KESİRLİ KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

DOKTORA TEZİ

Mehmet Fatih UÇAR

0709241035

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : **10.01.2012**

Tezin Savunulduğu Tarih : **07.02.2012**

Tez Danışmanı: **Yrd. Doç. Dr. S. Hikmet ÇAĞLAR (İ.K.Ü.)**

Diğer Jüri Üyeleri: **Prof. Dr. Behiç ÇAĞAL (İ.K.Ü.)**

Prof. Dr. Erol BALKANAY (İ.K.Ü.)

Doç. Dr. Ayla ŞAYLI (Y.T.Ü.)

Yrd. Doç. Dr. Işım GENÇ DEMİRİZ (Y.T.Ü.)

ŞUBAT 2012

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasının başından sonuna kadar, bir çok kişi tarafından desteklendim ve yol gösterildim. Bütün bu kişilere şükranlarımı sunuyorum.
Öncelikle en derin ve en içten şükranlarımı çalışmanın her aşamasında emeği olan, bana yol gösteren, rehberlik eden danışmanım Yard. Doç. Dr. Hikmet ÇAĞLAR'a sunuyorum. Onun desteği ve önerileri bu tezin tamamlanmasında çok değerli olmuştur. Onun misyonu, gelişmemde ve düşüncelerimi genişletmemde çok yardımcı olacaktır.
İkinci olarak çalışma arkadaşım Canan AKKOYUNLU'ya her türlü katkılarından dolayı teşekkürü borç bilirim. Doktoramın ders ve tez aşamasındaki yardımlarını unutmayacağım.
Bir üyesi olmaktan övündüğüm İstanbul Kültür Üniversitesi'nde üzerimde emeği olan herkese özellikle Matematik-Bilgisayar Bölümü hocalarıma ve arkadaşlarıma değerli yardımları, katkıları ve destekleri için çok teşekkür ediyorum.
Son olarak, çalışmanın her aşamasında bitmez tükenmez destek ve fedakarlıkları için aileme, tüm sevdiklerime ne kadar teşekkür etsem azdır. Sizlere en derin sevgi ve şükranlarımı sunuyorum. İyi ki varsınız...

OCAK 2012 M. Fatih UÇAR

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ v

ÖZET vi

SUMMARY viii

1 GİRİŞ 1

2 KESİRLİ KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE KESİRLİ TÜREV FORMÜLLERİ 3

2.1 Kesirli Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler 3

2.2 İkinci Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler 4

2.2.1 Eliptik Denklemler 5

2.2.2 Parabolik Denklemler 6

2.2.3 Hiperbolik Denklemler 6

2.3 Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi 7

2.4 Riemann-Liouville Kesirli Türevi 11

2.5 Caputo Kesirli Türevi 12

2.6 Erdelyi-Kober Kesirli Türevi 14

2.7 Riesz Kesirli Türevi(Potansiyeli) 15

2.8 Hadamard Kesirli Türevi 15

2.9 Marchaud Kesirli Türevi 15

3 SAYISAL YÖNTEMLER 17

3.1 Spline(Ara Enterpolasyon) Fonksiyonları ve Metodu 17

3.2 Non-polynomial Kübik Spline Fonksiyonu ve Metodu 19

3.3 B-Spline Metodu 21

3.4 Sonlu Eleman(Galerkin) Metodu 25

4 SAYISAL ÖRNEKLER 28

4.1 Problem 1. 28

4.2 Nümerik Dağılım Bağıntıları 31

4.3 Problem 2. 38

4.4 Problem 3 45

5 SONUÇ 54

KAYNAKLAR 55

ÖZGEÇMİŞ 70

ŞEKİL LİSTESİ

3.1 1. dereceden spline fonksiyonu 18

3.2 Non-polynomial kübik spline fonksiyonları 19

3.3 $B_{0,i}(x)$ tabanı 22

3.4 $B_{1,i}(x)$ tabanı 24

3.5 $B_{2,i}(x)$ tabanı 24

3.6 $B_{3,i}(x)$ tabanı 25

3.7 Şapka fonksiyonları 27

4.1 (4.26) ve (4.34) nin karşılaştırılması 33

4.2 Problem 1 de $u(x,t)$ nin çözüm grafiği, $n = 81$, $k = 0.01$ 37

4.3 Problem 2 de $u(x)$ in grafiği ($n = 41$) 44

4.4 Problem 2 de $v(x)$ in grafiği ($n = 41$) 45

4.5 Problem 3 te $u(x)$ in grafiği ($n = 41$) 52

4.6 Problem 3 te $v(x)$ in grafiği ($n = 41$) 53

Üniversitesi	**:**	**İstanbul Kültür Üniversitesi**
Enstitüsü	**:**	**Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı	**:**	**Matematik-Bilgisayar**
Programı	**:**	**Matematik**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. S. Hikmet ÇAĞLAR**
Tez Türü ve Tarihi	**:**	**Doktora - Ocak 2012**

ÖZET

KESİRLİ KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Mehmet Fatih UÇAR

Çalışmada kesirli türevli diferansiyel denklem sistemlerinin ve kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümü ele alınmıştır. Bu diferansiyel denklemlerin nümerik olarak çözümünde non-polynomial spline ve Galerkin sonlu eleman metodları uygulanmıştır. Problemlerdeki kesirli türev terimi için Caputo kesirli türevi kullanılmıştır. Bu yöntemlerin uygulanabilmesi için özellikle spline metodda M_i momentlerini elde etmek için Taylor açılımı geliştirilmiştir. Sonuç olarak da önemli nümerik sonuçlar elde edilmiştir. Kesirli türevli difüzyon problemine spline metod uygulandıktan sonra metodun test edilmesi için nümerik dağılım analizi yapılmıştır ve olumlu sonuç alınmıştır. Çözülen tüm problemlerde elde edilen nümerik sonuçların analitik çözümlerine yakınsadığı görülmüştür. Bu metodların bu tür problemler üzerinde uygulanabilirliği ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler	**:**	**Kesirli kısmi türevli diferansiyel denklem, Caputo kesirli türevi, Dağılım analizi, Non-polynomial spline metodu, Galerkin metodu**
Bilim Dalı Sayısal Kodu	**:**	**0924**

University	**:**	**İstanbul Kültür University**
Institute	**:**	**Institute of Science**
Science Programme	**:**	**Mathematics and Computer**
Programme	**:**	**Mathematics**
Supervisor	**:**	**Asist. Prof. Dr. S. Hikmet ÇAĞLAR**
Degree Awarded and Date	**:**	**Ph.D. - JANUARY 2012**

SUMMARY

NUMERICAL SOLUTIONS OF FRACTIONAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Mehmet Fatih UÇAR

In this thesis, numerical solutions of fractional partial differential equations and system of fractional ordinary differential equations are considered. Non-polynomial spline method and Galerkin finite element methods are applied for the equations above. Caputo fractional derivative is used for fractional derivative term. Taylor expansion is used to obtain M_i moments in spline method. In order to test accuracy of the spline method applied to fractional diffusion equation, numerical dispersion analysis is applied and useful results are obtained. It is concluded that in all the problems numerical results converge to the exact solutions when h goes to zero. It yields results compatible with the exact solutions and consistent with other existing numerical methods. Use of non-polynomial splines and Galerkin method have shown that they are applicable methods for this type of equations.

Keywords : **Fractional partial differential equation, Caputo fractional derivative, Dispersion analysis, Non-polynomial spline method, Galerkin method**

Science Code : **0924**

Bölüm 1

GİRİŞ

Kesirli türevler teorisi, herhangi reel veya kompleks mertebeden türevler teorisidir. Kesirli türev kavramı ilk olarak bundan 317 yıl önce 1695'te L'Hospital'in Leibniz'e sorduğu "$\frac{d^n y}{dx^n}$ türevi $n = \frac{1}{2}$ için ne anlam ifade eder?" sorusuyla ortaya çıkmıştır [1]. Leibniz bu soruya "$d^{1/2}x$ türevi $x\sqrt{dx : x}$ e eşit olacaktır. Bu açık bir paradokstur ancak bir gün yararlı sonuçlar elde edilecektir" cevabını vermiştir. Leibniz'in bu cevabı keyfi mertebeden integral ve türevler teorisinin tanınmasına öncülük etmiştir ki 19. yüzyılın sonlarına kadar Liouville, Grünwald, Letnikov, Riemann, Caputo, Euler, Abel, Fourier, Kober, Erdelyi, Hadamard, Riesz ve Laplace gibi birçok ünlü teorik ve uygulamalı matematikçi bu teoriye büyük katkılar yapmıştır.

30 yıl öncesine kadar bu teoriyle genelde teorik matematikçiler ilgilenirdi fakat 30 yıldır bu teori birçok değişik alanlardaki uygulamalarda da kullanılmaya başlanmıştır. Son yüzyılda kesirli türevler ve integraller reoloji, elektrik mühendisliği, elektrokimya, viskoelastisite, biyoloji, biyofizik, biyomühendislik, sinyal ve görüntü işleme, mekanik-mekatronik, fizik ve kontrol teori gibi mühendisliğin ve matematiğin hemen her alanında uygulanmıştır [2-18].

Bu bilgiler doğrultusunda bizim hazırladığımız tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde, kesirli türevlere ve yukarıda sözü edilen büyük matematikçilerin kesirli türevler teorisine yaptıkları katkılara yer verilmektedir.

Üçüncü bölümde, bu çalışmada uygulanan nümerik metodlara yer verilmektedir.

Dördüncü bölümde ise, yapılan orjinal çalışmaya, çözülen problemlere yer verilmektedir.

Bu çalışmada, bir kesirli difüzyon denklemi ile lineer ve lineer olmayan iki kesirli türevli diferansiyel denklem sistemi non-polynomial spline ve sonlu eleman metodları ile nümerik olarak çözüldü. İlk problem için dağılım analizi yapıldı.

Beşinci bölümde de sonuç yer almaktadır.

Bölüm 2

KESİRLİ KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE KESİRLİ TÜREV FORMÜLLERİ

2.1 Kesirli Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Bağımlı değişkenlerin türevlerini içeren her bağıntı bir diferansiyel denklem olarak karşımıza çıkar. Bir diferansiyel denklemde bir bağımlı değişken bir bağımsız değişkene bağlı ise bu diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem, eğer bir bağımlı değişken birden fazla bağımsız değişkene bağlı ise, bu diferansiyel denkleme kısmi türevli diferansiyel denklem denir. Bir kısmi türevli diferansiyel denklem, bir bağımlı değişken ve bu bağımlı değişkenlerin türevlerini içeren bir bağıntı olarak tanımlanır. Örneğin, $u = u(x,t)$ olsun, yani u bağımlı değişkeni x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı olsun. Bu değişkenleri içeren bir kısmi türevli diferansiyel denklem en genel halde $F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{tt},u_{xt},...) = 0$ şeklinde yazılabilir. Kısmi türevli diferansiyel denklemler tamsayı mertebelidir. Genel haliyle verilmiş F bağıntısındaki türevlerden en az birinin mertebesinin kesirli olması durumunda bu diferansiyel denkleme kesirli kısmi türevli diferansiyel denklem denir. Örneğin, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ diferansiyel denklemi bir kısmi türevli diferansiyel denklemdir. $\frac{\partial^{2.1} u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ ise kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemdir.

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü denince, bu denklemi sağlayan $z = f(x,y,...,u)$ şeklinde bir fonksiyonun bulunması düşünülebilir. Bu fonksiyon bağımsız değişken sayısına bağlı olarak $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ gibi n değişkenli bir fonksiyon olarak düşünülebilir. Fiziksel uygulamaların pek çoğunda iki değişkenli $z = f(x, y)$ şeklindeki fonksiyonlarla karşılaşılır. n. mertebeden bir kısmi türevli diferansiyel denklemin analitik çözümü n tane keyfi fonksiyon içerir. Eğer bu denklemin sayısal çözümü aranıyor ise, integral yüzeyi üzerindeki noktalar bulunmaya çalışılır.

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin uygulamalı kısmında başlıca odak nokta ikinci ve yüksek mertebeden lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler üzerinde olmasına rağmen, birinci dereceden kısmi türevli diferansiyel denklemler sığ su dalgaları çalışması, trafik akışı, gaz dinamiği, kimya mühendisliğinde izotermik akış reaktörleri, ısı eşanjörlerinin termal verimlilik analizi gibi bir çok mühendislik uygulamalarında ortaya çıkar. İkinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlere akışkanlar mekaniği, gözenekli ortamdaki akış, katılarda ısı iletimi, kimyasalların difüzyonu, dalga yayılımı gibi mühendisliğin ve matematiksel fiziğin önemli alanlarında karşılaşılır. Yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin uygulama alanları ise genellikle katıların mekaniğidir. Bu çalışmada ikinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin üzerinde durulacaktır.

2.2 İkinci Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \qquad (2.1)$$

denklemine ikinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem denir. Burada A, B, C katsayıları bağımsız (x, y) değişkenine bağlı fonksiyonlardır. Türev terimlerinin derecesi 1 ise (2.1) denklemi lineerdir denir. f lineer değilse (2.1) denklemine quasi-lineerdir denir. (2.1) denklemindeki türevlerden en az birinin mertebesi kesirli ise bu diferansiyel denkleme ikinci mertebeden kesirli kısmi türevli diferansiyel denklem denir.

(2.1) denkleminin karakteri A, B, C katsayılarına bağlıdır.

1. $B^2 - 4AC < 0$ ise (2.1) denklemine Eliptik Denklem
2. $B^2 - 4AC = 0$ ise (2.1) denklemine Parabolik Denklem
3. $B^2 - 4AC > 0$ ise (2.1) denklemine Hiperbolik Denklem

denir.

2.2.1 Eliptik Denklemler

Genel olarak eliptik denklemlerle denge problemlerinin sonuçları olarak karşılaşılır. Bu tür denklemlerin en tipik örnekleri

$$\nabla^2 u = f(x,y) \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \qquad \text{Poisson Denklemi}$$
$$\nabla^2 u = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{Laplace Denklemi}$$

dir.

Genel olarak, fiziksel sistemleri karakterize eden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sonsuz sayıda çözümleri olabilir. Bir fiziksel problemin çözümünü temsil eden tek bir fonksiyonun bulunabilmesi için yardımcı koşullar gereklidir. Bu yardımcı koşullar başlangıç koşulları(initial conditions) ve sınır koşullarıdır(boundary conditions). R iki boyutlu uzayda bir bölge ve ∂R, kapalı R bölgesinin sınırı olsun. Bu tür kısmi türevli diferansiyel denklemlerdeki sınır koşullarına üç farklı tipte karşılaşılabilir:

i. Dirichlet Sınır Koşulu. Bu tür eliptik denklemlerde sınır veya diğer koşullar genellikle fonksiyonun kendisi olarak verilir.

$$u(x,y) = \phi(x,y); \qquad (x,y) \in \partial R$$

ii. Neumann Sınır Koşulu. Bu tür denklemlerde koşullar u fonksiyonunun türevleri olarak verilmiştir.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x,y); \qquad (x,y) \in \partial R, \quad (\frac{\partial}{\partial n}\text{normal boyunca türev})$$

iii. Karışık veya Robin Sınır Koşulu. Bu tür denklemlerde koşullar u fonksiyonunun kendisi ve türevleri cinsinden verilir.

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma; \qquad (x, y) \in \partial R, \quad \alpha, \beta > 0$$

2.2.2 Parabolik Denklemler

Genelde ısı ya da yayılma problemleri parabolik kısmi türevli diferansiyel denklemleri oluşturur.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{Isı veya Difüzyon Denklemi}$$

Bu tür diferansiyel denklemlerde genel olarak herhangi bir bağımsız değişkenin herhangi bir durumunda başlangıç koşulları ve sınır koşulları çeşitli şekillerde verilebilir. Dolayısıyla çözüm daima açık sonlu bir bölgede araştırılır. Bölge kapalı değildir. Örneğin yukarıdaki difüzyon denklemi için sınır koşulları

$$u(0, t) = u(x, t) = 0, \quad t > 0$$

ve başlangıç koşulu da

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq X$$

dir. Yukarıdaki difüzyon denkleminde $\frac{\partial u}{\partial t}$ türevi kesirli türevli ise bu difüzyon denklemine time-fractional difüzyon denklemi, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ türevi kesirli türevli ise bu difüzyon denklemine space-fractional difüzyon denklemi denir. Her ikisi de kesirli ise space-time fractional difüzyon denklemi denir.

2.2.3 Hiperbolik Denklemler

Genelde dalga denklemi hiperbolik kısmi türevli diferansiyel denklemleri oluşturur.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c(\text{yayılma hızı}) \qquad \text{Tek Boyutlu Dalga Denklemi}$$

Bu tür diferansiyel denklemlerde sınır koşulları genelde fonksiyon veya türevlerin lineer kombinasyonları olarak verilebilir, başlangıç koşulları da fonksiyonun bir değeri ya da türevi olarak verilebilir. Örneğin yukarıdaki dalga denklemi için sınır koşulları

$$u(0,t) = u(x,t) = 0, \quad t > 0$$

ve başlangıç koşulları da

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq X$$

dir. Yukarıdaki dalga denkleminde $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ türevi kesirli türevli ise bu difüzyon denklemine time-fractional dalga denklemi, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ türevi kesirli türevli ise bu dalga denklemine space-fractional dalga denklemi denir. Her ikisi de kesirli ise space-time fractional dalga denklemi denir.

Bu üç türdeki kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerde katsayılar basit formda olmayabilir. Dolayısıyla analitik çözümleri kolay değildir. Bu yüzden sayısal çözüm yöntemlerinden faydalanılarak yaklaşık çözümlerini bulma yoluna gidilir. Burada da kesirli türevi aşma problemi ortaya çıkar. Bunun için matematikçiler kesirli türevler yerine yazılabilecek fonksiyonlar geliştirmişlerdir. Şimdi bu fonksiyonları ele alalım:

2.3 Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi

Bir $y = f(x)$ sürekli fonksiyonunu ele alınsın. Bu fonksiyonun birinci türevi

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde 2. ve 3. türevleri de

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} \tag{2.3}$$

$$f'''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) - f(x-3h)}{h^3} \tag{2.4}$$

şeklindedir. Matematiksel indüksiyonla

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(x - rh) = \lim_{h \to 0} \frac{(\Delta_h^n f)(x)}{h^n} \tag{2.5}$$

eşitliği elde edilir ki burada $\binom{n}{r}$ binom katsayılarıdır. Bu tam sayılı türev formülleri kesirli türevlere genişletilsin, yani $n \in \mathbb{N}$ yerine $p \in \mathbb{R}^+$, h^n yerine h^p, $(\Delta_h^n f)(x)$ yerine $(\Delta_h^p f)(x)$ yazılsın. Bu durumda Grünwald-Letnikov kesirli türevi,

$$
\begin{aligned}
({}_xD_a^p f)(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(x-rh) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(m-p+1)} \int_a^x (x-t)^{m-p} f^{(m+1)}(t)dt \quad (m<p<m+1, nh = x-a)
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

şeklinde elde edilir ki burada

$$
f_h^{(p)}(t) = h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(x-rh) \tag{2.7}
$$

dir[21, 22]. Bununla birlikte burada $\Gamma(\alpha)$, Gamma fonksiyonudur ve

$$
\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \tag{2.8}
$$

$$
\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \Gamma(\alpha+1) = \alpha!
$$

şeklinde tanımlanmıştır.

