bir Kripke çatı ve $\mathcal{M}$ modeli $\mathcal{F}$ çatısı üzerinde tanımlı olsun.

($\Rightarrow$): $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ formülünün $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R}\rangle$ çatısında geçerli olduğunu varsayalım. Bu durumda $\mathcal{R}$ bağıntısının geçişli ve tersinin iyi-temellendirilmiş olduğunu göstermeliyiz.

$\mathcal{R}$ bağıntısı geçişlidir: Örnek 2.2.9 ile $\Box p \to \Box\Box p$ formülünün $\mathcal{F}$ çatısında geçerli olduğunu, Teorem 2.2.21 ile de $\mathcal{R}$'nin geçişli olduğunu söyleyebiliriz.

$\mathcal{R}$ bağıntısının tersi iyi-temellendirilmiştir: X boştan farklı ve bir en büyük $\mathcal{R}$ elemanı olmayan bir küme olsun. $w \in X$ ve $\mathcal{F}$ üzerinde bir doğruluk değer ataması $V(p) = \{a \mid a \notin X\}$ ile tanımlansın. $x \in W$ için $w\mathcal{R}x$ ve $x \not\models p$ olduğunu varsayalım. $x \notin V(p)$ olduğundan, $x \in X$'tir. $x\mathcal{R}y$ olacak şekilde herhangi bir $y \in X$ için $y \in W$ ve $y \notin V(p)$'dir. O halde, $x \not\models \Box p$'dir. Bundan dolayı $x \models \Box p \to p$ ve $w\mathcal{R}x$ olduğundan $w \models \Box(\Box p \to p)$ elde edilir. $w \in X$ olduğunudan, herhangi bir $x \in X$ için $w\mathcal{R}x$ ve $x \in W$'dır. O halde $x \not\models p$ ve $w \not\models \Box p$'dir.

Böylece $w \not\models \Box(\Box p \to p) \to \Box p$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bundan dolayı, $\mathcal{R}$ bağıntısının tersi iyi-temellendirilmiştir.

O halde, $\mathcal{R}$ bağıntısı geçişlidir ve tersi iyi-temellendirilmiştir.

($\Leftarrow$): $\mathcal{R}$'nin geçişli ve tersinin iyi-temellendirilmiş olduğunu varsayalım. Ayrıca $w \not\models \Box p$ ve $X = \{x \in W : w\mathcal{R}x \wedge x \not\models p\}$ olsun. $w \not\models \Box p$ olduğundan, herhangi bir z için $w\mathcal{R}z$ ve $z \not\models p$'dir. Bundan dolayı $z \in X$ yani, X boştan farklıdır. $\mathcal{R}$'nin tersi iyi-temellendirilmiş olduğundan, herhangi bir $x \in X$ ve $x\mathcal{R}y$ için $y \notin X$'tir. $x \in X$ olduğundan, $w\mathcal{R}x$ ve $x \not\models p$'dir. $x\mathcal{R}y$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $y \notin X$ ve $\mathcal{R}$ bağıntısının geçişliliği ile $w\mathcal{R}y$ olduğundan $y \models p$'dir. Bundan dolayı, $x \models \Box p$, $x \not\models \Box p \to p$ ve $w \not\models \Box(\Box p \to p)$'dir. O halde, $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ formülü $\langle W, \mathcal{R}\rangle$ çatısında geçerlidir.

⊠

Teorem 2.2.23. *$\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R}\rangle$ sonlu ve geçişli bir çatı olsun. Bu durumda, $\mathcal{R}$ bağıntısının tersinin iyi-temellendirilmiş olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{R}$ bağıntısının yansımasız olmasıdır.*

İspat. $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R}\rangle$ çatısı sonlu ve geçişli olsun.

($\Rightarrow$): $\mathcal{R}$ bağıntısı yansımasız ancak iyi-temellendirilmiş olsun. Bu durumda, $x_0\mathcal{R}x_1\mathcal{R}\cdots$ olacak şekilde sonsuz bir dizi vardır. $\mathcal{F}$ sonlu olduğundan, herhangi bir $m < n$ için $x_m = x_n$'dir. $\mathcal{R}$ bağıntısının geçişliliğinden $x_m\mathcal{R}x_n$ elde edilir. Bu durumda $x_m\mathcal{R}x_m$ olacaktır ki bu bir çelişkidir. O halde $\mathcal{R}$ bağıntısının tersi iyi-temellendirilmiştir.

($\Leftarrow$): $\mathcal{R}$ bağıntısının tersi iyi-temellendirilmiş ve yansımalı olsun. Bu durumda, herhangi bir $w \in W$ için $w\mathcal{R}w$ olur, yani herhangi bir w dünyası için $w\mathcal{R}x$ olacak şekilde her zaman bir $x = w$ dünyası vardır. Bu bir çelişkidir. O halde $\mathcal{R}$ bağıntısı yansımasızdır.

⊠

Şimdi, çatılar ve modeller için homomorfizma ve izomorfizma tanımlarını verelim.

Tanım 2.2.24. *$\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R}\rangle$ ve $\mathcal{F}' = \langle W', \mathcal{R}'\rangle$ iki çatı olsun. $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ fonksiyonu aşağıdakini sağlarsa bir* ***homomorfizma*** *olarak adlandırılır:*

Her $w, v \in W$ için $w\mathcal{R}v$ ise $f(w)\mathcal{R}'f(v)$'dir.

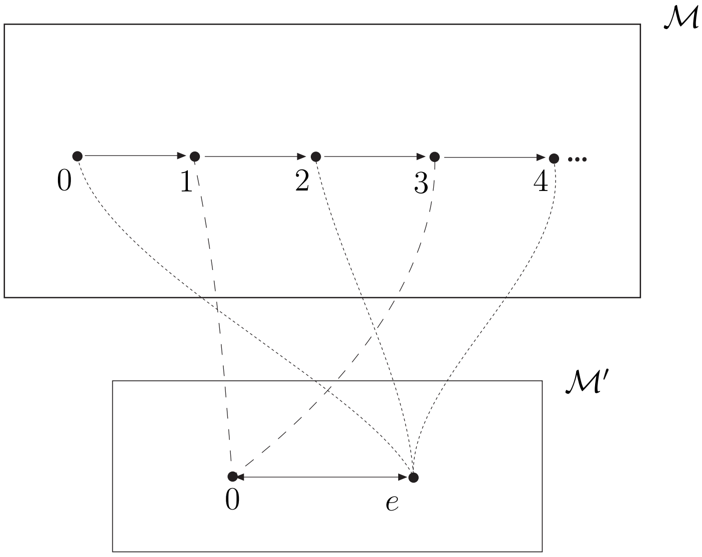
Tanım 2.2.25. *$\mathcal{M} = \langle W, \mathcal{R}, V\rangle$ ve $\mathcal{M}' = \langle W', \mathcal{R}', V'\rangle$ iki model olsun. $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ fonksiyonu aşağıdakileri sağlarsa bir* ***homomorfizma*** *olarak adlandırılır:*

(i) *Herbir önerme değişkeni p ve her $w \in W$ için $w \in V(p)$ ise $f(w) \in V'(p)$,*

(ii) *Her $w, v \in W$ elemanı için $w\mathcal{R}v$ ise $f(w)\mathcal{R}'f(v)$'dir.*

Örnek 2.2.26. *$\mathcal{M} = \langle W, \mathcal{R}, V\rangle$ ve $\mathcal{M}' = \langle W', \mathcal{R}', V'\rangle$ aşağıdaki gibi tanımlı iki model olsun.*

$$\begin{array}{lcl} W & = & \mathbb{N} \\ \mathcal{R} & = & \{(n, n+1) \mid \forall n \in \mathbb{N}\} \\ V(p) & = & \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{\textit{çifttir}}\} \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{lcl} W' & = & \{e, o\} \\ \mathcal{R}' & = & \{(e, o), (o, e)\} \\ V'(p) & = & \{e\} \end{array}$$



Şekil 2.2: $\mathcal{M}$ modeli ile $\mathcal{M}'$ modeli arasındaki homomorfizma.

$$f(n) = \begin{array}{ll} e, & n \text{ \textit{çift ise}} \\ o, & n \text{ \textit{tek ise}} \end{array}$$

Şeklinde tanımlanan f fonksiyonu, $\mathcal{M}$ modelinden $\mathcal{M}'$ modeline bir homomorfizmadır.

İspat. f fonksiyonunun bir homomorfizma olduğunu göstermek için homomorfizma tanımının koşullarını gerçekleyelim.

(i) $n \in V(p)$ olsun. Bu durumda, doğruluk değer atamasından n'in çift olduğunu biliyoruz. O halde, $f(n) = e$ ve bundan dolayı $f(n) \in V'(p)$'dir.

(ii) $n\mathcal{R}n + 1$ olsun. Bu durumda iki olasılık söz konusudur: n çifttir ya da tektir. İlk olarak n'in çift olduğunu varsayalım. Bu durumda, $n + 1$ tektir ve bundan dolayı $f(n) = e$, $f(n+1) = o$'dur. O halde, $f(n)\mathcal{R}'f(n+1)$ elde edilir. Şimdide n'in tek olduğunu varsayalım. Bu durumda, $n+1$ çift ve bundan dolayı $f(n) = o$, $f(n+1) = e$'dir. O halde, $f(n)\mathcal{R}'f(n+1)$ elde edilir.

$\boxtimes$

Tanım 2.2.27. *$\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R}\rangle$ ve $\mathcal{F}' = \langle W', \mathcal{R}'\rangle$ iki model olsun. $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ fonksiyonu aşağıdaki sağlanırsa bir* ***kuvvetli homomorfizma*** *olarak adlandırılır:*

Her $w, v \in W$ için $w\mathcal{R}v$ olması için gerek ve yeter koşul $f(w)\mathcal{R}'f(v)$ olmasıdır.

Tanım 2.2.28. *$\mathcal{M} = \langle W, \mathcal{R}, V\rangle$ ve $\mathcal{M}' = \langle W', \mathcal{R}', V'\rangle$ iki model olsun. $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ fonksiyonu aşağıdakiler sağlanırsa bir* ***kuvvetli homomorfizma*** *olarak adlandırılır:*

(i) *Herbir önerme değişkeni p ve her $w \in W$ için $w \in V(p)$ olması için gerek ve yeter koşul $f(w) \in V'(p)$ olmasıdır.*

(ii) *Her $w, v \in W$ için $w\mathcal{R}v$ olması için gerek ve yeter koşul $f(w)\mathcal{R}'f(v)$ olmasıdır.*

Tanım 2.2.29. *Bijektif kuvvetli homomorfizmaya* ***izomorfizma*** *denir. $\mathcal{F}$ çatısından $\mathcal{F}'$ çatısına bir izomorfizma var ise $\mathcal{F}$ çatısı, $\mathcal{F}'$ çatısına izomorftur denir ve $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'$ ile gösterilir. Benzer şekilde $\mathcal{M}$ modelinden $\mathcal{M}'$ modeline bir izomorfizma var ise $\mathcal{M}$ modeli, $\mathcal{M}'$ modeline izomorftur denir ve $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$ ile gösterilir.*

Örnek 2.2.30. *$\mathcal{F} = \langle\{0,1\}, =\rangle$ ve $\mathcal{F}' = \langle\{0,1\}, \leq\rangle$ iki çatı olsun. $\{0,1\}$'den $\{0,1\}$'e bir birim fonksiyon f, bijektif bir homomorfizmadır. Ancak izomorfizma değildir.*

İspat. f'nin bir bijeksiyon olduğunu gösterelim.

f 1-1'dir: $f(w) = f(v)$ olsun. f birim fonksiyon olduğu için $f(w) = w$ ve $f(v) = v$ dir. Bundan dolayı, $w = v$'dir. O halde, f 1-1 bir fonksiyondur.

f örtendir: Her w icin, $f(v) = w$ olacak şekilde bir $v \in \{0,1\}$ olduğunu göstermeliyiz. İlk olarak $w = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $f(v) = w$ olacak şekilde bir v dünyası vardır öyle ki fonksiyonun tanımından bu $v = 0$ olmalıdır. Şimdide $w = 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $f(v) = w$ olacak şekilde bir v dünyası vardır öyle ki fonksiyonun tanımından bu $v = 1$ olmalıdır. O halde, f fonksiyonu örtendir.

f bir homomorfizmadır: her $w, v \in \{0,1\}$ elemanı için $w = v$ ise $f(w) \leq f(v)$ olduğunu göstermeliyiz. İki durum söz konusudur. İlk olarak $w = 0$ ve $w = v$ olsun. Bu durumda, $v = 0$'dır. f birim fonksiyon olduğu için $f(0) = 0$ (yani

$f(w) = 0 = f(v)$)'dır. O halde, $f(w) \leq f(v)$ elde edilir. Şimdide $w = 1$ ve $w = v$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $v = 1$'dir. f birim fonksiyon olduğu için $f(1) = 1$ (yani $f(w) = 1 = f(v)$)'dir. O halde, $f(w) \leq f(v)$ elde edilir.

$f(w) = 0$ ve $f(v) = 1$ için $f(w) \leq f(v)$ iken $w = v$ olmadığından f kuvvetli homomorfizma değildir. O halde, f bir izomorfizma değildir. $\boxtimes$

Örnek 2.2.31. *Örnek 2.2.30'daki $\mathcal{F}$ çatısının bağıntısı $\leq$ ile değiştirilirse, $g : \langle\{0,1\}, \leq\rangle \to \langle\{0,1\} \leq\rangle$ şeklinde tanımlanan g birim fonksiyonu bir izomorfizmadır.*

İspat. g fonksiyonunun bijektif bir homomorfizma olduğu Örnek 2.2.28'dekine benzer şekilde yapılır. Bu durumda sadece her $w, v \in \{0,1\}$ için $g(w) \leq g(v)$ ise $w \leq v$ olduğunu göstermek yeterlidir. O halde, üç durum söz konusudur;

- $w = 0$ ve $v = 0$ olsun. $f(0) \leq f(0)$ ise, $0 \leq 0$ dır,
- $w = 0$ ve $v = 1$ olsun. $f(0) \leq f(1)$ ise, $0 \leq 1$ dir,
- $w = 1$ ve $v = 1$ olsun. $f(1) \leq f(1)$ ise, $1 \leq 1$ sağlanır.

O halde, g fonksiyonu bir izomorfizmadır.

$\boxtimes$

Bölüm 3

Sağlamlık ve Tamlık Teoremleri

Bir mantığın sintaksı ve semantiği arasındaki ilişki sağlamlık ve tamlık teoremleri ile verilir. Bir **S** modal mantığının sağlamlık teoremi, **S** mantığından sonlu adımda türetilebilen her formülün, bir **S** çatısındaki her dünyada doğru olduğunu ifade eder. Tamlık teoremi ise sağlamlık teoreminin tersidir: Bir **S** çatısındaki her dünyada doğru olan herhangi bir formülün **S** mantığında bir türetimi vardır. Sağlamlık teoremlerinin ispatı formüllerin karmaşıklığı üzerinde tümevarım ile yapılırken tamlık teoremlerinin ispatı formülleri gerçekleyecek uygun modelin oluşturulmasına dayanır.

Bu bölümde **K**, **S4** ve **GL** modal mantıklarının sağlam ve tam oldukları kanıtlanacaktır.

3.1 K, S4 ve GL Modal Mantıklarında Sağlamlık Teoremleri

Tanım 3.1.1. **S** *modal mantığı ile karakterize edilen çatılar sınıfı* $\{\mathcal{F} \mid$ *her* $\varphi \in \mathbf{S}$ *için* $\mathcal{F} \models \varphi\}$ *ile tanımlanır ve* $Char(\mathbf{S})$ *ile gösterilir.*

Tanım 3.1.2. $\mathcal{C}$ *bir çatılar sınıfı olsun. Her* φ *formülü ve her* $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ *olmak üzere* $\vdash_{\mathbf{S}} \varphi$ *iken* $\mathcal{F} \models \varphi$ *oluyorsa* **S** *modal mantığı* $\mathcal{C}$ ***çatılar sınıfına göre sağlamdır*** *denir.*

Teorem 3.1.3 (K için Zayıf Sağlamlık Teoremi). $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$ *ise* $\models \varphi$*'dir.*

İspat. φ formülünün türetiminin uzunluğu üzerinde tümevarım ile yapılır. $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$ olduğunu varsayalım.

Temel adım: φ formülünün türetiminin uzunluğu 1 olsun. Bu durumda, φ ya bir aksiyom ya da bir totolojidir.

φ formülü bir totoloji olsun. Totolojiler her modelde doğru olduğundan $\models \varphi$ olduğu aşikardır.

φ formülü $\Box(\psi \to \chi) \to (\Box\psi \to \Box\chi)$ aksiyomu olsun. $\vdash \Box(\varphi \to \psi)$ ve $\vdash \Box\psi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, teorem $\Box(\psi \to \chi)$ ve $\Box\psi$ formülleri için doğrudur yani, herhangi bir $\mathcal{M}$ modeli ve w dünyası için $\mathcal{M}, w \models \Box(\psi \to \chi)$ ve $\mathcal{M}, w \models \Box\psi$'dir. Tanım 2.2.12 (v) ile $w\mathcal{R}w'$ olacak şekilde her w' dünyası için $\mathcal{M}, w' \models \psi \to \chi$ ve $\mathcal{M}, w' \models \psi$'dir. Bundan dolayı, $\to$'li formüllerin doğruluk tanımından her w' dünyası için $\mathcal{M}, w' \models \chi$ elde edilir. Tanım 2.2.12 (v) ile $\mathcal{M}, w \models \Box\chi$'dir. O halde, $\models \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$'dir.

Tümevarım Hipotezi: φ formülünün türetiminin uzunluğu $n+1$ ve teorem türetiminin uzunluğu $n+1$'den küçük olan formüller için doğru olsun.

Tümevarım adımı: Teoremin, MP ve NR türetim kuralları altında korunduğunu göstermeliyiz.

Teorem $\psi \to \varphi$ ve ψ formülleri için doğru yani, $\vdash_{\mathbf{K}} \psi \to \varphi$ ise $\models \psi \to \varphi$ ve $\vdash_{\mathbf{K}} \psi$ ise $\models \psi$ olsun. O halde, MP kuralı ile $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$'dir. Bu durumda, her $\mathcal{M}$ modelindeki her w dünyası için $\mathcal{M}, w \models \psi \to \varphi$ ve $\mathcal{M}, w \models \psi$'dir. $\to$'li formüllerin doğruluk tanımından her $w \in \mathcal{M}$ için $\mathcal{M}, w \models \varphi$ elde edilir yani, $\models \varphi$'dir.

Teorem ψ formülü için doğru yani, $\vdash_{\mathbf{K}} \psi$ ise $\models \psi$ olsun. $\varphi \Leftrightarrow \Box\psi$ olduğunu varsayalım. O halde, NR ile $\vdash_{\mathbf{K}} \Box\psi$'dir. Herhangi bir $\mathcal{M}$ modelindeki w dünyası için $\mathcal{M}, w \not\models \Box\psi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $w\mathcal{R}w'$ olcak şekilde herhangi bir $w' \in \mathcal{M}$ için $\mathcal{M}, w' \not\models \psi$ yani, $\not\models \psi$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $\models \Box\psi$ yani, $\models \varphi$'dir.

$\boxtimes$

Teorem 3.1.4 (K için Sağlamlık Teoremi). *$\varphi_1, \cdots, \varphi_n \vdash_{\mathbf{K}} \psi$ ise $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \models \psi$'dir.*

İspat. $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \vdash_{\mathbf{K}} \psi$ olsun. $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \models \psi$ olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda türetim teoremi ile

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \vdash_{\mathbf{K}} \psi$$
$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1} \vdash_{\mathbf{K}} (\varphi_n \to \psi)$$
$$\vdots$$
$$\varphi_1 \vdash_{\mathbf{K}} \varphi_2 \to (\cdots(\varphi_n \to \psi)\cdots)$$

$$\vdash_{\mathbf{K}} \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots(\varphi_n \to \psi)\cdots))$$

elde edilir. Teorem 3.1.3 ile $\models \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots(\varphi_n \to \psi)\cdots))$'dir, yani her $\mathcal{M}$ modeli ve $w \in W$ için

$$\mathcal{M}, w \models \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots(\varphi_n \to \psi)\cdots))$$
$$\mathcal{M}, w \models \varphi_1 \Rightarrow \mathcal{M}, w \models \varphi_2 \to (\varphi_3 \to (\cdots(\varphi_n \to \psi)\cdots))$$
$$\mathcal{M}, w \models \varphi_1 \text{ ve } \mathcal{M}, w \models \varphi_2 \Rightarrow \mathcal{M}, w \models \varphi_3 \to (\cdots(\varphi_n \to \psi)\cdots)$$

sağlanır. O halde, her $\mathcal{M}$ modeli ve w dünyası için $\mathcal{M}, w \models \varphi_1, \cdots, \mathcal{M}, w \models \varphi_n$ ise $\mathcal{M}, w \models \psi$ ve bundan dolayı $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \models \psi$'dir.

