T.C.

İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LOCAL POLYNOMIAL REGRESSION METHODU İLE ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ramazan KAYRANCIOĞLU

1109041002

MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI

Danışman

Yrd. Doç. Dr. S.Hikmet ÇAĞLAR

HAZİRAN 2013

ÖNSÖZ

2011-2013 yılları arasında öğrencisi olduğum ve danışmanlığımı yürüten, lisansüstü derslerinde öğrettiği bilgileriyle, problemlerin çözümleri karşısındaki kıvrak zekasıyla ve tezimin yazımında yaptığı katkılarından dolayı örnek bir bilimadamının nasıl olması gerektiğini her fırsatta gösteren Sayın S.Hikmet ÇAĞLAR'a; lisansüstü derslerinde öğretikleri bilgiler ve ders dışındaki katkılarından dolayı Sayın Levent ÇUHACI'ya ve Sayın R. Tunç MISIRLIOĞLU'na; sonsuz destek ve güvenlerinden ötürü aile fertlerim Sayın Hüseyin KAYRANCIOĞLU, Sayın Zülfiye KAYRANCIOĞLU, Sayın Canan KAYRANCIOĞLU ve Sayın Burak KAYRANCIOĞLU'na teşekkürlerimi sunuyorum.

Haziran 2013 — Ramazan KAYRANCIOĞLU

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

TABLO LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

K	:	Kernel fonksiyonu
h	:	Kernel fonksiyonunun bant genişliği
u	:	Kernel fonksiyonunun $-1 \leq u \leq 1$ koşullu parametresi
x_i,	:	i=1,...,n aralığında gözlem değeri
y_i	:	i=1,...,n aralığında gözlem değeri
W	:	Ağırlık matrisi
w_{ij}	:	Ağırlık matrisinin elemanları
f	:	Regresyon fonksiyonu
$y(t)$	:	t parametreli regresyon fonksiyonu
β_k	:	k=0,...,p olmak üzere regresyon fonksiyonunun katsayıları
∂	:	Türev operatörü
m	:	X matrisinin satır sayısı
n	:	X matrisinin sütün sayısı
nnn	:	h nin seçimi için adım sayısı
X	:	Çözüm matrisi
Y	:	Değer matrisi
T	:	Zaman aralığının sınır değeri
k	:	Zaman aralığının parça uzunluğu
err	:	Hata değeri
Δt	:	k parça uzunluğu

Üniversitesi	**:**	**İstanbul Kültür Üniversitesi**
Enstitüsü	**:**	**Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı	**:**	**Matematik-Bilgisayar**
Programı	**:**	**Matematik-Bilgisayar**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. S.Hikmet ÇAĞLAR**
Tez Türü ve Tarihi	**:**	**Yüksek Lisans - HAZİRAN 2013**

ÖZET

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LOCAL POLYNOMIAL REGRESSION METHODU İLE ÇÖZÜMLERİ

Ramazan KAYRANCIOĞLU

Kernel fonksiyonları, sınırlı, sürekli ve integrali 1'e eşit olan simetrik bir fonksiyon olup, ağırlıkları hesaplamak için kullanılır. Kernel fonksiyonlarının seçimi ise üzerinde en çok araştırma yapılan alanlardan birisidir. Bu tezde öncelikle kernel fonksiyonlarıyla diferansiyel denklemlerin çözümleri incelenmiş ve sonrasında ise bu tip fonksiyonların özel bir parçası olan bant uzunluklarının seçimi üzerinde kısaca durulmuştur. Ortaya konan problemin çözümünde kullanılacak araçlar tanıtılmıştır. Kernel fonksiyonları ve bant uzunluklarının beraber seçimi ile diferansiyel denklemlerin çözümlerindeki hataların en aza indirilebilmesi hedeflenmiştir.

Anahtar Kelimeler	**:**	**Kernel fonksiyonları,**
		Local polynomial regression,
		Sınır değer problemleri,
		Convection-diffusion equation.

University	:	İstanbul Kültür University
Institute	:	Institute of Science
Science Programme	:	Mathematics and Computer
Programme	:	Mathematics and Computer
Supervisor	:	Assist. Prof. Dr. S.Hikmet ÇAĞLAR
Degree Awarded and Date	:	M.Sc. - JUNE 2013

SUMMARY

SOLUTION OF PARTIAL DIFFERANTIAL EQUATIONS WITH LOCAL POLYNOMIAL REGRESSION METHOD

Ramazan KAYRANCIOĞLU

Kernel functions are piecewise continuous, bounded, symmetric around zero, concave at zero, real valued, and for convenience often integrate to one. On the other hand, the choice of Kernel functions is one of the largest area in many researches. In this thesis, solutions of differential equations via Kernel functions have been studied first and subsequently, choice criteria of band longevity which is a special part of Kernel functions, were mentioned briefly. The tools that have been used in the solution of the problem undertaken were interpreted. The goal of this study is to minimize errors in the solution of differential equations via choice of Kernel functions together with band longevity.

Keywords : Kernel functions
Local polynomial regression
Boundary value problems
Convection-diffusion equation.