İspat.

$$
\lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(x-rh) \tag{2.9}
$$

limitinin hesaplanması için öncelikle binom katsayılarının

$$
\binom{p}{r} = \binom{p-1}{r} + \binom{p-1}{r-1} \tag{2.10}
$$

özelliği kullanılsın. Bu eşitlik (2.7) da yerine konursa

$$
\begin{aligned}
f_h^{(p)}(t) &= h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p-1}{r} f(x-rh) + h^{-p} \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \binom{p-1}{r-1} f(x-rh) \\
&= h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p-1}{r} f(x-rh) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} \binom{p-1}{r} f(x-(r+1)h) \\
&= h^{-p} (-1)^n \binom{p-1}{n} f(a) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} \binom{p-1}{r} \Delta f(x-rh)
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

elde edilir ki burada

$$
\Delta f(x-rh) = f(x-rh) - f(x-(r+1)h)
$$

dır. (2.11) den başlanarak (2.10) özelliği m kez tekrarlanırsa

$$\begin{aligned}
f_h^{(p)}(t) &= (-1)^n \binom{p-1}{n} h^{-p} f(a) + (-1)^{n-1} \binom{p-2}{n-1} h^{-p} \Delta f(a+h) \\
&+ h^{-p} \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \binom{p-2}{r} \Delta^2 f(x-rh) \\
&= (-1)^n \binom{p-1}{n} h^{-p} f(a) + (-1)^{n-1} \binom{p-2}{n-1} h^{-p} \Delta f(a+h) \\
&+ (-1)^{n-2} \binom{p-3}{n-2} h^{-p} \Delta^2 f(a+2h) \qquad (2.12) \\
&+ h^{-p} \sum_{r=0}^{n-3} (-1)^r \binom{p-3}{r} \Delta^3 f(x-rh) \\
&= ... \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a+kh) \\
&+ h^{-p} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \binom{p-m-1}{r} \Delta^{m+1} f(x-rh). \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi ilk olarak (2.13) deki ilk toplamın k. teriminin limiti alınsın:

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a+kh) \\
&= \lim_{h\to 0} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \\
&\quad \times \left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k} (nh)^{-p+k} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
&= (t-a)^{-p+k} \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \\
&\quad \times \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k} \times \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
&= \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

elde edilir çünkü

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(-p+k+1)(-p+k+2)...(-p+n)}{(n-k)^{-p+k}(n-k)!} = \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)},
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k} = 1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} = f^{(k)}(a)$$

dır. Dolayısıyla

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a+kh) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \tag{2.15}$$

dır. Şimdi (2.13) deki ikinci toplamın limitini bulalım. Aşağıdaki teorem kullanılarak söz konusu limit kolayca bulunabilir:

Teorem 2.3.1. *Bir* β_k $(k = 1, 2, ...)$ *dizisi alınsın ve*

$$\lim_{k\to\infty} \beta_k = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,k} = 0 \quad (\forall k),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} = A \quad (\forall k),$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_{n,k}| < K \quad (\forall n)$$

olduğu varsayılsın. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k}\beta_k = A$$

dır.

İspat.[45].

(2.13) deki söz konusu ifade

$$\frac{1}{\Gamma(-p+k+1)} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \Gamma(-p+k+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p} \times h(rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(x-rh)}{h^{m+1}} \tag{2.16}$$

şeklinde yazılsın. Teorem (2.3.1) in kullanılması için

$$\beta_r = (-1)^r \Gamma(-p+k+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p},$$

$$\alpha_{n,r} = h(rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(x-rh)}{h^{m+1}}, \quad h = \frac{x-a}{n}$$

alınsın. Bu durumda

$$\lim_{r\to\infty}\beta_r = \lim_{r\to\infty}(-1)^r\Gamma(-p+k+1)\binom{p-m-1}{r}r^{-m+p} = 1 \tag{2.17}$$

dir. Bununla birlikte, eğer $m-p > -1$ ise,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-m-1}\alpha_{n,r} &= \lim_{h\to 0}\sum_{r=0}^{n-m-1} h(rh)^{m-p}\frac{\Delta^{m+1}f(x-rh)}{h^{m+1}} \\ &= \int^x a(x-\tau)^{m-p}f^{(m+1)}(\tau)d\tau \end{aligned}\tag{2.18}$$

dur. Buradan (2.17) ve (2.18) ile birlikte teorem (2.3.1) uygulandığında

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\ h^{-p}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r\binom{p-m-1}{r}\Delta^{m+1}f(x-rh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)}\int^x a(x-\tau)^{m-p}f^{(m+1)}(\tau)d\tau \end{aligned}\tag{2.19}$$

elde edilir. Sonuç olarak (2.14) ve (2.19) dan

$$\begin{aligned}({}_aD_x^p f)(x) &= \lim_{h\to\infty} f_h^{(p)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(m-p+1)}\int_a^x (x-t)^{m-p}f^{(m+1)}(\tau)d\tau \end{aligned}\tag{2.20}$$

elde edilmiş olur.

2.4 Riemann-Liouville Kesirli Türevi

Bir kesirli-mertebeli geriye farkın bir limiti olarak tanımlanan (2.20) Grünwald-Letnikov kesirli türevi integralli bir terim barındırdığı için iyi gibi görünse de aynı zamanda integralli olmayan bir terim barındırdığı için çok kullanışlı değildir. Bunun üzerine

$$({}_a\mathbf{D}_x^p f)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-p)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m\int_a^x (x-t)^{m-p-1}f(\tau)d\tau \tag{2.21}$$

$(m = [p]+1, x > a)$ şeklinde özel bir integro-diferansiyel tanımlanmıştır ki bu ifadeye Riemann-Liouville kesirli türevi denir[19, 20]. $f(x)$ in m kez sürekli diferansiyellenebilir olması varsayımı altında Grünwald-Letnikov kesirli türevinden elde edilen (2.20) ifadesi, aynı varsayım altında üst üste kısmi integrasyon uygulanıp diferansiyeli alınarak (2.21) den de elde edilebilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}({}_a\mathbf{D}_x^p f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(m-p)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m \int_a^x (x-t)^{m-p-1} f(\tau)d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(m-p+1)}\int_a^x (x-t)^{m-p} f^{(m)}(\tau)d\tau \\ &= ({}_aD_x^p f)(x), \quad (m-1 \leq p < m) \end{aligned} \tag{2.22}$$

dir, yani $x \geq 0$ için m sürekli türeve sahip $f(x)$ fonksiyonlarının bir sınıfı ele alındığında (2.20) Grünwald-Letnikov kesirli türevi (2.21) Riemann-Liouville kesirli türevine denktir. Eğer $0 < p < 1$ ise bu durumda

$$({}_xD_a^p f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-p)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^p} \quad (x > a) \tag{2.23}$$

olur.

2.5 Caputo Kesirli Türevi

(2.21) Riemann-Liouville kesirli diferansiyeli, kesirli türevler ve integrallerin gelişiminde ve onların pür matematikteki uygulamalarında önemli bir rol oynamıştır. Buna rağmen, bu türevler modern teknolojinin beklentilerini karşılayamamıştır. Uygulamalı problemler fiziksel olarak yorumlanabilecek $f(a)$, $f'(a)$, vb gibi başlangıç koşulları kullanılabilen kesirli türevlere gerek duymaktadır. Riemann-Liouville yaklaşımı Riemann-Lioville kesirli türevlerinin

$$\begin{aligned}({}_a\mathbf{D}_x^{\alpha-1} f)(x) &= b_1 \\ ({}_a\mathbf{D}_x^{\alpha-2} f)(x) &= b_2 \\ &\ldots \\ ({}_a\mathbf{D}_x^{\alpha-n} f)(x) &= b_n \end{aligned} \tag{2.24}$$

$(b_k = sabit, \quad k = 1, 2, ..., n)$ gibi $x = a$ alt sınırındaki limit değerlerini içeren başlangıç koşulları doğurmaktadır. Bu tür başlangıç koşullara sahip başlangıç değer problemleri matematiksel olarak başarıyla çözülse de, çözümleri pratikte kullanışlı değildir, çünkü bu tür başlangıç koşullar için bilinen fiziksel bir anlam ya

da yorum yoktur. Burada, bilinen matematiksel teori ile uygulamalı teorinin ihtiyaçları arasında bir çelişki gözlemlenmektedir. Bu çelişkinin mutlak bir çözümü M. Caputo tarafından ilk olarak makalesinde [23, 24] ve iki yıl sonra kitabında [25] verildi. Son olarak da El-Sayed tarafından da bir çözüm verilmiştir [26-31]. Caputo'nun tanımı şu şekilde idi:
y, sonlu (a,x) aralığında sürekli, integre edilebilir, n kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $\alpha > 0$ ise

$$({}_x^C D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\alpha]+1, x > a) \tag{2.25}$$

türevine α. mertebeden Caputo kesirli türevi denir. Özel olarak $0 < \alpha < 1$ ise Caputo kesirli türevi,

$$({}_x^C D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \quad (x > a) \tag{2.26}$$

şeklinde olur. $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ise, bu durumda $({}^C D_a^n f)(x) = f^{(n)}(x)$ ve özel olarak $n = 0$ için $({}^C D_a^0 f)(x) = f(x)$ tir. $\mathbb{R}^+$ üst yarı ekseni üzerinde Caputo kesirli türevi

$$({}_x^C D_0^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\alpha]+1, x > a) \tag{2.27}$$

dir. $\alpha \to n$ için Caputo kesirli türevi $f(x)$ in klasik n. türevi olur. Gerçekten, $0 \leq n-1 \leq \alpha \leq n$ ve $[a, X]$ te her bir $X > a$ için $f(x)$ in $n+1$ sürekli sınırlı türeve sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to n}({}_x^C D_0^\alpha f)(x) &= \lim_{\alpha\to n}\Big(\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau)d\tau\Big) \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^x f^{(n+1)}(\tau)d\tau = f^{(n)}(x), \quad n = 1, 2, ... \end{aligned}$$

tir. Bu ise Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville yaklaşımlarına benzer olarak Caputo yaklaşımının da tamsayı mertebeli türevler arasındaki bir interpolasyonu sağladığını gösterir. Caputo yaklaşımının en büyük avantajı Caputo türevli kesirli diferansiyel denklemlerin başlangıç koşullarının tamsayı mertebeli diferansiyel denklemlerinki ile aynı olmasıdır, yani $x = a$ alt sınırında bilinmeyen fonksiyonların tamsayı mertebeli türevlerinin limit değerlerlerini içermesidir.

Riemann-Liouville ile Caputo türevlerinin başlangıç koşulları arasındaki farkı görebilmek için bu türevlere $a = 0$ da Laplace transformunu uygulayalım. Buna göre Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace transform formülü

$$\int_0^\infty e^{-px}({}_0\mathbf{D}_x^\alpha f(x))dx = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k({}_0\mathbf{D}_x^{\alpha-k-1} f(x))|_{t=0}, (n-1 \leq \alpha < n) \quad (2.28)$$

dir. Buna karşılık Caputo kesirli türevinin Laplace transform formülü ise

$$\int_0^\infty e^{-px}({}_0\mathbf{D}_x^\alpha f(x))dx = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (n-1 \leq \alpha < n) \quad (2.29)$$

dir. Buradan görülüyor ki Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace transformu (2.24) tipinde başlangıç koşullarının kullanımına müsaade ediyor ki bu ise onların fiziksel yorumlanma problemini doğuruyor. Tersine Caputo kesirli türevinin Laplace transformu ise, fiziksel yorumları bilinen klasik tamsayı mertebeli türevlerin başlangıç değerlerinin kullanımını sağlıyor.

2.6 Erdelyi-Kober Kesirli Türevi

f, sonlu (a, x) aralığında sürekli, integre edilebilir, n kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\alpha, \eta, \sigma \in \mathbb{R}$ ve $\alpha, \sigma > 0$ olsun. Bu durumda,

$$({}_xD_{a;\sigma,\eta}^\alpha f)(x) = x^{-\sigma\eta}\left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}}\frac{d}{dx}\right)^n x^{\sigma(n+\eta)}\left(I_{a;\sigma,\eta+\alpha}^{n-\alpha} f\right)(x) \quad (n = [\alpha]+1) \quad (2.30)$$

türevine α. mertebeden Erdelyi-Kober kesirli türevi denir [32]. Burada

$$\left(I_{a;\sigma,\eta+\alpha}^{n-\alpha} f\right)(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(n+\eta)}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{x^{\sigma(\eta+\alpha+1)-1} f(t)dt}{(x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\alpha]+1) \quad (2.31)$$

dir. Bu tanımlar ve sonuçları Samko [35], Kiryakova [83] ve McBride [84] tarafından verilmiştir. $\sigma = 2, a = 0$ olduğunda (2.30) bağıntısı

$$({}_xD_{0;2,\eta}^\alpha f)(x) = x^{-2\eta}\left(\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\right)^n x^{2(n+\eta)}\left(I_{\eta+\alpha,n-\alpha} f\right)(x) \quad (2.32)$$

haline gelir. Eğer $\alpha = n \in \mathbb{N}$ olduğu varsayımı altında (2.30) bağıntısı

$$({}_xD_{a;\sigma,\eta}^n f)(x) = x^{-\sigma\eta}\left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}}\frac{d}{dx}\right)^n x^{\sigma(n+\eta)} f(x) \quad (2.33)$$

şekline gelir.

2.7 Riesz Kesirli Türevi(Potansiyeli)

f, sonlu (a,b) aralığında sürekli, integre edilebilir, m kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$(R^{\alpha}_{(a,b)}f)(x) = \frac{-1}{2\Gamma(m-\alpha)cos(\frac{(m-\alpha)\pi}{2})}\int_a^b \frac{f^{(m)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-m+1}}, \quad \alpha \in (m-1,m) \tag{2.34}$$

türevine α. mertebeden Riesz kesirli türevi(potansiyeli) denir [33].

2.8 Hadamard Kesirli Türevi

f, sonlu (a,b) aralığında sürekli, integre edilebilir, n kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Buna göre

$$({}_xD^{\alpha}_a f)(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \left(log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha+1}\frac{f(t)dt}{t}, \quad \alpha \in (n-1,n) \tag{2.35}$$

türevine α. mertebeden Hadamard kesirli türevi denir [34]. Bu türevlerle ilgili tanım ve sonuçlar Samko [35], Butzer [85, 86, 87], Kilbas [88] ve Titura [89] tarafından verilmiştir.

2.9 Marchaud Kesirli Türevi

f, $(0,\infty)$ aralığında sürekli, integre edilebilir bir fonksiyon ve $0 < \alpha < m$ olsun. Buna göre

$$(D^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{C_{\alpha,m}}\int_0^{\infty}\frac{\Delta_t^m f(x)dt}{t^{1+\alpha}} \tag{2.36}$$

türevine α. mertebeden Marchaud kesirli türevi denir.
Burada

$$\Delta_t^m f(x) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}f(x-jt), \tag{2.37}$$

ve

$$C_{\alpha,m} = \int_0^{\infty}\frac{(1-e^{-t})^m dt}{t^{1+\alpha}} = \Gamma(-\alpha)\sum_{j=1}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}j^{\alpha} \tag{2.38}$$

dır.

Bu kesirli türev tanımlarından en yaygın olarak Riemann-Liouville ve Caputo'nun tanımladığı kesirli türevler kullanılmaktadır. Bu çalışmada da Caputo kesirli türevi kullanılmıştır.

Bölüm 3

SAYISAL YÖNTEMLER

Bir önceki bölümde kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sayısal olarak çözülebileceği söylenmişti. Bu denklemlerin sayısal olarak çözülmesinde kullanılan bazı metodlar aşağıda verilmiştir:

3.1 Spline(Ara Enterpolasyon) Fonksiyonları ve Metodu

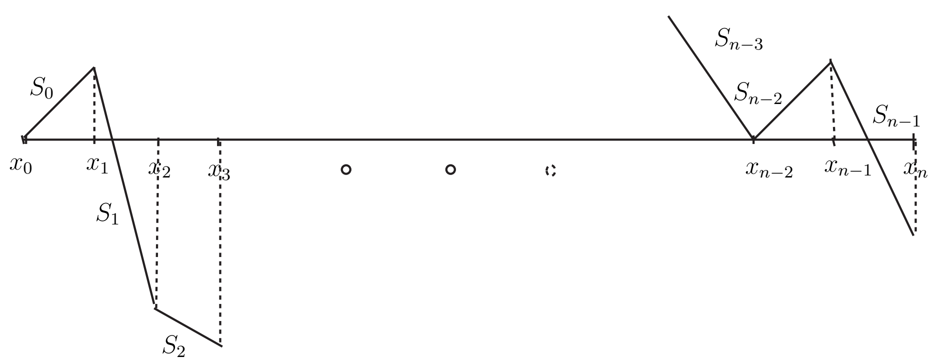
Spline fonksiyonlarının ilk kullanımı önceki yüzyılın başlarına dayanır. Parçalı lineer fonksiyonlar başlangıç değer problemlerinin çözümünde Peanonun varlık ispatıyla bağlantılı olarak kullanılmıştı, ancak o zamanlar bu fonksiyonlara spline fonksiyonları denmezdi. Spline fonksiyonlar kavramı ilk olarak Schoenberg, Sard ve diğerlerinin çalışmalarıyla ortaya çıkmıştır [129]. Spline fonksiyonu kabaca, belli koşullar altında kendisi ve türevleri sürekli olan bir parçalı fonksiyondur. Bu fonksiyonun yaklaştırma, enterpolasyon ve eğri uydurulması gibi uygulamalarda çok başarılıdır [130-133]. Bundan dolayı bu tür problemlerin çözümünde en iyi yaklaştırma fonksiyonunun spline fonksiyon olduğu kabul edilmiştir. Daha sonraları da hem pratik hem de teorik çalışmalarda spline fonksiyonları önemli ölçüde ilgi haline gelmiştir. De Boor [134-136], Ahlberg [130], Loscalzo and Talbot [137,138], Bickley [139], Fyfe [140,141], Albasiny ve Hoskins [142], Sakai [143-145], Russell ve Shampine [146], Micula [132,147], Rubin ve Khosla [148], Rubin ve Graves [149], Daniel ve Swartz [150], Archer [151], Patricio [152,153], Tewarson [154,155], Usmani [156-158], Jain ve Aziz [159,161], Surla [162-165], Iyengar ve

Jain [166], Chawla ve Subramanian [167-169], Irodotou-Ellina ve Houstis [170], Rashidinia [36], Fairweather ve Meade [171] gibi bir çok araştırmacı diferansiyel denklemlerin çözümünde polinom ve polinom olmayan spline metodlarını kullanmıştır. Kübik spline metodu ilk olarak Bickley tarafından iki noktalı lineer sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılmıştır [139]. Bickley, söz konusu problemler için bir diskritizasyon denklemi olarak süreklilik koşulunu kullanmıştır. Daha sonra Fyfe da Bickley'in önerdiği metodu lineer sınır değer problemlerini ele almıştır[140].

Spline fonksiyonları belirli süreklilik koşulları ile birbirine bağlanan aralıklarda tanımlanmış polinom tipli fonksiyonlardır. $x_0, x_1, ..., x_n$ gibi $x_0 < x_1 < ... < x_n$ koşulunu sağlayacak şekilde düğüm noktası denen $n+1$ nokta belirlenmiş olsun. $k \geq 0$ gibi bir k sayısı alınsın.

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + ... + d_i(x - x_i)^k \quad (i = 0, 1, ..., n-1) \tag{3.1}$$

Görüldüğü üzere S fonksiyonu span$\{1, x, x^2, ..., x^k\}$ biçimindedir. S fonksiyonu, her bir $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında k. ya da daha küçük dereceden bir polinom ise ve $[x_0, x_n]$ aralığında $(k-1)$. dereceden sürekli türevlere sahipse bu fonksiyona $x_0, x_1, ..., x_n$ düğüm noktalarına sahip k. dereceden spline fonksiyon denir, yani S fonksiyonu derecesi en fazla k olabilen $(k-1)$. dereceye kadar sürekli türevleri olan sürekli, parçalı bir fonksiyondur. Örneğin 0. dereceden spline fonksiyonları sabitlerdir, 1. dereceden spline fonksiyonları lineer fonksiyonlardır.



Şekil 3.1: 1. dereceden spline fonksiyonu

Polinom şeklindeki spline fonksiyonları içinde en çok kullanılan kübik spline fonksiyonlarıdır. Kübik spline fonksiyonları (3.1) deki $k = 3$ halidir, yani span$\{1, x, x^2, x^3\}$ biçimindedir. Spline fonksiyonları yukarıda olduğu gibi polinom olmakla birlikte polinom olmayabilir de. Biz de çalışmamızda span$\{1, x, \cos kx, \sin kx\}$ biçimindeki non-polynomial kübik spline fonksiyonlarını kullanacağız. Burada k parametresi, metodun doğruluğunu artırmak için kullanılan frekanstır. Şimdi kısaca non-polynomial kübik spline fonksiyonlarını ve metodunu inceleyelim:

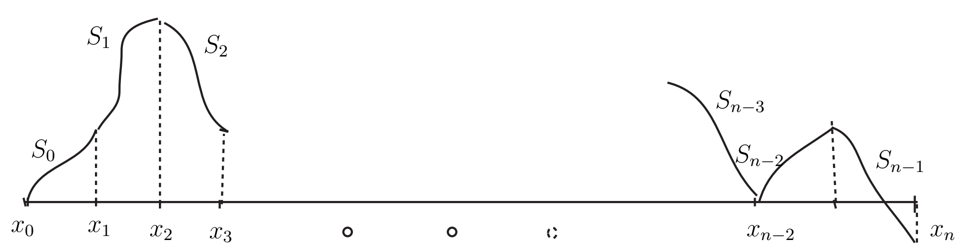
3.2 Non-polynomial Kübik Spline Fonksiyonu ve Metodu

n, keyfi bir pozitif tam sayı olmak üzere, $[a, b]$ aralığını $x_i = a + ih$, $(i = 0, 1, 2, ..., n$, $a = x_0$, $x_n = b$, $h = (b-a)/n)$ grid noktalarını kullanarak n eşit alt aralığa bölelim.