⊠

Teorem 3.1.5 (K için Kuvvetli Sağlamlık Teoremi). $\Delta \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$ *ise* $\Delta \models \varphi$*'dir.*

İspat. $\Delta \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$ olsun. $\Delta \models \varphi$ olduğunu göstermeliyiz. Her türetim sonlu uzunlukta olduğundan φ formülünün türetimi Δ'dan sadece sonlu sayıda öncül içerir. Bu nedenle, sonlu bir $\Delta' \subseteq \Delta$ vardır öyle ki $\Delta' \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$'dir. Bu durumda $\psi_1, \cdots, \psi_n$ formüllerin sonlu bir dizisi olmak üzere $\psi_1, \cdots, \psi_n \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$ olur. Sağlamlık teoremi ile $\psi_1, \cdots, \psi_n \models \varphi$ elde edilir. O halde $\Delta' \subseteq \Delta$ olduğundan, $\Delta \models \varphi$'dir.

⊠

Teorem 3.1.6 (S4 için Sağlamlık Teoremi). $\vdash_{\mathbf{S4}} \varphi$ *ise* φ *formülü tüm geçişli ve yansımalı çatılarda geçerlidir.*

İspat. **K** için Zayıf Sağlamlık Teoremi'nin ispatına benzerdir. Burada ek olarak teoremin **S4** modal mantığının aksiyomlarını sağladığını göstermeliyiz ki bu Teorem 2.2.20 ve Teorem 2.2.21'de gösterilmiştir.

⊠

Teorem 3.1.7 (GL için Sağlamlık Teoremi). $\vdash_{\mathbf{GL}} \varphi$ *ise* φ *formülü tüm geçişli ve tersi iyi-temellendirilmiş (denk olarak tüm sonlu, geçişli ve yansımasız) çatılarda geçerlidir.*

İspat. **K** için Zayıf Sağlamlık Teoremi'nin ispatına benzerdir. Burada ek olarak teoremin Löb aksiyomu içinde sağlandığını göstermeliyiz ki bu Teorem 2.2.22'de gösterilmiştir.

⊠

3.2 K, S4 ve GL Modal Mantıklarında Tamlık Teoremleri

Bir modal mantıkta tamlık ve kuvvetli tamlık teoremlerinin ispatı, ilgili mantığın formüllerini gerçekleyen modellerin var olduğunu göstermeye dayalıdır. Bu bölümde bu modelleri oluşturma yöntemlerinden olan kanonik model yöntemi, sonlu Henkin yöntemi ve filtreleme yöntemi verilerek **K**, **S4** ve **GL** modal mantıklarının tam oldukları kanıtlanacaktır.

Tanım 3.2.1. **S** *bir modal mantık ve* $\mathcal{C}$*,* **S** *için bir çatılar sınıfı olmak üzere aşağıdakiler vardır:*

(i) *Herhangi bir* Γ *formül kümesi için* Γ*,* **S***'de* φ*'yi semantik olarak gerektiriyorsa* φ*,* Γ*'dan* **S**-***türetilebilirdir*** *denir. Bu sembollerle,* $\Gamma \models_{\mathbf{S}} \varphi$ *ise* $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \varphi$ *biçiminde gösterilir.*

(ii) *Tüm sonlu* Γ*'lar için (i) koşulu gerçekleniyorsa,* **S** *modal mantığı* $\mathcal{C}$ *çatılar sınıfına göre* ***kuvvetli tamdır*** *denir.*

(iii) *Herhangi bir* φ *formülü için* $\mathcal{C} \models \varphi$ *iken* $\vdash_{\mathbf{S}} \varphi$ *oluyorsa,* **S***'ye* $\mathcal{C}$ *sınıfına göre* ***tamdır*** *denir.*

(iv) *Tamlık, kuvvetli tamlığın* Γ*'nın boş küme olduğu özel durumudur. Bu durumda, bir* **S** *modal mantığı* $\mathcal{C}$*'ye göre kuvvetli tam ise* $\mathcal{C}$*'ye göre tamdır. Ancak tersi doğru değildir.*

3.2.1 Kanonik Model

Bu kesimde, herhangi bir **S** modal mantığının kanonik modelini tanımlayacağız. Bu model $\Phi \nvdash_{\mathbf{S}} \psi$'yi sağlayan her ψ formülü ve her Φ formül kümesi için Φ'nin tüm elemanlarının doğru, ψ'nin ise yanlış olduğu bir karşıt örnek verir. Kanonik modeller maksimal tutarlı formül kümeleri aracılığı ile tanımlanırlar. Bu nedenle önce tutarlı ve maksimal tutarlı formül kümelerini inceleyelim.

Tanım 3.2.2. *Bir* Γ *formül kümesinin* **S**-***tutarlı*** *olması için gerek ve yeter koşul* $\Gamma \nvdash_{\mathbf{S}} \perp$ *olmasıdır.*

Tanım 3.2.3. *Bir* Γ *formül kümesinin* ***maksimal*** **S**-***tutarlı*** *olması için gerek ve yeter koşul* Γ *kümesinin* **S***-tutarlı ve* $\Gamma \subset \Gamma'$ *olacak şekilde bir* **S***-tutarlı* Γ' *kümesinin bulunmamasıdır.*

Lemma 3.2.4. *Bir* Γ *formül kümesinin maksimal tutarlı olması için gerek ve yeter koşul* Γ *kümesinin tutarlı ve her* φ *formülü için* $\varphi \notin \Gamma$ *ise* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *kümesinin tutarsız olmasıdır.*

İspat.

($\Rightarrow$): Γ maksimal tutarlı bir formül kümesi olsun. Bu durumda, Tanım 3.2.3'ten Γ kümesi tutarlı ve $\Gamma \subset \Gamma'$ olacak şekilde bir **S**-tutarlı Γ' kümesi yoktur. $\varphi \notin \Gamma$ olduğundan, Γ' kümesini $\Gamma \cup \{\varphi\}$ olarak seçebilir. O halde, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ tutarsızdır.

($\Leftarrow$): Γ tutarlı ve her φ için $\varphi \notin \Gamma$ ise $\Gamma \cup \{\varphi\}$ tutarsız olsun. Ayrıca Γ'nın maksimal tutarlı olmadığını varsayalım. Bu durumda, $\Gamma \subset \Gamma'$ olacak şekilde tutarsız bir Γ' kümesi vardır yani, $\Gamma' \vdash \bot$'dur. O halde, Γ' kümesinin sonlu bir alt kümesi $\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$'den $\bot$'un bir türetimi vardır. Bu durumda, herhangi $\phi_1, \cdots, \phi_n$ formülleri için $\Gamma \cup \{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$ ve dolayısı ile $\Gamma \cup \{\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n\}$ kümesinden $\bot$'un bir türetimi vardır. O halde, $\Gamma \vdash \bot$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

$\boxtimes$

Kanonik modelleri inşa ederken önce maksimal tutarlı formül kümelerinin bir kolleksiyonu ve bu koleksiyonun elemanları dünyalar olarak alınır ve bu dünyalar arasındaki ilişkiler incelenir. Herhangi bir **S** modal mantığı için her $\mathcal{M}$ modelindeki her w dünyası bir maksimal **S**-tutarlı $\{\varphi \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$ formül kümesi ile ilişkilidir yani, φ formülü **S** modal mantığının herhangi bir modelinde doğru ise, φ formülü bir maksimal **S**-tutarlı küme tarafından içerilir. Dolayısıyla $\mathcal{M}$ modelinde tutarlı kümelerin içerdiği bilgiler w ile w' dünyaları bağıntılı ise, birbirleriyle tutarlı olarak ilgilidir. Bir diğer deyişle kanonik model tutarlı bir şekilde birbiriyle bağlantılı maksimal tutarlı kümelerin kolleksiyonunu verir. Her biri bir maksimal tutarlı formül kümesi olan bu dünyalarda bir formülün doğruluk kavramını vermek için Truth Lemma ispatlanır.

Aşağıdaki lemma herhangi bir tutarlı formül kümesinin bir maksimal tutarlı kümeye genişletilebileceğini söyler.

Lemma 3.2.5 (Lindenbaum Lemması). *Her* **S**-*tutarlı* Γ *kümesi için* $\Gamma' \supseteq \Gamma$ *olacak şekilde bir maksimal* **S**-*tutarlı* Γ' *kümesi vardır.*

İspat. Γ, **S**-tutarlı bir küme olsun. $\Gamma' \supseteq \Gamma$ olacak şekilde bir maksimal **S**-tutarlı Γ' kümesi olduğunu göstermeliyiz. Dildeki formüllerin bir numaralnışı $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n, \cdots$ biçiminde olsun. n üzerinde tümevarım ile formül kümelerinin bir dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

$$\text{Her } n \geq 1 \text{ için}, \Gamma_n = \begin{array}{ll} \Gamma_{n-1} \cup \{\psi_n\}, & \text{eğer } \mathbf{S}\text{-tutarlı ise} \\ \Gamma_{n-1} \cup \{\neg\psi_n\}, & \text{diğer durumda} \end{array}$$

$$\Gamma' = \quad {}_{n\geq 0}\,\Gamma_n.$$

- İlk olarak, n üzerinde tümevarım ile Γ_n kümesinin **S**-tutarlı olduğunu gösterelim:

$n = 0$ için $\Gamma_0 = \Gamma$'dır ve hipotezden Γ_n, **S**-tutarlıdır.

Herhangi bir n için Γ_n kümesinin **S**-tutarlı olduğunu varsayalım. Bu durumda, Γ_{n+1} kümesinin **S**-tutarlı olduğunu göstermeliyiz. $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\psi_{n+1}\}$ ise tanımdan Γ_{n+1} kümesi **S**-tutarlıdır. $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\psi_{n+1}\}$ ise Γ_{n+1}'in tanımından $\Gamma_n \cup \{\psi_{n+1}\}$ **S**-tutarsızdır. Bu nedenle, $\Gamma_n \cup \{\psi_{n+1}\} \vdash \bot$ dur ve Türetim Teoremi'nden $\Gamma_n \vdash \psi_{n+1} \to \bot$ elde edilir. O halde, $\Gamma_n \vdash \neg\psi_{n+1}$'dir.

Γ_{n+1} kümesinin **S**-tutarsız olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\psi_{n+1}\} \vdash \bot$'dur. Türetim Teoremi ile $\Gamma_n \vdash \neg\psi_{n+1} \to \bot$ yani, $\Gamma_n \vdash \neg\neg\psi_{n+1}$ elde edilir. O halde, $\Gamma_n \vdash \psi_{n+1}$'dir.

$\Gamma_n \vdash \psi_{n+1}$ ve $\Gamma_n \vdash \neg\psi_{n+1}$ olduğundan Γ_n kümesi **S**-tutarsızdır ki bu bir çelişkidir. O halde Γ_{n+1} **S**-tutarlıdır ve bundan dolayı her n için Γ_n kümesi **S**-tutarlıdır.

- İkinci olarak, Γ' kümesinin **S**-tutarlı olduğunu gösterelim:

Γ' kümesinin **S**-tutarsız olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\varphi_1, \cdots, \varphi_k \vdash \bot$ olacak şekilde $\varphi_1, \cdots, \varphi_k \in \Gamma'$ vardır. $\Gamma' = \quad {}_{n\geq 0}\Gamma_n$ olduğundan, $\varphi_1 \in \Gamma_{n_1}, \cdots, \varphi_k \in \Gamma_{n_k}$ olacak şekilde $n_1, \cdots, n_k$ vardır. $m = max\{n_1, \cdots, n_k\}$ olsun. Bu durumda, $\Gamma_{n_1} \subseteq \Gamma_m, \cdots, \Gamma_{n_k} \subseteq \Gamma_m$ ve bundan dolayı $\varphi_1, \cdots, \varphi_k \in \Gamma_m$ vardır. O halde, $\Gamma_m \vdash \bot$ elde edilir yani Γ_m **S**-tutarsızdır. Bu bir çelişkidir. O halde, Γ' kümesi **S**-tutarlıdır.

- Üçüncü olarak, Γ' kümesinin maksimal **S**-tutarlı olduğunu gösterelim:

φ keyfi bir formül olsun. $\varphi \notin \Gamma'$ ve bir n doğal sayısı için $\varphi = \psi_n$ olduğunu varsayalım. $\psi_n \notin \Gamma'$ olduğundan, $\psi_n \notin \Gamma_n$'dir. Bu durumda, $\Gamma_{n-1} \cup \{\psi_n\}$ kümesi **S**-tutarsızdır ve bundan dolayı $\Gamma' \cup \{\psi_n\}$ kümesi de **S**-tutarsızdır. O halde, Lemma 3.2.4'ten Γ' kümesi maksimal **S**-tutarlıdır.

$\boxtimes$

Aşağıdaki lemma maksimal tutarlı kümelerin özelliklerini verir.

Lemma 3.2.6 (Doğruluk Değer Ataması Lemması). Γ *maksimal* **S**-*tutarlı bir formül kümesi olmak üzere aşağıdakiler sağlanır;*

(i) $\varphi \in \Gamma$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \varphi$ *olmasıdır.*

(ii) $\varphi \in \Gamma$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\neg\varphi \notin \Gamma$ *olmasıdır.*

(iii) $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\varphi \in \Gamma$ *ve* $\psi \in \Gamma$ *olmasıdır.*

(iv) $\Box\varphi \in \Gamma$ *olması için gerek ve yeter koşul her* Γ' *formül kümesi için* $\Gamma \mathcal{R}_{\mathbf{S}} \Gamma'$ *ise* $\varphi \in \Gamma'$ *olmasıdır.*

İspat.

(i) ($\Rightarrow$): $\varphi \in \Gamma$ olsun. Bu durumda, $\varphi \vdash_{\mathbf{S}} \varphi$ ve Γ maksimal **S**-tutarlı olduğundan $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \varphi$'dir.

($\Leftarrow$): $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \varphi$ ve $\varphi \notin \Gamma$ olsun. Γ maksimal **S**-tutarlı olduğundan $\Gamma \cup \{\varphi\}$ **S**-tutarsızdır. Bu durumda, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathbf{S}} \perp$ ve Türetim Teoremi ile $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \varphi \to \perp$'dur. MP ile $\Gamma \vdash \perp$ elde edilir ki bu Γ kümesinin **S**-tutarsız olduğunu gösterir. Bu bir çelişkidir. O halde, $\varphi \in \Gamma$'dır.

(ii) ($\Rightarrow$): $\varphi \in \Gamma$ olsun. $\neg\varphi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. (i) ile $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \neg\varphi$ ve $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \varphi$'dir. Buradan $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \neg\varphi \wedge \varphi$ yani, $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \perp$ elde edilir. Γ kümesi **S**-tutarlı olduğundan bu bir çelişkidir. O halde, $\varphi \notin \Gamma$'dır.

($\Leftarrow$): $\varphi \notin \Gamma$ olsun. Γ maksimal tutarlı olduğundan, Lemma 3.2.4'ten $\Gamma \cup \{\varphi\}$ tutarsızdır. Bu durumda, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathbf{S}} \perp$ ve Türetim Teoremi ile $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \varphi \to \perp$ yani, $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \neg\varphi$'dir. O halde, (i)'den $\neg\varphi \in \Gamma$'dır.

(iii) ($\Rightarrow$): $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ olsun. (i)'den $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \varphi \wedge \psi$'dir. Ayrıca, $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ ve $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda, $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \varphi$ ve $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \psi$ elde edilir. O halde, (i)'den $\varphi \in \Gamma$ ve $\psi \in \Gamma$'dır.

($\Leftarrow$): $\varphi \in \Gamma$ ve $\psi \in \Gamma$ olsun. (i)'den $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \varphi$ ve $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \psi$ yani, $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \varphi \wedge \psi$'dir. O halde, (i)'den $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$'dır.

(iv) ($\Rightarrow$): $\Box\varphi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. Kanonik modelde $\mathcal{R}_{\mathbf{S}}$ bağıntısının tanımından, her Γ' için $\Gamma\mathcal{R}_{\mathbf{S}}\Gamma'$ vardır öyle ki $\varphi \in \Gamma'$ elde edilir.

($\Leftarrow$): $\forall\Gamma'(\Gamma\mathcal{R}_{\mathbf{S}}\Gamma' \Rightarrow \varphi \in \Gamma')$ olsun. $\Box\varphi \notin \Gamma$ olduğunu varsayalım. $\Gamma_1 = \{\psi \mid \Box\psi \in \Gamma\} \cup \{\neg\varphi\}$ olsun. Γ_1 kümesi **S**-tutarlı ise $\{\psi \mid \Box\psi \in \Gamma\} \vdash \varphi$ vardır. Türetimler sonlu olduğundan $\Box\psi_1, \cdots \Box\psi_n \in \Gamma$ ve $\psi_1, \cdots, \psi_n \vdash \varphi$ olacak şekilde $\psi_1, \cdots, \psi_n$ formülleri vardır. Türetim Teoremi'nden $\vdash \psi_1 \to (\cdots(\psi_n \to \varphi)\cdots)$ ve NR kuralı ile $\Box(\vdash \psi_1 \to (\cdots(\psi_n \to \varphi)\cdots))$ elde edilir. Normallik aksiyomu ve MP ile $\vdash \Box\psi_1 \to (\cdots(\Box\psi_n \to \Box\varphi)\cdots)$ elde edilir. $\Box\psi_1, \cdots \Box\psi_n \in \Gamma$ olduğundan MP ile $\vdash \Box\varphi$ yani $\Box\varphi \in \Gamma$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. O halde, Γ_1 kümesi **S**-tutarlıdır. Γ_1 kümesine Lindenbaum Lemma'sı uygulanırsa, $\Gamma_1 \subseteq \Gamma'$ olacak şekilde bir Γ' maksimal **S**-tutarlı kümesi elde edilir. O halde, $\neg\varphi \in \Gamma'$ vardır. Diğer taraftan, her ψ için eğer $\Box\psi \in \Gamma$ ise $\psi \in \Gamma'$ vardır. Bundan dolayı, $\Gamma\mathcal{R}_{\mathbf{S}}\Gamma'$ sağlanır. Yani $\Gamma\mathcal{R}_{\mathbf{S}}\Gamma'$ ve $\neg\varphi \in \Gamma'$ olacak şekilde maksimal **S**-tutarlı bir Γ' kümesi vardır. Ancak bu bir çelişkidir. O halde, $\Box\varphi \in \Gamma$'dır.

$\boxtimes$

Herhangi bir modal mantık için bir modelin dünyalar kümesi, dünyalar arasındaki ilişkiyi gösteren ulaşılabilirlik bağıntısı ve bir doğruluk değer ataması üçlüsünden oluştuğu kesim 2.2.2'de gösterilmişti. Şimdi benzer olarak Kanonik modeli tanımlayalım.

Tanım 3.2.7. **S** *modal mantığı için* ***Kanonik model*** $\mathcal{M}_{\mathbf{S}} = \langle W_{\mathbf{S}}, \mathcal{R}_{\mathbf{S}}, V_{\mathbf{S}}\rangle$ *aşağıdaki gibi tanımlanır:*

(i) $W_{\mathbf{S}} = \{\Gamma \mid \Gamma$ *maksimal* **S**-*tutarlıdır*$\}$,

(ii) $\mathcal{R}_{\mathbf{S}} = \{\langle\Gamma, \Gamma'\rangle \mid$ *her* φ *için* $\Box\varphi \in \Gamma$ *ise* $\varphi \in \Gamma'$ *dır*$\}$,

(iii) $V_{\mathbf{S}}(p) = \{\Gamma \in W_{\mathbf{S}} \mid$ *her önerme değişkeni* p *için* $p \in \Gamma\}$ *(denk olarak,* $\Gamma \models p$ *olması için gerek ve yeter koşul* $p \in \Gamma$ *olmasıdır).*

Şimdi doğruluk değer ataması $V_{\mathbf{S}}$'i formüllere genişletelim. Bunun için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 3.2.8 (Truth Lemması). Γ *maksimal* **S**-*tutarlı bir formül kümesi ve* φ *herhangi bir formül olmak üzere* $\Gamma \models \varphi$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\varphi \in \Gamma$ *olmasıdır.*

İspat. φ formülünün karmaşıklığı üzerinde tümevarım ile yapılır.

$\varphi : p$ olsun. Kanonik model tanımının (iii) koşulundan $\Gamma \models p$ olması için gerek ve yeter koşulun $p \in \Gamma$ olduğu aşikardır.

$\varphi : \neg\psi$ ve lemma ψ formülü için doğru olsun. $\neg\psi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. Lemma 3.2.6'nın (ii) koşulundan $\psi \notin \Gamma$ ve tümevarım hipotezi ile $\Gamma \not\models \psi$'dir. O halde, $\Gamma \models \neg\psi$ elde edilir.

$\varphi : \psi \wedge \chi$ ve lemma ψ, χ formülleri için doğru olsun. $\psi \wedge \chi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. Lemma 3.2.6'nın (iii) koşulundan $\psi \in \Gamma$ ve $\chi \in \Gamma$'dır. Tümevarım hipotezinden $\Gamma \models \psi$ ve $\Gamma \models \chi$'dir. O halde, $\Gamma \models \psi \wedge \chi$ elde edilir.