Bölüm 1

GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı son zamanlarda kullanılmaya başlanılan nonparametrik regresyon yöntemlerinden biri olan LPR(local polynomial regression) yöntemiyle diferansiyel denklemlerin çözümlerine ulaşılabilmektir. Bu çalışmayı yaparken çeşitli diferansiyel denklemlerin çözümlerini sırasıyla inceledik. Diferansiyel denklemleri çözebilmek için Kernel adı verilen farklı türlerdeki fonksiyonlardan yararlandık. Elde ettiğimiz bu çözümler Kernel fonksiyonlarına, bu fonksiyonun bir parametresi olan bant genişliğine(düzeltme parametresine) ve diferansiyel denklemi çözerken kullandığımız çözüm matrisinin satır ve sütun sayısına bağlı olarak değişmektedir. Çözümlerdeki hataları en aza indirebilmek için Kernel fonksiyonunun türünü, bant genişliğini ve çözüm matrisinin satır, sütun sayılarını sırasıyla sabit tutarak teker teker değişimlerini inceledik. Şimdi sırasıyla hangi bölümlerde neler yapıldığını kısaca özetleyelim:

2.Bölümde; Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tanımı, hangi alanlarda kullanıldığı, çözümlerine ulaşılabilmek için hangi yöntemlerden faydalanıldığı incelenecek,

3.Bölümde; Kernel fonksiyonlarının tanımınına, türlerine ve yapısına bakılacak,

4.Bölümde; LPR yönteminin tanımı ve nasıl uygulandığından bahsedilecek,

5.Bölümde; Örnekler incelenecek. Yöntemin örneklere uygulanması sonucu oluşan hata tabloları verilecek,

6.Bölümde; Sonuç bölümünde hata tablolarındaki parametrelere bağlı değerlendirmelerden bahsedilecek.

Bölüm 2

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Kısmi türevli diferansiyel denklemler; fiziksel, kimyasal ve biyolojik olguların birçok matematiksel modellerinin temelini oluşturur ve son zamanlarda ekonomide, finansal tahminlerde, resim işlemede ve diğer alanlarda kullanımı hızla yayılmaktadır (Kısmi türevli diferansiyel denklemler matematiksel formüllerde kullanılmaktadır böylece fiziksel ve bazı değerler içeren fonksiyonlu problemlerin çözümünde yardımcı olur). Örneğin; ses ve ısı artışında, sıvı akışında, esneklikte, elektrostatikte, elektrodinamikte, vb. alanlarda kullanılmaktadır. Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin büyük çoğunluğu analitiksel olarak çözülemez. Bu nedenle kısmi türevli diferansiyel denklem modellerinin incelenebilmesi için sayısal çözüm tahminlerine ihtiyaç duyarız.

Bölüm 3

KERNEL FONKSİYONLARI

x_i, y_i $(i = 1, \ldots, n)$ olmak üzere nonparametrik regresyonun temel düşüncesi ham verilerin ağırlıklı ortalamasını kullanarak f fonksiyonunu tahmin etmektir. Söz konusu ağırlıklar x_i noktalarında oluşan X-uzayındaki uzaklıkların azalan bir fonksiyonudur. x_i noktasındaki kestirim için y_i gözlemiyle ilişkili bu tür bir ağırlıklandırma şeması ([4]) ve ([6]) tarafından önerilmiştir:

3.1 Temel Tanımlar

$$w_{ij} = K\left(\frac{x_i - y_j}{h}\right) / \sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x_i - y_j}{h}\right) = \frac{K(u)}{\sum K(u)}$$

Burada n gözlemlerin sayısı, K seçilen ve Kernel olarak bilinen, sınırlı, sürekli ve integrali 1'e eşit olan simetrik bir fonksiyon olup, ağırlıkları hesaplamak için kullanılır ve h değeri ise bant genişliği veya düzeltme parametresidir. Uygulamada kullanılan farklı tipte Kernel fonksiyonları vardır. Ancak Kernel fonksiyonunun seçimi bant genişliğinin seçiminden daha az bir öneme sahiptir. Uygulamada kullanılan bazı Kernel fonksiyonları aşağıda verilmiştir. Bu fonksiyonlar negatif olmayan değerler alırlar ve ikinci mertebeden türevlenebilirdir.([5])

Uygulamada kullanılan bazı Kernel fonksiyonları:

$|u| \leq 1$ olmak üzere;

Uniform	:	**K(u)=**$\frac{1}{2}$
Triangular	:	**K(u)=(1-**$\|u\|$)
Epanechnikov	:	**K(u)=**$\frac{3}{4}(1-\|u\|^2)$
Quartic	:	**K(u)=**$\frac{15}{16}(1-\|u\|^2)^2$
Triweight	:	**K(u)=**$\frac{35}{32}(1-\|u\|^2)^3$
Tricube	:	**K(u)=**$\frac{70}{81}(1-\|u\|^3)^3$
Gaussian	:	**K(u)=**$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}u^2}$
Cosine	:	**K(u)=**$\frac{\pi}{4}cos(\frac{\pi}{2}u)$

Kernel fonksiyonları regresyon fonksiyonunun tahmininde, olasılık yoğunluk fonksiyonlarının tahminlerinde, model kontrolünde ve spektral yoğunluk tahmininde kullanılmaktadır.([14])

3.2 Kernel Fonksiyonlarının Temel Özellikleri

Kernel fonksiyonu

- K(x)≥0
- K(x)=K(-x)
- $\int_{-\infty}^{+\infty} K^2(x)\mathrm{d}x = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x)\mathrm{d}x = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x)\mathrm{d}x < \infty$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} xK(x)\mathrm{d}x = 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2K(x)\mathrm{d}x \neq 0$

özelliklerini sağlamalıdır.([15])