$u(x)$ analitik çözüm olsun ve u_i, (x_i, u_i) ve (x_{i+1}, u_{i+1}) noktalarından geçen non-polynomial kübik $S_i(x)$ fonksiyonundan elde edilen $u(x_i)$ nin bir yaklaşık noktası olsun. $S_i(x)$, x_i ve x_{i+1} noktalarında enterpolasyon koşullarını sağlamalıdır ve buna ek olarak ortak (x_i, u_i) noktalarında birinci türevi sürekli olmalıdır. $S_i(x)$,

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i sin\tau(x - x_i) + d_i cos\tau(x - x_i), \quad (i = 0, 1, ..., n-1) \tag{3.2}$$

şeklinde yazılır. Burada a_i, b_i, c_i ve d_i sabitler ve τ keyfi bir parametredir.



Şekil 3.2: Non-polynomial kübik spline fonksiyonları

$$S_i(x_i) = u_i, \quad S_i(x_{i+1}) = u_{i+1}, \quad S^{''}(x_i) = M_i, \quad S^{''}(x_{i+1}) = M_{i+1}. \tag{3.3}$$

eşitlikleri kullanılarak bu sabitler u_i, u_{i+1}, M_i ve M_{i+1} cinsinden bulunabilir:

$$S_i(x_i) = a_i + d_i = u_i \tag{3.4}$$

$$S_i(x_{i+1}) = a_i + b_i h + c_i \sin\theta + d_i \cos\theta = u_{i+1} \tag{3.5}$$

$$S_i'(x) = b_i + \tau c_i \cos\tau(x - x_i) - \tau d_i \sin\tau(x - x_i) \tag{3.6}$$

$$S_i''(x) = -\tau^2 c_i \sin\tau(x - x_i) - \tau^2 d_i \cos\tau(x - x_i) \tag{3.7}$$

$$S_i''(x_i) = -\tau^2 d_i = M_i \Rightarrow d_i = -\frac{M_i}{\tau^2} \tag{3.8}$$

$$S_i''(x_{i+1}) = -\tau^2 \left(c_i \sin\theta - d_i \cos\theta\right) = M_{i+1} \tag{3.9}$$

(3.8), (3.4) ve (3.9) da yerine konursa

$$a_i = u_i + \frac{Mi}{\tau^2} \tag{3.10}$$

$$c_i = \frac{M_i cos\theta - M_{i+1}}{\tau^2 sin\theta} \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.10) ve (3.11), (3.5) te yerine konursa

$$b_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \frac{M_{i+1} - M_i}{\tau\theta}, \qquad (\theta = \tau h) \tag{3.12}$$

eşitliği elde edilir. (x_i, u_i) noktasında birinci türevin sürekliliği, yani $S_{i-1}^{'}(x_i) = S_i^{'}(x_i)$,$(i = 1, ..., n-1)$ eşitliği kullanılarak

$$\alpha M_{i+1} + 2\beta M_i + \alpha M_{i-1} = (1/h^2)(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \tag{3.13}$$

bağıntısı elde edilir. Burada, $\alpha = (-1/\theta^2 + 1/\theta \sin\theta)$, $\beta = (1/\theta^2 - \cos\theta/\theta\sin\theta)$ ve $\theta = \tau h$ dır [36].

3.3 B-Spline Metodu

Isaac Jacob Schoenberg tarafından bulunmuştur ve splineların baz fonksiyonları olarak kullanılmasından dolayı (basis spline) ın kısaltılmışı olarak B-spline denmiştir. Enterpolasyon teorisi, özellikle kimyasal reaktör teori, aerodinamik, kuantum mekaniği, optimal kontrol, difüzyon işlemi ve geofizik gibi mühendisliğin bir çok alanında çok öneme sahiptir. Bu teoride B-spline ın kullanılma nedenleri:

i. Karmaşık bir fonksiyonu daha basit bir polinomun lineer kombinasyonuna dönüştürebilir.
ii. Polinom enterpolasyonu, türevinin kolay alınması ve köklerinin kolay bulunabilmesinden dolayı pratikte kullanılan metodların en iyilerinden biridir.
iii. B-spline polinomu, her bir parçası, kolayca oluşturulabilen ve birbirlerine tek tek düzgün bir şekilde bağlanmış düşük dereceli bir polinomdur.
iv. Sınır koşullarının kullanılmasından dolayı B-spline fonksiyonları, yaklaşım teorisinde çok aktif rol alırlar.

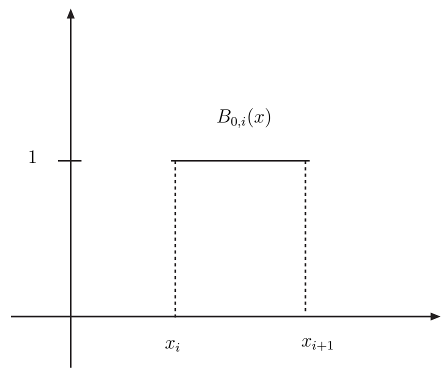
Belli bir tanım aralığı üzerinde tanımlanmış keyfi dereceden her spline fonksiyonu, aynı derece ve tanım aralığı üzerinde B-spline fonksiyonlarının bir lineer kombinasyonu olarak gösterilebilir [136]. Aynı zamanda söz konusu bu eğriler, spline yaklaşımı ile tutarlıdır yani düğüm noktalarında dereseninden daha küçük mertebeden türevleri süreklidir.

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ sonlu bir aralık ve $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ ler düğüm noktaları olmak üzere $\Omega_n = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, $[a,b]$ nin bir parçalanışı olsun. $B_{k,i}(x)$, $(i \in \mathbb{Z})$ k. mertebeden bir B-spline olsun. Bu durumda;

i. $\text{Supp} B_{k,i} = [x_i, x_{i+k+1}]$
ii. $B_{k,i}(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
iii. $\sum_{-\infty}^{\infty} B_{k,i}(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

dir [136, 128]. Örneğin 0. dereceden B-spline tabanı

$$B_{0,i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.14)$$



Şekil 3.3: $B_{0,i}(x)$ tabanı

şeklinde tanımlanmıştır. $k > 0$ mertebeli B-spline tabanları ise, de Boor tarafından tanımlanan aşağıdaki de Boor rekürsiyon formülünden belirlenebilir:

$$B_{k,i}(x) = \left(\frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i}\right) B_{k-1,i}(x) + \left(\frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}}\right) B_{k-1,i+1}(x) \quad (3.15)$$

B-spline tabanların yukarıdaki rekürsiyonu sağladığını ispatlayalım:

İspat.

$$(t-x)^{k-1} = (t-x)(t-x)^{k-2} \quad (3.16)$$

çarpımının k. bölünmüş farkının bulunması için Leibniz kuralı uygulansın. Leibniz kuralı; f ve g iki fonksiyon olmak üzere

$$(fg)[x_0, x_1, ..., x_n] = f[x_0]g[x_0, x_1, ..., x_n] + f[x_0, x_1]g[x_1, x_2, ..., x_n] + ... + f[x_0, x_1, ..., x_n]g[x_n]$$

şeklinde tanımlanmış idi. Bu kural (3.16) ya uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& (t-x)^{k-1}[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = \left((t-x)(t-x)^{k-2}\right)[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] \\
= \; & (t-x)[x_i](t-x)^{k-2}[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] \\
+ \; & (t-x)[x_i, x_{i+1}](t-x)^{k-2}[x_{i+1}, ..., x_{i+k}] \\
+ \; & (t-x)[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}](t-x)^{k-2}[x_{i+2}, ..., x_{i+k}] \\
+ \; & ... + (t-x)[x_i, ..., x_{i+k}](t-x)^{k-2}[x_{i+k}] \\
= \; & (x_i - x)(t-x)^{k-2}[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] + 1(t-x)^{k-2}[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] \quad (3.17)
\end{aligned}$$

olur, çünkü

$$\begin{aligned}
(t-x)[x_i] &= (x_i - x) \\
(t-x)[x_i, x_{i+1}] &= \frac{(x_{i+1}-x)-(x_i-x)}{x_{i+1}-x_i} = 1 \\
(t-x)[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] &= \frac{(t-x)[x_{i+1}, x_{i+2}] - (t-x)[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i} \\
&= \frac{\frac{x_{i+2}-x-x_{i+1}+x}{x_{i+2}-x_i} - \frac{x_{i+1}-x-x_i+x}{x_{i+1}-x_i}}{x_{i+2}-x_i} = 0
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla $r > j+1$ için $(t-x)[x_i, ..., x_{i+r}] = 0$ dır.

$$(x_i - x)[x_i, ..., x_{i+k}] = \frac{(x_i - x)}{x_{i+k} - x_i}\left([x_{i+1}, ..., x_{i+k}] - [x_i, ..., x_{i+k-1}]\right)$$

olduğundan (3.17) eşitliği

$$\begin{aligned}
(t-x)^{k-1}[x_i, ..., x_{i+k}] &= \frac{(x-x_i)}{x_{i+k}-x_i}(t-x)^{k-2}[x_i, ..., x_{i+k-1}] \\
&+ \frac{(x_i-x)}{x_{i+k}-x_i}(t-x)^{k-2}[x_{i+1}, ..., x_{i+k}] + (t-x)^{k-2}[x_{i+1}, ..., x_{i+k}] \\
&= \frac{(x-x_i)}{x_{i+k}-x_i}(t-x)^{k-2}[x_i, ..., x_{i+k-1}] \\
&+ \frac{(x_{i+k+1}-x)}{x_{i+k+1}-x_i}(t-x)^{k-2}[x_{i+1}, ..., x_{i+k}]
\end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir ki bu ise (3.15) tir.

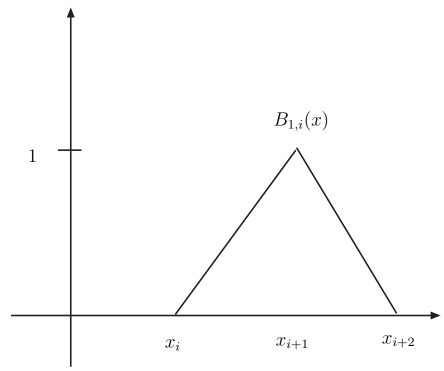
Bu halde (3.14) den ve (3.15) rekürsiyonundan yüksek dereceden B-spline tabanları oluşturulabilir:

1. dereceden B-spline tabanı

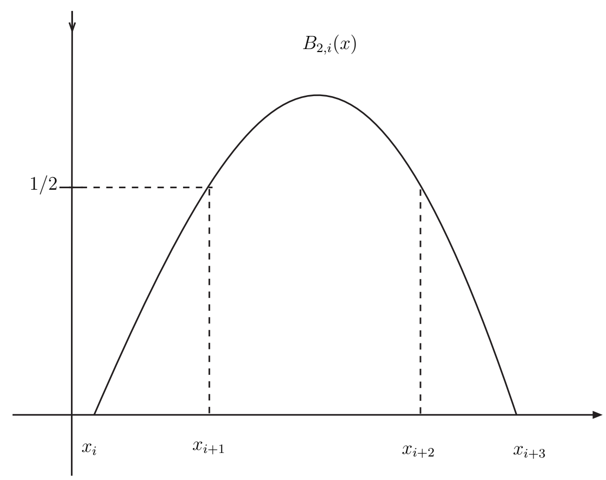
$$B_{1,i}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ \frac{x_{i+2}-x}{x_{i+2}-x_{i+1}}, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{3.18}$$

şeklinde olur. 2. dereceden B-spline tabanı

$$B_{2,i}(x) = \frac{1}{2h^2}\begin{cases} (x-x_i)^2, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ h^2 + 2h(x-x_{i+1}) - 2(x-x_{i+1})^2, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ (x_{i+3}-x)^2, & x \in [x_{i+2}, x_{i+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{3.19}$$



Şekil 3.4: $B_{1,i}(x)$ tabanı



Şekil 3.5: $B_{2,i}(x)$ tabanı

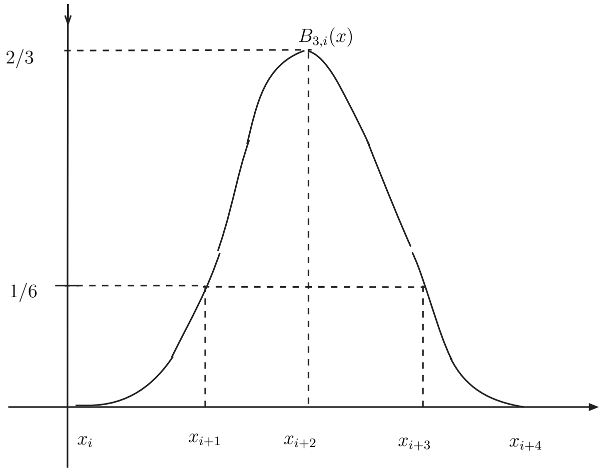
dir. Son olarak 3. dereceden B-spline tabanı ise

$$B_{3,i}(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} (x-x_i)^3, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ h^3 + 3h^2(x-x_{i+1}) + 3h(x-x_{i+1})^2 - 3(x-x_{i+1})^3, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+3}-x) + 3h(x_{i+3}-x)^2 - 3(x_{i+3}-x)^3, & x \in [x_{i+2}, x_{i+3}] \\ (x_{i+3}-x)^2, & x \in [x_{i+3}, x_{i+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{3.20}$$

dir. Dolayısıyla istenilen mertebeden tabanlara bağlı olarak bir spline fonksiyonu

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n+2} C_i B_{k,i}$$

şeklinde tanımlanır. Burada C ler sabitlerdir.



Şekil 3.6: $B_{3,i}(x)$ tabanı

3.4 Sonlu Eleman(Galerkin) Metodu

Tanım 3.4.1. *(Skaler Çarpım) $f(x)$ ve $g(x)$ iki reel değerli fonksiyon olsun. Bu fonksiyonların iç(skaler) çarpımı*

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımdan yola çıkarak bir $f(x)$ fonksiyonunun normu

$$\|f\| = \sqrt{< f, f >} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $< f, g >= 0$ ise $f(x)$ ve $g(x)$ ortogonaldir denir.

Tanım 3.4.2. *(Bir Vektör Uzayının Bazı) V bir vektör uzayı ve $S = \{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ bir fonksiyonlar kümesi olsun. Herhangi bir $f(x) \in V$ fonksiyonu, φ fonksiyonlarının tek türlü belirli bir lineer kombinasyonu, yani*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i(x)$$

olarak yazılabiliyorsa, lineer bağımsız $\varphi_i(x)$ $(i = 0, .., \infty)$ fonksiyonlarına, V vektör uzayının bir bazı denir.

Örneğin V bütün polinomların kümesi ise $S = \{\varphi_i(x) = x^i\}_{i=0}^{\infty}$ kümesi V nin bir bazıdır.

Lemma 3.4.3. *$f(x) \in V$ olsun. Her $\varphi_i \in S$ için $< f, \varphi_i >= 0$ ise $f(x) \equiv 0$ dır.*

Tanım 3.4.4. *(Ağırlıklı Rezidü Metodları)*

Bir ağırlıklı rezidü metodu sonlu sayıda $S = \{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$ fonksiyonlarını kullanır. $L[y(x)]$ bir lineer diferansiyel operatörü olmak üzere

$$L[y(x)] + f(x) = 0, \quad a \leq x \leq b \tag{3.21}$$

diferansiyel denklemini ele alalım. (3.21) diferansiyel denklemi herhangi bir $w(x)$ ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp $[a, b]$ aralığında integre edilirse

$$\int_a^b w(x)\,(L[y(x)] + f(x))\,dx = 0 \tag{3.22}$$

elde edilir. Burada (3.21) ve (3.22) denktir çünkü $w(x)$ keyfi bir fonksiyondur. (3.21) diferansiyel denklemi için

$$u(x) = \varphi_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x)$$

şeklinde bir çözüm tanımlayalım ve (3.21) te $y(x)$ yerine $u(x)$ yazalım. Bu durumda rezidü

$$L[u(x)] + f(x) = 0 \tag{3.23}$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi amaç, seçilen $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre

$$\int_a^b w(x)\,(L[u(x)] + f(x))\,dx = 0 \tag{3.24}$$

koşulunu sağlayacak $u(x)$ çözüm fonksiyonunu oluşturmaktır.
En önemli ağırlıklı rezidü metotlarından biri Rus Matematikçi Boris Grigoryevich Galerkin(1871-1945) tarafından oluşturulmuştur. Galerkin, ağırlık fonksiyonlarını özel olarak baz fonksiyonları arasından seçmişti, yani $w(x) \in \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ idi. Bu durumda beklenen şey

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,(L[u(x)] + f(x))\,dx = 0, \quad i = 1, 2, .., n \tag{3.25}$$

şeklindeki n tane denklemin doğru olmasıdır. Bu metodun uygulanması için yapılacak tek şey, n tane denklemin çözülerek $\{c_i(x)\}_{i=1}^{n}$ katsayılarının bulunmasıdır. Problemlerimizde Galerkin metodunu şu durumları göz önüne alarak uygulayacağız:

i. $T_h : 0 = x_0 < x_1 < ... < x_n < x_{n+1} = 1$, $(0,1)$ aralığının bir parçalanışı,

ii. $V_h^0 = \{v : v,\ T_h$ üzerinde sürekli ve parça parça lineer bir fonksiyon ve $v(0) = v(1) = 0\}$,

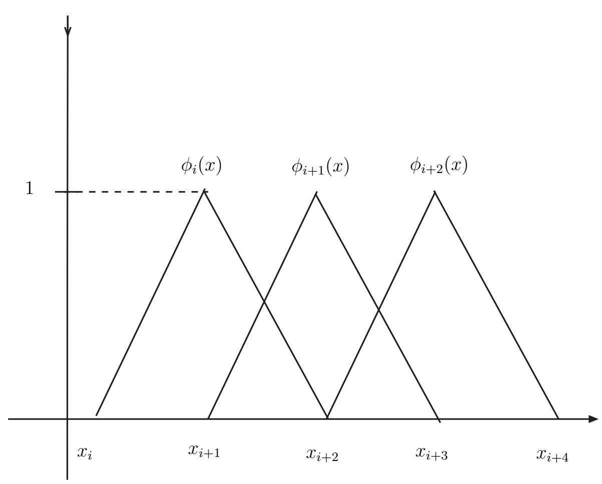
iii. $\varphi_i, (i = 1, .., n)$, V_h nın bir bazı olsun. Bu baz

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 \quad, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{3.26}$$

şeklinde tanımlanan şapka fonksiyonu(hat function)dur ve türevi de

$$\varphi_i^{'}(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_i}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{-1}{h_{i+1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 \quad, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{3.27}$$

dir. Burada $h_i = x_i - x_{i-1}$, $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ dir. x_i aralıkları birbirlerine eşitse $h_i = h_{i+1} = h$ dır ki çalışmamızda x_i lerin eşit uzaklıklı olduğu varsayılacaktır.



Şekil 3.7: Şapka fonksiyonları

Bölüm 4

SAYISAL ÖRNEKLER

4.1 Problem 1.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = d(x)\frac{\partial^{1.8} u(x,t)}{\partial x^{1.8}} + q(x,t) \tag{4.1}$$

$u(x,0) = x^3$, $(0 \le x \le 1)$ başlangıç koşulu ve $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = e^{-t}$ $(t \ge 0)$ sınır koşulları ile verilmiş difüzyon denklemini ele alalım. Burada $d(x) = \frac{\Gamma(2.2)x^{2.8}}{6}$ difüzyon katsayısı, $q(x,t) = -(1+x)e^{-t}x^3$ kaynak fonksiyonudur. Bu diferansiyel denklemin $\alpha = 2$ için analitik çözümü $u(x,t) = e^{-t}x^3$ tür.