$\varphi : \Box\psi$ ve lemma ψ için doğru olsun. $\Box\psi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. Lemma 3.2.6'nın (iv) koşulundan her maksimal **S**-tutarlı Γ' kümesi için $\Gamma \mathcal{R}_{\mathbf{S}} \Gamma'$ öyle ki $\psi \in \Gamma'$'dür. Tümevarım hipotezinden her maksimal tutarlı Γ' kümesi için $\Gamma' \models \psi$'dir. Bu durumda, $\Gamma \models \Box\psi$ elde edilir.

$\boxtimes$

Teorem 3.2.9 (Kanonik Model Teoremi). *Herhangi bir modal mantık* **S**, *kanonik modeli $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}$'ye göre kuvvetli tamdır. Bu sembollerle şu şekilde gösterilir, $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}, \Gamma \models \varphi$ ise $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \varphi$'dir.*

İspat. Γ', **S** modal mantığında tutarlı bir küme olsun. Lindenbaum Lemma ile, Γ' kümesini genişleten bir maksimal tutarlı Γ kümesi vardır. Her $\varphi \in \Gamma$ için $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}, \Gamma \models \varphi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\varphi \in \Gamma$ olduğundan Doğruluk Değer Ataması Lemması'ndan $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \varphi$ elde edilir.

$\boxtimes$

Yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.10 (S-Tutarlılık Teoremi). *Γ,* **S***-tutarlı bir formül kümesi ise herhangi bir $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R} \rangle$ çatısı, $w \in W$ ve her $\varphi \in \Gamma$ için $w \models \varphi$ olacak şekilde bir doğruluk değer ataması vardır.*

İspat. Γ, **S**-tutarlı olsun. Lindenbaum Lemma ile, $\Gamma \subseteq \Gamma'$ olacak şekilde bir maksimal **S**-tutarlı Γ' kümesi vardır. $\varphi \in \Gamma$ ve $\Gamma \subseteq \Gamma'$ olduğundan, Truth Lemma ile $\Gamma' \models \varphi$ elde edilir. Bu durumda, her φ formülü için $w \models \varphi$ olacak şekilde bir tane doğruluk değer ataması vardır.

$\boxtimes$

Şimdi **K**'nın kuvvetli tamlığını tüm çatılar sınıfına göre kanıtlayacağız.

Teorem 3.2.11. **K** *modal mantığı tüm çatılar sınıfına göre kuvvetli tamdır.*

İspat. Γ, **K**-tutarlı bir formül kümesi olsun. Bu durumda her $\psi \in \Gamma$ için $\Gamma \models_{Char(\mathbf{K})} \psi$ ise $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \psi$ olduğunu göstermeliyiz.

İspat karşıt-ters yöntemiyle yapılır. Herhangi bir $\psi \in \Gamma$ için $\Gamma \nvdash_{\mathbf{K}} \psi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ **K**-tutarsızdır. $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ için **S**-tutarlılık Teoremi'nden en az bir $\mathcal{F}$ çatısı ve $w \in W$ vardır öyle ki her $\varphi \in \Gamma \cup \{\neg\psi\}$ için $w \models \varphi$'dir. $\neg\psi \in \Gamma \cup \{\neg\psi\}$ olduğundan $w \models \neg\psi$'dir. O halde, $w \not\models \psi$ ve $\Gamma \not\models_{Char(\mathbf{K})} \psi$'dir.

$\boxtimes$

Herhangi bir **S** modal mantığının $\mathcal{C}$ çatılar sınıfına göre kuvvetli tam olduğunu ispatlamak için birkaç yöntem vardır. **S**'in kanonik çatısının $\mathcal{C}$ çatılar sınıfına ait olduğunu göstermek yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir. Bu şekilde yapılan ispatlar kanoniklik yolu ile tamlık ispatları olarak adlandırılırlar. Bu yöntemle **S4** modal mantığının yansımalı ve geçişli çatılar sınıfına göre kuvvetli tam olduğunu gösterelim.

Tanım 3.2.12. **S4** *modal mantığının kanonik modeli* $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}} = \langle W_{\mathbf{S4}}, \mathcal{R}_{\mathbf{S4}}, V_{\mathbf{S4}} \rangle$ *aşağıdaki gibi tanımlanır:*

(i) $W_{\mathbf{S4}} = \{\Gamma \mid \Gamma$ *kümesi maksimal* **S4**-*tutarlıdır* $\}$,

(ii) $\mathcal{R}_{\mathbf{S4}} = \{\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle \mid$ *her* φ *formülü için* $\Box\varphi \in \Gamma_1$ *ise,* $\varphi \in \Gamma_2$ $\}$,

(iii) $V_{\mathbf{S4}}(p) = \{\Gamma \in W_{\mathbf{S4}} \mid$ *her önerme değişkeni* p *için* $p \in \Gamma\}$.

Teorem 3.2.13. **S4** *modal mantığı yansımalı ve geçişli çatılar sınıfına göre kuvvetli tamdır.*

İspat. Kanonik Model Teoremi'nden yararlanılarak yapılır. Bu durumda $\mathcal{R}_{\mathbf{S4}}$ bağıntısının geçişli ve yansımalı yani, $\mathcal{F}_{\mathbf{S4}} \in Char(\mathbf{S4})$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$\mathcal{R}_{\mathbf{S4}}$ yansımalıdır: her maksimal **S4**-tutarlı Γ kümesi için $\Gamma\mathcal{R}_{\mathbf{S4}}\Gamma$ olduğunu, yani $\Box\varphi \in \Gamma$ ise $\varphi \in \Gamma$ olduğunu göstermeliyiz. $\Box\varphi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. $\Box\varphi \vdash_{\mathbf{S4}} \varphi$ olduğundan

1. $\vdash_{\mathbf{S4}} \Box\varphi$ Öncül

2. $\vdash_{\mathbf{S4}} \Box\varphi \to \varphi$ Aksiyom T

3. $\vdash_{\mathbf{S4}} \varphi$ 1,2 MP

Lemma 3.2.6'dan $\varphi \in \Gamma$'dır.

$\mathcal{R}_{\mathbf{S4}}$ geçişlidir: her maksimal **S4**-tutarlı Γ_1, Γ_2 ve Γ_3 kümeleri için $\Gamma_1 \mathcal{R}_{\mathbf{S4}} \Gamma_2$ ve $\Gamma_2 \mathcal{R}_{\mathbf{S4}} \Gamma_3$ olsun. Ayrıca $\Box\varphi \in \Gamma_1$ olduğunu varsayalım. $\Box\varphi \vdash_{\mathbf{S4}} \Box\Box\varphi$ olduğundan;

1. $\vdash_{\mathbf{S4}} \Box\varphi$ Öncül
2. $\vdash_{\mathbf{S4}} \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ Aksiyom 4
3. $\vdash_{\mathbf{S4}} \Box\Box\varphi$ 1,2 MP

Lemma 3.2.6'dan $\Box\Box\varphi \in \Gamma$'dır. Kanonik çatıdaki $\mathcal{R}_{\mathbf{S}}$ bağıntısının tanımından $\Box\varphi \in \Gamma_2$ ve buradan $\varphi \in \Gamma_3$ elde edilir. O halde, $\Gamma_1 \mathcal{R}_{\mathbf{S4}} \Gamma_3$'tür.

$\boxtimes$

Tanım 3.2.14. **S** *bir modal mantık ve* **S**'*in kanonik modeli* $\mathcal{M}_{\mathbf{S}} = \langle \mathcal{F}_{\mathbf{S}}, V_{\mathbf{S}} \rangle$ *olsun.* **S** *modal mantığının kanonik olması için gerek ve yeter koşul* **S**'*in tüm teoremlerinin kanonik çatısı* $\mathcal{F}_{\mathbf{S}}$'*de geçerli olmasıdır.*

Tanım 3.2.13, Kanonik Model Teoremi ile kuvvetli tam olan **K** ve **S4** modal mantıklarının aynı zamanda kanonik oldukları sonucunu verir. Bu bize kanonik olmayan modal mantıklar var mıdır sorusunu çağrıştırır. Bu sorunun yanıtı evettir ve **GL** kanonik olmayan modal mantığa bir örnektir. **GL** modal mantığının kanonik olmadığı daha sonra kanıtlanacaktır.

3.2.2 Sonlu Model Özelliği

Bu kesimde, modal formüllerin gerçeklenebilirliği için sonlu model oluşturmanın iki yöntemi verilecektir. Bunlardan birincisi sonlu Henkin yöntemi iken, ikincisi filtreleme yöntemidir. Bu yöntemlerden yararlanarak **K**, **S4** ve **GL** modal mantıklarının sonlu model özelliğine sahip oldukları gösterilecektir.

Tanım 3.2.15. *Bir* **S** *modal mantığının* ***sonlu model özelliğine sahip*** *olması için gerek ve yeter koşul* $\nvdash_{\mathbf{S}} \varphi$'*yi sağlayan her* φ *formülü için aşağıdaki gibi tanımlı bir* $\mathcal{M} = \langle W, \mathcal{R}, \models \rangle$ *modelinin var olmasıdır.*

(i) W *sonlu bir küme,*

(ii) $\mathcal{M}$, **S**'*in bir modeli* ($\mathcal{M} \models \mathbf{S}$) *ve*

(iii) $\mathcal{M}$ *modeli* φ'*yi yanlışlar* ($\mathcal{M} \not\models \varphi$).

Tanım 3.2.16. φ *ve* ψ *birer fomül olmak üzere, bir formül kümesi* Σ'*nın* ***alt formülleri altında kapalı*** *olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakilerin sağlanmasıdır:*

(i) $\varphi \vee \psi \in \Sigma$ *ise* $\varphi \in \Sigma$ *ve* $\psi \in \Sigma$,

(ii) $\neg\varphi \in \Sigma$ *ise* $\varphi \in \Sigma$,

(iii) $\Box\varphi \in \Sigma$ *ise* $\varphi \in \Sigma$ *dır.*

Örnek 3.2.17. $\Sigma = \{\varphi \vee \psi, \Box\chi, \varphi, \psi, \chi\}$ *kümesi alt formüllerine kapalıdır.*

Tanım 3.2.18. *Bir* Φ *formül kümesi aşağıdakileri sağlarsa* ***yeterli*** *bir küme olarak adlandırılır:*

(i) $\varphi \in \Phi$ *ve* ψ *formülü* φ *formülünün bir alt formülü ise* $\psi \in \Phi$,

(ii) $\varphi \in \Phi$ *ve* φ *değillenmiş bir formül değil ise* $\neg\varphi \in \Phi$*'dir.*

Örnek 3.2.19. $\Phi = \{\varphi \vee \psi, \varphi, \psi, \neg\varphi, \neg\psi, \neg\varphi \wedge \neg\psi\}$ *kümesi yeterli bir formül kümesidir.*

3.2.2.1 Sonlu Henkin Yöntemi

Bu kesimde, verilen bir modelden bu modelin sonlu bir alt modelini elde etmeye dayanan sonlu Henkin yöntemi anlatılarak **K** modal mantığının sonlu model özelliğine sahip olduğu gösterilecektir.

Sonlu Henkin yöntemi, önceki kesimde tanımlanan kanonik model yönteminin bir özel halidir. Kanonik model tanımlanırken kullanılan maksimal **S**-tutarlı kümeler burada sonlu formül kümeleridir. Sonlu Henkin Yöntemi ile elde edilen modeli tanımlayabilmek için önce sonlu bir kümede tutarlı formül kümelerini inceleyelim.

Tanım 3.2.20. Φ *ve* Γ, $\Gamma \subseteq \Phi$ *olacak şekilde iki formül kümesi olsun.* Γ*'nın,* Φ*'de maksimal* **S***-tutarlı olması için gerek ve yeter koşul* Γ*'nın* **S***-tutarlı ve* $\Gamma \subset \Gamma'$ *olacak şekilde* **S***-tutarlı bir* $\Gamma' \subseteq \Phi$ *formül kümesinin bulunmamasıdır.*

Lemma 3.2.21. Γ, Φ*'de maksimal* **S***-tutarlı,* $\Gamma \vdash \varphi$ *ve* $\varphi \in \Phi$ *ise* $\varphi \in \Gamma$*'dır.*

İspat. Γ, Φ'de maksimal **S**-tutarlı, $\Gamma \vdash \varphi$ ve $\varphi \in \Phi$ olsun. Ayrıca, $\varphi \notin \Gamma$ olduğunu varsayalım. Γ maksimal tutarlı olduğundan $\Gamma \cup \{\varphi\}$ kümesi Φ'de tutarsızdır. Bu durumda, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathbf{S}} \perp$'dur. Türetim Teoremi ile $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \varphi \to \perp$ yani, $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \neg\varphi$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde, $\varphi \in \Gamma$'dır.

$\boxtimes$

Lemma 3.2.22 (S için Sonlu Lindenbaum Lemması). Φ *sonlu ve yeterli bir formül kümesi ve* $\Gamma \subseteq \Phi$, **S***-tutarlı ise* Γ*'nın* $\Gamma' \subseteq \Phi$ *olacak şekilde maksimal* **S***-tutarlı bir genişlemesi vardır.*

İspat. $\Gamma \subseteq \Phi$, **S**-tutarlı bir formül kümesi olsun. $\Gamma \subseteq \Gamma'$ olacak şekilde Φ'de maksimal **S**-tutarlı bir Γ' kümesi olduğunu göstermeliyiz. Φ'nin formüllerinin bir numaralanışı (sonlu da olabilen): $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n, \cdots$ olsun. Φ'deki **S**-tutarlı formüllerin bir dizisi $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n, \cdots$ n üzerinde tümevarımla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\Gamma_0 = \Gamma$

$$\text{Her } n \geq 0 \text{ için } \Gamma_{n+1} = \begin{array}{ll} \Gamma_n \cup \{\psi_{n+1}\}, & \text{S-tutarlı ise} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\psi_{n+1}\}, & \Gamma_n \cup \{\psi_{n+1}\} \ \mathbf{S}\text{-tutarsız ve} \\ & \psi_{n+1}\text{'in ilk sembolü } \neg \text{ değil ise} \\ \Gamma_n \cup \{\psi'_{n+1}\}, & \Gamma_n \cup \{\psi_{n+1}\} \ \mathbf{S}\text{-tutarsız ve} \\ & \psi_{n+1} = \neg\psi'_{n+1} \text{ ise} \end{array}$$

$\Gamma' = {}_{n \geq 0}\Gamma_n$.

$\Phi : \psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n, \cdots$ dizsinin uzunluğu k ise $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n, \cdots$ dizisinin uzunluğu $k+1$'dir. **S**-tutarlı kümelerin bu dizisi Φ'nin alt kümelerinin bir dizisidir.

Γ''nün tanımından $\Gamma' \subseteq \Phi$ ve $\Gamma \subseteq \Gamma'$ olduğu açıktır. $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n, \cdots$ sonlu ise $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_k$ ve buradanda $\Gamma' = \Gamma_k$ elde edilir. O halde Γ', Γ'nın aranan genişlemesidir.

$\boxtimes$

Lemma 3.2.23 (S için Sonlu Doğruluk Değer Atama Lemması). *Φ sonlu ve yeterli bir formül kümesi ve Γ, Φ de maksimal* **S***-tutarlı ise her $\varphi \in \Phi$ için aşağıdakiler sağlanır:*

(i) *$\neg\varphi \in \Phi$ ise $\neg\varphi \in \Gamma$ olması için gerek ve yeter koşul $\varphi \notin \Gamma$ olmasıdır,*

(ii) *$\varphi \vee \psi \in \Phi$ ise $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ olması için gerek ve yeter koşul $\varphi \in \Gamma$ veya $\psi \in \Gamma$ olmasıdır,*

(iii) *$\Box\varphi \in \Phi$ ise $\Box\varphi \in \Gamma$ olması için gerek ve yeter koşul $\Gamma \mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{S}} \Gamma'$ olacak şekilde her Γ' için $\varphi \in \Gamma'$ olmasıdır.*

İspat. Φ yeterli bir formül kümesi ve Γ, Φ de maksimal **S**-tutarlı olsun.

(i) $\neg\varphi \in \Phi$ olsun.

($\Rightarrow$): $\neg\varphi \in \Gamma$ ve $\varphi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\Gamma \vdash \bot$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

($\Leftarrow$): $\varphi \notin \Gamma$ olduğunu varsayalım. Γ maksimal **S**-tutarlı ve $\varphi \notin \Gamma$ olduğundan $\Gamma \cup \{\varphi\}$ tutarsızdır. Bu durumda, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$'dur. Türetim Teoremi'den $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \bot$ ve bu nedenle $\Gamma \vdash \neg\varphi$'dir. Lemma 3.2.21'den $\neg\varphi \in \Gamma$'dır.

(ii) $\varphi \vee \psi \in \Phi$ olsun.

($\Rightarrow$): $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. Ayrıca $\varphi \notin \Gamma$ ve $\psi \notin \Gamma$ olsun. Γ maksimal **S** tutarlı olduğundan $\Gamma \nvdash \varphi$ ve $\Gamma \nvdash \psi$ yani, $\Gamma \vdash \neg\varphi$ ve $\Gamma \vdash \neg\psi$'dir. $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi \vdash \bot$ olduğundan $\Gamma \vdash \bot$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

($\Leftarrow$): $\varphi \in \Gamma$ veya $\psi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. Γ maksimal **S**-tutarlı ve $\varphi \vdash_{\mathbf{S}} \varphi$ olduğundan $\Gamma \vdash \varphi$ veya $\Gamma \vdash \psi$'dir. O halde $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ yani, $\varphi \vee \psi \in \Gamma$'dır.

(iii) $\Box\varphi \in \Phi$ olsun.

($\Rightarrow$): $\Box\varphi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. Her Γ' için $\Gamma\mathcal{R}_{\mathbf{S}}\Gamma'$ olsun. Kanonik model üzerinde $\mathcal{R}_{\mathbf{S}}$ in tanımından $\varphi \in \Gamma'$'dir.

($\Leftarrow$): $\Gamma\mathcal{R}_{\mathbf{S}}^{\Phi}\Gamma'$ olacak şekilde her Γ' için $\varphi \in \Gamma'$ ve $\Box\varphi \notin \Gamma$ olduğunu varsayalım. $\Gamma_1 = \{\psi \mid \Box\psi \in \Gamma\} \cup \{\neg\psi\}$ olsun. Γ_1'in **S**-tutarlı olduğunu göstermeliyiz. Γ_1'in **S**-tutarsız olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\Box\psi_1, \cdots, \Box\psi_n \in \Gamma$ olmak üzere

1. $\vdash_{\mathbf{S}} \neg(\neg\varphi \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$	Öncül
2. $\vdash_{\mathbf{S}} (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \varphi$	ÖM
3. $\vdash_{\mathbf{S}} \Box[(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \varphi]$	NR
4. $\vdash_{\mathbf{S}} \Box[(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \varphi] \to [\Box(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \Box\varphi]$	K Aksiyomu
5. $\vdash_{\mathbf{S}} \Box(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \Box\varphi$	3, 4 MP
6. $\vdash_{\mathbf{S}} (\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n) \to \Box\varphi$	5 Totoloji.

$\Box\psi_1, \cdots, \Box\psi_n \in \Gamma$ ve $\Box\varphi \notin \Gamma$ olduğundan $\vdash_{\mathbf{S}} \bot$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde, Γ_1 kümesi **S**-tutarlıdır.

Γ_1 kümesine Lindenbaum Lemması uygulanırsa, $\Gamma_1 \subseteq \Gamma'$ olacak şekilde bir maksimal **S**-tutarlı Γ' kümesi elde edilir. Bu durumda, $\neg\varphi \in \Gamma'$'dür ki bu bir çelişkidir.

$\boxtimes$

Tanım 3.2.24. *Φ sonlu ve yeterli bir fomül kümesi olsun. Bu durumda* **S** *modal mantığının* **sonlu Henkin yöntemi ile elde edilen** $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}^{\Phi} = \langle W_{\mathbf{S}}^{\Phi}, \mathcal{R}_{\mathbf{S}}^{\Phi}, V_{\mathbf{S}}^{\Phi}\rangle$ **modeli** *aşağıdaki gibi tanımlanır;*

(i) $W_{\mathbf{S}}^{\Phi} = \{\Gamma \mid \Gamma, \Phi$*'de maksimal* **S**-*tutarlıdır* $\}$,

(ii) $\mathcal{R}_{\mathbf{S}}^{\Phi} = \{\langle\Gamma, \Gamma'\rangle \mid$ *her* φ *için* $\Box\varphi \in \Gamma$ *ise* $\varphi \in \Gamma'\}$,

(iii) $V_{\mathbf{S}}^{\Phi}(p) = \{\Gamma \in W_{\mathbf{S}}^{\Phi} \mid$ *her* p *değişkeni için* $p \in \Gamma\}$ *(denk olarak;* $\Gamma \models p$ *olması için gerek ve yeter koşul* $p \in \Gamma$*) olmasıdır.*

Lemma 3.2.25 (S için Sonlu Truth Lemması). *Φ sonlu ve yeterli bir formül kümesi ve $\varphi \in \Phi$ olmak üzere, $\Gamma \models \varphi$ olması için gerek ve yeter koşul $\varphi \in \Gamma$ olmasıdır.*

İspat. φ formülünün karmaşıklığı üzerinde tümevarım ile yapılır.