Bölüm 4

LOCAL POLYNOMIAL REGRESSION

4.1 Sınır Değer Problemlerinin LPR Çözümleri

Sınır değer problemleri ([7][8][9][10][11]) deki bazı yazarlar tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada LPR beşinci mertebeden sınır değer problemlerinin çözümünde geliştirilmiş bir teknik olarak kullanıldı. Alttaki formda integrasyon aralığında tek bir çözüm olduğu kabul edilmektedir.([12])

$$y^{(5)} + y(x) = f(x), \qquad x \in [a, b], \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} &y(a) = \alpha_0, && y(b) = \alpha_1 \\ &y'(a) = \gamma_0, && y'(b) = \gamma_1 \\ &y''(a) = \delta_0, && \end{aligned}$$

$\alpha_0, \alpha_1, \gamma_0, \gamma_1, \delta_0$ sonlu reel sabitlerdir ve f(x) fonksiyonu [a,b] aralığında süreklidir. LPR sınır değer problemlerinin çözümleri tahmin etmede kullanılır. Bu yöntemin istenilen doğru sonuca ulaştırdığını gösterelim. Bu yöntemdeki temel fikir ([13]) te görülmektedir. Aşağıda LPR nin matematiksel formülizasyonu verilmiştir.

Kabul edelimki y(t) nin t_0 noktasında (p+1) inci türevi var olsun. y(t) bilinmeyen regresyon fonksiyonunu t_0 noktasında p.dereceden bir polinom yardımıyla tahmin etmeye çalışırız. Teorik olarak y(t) yi t_0 ın bir komşuluğunda Taylor açılımı ile tahmin edebiliriz:

$$y(t) \approx \sum_{k=0}^{p} \beta_k (t-t_0)^k, \tag{4.2}$$

$$\beta_k = \frac{t^{(k)}(t_0)}{k!} \tag{4.3}$$

Bu polinom t_0 da bilinmeyen fonksiyonun tahmininde kullanılır. Bu polinom ağırlıklı en küçük kareler probleminin minimize edilmesiyle sağlanır.

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ Y_i - \sum_{k=0}^{p} \beta_k (t_i - t_0)^k \right\}^2 K(\frac{t_i - t_0}{h}) \tag{4.4}$$

β_k, k=0,1,...,p minimize probleminin çözümü olsun. (4.3) den j!β_j nin $y^{(j)}(x_0)$ nin (j=0,1,...,p) türevlerinin bir tahmin edicisi olduğu açıkça görülmektedir. Bu kanı bütün regresyon fonksiyonları ve türevleri için yerel olarak sağlanır ve bu yöntem tahmini ilgilendiren tüm noktalarda tekrar ettirilmelidir. Yerel olarak ağırlıklı en küçük kareler regresyon probleminin β_k, k=0,1,...,p çözümününün analitiksel ifadesini görelim. X, nx(p+1)boyutlu matris

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & (t_1 - t_0) & \dots & (t_1 - t_0)^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (t_n - t_0) & \dots & (t_n - t_0)^p \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

$Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)^T$ ve $\beta = (\beta_0, \beta_1, ...\beta_p)^T$ vektörleri olsun. Son olarak W nxn boyutundaki ağırlıklı köşegen matrisi $W = diag\{K_h(t_i - t_0)\}$dir. Elde edilen sonuç

$$\beta = (X^T W X)^{-1} X^T W Y \tag{4.6}$$

LPR yöntemi (4.1) deki denklemin çözümünü özetler. (4.2) deki eşitliğin (4.1) deki verilen denklemin tahmini sonucu olduğunu gösterelim.

$$y(t) = \sum_{j=0}^{p} \beta_j (t - t_0)^j \tag{4.7}$$

$t_1 = a, t_2, \ldots, t_n = b$ ve (4.7)deki tahmini çözüm sınır değer problemlerinin $t = t_i$ noktalarındaki değerlerini sağlar.

(4.7) numaralı eşitliği (4.1) numaralı denklemde yerine yazarsak

$$\Big(\sum_{j=0}^{p} \beta_j (t_i - t_0)^j\Big)^{(5)} + \Big(\sum_{j=0}^{p} \beta_j (t_i - t_0)^j\Big) = f(t) \tag{4.8}$$

$a \le t \le b$ elde edilir. j ye göre türev alıp ifadeler düzenlenirse (4.9) elde edilir.

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{i=1,} & a_{1,j} = \beta_j (t_1 - t_0)^j & \text{j=0...m,} & y(1) = y(t_1) \\
\text{i=2,} & a_{2,j} = j\beta_j (t_1 - t_0)^{j-1} & \text{j=1...m,} & y(2) = y'(t_1) \\
\text{i=3,} & a_{3,j} = j(j-1)\beta_j (t_1 - t_0)^{j-2} & \text{j=2...m,} & y(3) = y''(t_1) \\
\text{i=4...(n-2),} & b_{ij} = j(j-1)...(j-4)\beta_j (t_i - t_0)^{j-5} & \text{j=5...m,} & \\
 & c_{ij} = \beta_j (t_i - t_0)^j & \text{j=0...m,} & y(i) = f(t_i) \\
\text{i=n-1,} & a_{n-1,j} = \beta_j (t_n - t_0)^j & \text{j=0...m,} & y(i) = y(t_n) \\
\text{i=n,} & a_{n,j} = j\beta_j (t_n - t_0)^{j-1} & \text{j=1...m,} & y(i) = y'(t_n)
\end{array}\right\} \tag{4.9}$$