Kesirli difüzyon denklemleri, son yıllarda mühendislik ve bir çok fiziksel ve kimyasal süreçleri modelleme alanlarında ilgi odağı haline gelmiştir [89-126]. Bir çok araştırmacı, tek boyutlu kesirli difüzyon denkleminin çözümlerinin varlığını ve yaklaşık çözümlerini verdi. Bu denklemin analitik çözümü için iki basamaklı Adomian decomposition metodu kullanıldı [49]. Mingrong Cui yüksek mertebeden kompakt sonlu fark şeması oluşturdu ve durağanlık analizi yaptı [65]. [66] da bu problemin çözümü için sonlu fark metodu uygulandı ve bazı örnekler verildi . [67] de nümerik metodlar kullanılarak sonlu bir tanım kümesi üzerinde değişken katsayılı kesirli difüzyon başlangıç-sınır değer probleminin bir sınıfı incelendi ve durağanlık, tutarlılık ve yakınsaklık analizi yapıldı. [48] de yenilenmiş decomposition metodu ile kesirli difüzyon denklemi analitik olarak çözüldü. Bu çalışmada kesirli difüzyon denklemi nümerik olarak iki farklı metod ile çözülecektir:

i. Bu difüzyon denklemini öncelikle non-polynomial spline metoduyla nümerik olarak çözelim:

(4.1) diferansiyel denklemi, (x_i, u_i) grid noktalarında Caputo kesirli türevi kullanılarak

$$\frac{u_i - f_i}{k} = d_i \left[\frac{1}{\Gamma(0.2)} \int_0^{x_i} (x_i - \mu)^{-0.8} u_i^{''}(\mu) d\mu \right] + q_i, \tag{4.2}$$

şeklinde diskritize edilebilir. Burada kısalık açısından $d_i := d(x_i)$, $\quad f_i := f(x_i) = u_{i-1}$ ve $q_i := q(x_i, t_j)$ olarak alınmıştır. Dolayısıyla

$$\frac{u_i - f_i}{k} = \frac{d_i}{\Gamma(0.2)} I + q_i, \tag{4.3}$$

dir ki, burada $I = \int_0^{x_i} (x_i - \mu)^{-0.8} u_i^{''}(\mu) d\mu$ integralidir.

Bu integrale iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$I = \frac{36}{25} \int_0^{x_i} (x_i - \mu)^{-2.8} u_i(\mu) d\mu \tag{4.4}$$

elde edilir. $u_i(\mu)$ bir $\mu = x_i$ noktasında Taylor serisine açılıp, (4.1) de yerlerine konulursa

$$\frac{u_i - f_i}{k} = \frac{d_i}{\Gamma(0.2)} [\frac{36}{25} (u_i(x_i) \int_0^{x_i} (x_i - \mu)^{-2.8} d\mu$$

$$+ u_i^{'}(x_i) \int_0^{x_i} (x_i - \mu)^{-1.8} d\mu + \frac{u_i^{''}(x_i)}{2} \int_0^{x_i} (x_i - \mu)^{-0.8} d\mu)] + q_i \tag{4.5}$$

elde edilir ve cebirsel ara işlemler sonucu da

$$\frac{u_i - f_i}{k} = -2a x_i^3 u_i^{''}(x_i) + a x_i^2 u_i^{'}(x_i) + b x_i u_i(x_i) + q_i. \tag{4.6}$$

elde edilir. Burada $a := \frac{-3\Gamma(2.2)}{10\Gamma(0.2)}$, $b := \frac{-2\Gamma(2.2)}{15\Gamma(0.2)}$ dir. (4.6) da $M_i = u_i^{''}(x_i)$ yazılırsa

$$\frac{u_i - f_i}{k} = -2a x_i^3 M_i + a x_i^2 u_i^{'}(x_i) + b x_i u_i(x_i) + q_i. \tag{4.7}$$

bağıntısı elde edilir. (4.7) de M_i yalnız bırakılırsa

$$M_i = c_i u_i^{'} + d_i u_i + e_i \tag{4.8}$$

elde edilir ki burada $c_i := \frac{1}{2x_i}$, $d_i := \frac{a x_i k - 1}{2b x_i^3 k}$, $e_i := \frac{f_i + k q_i}{2b x_i^3 k}$ dir.

u nun birinci türev özdeşlikleri

$$u_i^{'} \cong \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, u_{i+1}^{'} \cong \frac{3u_{i+1} - 4u_i + u_{i-1}}{2h}, u_{i-1}^{'} \cong \frac{-u_{i+1} + 4u_i - 3u_{i-1}}{2h}, \tag{4.9}$$

şeklindedir. Bu özdeşlikler (4.8) de kullanılırsa

$$M_i = c_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + d_i u_i + e_i \tag{4.10}$$

olur. Benzer şekilde

$$M_{i+1} = c_{i+1} \frac{3u_{i+1} - 4u_i + u_{i-1}}{2h} + d_{i+1} u_{i+1} + e_{i+1} \tag{4.11}$$

$$M_{i-1} = c_{i-1} \frac{-u_{i+1} + 4u_i - 3u_{i-1}}{2h} + d_{i-1} u_{i-1} + e_{i-1} \tag{4.12}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler (3.13) te yerine konulursa, aşağıdaki $(n+1)$ bilinmeyenli, $(n-1)$ lineer denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\alpha}{2h} c_{i+1} - \frac{\beta}{h} c_i - \frac{3\alpha}{2h} c_{i-1} + \alpha d_{i-1} - \frac{1}{h^2}\right] u_{i-1} + \\ &\left[-\frac{2\alpha}{h} c_{i+1} + 2\beta d_i + \frac{2\alpha}{h} c_{i-1} + \frac{2}{h^2}\right] u_i + \\ &\left[\frac{3\alpha}{2h} c_{i+1} + \frac{\beta}{h} c_i - \frac{\alpha}{2h} c_{i-1} + \alpha d_{i+1} - \frac{1}{h^2}\right] u_{i+1} \\ &= -(\alpha e_{i+1} + 2\beta e_i + \alpha e_{i-1}). \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} c1 &= \frac{\alpha}{2h} c_{i+1} - \frac{\beta}{h} c_i - \frac{3\alpha}{2h} c_{i-1} + \alpha d_{i-1} - \frac{1}{h^2} \\ c2 &= -\frac{2\alpha}{h} c_{i+1} + 2\beta d_i + \frac{2\alpha}{h} c_{i-1} + \frac{2}{h^2} \\ c3 &= \frac{3\alpha}{2h} c_{i+1} + \frac{\beta}{h} c_i - \frac{\alpha}{2h} c_{i-1} + \alpha d_{i+1} - \frac{1}{h^2} \end{aligned}$$

yazılırsa aşağıdaki matrisler elde edilmiş olur:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ c1 & c2 & c3 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & c1 & c2 & c3 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & 0 & c1 & c2 & c3 \\ . & . & . & . & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
B = \begin{bmatrix} u(0,t) = 0 \\ -(\alpha e_0 + 2\beta e_1 + \alpha e_2) \\ -(\alpha e_1 + 2\beta e_2 + \alpha e_3) \\ . \\ . \\ . \\ -(\alpha e_{n-2} + 2\beta e_{n-1} + \alpha e_n) \\ u(1,t) = e^{-t} \end{bmatrix}
$$

$$
U = [u_0, u_1, ..., u_n]'. \tag{4.14}
$$

Matlab 7.0.1 programı yardımıyla $AU = B$ denklem sisteminin çözümünden U yaklaşık sonucu elde edilir. Nümerik çözüm sonucu n nin farklı değerleri için bulunan maksimum mutlak hatalar Tablo 1. de listelenmiştir.

4.2 Nümerik Dağılım Bağıntıları

Bu bölümde yukarıda uygulanan yöntemin ve ortaya çıkan çözüm şemalarının tutarlı ve yakınsak olduğunu göstermek için nümerik dağılım analizi yapılacaktır. Bu ise (4.1) diferansiyel denkleminin nümerik dağılım bağıntılarının bulunup karşılaştırılmasıyla mümkündür. Bunun için de (4.1) denkleminin (4.13) lineerleştirilmiş formu ile (4.1) sürekli formlarının dağılım bağıntıları bulunarak karşılaştırma yapılacaktır. Nümerik dağılım bağıntıları

$$
\tilde{u}_j^n = \hat{u} e^{i(jk\Delta x + n\omega\Delta t)}, \quad i = \sqrt{-1} \tag{4.15}
$$

kullanılarak elde edilir [68, 69]. Kısalık açısından, lineerleştirilmiş denklemin $\tilde{u}$ çözümü yerine u, $\bar{k} := k\Delta x$ ve $\bar{\omega} := \omega\Delta t$ yazılırsa

$$
u_j^n = \hat{u} e^{i(j\bar{k} + n\bar{\omega})} \tag{4.16}
$$

elde edilir. Diskrit dağılım bağıntısı ile sürekli olanını karşılaştırmak için $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\bar{k})$ yazılsın. Şimdi öncelikle (4.13) kesikli durumun dağılım bağıntılarını bulalım:

$$
u_j^n = \hat{u} e^{i(j\bar{k} + n\bar{\omega})} \tag{4.17}
$$

idi. Benzer şekilde

$$u_{j-1}^n = \hat{u}e^{i((j-1)\bar{k}+n\bar{\omega})} \tag{4.18}$$

$$u_{j+1}^n = \hat{u}e^{i((j+1)\bar{k}+n\bar{\omega})} \tag{4.19}$$

yazılıp (4.13) te yerine konulduğunda

$$\hat{u}e^{i(j\bar{k}+n\bar{\omega})}\left(c1e^{-i\bar{k}}+c2+c3e^{i\bar{k}}\right) = -(\alpha e(x_{j+1})+2\beta e(x_j)+\alpha e(x_{j-1})) \tag{4.20}$$

elde edilir. Buradan

$$e^{i(j\bar{k}+n\bar{\omega})} = \frac{-(\alpha e(x_{j+1})+2\beta e(x_j)+\alpha e(x_{j-1}))}{\left(c1e^{-i\bar{k}}+c2+c3e^{i\bar{k}}\right)\hat{u}} \tag{4.21}$$

elde edilir. Burada $\hat{u}=1$ olarak alınabilir. Dolayısıyla gerekli düzenlemeler sonucu

$$i(j\bar{k}+n\bar{\omega}) = \ln\left[\frac{-(\alpha e(x_{j+1})+2\beta e(x_j)+\alpha e(x_{j-1}))}{\left(c1e^{-i\bar{k}}+c2+c3e^{i\bar{k}}\right)}\right] \tag{4.22}$$

$$\Rightarrow n\bar{\omega} = -i\ln(D) - j\bar{k} + i\ln\left(c1e^{-i\bar{k}}+c2+c3e^{i\bar{k}}\right) \tag{4.23}$$

$$\Rightarrow \bar{\omega} = \frac{1}{n}\left[-i\ln(D) - j\bar{k} + i\ln\left(c1e^{-i\bar{k}}+c2+c3e^{i\bar{k}}\right)\right] \tag{4.24}$$

$$\Rightarrow \bar{\omega}(\bar{k}) = \frac{1}{n}\left[-i\ln(D) - j\bar{k} + i\ln\left(\cos(\bar{k}(c1+c3)) - i\sin(\bar{k}(c1-c3))\right)\right] \tag{4.25}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{n\Delta t}\left[-i\ln(D) - jk\Delta x + i\ln\left(\cos(k\Delta x(c1+c3)) - i\sin(k\Delta x(c1-c3))\right)\right] \tag{4.26}$$

bağıntısı elde edilir ki burada $D = (\alpha e(x_{j+1})+2\beta e(x_j)+\alpha e(x_{j-1}))$ dir.

Şimdi de sürekli kısmın dağılım bağıntısı bulunacaktır. Bunun için (4.7) den

$$u_t + A_1 u_{xx} + A_2 u_x + A_3 u + A_4 = 0 \tag{4.27}$$

bağıntısı ele alınsın. Burada $A_1 := 2ax_i^3$, $A_2 := -ax_i^2$, $A_3 := -bx_i$ ve $A_4 := -q_i$ dir.

$$u = e^{i(kx+\omega t)} \tag{4.28}$$

olduğundan buradan

$$u_x = ike^{i(kx+\omega t)}, \quad u_{xx} = -k^2e^{i(kx+\omega t)}, \quad u_t = i\omega e^{i(kx+\omega t)} \tag{4.29}$$

elde edilir. (4.29) bağıntıları (4.27) de yerine konulursa

$$i\omega e^{i(kx+\omega t)} - A_1k^2e^{i(kx+\omega t)} + A_2ike^{i(kx+\omega t)} + A_3e^{i(kx+\omega t)} + A_4 = 0 \tag{4.30}$$

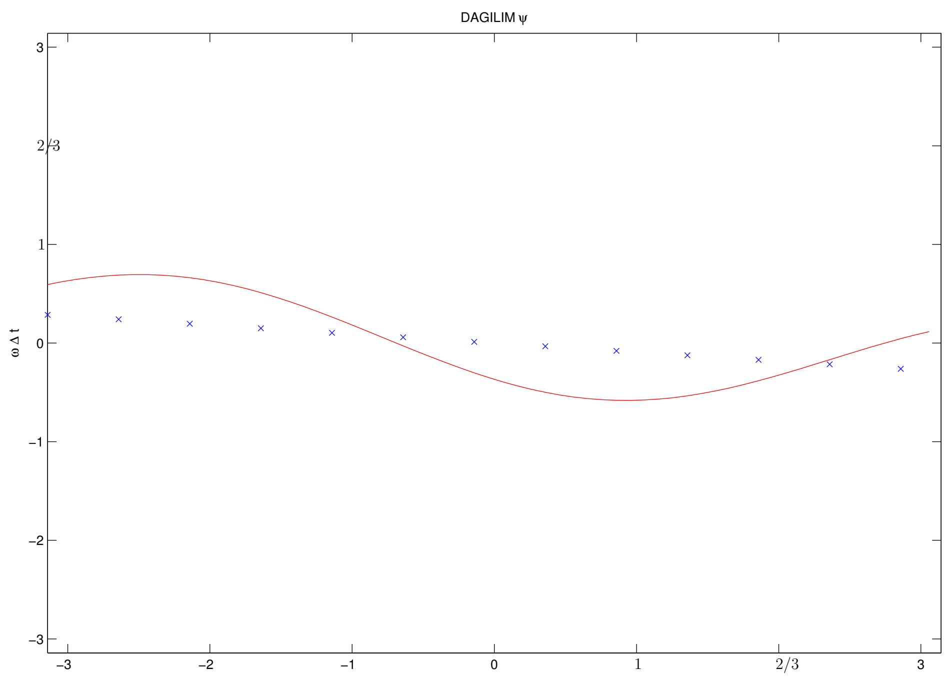
$$\Rightarrow e^{i(kx+\omega t)}\left(i\omega - A_1k^2 + A_2ik + A_3\right) + A_4 = 0 \tag{4.31}$$

$$\Rightarrow e^{i\omega t}e^{ikx}\left(i\omega - A_1k^2 + A_2ik + A_3\right) + A_4 = 0 \tag{4.32}$$

$$\Rightarrow e^{i\omega t} = \frac{-A_4e^{-ikx}}{i\omega - A_1k^2 + A_2ik + A_3} \tag{4.33}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{(1+i)^t(A_1k^2 + A_2ik + A_3) - A_4(\cos(kx) - i\sin(kx))}{i(1+1)^t} \tag{4.34}$$

elde edilir. Elde edilen bu (4.26) ve (4.34) bağıntıları Matlab 7.0.1 programı yardımıyla karşılaştırılırsa aşağıdaki grafik elde edilir ki bu da yukarıda uygulanan yöntemin bu problem için tutarlı ve yakınsak olduğunu gösterir.



Şekil 4.1: (4.26) ve (4.34) nin karşılaştırılması

Çözümün tutarlı ve yakınsak olması için eğrilerin birbirini en az bir noktada kesmesi gerekiyordu, grafikten de görüldüğü üzere eğriler iki noktada kesişti. Dolayısıyla uygulanan yöntem ve çözümler tutarlıdır ve yakınsaktır.

ii. Şimdi (4.1) diferansiyel denklemini Galerkin metodu ile nümerik olarak çözelim:

Kesirli difüzyon denkleminde spline metoddaki gibi Caputo kesirli türevi kullanılıp gerekli cebirsel ara işlemler yapılırsa

$$2akx^3u^{''} - akx^2u^{'} + (1 - kxb)u - f(x) - k(1 + x)e^{-t}x^3 = 0 \tag{4.35}$$

elde edilir. Burada hatırlatmak gerekirse $a = \frac{-3\Gamma(2.2)}{10\Gamma(0.2)}$, $b = \frac{-2\Gamma(2.2)}{15\Gamma(0.2)}$ idi. Şimdi (4.35) diferansiyel denklemine Galerkin metodunu uygulayalım:

$$\int_0^1 W\left(2akx^3U^{''} - akx^2U^{'} + (1 - kxb)U - f(x) - k(1 + x)e^{-t}x^3\right) dx = 0, \quad \forall W(x) \in V_h^0 \tag{4.36}$$

olacak şekilde bir $U(x)$ yaklaşık çözümü bulunacaktır. Düzenleme yapılırsa

$$\int_0^1 \left(2akx^3WU^{''} - akx^2WU^{'} + (1 - kxb)WU\right) dx = \int_0^1 (Wf(x) + Wk(1 + x)e^{-t}x^3)dx \tag{4.37}$$

elde edilir. (4.37) eşitliğinde $\int_0^1 2akx^3WU''dx$ integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^1 2akx^3WU''dx = [2akx^3WU^{'}]_0^1 - \int_0^1 (6akx^2WU^{'} + 2akx^3W^{'}U^{'})dx \tag{4.38}$$

elde edilir ki burada $[2akx^3WU^{'}]_0^1 = 0$ dır çünkü $W(0) = W(1) = 0$ dır. (4.38) eşitliği (4.37) de yerine konursa

$$\int_0^1 \left((1 - kxb)WU - 7akx^2WU^{'} - 2akx^3W^{'}U^{'}\right) dx = \int_0^1 (Wf(x) + Wk(1 + x)e^{-t}x^3)dx \tag{4.39}$$

elde edilir. Burada

$$U(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j(x), \quad U'(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j'(x), \quad W(x) = \sum_{i=1}^{n} s_i\varphi_i(x), \quad W'(x) = \sum_{i=1}^{n} s_i\varphi_i'(x)$$

kullanılırsa $U(x)$ yaklaşık çözümü bulunabilir. Bu eşitlikler (4.39) da yerine konulursa

$$\int_0^1 [\sum_{i=1}^{n}(1 - kxb)s_i\varphi_i(x)\sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j(x) - \sum_{i=1}^{n} 7akx^2s_i\varphi_i(x)\sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j'(x)$$

$$-\sum_{i=1}^{n} 2akx^3s_i\varphi_i'(x)\sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j'(x)]dx = \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{n} s_i\varphi_i(x)f(x) + \sum_{i=1}^{n} s_i\varphi_i(x)k(1 + x)e^{-t}x^3\right] dx \tag{4.40}$$

elde edilir. $|i - j| > 1$ olduğu durumlarda $\int_0^1 \varphi_j'\varphi_i'dx = 0$, $\int_0^1 \varphi_j'\varphi_idx = 0$ ve $\int_0^1 \varphi_j\varphi_idx = 0$ dır, çünkü $|i - j| > 1$ olduğunda φ_j ve φ_i çakışmazlar yani ortak noktaları bulunmaz. Buna göre gerekli düzenlemeler sonucu

$$\sum_{i=1}^{n} s_i\int_0^1 \sum_{j=1}^{n} c_j\left((1 - kxb)\varphi_j(x)\varphi_i(x) - 7akx^2\varphi_j'(x)\varphi_i(x) - 2akx^3\varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\right) dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_i\int_0^1 \left(\varphi_i(x)f(x) + \varphi_i(x)k(1 + x)e^{-t}x^3\right) dx \tag{4.41}$$

elde edilir. $a_1(x) := 1 - kx_ib$, $a_2(x) := -7akx_i^2$ ve $a_3(x) := -2akx_i^3$ dersek $i = 2$, $j = 1, .., n$ için

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} &= \int_h^{2h} (a_1(x)\varphi_1\varphi_2 + a_2(x)\varphi_1'\varphi_2 + a_3(x)\varphi_1'\varphi_2')dx \\
\alpha_{22} &= \int_h^{3h} (a_1(x)\varphi_2\varphi_2 + a_2(x)\varphi_2'\varphi_2 + a_3(x)\varphi_2'\varphi_2')dx \\
\alpha_{32} &= \int_{2h}^{3h} (a_1(x)\varphi_3\varphi_2 + a_2(x)\varphi_3'\varphi_2 + a_3(x)\varphi_3'\varphi_2')dx,
\end{aligned}$$