$\varphi : p$ olsun. Sonlu Henkin yöntemi ile elde edilen model tanımının (iii) koşulundan $\Gamma \models p$ olması için gerek ve yeter koşulun $p \in \Gamma$ olduğu açıktır.

$\varphi : \neg\psi$ ve lemma ψ için doğru olsun. $\neg\psi \in \Phi$ olmak üzere $\neg\psi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. **S** için Sonlu Doğruluk Değer Ataması Lemması'nın (i) koşulundan $\psi \notin \Gamma$'dır. Tümevarım hipotezinden $\Gamma \not\models \psi$ ve bundan dolayı $\Gamma \models \neg\psi$'dir.

$\varphi : \psi \wedge \chi$ ve lemma ψ, χ için doğru olsun. $\psi \wedge \chi \in \Phi$ olmak üzere $\psi \wedge \chi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. **S** için Sonlu Doğruluk Değer Ataması Lemması'nın (ii) koşulundan $\psi \in \Gamma$ veya $\chi \in \Gamma$'dır. Tümevarım hipotezinden $\Gamma \models \psi$ veya $\Gamma \models \chi$ ve bundan dolayı $\Gamma \models \psi \wedge \chi$'dir.

$\varphi : \Box\psi$ ve lemma ψ için doğru olsun. $\Box\psi \in \Phi$ olduğunu varsayalım.

($\Rightarrow$): $\Gamma \models \Box\psi$ olsun. Bu durumda, $\Gamma \mathcal{R}_{\mathbf{S}} \Gamma'$ olacak şekilde her maksimal **S**-tutarlı Γ' kümesi için $\Gamma' \models \psi$'dir. Tümevarım hipotezinden her maksimal **S**-tutarlı Γ' kümesi için $\psi \in \Gamma'$'dür. **S** için Sonlu Doğruluk Değer Ataması Lemması'nın (iii) koşulundan $\Box\varphi \in \Gamma$'dır.

($\Leftarrow$): $\Box\psi \in \Gamma$ ve her maksimal **S**-tutarlı Γ' kümesi için $\Gamma \mathcal{R}_{\mathbf{S}} \Gamma'$ olduğunu varsayalım. **S** için Sonlu Doğruluk Değer Ataması Lemması'nın (iii) koşulundan $\psi \in \Gamma'$'dür. Tümevarım hipotezinden her maksimal **S**-tutarlı Γ' kümesi için $\Gamma' \models \psi$'dir. O halde, $\Gamma \models \Box\psi$'dir.

$\boxtimes$

Teorem 3.2.26 (Sonlu S-Tutarlılık Teoremi). *Φ sonlu,yeterli ve **S**-tutarlı bir küme ise sonlu bir $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R} \rangle$ çatısı, $w \in W$ ve her $\varphi \in \Phi$ için $w \models \varphi$ olacak şekilde bir doğruluk değer ataması vardır.*

İspat. Φ sonlu, yeterli bir küme ve Γ, Φ'de **S**-tutarlı olsun. **S** için Sonlu Lindenbaum Lemmadan, Γ'nın Φ'de maksimal **S**-tutarlı bir genişlemesi Γ' kümesi vardır. $\varphi \in \Phi$ ve $\Gamma \subseteq \Phi$ olduğundan Truth Lemma ile $\Gamma' \models \varphi$'dir. Bu durumda, $w \models \varphi$ olacak şekilde bir doğruluk değer ataması vardır.

$\boxtimes$

Şimdi **K** modal mantığının sonlu model özelliğine sahip olduğunu sonlu Henkin yönteminden yararlanarak gösterelim.

Teorem 3.2.27. **K** *modal mantığı sonlu model özelliğine sahiptir.*

İspat. $\nvdash_{\mathbf{K}} \varphi$ ise $\mathcal{M} \not\models \varphi$ olacak şekilde sonlu bir $\mathcal{M}$ modelinin var olduğunu göstermeliyiz.

$\nvdash_{\mathbf{K}} \varphi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\{\neg\varphi\}$ kümesi **K**-tutarlıdır. Φ kümesi $\{\neg\varphi\}$'nin genişlemesi olsun. Sonlu Lindenbaum Lemma'dan $\{\neg\varphi\} \subseteq \Phi$ olacak şekilde Φ'de maksimal **K**-tutarlı bir Γ kümesi vardır. Sonlu Tutarlılık Teoremi'nden herhangi bir $\mathcal{F}$ çatısı $w \in W$ dünyası için $w \models \neg\varphi$ olacak şekilde bir doğruluk değer ataması vardır. Maksimal tutarlılıktan $w \not\models \varphi$ ve bundan dolayı $\Gamma \not\models \varphi$ elde edilir. O halde, $\mathcal{F}$ çatısı üzerinde tanımlı $\mathcal{M}$ modeli istenilen özelliği sağlar.

$\boxtimes$

GL modal mantığının tamlığını göstermek için sonlu Henkin yönteminden yararlanacağız. Bu nedenle, öncelikle **GL**'nin sonlu Henkin yöntemiyle elde edilen modelini tanımlayalım.

Tanım 3.2.28. Φ *sonlu, yeterli bir formül kümesi olsun.* **GL** *modal mantığın sonlu Henkin yöntemi ile elde edilen modeli* $\mathcal{M}^{\Phi}_{\mathbf{GL}} = \langle W^{\Phi}_{\mathbf{GL}}, \mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}, V^{\Phi}_{\mathbf{GL}} \rangle$ *aşağıdaki gibi tanımlanır:*

(i) $W^{\Phi}_{\mathbf{GL}} = \{\Gamma \mid \Gamma, \Phi$*'de maksimal* **GL**-*tutarlı*$\}$,

(ii) $\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{GL}} = \{\langle \Gamma, \Gamma' \rangle \mid$ *her* $\varphi \in \Phi$ *için* $\Box\varphi \in \Gamma$ *ise* $\Box\varphi \in \Gamma'$, $\varphi \in \Gamma'$ *ve en az bir* $\Box\psi \in \Gamma'$ *formülü için* $\Box\psi \notin \Gamma\}$,

(iii) $V(p)^{\Phi}_{\mathbf{GL}} = \{\Gamma \in W^{\Phi}_{\mathbf{GL}} \mid$ *her* p *değişkeni için* $p \in \Gamma\}$.

Teorem 3.2.29. **GL** *modal mantığı sonlu, geçişli ve yansımasız (diğer bir ifade ile geçişli ve tersi iyi-temellendirilmiş) çatılar sınıfına göre tamdır.*

İspat. $\nvdash_{\mathbf{GL}} \varphi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\not\models_{\mathbf{GL}} \varphi$ olduğunu göstermeliyiz.

GL modal mantığının sonlu Henkin yöntemi ile elde edilen modelini göz önüne alalım. İlk olarak, yukarıdaki tanımda verilen $\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}$ bağıntısının geçişli ve yansımasız olduğunu göstermeliyiz.

$\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}$ geçişlidir: $\Delta\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}\Delta'$ ve $\Delta'\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}\Delta''$ olsun. Bu durumda, $\Box\psi \in \Delta$ ise $\Box\psi \in \Delta'$ ve $\Box\psi, \psi \in \Delta''$'dür. Diğer taraftan, $\Delta\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}\Delta'$ olduğundan herhangi bir $\Box\chi$ için $\neg\Box\chi \in \Delta$ ve $\Box\chi \in \Delta'$'dür ve bundan dolayı $\Box\chi \in \Delta''$'dür. O halde, $\Delta\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}\Delta''$'dür.

$\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}$ yansımasızdır: $\Delta\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}\Delta$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, herhangi bir $\Box\chi$ için $\neg\Box\chi \in \Delta$ ve $\Box\chi \in \Delta$'dır. Ancak Δ tutarlı olduğundan bu bir çelişkidir.

O halde $\langle W^{\Phi}_{\mathbf{GL}}, \mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}\rangle$ çatısı sonlu, geçişli ve yansımasızdır.

İkinci olarakta, doğruluk değer atamasının formüllerin karmaşıklığı üzerinde tümevarımla formüllere genişletilebileceğini göstermeliyiz. Sonlu Doğruluk Değer Atama Lemması ve Truth Lemması kullanılarak ikili bağlaçlar için sağlandığını söyleyebiliriz. Ancak $\Box\chi$ için durum biraz daha karmaşıktır. χ formülünün teoremi sağladığını yani, $\chi \in \Gamma$ olması için gerek ve yeter koşulun $\Gamma \models \chi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\Box\chi \in \Gamma$ olması için gerek ve yeter koşulun $\Gamma \models \Box\chi$ olduğunu göstermeliyiz.

($\Rightarrow$): $\Box\chi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\Gamma\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}\Gamma'$ olacak şekilde her Γ' için $\chi \in \Gamma'$'dür. Varsayımdan her Γ' için $\Gamma' \models \chi$ elde edilir. O halde, $\Gamma \models \Box\chi$'dir.

($\Leftarrow$): $\Box\chi \notin \Gamma$ olduğunu varsayalım ve $X = \{\neg\varphi, \Box\varphi\} \cup \{\psi, \Box\psi : \Box\psi \in \Delta\}$ kümesini göz önüne alalım. X kümesinin **GL**-tutarlı olduğunu göstermeliyiz. Bunun için X kümesinin tutarsız olduğunu varsayalım yani,

$$\neg(\neg\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \wedge \Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n)$$

formülünün **GL**'de bir türetimi var olsun. Bu durumda,

1. $\vdash_{\mathbf{GL}} \neg(\neg\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \wedge \Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n)$	Öncül
2. $\vdash_{\mathbf{GL}} (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \wedge \Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n) \to (\Box\varphi \to \varphi)$	ÖM
3. $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box[(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \wedge \Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n) \to (\Box\varphi \to \varphi)]$	NR
4. $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box[(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \wedge \Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n) \to (\Box\varphi \to \varphi)] \to$ $[\Box(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \wedge \Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n) \to \Box(\Box\varphi \to \varphi)]$	K Aksiyom
5. $\Box(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \wedge \Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n) \to \Box(\Box\varphi \to \varphi)$	3, 4 MP
6. $\vdash_{\mathbf{GL}} (\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n \wedge \Box\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\Box\psi_n) \to \Box(\Box\varphi \to \varphi)$	5 Totoloji
7. $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$	Aksiyom
8. $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box\psi \to \Box\Box\psi$	Aksiyom
9. $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box\psi_1, \cdots, \Box\psi_n \to \Box\varphi$	6, 7, 8 Tot.

Bu durumda, Γ dünyası tutarsız olur ki bu bir çelişkidir ve bundan dolayı X kümesi **GL**-tutarlıdır. Lindenbaum Lemma ile $\Gamma' \in \Phi$ ve $X \subseteq \Gamma'$ olacak şekilde bir maksimal tutarlı Γ' kümesi vardır. Varsayımdan, $\Gamma' \not\models \chi$'dir. $\Gamma\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}\Gamma'$ olduğundan $\Gamma \not\models \Box\chi$ elde edilir.

O halde, **GL** modal mantığı tamdır.

$\boxtimes$

GL tam bir modal mantık olduğu halde kuvvetli tam değildir. **GL**'nin kuvvetli tam olmadığını kompaktlık kavramından yararlanarak göstereceğiz. Bu nedenle aşağıda bir modal mantığın kompaktlık tanımını veriyoruz.

Tanım 3.2.30. *Bir* **S** *mantığının* ***kompakt*** *olması için gerek ve yeter koşul her* Γ *formül kümesinin, tüm sonlu alt kümelerinin gerçeklenebilir olmasıdır.*

Önerme 3.2.31. **S** *modal mantığı kuvvetli tam ise, kompakttır.*

İspat. **S** modal mantığı kuvvetli tam olsun, ancak kompakt olmasın. Herhangi bir **S** çatıdan elde edilmiş bir modelde $w \models \Gamma$ olacak şekilde bir w dünyası olmadığını varsayalım. Bu durumda, $\Gamma \models_{Char(\mathbf{S})} \bot$'dur. **S** kuvvetli tam olduğundan $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \bot$'dur. Türetimler sonlu adım içerdiğinden $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in \Gamma$ olarak seçilirse $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \vdash_{\mathbf{S}} \bot$ elde edilir. O halde, Γ'nın sonlu bir alt kümesi $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ tutarsızdır. Bu nedenle, $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ gerçeklenebilir değildir ki bu bir çelişkidir. O halde, **S** modal mantığı kompakttır.

$\boxtimes$

Bir mantığın kompakt olmadığını göstermek, kuvvetli tam olmadığını göstermekten daha kolay olduğu için yukarıda verilen önerme genellikle bir mantığın kuvvetli tam olmadığını gösterirken kullanılır. Bu önermeyi **GL**'nin kuvvetli tam olmadığını göstermek için kullanacağız.

Teorem 3.2.32. **GL** *modal mantığı kuvvetli tam değildir.*

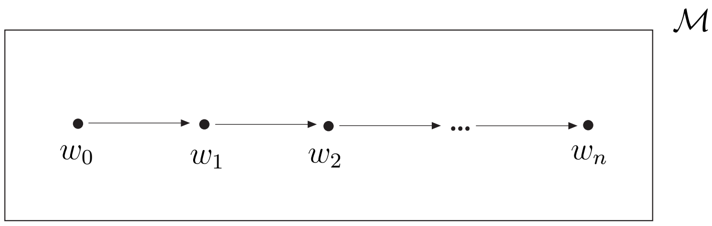
İspat. $p_0, p_1, p_2, \cdots$ farklı önerme değişkenlerinin sonsuz bir dizisi ve $U = \{\Diamond p_0\} \cup \{\Box(p_i \to \Diamond p_{i+1}) : i \in \mathbb{N}\}$ bir formül kümesi olsun. İspat **GL**'nin $Char(GL)$'ye göre kompaktlığının U kümesi için sağlanmadığı gösterilerek yapılır.

$\mathcal{M} = \langle W, \mathcal{R}, V \rangle$ aşağıdaki gibi tanımlı bir **GL** model olsun:

(i) $W = \{w_0, w_1, \cdots, w_n\}$,

(ii) $\mathcal{R}$, geçişli ve yansımasız bir bağıntı,

(iii) $V(p_i) = \{x \mid x = w_i \ (0 \leq i \leq n) \ \}$'dir.



Şekil 3.1: $\mathcal{M} = \langle W, \mathcal{R}, V \rangle$

U'nun her sonlu alt kümesi, herhangi bir n doğal sayısı için $\{\Diamond p_0\} \cup \{\Box(p_i \to \Diamond p_{i+1}) : i < n\}$ kümesinin bir alt kümesidir. $\{\Diamond p_0\} \cup \{\Box(p_i \to \Diamond p_{i+1}) : i < n\}$ kümesindeki herbir önermenin $\mathcal{M} = \langle W, \mathcal{R}, V \rangle$ modelinin bir w dünyasında doğru olduğunu göstermeliyiz.

$\mathcal{M}, w \models \Diamond p_0$ ve her i için $\mathcal{M}, w \not\models \Box(p_i \to \Diamond p_{i+1})$ olduğunu varsayalım. $X = \{x : w\mathcal{R}x$ ve herhangi bir i için $x \models p_i\}$ olsun. $\mathcal{M}, w \models \Diamond p_0$ olduğundan X boştan farklıdır. O halde, bir $x \in X$ vardır. Bu durumda, $w\mathcal{R}x$ ve herhangi bir i için $\mathcal{M}, x \models p_i$'dir. $\mathcal{M}, w \not\models \Box(p_i \to \Diamond p_{i+1})$ olduğundan herhangi bir x için $\mathcal{M}, x \not\models p_i \to p_{i+1}$'dir. $\mathcal{M}, x \models p_i$ olduğundan $\mathcal{M}, x \not\models \Diamond p_{i+1}$ olmalıdır. Bu durumda, her $x\mathcal{R}y$ için $\mathcal{M}, y \not\models p_{i+1}$'dir. $\mathcal{R}$ geçişli olduğundan $w\mathcal{R}y$ ve bundan dolayı $y \in X$'tir. O halde, her y için $\mathcal{M}, y \models p_i$'dir. $x\mathcal{R}y$ olduğundan $\mathcal{M}, x \models \Box p_i$ elde edilir. Herhangi bir x için $\mathcal{M}, x \models \Box p_i$ ve $\mathcal{M}, x \models p_i$ olduğundan x yansımalı bir dünyadır. Bu bir çelişkidir, çünkü $\mathcal{M}$ modeli yansımasızdır. O halde, $\mathcal{M}, w \models \Box(p_i \to \Diamond p_{i+1})$ yani, $\{\Diamond p_0\} \cup \{\Box(p_i \to \Diamond p_{i+1}) : i < n\}$ kümesindeki herbir önerme $w \in W$ dünyasında doğrudur.

Ancak U kümesini geçişli ve tersi iyi-temellendirilmiş modellerde doğru yapan bir dünya yoktur. Bunu çelişki yöntemiyle gösterelim.

$\mathcal{M}, w \models \Diamond p_0$ ve her i için $\mathcal{M}, w \models \Box(p_i \to \Diamond p_{i+1})$ olduğunu varsayalım. $X = \{x : w\mathcal{R}x$ ve herhangi bir i için $\mathcal{M}, x \models p_i\}$ göz önüne alalım. $\mathcal{M}, w \models \Diamond p_0$ olduğundan X boştan farklıdır. O halde, bir $x \in X$ vardır. Bu durumda, $w\mathcal{R}x$, ve herhangi bir i için $\mathcal{M}, x \models p_i$'dir. $\mathcal{M}, w \models \Box(p_i \to \Diamond p_{i+1})$ ve $w\mathcal{R}x$ olduğundan, $\mathcal{M}, x \models p_i \to \Diamond p_{i+1}$ dir. Bundan dolayı, $\mathcal{M}, x \models \Diamond p_{i+1}$ ve herhangi bir y için $x\mathcal{R}y$ ve $\mathcal{M}, y \models p_{i+1}$'dir. $\mathcal{R}$ geçişli olduğundan $w\mathcal{R}y$ ve bundan dolayı $y \in X$'tir. $\mathcal{R}$, X kümesinin her elemanını diğer bir elemanına götürdüğünden, $\mathcal{R}$'nin tersi iyi-temellendirilmiş değildir. Bu bir çelişkidir.

O halde, Tanım 3.2.28 ile **GL**'nin $\{\Diamond p_0\} \cup \{\Box(p_i \to \Diamond p_{i+1}) : i \in \mathbb{N}\}$ formül kümesine göre kompakt olmadığını söyleyebiliriz. Buradan da Önerme 3.2.30 ile **GL** modal mantığının kuvvetli tam olmadığı elde edilir.

$\boxtimes$

GL modal mantığının kanonik olmadığını göstermek istiyoruz. Bunun için **GL** modal mantığının kanonik modelinin en az bir yansımalı dünya içerdiğini göstermek yeterlidir. Bu amaçla $\mathcal{M}^+$ modelini tanımlayalım.

Tanım 3.2.33. *$\mathcal{M}^+ = \langle W^+, \mathcal{R}^+, V^+\rangle$ modeli $w^+ \notin W_{\mathbf{S}}$ ve her $w \in W_{\mathbf{S}}$ için $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}$ modelinin aşağıdaki gibi tanımlı bir genişlemesi olsun:*

(i) $W^+ := W_{\mathbf{S}} \cup \{w^+\}$,

(ii) $\mathcal{R}^+ := \mathcal{R}_{\mathbf{S}} \cup \{\langle w^+, w\rangle \mid w \in W_{\mathbf{S}}\}$,

(iii) $\mathcal{V}^+(p) = \{w \mid \mathcal{M}_{\mathbf{S}}, w \models p\}$*'dir.*

Lemma 3.2.34. *$\mathcal{M}_{\mathbf{S}} = \langle W_{\mathbf{S}}, \mathcal{R}_{\mathbf{S}}, V_{\mathbf{S}}\rangle$, **S** modal mantığının kanonik modeli olsun. Bu durumda, $\Delta := \{\neg\Box\varphi : \nvdash_{\mathbf{S}} \varphi\}$ kümesi **S**-tutarlı ise her $w \in W_{\mathbf{S}}$ dünyası için $w^*\mathcal{R}_{\mathbf{S}}w$ olacak şekilde bir $w^* \in W_{\mathbf{S}}$ dünyası vardır.*

İspat. Δ kümesi **S**-tutarlı olsun. Her $w \in W_{\mathbf{S}}$ dünyası için $w^*\mathcal{R}_{\mathbf{S}}w$ olacak şekilde bir $w^* \in W_{\mathbf{S}}$ dünyasının var olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda, Lidenbaum Lemma ile $\Delta \subseteq w^*$ olacak şekilde bir maksimal **S**-tutarlı $w^* \in W_{\mathbf{S}}$ kümesinin vardır. Δ kümesinin $\Box\varphi \in w^*$ olması için gerek ve yeter koşul φ formülünün **S** modal mantığının bir teoremi olmasıdır. φ formülü **S**'in bir teoremi olduğunda her $w \in W_{\mathbf{S}}$ için $\varphi \in w$'dır. O halde, $\Box\varphi \in w^*$ ise her $w \in W_{\mathbf{S}}$ için $\varphi \in w$ yani, $w^*\mathcal{R}w$ elde edilir.