(4.9) daki ifadeler kullanılarak (4.5) teki matris formda yerlerine yazılırsa

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix}
a_{10} & a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1m} \\
a_{20} & a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2m} \\
a_{30} & a_{31} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{3m} \\
c_{40} & c_{41} & \cdots & c_{45} + b_{45} & \cdots & c_{4m} + b_{4m} \\
c_{50} & c_{51} & \cdots & c_{55} + b_{55} & \cdots & c_{5m} + b_{5m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n-2,0} & a_{n-2,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-2,m} \\
a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1,m} \\
a_{n,0} & a_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n,m}
\end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix}$$

y(1)=α_0, y(n-1)=α_1

y(2)=γ_0, y(n)=γ_1,

y(3)=δ_0

y(i)=f(t_i), $4 \leq i \leq (n-2)$

elde edilir.

(4.10) daki matrisleri (4.6) da yerine yazarsak, β_i tahmini katsayılarının yerine yazılmasıyla matris sisteminin çözümü elde edilmiş olur. (4.7) deki tahmini çözüm sağlanmış olur.([2])

4.2 Convection-Diffusion Kısmi Türevli Diferansiyel Denkleminin LPR Çözümleri

Convection diffusion equation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} = \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad t \geq 0, \tag{4.11}$$

Heat equation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v(x) \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad t \geq 0, \tag{4.12}$$

(4.11) ve (4.12) denklemlere sınır koşullarını ekleyelim:

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq 1, \tag{4.13}$$

$$u(0,t) = g_0(t), \qquad t \geq 0, \tag{4.14}$$

$$u(1,t) = g_1(t), \qquad t \geq 0, \tag{4.15}$$

Bu çalışmada LPR, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerine ulaşmak için geliştirilmiş bir teknik olarak kullanıldı.

Kabul edelimki y(t) nin t_0 noktasında (p+1) inci türevi var olsun. y(t) bilinmeyen regresyon fonksiyonunu t_0 noktasında p.dereceden bir polinom yardımıyla tahmin etmeye çalışırız. Teorik olarak y(t) yi t_0 ın bir komşuluğunda Taylor açılımı ile tahmin edebiliriz:

$$y(t) \approx \sum_{k=0}^{p} \beta_k (t - t_0)^k, \tag{4.16}$$

$$\beta_k = \frac{t^{(k)}(t_0)}{k!} \tag{4.17}$$

t_0 da bilinmeyen fonksiyonu tahmin etmede kullanılan bu polinom ağırlıklı en küçük kareler probleminin minimize edilmesiyle sağlanır.

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ Y_i - \sum_{k=0}^{p} \beta_k (t_i - t_0)^k \right\}^2 K(\frac{t_i - t_0}{h}) \tag{4.18}$$

β_k, k=0,1,...,p minimize probleminin çözümü olsun. (4.14) den j!β_j nin $y^{(j)}(x_0)$ nin (j=0,1,...,p) türevlerinin bir tahmin edicisi olduğu açıkça görülmektedir. Bu kanı bütün regresyon fonksiyonları ve türevleri için yerel olarak sağlanır ve bu yöntem tahmini ilgilendiren tüm noktalarda tekrar ettirilmelidir. Yerel olarak ağırlıklı en küçük kareler regresyon probleminin β_k, k=0,1,...,p çözümününün analitiksel ifadesini görelim. X, nx(p+1) boyutlu matris

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & (t_1 - t_0) & \dots & (t_1 - t_0)^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (t_n - t_0) & \dots & (t_n - t_0)^p \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

$Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)'$ ve $\beta = (\beta_0, \beta_1, ...\beta_p)'$ vektörleri olsun. Son olarak W nxn boyutundaki ağırlıklı köşegen matrisi $W = diag\{K_h(t_i - t_0)\}$dir. Elde edilen sonuç

$$\beta = (X^T W X)^{-1} X^T W Y. \tag{4.20}$$

Bu yöntemdeki temel fikir ([13]) te görülmektedir.

İlk problemin diferansiyel şeması aşağıdaki gibi olsun:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\triangle t} + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \triangle t = k \tag{4.21}$$

$\triangle t = k$ iken

$$-k\alpha_1 u''_{i+1} + k\alpha_2 u'_{i+1} + u_{i+1} = u_i \tag{4.22}$$

ve sınır koşulları (4.13)- (4.14) de verilmiştir.

$$u(x,0) = f(x) = u_0, \tag{4.23}$$

(4.23) teki eşitliği (4.22) de yerine yazarsak aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\left.\begin{array}{cc} t = 0 + \triangle t & -k\alpha_1 u''_1 + k\alpha_2 u'_1 + u_1 = u_0 \\ t = 0 + 2\triangle t & -k\alpha_1 u''_2 + k\alpha_2 u'_2 + u_2 = u_1 \\ \vdots & \vdots \\ t = 0 + n\triangle t & -k\alpha_1 u''_n + k\alpha_2 u'_n + u_n = u_{n-1} \end{array}\right\} \tag{4.24}$$