$i = m$, $j = 1, .., n$ için

$$\begin{aligned}
\alpha_{(m-1)m} &= \int_{(m-1)h}^{mh} (a_1(x)\varphi_{m-1}\varphi_m + a_2(x)\varphi_{m-1}'\varphi_m + a_3(x)\varphi_{m-1}'\varphi_m')dx \\
\alpha_{mm} &= \int_{(m-1)h}^{(m+1)h} (a_1(x)\varphi_m\varphi_m + a_2(x)\varphi_m'\varphi_m + a_3(x)\varphi_m'\varphi_m')dx \\
\alpha_{(m+1)m} &= \int_{mh}^{(m+1)h} (a_1(x)\varphi_{m+1}\varphi_m + a_2(x)\varphi_{m+1}'\varphi_m + a_3(x)\varphi_{m+1}'\varphi_m')dx,
\end{aligned}$$

ve $i = n - 1$, $j = 1, .., n$ için

$$\begin{aligned}
\alpha_{(n-2)(n-1)} &= \int_{(n-1)h}^{(n-2)h} (a_1(x)\varphi_{n-2}\varphi_{n-1} + a_2(x)\varphi_{n-2}'\varphi_{n-1} + a_3(x)\varphi_{n-2}'\varphi_{n-1}')dx \\
\alpha_{(n-1)(n-1)} &= \int_{(n-2)h}^{(n)h} (a_1(x)\varphi_{n-1}\varphi_{n-1} + a_2(x)\varphi_{n-1}'\varphi_{n-1} + a_3(x)\varphi_{n-1}'\varphi_{n-1}')dx \\
\alpha_{(n)(n-1)} &= \int_{nh}^{(n-1)h} (a_1(x)\varphi_n\varphi_{n-1} + a_2(x)\varphi_n'\varphi_{n-1} + a_3(x)\varphi_n'\varphi_{n-1}')dx,
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir ki buradan aşağıdaki matrisler elde edilir:

$$A = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\
\alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & 0 & ... & 0 & 0 \\
0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{43} & 0 & ... & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
0 & ... & 0 & 0 & \alpha_{(n-2)(n-1)} & \alpha_{(n-1)(n-1)} & \alpha_{n(n-1)} \\
. & . & . & . & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}.$$

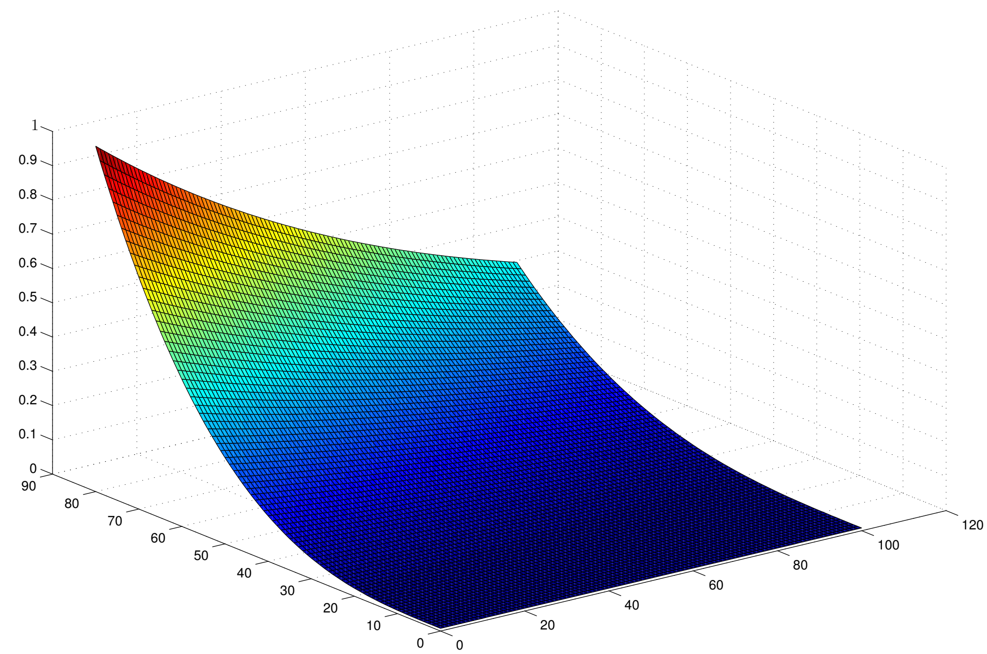
Benzer şekilde (4.41) eşitliğinin sağ tarafı da B matrisi olarak

$$B=\begin{bmatrix} u(0,t)=0 \\ \int_{h}^{3h}\varphi_2(f(x)+k(1+x)e^{-t}x^3)dx \\ \int_{2h}^{4h}\varphi_3(f(x)+k(1+x)e^{-t}x^3)dx \\ . \\ . \\ . \\ \int_{(n-1)h}^{(n+1)h}\varphi_n(f(x)+k(1+x)e^{-t}x^3)dx \\ u(1,t)=e^{-t} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla $AC = B$ denklem sisteminin çözümünden $C = [c_1, c_2, ..., c_n]$ elde edilir. Elde edilen bu c_j ler $U(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j(x)$ te yerine konulursa $U(x)$ yaklaşık çözümü elde edilir. Nümerik çözüm sonucu n nin farklı değerleri için bulunan maksimum mutlak hatalar Tablo 1. de listelenmiştir.

Tablo 1: Maksimum mutlak hatalar, $k = 0.01$

n	Spline metodu	Galerkin metodu	[62]	[67]
11	8.762e-04	9.242e-04	0.10446	1.822e-03
21	1.265e-04	5.762e-04	0.10518	1.168e-03
61	6.307e-05	1.723e-04		8.644e-04
121	1.591e-05	6.175e-05		6.848e-04



Şekil 4.2: Problem 1 de $u(x,t)$ nin çözüm grafiği, $n = 81$, $k = 0.01$

Kesirli türevli diferansiyel denklem sistemleri mekanik, viskoelastiklik, biyoloji, fizik ve mühendislik ve bunun gibi diğer uygulamalardaki problemlerin modellenmesinde sıkça kullanılmaktadır. Genel olarak, söz konusu denklem sistemlerinin bir gerçek çözümü bulunmamaktadır ancak belli metodlarla yaklaşık çözümleri elde edilebilmiştir. Söz konusu metodlar homotopy perturbation metodu [172,173], Adomian decomposition metodu [174-176], variation iteration metodu [177,178] ve homotopy analysis metodudur [179-183]. Bu çözümler analitik çözümlerdir, söz konusu denklem sistemlerinin sayısal çözümleri bulunmamaktadır. Bu çalışmada lineer ve lineer olmayan kesirli türevli diferansiyel denklem sistemleri non-polynomial kübik spline ve Galerkin metoduyla çözülmüştür:

4.3 Problem 2.

$$\begin{cases} \frac{d^{1.8}u}{dx} - x\frac{dv}{dx} + u = x^3 - 2x^2 + 6x \\ \frac{d^{1.8}v}{dx} - x\frac{du}{dx} + uv = x^2 - x \end{cases} \tag{4.42}$$

$u(0) = u(1) = 0$, $v(0) = v(1) = 0$ başlangıç koşulları ve $u(x) = x^3 - x$, $v(x) = x^2 - x$ analitik çözümleri ile verilen lineer olmayan kesirli diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Bu problemi non-polynomial kübik spline metoduyla çözelim. Önceki sorudan benzer olarak $u_i^{1.8}$ türevi

$$u_i^{1.8} = \frac{36}{25\Gamma(0.2)}(u_i(x_i)\int_0^{x_i}(x_i-\mu)^{-2.8}d\mu + u_i^{'}(x_i)\int_0^{x_i}(x_i-\mu)^{-1.8}d\mu + \frac{u_i^{''}(x_i)}{2}\int_0^{x_i}(x_i-\mu)^{-0.8}d\mu) = g_iu_i + h_iu_i' + m_iu_i'' \tag{4.43}$$

olarak bulunur. Burada $g_i := \frac{4x_i^{-1.8}}{5\Gamma(0.2)}$, $h_i := \frac{9x_i^{-0.8}}{5\Gamma(0.2)}$ ve $m_i := \frac{18x_i^{0.2}}{5\Gamma(0.2)}$ dir. Benzer şekilde $v_i^{1.8}$ türevi de

$$v_i^{1.8} = \frac{36}{25\Gamma(0.2)}(v_i(x_i)\int_0^{x_i}(x_i-\mu)^{-2.8}d\mu + v_i^{'}(x_i)\int_0^{x_i}(x_i-\mu)^{-1.8}d\mu + \frac{v_i^{''}(x_i)}{2}\int_0^{x_i}(x_i-\mu)^{-0.8}d\mu) = g_iv_i + h_iv_i' + m_iv_i'' \tag{4.44}$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu türevler (4.42) de yerine konursa

$$\begin{cases} (1+g_i)u_i + h_iu_i' + m_iu_i'' - x_iv_i' = x_i^3 - 2x_i^2 + 6x_i \\ g_iv_i + h_iv_i' + m_iv_i'' - x_iu_i' + u_iv_i = x_i^2 - x_i \end{cases} \tag{4.45}$$

lineer olmayan diferansiyel denklem sistemi elde edilmiş olur.

i. (4.45) diferansiyel denklem sisteminde ilk olarak

$$(1+g_i)u_i + h_i u_i' + m_i u_i'' - x_i v_i' = x_i^3 - 2x_i^2 + 6x_i \tag{4.46}$$

diferansiyel denklemini diskritize edelim: (4.46) da $u_i'' = M_i$ yazılırsa

$$(1+g_i)u_i + h_i u_i' + m_i M_i - x_i v_i' = x_i^3 - 2x_i^2 + 6x_i \tag{4.47}$$

elde edilir. Bu eşitlikte M_i yalnız bırakılırsa

$$M_i = G_i u_i + H_i u_i' + K_i v_i' + F_i \tag{4.48}$$

elde edilir ki burada $G_i := -\frac{1+g_i}{m_i}$, $H_i := -\frac{h_i}{m_i}$, $K_i := \frac{x_i}{m_i}$ ve $F_i := \frac{x_i^3-2x_i^2+6x_i}{m_i}$ dir. Dolayısıyla benzer şekilde

$$M_{i+1} = G_{i+1}u_{i+1} + H_{i+1}u_{i+1}' + K_{i+1}v_{i+1}' + F_{i+1} \tag{4.49}$$

$$M_{i-1} = G_{i-1}u_{i-1} + H_{i-1}u_{i-1}' + K_{i-1}v_{i-1}' + F_{i-1} \tag{4.50}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.9) daki özdeşliklere benzer olarak

$$v_i^{'} \cong \frac{v_{i+1}-v_{i-1}}{2h}, v_{i+1}^{'} \cong \frac{3v_{i+1}-4v_i+v_{i-1}}{2h}, v_{i-1}^{'} \cong \frac{-v_{i+1}+4v_i-3v_{i-1}}{2h}, \tag{4.51}$$

özdeşlikleri de yazılabilir. (4.9) ve (4.51) özdeşlikleri sırasıyla (4.48), (4.49) ve (4.50) de gerekli yerlere konursa

$$M_i = G_i u_i + H_i\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h} + K_i\frac{v_{i+1}-v_{i-1}}{2h} + F_i \tag{4.52}$$

$$M_{i+1} = G_{i+1}u_{i+1} + H_{i+1}\frac{3u_{i+1}-4u_i+u_{i-1}}{2h} + K_{i+1}\frac{3v_{i+1}-4v_i+v_{i-1}}{2h} + F_{i+1} \tag{4.53}$$

$$M_{i-1} = G_{i-1}u_{i-1} + H_{i-1}\frac{-u_{i+1}+4u_i-3u_{i-1}}{2h} + K_{i-1}\frac{-v_{i+1}+4v_i-3v_{i-1}}{2h} + F_{i-1} \tag{4.54}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler (3.13) te yerine konursa aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\alpha}{2h}H_{i+1} - \frac{\beta}{h}H_i - \frac{3\alpha}{2h}H_{i-1} + \alpha G_{i-1} - \frac{1}{h^2}\right] u_{i-1} &+ \\
\left[-\frac{2\alpha}{h}H_{i+1} + 2\beta G_i + \frac{2\alpha}{h}H_{i-1} + \frac{2}{h^2}\right] u_i &+ \\
\left[\frac{3\alpha}{2h}H_{i+1} + \frac{\beta}{h}H_i - \frac{\alpha}{2h}H_{i-1} + \alpha G_{i+1} - \frac{1}{h^2}\right] u_{i+1}& \\
\left[\frac{\alpha}{2h}K_{i+1} - \frac{\beta}{h}K_i - \frac{3\alpha}{2h}K_{i-1}\right] v_{i-1} &+ \\
\left[-\frac{2\alpha}{h}K_{i+1} + \frac{2\alpha}{h}K_{i-1}\right] v_i &+ \\
\left[\frac{3\alpha}{2h}K_{i+1} + \frac{\beta}{h}K_i - \frac{\alpha}{2h}K_{i-1}\right] v_{i+1}& \\
= -(\alpha F_{i+1} + 2\beta F_i + \alpha F_{i-1}).&
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{cases} a1 = \frac{\alpha}{2h}H_{i+1} - \frac{\beta}{h}H_i - \frac{3\alpha}{2h}H_{i-1} + \alpha G_{i-1} - \frac{1}{h^2} \\ a2 = -\frac{2\alpha}{h}H_{i+1} + 2\beta G_i + \frac{2\alpha}{h}H_{i-1} + \frac{2}{h^2} \\ a3 = \frac{3\alpha}{2h}H_{i+1} + \frac{\beta}{h}H_i - \frac{\alpha}{2h}H_{i-1} + \alpha G_{i+1} - \frac{1}{h^2} \\ b1 = \frac{\alpha}{2h}K_{i+1} - \frac{\beta}{h}K_i - \frac{3\alpha}{2h}K_{i-1} \\ b2 = -\frac{2\alpha}{h}K_{i+1} + \frac{2\alpha}{h}K_{i-1} \\ b3 = \frac{3\alpha}{2h}K_{i+1} + \frac{\beta}{h}K_i - \frac{\alpha}{2h}K_{i-1} \end{cases} \tag{4.56}$$

yazılsın. Bu sistemden doğan matrisi daha sonra oluşturacağız.

ii. Şimdi (4.45) diferansiyel denklem sisteminin ikinci diferansiyel denklemini ele alalım:

$$g_i v_i + h_i v_i' + m_i v_i'' - x_i u_i' + u_i v_i = x_i^2 - x_i \tag{4.57}$$

diferansiyel denkleminde $v_i'' = N_i$ yazılırsa

$$g_i v_i + h_i v_i' + m_i N_i - x_i u_i' + u_i v_i = x_i^2 - x_i \tag{4.58}$$

elde edilir. Bu eşitlikte N_i yalnız bırakılırsa

$$N_i = T_i v_i + H_i v_i' + K_i u_i' + r_i u_i v_i + S_i \tag{4.59}$$

elde edilir ki burada $T_i := -\frac{g_i}{m_i}$, $H_i := -\frac{h_i}{m_i}$, $K_i := \frac{x_i}{m_i}$, $r_i := -\frac{1}{m_i}$ ve $S_i := \frac{x_i^2 - x_i}{m_i}$ dir. Dolayısıyla benzer şekilde

$$N_{i+1} = T_{i+1} v_{i+1} + H_{i+1} v_{i+1}' + K_{i+1} u_{i+1}' + r_{i+1} u_{i+1} v_{i+1} + S_{i+1} \tag{4.60}$$

$$N_{i-1} = T_{i-1} v_{i-1} + H_{i-1} v_{i-1}' + K_{i-1} u_{i-1}' + r_{i-1} u_{i-1} v_{i-1} + S_{i-1} \tag{4.61}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.9) ve (4.51) özdeşlikleri sırasıyla (4.59), (4.60) ve (4.61) de gerekli yerlere konursa

$$N_i = T_i v_i + H_i \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} + K_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + r_i u_i v_i + S_i \tag{4.62}$$

$$N_{i+1} = T_{i+1} v_{i+1} + H_{i+1} \frac{3v_{i+1} - 4v_i + v_{i-1}}{2h} + K_{i+1} \frac{3u_{i+1} - 4u_i + u_{i-1}}{2h} + r_{i+1} u_{i+1} v_{i+1} + S_{i+1} \tag{4.63}$$

$$N_{i-1} = T_{i-1} v_{i-1} + H_{i-1} \frac{-v_{i+1} + 4v_i - 3v_{i-1}}{2h} + K_{i-1} \frac{-u_{i+1} + 4u_i - 3u_{i-1}}{2h} + r_{i-1} u_{i-1} v_{i-1} + S_{i-1} \tag{4.64}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler

$$\alpha N_{i+1} + 2\beta N_i + \alpha N_{i-1} = (1/h^2)(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) \tag{4.65}$$

de yerine konursa aşağıdaki lineer denklemler sistemi elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\alpha}{2h}H_{i+1} - \frac{\beta}{h}H_i - \frac{3\alpha}{2h}H_{i-1} + \alpha T_{i-1} - \frac{1}{h^2}\right] v_{i-1} + \\
\left[-\frac{2\alpha}{h}H_{i+1} + 2\beta T_i + \frac{2\alpha}{h}H_{i-1} + \frac{2}{h^2}\right] v_i + \\
\left[\frac{3\alpha}{2h}H_{i+1} + \frac{\beta}{h}H_i - \frac{\alpha}{2h}H_{i-1} + \alpha T_{i+1} - \frac{1}{h^2}\right] v_{i+1} \\
\left[\frac{\alpha}{2h}K_{i+1} - \frac{\beta}{h}K_i - \frac{3\alpha}{2h}K_{i-1}\right] u_{i-1} + \\
\left[-\frac{2\alpha}{h}K_{i+1} + \frac{2\alpha}{h}K_{i-1}\right] u_i + \\
\left[\frac{3\alpha}{2h}K_{i+1} + \frac{\beta}{h}K_i - \frac{\alpha}{2h}K_{i-1}\right] u_{i+1} \\
\alpha r_{i+1}u_{i+1}v_{i+1} + 2\beta r_i u_i v_i + \alpha r_{i-1}u_{i-1}v_{i-1} \\
= -(\alpha S_{i+1} + 2\beta S_i + \alpha S_{i-1}).
\end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\begin{cases}
c1 = \frac{\alpha}{2h}H_{i+1} - \frac{\beta}{h}H_i - \frac{3\alpha}{2h}H_{i-1} + \alpha T_{i-1} - \frac{1}{h^2} \\
c2 = -\frac{2\alpha}{h}H_{i+1} + 2\beta T_i + \frac{2\alpha}{h}H_{i-1} + \frac{2}{h^2} \\
c3 = \frac{3\alpha}{2h}H_{i+1} + \frac{\beta}{h}H_i - \frac{\alpha}{2h}H_{i-1} + \alpha T_{i+1} - \frac{1}{h^2} \\
d1 = \frac{\alpha}{2h}K_{i+1} - \frac{\beta}{h}K_i - \frac{3\alpha}{2h}K_{i-1} \\
d2 = -\frac{2\alpha}{h}K_{i+1} + \frac{2\alpha}{h}K_{i-1} \\
d3 = \frac{3\alpha}{2h}K_{i+1} + \frac{\beta}{h}K_i - \frac{\alpha}{2h}K_{i-1}
\end{cases} \tag{4.67}$$

yazılsın. (4.56) ve (4.67) ile aşağıdaki matrisler elde edilir:

$$A = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \ast & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\
a1 & a2 & a3 & 0 & ... & 0 & 0 & \ast & b1 & b2 & b3 & 0 & ... & 0 & 0 \\
0 & a1 & a2 & a3 & 0 & ... & 0 & \ast & 0 & b1 & b2 & b3 & 0 & ... & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & \ast & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & \ast & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & \ast & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & ... & 0 & 0 & a1 & a2 & a3 & \ast & 0 & ... & 0 & 0 & b1 & b2 & b3 \\
. & . & . & . & 0 & 0 & 1 & \ast & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\
\ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \ast & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\
d1 & d2 & d3 & 0 & ... & 0 & 0 & \ast & c1 & c2 & c3 & 0 & ... & 0 & 0 \\
0 & d1 & d2 & d3 & 0 & ... & 0 & \ast & 0 & c1 & c2 & c3 & 0 & ... & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & \ast & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & \ast & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & \ast & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & ... & 0 & 0 & d1 & d2 & d3 & \ast & 0 & ... & 0 & 0 & c1 & c2 & c3 \\
. & . & . & . & 0 & 0 & 0 & \ast & . & . & . & . & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$$
B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha r_0 u_0 v_0 + 2\beta r_1 u_1 v_1 + \alpha r_2 u_2 v_2 \\ \alpha r_1 u_1 v_1 + 2\beta r_2 u_2 v_2 + \alpha r_3 u_3 v_3 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha r_{n-2} u_{n-2} v_{n-2} + 2\beta r_{n-1} u_{n-1} v_{n-1} + \alpha r_n u_n v_n \\ 0 \end{bmatrix}
$$