$\boxtimes$

Teorem 3.2.35. *$\mathcal{M}_{\mathbf{S}} = \langle W_{\mathbf{S}}, \mathcal{R}_{\mathbf{S}}, V_{\mathbf{S}}\rangle$, **S** modal mantığının kanonik modeli ve $\mathcal{M}^+$ kanonik modelin Tanım 3.2.32'deki gibi tanımlı bir genişlemesi olsun. $\Delta := \{\neg\Box\varphi : \nvdash_{\mathbf{S}} \varphi\}$ olmak üzere her φ formülü ve $w \in W_{\mathbf{S}}$ dünyası için aşağıdakiler vardır:*

(i) $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}, w \models \varphi$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\mathcal{M}^+, w \models \varphi$ *olmasıdır,*

(ii) $\mathcal{M}^+, w^+ \models \Box\varphi$ *ise* $\vdash_{\mathbf{S}} \varphi$*'dir,*

(iii) $\mathcal{M}^+, w^+ \models \Delta$.

İspat.

(i) İspat φ formülünün karmaşıklığı üzerinde tümevarım ile yapılır.

$\varphi : p$ olsun. $\mathcal{V}^+$ doğruluk değer atamasının tanımından $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}, w \models p$ olması için gerek ve yeter koşulun $\mathcal{M}^+, w \models p$ olması olduğunu biliyoruz.

$\varphi : \neg\psi$ ve teorem ψ için doğru olsun. $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}, w \models \neg\psi$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}, w \not\models \psi$ olmasıdır. Tümevarım hipotezinden $\mathcal{M}^+, w \not\models \psi$ yani, $\mathcal{M}^+, w \models \neg\psi$ elde edilir.

$\varphi : \psi \wedge \chi$ ve teorem ψ, χ için doğru olsun. $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}, w \models \psi \wedge \chi$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}, w \models \psi$ ve $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}, w \models \chi$ olmasıdır. Tümevarım hipotezinden $\mathcal{M}^+, w \models \psi$ ve $\mathcal{M}^+, w \models \chi$ yani, $\mathcal{M}^+, w \models \psi \wedge \chi$ elde edilir.

$\varphi : \Box\psi$ ve teorem ψ için doğru olsun. $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}, w \models \Box\psi$ olması için gerek ve yeter koşul her $w\mathcal{R}_{\mathbf{S}}w'$ için $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}, w' \models \psi$ olmasıdır. Tümevarım hipotezinden $\mathcal{M}^+, w' \models \psi$'dir. $\mathcal{R}^+$'nın tanımından her $w\mathcal{R}^+w'$ için $\mathcal{M}^+, w \models \psi$ yani, $\mathcal{M}^+, w \models \Box\psi$ elde edilir.

(ii) $\mathcal{M}^+, w^+ \models \Box\varphi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, her $w \in W_{\mathbf{S}}$ dünyası için $\mathcal{M}^+, w \models \varphi$'dir. O halde doğruluk değer atamasının tanımından her $w \in W_{\mathbf{S}}$ için $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}, w \models \varphi$ elde edilir. Bundan dolayı $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}$, **S** modal mantığının kanonik modeli olduğundan $\vdash_{\mathbf{S}} \varphi$'dir.

(iii) $\varphi \notin \Delta$ ise (ii) ile $\mathcal{M}^+, w^+ \not\models \Box\varphi$'dir. Bu durumda, $\mathcal{M}^+, w^+ \models \neg\Box\varphi$'dir. O halde, $\mathcal{M}^+, w^+ \models \Delta$ elde edilir.

$\boxtimes$

Teorem 3.2.34 ile **S** modal mantığının (ii) koşulunu sağlayan bir $\mathcal{M}^+$ modeli vardır yani, $\Delta = \{\neg\Box\varphi : \nvdash_{\mathbf{S}} \varphi\}$ kümesi **S**-tutarlıdır. Bundan dolayı, **S**'in kanonik modeli herhangi bir φ formülü için $\Box\varphi \in w^*$ ise $\vdash_{\mathbf{S}} \varphi$ olacak şekilde bir w^* dünyası içerir. Bu durumda, φ formülü **S** modal mantığının bir teoremi olduğundan $\varphi \in w^*$'dır. O halde $w^*\mathcal{R}_{\mathbf{S}}w^*$ yani, $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}$ modeli en az bir yansımalı dünya içerir.

Tanım 3.2.36. GL *modal mantığının kanonik modeli* $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}} = \langle W_{\mathbf{GL}}, \mathcal{R}_{\mathbf{GL}}, V_{\mathbf{GL}} \rangle$ *aşağıdaki gibi tanımlanır;*

(i) $W_{\mathbf{GL}} = \{\Gamma \mid \Gamma$ *maksimal* **GL**-*tutarlıdır*$\}$,

(ii) $\mathcal{R}_{\mathbf{GL}} = \{\langle \Gamma, \Gamma' \rangle \mid$ *her* φ *formülü için* $\Box\varphi \in \Gamma$ *ise,* $\varphi \in \Gamma'\}$,

(iii) $V_{\mathbf{GL}}(p) = \{\Gamma \mid$ *her önerme değişkeni* p *için* $p \in \Gamma\}$*'dır.*

Önerme 3.2.37. **GL** *modal mantığının kanonik modeli en az bir yansımalı dünya içerir.*

İspat. $\mathcal{M}^+ = \langle W^+, \mathcal{R}^+, V^+\rangle$ modelinin **GL** modal mantığının bir modeli olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $\mathcal{M}^+, w^+ \models \Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \varphi$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\mathcal{M}_{\mathbf{GL}} = \langle W_{\mathbf{GL}}, \mathcal{R}_{\mathbf{GL}}, W_{\mathbf{GL}}\rangle$, **GL**'nin kanonik modeli olsun. Bu durumda, herhangi bir φ formülü için $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, w \models \Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$ ve Teorem 3.2.34'ten $\mathcal{M}^+, w \models \Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$'dir.

$\mathcal{M}^+, w^+ \models \Box(\Box\varphi \to \varphi)$ olduğunu varsayalım. $\mathcal{M}^+, w^+ \models \Box\varphi$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bu durumda teoremin (ii) koşulundan $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box\varphi \to \varphi$ elde edilir. NR kuralı ile $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box(\Box\varphi \to \varphi)$'dir. Löb aksiyomu ile $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$ ve MP kuralı ile $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box\varphi$ elde edilir yani, herhangi bir $w \in W_{\mathbf{GL}}$ için $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, w \models \Box\varphi$'dir. Bu durumda, doğruluk değer atamasının tanımından $w^+\mathcal{R}^+w$ olacak şekilde her w dünyası için $\mathcal{M}^+, w \models \varphi$ yani, $\mathcal{M}^+, w^+ \models \Box\varphi$'dir. O halde, $\mathcal{M}^+, w^+ \models \Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$ elde edilir.

O halde, **GL** modal mantığının $\mathcal{M}^+, w^+ \models \Box\varphi$ ise $\vdash_{\mathbf{GL}} \varphi$ koşulunu sağlayan bir modeli vardır yani, kanonik modeli en az bir tane yansımalı dünya içerir.

$\boxtimes$

Tanım 3.2.14'ten bir **S** modal mantığının kanonik modelinin çatısı, **S** için bir çatı ise kanonik olduğunu biliyoruz. **GL** modal mantığının her teoremi onun kanonik modelinde geçerli olmasına rağmen, bu modeli veren çatı üzerinde doğruluk değer ataması değiştirildiğinde geçerli olmaz. Bunu göstermek için Löb aksiyomunun yansımalı dünya içeren bir çatıda geçerli olmadığını göstermek yeterlidir.

w^* yansımalı bir dünya ve $\mathcal{F}$'de bu dünyayı içeren bir çatı olsun. w^* dışında her $w \in W_{\mathbf{S}}$ için $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}, w^* \not\models p$ ve $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}, w \models p$ olmak üzere $\langle \mathcal{F}, V\rangle$ modelini göz önüne alalım. Bu durumda, $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}, w^* \not\models \Box p$ olduğu açıktır ve bundan dolayıda $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}, w^* \models \Box p \to p$ elde edilir. p değişkeni w^* dışında her dünyada doğru olduğundan w^* dışında her $w \in W_{\mathbf{S}}$ için $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}, w \models \Box p \to p$'dir. O halde, her $w \in W_{\mathbf{S}}$ dünyası için $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}, w \models \Box p \to p$ elde edilir. Bundan dolayı, $\mathcal{M}, w^* \models \Box(\Box p \to p)$'dir. O halde, Löb aksıyomu w^* dünyasında yanlıştır yani, $\mathcal{F}_{\mathbf{S}}$ çatısında geçersizdir. O halde, **GL** modal mantığı kanonik değildir.

3.2.2.2 Filtreleme Yöntemi

Bu kesimde, bir modelin evrenini sonlu sayıdaki denklik sınıflarına indirgeme yöntemi olan filtreleme yöntemi anlatılarak **S4** ve **GL** modal mantıklarının sonlu model özelliğine sahip olduğu gösterilecektir.

Tanım 3.2.38. *$\mathcal{M} = \langle W, \mathcal{R}, V\rangle$ bir model ve Σ alt formüllere kapalı bir formül kümesi olsun. $\sim_\Sigma$, $\mathcal{M}$ modelinin dünyaları üzerinde aşağıdaki gibi tanımlı bir bağıntıdır:*

$w \sim_\Sigma v$ olması için gerek ve yeter koşul w ve v dünyalarında her $\varphi \in \Sigma$ formülünün sağlanmasıdır. Bu sembollerle $\mathcal{M}, w \models \varphi$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{M}, v \models \varphi$ şeklinde gösterilir.

Önerme 3.2.39. *Tanım 3.2.38'de tanımlanan $\sim_\Sigma$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.*

İspat. $\sim_\Sigma$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansımalı, simetrik ve geçişmeli olduğunu göstermeliyiz.

$\sim_\Sigma$ *yansımalıdır:* $w \sim_\Sigma w$ olduğunu göstermeliyiz.

$w \sim_\Sigma w$ olmadığını varsayalım. Tanım 3.2.38 ile her $\varphi \in \Sigma$ olmak üzere $\mathcal{M}, w \models \varphi$ olması için gerek ve yeter koşulun $\mathcal{M}, w \not\models \varphi$ olduğu elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde, $w \sim_\Sigma w$ sağlanır.

$\sim_\Sigma$ *simetriktir:* $w \sim_\Sigma v$ ise $v \sim_\Sigma w$ olduğunu göstermeliyiz.

$w \sim_\Sigma v$ olduğunu varsayalım. Tanım 3.2.38 ile her $\varphi \in \Sigma$ olmak üzere $\mathcal{M}, w \models \varphi$ olması için gerek ve yeter koşulun $\mathcal{M}, v \models \varphi$ olduğu elde edilir. Gerek ve yeter koşulun tanımı gereğince, $\mathcal{M}, v \models \varphi$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{M}, w \models \varphi$ olmasıdır. O halde, Tanım 3.2.38 ile $v \sim_\Sigma w$ elde edilir.

$\sim_\Sigma$ *geçişmelidir:* $w \sim_\Sigma v$ ve $v \sim_\Sigma u$ ise $w \sim_\Sigma u$ olduğunu göstermeliyiz.

$w \sim_\Sigma v$ ve $v \sim_\Sigma u$ olduğunu varsayalım. Tanım 3.2.38 ile her $\varphi \in \Sigma$ olmak üzere $\mathcal{M}, w \models \varphi$ olması için gerek ve yeter koşulun $\mathcal{M}, v \models \varphi$ ve $\mathcal{M}, w \models \varphi$ olması için gerek ve yeter koşulun $\mathcal{M}, v \models \varphi$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda, $\mathcal{M}, w \models \varphi$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{M}, u \models \varphi$ olmasıdır. O halde, Tanım 3.2.38 ile $w \sim_\Sigma u$ elde edilir.

⊠

Tanım 3.2.40. *$\sim_\Sigma$ bağıntısı $\mathcal{M}$ modelinin bir w dünyasının denklik sınıfını belirler ve bu denklik sınıfı $|w|_\Sigma$ veya $|w|$ ile gösterilir. Bu durumda, aşağıdaki gibi tanımlı $\mathcal{M}^f_\Sigma = \langle W^f, \mathcal{R}^f, V^f\rangle$ modeli, $\mathcal{M}$* ***modelinin Σ ile elde edilmiş filtrelemesidir****:*

(i) $W^f = \{|w|_\Sigma : w \in W\}$,

(ii) $w\mathcal{R}v$ *ise* $|w|\mathcal{R}^f|v|$,

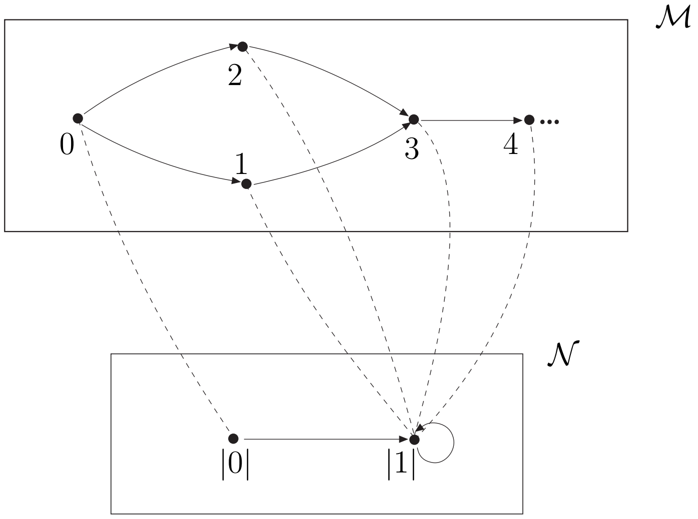
(iii) $|w|\mathcal{R}^f|v|$ *ise her* $\Box\varphi \in \Sigma$ *için* $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ *ise* $\mathcal{M}, v \models \varphi$*'dir ve*

(iv) *Her* $p \in \Sigma$ *için* $V^f(p) = \{|w| : \mathcal{M}, w \models p\}$.

Burada (iii) *koşulu denk olan* (iii$'$) *ile değiştirilebilir:*

(iii$'$) $|w|\mathcal{R}^f|v|$ *ise her* $\Diamond\phi \in \Sigma$ *için* $\mathcal{M}, v \models \phi$ *ise* $\mathcal{M}, w \models \Diamond\phi$*'dir.*

Örnek 3.2.41. $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, R, V\rangle$; $\mathcal{R} = \{(0,1),(0,2),(1,3)\} \cup \{(n, n+1) \mid n \geqslant 2\}$, $V(p) = \{\mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ *ve* $V(q) = \{2\}$ *modeli olsun.*



Şekil 3.2: $\mathcal{N}$ modeli, $\mathcal{M}$ modelinin bir filtrelemesidir.

$\Sigma = \{\Diamond p, p\}$ *olmak üzere* $\mathcal{N} = \langle W', \mathcal{R}', V'\rangle$; $W' = \{|0|, |1|\}$, $\mathcal{R}' = \{(|0|, |1|), (|1|, |1|)\}$ *ve* $V'(p) = \{|1|\}$ *ile tanımlı* $\mathcal{N}$ *modeli,* $\mathcal{M}$ *modelinin bir filtrelemesidir.*

İspat. Öncelikle, Σ formül kümesinin alt formüllerine kapalı olduğunu gösterelim: $\Diamond p \in \Sigma$ iken $p \in \Sigma$ olduğundan istenen sağlanmış olur.

Şimdide filtreleme tanımında verilen koşulların gerçeklendiğini gösterelim:

(i) $W' = \{|0|_\Sigma : 0 \in \mathbb{N}\} \cup \{|1|_\Sigma = |n|_\Sigma : n \in \setminus\{0\}\} = \{|w|_\Sigma : w \in W\}$.

(ii) Her $w, v \in \mathbb{N}$ için $w\mathcal{R}v$ olsun. O halde, dört durum söz konusudur:

- $0\mathcal{R}1$ ise $\mathcal{R}'$ nun tanımından $|0|\mathcal{R}'|1|$'dir.
- $0\mathcal{R}2$ ise $|2|_\Sigma = |1|$ olduğundan $|0|\mathcal{R}'|1|$'dir.
- $1\mathcal{R}3$ ise $|3|_\Sigma = |1|$ olduğundan ve $\mathcal{R}'$'nün tanımından $|1|\mathcal{R}'|1|$'dir.
- Her $n \geq 3$ için $n\mathcal{R}n+1$ ise $|n|_\Sigma = |n+1|_\Sigma = |1|$ olduğundan $|1|\mathcal{R}'|1|$'dir.

(iii$'$) Her $w, v \in \mathbb{N}$ için $|w|\mathcal{R}'|v|$ ve her $\Diamond p \in \Sigma$ için $\mathcal{M}, v \models p$ olsun. O halde, iki durum söz konusudur:

- $|0|\mathcal{R}'|1|$ ve $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $\mathcal{M}, n \models p$ olsun. $\Diamond$'lı formüllerin bir modeldeki bir dünyada doğruluk tanımından 0 dünyasının bağlantılı olduğu en az bir dunyada p doğru olmalıdır. $0\mathcal{R}1$, $0\mathcal{R}2$ ve $\mathcal{M}, 1 \models p$, $\mathcal{M}, 2 \models p$ olduğundan $\mathcal{M}, 0 \models \Diamond p$'dir.

- $|1|\mathcal{R}'|1|$ ve $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $\mathcal{M}, n \models p$ olsun. Her $n \geq 1$ için n dünyasının bağlantılı olduğu her dünyada p doğru olduğundan $\mathcal{M}, n \models \Diamond p$'dir.

(iv) Her $p \in \Sigma$ olmak üzere $V'(p) = \{|w| : \mathcal{M}, w \models p\}$:
Her $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $|n|_\Sigma = |1|$ ve $\mathcal{M}, n \models p$ olduğundan $|1| \in V'(p)$'dir.
O halde, $\mathcal{N}$ modeli $\mathcal{M}$ modelinin Σ ile elde edilmiş bir filtrelemesidir.

$\boxtimes$

Teorem 3.2.42 (Filtreleme Teoremi). *$\mathcal{M}^f = \langle W_\Sigma, \mathcal{R}^f, V^f \rangle$ modeli $\mathcal{M}$ modelinin, alt formüllere kapalı bir Σ kümesi ile elde edilmiş filtrelemesi olsun. Bu durumda her $\varphi \in \Sigma$ ve $w \in \mathcal{M}$ olmak üzere $\mathcal{M}, w \models \varphi$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{M}^f, |w| \models \varphi$ olmasıdır.*

İspat. φ formülünün karmaşıklığı üzerinde tümevarımla yapılır.

$\varphi : p$ olsun. Tanım 3.2.40'ın (iv) koşulundan, $\mathcal{M}, w \models p$ olması için gerek ve yeter koşulun $|w| \in V^f(p)$ olduğunu biliyoruz. O halde, $\mathcal{M}^f, |w| \models p$ elde edilir.

$\varphi : \neg\psi$ ve teorem ψ için doğru olsun. Bu durumda, $\mathcal{M}, w \models \neg\psi$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{M}, w \not\models \psi$ olmasıdır. Tümevarım hipotezi ile $\mathcal{M}^f, |w| \not\models \psi$ yani, $\mathcal{M}^f, |w| \models \neg\psi$ elde edilir.

$\varphi : \psi \vee \chi$ ve teorem ψ ve χ için doğru olsun. Bu durumda, $\mathcal{M}, w \models \psi \vee \chi$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{M}, w \models \psi$ veya $\mathcal{M}, w \models \chi$ olmasıdır. Tümevarım hipotezi ile $\mathcal{M}^f, |w| \models \psi$ veya $\mathcal{M}^f, |w| \models \chi$ yani, $\mathcal{M}^f, |w| \models \psi \vee \chi$ elde edilir.

$\varphi : \Box\psi$ ve teorem ψ için doğru olsun.

($\Rightarrow$): $\mathcal{M}, w \models \Box\psi$ olsun. Ayrıca $|w|\mathcal{R}^f|v|$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Tanım 3.2.40'ın (iii) koşulundan $\mathcal{M}, v \models \psi$, ve tümevarım hipotezinden de $\mathcal{M}^f, |v| \models \psi$'dir. $\Box$'lı formüllerin doğruluk tanımından $\mathcal{M}^f, |w| \models \Box\psi$ elde edilir.

($\Leftarrow$): $\mathcal{M}^f, |w| \models \Box\psi$ olsun. Ayrıca $\mathcal{M}, w \not\models \Box\psi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $w\mathcal{R}v$ olacak şekilde en az bir $v \in W$ vardır öyle ki, $\mathcal{M}, v \not\models \psi$. Tümevarım hipotezinden, $\mathcal{M}^f, |v| \not\models \psi$, ve Tanım 3.2.40'ın (ii) koşulundan, $w\mathcal{R}v$ ise $|w|\mathcal{R}^f|v|$'dir. O halde, $\mathcal{M}^f, |w| \not\models \Box\psi$ elde edilir.