Bu bölüm LPR nin (4.11) eşitliğin bir çözüm yöntemi olduğunu özetler. (4.16) daki ifade (4.11) eşitliğin bir tahmini sonucu olsun:

$$y(t) = \sum_{j=0}^{p} \beta_j (t - t_0)^j, \tag{4.25}$$

$t_1 = a, t_2, \ldots, t_n = b$ olduğunda ve (4.25)deki bu tahmini çözüm kısmi türevli diferansiyel denklemlerin t=t_i noktalarındaki tahminleri olduğunu gerektirir. (4.25)i (4.24) deki ilk denklemde yerine yazarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$-k\alpha_1 \Big(\sum_{j=0}^{p} \beta_j (x_i - x_0)^j\Big)'' + k\alpha_2 \Big(\sum_{j=0}^{p} \beta_j (x_i - x_0)^j\Big)' + \Big(\sum_{j=0}^{p} \beta_j (x_i - x_0)^j\Big) = u_0 \tag{4.26}$$

$$a \leq t \leq b$$

İfade açılıp düzenlendiğinde aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{i=1}, & a_{1,j} = \beta_j (x_1 - x_0)^j & \text{j=0...m}, & y(i) = g_0(k) \\
\text{i=2...(n-1)}, & b_{i,j} = -k\alpha_1 j(j-1)\beta_j (x_1 - x_0)^{j-2} & \text{j=2...m}, & y(i) = f(x_i) \\
\text{i=2...(n-1)}, & c_{i,j} = k\alpha_2 j\beta_j (x_1 - x_0)^{j-1} & \text{j=1...m}, & y(i) = f(x_i) \\
\text{i=2...(n-1)}, & d_{i,j} = \beta_j (x_1 - x_0)^j & \text{j=0...m}, & y(i) = f(x_i) \\
\text{i=n}, & a_{n,j} = \beta_j (x_n - x_0)^j & \text{j=0...m}, & y(i) = g_1(k)
\end{array}\right\} \tag{4.27}$$

Sonra, (4.27) sistemindeki ifadeler (4.19) daki matris formda yerine yazılırsa

$$X = \begin{bmatrix}
a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\
d_{2,0} & d_{2,1} + c_{2,1} & d_{2,2} + c_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & d_{2,m} + c_{2,m} + b_{2,m} \\
d_{3,0} & d_{3,1} + c_{3,1} & d_{3,2} + c_{3,2} + b_{3,2} & \cdots & d_{3,m} + c_{3,m} + b_{3,m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
d_{n-1,0} & d_{n-1,1} + c_{n-1,1} & d_{n-1,2} + c_{n-1,2} + b_{n-1,2} & \cdots & d_{n-1,m} + c_{n-1,m} + b_{n-1,m} \\
a_{n,0} & a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m}
\end{bmatrix} \tag{4.28}$$

matrisi elde edilir.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

(4.28) ve (4.29) deki matrisleri (4.20) de yerine yazarsak, β_i tahmini katsayılarının yerine yazılmasıyla matris sisteminin çözümü elde edilmiş olur. (4.25) deki tahmini çözüm sağlanmış olur.([3])

Bölüm 5

PROBLEMLER

5.1 Sınır Değer Probleminin LPR Çözümü

Problem 1:([2])

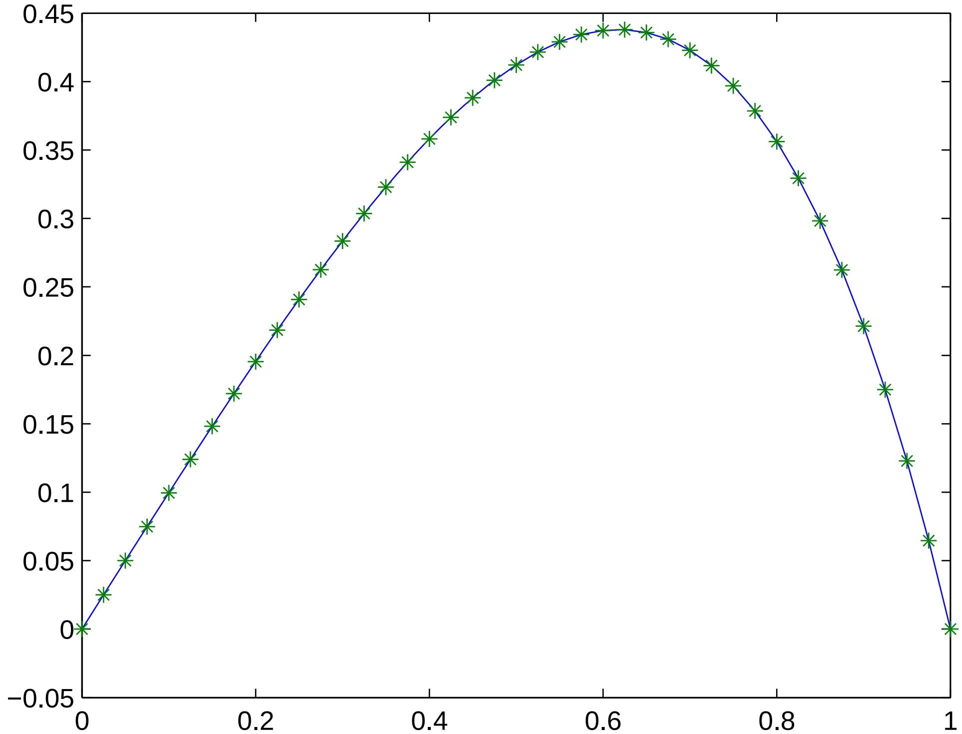
$$y^{(5)} - y = -(15 + 10x)e^x, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

y(0)=y(1)=0,

$y'(0) = 1, y'(1) = -e,$

$y''(0) = 0,$

Analitik çözüm $y(x) = x(1-x)e^x$



Şekil 5.1: (m=41), (n=11), (nnn=41) ve Epanechnikov kernel fonksiyonu ile çözülmüştür.