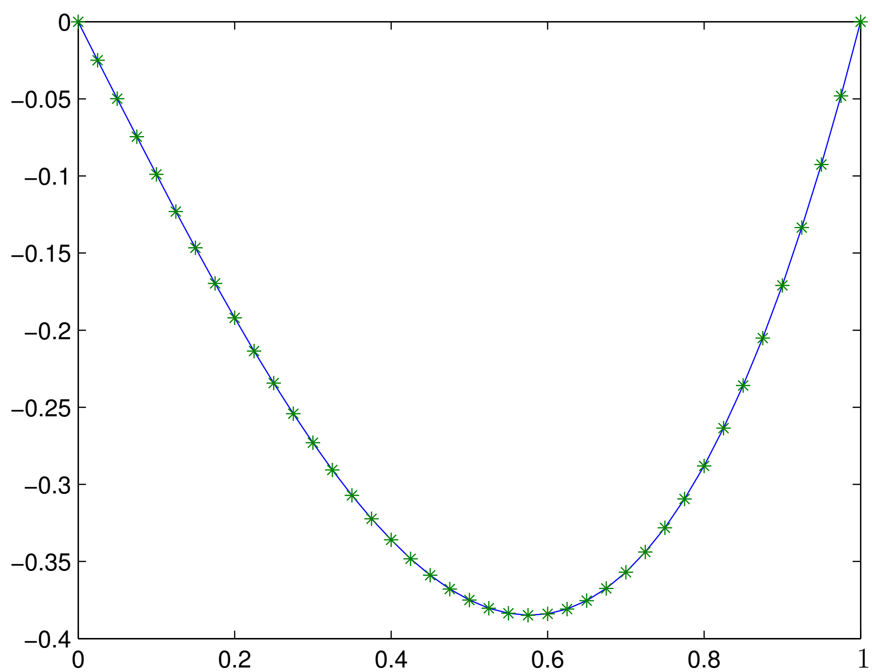
$$
C = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\alpha F_0 + 2\beta F_1 + \alpha F_2) \\ -(\alpha F_1 + 2\beta F_2 + \alpha F_3) \\ . \\ . \\ . \\ -(\alpha F_{n-2} + 2\beta F_{n-1} + \alpha F_n) \\ 0 \\ 0 \\ -(\alpha S_0 + 2\beta S_1 + \alpha S_2) \\ -(\alpha S_1 + 2\beta S_2 + \alpha S_3) \\ . \\ . \\ . \\ -(\alpha S_{n-2} + 2\beta S_{n-1} + \alpha s_n) \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$X = [u_0, u_1, ..., u_n, v_0, v_1, ..., v_n]'.$$

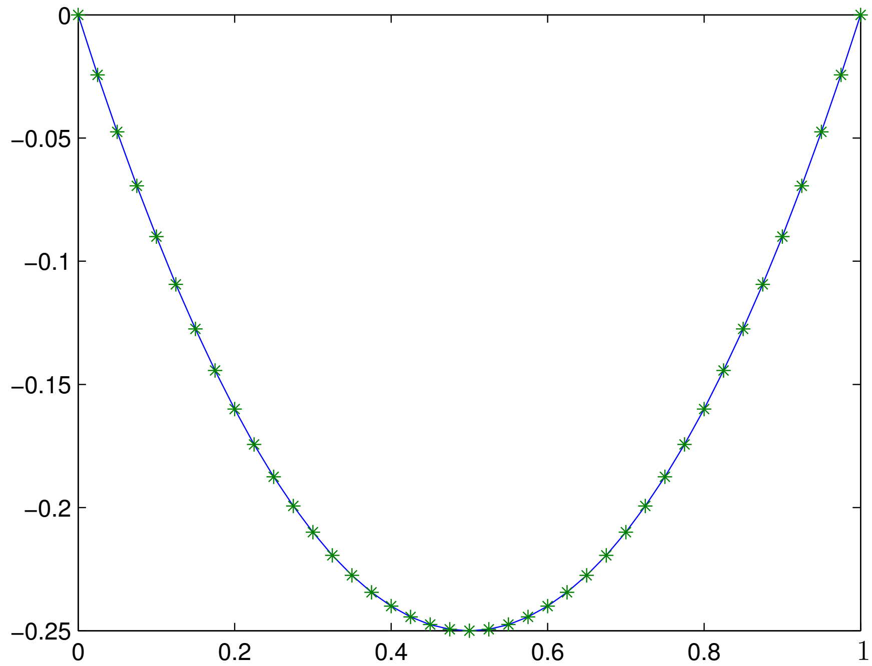
Sonuç olarak $AX + B = C$ gibi bir denklem sistemi oluşturulmuş olur ki buradan Matlab 7.0.1 programı yardımıyla X yaklaşık çözümü elde edilir. Nümerik çözüm sonucu n nin farklı değerleri için bulunan maksimum mutlak hatalar Tablo 2 de listelenmiştir.

Tablo 2: $u(x)$ ve $v(x)$ için bulunan nümerik sonuçlar.

Problem 2	n	$u(x)$ in max. mutlak hataları	$v(x)$ in max. mutlak hataları
Spline ($\alpha = 2$)	21	4.8513e-006	7.7716e-005
	41	1.2104e-006	1.9470e-005
	81	3.0280e-007	4.8676e-006
Spline ($\alpha = 1.8$)	21	1.5518e-005	5.7321e-005
	41	8.6104e-006	1.8447e-005
	81	3.0280e-006	6.9626e-006



Şekil 4.3: Problem 2 de $u(x)$ in grafiği ($n = 41$)



Şekil 4.4: Problem 2 de $v(x)$ in grafiği ($n = 41$)

4.4 Problem 3

$$\begin{cases} \frac{d^{1.9}u}{dx} + xu + xv = 2 \\ \frac{d^{1.9}v}{dx} + 2xu + 2xv = -2 \end{cases} \tag{4.68}$$

$u(0) = u(1) = 0$, $v(0) = v(1) = 0$ başlangıç koşulları ve $u(x) = x^2 - x$, $v(x) = x - x^2$ analitik çözümleri ile verilen kesirli diferansiyel denklem sistemini Galerkin metoduyla nümerik olarak çözelim. Önceki sorulardan benzer olarak $u^{1.9}$ ve $v^{1.9}$ türevleri

$$u^{1.9} = 10Au''x^{0.1} - \frac{10A}{9}u'x^{-0.9} - \frac{10A}{19}ux^{-1.9}$$
$$v^{1.9} = 10Av''x^{0.1} - \frac{10A}{9}v'x^{-0.9} - \frac{10A}{19}vx^{-1.9}$$

olarak bulunur. Burada $A := \frac{171}{100\Gamma(0.1)}$ dir. Elde edilen bu türevler (4.68) de yerine konursa

$$\begin{cases} 10Au''x^{0.1} + bu'x^{-0.9} + (ax^{-1.9} + x)u + xv = 2 \\ 10Av''x^{0.1} + bv'x^{-0.9} + (ax^{-1.9} + 2x)v + 2xu = -2 \end{cases} \tag{4.69}$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilmiş olur.

i. (4.69) da ilk olarak

$$10Au''x^{0.1} + bu'x^{-0.9} + (ax^{-1.9} + x)u + xv = 2 \tag{4.70}$$

diferansiyel denklemine Galerkin metodunu uygulayalım:

$$\int_0^1 W\left(10AU''x^{0.1} + bU'x^{-0.9} + (ax^{-1.9} + x)U + xV - 2\right)dx = 0, \quad \forall W(x) \in V_h^0 \tag{4.71}$$

olacak şekilde bir $U(x)$ ve $V(x)$ yaklaşık çözümü bulunacaktır. Düzenleme yapılırsa

$$\int_0^1 \left(10Ax^{0.1}WU'' + bx^{-0.9}WU' + (ax^{-1.9} + x)WU + xV\right)dx = \int_0^1 2W dx \tag{4.72}$$

elde edilir. (4.72) eşitliğinde $\int_0^1 10Ax^{0.1}WU''dx$ integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^1 2akx^3WU''dx = [10Ax^{0.1}WU']_0^1 - \int_0^1 (Ax^{-0.9}WU' + 10Ax^{0.1}W'U')dx \tag{4.73}$$

elde edilir ki burada $[2akx^3WU']_0^1 = 0$ dır çünkü $W(0) = W(1) = 0$ dır. (4.73) eşitliği (4.72) de yerine konursa

$$\int_0^1 \left(-10Ax^{0.1}W'U' + (b-A)x^{-0.9}WU' + (ax^{-1.9} + x)WU + xV\right)dx = \int_0^1 2W dx \tag{4.74}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{cases} U(x) = \sum_{j=1}^n c_j\varphi_j(x), \quad U'(x) = \sum_{j=1}^n c_j\varphi_j'(x), \\ V(x) = \sum_{p=1}^n k_p\varphi_p(x), \quad V'(x) = \sum_{p=1}^n k_p\varphi_p'(x), \\ W(x) = \sum_{i=1}^n s_i\varphi_i(x), \quad W'(x) = \sum_{i=1}^n s_i\varphi_i'(x) \end{cases} \tag{4.75}$$

kullanılıp (4.74) te yerine konulursa

$$\begin{aligned} \int_0^1 [\sum_{i=1}^n -10Ax^{0.1}s_i\varphi_i'(x)\sum_{j=1}^n c_j\varphi_j'(x) + \sum_{i=1}^n (b-A)x^{-0.9}s_i\varphi_i(x)\sum_{j=1}^n c_j\varphi_j'(x) \\ + \sum_{i=1}^n (ax^{-1.9} + x)s_i\varphi_i(x)\sum_{j=1}^n c_j\varphi_j(x) + \sum_{i=1}^n xs_i\varphi_i(x)\sum_{p=1}^n k_p\varphi_p(x)]dx = \int_0^1 \sum_{i=1}^n 2s_i\varphi_i(x)dx \end{aligned} \tag{4.76}$$

elde edilir. $|i-j| > 1$ ve $|i-p| > 1$ olduğu durumlarda $\int_0^1 \varphi_j'\varphi_i'dx = 0$, $\int_0^1 \varphi_j'\varphi_i dx = 0$, $\int_0^1 \varphi_j\varphi_i dx = 0$ dır, $\int_0^1 \varphi_i'\varphi_p'dx = 0$, $\int_0^1 \varphi_i'\varphi_p dx = 0$ ve $\int_0^1 \varphi_i\varphi_i dx = 0$ dır çünkü $|i-j| > 1$ ve $|i-p| > 1$ olduğunda φ_j, φ_i ve φ_p çakışmazlar yani ortak noktaları bulunmaz. Buna göre gerekli düzenlemeler sonucu

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n s_i \int_0^1 [\sum_{j=1}^n c_j\left(-10Ax^{0.1}\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + (b-A)x^{-0.9}\varphi_i(x)\varphi_j'(x) + (ax^{-1.9} + x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\right) \\ + \sum_{p=1}^n k_p x\varphi_i(x)\varphi_p(x)]dx = \sum_{i=1}^n s_i \int_0^1 2\varphi_i(x)dx \end{aligned}$$

elde edilir. $a_1(x) := -10Ax^{0.1}$, $a_2(x) := (b-A)x^{-0.9}$ ve $a_3(x) := (ax^{-1.9}+x)$ denirse $i=2$, $j=1,..,n$ için

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} &= \int_h^{2h} (a_1(x)\varphi_1'\varphi_2' + a_2(x)\varphi_1'\varphi_2 + a_3(x)\varphi_1\varphi_2)dx \\
\alpha_{22} &= \int_h^{3h} (a_1(x)\varphi_2'\varphi_2' + a_2(x)\varphi_2'\varphi_2 + a_3(x)\varphi_2\varphi_2)dx \\
\alpha_{32} &= \int_{2h}^{3h} (a_1(x)\varphi_3'\varphi_2' + a_2(x)\varphi_3'\varphi_2 + a_3(x)\varphi_3\varphi_2)dx \\
\beta_{12} &= \int_h^{2h} (x\varphi_1\varphi_2)dx \\
\beta_{22} &= \int_h^{3h} (x\varphi_2\varphi_2)dx \\
\beta_{32} &= \int_{2h}^{3h} (x\varphi_3\varphi_2)dx,
\end{aligned}$$

$i=m$, $j=1,..,n$ için

$$\begin{aligned}
\alpha_{(m-1)m} &= \int_{(m-1)h}^{mh} (a_1(x)\varphi_{m-1}'\varphi_m' + a_2(x)\varphi_{m-1}'\varphi_m + a_3(x)\varphi_{m-1}\varphi_m)dx \\
\alpha_{mm} &= \int_{(m-1)h}^{(m+1)h} (a_1(x)\varphi_m'\varphi_m' + a_2(x)\varphi_m'\varphi_m + a_3(x)\varphi_m\varphi_m)dx \\
\alpha_{(m+1)m} &= \int_{mh}^{(m+1)h} (a_1(x)\varphi_{m+1}'\varphi_m' + a_2(x)\varphi_{m+1}'\varphi_m + a_3(x)\varphi_{m+1}\varphi_m)dx \\
\beta_{(m-1)m} &= \int_{(m-1)h}^{mh} (x\varphi_{m-1}\varphi_m)dx \\
\beta_{mm} &= \int_{(m-1)h}^{(m+1)h} (x\varphi_m\varphi_m)dx \\
\beta_{(m+1)m} &= \int_{mh}^{(m+1)h} (x\varphi_{m+1}\varphi_m)dx,
\end{aligned}$$

ve $i=n-1$, $j=1,..,n$ için

$$\begin{aligned}
\alpha_{(n-2)(n-1)} &= \int_{(n-1)h}^{(n-2)h} (a_1(x)\varphi_{n-2}'\varphi_{n-1}' + a_2(x)\varphi_{n-2}'\varphi_{n-1} + a_3(x)\varphi_{n-2}\varphi_{n-1})dx \\
\alpha_{(n-1)(n-1)} &= \int_{(n-2)h}^{(n)h} (a_1(x)\varphi_{n-1}'\varphi_{n-1}' + a_2(x)\varphi_{n-1}'\varphi_{n-1} + a_3(x)\varphi_{n-1}\varphi_{n-1})dx \\
\alpha_{(n)(n-1)} &= \int_{nh}^{(n-1)h} (a_1(x)\varphi_n'\varphi_{n-1}' + a_2(x)\varphi_n'\varphi_{n-1} + a_3(x)\varphi_n\varphi_{n-1})dx \\
\beta_{(n-2)(n-1)} &= \int_{(n-1)h}^{(n-2)h} (x\varphi_{n-2}\varphi_{n-1})dx \\
\beta_{(n-1)(n-1)} &= \int_{(n-2)h}^{(n)h} (x\varphi_{n-1}\varphi_{n-1})dx \\
\beta_{(n)(n-1)} &= \int_{nh}^{(n-1)h} (x\varphi_n\varphi_{n-1})dx,
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

ii. Şimdi de (4.69) den

$$10Av''x^{0.1} + bv'x^{-0.9} + (ax^{-1.9} + 2x)v + 2xu = -2 \tag{4.77}$$

diferansiyel denklemine Galerkin metodunu uygulayalım:

$$\int_0^1 W\left(10AV''x^{0.1} + bV'x^{-0.9} + (ax^{-1.9} + 2x)V + 2xU + 2\right)dx = 0, \quad \forall W(x) \in V_h^0 \tag{4.78}$$

olacak şekilde bir $U(x)$ ve $V(x)$ yaklaşık çözümü bulunacaktır. Düzenleme yapılırsa

$$\int_0^1 \left(10Ax^{0.1}WV'' + bx^{-0.9}WV' + (ax^{-1.9} + 2x)WV + 2xU\right)dx = \int_0^1 -2W dx \tag{4.79}$$

elde edilir. (4.79) eşitliğinde $\int_0^1 10Ax^{0.1}WV''dx$ integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^1 2akx^3WV''dx = [10Ax^{0.1}WV']_0^1 - \int_0^1 (Ax^{-0.9}WV' + 10Ax^{0.1}W'V')dx \tag{4.80}$$

elde edilir ki burada $[2akx^3WV']_0^1 = 0$ dır çünkü $W(0) = W(1) = 0$ dır. (4.80) eşitliği (4.79) da yerine konursa

$$\int_0^1 \left(-10Ax^{0.1}W'V' + (b-A)x^{-0.9}WV' + (ax^{-1.9} + 2x)WV + 2xU\right)dx = \int_0^1 -2W dx \tag{4.81}$$

elde edilir. Burada (4.75) teki özdeşlikler kullanılıp (4.81) de yerine konacak olursa

$$\int_0^1 [\sum_{i=1}^n -10Ax^{0.1}s_i\varphi_i'(x)\sum_{p=1}^n k_p\varphi_p'(x) + \sum_{i=1}^n (b-A)x^{-0.9}s_i\varphi_i(x)\sum_{p=1}^n k_p\varphi_p'(x)$$
$$+\sum_{i=1}^n (ax^{-1.9} + 2x)s_i\varphi_i(x)\sum_{p=1}^n k_p\varphi_p(x) + \sum_{i=1}^n 2xs_i\varphi_i(x)\sum_{j=1}^n c_j\varphi_j(x)]dx = \int_0^1 \sum_{i=1}^n -2s_i\varphi_i(x)dx \tag{4.82}$$

elde edilir. Burada da yukarıda olduğu gibi $|i-j| > 1$ ve $|i-p| > 1$ olduğu durumlarda $\int_0^1 \varphi_j'\varphi_i'dx = 0$, $\int_0^1 \varphi_j'\varphi_i dx = 0$, $\int_0^1 \varphi_j\varphi_i dx = 0$ dır, $\int_0^1 \varphi_i'\varphi_p'dx = 0$, $\int_0^1 \varphi_i'\varphi_p dx = 0$ ve $\int_0^1 \varphi_i\varphi_i dx = 0$ dır. Buna göre gerekli düzenlemeler sonucu

$$\sum_{i=1}^n s_i\int_0^1 [\sum_{p=1}^n k_p\left(-10Ax^{0.1}\varphi_i'(x)\varphi_p'(x) + (b-A)x^{-0.9}\varphi_i(x)\varphi_p'(x) + (ax^{-1.9} + 2x)\varphi_i(x)\varphi_p(x)\right)$$
$$+\sum_{j=1}^n c_j 2x\varphi_i(x)\varphi_j(x)]dx = \sum_{i=1}^n s_i\int_0^1 -2\varphi_i(x)dx$$

elde edilir. $b_1(x) := -10Ax^{0.1}$, $b_2(x) := (b-A)x^{-0.9}$ ve $b_3(x) := (ax^{-1.9} + 2x)$ denirse

$i = 2,\ j = 1,..,n$ için

$$\begin{aligned}
\gamma_{12} &= \int_{h}^{2h} (b_1(x)\varphi_1'\varphi_2' + b_2(x)\varphi_1'\varphi_2 + b_3(x)\varphi_1\varphi_2)dx \\
\gamma_{22} &= \int_{h}^{3h} (b_1(x)\varphi_2'\varphi_2' + b_2(x)\varphi_2'\varphi_2 + b_3(x)\varphi_2\varphi_2)dx \\
\gamma_{32} &= \int_{2h}^{3h} (b_1(x)\varphi_3'\varphi_2' + b_2(x)\varphi_3'\varphi_2 + b_3(x)\varphi_3\varphi_2)dx \\
\eta_{12} &= \int_{h}^{2h} (2x\varphi_1\varphi_2)dx \\
\eta_{22} &= \int_{h}^{3h} (2x\varphi_2\varphi_2)dx \\
\eta_{32} &= \int_{2h}^{3h} (2x\varphi_3\varphi_2)dx,
\end{aligned}$$