$\boxtimes$

Teorem 3.2.43. *$\mathcal{M} = \langle W, \mathcal{R}, V\rangle$ bir model ve Σ sonlu ve yeterli bir küme olmak üzere $\varphi \in \Sigma$ bir formül olsun. φ formülü $\mathcal{M}$ modelinde geçersiz ise φ formülü $\mathcal{M}$ modelinin Σ ile elde edilmiş her filtrelemesinde de geçersizdir.*

İspat. φ formülü $\mathcal{M}$ modelinde geçersiz olsun. Bu durumda, $\mathcal{M}, w \not\models \varphi$ olacak şekilde bir $w \in W$ dünyası vardır. $\mathcal{M}^f = \langle W^f, \mathcal{R}^f, V^f\rangle$ modeli $\mathcal{M}$ modelinin Σ ile elde edilmiş herhangi bir filtrelemesi olsun. W^f kümesinin tanımından $w \sim w'$ olacak şekilde bir $w' \in W^f$ dünyası vardır. $\varphi \in \Sigma$ olduğundan, $\mathcal{M}, w' \not\models \varphi$'dir. Filtreleme teoremi ile $\mathcal{M}^f, w' \not\models \varphi$ yani, φ formülü $\mathcal{M}^f$ modelinde geçersizdir.

$\boxtimes$

Tanım 3.2.40'da verilen $\mathcal{R}^f$ bağıntısının her zaman var olup-olmadığını bilmiyoruz. Ancak gerekli şartları yerine getiren ikili bağıntıyı tanımlamanın her zaman iki yolu vardır: $\mathcal{M}$ modeli üzerinde en küçük $\mathcal{R}^s$ ve en büyük $\mathcal{R}^l$ filtreleme bağıntıları. Bu bağıntılar sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

(i) $|w|\mathcal{R}^s|v|$ olması için gerek ve yeter koşul $\exists w' \in |w|$ ve $\exists v' \in |v|$ olmak üzere $w'\mathcal{R}v'$ olmasıdır,

(ii) $|w|\mathcal{R}^l|v|$ olması için gerek ve yeter koşul her $\Box\varphi \in \Sigma$ olmak üzere $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ ise $\mathcal{M}, v \models \varphi$ olmasıdır.

Lemma 3.2.44. *$\mathcal{M}$ herhangi bir model, Σ alt formüllerine kapalı herhangi bir formül kümesi; W_Σ, $\sim_\Sigma$ ile elde edilmiş denklik sınıflarının bir kümesi ve V, W_Σ üzerinde tanımlı bir doğruluk değer ataması olsun. Bu durumda, $\langle W_\Sigma, \mathcal{R}^s, V\rangle$ ve $\langle W_\Sigma, \mathcal{R}^l, V\rangle$ modelleri, $\mathcal{M}$ modelinin Σ ile elde edilmiş birer filtrelemesidir. Ayrıca, $\langle W_\Sigma, \mathcal{R}^f, V^f\rangle$ modeli $\mathcal{M}$ modelinin Σ ile elde edilmiş herhangi bir filtrelemesi ise $\mathcal{R}^s \subseteq \mathcal{R}^f \subseteq \mathcal{R}^l$'dir.*

İspat. $\langle W_\Sigma, \mathcal{R}^s, V\rangle$ ve $\langle W_\Sigma, \mathcal{R}^l, V\rangle$ modellerinin, $\mathcal{M}$ modelinin Σ ile elde edilmiş filtrelemeleri olduğunu göstermeliyiz. Bu modellerin sadece bağıntıları üzerinde değişiklik yaptığımız için filtreleme tanımının (ii) ve (iii) koşullarının sağlandığını göstermemiz yeterli olacaktır.

İlk olarak $\langle W_\Sigma, \mathcal{R}^s, V\rangle$ modelinin $\mathcal{M}$'nin bir filtrelemesi olduğunu gösterelim:

(ii), $\mathcal{R}^s$ bağıntısının tanımından sağlanır.

(iii) $|w|\mathcal{R}^s|v|$ ve her $\Box\varphi \in \Sigma$ için $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ olduğunu varsayalım. $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ ve $w \sim w'$ olduğundan $\mathcal{M}, w' \models \Box\varphi$'dir. $|w|\mathcal{R}^s|v|$ olduğundan en az bir $w' \in |w|$ ve $v' \in |v|$ vardır öyle ki $w'\mathcal{R}v'$'dür. Bundan dolayı, $\mathcal{M}, v' \models \varphi$'dir. $v \sim v'$ olduğundan $\mathcal{M}, v \models \varphi$ elde edilir.

O halde $\langle W_\Sigma, \mathcal{R}^s, V\rangle$ modeli $\mathcal{M}$ modelinin bir filtrelemesidir.

Şimdide $\langle W_\Sigma, \mathcal{R}^l, V\rangle$ modelinin $\mathcal{M}$'nin bir filtrelemesi olduğunu gösterelim:

(ii) $w\mathcal{R}v$ ve her $\Box\varphi \in \Sigma$ için $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ olduğunu varsayalım. $\Box$'lı formüllerin doğruluk tanımından $\mathcal{M}, v \models \varphi$'dir. O halde, her $\Box\varphi \in \Sigma$ için $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ ise $\mathcal{M}, v \models \varphi$ yani, $|w|\mathcal{R}^l|v|$ elde edilir.

(iii), $\mathcal{R}^l$ bağıntısının tanımından sağlanır.

O halde $\langle W_\Sigma, \mathcal{R}^l, V\rangle$ modeli $\mathcal{M}$ modelinin bir filtrelemesidir.

$\langle W_\Sigma, \mathcal{R}^f, V^f\rangle$ modeli $\mathcal{M}$ modelinin herhangi bir filtrelemesi olsun. Bu durumda, $\mathcal{R}^s \subseteq \mathcal{R}^f \subseteq \mathcal{R}^l$ olduğunu göstermeliyiz.

(i) $|w|\mathcal{R}^s|v|$ olduğunu varsayalım. $\mathcal{R}^s$ bağıntısının tanımından en az bir $w' \in |w|$ ve $v' \in |v|$ vardır öyle ki $w'\mathcal{R}v'$'dur. Tanım 3.2.40 ile $|w'|\mathcal{R}^f|v'|$'dür ki bundan dolayıda $|w|\mathcal{R}^f|v|$'dir. O halde, $\mathcal{R}^s \subseteq \mathcal{R}^f$ elde edilir.

(ii) $|w|\mathcal{R}^f|v|$ olduğunu varsayalım. Tanım 3.2.40 ile her $\Box\varphi \in \Sigma$ için $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ ise $\mathcal{M}, v \models \varphi$'dir. $\mathcal{R}^g$ bağıntısının tanımından $|w|\mathcal{R}^g|v|$'dir. O halde, $\mathcal{R}^f \subseteq \mathcal{R}^g$ elde edilir.

O halde $\mathcal{R}^s \subseteq \mathcal{R}^f \subseteq \mathcal{R}^l$'dir.

$\boxtimes$

Teorem 3.2.45. *$\mathcal{M}$ bir model, Σ alt formüllere kapalı bir formül kümesi ve W_Σ, $\mathcal{M}$ modelinde $\sim_\Sigma$ ile elde edilen denklik sınıflarının bir kümesi olsun. W_Σ üzerinde ikili bir $\mathcal{R}^t$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$|w|\mathcal{R}^t|v|$ olması için gerek ve yeter koşul her $\Box\varphi \in \Sigma$ için $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ ise $\mathcal{M}, v \models \Box\varphi$ ve $\mathcal{M}, v \models \varphi$ olmasıdır.

$\mathcal{R}$ bağıntısı geçişli ise $\langle W_\Sigma, \mathcal{R}^t, V^f\rangle$ modeli bir filtrelemedir ve $\mathcal{R}^t$ bağıntısı geçişli bir bağıntıdır.

İspat. $\mathcal{R}$ bağıntısı geçişli ve $\mathcal{R}^t$ bağıntısı yukarıdaki gibi tanımlı olsun. Bu durumda, $\langle W_\Sigma, \mathcal{R}^t, V^f\rangle$ modelinin bir filtreleme ve $\mathcal{R}^t$ bağıntısının geçişli olduğunu göstermeliyiz.

(i) $W^f = W_\Sigma$.

(ii) $w\mathcal{R}v$ ise $|w|\mathcal{R}^t|v|$:

$w\mathcal{R}v$, $\Box\varphi \in \Sigma$ ve $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ olsun. $\Box$'lı formullerin doğruluk tanımından, $\mathcal{M}, v \models \varphi$'dir. $\mathcal{R}$ geçişli olduğundan $w\mathcal{R}v$ ve $v\mathcal{R}u$ ise $w\mathcal{R}u$'dur. $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ olduğundan $\mathcal{M}, u \models \varphi$'dir. O halde, $\mathcal{M}, v \models \Box\varphi$'dir.

(iii) $|w|\mathcal{R}^t|v|$ ise her $\Box\varphi \in \Sigma$ için $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ ise $\mathcal{M}, v \models \varphi$:

$|w|\mathcal{R}^t|v|$ ve her $\Box\varphi \in \Sigma$ için $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ olsun. $\mathcal{R}^t$'nin tanımından $\mathcal{M}, v \models \varphi$ elde edilir.

O halde $\langle W_\Sigma, \mathcal{R}^t, V^f \rangle$ bir filtrelemedir.

$|w|\mathcal{R}^t|v|$ ve $|v|\mathcal{R}^t|u|$ ise $|w|\mathcal{R}^t|u|$:

$|w|\mathcal{R}^t|v|$ ve $|v|\mathcal{R}^t|u|$ olsun. $\Box\varphi \in \Sigma$ ve $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ olduğunu varsayalım. $|w|\mathcal{R}^t|v|$ ve $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ olduğundan $\mathcal{M}, v \models \Box\varphi$ ve $\mathcal{M}, v \models \varphi$'dir. $|v|\mathcal{R}^t|u|$ ve $\mathcal{M}, v \models \Box\varphi$ olduğundan $\mathcal{M}, u \models \Box\varphi$ ve $\mathcal{M}, u \models \varphi$'dir. O halde, $|w|\mathcal{R}^t|u|$ elde edilir.

O halde $\mathcal{R}^t$ bağıntısı geçişlidir.

$\boxtimes$

S4 ve **GL** modal mantıklarının sonlu model özelliğine sahip oldukları kanonik model ve filtreleme yönteminden yararlanılarak ispatlanır.

Teorem 3.2.46. **S4** *modal mantığı sonlu model özelliğine sahiptir.*

İspat. **S4** modal mantığının kanonik modeli $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}} = \langle W_{\mathbf{S4}}, \mathcal{R}_{\mathbf{S4}}, V_{\mathbf{S4}} \rangle$ ve $\nvdash_{\mathbf{S4}} \varphi$ olsun. Bu durumda φ formülü **S4** modal mantığının kanonik modeli $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}$'de geçersizdir. Bunun için **S4**'ün φ formülünü geçersiz kılan sonlu bir modelinin var olduğunu göstermeliyiz. $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}$ modelinin bir Φ formül kümesine göre filtreleme yöntemi ile elde edilen bu model $\mathcal{M}^f_{\mathbf{S4}} = \langle W^f_{\mathbf{S4}}, \mathcal{R}^f_{\mathbf{S4}}, V^f_{\mathbf{S4}} \rangle$ modelidir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

(i) $W^f_{\mathbf{S4}} = \{|\Gamma|_\Phi : \Gamma \in W_{\mathbf{S4}}\}$,

(ii) $\mathcal{R}^f_{\mathbf{S4}} = \{\langle |\Gamma|, |\Gamma'| \rangle \mid$ her $\Box\varphi \in \Phi$ için $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma \models \Box\varphi$ ise $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma' \models \Box\varphi$ ve $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma' \models \varphi\}$,

(iii) $V^f_{\mathbf{S4}}(p) = \{\Gamma \mid$ her önerme değişkeni p için $\mathcal{M}, \Gamma \models p\}$.

İlk olarak $\mathcal{M}^f_{\mathbf{S4}}$ modelinin $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}$ modelinin Φ ile elde edilmiş bir filtrelemesi olduğunu gösterelim.

(i) $W^f_{\mathbf{S4}}$, sonlu bir formül kümesi Φ'ye göre elde edilen denklik sınıflarından oluşur ve bu nedenle sonludur. O halde, filtreleme tanımının (i) koşulunu sağlar.

(ii) $\Gamma\mathcal{R}_{\mathbf{S4}}\Gamma'$ ve her $\Box\varphi \in \Phi$ için $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma \models \Box\varphi$ olsun. $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma' \not\models \Box\varphi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\Gamma'\mathcal{R}_{\mathbf{S4}}\Gamma''$ olacak şekilde bir $\Gamma'' \in W_{\mathbf{S4}}$ vardır öyle ki $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma'' \not\models \varphi$'dir. $\mathcal{R}$ geçişli olduğundan $\Gamma\mathcal{R}\Gamma''$'dür. O halde, $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma \not\models \Box\varphi$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde, filtreleme tanımının (ii) koşulunu sağlar.

(iii) $|\Gamma|\mathcal{R}^f_{\mathbf{S4}}|\Gamma'|$ ve her φ formülü için $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma \models \Box\varphi$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma' \models \Box\varphi$ ve her $\Gamma'' \in W$ için $\Gamma\mathcal{R}_{\mathbf{S4}}\Gamma''$ ve $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma'' \models \varphi$'dir. $\mathcal{R}_{\mathbf{S4}}$ yansımalı olduğundan $\Gamma'\mathcal{R}_{\mathbf{S4}}\Gamma''$ ve bundan dolayı da $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma' \models \varphi$'dir.

Şimdi $\mathcal{M}^f_{\mathbf{S4}}$'ün bir **S4** model olduğunu gösterelim.

$\mathcal{R}^f_{\mathbf{S4}}$ geçişlidir: $|\Gamma|\mathcal{R}^f_{\mathbf{S4}}|\Gamma'|$ ve $|\Gamma'|\mathcal{R}^f_{\mathbf{S4}}|\Gamma''|$ olsun. Bu durumda, her $\Box\varphi \in \Phi$ için $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma \models \Box\varphi$ ise $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma' \models \Box\varphi$ ve $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma' \models \varphi$'dir. $|\Gamma'|\mathcal{R}^f_{\mathbf{S4}}|\Gamma''|$ olduğundan $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma'' \models \Box\varphi$ ve $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma'' \models \varphi$'dir. O halde $|\Gamma|\mathcal{R}^f_{\mathbf{S4}}|\Gamma''|$ yani, $\mathcal{R}^f_{\mathbf{S4}}$ geçişlidir.

$\mathcal{R}^f_{\mathbf{S4}}$ yansımalıdır: $|\Gamma|\mathcal{R}^f_{\mathbf{S4}}|\Gamma|$ olmadığını ve her $\Box\varphi \in \Phi$ için $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma \models \Box\varphi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma \not\models \Box\varphi$ veya $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma \not\models \varphi$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde, $\mathcal{R}^f_{\mathbf{S4}}$ yansımalıdır.

O halde Teorem 3.2.43'den $\mathcal{M}^f_{\mathbf{S4}} \not\models \varphi$ yani, **S4** sonlu model özelliğine sahiptir.

⊠

GL modal mantığının kanonik modelinin en az bir tane yansımalı dünya içerdiğini biliyoruz. Bu durumda, **GL**'nin sonlu model özelliğine sahip olduğunu gösterebilmek için aşağıdakilere ihtiyaç vardır.

Lemma 3.2.47. *Bir φ formülü* **GL***-tutarlı ise, $\Box\neg\varphi\wedge\varphi$ formülü de* **GL***-tutarlıdır.*

İspat. φ formülünün **GL**-tutarlı ve $\Box\neg\varphi \wedge \varphi$ formülünün **GL**-tutarsız olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box\neg\varphi \to \neg\varphi$ yazılabilir. NR kuralı uygulanırsa, $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box(\Box\neg\varphi \to \neg\varphi)$ ve Löb aksiyomu ile $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box\neg\varphi$ elde edilir. Buradanda, MP kuralı uygulanırsa $\vdash_{\mathbf{GL}} \neg\varphi$ elde edilir ki bu φ formülünün **GL**-tutarlı olmadığını ifade eder. Bu bir çelişkidir. O halde, $\Box\neg\varphi \wedge \varphi$ formülü **GL**-tutarlıdır.

⊠

Tanım 3.2.48. *$\mathcal{M} = \langle W, \mathcal{R}, V\rangle$ bir model ve Γ bir dünyalar kümesi olsun. $w\mathcal{R}u$ olacak şekilde bir $u \in \Gamma$ dünyası yoksa, $w \in \Gamma$ dünyasına Γ kümesinin* son noktası *denir ve $F(\Gamma) = w$ ile gösterilir.*

Lemma 3.2.49. $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}} = \langle W_{\mathbf{GL}}, \mathcal{R}_{\mathbf{GL}}, V_{\mathbf{GL}} \rangle$*,* **GL** *modal mantığının kanonik modeli ve* Γ *herhangi bir sonlu* Φ *kümesine göre* $W_{\mathbf{GL}}$*'da bir denklik sınıfı olsun. Bu durumda bir* $w^* \in \Gamma$ *dünyası vardır öyle ki* w^* *son noktadır.*

İspat. φ, **GL**'de herhangi bir formül olsun. $W_{\mathbf{GL}}$'deki her denklik sınıfı boştan farklıdır ve bu nedenle φ formülü tutarlıdır. Lemma 3.2.47 ile de $\Box\neg\varphi \wedge \varphi$ formülü tutarlı olur. O halde, $\Box\neg\varphi \wedge \varphi \in w^*$ olacak şekilde $w^* \in W_{\mathbf{GL}}$ dünyası vardır. Bu durumda Truth Lemma ile (i) $w^* \models \Box\neg\varphi$ ve (ii) $w^* \models \varphi$'dir. (ii) koşulundan $w^* \in \Gamma$'dır. (i) koşulu ile w^* dünyası $\neg\varphi$ formülünü içeren bir dünyayı görür ve bundan dolayı Γ kümesinin bir elemanı değildir. O halde, w^* dünyası Γ kümesinde son noktadır.

$\boxtimes$

Teorem 3.2.50. **GL** *modal mantığı sonlu model özelliğine sahiptir.*

İspat. $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}} = \langle W_{\mathbf{GL}}, \mathcal{R}_{\mathbf{GL}}, V_{\mathbf{GL}} \rangle$, **GL**'nin kanonik modeli ve $\nvdash_{\mathbf{GL}} \varphi$ olsun. Bu durumda, φ formülü **GL** modal mantığının kanonik modeli $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}$'de geçersizdir. Bunun için φ formülünü geçersiz kılan sonlu bir **GL** modelinin var olduğu gösterilmelidir. Bu model, filtreleme yöntemi ile elde edilebilir. Φ sonlu bir formül kümesi olmak üzere $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}$ modelinin Φ'ye göre filtreleme yöntemi ile elde edilen $\mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}}$ modeli $\mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}} = \langle W^f_{\mathbf{GL}}, \mathcal{R}^f_{\mathbf{GL}}, V^f_{\mathbf{GL}} \rangle$ modelidir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

(i) $W^f_{\mathbf{GL}} = \{|\Gamma|_\Phi : \Gamma \in W_{\mathbf{GL}}\}$,

(ii) $\mathcal{R}^f_{\mathbf{GL}} = \{\langle |\Gamma|, |\Gamma'| \rangle \mid$ her $\Box\varphi \in \Phi$ formülü için $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma|) \models \Box\varphi$ ise $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma'|) \models \Box\varphi \wedge \varphi$ ve herhangi bir $\Box\chi \in \Phi$ için $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma'|) \models \Box\chi$ ve $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma|) \models \neg\Box\chi\}$,

(iii) $V^f_{\mathbf{GL}}(p) = \{\Gamma \mid$ her önerme değişkeni p için $\Gamma \models p\}$.

İlk olarak $\mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}}$ modelinin $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}$'nin bir filtrelemesi olduğunu gösterelim.

(i) $W^f_{\mathbf{GL}}$, sonlu bir formül kümesi Φ'ye göre elde edilen denklik sınıflarından oluşur ve bu nedenle sonludur. O halde, filtreleme tanımının (i) koşulunu sağlar.

(ii) $w\mathcal{R}_{\mathbf{GL}}v$ ve her $\Box\varphi \in \Phi$ için $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma|) \models \Box\varphi$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}}, |\Gamma| \models \Box\varphi$'dir. Filtreleme teoreminden $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, \Gamma \models \Box\varphi$ ve $\mathcal{R}_{\mathbf{GL}}$'nin tanımından $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, \Gamma \models \varphi$ elde edilir. O halde, filtreleme teoreminden $\mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}}, |\Gamma| \models \varphi$'dir.