K(u)	m	n	nnn	err
Uniform	11	11	11	2.1845e-08
Epanechnikov	11	11	11	2.1849e-08
Quartic	11	11	11	2.1846e-08
Triangular	11	11	11	2.1857e-08
Gaussian	11	11	11	2.1859e-08
Uniform	21	21	21	0.0206
Epanechnikov	21	21	21	0.0041
Quartic	21	21	21	0.0034
Triangular	21	21	21	0.0330
Gaussian	21	21	21	1.8956
Uniform	41	41	41	3.4920e-04
Epanechnikov	41	41	41	4.9558e-04
Quartic	41	41	41	0.0040
Triangular	41	41	41	2.0624e-04
Gaussian	41	41	41	8.8021e-04
Uniform	121	121	121	5.5863e-05
Epanechnikov	121	121	121	4.5280e-04
Quartic	121	121	121	9.1403e-05
Triangular	121	121	121	0.0051
Gaussian	121	121	121	0.0025

Tablo 5.1: de Kernel fonksiyonunun değişimine bağlı olarak çözümün nasıl etkilendiği incelenmiştir.

Aynı değerler altında Kernel fonksiyonu değiştirildiğinde hatanın çok fazla değişmediği görülmektedir. O halde Kernel fonksiyonunun seçiminin çok fazla etkili olmadığı sonucuna varılmaktadır.

K(u)	m	n	nnn	err
Uniform	11	11	11	2.1845e-08
Uniform	21	11	11	2.6736e-08
Uniform	41	11	11	4.5018e-10
Uniform	121	11	11	3.5422e-09
Epanechnikov	11	11	11	2.1849e-08
Epanechnikov	21	11	11	2.5769e-08
Epanechnikov	41	11	11	5.4838e-10
Epanechnikov	121	11	11	4.2464e-09
Quartic	11	11	11	2.1864e-08
Quartic	21	11	11	2.4953e-08
Quartic	41	11	11	6.7150e-10
Quartic	121	11	11	5.2742e-09
Triangular	11	11	11	2.1857e-08
Triangular	21	11	11	2.4669e-08
Triangular	41	11	11	7.2369e-10
Triangular	121	11	11	5.1143e-09
Gaussian	11	11	11	2.1859e-08
Gaussian	21	11	11	2.6295e-08
Gaussian	41	11	11	5.0347e-10
Gaussian	121	11	11	3.7791e-09

Tablo 5.2: de matrisin satır sayısının çözümü nasıl etkilediği incelenmiştir.

Aynı değerler altında matrisin satır sayısının değişmesi hatayı çok az değiştirmektedir.

K(u)	m	n	nnn	err
Uniform	11	11	11	2.1845e-08
Uniform	11	21	11	0.0307
Uniform	11	41	11	12.9771
Uniform	11	121	11	4.2763
Epanechnikov	11	11	11	2.1849e-08
Epanechnikov	11	21	11	0.1077
Epanechnikov	11	41	11	357.5115
Epanechnikov	11	121	11	20.9469
Quartic	11	11	11	2.1864e-08
Quartic	11	21	11	3.9110
Quartic	11	41	11	247.1365
Quartic	11	121	11	5.5668
Triangular	11	11	11	2.1857e-08
Triangular	11	21	11	0.0639
Triangular	11	41	11	0.9639
Triangular	11	121	11	41.7032
Gaussian	11	11	11	2.1859e-08
Gaussian	11	21	11	0.2423
Gaussian	11	41	11	17.8556
Gaussian	11	121	11	7.8325

Tablo 5.3: te matrisin sütun sayısının çözümü nasıl etkilediği incelenmiştir.

Aynı değerler altında matrisin sütun sayısının artması hata değerlerini yükseltmektedir.

K(u)	m	n	nnn	err
Uniform	11	11	11	2.1845e-08
Uniform	11	11	21	2.1845e-08
Uniform	11	11	41	2.1845e-08
Uniform	11	11	121	2.1845e-08
Epanechnikov	11	11	11	2.1849e-08
Epanechnikov	11	11	21	2.1849e-08
Epanechnikov	11	11	41	2.1853e-08
Epanechnikov	11	11	121	2.1853e-08
Quartic	11	11	11	2.1864e-08
Quartic	11	11	21	2.1859e-08
Quartic	11	11	41	2.1864e-08
Quartic	11	11	121	2.1853e-08
Triangular	11	11	11	2.1857e-08
Triangular	11	11	21	2.1842e-08
Triangular	11	11	41	2.1844e-08
Triangular	11	11	121	2.1847e-08
Gaussian	11	11	11	2.1859e-08
Gaussian	11	11	21	2.1839e-08
Gaussian	11	11	41	2.1815e-08
Gaussian	11	11	121	17.1854

Tablo 5.4: de adım sayısının çözümü nasıl etkilediği incelenmiştir.

Aynı değerler altında adım sayısının artması hata değerlerini hem en aza indirmekte hem de çok fazla etkilememektedir. O halde adım sayısı diğer değişkenlerden daha önemlidir.