$i = m,\ j = 1,..,n$ için

$$\begin{aligned}
\gamma_{(m-1)m} &= \int_{(m-1)h}^{mh} (b_1(x)\varphi_{m-1}'\varphi_m' + b_2(x)\varphi_{m-1}'\varphi_m + b_3(x)\varphi_{m-1}\varphi_m)dx \\
\gamma_{mm} &= \int_{(m-1)h}^{(m+1)h} (b_1(x)\varphi_m'\varphi_m' + b_2(x)\varphi_m'\varphi_m + b_3(x)\varphi_m\varphi_m)dx \\
\gamma_{(m+1)m} &= \int_{mh}^{(m+1)h} (b_1(x)\varphi_{m+1}'\varphi_m' + b_2(x)\varphi_{m+1}'\varphi_m + b_3(x)\varphi_{m+1}\varphi_m)dx \\
\eta_{(m-1)m} &= \int_{(m-1)h}^{mh} (2x\varphi_{m-1}\varphi_m)dx \\
\eta_{mm} &= \int_{(m-1)h}^{(m+1)h} (2x\varphi_m\varphi_m)dx \\
\eta_{(m+1)m} &= \int_{mh}^{(m+1)h} (2x\varphi_{m+1}\varphi_m)dx,
\end{aligned}$$

ve $i = n-1,\ j = 1,..,n$ için

$$\begin{aligned}
\gamma_{(n-2)(n-1)} &= \int_{(n-1)h}^{(n-2)h} (b_1(x)\varphi_{n-2}'\varphi_{n-1}' + b_2(x)\varphi_{n-2}'\varphi_{n-1} + b_3(x)\varphi_{n-2}\varphi_{n-1})dx \\
\gamma_{(n-1)(n-1)} &= \int_{(n-2)h}^{(n)h} (b_1(x)\varphi_{n-1}'\varphi_{n-1}' + b_2(x)\varphi_{n-1}'\varphi_{n-1} + b_3(x)\varphi_{n-1}\varphi_{n-1})dx \\
\gamma_{(n)(n-1)} &= \int_{nh}^{(n-1)h} (b_1(x)\varphi_n'\varphi_{n-1}' + b_2(x)\varphi_n'\varphi_{n-1} + b_3(x)\varphi_n\varphi_{n-1})dx \\
\eta_{(n-2)(n-1)} &= \int_{(n-1)h}^{(n-2)h} (2x\varphi_{n-2}\varphi_{n-1})dx \\
\eta_{(n-1)(n-1)} &= \int_{(n-2)h}^{(n)h} (2x\varphi_{n-1}\varphi_{n-1})dx \\
\eta_{(n)(n-1)} &= \int_{nh}^{(n-1)h} (2x\varphi_n\varphi_{n-1})dx,
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir ki buradan aşağıdaki matrisler elde edilir:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{43} & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & 0 & \alpha_{(n-2)(n-1)} & \alpha_{(n-1)(n-1)} & \alpha_{n(n-1)} \\ . & . & . & . & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{23} & \beta_{33} & \beta_{43} & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & 0 & \beta_{(n-2)(n-1)} & \beta_{(n-1)(n-1)} & \beta_{n(n-1)} \\ . & . & . & . & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{23} & \gamma_{33} & \gamma_{43} & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & 0 & \gamma_{(n-2)(n-1)} & \gamma_{(n-1)(n-1)} & \gamma_{n(n-1)} \\ . & . & . & . & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \eta_{12} & \eta_{22} & \eta_{32} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{23} & \eta_{33} & \eta_{43} & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & 0 & \eta_{(n-2)(n-1)} & \eta_{(n-1)(n-1)} & \eta_{n(n-1)} \\ . & . & . & . & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

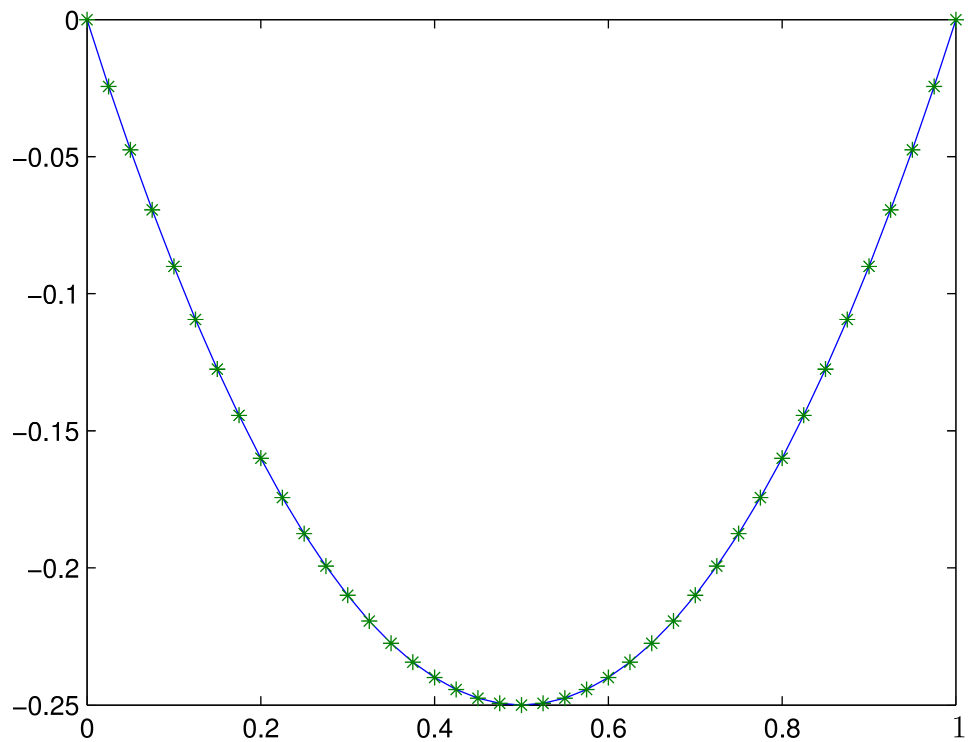
$$A = \begin{bmatrix} A_1 & . & A_2 \\ . & . & . \\ A_3 & . & A_4 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \int_h^{3h} 2\varphi_2 dx \\ \int_{2h}^{4h} 2\varphi_3 dx \\ . \\ . \\ . \\ \int_{(n-1)h}^{(n+1)h} 2\varphi_n dx \\ 0 \\ 0 \\ \int_h^{3h} -2\varphi_2 dx \\ \int_{2h}^{4h} -2\varphi_3 dx \\ . \\ . \\ . \\ \int_{(n-1)h}^{(n+1)h} -2\varphi_n dx \\ 0 \end{bmatrix}$$

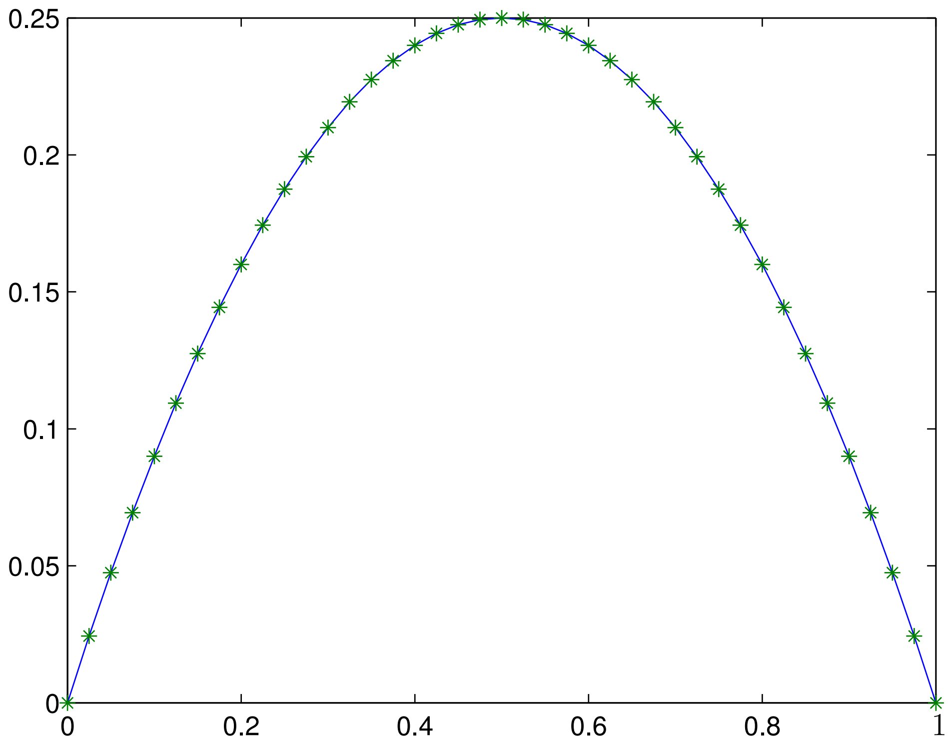
şeklinde bulunur. Dolayısıyla $AC = B$ denklem sisteminin çözümünden $C = [c_1, c_2, ..., c_n, k_1, k_2, ..., k_n]$ elde edilir. Elde edilen bu c_j ler $U(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j(x)$ te yerine konulursa $U(x)$, benzer şekilde k_p ler $V(x) = \sum_{p=1}^{n} k_p\varphi_p(x)$ te yerine konulursa $V(x)$ yaklaşık çözümleri elde edilir. Nümerik çözüm sonucu n in farklı değerleri için bulunan maksimum mutlak hatalar Tablo 3 te listelenmiştir.

Table 3: $u(x)$ ve $v(x)$ için bulunan nümerik sonuçlar.

Problem 3	n	$u(x)$ in max. mutlak hataları	$v(x)$ in max. mutlak hataları
B-Spline ($\alpha = 2$)	21	3.4139e-015	1.8457e-015
Spline ($\alpha = 2$)	21	4.1078e-015	6.2820e-016
Galerkin ($\alpha = 2$)	21	9.4368e-016	1.1102e-015
Galerkin ($\alpha = 1.9$)	21	3.4139e-012	1.8457e-11



Şekil 4.5: Problem 3 te $u(x)$ in grafiği ($n = 41$)



Şekil 4.6: Problem 3 te $v(x)$ in grafiği ($n = 41$)

BÖLÜM 5

SONUÇ

Tez çalışmasında $0 \leq \alpha \leq 2$ olmak üzere α. mertebeden kesirli türevli diferansiyel denklem sistemleri ve kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemler nümerik olarak çözüldü. Bu denklemlerin çözümünde non-polynomial spline ve Galerkin metodu kullanıldı. Bu yöntemlerin uygulanabilmesi için özellikle spline metodda M_i momentlerini elde etmekteki sorunu çözmek için Taylor açılımı kullanıldı. Bulunan nümerik sonuçlar ile analitik çözümler karşılaştırıldı. Analitik çözümler problemlerin doğal sayı türevli durumlarının çözümleri olmasına rağmen nümerik sonuçlar ile analitik çözümlerin farkından doğan mutlak hatalar, doğal sayı türevli problemlerin çözülmesiyle elde edilen mutlak hatalara çok yakın çıktı. Kesirli türevli difüzyon problemine spline metod uygulandıktan sonra metodun test edilmesi için nümerik dağılım analizi yapıldı. Bunun için problemin sürekli kısmı ile diskrit kısmı karşılaştırılıp grafiği çizildi. Çözümün tutarlı olması için eğrilerin birbirini en az bir noktada kesmesi gerekiyordu, eğriler iki noktada kesiştiğinden çözümün yakınsak ve tutarlı olduğu sonucuna varıldı. Çözülen tüm problemlerde elde edilen nümerik sonuçların analitik çözümlerine yakınsadığı görülmüştür. Bu metodların bu tür problemler üzerinde uygulanabilirliği ispatlanmış oldu. Bundan sonra yüksek mertebeden kesirli türevli diferansiyel denklemler için de bu yöntemlerin uygulanabilirliği araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Leibniz, G.W., Mathematische Schiften, *Georg Olms Verlasbuchhandlung, Hildesheim*, 1962.

[2] Bai, Z. & Lü, H., Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 311 (2005) 495-505.

[3] Chang, Y.K. & Nieto, J.J., Some new existence results for fractional differential inclusions with boundary conditions, *Math. Comput. Modelling* 49 (2009) 605-609.

[4] Deng, W., Numerical algorithm for the time fractional Fokker-Planck equation, *J. Comput. Phys.* 227 (2007) 1510-1522.

[5] Ibrahim, R.W. & Darus, M., Subordination and superordination for univalent solutions for fractional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 345 (2008) 871-879.

[6] Ladaci, S. & Loiseau, J.L. & Charef, A., Fractional order adaptive high-gain controllers for a class of linear systems, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 13 (2008) 707-714.

[7] Rida, S.Z. & El-Sherbiny, H.M. & Arafa, A.A.M., On the solution of the fractional nonlinear Schrödinger equation, *Phys. Lett. A* 372 (2008) 553-558.

[8] Yang, A. & Ge, W., Positive solutions for boundary value problems of N-Dimension nonlinear fractional differential system, *Bound. Value Probl.* (2008) 15 pages. Article ID 437453.

[9] Su, X. & Zhang, S., Solutions to boundary-value problems for nonlinear differential equations of fractional order, *Electron. J. Differential Equations* 26(2009) 115.

[10] Ahmad, B., & Nieto, J.J., Existence results for nonlinear boundary value problems of fractional integrodifferential equations with integral boundary conditions, *Bound. Value Probl.* (2009) 11 pages. Article ID 708576.

[11] Ahmad, B., & Nieto, J.J., Existence of solutions for nonlocal boundary value problems of higher-order nonlinear fractional differential equations, *Abstr. Appl. Anal.* (2009) 9 pages. Article ID 494720.

[12] Bai, C. & Fang, J., The existence of a positive solution for a singular coupled system of nonlinear fractional differential equations, *Appl. Math. Comput.* 150 (2004) 611-621.

[13] Chen, Y. & An, H., Numerical solutions of coupled Burgers equations with time and space fractional derivatives, *Appl. Math. Comput.* 200 (2008) 87-95.

[14] Gafiychuk, V. & Datsko, B., & Meleshko, V., Mathematical modeling of time fractional reaction-diffusion systems, *J. Comput. Appl. Math.* 220 (2008) 215-225.

[15] Gejji, V.D., Positive solutions of a system of non-autonomous fractional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 302 (2005) 56-64.

[16] Lazarevic, M.P., Finite time stability analysis of PD^{α} fractional control of robotic time-delay systems, *Mech. Res. Comm.* 33 (2006) 269-279.

[17] Su, X., Boundary value problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations, *Appl. Math. Lett.* 22 (2009) 64-69.

[18] Gafiychuk, V. & Datsko, B., & Meleshko, V. & Blackmore, D., Analysis of the solutions of coupled nonlinear fractional reaction-diffusion equations, *Chaos Solitons Fractals* 41 (2009) 1095-1104.

[19] Liouville, J., Memoire sur quelques question de geometrie et de mecanique et sur un nouveau genre de calcul pour resudre ces question, *J. Ecole Polytech.*, 1832, 13(21) 1-69.

[20] Riemann, B., Versuch einer allgemeinen auffasung der integration und differentiation, *Gesammelte Werke*, 1876, 62.

[21] Grünwald, A. K., Uber "begrenzte" derivationen und deren anwendung, *Z. Angew. Math. Phys.*, 1867, 12 441-480.

[22] Letnikov, A. V., Theory of differentiation with an arbitrary index, *Mat. Sb.*, 1868, 3 1-66.

[23] Caputo, M., Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, *Anna, di Geofis.*, 1966, 19 3-393.

[24] Caputo, M., Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, Part II, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 13(1967)529-539.

[25] Caputo, M., Elasticita e Dissipazione, Zanichelli, Bologna, 1969.

[26] El-Sayed, A.M.A., Fractional differential equations,*Kyungpook Math. J.*, vol. 28, no. 2, (1988) 119-122.

[27] El-Sayed, A.M.A., Fractional derivative and fractional differential equations, *Bull Fac. Sci.*, Alexandria Univ., 28 (1988) 18-22.

[28] El-Sayed, A.M.A., On the fractional differential equations, *Applied Math. and Comp.*, 49 (1992) 2-3.

[29] El-Sayed, A.M.A., Linear differential equations of fractional order, *Applied Math. and Comp.*, 55 (1993) 1-12.

[30] El-Sayed, A.M.A., Multivalued fractional differential equations, *Applied Math. and Comp.*, 80 (1994) 1-11.

[31] El-Sayed, A.M.A., Fractional order evolution equations, *J. of Frac. Calculus*, 7 (1995) 89-100.

[32] Erdelyi, A., Fractional integrals of generalized functions, *J. Austral. Math. Soc.*, 14(1),30-32 (1972)

[33] Riesz, M., L'integral de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy, *Acta Math.*, 81, 1-223 (1949)

[34] Hadamard, J., Essai sur letude des fonctions donnees par leur developpement de Taylor, *J. Math. Pures Appl.*, 8(Ser. 4), 101-186, (1892)

[35] Samko S.G. & Kilbas, A.A. & Marichev, O.I., Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, *Gordon and Beach Science Publishers*, Switzerland, 1993.

[36] Rashidinia, J. & Mohammadi R., Non-polynomial cubic spline methods for the solution of parabolic equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 85 (2008) 843-850.

[37] Butzer, P. L. & Westphal, U., An introduction to fractional calculus., *World Sci. Publishing*, 2000, 1-85.

[38] Kilbas, A.A. & Srivastava, Hari M.& Trujillo, Juan J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations, *Elsevier*, 2006.

[39] Miller, K. S. & Ross, B., An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, *Wiley and Sons*, New York, 1993.

[40] oss, B., The development of fractional calculus: 1695-1900, *Historia Math.*, 4, (1977) 75-89.

[41] Miller, K. S., Fractional differential equations, *J. Fract. Gale*, 3, (1993) 49-57.

[42] Miller, K. S., Derivatives of non-integer order, *Math. Mag.*, 68(2), (1995) 183-192.

[43] Oldham, K. B. & Spanier, J., The Fractional Calculus, *Academic Press*, New York, 1974.

[44] Oldham, K. B. & Spanier, J., Fractional calculus and its applications, *Bull. Inst. Politehn. Iasi. Sect. I*, 24(28)(3-4), (1978) 29-34.

[45] Podlubny, I., Fractional Differential Equations, *Academic Press*, San Diego, 1999.

[46] Ross, B.(Ed.), Fractional Calculus and Its Applications: Proceedings of the International Conference, New Haven, June 1974, *Springer Verlag*, New York, 1974.

[47] Podlubny I. &Dorcak L.&Kostial I., On fractional derivatives, fractional-order dynamic systems and PID-controllers, Decision and Control,1997, *Proceedings of the 36th IEEE conference on Volume 5*,10-12 Dec. 1997 ,4985-4990.

[48] Ray, S.S. & Chaudhuri, K.S. & Bera, R.K., Application of modified decomposition method for the analytical solution of space fractional diffusion equation, *Applied Mathematics and Computation*, 196, 1, 2008, 294-302.

[49] Ray, S.S., Analytical solution for the space fractional diffusion equation by two-step Adomian Decomposition Method,*Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 4, 2009, 1295-1306.

[50] Gorenflo, R. & Mainardi, F., Fractional calculus and stable probability distributions, *Arch. Mech.* 50(1998)377-388.

[51] Jocelyn, S. & Om Prakash, A.& Tenreiro Machado, J.A., Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering, *Springer* Netherlands, 2007.

[52] Changpin Li &Weihua Deng, Remarks on fractional derivatives, *Applied Mathematics and Computation*, 187 2(2007) 777-784.

[53] J. Lu, Variational iteration method for solving a nonlinear system of second-order boundary value problems, *Computers and Mathematics with Applications* 54 (2007) 1133-1138.

[54] Caglar, H. & Caglar, N., B-spline method for solving linear system of second-order boundary value problems, *Computers and Mathematics with Applications* (2008), doi:10.1016/j.camwa.2008.09.033.

[55] Saadatmandi, A. & Dehghan, M. & Eftekhari, A. , Application of He's homotopy perturbation method for non-linear system of second-order boundary value problems, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* (2008), doi:10.1016/j.nonrwa.2008.02.032.

[56] Bataineh, A.S. & Noorani, M.S.M. & Hashim, I., Modified homotopy analysis method for solving systems of second-order BVPs, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 14 (2009) 430-442.

[57] Siraj-ul-Islam & Noor, M.A. & Tirmizi, I.A. & Khan, M.A., Quadratic non-polynomial spline approach to the solution of a system of second-order boundary-value problems, *Applied Mathematics and Computation* 179 (2006) 153-160.

[58] Rashidinia, J. & Jalilian, R. & Kazemi, V., Spline methods for the solutions of hyperbolic equations, *Applied Mathematics and Computation* 190 (2007) 882-886.

[59] J. Rashidinia & R. Mohammadi & R. Jalilian, The numerical solution of non-linear singular boundary value problems arising in physiology, *Applied Mathematics and Computation* 185 (2007) 360-367.

[60] J. Rashidinia & R. Mohammadi & R. Jalilian, Spline solution of non-linear singular boundary value problems, *International Journal of Computer Mathematics* 85 (2008) 39-52.

[61] Caglar, H. & Caglar, N., Solution of fifth order boundary value problems by using local polynomial regression, *Appl. Math. Comput.*, 2007; vol.186:952-956.

[62] Caglar, H. & Caglar, N., Local polynomial regression method for the solution of fractional diffusion equation

[63] Caglar, H. & Caglar, N., Numerical solution of integral equations by using local polynomial regression, *Journal Of Comp. Analysis and Appl.* , 2008; vol.10, No.2, 187-195.

[64] Caglar, H. & Caglar, N. & Akkoyunlu, C. , Non-polynomial spline method of a non-linear system of second-order boundary value problems, *Journal of Computational Analysis and Applications*, (2010) Vol.12, No.2, 544-559.

[65] Cui, M., Compact finite difference method for the fractional diffusion equation, *Journal of Computational Physics*, 228, 2009, 7792-7804.

[66] Wangb, H. & Wangb, K. & Sircar, T. , A direct O(Nlog2N) finite difference method for fractional diffusion equations, *Journal of Computational Physics*, 2010

[67] Tadjeran, C. & Meerschaert, M.M. & Scheffler, H.P., A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation, *Journal of Computational Physics*, 213, 2006, 205-213.

[68] Schober, C.M. & Wlodarczyk, T.H., Dispersive properties of multisympletictic integraltors, *J. Comput. Phys.*, 227:5090-5104, 2008.

[69] Schober, C.M. & Wlodarczyk, T.H., Dispersion, group velocity and multisymplectic discretizations, *Math. Comput. Simulation*, 80:741-751, 2009.

[70] Thomas, J.W., Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, *Springer* 1995.

[71] Trefethen, L.N., Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations, *Cornell University*, 1996.

[72] Wyss, W., The fractional diffusion equation, *J. Math. Phys.*, 27(11), (1986) 2782-2785.

[73] Vazquez, L., Fractional diffusion equations with internal degrees of freedom, *J. Comp. Math.*, 21(4), (2003) 491-494.

[74] Tu, S.-T. & Chyan, D.-K. & Srivastava, H. M., Some families of ordinary and partial fractional differintegral equations, *Integral Transform. Spec. Fund.*, 11, (2001) 291-302.

[75] Tu, S.-T. & Lin, S.-D. & Srivastava, H. M., Solutions of a class of ordinary and partial differential equations via fractional calculus, *J. Fract. Calc*, 18, (2000) 103-110.

[76] Stankovic, B., Differential equations with fractional derivatives and nonconstant coefficients, *Integral Transform. Spec. Fund.*, 6(13), (2002) 489-496.

[77] Stankovic, B., A system of partial differential equations with fractional derivatives, *Math. Vesnik*, 3-4(54), (2002) 187-194.

[78] Srivastava, H. M., Fractional calculus and its applications, *Cubo Math. Ed.*, (51), (2003) 33-48.

[79] Schneider, W. R. & Wyss, W., Fractional diffusion and wave equation, *J. Math. Phys.*, 30(1), (1989) 134-144.

[80] Nishimoto, K., Fractional Calculus: Integration and Differentiation of Arbitrary Order, Vols. I-V, *Descartes Press, Koriyama*, 1984, 1989, 1991, and 1996.

[81] Momani, S. & Al-Khaled, K., Numerical solutions for systems of fractional differential equations by the decomposition method, *Appl. Math. Comp.*, 16(23), (2005) 1351-1365.

[82] Matignon, D. & Montseny, G., Fractional Differential Systems: Models, Methods, and Applications, *vol. 5 of ESAIM Proceedings, SMAI, Paris*, 1998.

[83] Kiryakova, V. S., Generalized Fractional Calculus and Applications, *Pitman Res. Notes in Math., Wiley and Sons*, New York, 301 (1994).

[84] McBride, A. C., Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions, *Research Notes in Math., Pitman*, London, 31 (1979).

[85] Butzer, P. L., Kilbas, A. A., and Trujillo, J. J., Compositions of Hadamard- type fractional integration operators and the semigroup property, *J. Math. Anal. Appl.*, 26(92), (2002) 387-400.

[86] Butzer, P. L., Kilbas, A. A., and Trujillo, J. J., Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals, *J. Math. Anal. Appl.* 26(91), (2002) 1-27.

[87] Butzer, P. L., Kilbas, A. A., and Trujillo, J. J., Mellin transform and integration by parts for Hadamard-type fractional integrals, *J. Math. Anal. Appl.* 270(1), (2002) 1-15.

[88] Kilbas, A. A., Hadamard-type fractional calculus, *J. Korean Math. Soc.*, 38(6), (2001) 1191-1204.

[89] Kilbas, A. A. and Titjura, A. A., Hadamard-type fractional integrals and derivatives, *Trudy Inst. Mat. Minsk*, 11, (2002) 79-87.

[90] Bazhlekova, E.G., Duhamel-type representation of the solutions of nonlocal boundary value problems for the fractional diffusion-wave equation, *Proc. of the 2nd Int. Workshop, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia*, 1998, 32-40.

[91] Chechkin, A.V. & Gorenflo, R. & Sokolov, I.M., Retarding subdiffusion and accelerating superdiffusion governed by distributed order fractional diffusion equations, *Phys. Rev. E* 66 (2002) 1-7.

[92] Chechkin, A.V. & Gorenflo, R. & Sokolov, I.M. & Gonchar, V.Yu., Distributed order time fractional diffusion equation, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 6 (2003) 259-279.

[93] Chechkin, A.V. & Gorenzo, R. & Sokolov, I.M., Fractional diffusion in inhomogeneous media, *J. Phys. A* 38 (2005) 679-684.

[94] J. Cheng, J. Nakagawa, M. Yamamoto, T. Yamazaki, Uniqueness in an inverse problem for a one-dimensional fractional diffusion equation, *Inverse Problems* 25 (2009) 16 .

[95] C.F.M. Coimbra, Mechanics with variable-order differential operators, *Ann. Phys.* 12 (2003) 692-703.

[96] V. Daftardar-Gejji & S. Bhalekar, Boundary value problems for multi-term fractional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 345 (2008) 754-765.

[97] J.L.A. Dubbeldam & A. Milchev & V.G. Rostiashvili & T.A. Vilgis, Polymer translocation through a nanopore: A showcase of anomalous diffusion, *Phys. Rev. E* 76 (2007) 010801 (R).

[98] S.D. Eidelman & A.N. Kochubei, Cauchy problem for fractional diffusion equations, *J. Differential Equations* 199 (2004) 211-255.

[99] A. Freed & K. Diethelm & Yu. Luchko, Fractional-Order Viscoelasticity (FOV): Constitutive Development Using the Fractional Calculus, *NASA's Glenn Research Center, Ohio,* 2002.

[100] R. Gorenflo & Yu. Luchko & S. Umarov, On the Cauchy and multi-point problems for partial pseudo-differential equations of fractional order, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 3 (2000) 249-277.

[101] R. Gorenflo & F. Mainardi, Random walk models for space-fractional diffusion processes, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 1 (1998) 167-191.

[102] R. Hilfer (Ed.), Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, 2000.

[103] A.N. Kochubei, Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion, *J. Math. Anal. Appl.* 340 (2008) 252-281.

[104] A.N. Kochubei, A Cauchy problem for evolution equations of fractional order, *Differ. Equ.* 25 (1989) 967-974.

[105] C.F. Lorenzo & T.T. Hartley, Variable order and distributed order fractional operators, *Nonlinear Dynam.* 29 (2002) 57-98.

[106] Yu. Luchko & R. Gorenflo, An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives, *Acta Math. Vietnam.* 24 (1999) 207-233.

[107] Yu. Luchko, Operational method in fractional calculus, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2 (1999) 463-489.

[108] Yu. Luchko, Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation, *J. Math. Anal. Appl.* 351 (2009) 218-223.

[109] Yu. Luchko, Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation, *Comput. Math. Appl.* 59 (2010) 1766-1772.

[110] Yu. Luchko, Boundary value problems for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 12 (2009) 409-422.

[111] F. Mainardi, Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena, *Chaos Solitons Fractals* 7 (1996) 1461-1477.

[112] F. Mainardi & M. Tomirotti, Seismic pulse propagation with constant Q and stable probability distributions, *Ann. Geofis.* 40 (1997) 1311-1328.

[113] F. Mainardi & Yu. Luchko & G. Pagnini, The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 4 (2001) 153-192.

[114] Meerschaert, M.M. & Scheffler, H.P., Stochastic model for ultraslow diffusion, *Stochastic Process. Appl.* 116 (2006) 1215-1235.

[115] Meerschaert, M.M. & Nane, E. & Vellaisamy, P., Fractional Cauchy problems in bounded domains, *Ann. Probab.* 37 (2009) 979-1007.

[116] Metzler, R. & Klafter, J., The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, *Phys. Rep.* 339 (2000) 1-77.

[117] Metzler, R. & Klafter, J., Boundary value problems for fractional diffusion equations, *Phys. A* 278 (2000) 107-125.

[118] Naber, M., Distributed order fractional subdiffusion, *Fractals* 12 (2004) 23-32.

[119] Pedro, H.T.C. & Kobayashi, M.H. & Pereira, J.M.C. & Coimbra, C.F.M., Variable order modelling of diffusive-convective effects on the oscillatory flow past a sphere, *J. Vib. Control* 14 (2008) 1659-1672.

[120] Pskhu, A.V., Partial Differential Equations of Fractional Order, Nauka, Moscow, 2005.

[121] Schneider, W.R. & Wyss, W., Fractional diffusion and wave equations, *J. Math. Phys.* 30 (1989) 134-144.

[122] Sokolov, I.M. & Chechkin, A.V. & Klafter, J., Distributed-order fractional kinetics, *Acta Phys. Polon. B* 35 (2004) 1323-1341.

[123] Uchaikin, V.V., Method of Fractional Derivatives, Artishok, Ul'janovsk, 2008.

[124] Umarov, S. & Gorenzo, R., Cauchy and nonlocal multi-point problems for distributed order pseudo-differential equations, *Z. Anal. Anwend.* 24 (2005) 449-466.

[125] Vladimirov, V.S., Equations of Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1971.

[126] Voroshilov, A.A. & Kilbas, A.A., The Cauchy problem for the diffusion-wave equation with the Caputo partial derivative, *Differ. Equ.* 42 (2006) 638-649.

[127] Zacher, R., Boundedness of weak solutions to evolutionary partial integro-differential equations with discontinuous coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* 348 (2008) 137-149.

[128] Atkinson, K.E., An introduction to Numercal Analysis, *John Wiley & Sons. Inc., USA* (1988).

[129] Marchuk, G.I., Methods of Numerical Mathematics, second ed., *Springer- Verlag, New York*, (1982).

[130] Ahlberg, J.H. & Nilson, E.N. & Walsh, J.L., The Theory of Splines and Their Applications, *Academic Press, New York*, 1967.

[131] Greville, T.N.E., Introduction to spline functions, in: Theory and Application of Spline Functions, *Academic Press, New York*, 1969.

[132] Micula, G. & Micula, S., Hand Book of Splines, *Kluwer Academic Publishers*, 1999.

[133] Prenter, P.M., Splines and Variational Methods, *John Wiley & Sons INC.*, 1975.

[134] De Boor, C., The method of projections as applied to the numerical solution of two point boundary value problems using cubic splines, Ph.D. Thesis, University of Michigan, 1966.

[135] De Boor, C., On uniform approximations by splines, *J. Approx. Theory* 1 (1968) 219-235.

[136] De Boor, C., A practical guide to splines, *Springer-Verlag, New York* (1978).

[137] Loscalzo, F.R. & Talbot, T.D., Spline function approximations for solution of ordinary differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967) 438-442.

[138] Loscalzo, F.R. & Talbot, T.D., Spline function approximations for solution of ordinary differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 4 (1967) 433-445.

[139] Bickley, W.G., Piecewise cubic interpolation and two point boundary value problems, *Comput. J.* 11 (1968) 206-208.

[140] Fyfe, D.J., The use of cubic splines in the solution of two point boundary- value problems, *Comput. J.* 12 (1969) 188-192.

[141] Fyfe, D.J., Linear dependence relations connecting equal interval Nth degree splines and their derivatives, *J. Inst. Math. Appl.* 7 (1971) 398-406.

[142] Albasiny, E.L. & Hoskins, W.D. Cubic spline solutions to two point boundary value problems, *Comput. J.* 12 (1969) 151-153.

[143] Sakai, M., Piecewise cubic interpolation and two point boundary value problems, *Publ. RIMS.*, Kyoto Univ. 7 (1972) 345-362.

[144] Sakai, M., Numerical solution of boundary-value problems for second order functional differential equations by the use of cubic splines, *Mem. Fac. Sci.*, Kyushu Univ. 29 (1975) 113-122.

[145] Sakai, M., Two sided quintic spline approximations for two point boundary-value problems, *Rep. Fac. Sci.*, Kagoshima Univ., (Math., Phys., Chem.) (10) (1977) 1-17.

[146] Russell, R.D. & Shampine, L.F., A collocation method for boundary value problems, *Numer. Math.* 19 (1972) 1-28.

[147] Micula, G., Approximation solution of the differential equation with spline functions, *Math. Comput.* 27 (1973) 807-816.

[148] Rubin, S.G. & Khosla, P.K., Higher order numerical solution using cubic splines, *AIAA J.* 14 (1976) 851-858.

[149] Rubin, S.G. & Graves Jr., R.A., Viscous flow solutions with a cubic spline approximation, *Computers and Fluids* 3 (1975) 1-36.

[150] Daniel, J.W. & Swartz, B.K., Extrapolated collocation for two point boundary value problems using cubic splines, *J. Inst. Math. Appl.* 16 (1975) 161-174.

[151] Archer, An O(h4) cubic spline collocation method for quasilinear parabolic equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 14 (1977) 620-637.

[152] Patricio, F., A numerical method for solving initial value problems with spline functions, *BIT* 19 (1979) 489-494.

[153] Patricio, F., Cubic spline functions and initial value problems, *BIT* 18 (1978) 342-347.

[154] Tewarson, R.P., On the use of splines for the numerical solution of non linear two point boundary value problems, *BIT* 20 (1980) 223-232.

[155] Tewarson, R.P. & Zhang, Y., Solution of two point boundary value problems using splines, *Int.J. Numer. Method Eng.* 23 (1986) 707-710.

[156] Usmani, R.A., Spline solutions for nonlinear two point boundary value problems, *Intern. J.Math. and Math. Sci.* 3 (1980) 151-167.

[157] Usmani, R.A. & Sakai, M., A connection between quartic spline solution and Numerov solution of a boundary value problem, *Int. J. Comput. Math.* 26 (1989) 263-273.

[158] Usmani, R.A. & Warsi, S.A., Quintic spline solution of boundary value problems, *Comput. Math. Appl.* 6 (1980) 197-203.

[159] Jain, M.K. & Aziz, T., Numerical solution of stiff and convection-diffusion equations using adaptive spline function approximation, *Appl. Math. Model.* 7 (1983) 57-63.

[160] Jain, M.K. & Aziz, T., Spline function approximation for differential equations, *Comput. Method Appl. Mech. Eng.* 26 (1981) 129-143.

[161] Jain, M.K. & Aziz, T., Cubic spline solution of two-point boundary-value problems with significant first derivatives, *Comput. Method Appl. Mech. Eng.* 39 (1983) 83-91.

[162] Surla, K. & Herceg, D. & Cvetkovic, L., A family of exponential spline difference schemes, *Univ. u.Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod. Mat. Fak. Ser. Mat.* 19 (2) (1991) 12-23.

[163] Surla, K. & Stojanovic, M. Solving singularly perturbed boundary value problems by spline in tension, *J. Comput. Appl. Math.* 24 (1988) 355-363.

[164] Surla, K. & Uzelec, Z. Some uniformly convergent spline difference schemes for singularly perturbed boundary-value problems, *IMA J. Numer. Anal.* 10 (1990) 209-222.

[165] Surla, K. & Vukoslavcevic, V., A spline difference scheme for boundary -value problems with a small parameter, *Univ. u. Novom Sadu, Zb. Rad. Zb. Rad. Prirod. Mat. Fak. Ser. Mat.* 25 (2) (1995) 159-166.

[166] Iyengar, S.R.K. & Jain, P., Spline finite difference methods for two-point boundary-value problems, *Numer. Math.* 50 (1987) 363-387.

[167] Chawla, M. & Subramanian, R., A new fourth order cubic spline method for non-linear two point boundary value problems, *Int. J. Comput. Math.* 22 (1987) 321-341.

[168] Chawla, M. & Subramanian, R., A fourth order spline method for singular two point boundary value problems, *J. Comput. Appl. Math.* 21 (1988) 189-202.

[169] Chawla, M. & Subramanian, R., High accuracy quintic spline solution of fourth order two point boundary value problems, *Int. J. Comput. Math.* 31 (1989) 87-94.

[170] Irodotou-Ellina, M. & Houstis, E.N., An O(h6) quintic spline collocation method for singular two-point boundary-value problems, *BIT* 28 (1988) 288-301.

[171] Fairweather, G. & Meade, D., A survey of spline collocation methods for the numerical solution of differential equations, in: Mathematics for Large Scale Computing, in: J.C. Diaz (Ed.),*Lecture Notes in Pure and Applied Maths* 120, Marcel Dekker, New York, 1989, 297-341.

[172] Momani, S. & Odibat, Z., Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order, *Phys. Lett. A* 365 (5-6) (2007) 345-350.

[173] Momani, S. & Odibat, Z., Modified homotopy perturbation method: application to quadratic Riccati differential equation of fractional order, *Chaos Soliton. Fract.* 36 (1) (2008) 167-174.

[174] Momani, S. & Al-Khaled, Numerical solutions for systems of fractional differential equations by the decomposition method, *Appl. Math. Comput.* 162 (3) (2005) 1351-1365.

[175] Jafari, H. & Gejji, V.D., Solving a system of nonlinear fractional differential equations using Adomain decomposition, *Appl. Math. Comput.* 196 (2006) 644-651.

[176] Lensic, D., The decomposition method for initial value problems, *Appl. Math. Comput.* 181 (2006) 206-213.

[177] Daftardar-Gejji, V. & Jafari, H., Adomian decomposition: a tool for solving a system of fractional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 301 (2) (2005) 508-518.

[178] Momani, S. & Odibat, Z., Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 1 (7) (2006) 15-27.

[179] Daftardar-Gejji, V. & Jafari, H., An iterative method for solving nonlinear functional equations, *J. Math. Anal. Appl.* 316 (2006) 753-763.

[180] Yulita Mollig, R. & Noorani, M.S.M. & Hashim I., Variational iteration method for fractional heat- and wave-like equations, *Nonlinear Analysis: Real World Appl.* 10 (2009) 1854-1869.

[181] Liao, S.J., The Proposed Homotopy Analysis Technique for the Solution of Nonlinear Problems, Ph.D. Thesis, Shanghai Jiao Tong University, 1992.

[182] Liao, S.J., On the homotopy analysis method for nonlinear problems, *Appl. Math. Comput.* 147 (2004) 499-513.

[183] Liao, S.J., Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method, *Appl. Math. Comput.* 169 (2005) 1186-1194.

[184] Song, L. & Zhang, H. Application of homotopy analysis method to fractional KdV-Burgers-Kuramoto equation, *Phys. Lett. A* 367 (1-2) (2007) 88-94.

[185] Zurigat, M. & Momani, S. & Odibat, Z. & Alawneh, A., The homotopy analysis method for handling systems of fractional differential equations, *Appl. Math. Modelling* 34 (2010) 24-35.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Fatih UÇAR, 1 Ocak 1982 de Erzincan'da doğmuştur. Lise eğitimini Erzincan Nevzat Ayaz Fen Lisesi'nde tamamladıktan sonra 2001 yılında İstanbul Kültür Üniversitesi Matematik-Bilgisayar Bölümü'ne kaydolmuştur. 2003 yılında İstanbul Kültür Üniversitesi İşletme Bölümü'ne (çift anadan programı) kaydolmuştur ve 2005 te her iki bölümden de mezun olmuştur. Mezuniyetinin ardından İstanbul Kültür Üniversitesi Matematik-bilgisayar Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başlamıştır, aynı zamanda yüksek lisans öğrenimine de başlamıştır ve 2007 de mezun olup aynı üniversitede Doktora öğrenimine başlamıştır.