Örnek 2.2.9'dan $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ yani, $\mathbf{K4} \subseteq \mathbf{GL}$ olduğunu biliyoruz. O halde, $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma|) \models \Box\Box\varphi$ ve bundan dolayı $\mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}}, |\Gamma| \models \Box\Box\varphi$'dir. Filtreleme teoreminden $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, \Gamma \models \Box\Box\varphi$ ve $\mathcal{R}_{\mathbf{GL}}$'nin tanımından $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, \Gamma' \models \Box\varphi$ elde edilir. O halde, filtreleme teoreminden $\mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}}, |\Gamma'| \models \Box\varphi$'dir.
$\wedge$'li formüllerin bir modelde doğruluk tanımından $\mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}}, |\Gamma'| \models \Box\psi \wedge \psi$ ve bundan dolayı $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma'|) \models \Box\psi \wedge \psi$ elde edilir.

Herhangi bir $\Box\chi \in \Phi$ için $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma'|) \models \Box\chi$ olsun. $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma|) \not\models \neg\Box\chi$ olduğunu varsayalım. $F(|\Gamma|)$ maksimal $\mathbf{GL}$-tutarlı olduğundan $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma|) \models \Box\chi$'dir. $\Gamma\mathcal{R}_{\mathbf{GL}}\Gamma'$ ve $F(|\Gamma|)$, $|\Gamma|$'nın son noktası olduğundan $F(|\Gamma'|) \notin |\Gamma|$'dır. Ancak varsayımdan hem $F(|\Gamma|)$ hemde $F(|\Gamma'|)$ dünyaları aynı formülleri gerçekler, yani $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma|) \models \Box\chi$ ve $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma'|) \models \Box\chi$'dir. $F(|\Gamma|)$ ve $F(|\Gamma'|)$ aynı denklik sınıfına ait olmadığından bu bir çelişkidir. O halde, $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma|) \models \neg\Box\chi$'dir.

(iii) $|\Gamma|\mathcal{R}^f_{\mathbf{GL}}|\Gamma'|$ ve her $\Box\varphi \in \Phi$ için $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, \Gamma \models \Box\varphi$ olsun. Bu durumda, filtreleme teoreminden $\mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}}, |\Gamma| \models \Box\varphi$, buradan $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma|) \models \Box\varphi$'dir. $\mathcal{R}^f_{\mathbf{GL}}$'nin tanımından $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma'|) \models \Box\varphi \wedge \varphi$'dir. $\wedge$'li formüllerin doğruluk tanımından $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma'|) \models \varphi$ elde edilir. O halde, $\mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}}, |\Gamma'| \models \varphi$ ve filtreleme teoremi ile $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, \Gamma' \models \varphi$'dir.
Şimdi $\mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}}$'nin bir $\mathbf{GL}$ model olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $W^f_{\mathbf{GL}}$ sonlu olduğundan $\mathcal{R}^f_{\mathbf{GL}}$'nin geçişli ve yansımasız olduğunu göstermek yeterlidir.

$\mathcal{R}^f_{\mathbf{GL}}$ geçişlidir: $|\Gamma|\mathcal{R}^f_{\mathbf{GL}}|\Gamma'|$ ve $|\Gamma'|\mathcal{R}^f_{\mathbf{GL}}|\Gamma''|$ olsun. Bu durumda $|\Gamma|\mathcal{R}^f_{\mathbf{GL}}|\Gamma''|$ olduğunu göstermeliyiz. Her $\Box\varphi \in \Phi$ için $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma|) \models \Box\varphi$ olduğunu varsayalım. Hipotezden $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma'|) \models \Box\varphi\wedge\varphi$ olduğunu biliyoruz. $\wedge$'li formüllerin bir modeldeki doğruluk tanımından $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma'|) \models \Box\varphi$ ve $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma'|) \models \varphi$'dir. Hipotezden $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma''|) \models \Box\varphi \wedge \varphi$ elde edilir. O halde, $|\Gamma|\mathcal{R}^f_{\mathbf{GL}}|\Gamma''|$'dür.

$\mathcal{R}^f_{\mathbf{GL}}$ yansımasızdır: $|\Gamma|\mathcal{R}^f_{\mathbf{GL}}|\Gamma|$ yani, bağıntının yansımalı olduğunu varsayalım. $\mathcal{R}^f_{\mathbf{GL}}$ bağıntının tanımından herhangi bir $\Box\chi \in \Phi$ için $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma|) \models \Box\chi$ ve $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma|) \models \neg\Box\chi$'dir. $F(|\Gamma|)$ maksimal $\mathbf{GL}$-tutarlı bir formül kümesi olduğundan bu bir çelişkidir. O halde, $\mathcal{R}^f_{\mathbf{GL}}$ bağıntısı yansımasızdır.

O halde, $\mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}}$ modeli $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}$ modelinin Φ kümesi ile elde edilmiş bir filtrelemesidir. Bu durumda Teorem 3.2.41 ile φ formülü $\mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}}$ modelinde de geçersizdir yani, $\mathbf{GL}$ modal mantığı sonlu model özelliğine sahiptir.

$\boxtimes$

Bölüm 4

Yeni Sonuçlar

Bu bölümde **S4** ve **GL** modal mantıklarının sonlu Henkin yöntemi ve filtreleme yöntemi ile elde edilen modellerinin izomorf olduğu kanonik modellerinden yararlanılarak gösterilecektir.

Bölüm boyunca Φ sonlu ve yeterli bir kümeyi gösterecektir.

4.1 S4 Modal Mantığı için Sonuçlar

K ve **K4** modal mantıklarının iki farklı yöntemle elde edilen modellerinin izomorf olduğu [12]'de ispatlanmıştır. Burada da benzer yöntemle **S4** modal mantığının iki farklı yöntem ile elde edilen modellerinin izomorf olduğu ispatlanacaktır.

Tanım 4.1.1. **S4** *modal mantığının sonlu Henkin yöntemi ile elde edilmiş modeli* $\mathcal{M}^{\Phi}_{\mathbf{S4}} = \langle W^{\Phi}_{\mathbf{S4}}, \mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{S4}}, V^{\Phi}_{\mathbf{S4}} \rangle$ *aşağıdaki gibi tanımlanır:*

(i) $W^{\Phi}_{\mathbf{S4}} = \{\Gamma \mid \Gamma$ *kümesi* Φ*'de maksimal* **S4**-*tutarlıdır* $\}$,

(ii) $\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{S4}} = \{\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle \mid$ *her* $\varphi \in \Phi$ *için* $\Box\varphi \in \Gamma_1$ *ise,* $\Box\varphi \in \Gamma_2$ *ve* $\varphi \in \Gamma_2$ $\}$,

(iii) $V^{\Phi}_{\mathbf{S4}}(p) = \{\Gamma \mid$ *her önerme değişkeni* p *için* $p \in \Gamma\}$*'dır.*

Lemma 4.1.2. *Tanım 4.1.1'de tanımlanan* $\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{S4}}$ *bağıntısı geçişli ve yansımalı bir bağıntıdır.*

İspat. $\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{S4}}$ geçişlidir: $\Gamma_1\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{S4}}\Gamma_2$ ve $\Gamma_2\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{S4}}\Gamma_3$ olsun. Bu durumda, her $\Box\varphi \in \Phi$ için $\Box\varphi \in \Gamma_1$ ise $\Box\varphi \in \Gamma_2$'dir. Hipotezden $\Box\varphi \in \Gamma_3$ ve $\varphi \in \Gamma_3$ elde edilir. O halde, $\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{S4}}$ geçişlidir.

$\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{S4}}$ yansımalıdır: $\Gamma_1\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{S4}}\Gamma_1$ olmadığını ve her $\Box\varphi \in \Phi$ için $\Box\varphi \in \Gamma_1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\Box\varphi \in \Gamma_1$ veya $\varphi \in \Gamma_1$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde, $\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{S4}}$ yansımalıdır.

$\boxtimes$

Teorem 4.1.3. *$\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}$, **S4** modal mantığının kanonik modeli olsun. $\mathcal{M}^{\Phi}_{\mathbf{S4}}$, sonlu Henkin yöntemiyle elde edilmiş bir modeli ve $\mathcal{M}^{f}_{\mathbf{S4}}$, kanonik modelin Φ kümesi ile elde edilmiş filtrelemesi ise, $\mathcal{M}^{\Phi}_{\mathbf{S4}} \cong \mathcal{M}^{f}_{\mathbf{S4}}$'dir.*

İspat. $\mathcal{M}^{\Phi}_{\mathbf{S4}}$ ile $\mathcal{M}^{f}_{\mathbf{S4}}$ modellerinin izomorf oldukları yani $\mathcal{M}^{\Phi}_{\mathbf{S4}}$ ile $\mathcal{M}^{f}_{\mathbf{S4}}$ modeli arasında bijektif kuvvetli bir homomorfizma olduğu gösterilmelidir. s bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{array}{rccc} s: & \mathcal{M}^{\Phi}_{\mathbf{S4}} & \to & \mathcal{M}^{f}_{\mathbf{S4}} \\ & \Gamma & \mapsto & |\Gamma'|, \end{array}$$

burada $\Gamma = \Gamma' \cap \Phi$'dir. Öncelikle s bağıntısının bir fonksiyon olduğu gösterilmelidir. Bunun için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç vardır.

Lemma 4.1.4. *Γ, Φ'de maksimal **S4**-tutarlı bir küme olsun. Bu durumda, $\Gamma \subseteq \Delta$ olacak şekilde bir maksimal **S4**-tutarlı Δ kümesi vardır.*

İspat. Γ, Φ'de maksimal **S4**-tutarlı bir küme olsun. Bu durumda, maksimal tutarlılık tanımından Γ kümesi **S4**- tutarlıdır. Lindenbaum Lemması'ndan da, $\Gamma \subseteq \Delta$ olacak şekilde bir maksimal **S4**-tutarlı Δ kümesinin var olduğu elde edilir.

$\boxtimes$

Lemma 4.1.5. *Γ, Φ'de maksimal **S4**-tutarlı bir küme olsun. $\Gamma \subseteq \Gamma'$ ve $\Gamma \subseteq \Gamma''$ olacak şekilde Γ', Γ'' kümelerinin maksimal **S4**-tutarlı olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\Gamma' \sim_{\Phi} \Gamma''$ (denk olarak, her $\varphi \in \Phi$ için $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma' \models \varphi$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma'' \models \varphi$ olmasıdır)'dür.*

İspat. Γ, Φ'de maksimal **S4**-tutarlı bir küme ve $\Gamma \subseteq \Gamma'$, $\Gamma \subseteq \Gamma''$ olacak şekilde iki maksimal **S4**-tutarlı küme olsun. $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma' \models \varphi$ ve $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma'' \not\models \varphi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, Truth Lemma'dan $\varphi \in \Gamma'$ ve $\varphi \notin \Gamma''$ (Γ'' maksimal **S4**-tutarlı olduğundan $\neg\varphi \in \Gamma''$)'dür. İki durum söz konusudur;

- $\neg\varphi \in \Phi$ olsun.

Γ' maksimal **S4**-tutarlı olduğundan $\varphi \in \Gamma'$ olması için gerek ve yeter koşul $\neg\varphi \notin \Gamma'$ olmasıdır. $\Gamma \subseteq \Gamma'$ olduğundan $\neg\varphi \notin \Gamma$ ve Γ maksimal **S4**-tutarlı olduğundan $\varphi \in \Gamma$'dır. $\Gamma \subseteq \Gamma''$ olduğundan da $\varphi \in \Gamma''$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

- $\neg\varphi \notin \Phi$ olsun.

Bu durumda, $\varphi \Leftrightarrow \neg\psi$ olacak şekilde bir $\psi \in \Phi$ formülü vardır. Γ' maksimal **S4**-tutarlı olduğundan $\neg\psi \in \Gamma'$ olması için gerek ve yeter koşul $\psi \notin \Gamma'$ olmasıdır. $\Gamma \subseteq \Gamma'$ olduğundan $\psi \notin \Gamma$ ve Γ maksimal **S4**-tutarlı olduğundan $\neg\psi \in \Gamma$'dır. $\Gamma' \subseteq \Gamma''$ olduğundan da $\varphi \in \Gamma''$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

O halde, $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma'' \models \varphi$'dir.

$\boxtimes$

Lemma 4.1.4 ve lemma 4.1.5 ile $\Gamma \rightsquigarrow \Gamma' \rightsquigarrow |\Gamma'|_\Phi$ yani, $\Gamma \mapsto |\Gamma'|_\Phi$ elde edilir. O halde, s bağıntısı $\mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{S4}}$ modelinden $\mathcal{M}^f_{\mathbf{S4}}$ modeline bir fonksiyondur.

Şimdi $s : \mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{S4}} \to \mathcal{M}^f_{\mathbf{S4}}$ fonksiyonunun bir kuvvetli homomorfizma olduğu gösterilmelidir. Bunun için kuvvetli homomorfizma tanımının (i) ve (ii) koşullarını gerçeklediği gösterilmelidir:

(i) Her bir önerme değişkeni p ve $\Gamma \in \mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{S4}}$ kümesi için $\Gamma \in \mathcal{V}^\Phi_{\mathbf{S4}}(p)$ olması için gerek ve yeter koşulun $s(\Gamma) \in V^f_{\mathbf{S4}}(p)$ olduğu gösterilmelidir:

- $p \in \Phi$ olsun.

($\Rightarrow$): $\Gamma \in V^\Phi_{\mathbf{S4}}(p)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $V^\Phi_{\mathbf{S4}}(p)$'nin tanımından $p \in \Gamma$'dır. $\Gamma \subseteq \Gamma'$ olduğundan $p \in \Gamma'$ ve Truth Lemması'ndan $\Gamma' \models p$'dir. Filtreleme tanımının (iv) koşulundan da $s(\Gamma) = |\Gamma'| \in V^f_{\mathbf{S4}}(p)$ elde edilir.

($\Leftarrow$): $|\Gamma'| \in V^f_{\mathbf{S4}}(p)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $V^f_{\mathbf{S4}}(p)$'nin tanımından $\Gamma' \models p$'dir. Truth Lemması'ndan $p \in \Gamma'$ ve Γ, Φ de maximal **S4**-tutarlı olduğundan $p \in \Gamma$'dır. $\mathcal{V}^\Phi_{\mathbf{S4}}(p)$'nin tanımından da $\Gamma \in \mathcal{V}^\Phi_{\mathbf{S4}}(p)$ elde edilir.

- $p \notin \Phi$ olsun.

Γ, Φ'de maksimal **S4**-tutarlı bir küme ve $\Gamma \subseteq \Phi$ olduğundan $p \notin \Gamma$'dır. $V^\Phi_{\mathbf{S4}}(p)$'nin tanımından $\Gamma \notin V^\Phi_{\mathbf{S4}}(p)$'dir. $p \notin \Phi$ olduğundan $V^f_{\mathbf{S4}}(p) = \emptyset$'dir. Filtreleme tanımının (iv) koşulundan da $s(\Gamma) = |\Gamma'| \notin V^f_{\mathbf{S4}}(p)$ elde edilir.

(ii) Her $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{S4}}$ olmak üzere $\Gamma_1 \mathcal{R}^\Phi_{\mathbf{S4}} \Gamma_2$ olması için gerek ve yeter koşulun $s(\Gamma_1) \mathcal{R}^f_{\mathbf{S4}} s(\Gamma_2)$ olduğu gösterilmelidir:

($\Rightarrow$): Her $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{S4}}$ için, $\Gamma_1 \mathcal{R}^\Phi_{\mathbf{S4}} \Gamma_2$ ve $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, |\Gamma'_1| \models \Box\varphi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, Truth Lemma'dan $\Box\varphi \in \Gamma'_1$ elde edilir. $\Box\varphi \in \Phi$ ve

$\Gamma_1 = \Gamma_1' \cap \Phi$ olduğundan $\Box\varphi \in \Gamma_1$'dir. $\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{S4}}$ bağıntısının tanımından $\Box\varphi \in \Gamma_2$ ve $\varphi \in \Gamma_2$ elde edilir. $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_2'$ olduğundan $\Box\varphi \in \Gamma_2'$ ve $\varphi \in \Gamma_2'$'dür. Truth Lemma'dan $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma_2' \models \Box\varphi$ ve $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma_2' \models \varphi$'dir. O halde, $\mathcal{R}^{f}_{\mathbf{S4}}$ bağıntısının tanımından $|\Gamma_1'|\mathcal{R}^{f}_{\mathbf{S4}}|\Gamma_2'|$ yani, $s(\Gamma_1)\mathcal{R}^{f}_{\mathbf{S4}}s(\Gamma_2)$ elde edilir.

($\Leftarrow$): Her $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{M}^{\Phi}_{\mathbf{S4}}$ için $s(\Gamma_1)\mathcal{R}^{f}_{\mathbf{S4}}s(\Gamma_2)$ ve $\Box\varphi \in \Gamma_1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\Box\varphi \in \Phi$ ve $\Gamma_1 = \Gamma_1' \cap \Phi$ olduğundan $\Box\varphi \in \Gamma_1'$'dür. Truth Lemma'dan $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma_1' \models \Box\varphi$ ve bu durumda $\mathcal{R}^{f}_{\mathbf{S4}}$ bağıntısının tanımından $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma_2' \models \Box\varphi$ ve $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma_2' \models \varphi$ elde edilir. Truth Lemma ile $\Box\varphi \in \Gamma_2'$ ve $\varphi \in \Gamma_2'$'dür. $\Gamma_2 = \Gamma_2' \cap \Phi$ ve $\Box\varphi, \varphi \in \Phi$ olduğundan $\Box\varphi \in \Gamma_2$ ve $\varphi \in \Gamma_2$'dir. O halde, $\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{S4}}$ bağıntısının tanımından $\Gamma_1\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{S4}}\Gamma_2$ elde edilir.

O halde, s fonksiyonu bir kuvvetli homomorfizmadır.

Şimdi s fonksiyonunun bijektif olduğu gösterilmelidir. Bunun için, s fonksiyonunun 1-1 ve örten olduğu gösterilmelidir:

s fonksiyonu 1-1'dir: Γ_1 ve Γ_2, Φ de maksimal **S4**-tutarlı kümeler ve $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ olsun. $s(\Gamma_1) \neq s(\Gamma_2)$ olduğunu göstermeliyiz.

$\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ ise, ya $\varphi \in \Gamma_1$ ve $\varphi \notin \Gamma_2$ ya da $\varphi \notin \Gamma_1$ ve $\varphi \in \Gamma_2$ olacak şekilde bir φ formülü vardır.

- $\varphi \in \Gamma_1$ ve $\varphi \notin \Gamma_2$ olsun.

$\Gamma_1 = \Gamma_1 \cap \Phi$, $\Gamma_2 = \Gamma_2' \cap \Phi$ ve $\varphi \in \Phi$ olduğundan $\varphi \in \Gamma_1'$ ve $\varphi \notin \Gamma_2'$'dür. Truth Lemma'dan $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma_1' \models \varphi$ ve $\mathcal{M}_{S4}, \Gamma_2' \not\models \varphi$ sağlanır. Bundan dolayı, $\Gamma_1' \not\sim_{\Phi} \Gamma_2'$'dür. O halde, $|\Gamma_1'| \neq |\Gamma_2'|$ yani, $s(\Gamma_1) \neq s(\Gamma_2)$ elde edilir.

- $\varphi \in \Gamma_2$ ve $\varphi \notin \Gamma_1$ olsun.

$\Gamma_1 = \Gamma_1 \cap \Phi$, $\Gamma_2 = \Gamma_2' \cap \Phi$ ve $\varphi \in \Phi$ olduğundan $\varphi \in \Gamma_2'$ ve $\varphi \notin \Gamma_1'$'dür. Truth Lemma'dan $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma_2' \models \varphi$ ve $\mathcal{M}_{\mathbf{S4}}, \Gamma_1' \not\models \varphi$ sağlanır. Bundan dolayı, $\Gamma_1' \not\sim_{\Phi} \Gamma_2'$'dür. O halde, $|\Gamma_1'| \neq |\Gamma_2'|$ yani $s(\Gamma_1) \neq s(\Gamma_2)$ elde edilir.

s fonksiyonu örtendir: Her $|\Gamma'| \in \mathcal{W}^{f}_{\mathbf{S4}}$ için $s(\Gamma) = |\Gamma'|$ olacak şekilde en az bir $\Gamma \in \mathcal{W}^{\Phi}_{\mathbf{S4}}$ kümesinin var olduğu gösterilmelidir.

$\Gamma \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Phi$ olacak şekilde Γ_1 **S4**-tutarlı bir küme olsun. $\Gamma = \Gamma_1$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için $\Gamma \neq \Gamma_1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, herhangi bir $\varphi \in \Phi$ formülü için $\varphi \in \Gamma_1$ ise $\varphi \notin \Gamma$'dır. Γ maksimal **S4**-tutarlı olduğundan,

$\neg\varphi \in \Gamma$'dır. Bu durumda, $\Gamma = \Gamma' \cap \Phi$ olduğundan $\neg\varphi \in \Gamma'$ ve bundan dolayı $\neg\varphi \in \Gamma_1$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

O halde, s fonksiyonu bir bijeksiyondur.

Sonuç olarak s fonksiyonu bir izomorfizmadır yani,

$$\mathcal{M}^{\Phi}_{\mathbf{S4}} \cong \mathcal{M}^{f}_{\mathbf{S4}}\text{'dir.}$$

$\boxtimes$

4.2 GL Modal Mantığı için Sonuçlar

Bu kesimde **GL** modal mantığının sonlu Henkin yöntemiyle elde edilen modeli ve kanonik modelinin bir filtrelemesinden elde edilen modelinin izomorf oldukları gösterilecektir. Bu izomorfizma gösterilirken Kesim 4.1'de verilen **S4** modal mantığı durumuna benzer bir yöntem izlenecektir. Ancak burada GL'nin kanonik bir mantık olmaması nedeniyle **S4**'ten farklı olarak kanonik modelin farklı bir filtrelemesinden elde edilen ve Teorem 3.2.50'de tanımlanan $\mathcal{M}^{f}_{\mathbf{GL}}$ modeli ve bu modeldeki son noktalar kullanılacaktır.

Teorem 4.2.1. $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}$, **GL** *modal mantığının kanonik modeli olsun.* $\mathcal{M}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}$, *kanonik modelin* Φ *kümesine göre sonlu Henkin yöntemiyle elde edilmiş bir modeli ve* $\mathcal{M}^{f}_{\mathbf{GL}}$, *kanonik modelin* Φ *kümesi ile elde edilmiş bir filtrelemesi ise,* $\mathcal{M}^{f}_{\mathbf{GL}} \cong \mathcal{M}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}$ *dir.*

İspat. $\mathcal{M}^{f}_{\mathbf{GL}}$ ile $\mathcal{M}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}$ modellerinin izomorf oldukları yani $\mathcal{M}^{f}_{\mathbf{GL}}$ ile $\mathcal{M}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}$ modeli arasında bijektif kuvvetli bir homomorfizma olduğu gösterilmelidir. g bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{array}{rcl} g: \ \mathcal{M}^{f}_{\mathbf{GL}} & \rightarrow & \mathcal{M}^{\Phi}_{\mathbf{GL}} \\ |\Gamma'| & \mapsto & \Gamma = F(|\Gamma'|) \cap \Phi \end{array}$$

Öncelikle g bağıntısının bir fonksiyon olduğu gösterilmelidir. Bunun için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç vardır.

Lemma 4.2.2. $\mathcal{M}^{f}_{\mathbf{GL}}$ *modelindeki her bir denklik sınıfının bir son noktası vardır.*

İspat. $\Gamma \in W_{\mathbf{GL}}$ olmak üzere filtreleme tanımından $|\Gamma| \in W^{f}_{\mathbf{GL}}$, yani Γ'nın herhangi bir sonlu Φ formül kümesine göre bir denklik sınıfıdır. Bu durumda, Lemma 3.2.49 ile $|\Gamma|$'nın bir son noktası vardır. $\boxtimes$

Lemma 4.2.3. Γ', *Φ'de maksimal* **GL***-tutarlı bir küme olsun.* Γ' *kümesinin* $\Gamma \subseteq F_1(|\Gamma'|)$ *ve* $\Gamma \subseteq F_2(|\Gamma'|)$ *olacak şekilde birbirinden farklı iki son noktası olduğunu varsayalım. Bu durumda,* $F_1(|\Gamma'|) \sim_\Phi F_2(|\Gamma'|)$ *(denk olarak, her* $\varphi \in \Phi$ *için* $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F_1(|\Gamma'|) \models \varphi$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F_2(|\Gamma'|) \models \varphi$ *olmasıdır)'dür.*

İspat. Γ', Φ'de maksimal **GL**-tutarlı bir küme ve $F_1(|\Gamma'|)$ ve $F_2(|\Gamma'|)$ kümeleri maksimal **GL**-tutarlı olsun. $F_1(|\Gamma'|) \sim_\Phi F_2(|\Gamma'|)$ olduğunu göstermeliyiz.

$\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F_1(|\Gamma'|) \models \varphi$ ve $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F_2(|\Gamma'|) \not\models \varphi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, Truth Lemması'ndan $\varphi \in F_1(|\Gamma'|)$, $\varphi \notin F_2(|\Gamma'|)$ ve $F_2(|\Gamma'|)$'nün maksimal **GL**-tutarlılığından $\neg\varphi \in F_2(|\Gamma'|))$'dür. Burada iki durum söz konusudur:

- $\neg\varphi \in \Phi$ olsun.

$F_1(|\Gamma'|)$ maksimal **GL**-tutarlı olduğundan, $\varphi \in F(|\Gamma|)'$ olması için gerek ve yeter koşul $\neg\varphi \notin F(|\Gamma|)'$ olmasıdır. $\Gamma \subseteq F_1(|\Gamma'|)$ olduğundan $\neg\varphi \notin \Gamma$'dır. Γ maksimal **GL**-tutarlı olduğundan $\varphi \in \Gamma$ ve $\Gamma \subseteq F_2(|\Gamma'|)$ olduğundan $\varphi \in F_2(|\Gamma'|)$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

- $\neg\varphi \notin \Phi$ olsun.

$\varphi \Leftrightarrow \neg\psi$ olacak şekilde bir $\psi \in \Phi$ formülü vardır. $F_1(|\Gamma'|)$ maksimal **GL**-tutarlı olduğundan $\neg\psi \in F_1(|\Gamma'|)$ olması için gerek ve yeter koşul $\psi \notin F_1(|\Gamma'|)$ olmasıdır. $\Gamma \subseteq F_1(|\Gamma'|)$ olduğundan $\psi \notin \Gamma$'dır. Γ maksimal **GL**-tutarlı olduğundan $\neg\psi \in \Gamma$ ve $\Gamma \subseteq F_2(|\Gamma'|)$ olduğundan $\varphi \in F_2(|\Gamma'|)$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

O halde, $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F_2(|\Gamma'|) \models \varphi$'dir.

$\boxtimes$

Lemma 4.2.3 ve Lemma 4.2.4 ile $|\Gamma'| \rightsquigarrow |\Gamma'|_\Phi \rightsquigarrow \Gamma$ yani, $|\Gamma'| \mapsto \Gamma$ elde edilir. O halde, g bağıntısı $\mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}}$ modelinden $\mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{GL}}$ modeline bir fonksiyondur.

Şimdi $g : \mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}} \to \mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{GL}}$ fonksiyonunun bir kuvvetli homomorfizma olduğu gösterilmelidir. Bunun için kuvvetli homomorfizma tanımının (i) ve (ii) koşullarını gerçeklediği gösterilmelidir:

(i) Her bir önerme değişkeni p ve $|\Gamma'| \in \mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}}$ olmak üzere $|\Gamma'| \in V^f_{\mathbf{GL}}(p)$ olması için gerek ve yeter koşulun $g(|\Gamma'|) \in V^\Phi_{\mathbf{GL}}(p)$ olduğu gösterilmelidir:

- $p \in \Phi$ olsun.

($\Rightarrow$): $|\Gamma'| \in V^f_{\mathbf{GL}}(p)$ olduğunu varsayalım. $V^f_{\mathbf{GL}}(p)$'nin tanımından $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, \Gamma' \models p$'dir. Filtreleme teoreminden $\mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}}, |\Gamma'| \models p$ ve sonlu Truth lemmasından $p \in |\Gamma'|$'dür. Bu durumda, $p \in F(|\Gamma'|)$'dür. $p \in \Phi$ ve $\Gamma = F(|\Gamma'|) \cap \Phi$ olduğundan $p \in \Gamma$'dır. $V^\Phi_{\mathbf{GL}}$'nin tanımından $\Gamma \in V^\Phi_{\mathbf{GL}}(p)$ elde edilir.

($\Leftarrow$): $\Gamma \in V^\Phi_{\mathbf{GL}}(p)$ olduğunu varsayalım. $V^\Phi_{\mathbf{GL}}(p)$'nin tanımından $p \in \Gamma$'dır. $\Gamma = F(|\Gamma'|) \cap \Phi$ ve $p \in \Phi$ olduğundan $p \in F(|\Gamma'|)$'dür. Bu durumda, $p \in |\Gamma'|$'dür. Sonlu Truth lemmasından $\mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}}, |\Gamma'| \models p$ ve filtreleme teoreminden $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, \Gamma' \models p$'dir. $V^f_{\mathbf{GL}}(p)$'nin tanımından $|\Gamma'| \in V^f_{\mathbf{GL}}(p)$ elde edilir.

- $p \notin \Phi$ olsun.

$V^f_{\mathbf{GL}}(p)$'nin tanımından $V^f_{\mathbf{GL}}(p) = \emptyset$ yani, $|\Gamma'| \notin V^f_{\mathbf{GL}}(p)$'dir. $\Gamma = F(|\Gamma'|) \cap \Phi$ ve $p \notin \Phi$ olduğundan $p \notin \Gamma$'dır. $V^\Phi_{\mathbf{GL}}(p)$'nin tanımından $\Gamma \notin V^\Phi_{\mathbf{GL}}(p)$'dir.

(ii) Her $|\Gamma'_1|, |\Gamma'_2| \in W^f_{\mathbf{GL}}$ olmak üzere $|\Gamma'_1|\mathcal{R}^f_{\mathbf{GL}}|\Gamma'_2|$ olması için gerek ve yeter koşulun $g(|\Gamma'_1|)\mathcal{R}^\Phi_{\mathbf{GL}}g(|\Gamma'_2|)$ olduğu gösterilmelidir:

($\Rightarrow$): Her $|\Gamma'_1|, |\Gamma'_2| \in W^f_{\mathbf{GL}}$ için $|\Gamma'_1|\mathcal{R}^f_{\mathbf{GL}}|\Gamma'_2|$ olsun.

Her $\varphi \in \Phi$ formülü için $\Box\varphi \in \Gamma_1$ olduğunu varsayalım. $\Box\varphi \in \Phi$ ve $\Gamma_1 = F(|\Gamma'_1|) \cap \Phi$ olduğundan $\Box\varphi \in F(|\Gamma'_1|)$'dür. Truth Lemması ile $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma'_1|) \models \Box\varphi$'dir. $\mathcal{R}^f_{\mathbf{GL}}$ bağıntısının tanımından (Φ yeterli bir küme olduğundan her $\varphi \in \Phi$ için) $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma'_2|) \models \Box\varphi \wedge \varphi$'dir. $\wedge$'li formüllerin bir modelde doğruluk tanımından $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma'_2|) \models \Box\varphi$ ve $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma'_2|) \models \varphi$'dir. Truth Lemması'ndan $\Box\varphi \in F(|\Gamma'_2|)$ ve $\varphi \in F(|\Gamma'_2|)$'dür. $\Gamma_2 = F(|\Gamma'_2|) \cap \Phi$ ve $\Box\varphi, \varphi \in \Phi$ olduğundan $\Box\varphi \in \Gamma_2$ ve $\varphi \in \Gamma_2$'dir.

Herhangi bir $\psi \in \Phi$ formülü için $\Box\psi \in \Gamma'_2$ olduğunu varsayalım. $\Box\psi \in \Phi$ ve $\Gamma_2 = F(|\Gamma'_2|) \cap \Phi$ olduğundan $\Box\psi \in F(|\Gamma'_2|)$'dür. Truth Lemması ile $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma'_2|) \models \Box\psi$'dir. $\mathcal{R}^f_{\mathbf{GL}}$ bağıntısının tanımından (Φ yeterli bir küme olduğundan her $\psi \in \Phi$ formülü için) $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma'_1|) \models \neg\Box\psi$'dir. $F(|\Gamma'_1|)$ maksimal **GL**-tutarlı olduğundan $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma'_1|) \not\models \Box\psi$'dir. Truth Lemması'ndan $\Box\psi \notin F(|\Gamma'_1|)$ ve $\Gamma_1 = F(|\Gamma'_1|) \cap \Phi$ olduğundan $\Box\psi \notin \Gamma_1$'dir.

O halde, $g(|\Gamma'_1|)\mathcal{R}^\Phi_{\mathbf{GL}}g(|\Gamma'_2|)$'dir.

($\Leftarrow$): Her $|\Gamma'_1|, |\Gamma'_2| \in W^f_{\mathbf{GL}}$ için $g(|\Gamma'_1|)\mathcal{R}^\Phi_{\mathbf{GL}}g(|\Gamma'_2|)$ olsun.

Her $\Box\varphi \in \Phi$ formülü için $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma_1'|) \models \Box\varphi$ olduğunu varsayalım. Truth Lemması'ndan $\Box\varphi \in F(|\Gamma_1'|)$'dür. Bu durumda, $\Box\varphi \in \Phi$ ve $\Gamma_1 = F(|\Gamma_1'|) \cap \Phi$ olduğundan $\Box\varphi \in \Gamma_1$'dir. $\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}$ bağıntısının tanımından $\Box\varphi \in \Gamma_2$ ve $\varphi \in \Gamma_2$'dir. Φ yeterli bir formül kümesi olduğundan $\varphi \in \Phi$'dir. Bu durumda, her $\varphi \in \Phi$ formülü için $\Box\varphi \in F(|\Gamma_2'|)$ ve $\varphi \in F(|\Gamma_2'|)$'dür. Truth Lemması'ndan $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma_2'|) \models \Box\varphi$ ve $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma_2'|) \models \varphi$'dir. $\wedge$'li formüllerin bir modeldeki doğruluk tanımından $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma_2'|) \models \Box\varphi \wedge \varphi$'dir.

Herhangi bir $\Box\psi \in \Phi$ formülü için $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma_2'|) \models \Box\psi$ olduğunu varsayalım. Truth Lemması'ndan $\Box\psi \in F(|\Gamma_2'|)$'dür. $\Box\psi \in \Phi$ ve $\Gamma_2 = F(|\Gamma_2'|) \cap \Phi$ olduğundan $\Box\psi \in \Gamma_2$'dir. $\mathcal{R}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}$ bağıntısının tanımından $\Box\psi \notin \Gamma_1$'dir. $\Box\psi \in \Phi$ olduğundan $\Box\psi \notin F(|\Gamma_1'|)$ ve $F(|\Gamma_1'|)$ maksimal **GL**-tutarlı olduğundan $\neg\Box\psi F(|\Gamma_1'|)$'dür. Truth Lemma'sından $\mathcal{M}_{\mathbf{GL}}, F(|\Gamma_1'|) \models \neg\Box\psi$'dir.

O halde, g fonksiyonu bir kuvvetli homomorfizmadır.

Şimdi g fonksiyonunun bijektif olduğu gösterilmelidir. Bunun için, g fonksiyonunun 1-1 ve örten olduğu gösterilmelidir:

g fonksiyonu 1-1'dir: Γ_1' ve Γ_2', Φ'de maksimal **GL**-tutarlı kümeler ve $|\Gamma_1'| \neq |\Gamma_2'|$ olsun. $g(|\Gamma_1|') \neq g(|\Gamma_2|')$ olduğunu göstermeliyiz.

$|\Gamma_1'| \neq |\Gamma_2'|$ ise, ya $\varphi \in |\Gamma_1'|$ ve $\varphi \notin |\Gamma_2'|$ ya da $\varphi \notin |\Gamma_1'|$ ve $\varphi \in |\Gamma_2'|$ olacak şekilde bir $\varphi \in \Phi$ formülü vardır.

- $\varphi \in |\Gamma_1'|$ ve $\varphi \notin |\Gamma_2'|$ olsun.

Bu durumda $\varphi \in F(|\Gamma_1'|)$ ve $\varphi \notin F(|\Gamma_2'|)$'dür. $\varphi \in \Phi$ olduğundan $\varphi \in F(|\Gamma_1'|) \cap \Phi$ ve $\varphi \notin F(|\Gamma_2'|) \cap \Phi$ yani, $\varphi \in g(|\Gamma_1'|)$ ve $\varphi \notin g(|\Gamma_2'|)$ elde edilir.

- $\varphi \in \Gamma_2$ ve $\varphi \notin \Gamma_1$ olsun.

Bu durumda $\varphi \in F(|\Gamma_2'|)$ ve $\varphi \notin F(|\Gamma_1'|)$'dür. $\varphi \in \Phi$ olduğundan $\varphi \in F(|\Gamma_2'|) \cap \Phi$ ve $\varphi \notin F(|\Gamma_1'|) \cap \Phi$ yani, $\varphi \in g(|\Gamma_2'|)$ ve $\varphi \notin g(|\Gamma_1'|)$ elde edilir.

O halde, $g(|\Gamma_1'|) \neq g(|\Gamma_2'|)$'dür.

g fonksiyonu örtendir: Her $\Gamma \in \mathcal{W}^{\Phi}_{\mathbf{GL}}$ için, $g(|\Gamma'|) = \Gamma$ olacak şekilde en az bir $|\Gamma'| \in \mathcal{W}^{f}_{\mathbf{GL}}$ kümesinin var olduğu gösterilmelidir.

$|\Gamma'| \subseteq |\Gamma_1'| \subseteq \Phi$ olacak şekilde Γ_1' **GL**-tutarlı bir küme olsun. $|\Gamma'| = |\Gamma_1'|$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için $|\Gamma'| \neq |\Gamma_1'|$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, herhangi bir $\varphi \in \Phi$ formülü için $\varphi \in |\Gamma_1'|$ ise $\varphi \notin |\Gamma'|$ yani $\varphi \notin F(|\Gamma'|)$'dür. $\Gamma = F(|\Gamma'|) \cap \Phi$ olduğundan $\varphi \notin \Gamma$'dır. Ancak $\Gamma = F(|\Gamma_1'|) \cap \Phi$ olduğundan $\varphi \in \Gamma$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

O halde, g fonksiyonu bir bijeksiyondur.

Sonuç olarak, g fonksiyonu bir izomorfizmadır yani,

$$\mathcal{M}^f_{\mathbf{GL}} \cong \mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{GL}}\text{'dir.}$$

$\boxtimes$

Bölüm 5

Sonuç

Modal mantıkları sentaktik ya da semantik olarak incelemek mümkündür. Bir modal mantığın sintaksı ve semantiği arasındaki ilişki sağlamlık ve tamlık teoremleri ile verilir. Bu tezde temel modal mantıklar olan **S4** ve **GL** için sağlamlık ve tamlık teoremleri ispatlanarak **S4**'ün belli çatılar sınıfına göre kuvvetli tam, **GL**'nin ise, kuvvetli tam olmadığı gösterilmiştir. Her iki mantığın farklı iki yöntemle elde edilen modelleri tanıtılarak bunların izomorf olduğu ispatlanmıştır. Bu iki yöntemden yararlanarak bir önermesel dinamik mantık olan epistemik mantığın sağlamlığı, tamlığı ve kuvvetli tamlığı bir diğer araştırma konusudur.

KAYNAKLAR

[1] Ateş, İlayda and Çiğdem Cencer. *On Models of the Modal Logic GL*. CiE-CS: Conference Series, 2012.

[2] Blackburn, Patrick, Maarten de Rijke, and Yde Venema. *Modal Logic*. United Kingdom: Cambridge University Press, 2001.

[3] Boolos, Georege. *The Logic of Provabilitiy*. United States of America: Cambridge University Press, 1996.

[4] Burris, Stanley N. *Logic for Mathematics and Computer Science*. New Jersey: Prentice Hall, 1998.

[5] Chellas, Brain F. *Modal Logic an Introduction*. United States of America: Cambridge University Press, 1980.

[6] De Jongh, Dick, and Frank Veltman. *Intensional Logics*. preprint, 1999.

[7] De Jongh, Dick, and G. Japaridze. The Logic of Provability: *Handbook of Proof Theory*. Elsevier, 1995.

[8] Fitting, Melvin. Modal Proof Theory, *Handbook of Modal Logic*. Elsevier, 2007.

[9] Goldblatt, Robert. *Quantifiers, Propositions and Identitiy*. New York: Cambridge University Press, 2011.

[10] Hughes, G.E. and M.J. Cresswell. *A New Introduction to Modal Logic*. New York: Routledge, 1996.

[11] Hughes, G.E. and M.J. Cresswell. *A Companion to Modal Logic*. London: Methuen & Co Ltd., 1984.

[12] Kahraman, Onur. *K ve K4 Modal Mantıklarının Modelleri Üzerine*. 2011.

[13] Rubin, Jean E. *Mathematical Logic: Applications and Theory.* Saunders Colege Publishing, 1990.

[14] Rybakov, Vladimir V. *Admissibility of Logical Inference Rules.* Elsevier Science B. V., 1997.

[15] Zakharyaschev, Michael, and Alexander Chagrov. *Modal Logic.* New York: Oxford University Press, 2001.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında İstanbul'da doğdu. 2005 yılında İstanbul Kültür Üniversitesi Matematik-Bilgisayar Bölümüne kaydoldu. 2009 yılında lisans öğrenimini tamamlayarak İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı. 2011 yılının Ekim ayında İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı'nda Matematikçi olarak göreve başladı.