5.2 Convection-Diffusion Kısmi Türevli Diferansiyel Denkleminin LPR Çözümü

Problem 2:([1])

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad 0 \le x \le 1 \qquad 0 \le t \le T$$

$\alpha = 1.17712434446770;$

$\beta = -0.09;$

$\gamma = 0.02;$

$\varepsilon = 0.1;$

başlangıç koşulu $\varphi(x) = e^{\alpha x}$ kesin çözüm $u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t}$

K(u)	m	n	nnn	k	err
Uniform	11	7	41	0.1	8.2829e-04
Epanechnikov	11	7	41	0.1	8.2823e-04
Quartic	11	7	41	0.1	8.2823e-04
Triangular	11	7	41	0.1	8.2822e-04
Gaussian	11	7	41	0.1	8.5149e-04
Uniform	11	7	41	0.01	8.3786e-05
Epanechnikov	11	7	41	0.01	8.4101e-05
Quartic	11	7	41	0.01	8.3866e-05
Triangular	11	7	41	0.01	8.3867e-05
Gaussian	11	7	41	0.01	8.4128e-05
Uniform	11	7	41	0.001	8.0766e-06
Epanechnikov	11	7	41	0.001	8.3516e-06
Quartic	11	7	41	0.001	8.5532e-06
Triangular	11	7	41	0.001	8.3202e-06
Gaussian	11	7	41	0.001	8.8709e-06

Tablo 5.5: te Kernel fonksiyonuna bağlı olarak çözümün nasıl etkilendiği incelenmiştir.

Aynı değerler altında Kernel fonksiyonu değiştirildiğinde hatanın çok fazla değişmediği görülmektedir. O halde Kernel fonksiyonunun seçiminin çok fazla etkili olmadığı sonucuna varılmaktadır.

K(u)	m	n	nnn	k	err
Uniform	11	7	41	0.1	8.2829e-04
Uniform	101	7	41	0.1	8.4066e-04
Uniform	201	7	41	0.1	8.5118e-04
Epanechnikov	11	7	41	0.1	8.2823e-04
Epanechnikov	101	7	41	0.1	8.4270e-04
Epanechnikov	201	7	41	0.1	8.5582e-04
Quartic	11	7	41	0.1	8.2823e-04
Quartic	101	7	41	0.1	8.4539e-04
Quartic	201	7	41	0.1	8.6161e-04
Triangular	11	7	41	0.1	8.2822e-04
Triangular	101	7	41	0.1	8.4337e-04
Triangular	201	7	41	0.1	8.6146e-04
Gaussian	11	7	41	0.1	8.5149e-04
Gaussian	101	7	41	0.1	8.4146e-04
Gaussian	201	7	41	0.1	8.5297e-04

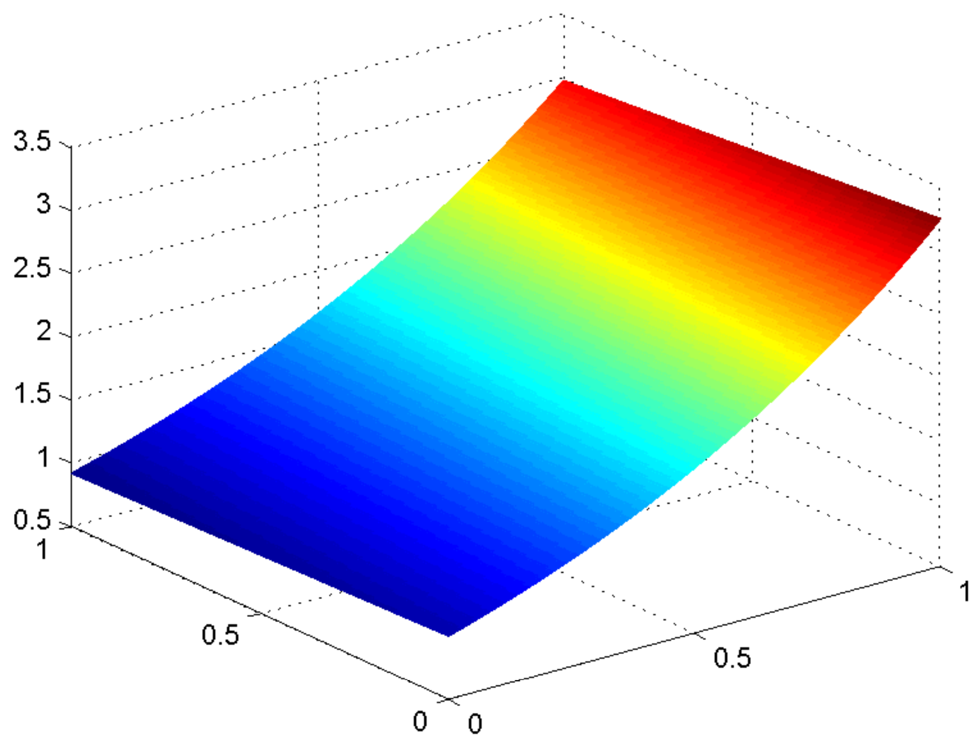
Tablo 5.6: da matrisin satır sayısının çözümü nasıl etkilediği incelenmiştir.

Aynı değerler altında matrisin satır sayısının değişmesi hatayı çok az değiştirmektedir.

K(u)	m	n	nnn	k	err
Uniform	11	7	41	0.1	8.2829e-04
Uniform	11	7	41	0.01	8.3786e-05
Uniform	11	7	41	0.001	8.0766e-06
Epanechnikov	11	7	41	0.1	8.2823e-04
Epanechnikov	11	7	41	0.01	8.4101e-05
Epanechnikov	11	7	41	0.001	8.3516e-06
Quartic	11	7	41	0.1	8.2823e-04
Quartic	11	7	41	0.01	8.3866e-05
Quartic	11	7	41	0.001	8.5532e-06
Triangular	11	7	41	0.1	8.2822e-04
Triangular	11	7	41	0.01	8.3867e-05
Triangular	11	7	41	0.001	8.3202e-06
Gaussian	11	7	41	0.1	8.5149e-04
Gaussian	11	7	41	0.01	8.4128e-05
Gaussian	11	7	41	0.001	8.8709e-06

Tablo 5.7: de zaman aralığının çözümü nasıl etkilediği incelenmiştir.

Aynı değerler altında zaman aralığının adımının küçülmesi hatayı en aza indirdiğinden zaman aralığının seçimi hata değerlerini daha çok etkilemektedir.



Şekil 5.2: (m=201), (n=7), (nnn=41), (k=0.001) ve Epanechnikov kernel fonksiyonu ile çözülmüştür.

Bölüm 6

SONUÇ

Bu tezde kısmi türevli diferansiyel denklemlerin LPR çözümleri incelenmiştir. LPR kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanırken Kernel fonksiyonları kullanılmıştır. İncelenen örneklerdeki denklemlerin çözümlerinde kullanılan Kernel fonksiyonları; Uniform, Epanechnikov, Quartic, Triangular, Gaussian'dır. Denklemlerin çözümlerindeki hatalar Kernel fonskiyonlarının çeşitlerine, parametresi olan bant genişliğine ve kullanılan çözüm matrisinin satır ve sütun sayısına bağlı olarak değişmektedir. İncelenen ilk problemin hatalarına bakıldığında çözümlerdeki hataları en çoktan en aza doğru sırasıyla bant genişliği, çözüm matrisinin satır sayısı, sütun sayısı ve Kernel fonksiyonlarının çeşitlerinin etkilediği sonucu elde edilmiştir. İncelenen ikinci problemde ise zaman aralığının seçiminin Kernel fonksiyonunundan ve matrisin satır sayısından daha çok etkilediği görülmüştür. Sonuç olarak Kernel fonksiyonlarının seçiminin bant genişliği seçiminden daha az bir öneme sahip olduğu elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] R.C. Mittal, R.K. Jain, *Redefined cubic B-splines collocation method for solving convection-diffusion equations*, Applied Mathematical Modelling 36(2012)5555-5573

[2] Hikmet Caglar, Nazan Caglar, *Solution of fifth order boundary value problems by using local polynomial regression*, Applied Mathematics and Computation 186(2007)952-956

[3] Nazan Caglar, Hikmet Caglar, Behic Cagal, *The numerical solution of partial differential equations with local polynomial regression(LPR)*, Journal of Computational Analysis and Applications; Oct2009, Vol. 11 Issue 4, p669

[4] E. A. Nadaraya, *On Esimating Regression*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. , 9:1 (1964), 157-159

[5] Fox J., *Applied Regression Analysis and Generalized Linear Models*, SAGE Publications, (2008).

[6] Geoffrey S. Watson, *Smooth Regression Analysis*Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series A (1961-2002)Vol. 26, No. 4 (Dec., 1964), pp. 359-372

[7] H. N. Caglar, S. H. Caglar,E. H. Twizell, *The numerical solution of fifth-order boundary value problems with sixth degree B-Spline functions*, Appl. Math. Lett. 12(1999)25-30.

[8] N. Caglar, H.Caglar, B.Cagal, *Spline solution of nonlinear beam problems*, J.Concrete Appl. Math. 1(3)(2003)253-259

[9] N. Caglar, H.Caglar, *B-spline solution of singular boundary value problems*, Appl. Math. Comput., in press, doi:10.1016/j.amc.2006.05.035.

[10] S.S. Siddiqi, E.H. Twizell, *Spline solutions of linear sixth-order boundary value problems*,Int.J.Comput.Math.60(3)(1996)295-304.

[11] S.S. Siddiqi, G.Akram, *Solution of fifth order boundary value problems using nonpolynomial spline technique*, Appl.Math.Comput.

[12] R.P. Agarwal, *Boundary Value Problems For High Order Differential Equaitons*, World Scientific,Singapore, 1986.

[13] J.L.Fantan, J.Costa, J.M. Ruso, G.Preeto, F. Sarmiento, *A nonparametric approach to calculate critical micelle concentrations: the local polynomial regression method*, Eur.Phys.J.E.13(2004)133-40

[14] N.K.Erdoğan, N.Uzgören, *BOX-LJUNG ve NONPARAMETRİK Regresyon Yöntemlerinin Karşılaştırılması: İMKB-100 Endeksine Yönelik Bir Uygulama*, İstanbul Üniversitesi İktisat Fakültesi Ekonemetri ve İstatistik e-Dergisi (ISI) , 1-19 pp., 2009

[15] Umut Gökçe, *Finansal varlıkların fiyatlamasında parametrik olmayan regresyon modelleri [Financial assets pricing by nonparametric regression models]*, Yüksek lisans tezi(2008)

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında İstanbul'da doğdu. 2011 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimini tamamladıktan sonra, 2011 yılında İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı.