

**T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN ENERJİ KORUMALI
YÖNTEMLE ÇÖZÜMÜ VE MODEL İNDİRGEME YÖNTEMİNİN UYGULANMASI**

DOKTORA TEZİ

Canan AKKOYUNLU

Anabilim Dalı: Matematik-Bilgisayar

Programı: Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erhan GÜZEL

TEMMUZ 2013

T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN ENERJİ
KORUMALI YÖNTEMLE ÇÖZÜMÜ VE MODEL İNDİRGEME
YÖNTEMİNİN UYGULANMASI

DOKTORA TEZİ

Canan AKKOYUNLU

0809241040

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 18 Haziran 2013

Tezin Savunulduğu Tarih : 19 Temmuz 2013

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erhan GÜZEL (İ.K.Ü.)

Eş Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bülent KARASÖZEN (O.D.T.Ü.)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mehmet ÖZER (İ.K.Ü.)

Doç. Dr. Mert ÇAĞLAR (İ.K.Ü.)

Yrd. Doç. Dr. Hikmet ÇAĞLAR (İ.K.Ü.)

Yrd. Doç. Dr. Selmahan SELİM (Y.T.Ü.)

TEMMUZ 2013

ÖNSÖZ

Doktora tez çalışmamı kendisiyle yapma fırsatı verdiği için, deneyimlerini, bilgilerini benimle paylaştığı için, yol gösterici olduğu için hocam Prof. Dr. Bülent KARASÖZEN'e şükranlarımı sunuyorum. Kendisi ile çalışmak hiç şüpesizki hayattaki en büyük kazanımlarımdan biridir. Kendisine bu çalışma süresince gösterdiği sabrı ve emeği için çok teşekkür ediyorum.

Gerek doktora ders aşamasında gerek tez aşamasında her zaman desteğini hissettiğim, sorunlarımı çözmemde bana yardımcı olan, deneyimlerinden yararlandığım hocam Yard. Doç. Dr. Hikmet ÇAĞLAR'a minnettarım.

Burada kendisinden söz etmeden geçemeyeceğim en önemli isimlerden biri arkadaşım Murat UZUNCA. Çalışmam süresince gösterdiği katkıyı, yardımları unutmayacağım. Kendisine bana zaman ayırdığı için çok teşekkür ediyorum.

Çalışmam süresince yaptığı yorumlar ve uyarılar için tez izleme komitesi üyesi Yard. Doç. Dr. Selmahan SELİM'e teşekkürü bir borç bilirim.

Arkadaşım Neslihan Fatma ER'e çalışmam süresince yanımda olduğunu hissettirdiği ve desteği için çok teşekkür ediyorum, iyi ki varsın.

Üzerimde emeği bulunan Matematik-Bilgisayar Bölümü hocalarıma ve desteklerini hiç esirgemeyen arkadaşlarıma çok teşekkür ediyorum.

Son olarak her zaman yanımda oldukları, bana güvendikleri, güç verdikleri, emek verdikleri için ailelerim ve sevgili eşim Tahir AKKOYUNLU'ya çok teşekkür ederim, iyi ki varsınız.

Temmuz 2013

Canan AKKOYUNLU

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ	v
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
1 GİRİŞ	1
2 HAMILTON YAPILI DENKLEMLER	4
2.1 Sayısal Yöntemler	4
2.2 Sonsuz Boyutlu Hamiltonian Sistemler	11
2.3 Sonlu Boyutlu Hamiltonian Sistemler	13
3 ENERJİ KORUYAN SAYISAL YÖNTEMLER	20
3.1 Ortalama Vektör Alanı (OVA) Yöntemi	20
3.2 Parçalara Ayırma Yöntemi (Splitting Method)	24
3.2.1 Dizisel Parçalara Ayırma Yöntemi	25
3.2.2 Simetrik Strang Parçalara Ayırma Yöntemi	26
3.2.3 Parçalara Ayırma Yönteminin Diskrizasyonu	27
3.2.4 Lineer Olmayan Denklemler İçin Parçalara Ayırma Yöntemi	28
3.2.5 İki Boyutlu Lineer Olmayan Denklemler İçin Parçalara Ayırma Yöntemi	28
4 LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER (NLS) DENKLEMLERİ	30
4.1 Bir Boyutlu NLS Denklemi	30
4.1.1 NLS Denklemine Koruduğu Özellikler	33
4.1.2 NLS Denklemine Ortalama Vektör Alanı Yönteminin Uygulanması	34
4.1.3 NLS Denklemine Parçalara Ayırma Yönteminin Uygulanması	36

4.1.4	NLS Denklemi İçin Parçalara Ayırma Yönteminin Hata Analizi	37
4.2	İki Boyutlu NLS Denklemi	42
4.2.1	İki Boyutlu NLS Denklemine Ortalama Vektör Alanı Yönteminin Uygulanması	46
4.3	İkili NLS Denklem Sistemi	48
4.3.1	İkili NLS Denklem Sistemine OVA Yönteminin Uygulanması	50
4.3.2	İkili NLS Denklem Sistemine Strang Parçalara Ayırma Yönteminin Uygulanması	52
4.4	Dağılım Analizi	54
4.4.1	İkili NLS Denklem Sisteminin Dağılım Analizi	56
5	MODEL İNDİRGEME YÖNTEMİ	68
5.1	Uygun Dik Ayrışım (UDA) Yöntemi	69
5.1.1	UDA ve Tekil Değer Ayrışımı (TDA)	69
5.1.2	UDA Yönteminin Zamana Bağlı Sistemlere Uygulanması .	72
5.1.3	İndirgenmiş Modelin Elde Edilmesi	75
5.2	NLS Denklemine UDA Yönteminin Uygulanması	77
5.2.1	NLS Denklemi İçin UDA Yönteminin Hata Analizi	82
5.3	İki Boyutlu NLS Denklemine UDA Yönteminin Uygulanması . . .	90
5.4	İkili NLS Denklem Sistemine UDA Yönteminin Uygulanması . . .	92
5.4.1	İkili NLS Denklem Sistemi İçin UDA Yönteminin Hata Analizi	94
6	SAYISAL SONUÇLAR	97
6.0.2	Bir Boyutlu NLS Denklemi	97
6.0.3	İkili NLS Denklem Sistemi	105
6.0.4	İki Boyutlu NLS Denklemi	108
7	SONUÇ	111
	KAYNAKLAR	112
	ÖZGEÇMİŞ	118

ŞEKİL LİSTESİ

4.1	İkili NLS denklem sistemi için dağılım analizi ($\Delta t = 0.1$)	67
6.1	Örnek 6.0.2, p için bağıl bilgi grafiği (soldaki) ve normalize edilmiş özdeğer grafiği (sağdaki)	98
6.2	Örnek 6.0.2, q için bağıl bilgi grafiği (soldaki) ve normalize edilmiş özdeğer grafiği (sağdaki)	98
6.3	Örnek 6.0.2, ψ için bağıl bilgi grafiği (soldaki) ve normalize edilmiş özdeğer grafiği (sağdaki)	99
6.4	Örnek 6.0.2, Bağıl bilgi grafiği (soldaki) ve normalize edilmiş öz- değer grafiği (sağdaki)	99
6.5	Örnek 6.0.2, $T = 10$ için enerji hatası grafiği	100
6.6	Örnek 6.0.2, $T = 500$ için enerji hatası grafiği	100
6.7	Örnek 6.0.2, $T = 10$ için norm çözümü	101
6.8	Örnek 6.0.2, $T = 500$ için norm çözümü	101
6.9	Örnek 6.0.3, Norm çözümü	103
6.10	Örnek 6.0.3, Enerji hatası grafiği	104
6.11	Örnek 6.0.3, Normalize edilmiş özdeğer grafiği (soldaki) ve bağıl bilgi grafiği (sağdaki)	104
6.12	Örnek 6.0.4, Norm çözümü	106
6.13	Örnek 6.0.4, Enerji hatası grafiği	107
6.14	Örnek 6.0.4, Normalize edilmiş özdeğer grafiği (soldaki) ve bağıl bilgi grafiği (sağdaki)	107
6.15	Örnek 6.0.5, Enerji hatası grafiği	109
6.16	Örnek 6.0.5, Normalize edilmiş özdeğer grafiği (soldaki) ve bağıl bilgi grafiği (sağdaki)	109

Üniversitesi : İstanbul Kültür Üniversitesi
Enstitüsü : Fen Bilimleri
Anabilim Dalı : Matematik-Bilgisayar
Programı : Matematik
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Erhan GÜZEL
Tez Türü ve Tarihi : Doktora - Temmuz 2013

ÖZET

LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN ENERJİ KORUMALI YÖNTEMLE ÇÖZÜMÜ VE MODEL İNDİRGEME YÖNTEMİNİN UYGULANMASI

Canan AKKOYUNLU

Bu tezde lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi enerji koruma özelliğine sahip ortalama vektör alanı (OVA) ile çözülmüştür. Ayrıca model indirgeme yöntemi olarak uygun dik ayrışım (UDA) yöntemi uygulanarak bir ve iki boyutlu NLS ve ikili NLS için elde edilen sayısal sonuçların OVA yöntemiyle elde edilen sayısal sonuçlara çok yakın olduğu ve hata analizi sonucu elde edilenlerle uyumlu olduğu görülmektedir. UDA yönteminin NLS'in Hamilton yapısını ve sistemin enerjisini koruduğu görülmektedir. Ayrıca ikili NLS için dağılım analizi yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Lineer olmayan Schrödinger denklemi,
periyodik ve soliton çözümler,
ortalama vektör alanı yöntemi,
orta nokta yöntemi, dik ayrışım yöntemi,
dağılım analizi,

Bilim Dalı Sayısal Kodu : 0924

University : İstanbul Kültür University
Institute : Institute of Science
Science Programme : Mathematics and Computer
Programme : Mathematics
Supervisor : Prof. Dr. Erhan GÜZEL
Degree Awarded and Date : Ph.D. - JULY 2013

SUMMARY

MODEL ORDER REDUCTION FOR NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION USING ENERGY PRESERVING INTEGRATORS

Canan AKKOYUNLU

In this thesis the energy preserving average vector field (AVF) integrator was applied to the nonlinear Schrödinger (NLS) equation and the discretized model is reduced by proper orthogonal decomposition (POD). Numerical results for one and two dimensional NLS and coupled NLS with periodic and soliton solutions confirm the converge rates of the POD reduced model. The reduced model preserves the Hamiltonian structure and is also energy preserving. For coupled NLS dispersion analysis was also carried out.

Keywords : Nonlinear Schrödinger equation,
average vector field method,
mid-point method, proper orthogonal decomposition,
dispersion analysis

Science Code : 0924

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Matematik, fizik, astronomi, mühendislik alanlarında karşılaşılan lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri her zaman mümkün olmamaktadır. Böyle durumlarda çözüm elde etmek için sayısal yöntemler devreye girmektedir. Sayısal yöntemlerin uygunluğu hataların küçüklüğü ile ölçülmektedir. Son yıllara kadar genel hataları olabildiğince küçültmeye çalışan sayısal yöntemler üzerinde çalışılıyordu. Ancak bazı diferansiyel denklemlerin farklı özellikleri koruması nedeniyle daha sonraki yıllarda hızın, enerjinin, simplektikliğin, simetrisinin korunması gibi çeşitli geometrik özellikleri koruyan yöntemler üzerinde çalışılmaya başlandı. Bu yöntemler geometrik ya da yapı koruyan yöntemler olarak isimlendirilirler. Diferansiyel denklem çeşitli geometrik özellikleri sağlıyor ise kullanılan yöntemin uygunluğu denklemin sağladığı geometrik özellikleri sağlaması ile ölçülmektedir. Hamiltonian adi diferansiyel denklemler ve kısmi türevli diferansiyel denklemler için çok çeşitli simplektik ve çoklu simplektik yöntemler geliştirilmiştir [53, 40]. Runge-Kutta yöntemlerinin hepsi lineer değişmezleri korur, sadece simplektik Runge-Kutta yöntemleri ikinci dereceden değişmezleri korur. Hiçbir Runge-Kutta yöntemi yüksek dereceden polinomları ve lineer olmayan değişmezleri korumaz. Bununla birlikte simplektik yapının ve Hamiltonianın aynı anda korunmadığı gösterildi [53]. Simplektik yöntemler hariç hiçbir yöntem kanonik ve kanonik olmayan Hamiltonian diferansiyel denklemlere uygulanamaz [33]. Son zamanlarda ilgilenilen yöntemlerden bazıları da enerji koruyan ya da integrali koruyan yöntemlerdir. Ortalama vektör alanı yöntemi en çok kullanılan yöntemlerden biridir. Kanonik ve kanonik olmayan Hamiltonian sistemler için geliştiril-

miştir [16, 27]. Çalışmalar ortalama vektör alanı (OVA) yönteminin enerjiyi koruduğunu, simplektik olmadığını ancak pseudo simplektik olduğunu göstermiştir. Simplektiklik ve enerji korunması karşılaştırılmıştır [10]. Uzun zaman aralığında enerjinin korunması durumunda yöntem daha iyi bir performans göstermektedir, kararsız yüksek frekanslar kontrol edilebilmektedir. Tam kaotik sistemlerde simplektiklik göz ardı edilebilir ancak enerji korunumu gereklidir. Enerjinin tersine simplektiklik Hamiltonian mekaniğinin bir özelliğidir.

Bunun yanı sıra kısmi türevli lineer olmayan diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek her zaman kolay olmamaktadır. İyi bir yaklaşımda bulunabilmek için denklemlerin diskriyasyonlarında çok büyük matrisler elde edilmektedir. Bilgisayarda bu matrislerle işlem yapmak çok zaman almakta bazen de hafıza yetersizliğinden sonuç elde edilememektedir. Bu nedenle bilim adamları son zamanlarda model indirgeme yöntemleri üzerinde çalışmaktadırlar. En etkili ve hızlı model indirgeme yöntemlerinden biri uygun dik ayrışım (UDA) yöntemidir. Bu yöntem yüz tanıma, sinyal analizi, kontrol teori gibi pek çok alanda kullanılmaktadır. UDA yöntemi genellikle lineer ve lineer olmayan parabolik denklemler için kullanıldı. Lineer olmayan Schrödinger denklemine UDA yöntemi daha önce bir kez uygulandı. Bu uygulamada bir ve iki UDA bazı alınarak yaklaşımda bulunuldu [54].

Bu çalışmada geometrik özelliklere sahip çeşitli lineer olmayan Schrödinger diferansiyel denklem örnekleri ele alındı. UDA, OVA ve orta nokta yöntemi örneklerine uygulandı. Örnekler üzerinde UDA yönteminin hızlı ve etkili olduğu gösterildi. Hesaplamalar Matlab yardımıyla yapıldı.

Hazırladığımız tez çalışması şu bölümlerden oluşmaktadır:

İkinci bölümde sonlu ve sonsuz boyutlu Hamiltonian sistemler ayrıntılı bir şekilde verilmektedir.

Üçüncü bölümde enerji koruyan sayısal yöntemler ve özellikleri verilmektedir. Ayrıca parçalara ayırma yöntemi verilmektedir.

Dördüncü bölümde bir boyutlu lineer olmayan Schrödinger denkleminin özellikleri, çeşitli yöntemlerin uygulanışı, parçalara ayırma yönteminin hata analizi verilmektedir. Bunun yanı sıra iki boyutlu lineer olmayan Schrödinger denklemine ortalama vektör alanı yönteminin uygulanışı verilmektedir. Son olarak da

ikili NLS denklem sistemine çeşitli yöntemlerin uygulanışı ve dağılım analizi verilmektedir.

Beşinci bölümde ise UDA yöntemi detaylı bir şekilde verilmekte, örneklere uygulanmaktadır. Çalışılan problemler için UDA yönteminin hata analizi yapılmaktadır.

Altıncı bölümde ise sayısal sonuçlar elde edilmektedir. UDA, OVA ve orta nokta yöntemi örnekler üzerinde karşılaştırılmakta, tablolar yardımıyla açıklanmaktadır.

BÖLÜM 2

HAMİLTON YAPILI DENKLEMLER

2.1 Sayısal Yöntemler

Son yirmi yıldır Hamiltonian diferansiyel denklemlerin geometrik özelliklerini koruyan sayısal yöntemlere ilgi artmıştır. Simplektiklik, simetri, birinci integralin korunması, hızın korunması geometrik özelliklerden bazılarıdır. Bu kısımda daha sonra kullanılacak olan bazı ifadeler açıklanacak alt bölümlerde sonlu ve sonsuz boyutlu Hamiltonian sistemleri tanımlanacaktır. Bu bölümdeki ilk üç tanım

$$\dot{y} = f(y), \quad y(0) = y_0, \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

başlangıç değer problemi için verilecektir.

Tanım 2.1.1. *Açık (explicit) Euler Yöntemi*

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n)$$

şeklinde tanımlanır. Adım uzunluğu h olan bu formülasyon $\varphi_h : y_n \rightarrow y_{n+1}$ şeklinde tasvir ile ifade edilebilir. Bu tasvire ayrık tasvir ya da sayısal tasvir denir [26].

Tanım 2.1.2. *Kapalı (implicit) Euler Yöntemi*

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1})$$

olarak tanımlanır [26].

Tanım 2.1.3. *Orta nokta yöntemi*

$$y_{n+1} = y_n + hf \left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2} \right)$$

olarak tanımlanır. Orta nokta yöntemi simetrik yöntemdir; $y_n \leftrightarrow y_{n+1}$ ve $h \leftrightarrow -h$ değişikliği yapıldığında aynı formül elde edilir [26].

Tanım 2.1.4.

$$\dot{u} = a(u, v), \quad \dot{v} = b(u, v)$$

sistemi için simplektik (symplectic) Euler yöntemi

$$u_{n+1} = u_n + ha(u_{n+1}, v_n), \quad v_{n+1} = v_n + hb(u_{n+1}, v_n)$$

veya

$$u_{n+1} = u_n + ha(u_n, v_{n+1}), \quad v_{n+1} = v_n + hb(u_n, v_{n+1})$$

şeklinde tanımlanır [26].

Tanım 2.1.5. *Faz uzayındaki her y_0 için $\varphi_t(y_0) = y(t)$ şeklinde tanımlanan $\varphi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ ($U \subset \mathbb{R}^{2d}$) tasvirine akış tasviri (flow) denir [26].*

Tanım 2.1.6. *(2.1) sisteminin her y çözümü için c sabit olmak üzere $I(y(t)) = c$ elde ediliyorsa sabit olmayan, türemlenebilen $I(y)$ fonksiyonuna değişmez (invariant) denir [26].*

Örnek 2.1.7. *Matematiksel biyoloji ile ilgili bir örnek olan Lotka-Volterra modeli iki tür arasındaki ilişkiyi tanımlamaktadır. $u(t)$ yırtıcı hayvanların sayısını, $v(t)$ avların sayısını göstermek üzere model*

$$\dot{u} = u(v - 2), \quad \dot{v} = v(1 - u)$$

denklemler sistemi ile verilmektedir. Bu denklemler sisteminden $I(u, v) = \ln u - u + 2 \ln v - v$ olmak üzere aşağıdaki denklem elde edilir:

$$0 = \frac{1-u}{u} \dot{u} - \frac{v-2}{v} \dot{v} = \frac{d}{dt} I(u, v)$$

Her $t \in \mathbb{R}$ için $I(u(t), v(t))$ sabittir. Dolayısıyla I verilen sistem için değişmezdir [26].

Tanım 2.1.8. $x(t) \in \mathbb{R}^m$ ve $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ olmak üzere $\dot{x}(t) = f(x)$ adi diferansiyel denklem sistemi verilsin. Eğer çözüm bileşenlerinin lineer kombinasyonları korunuyor ise yani c_1, c_2, \dots, c_m sabitler olmak üzere

$$\frac{d}{dt}(c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_mx_m(t)) = 0 \quad (2.2)$$

eşitliği elde ediliyorsa lineer değişmezlik vardır denir. (2.2) koşulu herhangi $x \in \mathbb{R}^m$ için

$$c^T f(x) = 0 \quad (2.3)$$

eşitliğine denktir. Örneğin $x_{n+1} = x_n + hf(x_n)$ Euler yöntemi (2.3) koşulunun var olması durumunda incelenirse

$$c^T x_{n+1} = c^T x_n + hc^T f(x_n) = c^T x_n$$

elde edilir. Euler yöntemi lineer değişmezliği adi diferansiyel denklemler için korur. Lineer değişmezlikle mekanik modeller, stokastik modeller, salgın hastalıkların modellenmesi gibi çeşitli alanlarda karşılaşırlar [25].

Şimdi lineer olmayan değişmezlerin korunması için gerekli koşulu verelim.

Tanım 2.1.9. $x(t) \in \mathbb{R}^m$ ve $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ olmak üzere $\dot{x}(t) = f(x)$ adi diferansiyel denklem sistemi verilsin. $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ simetrik matris olmak üzere $x^T C x$ fonksiyonu korunuyor ise adi diferansiyel denklem sistemi ikinci dereceden değişmeze sahiptir. $x^T C x$ fonksiyonunun korunması demek zamana göre türevi sıfır demektir:

$$0 = \frac{d}{dt}(x^T C x) = \dot{x}^T C x + x^T C \dot{x} = 2x^T C \dot{x} = 2x^T C f(x)$$

Burada $C = C^T$ ve $\dot{x}(t) = f(x)$ kullanıldı. Açıkça $x^T C x$ fonksiyonunun ikinci dereceden değişmez olması için gerek ve yeter koşul herhangi $x \in \mathbb{R}^m$ için f fonksiyonunun

$$x^T C f(x) = 0$$

eşitliğini sağlamasıdır.

$x_{n+1} = x_n + hf(\frac{x_n+x_{n+1}}{2})$ şeklinde tanımlanan orta nokta yönteminin ikinci dereceden değişmezleri koruduğunu gösterelim. Kolaylık olması bakımından

$$f_n^{mid} := f\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)$$

olarak alalım. Göstermek istediğimiz şey adi diferansiyel denklem sisteminin ikinci dereceden değişmez fonksiyona sahip olması durumunda

$$x_{n+1}^T C x_{n+1} = x_n^T C x_n$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Açık olarak

$$\begin{aligned} x_{n+1}^T C x_{n+1} &= (x_n + hf_n^{mid})^T C (x_n + hf_n^{mid}) \\ &= x_n^T C x_n + 2hx_n^T C f_n^{mid} + h^2 f_n^{mid T} C f_n^{mid} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca orta nokta yönteminden

$$x_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} - \frac{1}{2}hf_n^{mid}$$

yazılır ve buradan

$$\begin{aligned} x_{n+1}^T C x_{n+1} &= x_n^T C x_n + 2h\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2} - \frac{1}{2}hf_n^{mid}\right)^T C f_n^{mid} + h^2 f_n^{mid T} C f_n^{mid} \\ &= x_n^T C x_n + 2h\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)^T C f_n^{mid} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada sistem ikinci dereceden değişmez fonksiyona sahip olduğundan son terim sıfıra eşittir. Dolayısıyla

$$x_{n+1}^T C x_{n+1} = x_n^T C x_n$$

elde edilir.

Bu yöntemin tersine açık Euler yöntemi adi diferansiyel denklem sistemi için ikinci dereceden değişmez fonksiyonları korumaz [25].

Şimdi başka bir önemli geometrik özellik olan simplektiklik tanımını \mathbb{R}^{2d} üzerinde açıklayalım. \mathbb{R}^{2d} de üzerinde çalışabilecek en temel objeler iki boyutlu paralel kenarlardır. $\xi^p, \xi^q, \tau^p, \tau^q \in \mathbb{R}^d$ olmak üzere (p, q) uzayında $\xi = (\xi^p, \xi^q)^T$ ve

$\tau = (\tau^p, \tau^q)^T$ gibi iki vektör tarafından üretilen paralelkenar $P = \{t\xi + s\tau | 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq 1\}$ olarak alınsın. $d = 1$ olması durumunda yönlendirilmiş alan (oriented area)

$$or.area(P) = \det \begin{pmatrix} \xi^p & \tau^p \\ \xi^q & \tau^q \end{pmatrix} = \xi^p \tau^q - \xi^q \tau^p$$

şeklinde yazılır. $d > 1$ olması durumunda ise

$$w(\xi, \tau) := \sum_{i=1}^d \det \begin{pmatrix} \xi_i^p & \tau_i^p \\ \xi_i^q & \tau_i^q \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^d (\xi_i^p \tau_i^q - \xi_i^q \tau_i^p) \quad (2.4)$$

yönlendirilmiş alanların toplamı olarak ifade edilir. Burada $w(\xi, \tau)$ ikili doğrusal (bilinear) tasvirdir. $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ ve I, d boyutlu birim matris olmak üzere (2.4) eşitliği

$$w(\xi, \tau) = \xi^T J \tau$$

şeklinde yazılabilir [26].

Tanım 2.1.10. $A : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ bir lineer tasvir olsun. $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $A^T J A = J$ veya bu eşitliğe denk olarak her $\xi, \tau \in \mathbb{R}^{2d}$ için $w(A\xi, A\tau) = w(\xi, \tau)$ sağlanıyorsa A lineer tasvirine *simplektik tasvir* denir [26].

$d = 1$ olması durumunda $w(\xi, \tau)$ paralelkenarın alanına karşılık gelir, A lineer tasvirinin simplektik olması ise A tasvirinin alanı koruduğunu ifade eder. Genel durumda ise yönlendirilmiş alanların toplamı A tasviri altında dönüştürülmüş paralelkenarların toplamına eşittir.

Şimdi simplektik tasvir tanımını lineer olmayan tasvirler için verelim.

Tanım 2.1.11. $U \subset \mathbb{R}^{2d}$ açık küme olmak üzere $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ diferansiyellenebilen tasvir olsun. Eğer her $x \in U$ için

$$g'(x)^T J g'(x) = J$$

ya da

$$w(g'(x)\xi, g'(x)\tau) = w(\xi, \tau)$$

ise $g'(x)$ Jakobiyen matrisine her yerde simplektiktir denir. Burada

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

ve $I \in \mathbb{R}^{d \times d}$ dir [26].

Sayısal yöntemlerin simplektik olup olmadığı konusu pek çok bilim adamının ilgisini çekmiştir. Simplektik yöntemler üzerine Vogelaere [65], Ruth [51] ve Feng' in [22] çalışmaları öncülük etmiştir. Sanz-Serna & Calvo [53] ve Leimkuhler & Reich [40] kitaplarında ise önemli bilgiler yer almaktadır.

Runge-Kutta yöntemler lineer değişmezleri korur ancak sadece simplektik Runge-Kutta yöntemler ikinci dereceden değişmezleri ve simplektikliği korur. Bazı Runge-Kutta yöntemlerin pseudo simplektik olup olmadığı incelenmiştir [4]. Bunun yanı sıra Runge-Kutta yöntemlerin hiçbiri yüksek mertebeden polinomları, lineer olmayan değişmezleri ve hızı korumaz. Ayrıca Runge-Kutta yöntemlerin aynı anda simplektikliği ve Hamiltonianı korumadığı gösterilmiştir [26, 53].

Teorem 2.1.12. *Orta nokta yöntemi ve simplektik Euler yöntemi simplektik yöntemlerdir [26].*

Hamilton denklemleri ile ilk olarak 1834 yılında optikteki çalışmalarda karşılaşılmıştır. Jacobi, denklemlerin önemini vurgulamış diğer bilim adamlarının çalışmalarına öncülük etmiştir. Ayrıca Poincare'nin astronomi mekaniği üzerinde yaptığı çalışmaların teorinin gelişmesinde önemi büyüktür. Galileo, Newton, Euler ve Langrange'nin çalışmaları da önemli ölçüde katkı sağlamıştır [26]. Mekanikte ve fizikte pek çok diferansiyel denklem ya da denklem sistemi Hamiltonian sistemi olarak ifade edilebilmektedir. Bu şekilde sistemin sahip olduğu geometrik özelliklerin uygulanan sayısal yöntemler tarafından korunup korunmadığı daha kolay incelenebilmektedir. Bu iki bölümde Hamiltonian sistemleri ve özellikleri açıklanacaktır. Aksi belirtilmediği sürece bu iki bölümdeki bilgiler [64] nolu referansdan alınmıştır.

Sonlu ve sonsuz boyutlu Hamiltonian sistemler Poisson parantezleri ile karakterize edilirler. Poisson parantezleri F, G düzgün ve reel değerli fonksiyonlarını

üçüncü $\{F, G\}$ fonksiyonuna götüren tasvirdir. Bu fonksiyonların hepsi M düzgün manifoldu üzerinde tanımlıdır.

Tanım 2.1.13. F, G, L M üzerinde tanımlı düzgün reel değerli fonksiyonlar olsun. Poisson parantezleri $\{.,.\}$ şu dört özelliği sağlar:

- İkili Doğrusallık

$$\{aF + bG, L\} = a\{F, L\} + b\{G, L\}$$

$$\{F, aG + bL\} = a\{F, G\} + b\{F, L\}$$

- Ters Simetri

$$\{F, G\} = -\{G, F\}$$

- Leibnitz-Kuralı

$$\{F, G.L\} = \{F, G\}.L + G.\{F, L\}$$

burada $.$ ile fonksiyonlar arasındaki adi çarpım kastediliyor.

- Jacobi Birimi

$$\{\{F, G\}, L\} + \{\{L, F\}, G\} + \{\{G, L\}, F\} = 0$$

M manifoldu üzerinde bir Poisson parantez tanımlıysa, M manifolduna Poisson manifold, paranteze de M üzerinde Poisson yapısı tanımlar denir.

Tanım 2.1.14. M Poisson manifold, $P : M \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli, düzgün fonksiyon ve her $H \in M$ fonksiyonu için $\{P, H\} = 0$ olsun. Bu durumda P fonksiyonuna Casimir fonksiyon veya fark (distinguished) fonksiyonu denir.

$m = 2n$, n tamsayı, $(p, q) = (p^1, \dots, p^n, q^1, \dots, q^n)$ koordinatlar olmak üzere $M = \mathbb{R}^m$ manifoldu için parantez ve birimleri şu şekilde tanımlansın.

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \right) \quad (2.5)$$

$i, j = 1, \dots, n$ için

$$\{q^i, p^i\} = 1, \quad \{q^i, p^j\} = 0 \quad (i \neq j), \quad \{p^i, p^j\} = 0, \quad \{q^i, q^j\} = 0 \quad (2.6)$$

Bu parantezin Poisson parantezi olduğu açıktır. Klasik mekanikte kullanılan bu parantez kanonik Poisson parantezi olarak isimlendirilir. Kanonik Poisson parantezleri için Casimir fonksiyonlar sadece sabit fonksiyonlardır. Özel olarak her $F, G \in M$ için Poisson parantezi $\{F, G\} = 0$ olacak şekilde tanımlanırsa her fonksiyon otomatik olarak Casimir fonksiyon olur.

Tanım 2.1.15. M Poisson manifold ve $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün fonksiyon olsun. Aşağıdaki özelliği sağlayan

$$X_H(F) = \{F, H\} = -\{H, F\}$$

düzgün vektör alanına Hamiltonian vektör alanı denir.

Hamiltonian vektör alanına $m = 2n + l$ boyutlu manifold üzerinde tanımlı kanonik Poisson parantezi örnek olarak verilebilir. p, q koordinatları (2.6) daki özellikleri sağlasın r ile p ve q arasındaki ilişki $\{r^j, r^k\} = \{p^i, r^k\} = \{q^i, r^k\} = 0$, $i = 1, \dots, n$, $j, k = 1, \dots, l$ şeklinde alınsın. (2.5) ve Poisson parantez tanımı kullanılırsa Hamiltonian vektör alanı

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i} \right)$$

olarak tanımlanır.

2.2 Sonsuz Boyutlu Hamiltonian Sistemler

$\mathcal{P} = \int P dx \in \mathcal{F}$ olacak şekilde \mathcal{F} manifoldu üzerinde diferansiyel operatör tanımlansın. Poisson parantez formülasyonu sonsuz boyutlu sistemler için $\mathcal{P}, \mathcal{L} \in \mathcal{F}$ olmak üzere şu şekildedir:

$$\{\mathcal{P}, \mathcal{L}\} = \int \delta \mathcal{P} \cdot \mathcal{J} \cdot \delta \mathcal{L} dx \quad (2.7)$$

Fonksiyonellerle tanımlanmış olan bu parantez tanım 2.1.13 deki özellikleri sağlar. Ancak (2.7) nin Poisson parantez olması için \mathcal{J} diferansiyel operatörü üzerinde bir tanımlama verilmelidir.

Tanım 2.2.1. $\mathcal{J}(x)$ lineer operatör olsun. (2.7) deki Poisson parantez tanım 2.1.13 deki özellikleri sağlıyorsa $\mathcal{J}(x)$ operatörüne Hamiltonian operatör denir.

Lemma 2.2.2. (2.7) deki gibi parantez tanımlansın ve $\mathcal{J}(u)$ $q \times q$ boyutlu diferansiyel operatör olsun. $\mathcal{J}(u)$ ters eşlenik ise parantez ters simetriktir [64].

Kanıt. $\mathcal{P} = \int P dx$ ve $\mathcal{L} = \int L dx$ olacak şekilde \mathcal{P}, \mathcal{L} fonksiyonelleri alınsın. Poisson parantezin ters simetrik özelliğinden

$$\int \delta \mathcal{P} \cdot \mathcal{J}(u) \cdot \delta \mathcal{L} dx = - \int \delta \mathcal{L} \cdot \mathcal{J}(u) \cdot \delta \mathcal{P} dx$$

yazılır, buradan

$$\int \delta \mathcal{P} \cdot (\mathcal{J}(u) + \mathcal{J}^*(u)) \cdot \delta \mathcal{L} dx = 0$$

elde edilir. ($\mathcal{J}^*(u), \mathcal{J}(u)$ in Hermitian eşleniğidir) Dolayısıyla bu eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $\mathcal{J}(u)$ operatörünün ters eşlenik olmasıdır. \square

Önermenin tersinde doğruluğu da açıktır.

Sonuç 2.2.3. $\mathcal{J}(u)$, $q \times q$ boyutlu ters eşlenik matris olsun. Matrisin elemanları u ya veya türevlerine bağlı değil ise $\mathcal{J}(u)$ operatörü Hamiltonian operatördür [64].

$u(x, t) \in \mathbb{R}^q$, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere Hamiltonian sistem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{J}(u) \frac{\delta H}{\delta u}$$

şeklinde yazılır. $\Omega \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$, $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_p$ olmak üzere $\mathcal{H}(u) = \int_{\Omega} H(x, u^n) dx$ Hamiltonian fonksiyoneli, $\mathcal{J}(u)$ da Hamiltonian operatörüdür. $\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u}$, Hamiltonian akış tasvirinin varyasyonel türevini ifade eder. Varyasyonel türev $u(x)$ fonksiyonundaki küçük bir değişimin $\mathcal{H}(u)$ fonksiyonelinin değerini nasıl etkilediğini ortaya koyar. Fonksiyonelin varyasyoneli

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}[u; \delta u] &:= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}[u + \epsilon \delta u] - \mathcal{H}[u]}{\Delta x} = \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{H}[u + \epsilon \delta u] \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \delta u \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u(x)} dx = \left\langle \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u}, \delta u \right\rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

şeklinde hesaplanır. $\mathcal{H}[u] = \int_{x_0}^{x_1} H(x, u, u_x, \dots) dx$ fonksiyoneli için birinci varyasyonel

$$\delta\mathcal{H}[u, \delta u] = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \delta u + \frac{\partial H}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial H}{\partial u_{xx}} \delta u_{xx} + \dots \right)$$

şeklinde elde edilir. Buradan $p = q = 1$ için varyasyonel türev

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta u} = \frac{\partial H}{\partial u} - \partial_x \left(\frac{\partial H}{\partial u_x} \right) - \partial_x^2 \left(\frac{\partial H}{\partial u_{xx}} \right) + \dots$$

şeklinde bulunur.

Genel olarak varyasyonel türev $k = 1, \dots, q$ için

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta u_k} = \frac{\delta H}{\delta u_k} - \sum_{l=1}^p \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial H}{\partial u_{k,l}} \right) + \dots$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.4. $\mathcal{J}(u)$, $q \times q$ boyutlu Hamiltonian diferansiyel operatör olsun. Her x, u için $\mathcal{J} \cdot \frac{\delta C}{\delta u} = 0$ eşitliğini sağlayan $C \in \mathcal{F}$ fonksiyoneline fark fonksiyoneli denir.

2.3 Sonlu Boyutlu Hamiltonian Sistemler

Hamiltonian denklemleri, Hamiltonian vektör alanının akış tasvirini kontrol eder ve vektör alanı aşağıdaki Hamiltonian denklemlerinin integre edilmesi ile bulunur.

$$\frac{dr^k}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, l \quad (2.9)$$

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

(2.10) daki denklemler Newton fiziğinin Hamilton denklemleri olarak bilinir. Dolayısıyla klasik mekanikte r koordinatı Casimir fonksiyon olmaktadır. Özel olarak, H Hamilton fonksiyonu sadece r koordinatına bağlıysa bu durumda akış tasviri sıfır tasviri olur. Bu durumu genelleştirirsek, bir fonksiyonun Hamilton vektör alanının her yerde sıfır olması için gerek ve yeter koşul o fonksiyonun Casimir

fonksiyonu olmasıdır.

$x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$ yerel koordinatları ile m boyutlu M Poisson manifoldu ele alınsın. $H(x)$ reel değerli fonksiyon olmak üzere X_H Hamiltonian vektör alanı şu şekilde tanımlansın.

$$X_H = \sum_{i=1}^m \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Burada $\xi^i(x)$, H fonksiyonuna bağlı katsayı fonksiyonlarıdır. Katsayı fonksiyonlarını bulmak için Poisson parantez tanımı kullanılırsa vektör alanı

$$X_H = \{., H\} = -\{H, .\} = \sum_{i=1}^m \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

olarak yazılır. Buradan

$$X_H(x^c) = \{x^c, H\} = \xi^c(x), \quad c \in \{1, \dots, m\}$$

elde edilir. Bu durumda parantez

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^m \{x^i, H\} \frac{\partial F}{\partial x^i}$$

olarak bulunur.

Poisson parantezlerinin ters simetri özelliği kullanılırsa F, G reel değerli fonksiyonları için genel tanım

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \{x^i, x^j\} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial G}{\partial x^j} \quad (2.11)$$

şeklinde verilir.

$J_{ij} = \{x^i, x^j\}$, $i, j = 1, \dots, m$ fonksiyonlarına yapı fonksiyonları diyelim. $J(x) = (J_{ij}(x))$ $m \times m$ boyutlu, ters simetrik yapı matris (2.11) eşitliğinde kullanılırsa

$$\{F, H\} = \nabla F \cdot J \nabla H \quad (2.12)$$

elde edilir.

Lemma 2.3.1. $J(x) = (J_{ij}(x))$ matrisinin (2.12) eşitliğindeki yapı matris olması için gerek ve yeter koşul Poisson parantezinin sahip olduğu şu özellikleri sağlamasıdır

- İkili Doğrusallık
- Libnitz Kuralı
- Ters simetri $J_{ij}(x) = -J_{ji}(x)$, $i, j = 1, \dots, m$
- Jacobi birimi, her $x \in M$ için $\sum_{l=1}^m J_{il} \frac{\partial}{\partial x^l} J_{jk} + J_{kl} \frac{\partial}{\partial x^l} J_{ij} + J_{jl} \frac{\partial}{\partial x^l} J_{ki} = 0$, $i, j, k = 1, \dots, m$

Tanım 2.3.2. $x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$, $M \subset \mathbb{R}^m$ açık kümesi üzerinde bir nokta olsun. $H(x)$ Hamiltonian fonksiyonu, $J(x)$ yapı matrisi olmak üzere bir adi diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{dx}{dt} = J(x) \nabla H(x)$$

veya

$$\dot{x} = \{x, H\}$$

formunda yazılıyorsa bu sisteme Hamiltonian sistem denir. $J(x)$ matrisinin sabit matris olması durumunda sisteme kanonik Hamiltonian sistem, x 'e bağlı olması durumunda ise Poisson sistem denir.

$y(t) \in \mathbb{R}^{2d}$ ve $\dot{y}(t) = f(y(t))$ adi diferansiyel denklemini için $H = H(p_1, p_2, \dots, p_d, q_1, q_2, \dots, q_d)$, $p_i = p_i(t)$, $q_i = q_i(t)$, $i = 1, \dots, d$ olmak üzere Hamiltonian sistemi

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.13)$$

şekindedir. (2.13) sistemi kapalı halde

$$\dot{p} = -H_q(p, q), \quad \dot{q} = H_p(p, q) \quad (2.14)$$

olarak yazılabilir. Burada \cdot ile fonksiyonun t 'ye göre türevi kastedilmektedir.

$H = H(p, q)$ olmak üzere

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} = 0$$

elde edilir, yani herhangi bir diferansiyel denklem sistemi için Hamiltonian zamana bağlı olarak değişmez.

Örnek 2.3.3.

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -\sin q(t) \\ \dot{q}(t) &= p(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

denklemler sistemi Hamiltonian denklemler sistemi olarak ifade edilebilir. $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 - \cos q$$

Hamiltonian fonksiyonudur. $H_q = \sin q$ ve $H_p = p$ olduğundan

$$\dot{p} = -H_q(p, q) \quad \dot{q} = H_p(p, q)$$

elde edilir. Verilen denklemler sistemi simplektik yapıya sahiptir, yani simplektik bir tasvir vardır. Bunu göstermek için başlangıç koşulları $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$ olmak üzere $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tasviri

$$\varphi_t \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Tanım 2.1.11'deki $g(x)$ yerine $\varphi_t(x)$ alınır, burada $x = [p, q]^T$ dir. $t = 0$ için $\varphi_t(x)$ birim tasvire dönüşeceği için Jakobiyen birim matris olur, tanım 2.1.11'deki koşulun gerçekleşeceği açıktır. Kısmi türevlerin matrisi $P(t) = \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_0}$ şeklinde gösterilsin.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial p_0} & \frac{\partial p}{\partial q_0} \\ \frac{\partial q}{\partial p_0} & \frac{\partial q}{\partial q_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_0} & \frac{\partial f_1}{\partial q_0} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_0} & \frac{\partial f_2}{\partial q_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial p_0} & \frac{\partial p}{\partial q_0} \\ \frac{\partial q}{\partial p_0} & \frac{\partial q}{\partial q_0} \end{pmatrix}$$

$$P'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\cos q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P(t)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P(t)^TJP(t) &= P'(t)^TJP(t) + P(t)^TJP'(t) \\
&= P(t)^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} P(t) \\
&+ P(t)^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\cos q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P(t) \\
&= P(t)^T \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\cos q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\cos q \end{pmatrix} \right) P(t) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Türevin sonucu 0 çıktığından $P(t)^TJP(t)$ çarpımı zamana bağlı olarak değişmez, dolayısıyla tanım 2.1.11 deki koşul sağlanır. Her t için φ_t akış tasviri simplektiktir [25].

Örnek 2.3.4. Örnek 2.3.3 deki denklem sistemine açık Euler yöntemi uygulandığında oluşturulan tasvir simplektik değildir. (2.15) sistemine açık Euler yöntemi uygulanırsa

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n - h \sin q_n \\ q_n + hp_n \end{pmatrix}$$

sistemi elde edilir. $g : (p_n, q_n) \rightarrow (p_{n+1}, q_{n+1})$ olmak üzere

$$\frac{\partial(p_{n+1}, q_{n+1})}{\partial(p_n, q_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial p_{n+1}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial q_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial q_{n+1}}{\partial q_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -h \cos q_n \\ h & 1 \end{pmatrix}$$

türevi tanım 2.1.11 de yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 + h^2 \cos q_n \\ -1 - h^2 \cos q_n & 0 \end{pmatrix}$$

birim olmayan matris elde edilir, yani açık Euler yönteminin bu adi diferansiyel denklem sistemine uygulamasından ortaya çıkan tasvir herhangi bir h için simplektik değildir [25].

Teorem 2.3.5. (Poincare 1899) $H(p, q)$, $U \subset \mathbb{R}^2$ üzerinde iki kere sürekli türevlenebilen fonksiyon olsun. Bu durumda her sabit t için φ_t akış tasviri Hamiltonian denklem sistemi için simplektiktir [26].

Kanıt. (2.14) denklem sisteminin Jakobiyen matrisi

$$\begin{pmatrix} -H_{pq} & -H_{qq} \\ H_{pp} & H_{qp} \end{pmatrix}$$

şeklindedir, ayrıca bu matris

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\nabla^2 H = \begin{pmatrix} H_{pp} & H_{qp} \\ H_{pq} & H_{qq} \end{pmatrix}$$

olmak üzere $J^{-1}\nabla^2 H$ olarak yazılabilir. Örnekte olduğu gibi $P'(t) = J^{-1}\nabla^2 HP(t)$ alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P(t)^T JP(t) &= P'(t)^T JP(t) + P(t)^T JP'(t) \\ &= P(t)^T \nabla^2 H J^{-1} JP(t) + P(t)^T J J^{-1} \nabla^2 HP(t) = 0 \end{aligned}$$

□

elde edilir. Burada $JJ^{-1} = I$ ve $J^{-1}J = I$ dır.

Örnek 2.3.6. $\psi(-20, t) = \psi(20, t)$ periyodik sınır koşulu ile Sine-Gordon diferansiyel denklemi

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \alpha \sin(\psi) \quad (2.16)$$

şeklindedir. Denklem, Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \int \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \alpha(1 - \cos(\psi)) \right] dx$$

ve

Hamiltonian operatörü $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{J} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u}$ şeklinde Ha-

miltonian sistemi olarak yazılır. Burada $u = \begin{pmatrix} \psi \\ \pi \end{pmatrix}$ ve $\pi = \frac{\partial \psi}{\partial t}$ dır. Hamiltonian sistem yarı ayırık formda şu şekilde yazılır:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\pi} \end{pmatrix} = \overline{\mathcal{J}} \nabla \overline{\mathcal{H}}$$

Burada sonlu farklar kullanılarak elde edilen ayrık Hamiltonian

$$\overline{\mathcal{H}} = \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2} \pi_j^2 + \frac{1}{2(\Delta x)^2} (\psi_{j+1} - \psi_j) + \alpha(1 - \cos(\psi_j)) \right]$$

şeklindedir. Hamiltonian operatörü ise $\overline{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ ters simetrik matrisine dönüşür.

Örnek 2.3.7. $u(-20, t) = u(20, t)$ periyodik sınır koşulu ve $u(x, 0) = 6 \operatorname{sech}^2 x$ başlangıç koşulu Korteweg-de Vries denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

şeklindedir. Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \int \left[\frac{1}{2} (u_x)^2 - u^3 \right] dx$$

ve Hamiltonian operatörü $S = \frac{\partial}{\partial x}$ olmak üzere denklem Hamiltonian denklemi olarak yazılır. Sonlu farklar kullanılarak ayrık Hamiltonian

$$\overline{\mathcal{H}} = \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2(\Delta x)^2} (u_{j+1} - u_j)^2 - u_j^3 \right]$$

ve Hamiltonian ters simetrik matrisi

$$\overline{\mathcal{J}} = \frac{1}{2\Delta x} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 & -1 \\ -1 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan ayrık Hamiltonian sistemi $\frac{du}{dt} = \overline{\mathcal{J}} \nabla \overline{\mathcal{H}}$ şeklinde bulunur.

BÖLÜM 3

ENERJİ KORUYAN SAYISAL YÖNTEMLER

3.1 Ortalama Vektör Alanı (OVA) Yöntemi

Enerji ya da integral koruyan yöntemler uzun zamandır bilinmektedir. Enerji koruyan yöntemlerin keşfi Courant, Friedrichs ve Lewy'nin çalışmaları ile 1928 yılında başlamıştır [17]. Son yıllarda bu yöntemlere ilgi artmıştır, adi diferansiyel denklemler için pek çok enerji koruyan yöntemler ayrık gradyentlerin [43] ve ayrık varyasyonel türevlerin [24] kullanılması ile oluşturulmaktadır. Ayrık gradyent yöntemler lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere de uygulanmıştır [19]. Polinom şeklinde olan Hamiltonian sistemlerin enerjilerini tam olarak koruyan yöntemlerin sınıfı mevcuttur ve bu sınıf collocation yöntemlerin genişlemesi ya da Hamiltonian sınır değer yöntemleri olarak bilinir.

Yukarıda bahsedilen tüm yöntemler lineer değildir dolayısıyla zaman dönüşümüne göre sayısal çözümler değişmez değildir. Son zamanlarda ortalama vektör alanı (OVA) yöntemine ilgi artmıştır. Bu yöntem orta nokta yönteminin genişletilmiş halidir. Yüksek mertebeden OVA yöntemleri Guassian quadrature kullanılarak elde edilmişlerdir ve sürekli adımlı Runge-Kutta yöntemi olarak ifade edilmişlerdir. Kanonik ve kanonik olmayan Hamiltonian sistemler için yüksek mertebeden OVA yöntemi uygulandı ve analizi yapıldı [27, 16]. Enerji korunumu ile simplektiklik arasındaki ilişki kurulmuş ve B-serisi denilmiştir. Adi diferansiyel denklem sistemleri için B-serileri kuvvet serileridir [9]. Hamiltonian sistemlerin integrasyonu için ayrık gradyent yöntemler B-serisi olarak ifade edilemezler. Kanonik Hamiltonian sistemler için enerji koruyan B-serisi yöntemleri karakterize

edilmişlerdir [12, 21]. Ancak kanonik ve kanonik olmayan Hamiltonian sistemler için OVA yöntemi ve yüksek mertebeli OVA yöntemi B-serisi yöntemidir [16, 27]. B-serileri kullanılarak kanonik ve kanonik olmayan Hamiltonian sistemler için OVA yönteminin simplektik ya da Poisson yöntemlerin eşleniği olduğu gösterilmiştir [12, 21]. Korteweg-de Vries denklemi, lineer olmayan Schrödinger denklemi, Sine-Gordon denklemi gibi pek çok kısmi türevli diferansiyel denklemler kanonik olmayan Hamiltonian ya da Poisson sistemler olarak ifade edilebilir. Son yirmi yıl içinde çeşitli simplektik ve çoklu simplektik yöntemler Hamiltonian kısmi türevli diferansiyel denklemlere enerjiyi koruyarak uygulandı. OVA yöntemi çeşitli kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanmıştır [10].

Hamiltonian sistemlere uygulanan Runge-Kutta yöntemlerinin hiçbirinin enerjiyi korumadığı gösterildi [8]. Hamiltonian adi diferansiyel denklemler için enerji koruyan yöntemler collocation yöntemler yardımıyla oluşturuldu [27] ve daha sonra kısmi türevli diferansiyel denklemler için enerji koruyan OVA yöntemi geliştirildi [10]. Volterra lattice denklemi Poisson sistemi olarak ifade edilmiş ve OVA yöntemi uygulanmıştır [34]. Periyodik sınır koşullu KdV denklemi bi-Hamiltonian formunda yazılmış ve OVA yöntemi uygulanmıştır [35].

Önceki kısımda geometrik özelliklerin bazılarında bahsedildi, sonlu ve sonsuz boyutlu Hamiltonian sistemler açıklandı bu bölümde ise Hamiltonian sistemi olarak ifade edilen sistemler üzerinde OVA yöntemi tanımlanacaktır. Ancak öncelikli olarak ayrık gradyent tasvir ile OVA yöntemi arasında bir ilişki kurulacak ve alt bölümde ise OVA yönteminin özellikleri verilecektir. Bu kısımdaki bilgiler için [8] –[10] nolu makalelerden yararlanılmıştır.

Adi diferansiyel denklem sistemi $f(y) = J(y)\nabla H$ olmak üzere göz önüne alın-
sın:

$$y' = f(y), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

Burada $J(y)$, $n \times n$ ters simetrik yapı matris ve H değişmez, örneğin Hamiltonian ya da sistemin enerjisi. Enerji koruyan ayrık gradyent yöntemler $\nabla H(y)$ ve $J(y)$ nin uygun yaklaşımlarına bağlıdır.

Poisson sistemler için simetrik ayrık gradyent yöntemler şu şekilde verilir [45, 52]:

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = J \left(\frac{y^n + y^{n+1}}{2} \right) \cdot \bar{\nabla} H_s(y^n, y^{n+1}) \quad (3.2)$$

$$\bar{\nabla} H_s(y^n, y^{n+1}) := \frac{1}{2} (\bar{\nabla} H(y^n, y^{n+1}) + \bar{\nabla} H(y^{n+1}, y^n))$$

$\bar{\nabla} H_s(y^n, y^{n+1})$ daha açık

$$\bar{\nabla} H_s(y^n, y^{n+1}) := \begin{pmatrix} \frac{H(y_1^{n+1}, y_2^n, \dots, y_i^n, \dots, y_m^n) - H(y_1^n, y_2^n, \dots, y_i^n, \dots, y_m^n)}{y_1^{n+1} - y_1^n} \\ \dots \\ \frac{H(y_1^{n+1}, y_2^{n+1}, \dots, y_i^{n+1}, \dots, y_m^n) - H(y_1^{n+1}, y_2^{n+1}, \dots, y_i^n, \dots, y_m^n)}{y_i^{n+1} - y_i^n} \\ \dots \\ \frac{H(y_1^{n+1}, y_2^{n+1}, \dots, y_i^{n+1}, \dots, y_m^{n+1}) - H(y_1^{n+1}, y_2^{n+1}, \dots, y_i^{n+1}, \dots, y_m^n)}{y_m^{n+1} - y_m^n} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Polinom şeklinde olan Hamiltonianlar için enerji koruyan yöntemlerin başka bir sınıfı ise s-adım yamuk yöntemleridir ve şu şekilde tanımlanırlar [30, 31]

$$y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^s b_i J(K_i) \nabla H(K_i) \quad (3.3)$$

Burada $s = 1$ alınırsa orta nokta kuralı elde edilir. Dördüncü mertebeden 3-adım yöntemi şu formda verilir [31]:

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{6} \left(J(y^n) \nabla H(y^n) + 4J \left(\frac{y^n + y^{n+1}}{2} \right) \nabla H \left(\frac{y^n + y^{n+1}}{2} \right) + J(y^{n+1}) \nabla H(y^{n+1}) \right) \quad (3.4)$$

Bu yöntemler lineer değildir dolayısıyla sayısal çözümler lineer dönüşümler altında değişmez değildir. Ayrıca genelde B-serisi olarak ifade edilemezler. (3.1) için OVA yöntemi

$$y^{n+1} = y^n + h \int_0^1 f(y^n + \tau(y^{n+1} - y^n)) d\tau, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.5)$$

şeklinindedir. Runge-Kutta yöntemlerinin genişlemesidir ve B-serisi olarak ifade edilir. Bununla birlikte lineer dönüşümler altında değişmezdir ve kanonik Hamiltonian sistemler için ayrık gradyent yönteme indirgenir.

Kanonik Hamiltonian sistemler için OVA yöntemi [27]

$$y^{n+1} = y^n + hJ \int_0^1 \nabla H(y^n + \tau(y^{n+1} - y^n)) d\tau. \quad (3.6)$$

şeklindedir. Poisson sistemler için lineer enerji koruyan OVA yöntemi ise [16]:

$$y^{n+1} = y^n + hJ \left(\frac{y^n + y^{n+1}}{2} \right) \int_0^1 \nabla H(y^n + \tau(y^{n+1} - y^n)) d\tau \quad (3.7)$$

şeklindedir.

OVA yöntemleri Gaussian quadrature kullanılarak kurulmuşlardır [27, 16]. Bu yöntemler sürekli-adım Runge-Kutta yöntemler olarak $\tau \in (0, 1)$ için

$$Y_\tau = y^n + h \int_0^1 a_{\tau,\sigma} f(Y_\sigma) d\sigma, \quad y^{n+1} = y^n + h \int_0^1 b_\sigma f(Y_\sigma) d\sigma, \quad (3.8)$$

şeklinde ifade edilmişlerdir [27]. Burada $Y_\tau \approx y(t_n + c_\tau h)$, $c_\tau = \int_0^1 a_{\tau,\sigma} d\sigma$ dır. İntegraller $y(t_n + \tau h)$ polinomunun değerine bağlıdır ve katsayılar

$$c_\tau = \tau, \quad a_{\tau,\sigma} = \sum_{i=1}^s \frac{1}{b_i} \int_0^\tau l_i(\alpha) d\alpha l_i(\sigma), \quad b_\sigma = 1. \quad (3.9)$$

şeklinde verilir. Burada

$$l_i(\tau) = \prod_{j=1, j \neq i}^s \frac{\tau - c_j}{c_i - c_j}, \quad b_i = \int_0^1 l_i(\tau) d\tau.$$

dir. Kanonik ve kanonik olmayan Hamiltonian sistemler için Gaussian quadrature kullanılarak $2s$. mertebeden OVA yöntemleri kurulmuştur [27, 16].

Örneğin $c_1 = 1/2$ için tek adım Gaussian collocation yöntemi olarak OVA yöntemi orta nokta yönteminin genişletilmiştir.

$$c_{1,2} = 1/2 \mp \sqrt{3}/6, \quad l_1(\tau) = (\tau - c_2)/(c_1 - c_2), \quad l_2(\tau) = (\tau - c_1)/(c_2 - c_1)$$

için iki adım, dördüncü mertebeden Gaussian OVA yöntemi şu formdadır [16]:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= y^n + h \int_0^1 \left(\frac{1}{2} l_1(\sigma) B(Y_1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) l_2(\sigma) B(Y_2) \right) \nabla H(Y_\sigma) d\sigma, \\
Y_2 &= y^n + h \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) l_1(\sigma) B(Y_1) + \frac{1}{2} l_2(\sigma) B(Y_2) \right) \nabla H(Y_\sigma) d\sigma, \\
y^{n+1} &= y^n + h \int_0^1 (l_1(\sigma) B(Y_1) + l_2(\sigma) B(Y_2)) \nabla H(Y_\sigma) d\sigma. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Gaussian OVA yöntemleri zamana göre simetriktir ve simplektik yöntemlerin eşleniğidir. Tek adım yöntemlerinin $y^{n+1} = \Phi_h(y^n)$ zamana göre simetrik olması $y^n = \Phi_{-h}(y^{n+1})$ olması ile olur. OVA yöntemleri zamana göre simetriktir [27]. OVA yöntemleri gibi enerjiyi tam olarak koruyan B-serisi yöntemleri simplektik değildir. Ancak $2s$. mertebeden OVA yöntemleri $2s+2$ mertebeye kadar conjugate-simplektiktir.

3.2 Parçalara Ayırma Yöntemi (Splitting Method)

Bu kısımda denklemleri ve denklem sistemlerini çözmek için kullandığımız başka bir yöntem olan parçalara ayırma yöntemi açıklanacaktır. Yöntem pek çok bilim adamı tarafından incelenmiş çeşitli örneklerle uygulanmıştır. Yöntem adi diferansiyel denklemler için çok geniş kapsamlı incelenmiş ve çeşitli analizler yapılmıştır [44]. Lineer olmayan Schrödinger denkleminde parçalara ayırma yöntemi uygulanmış, sayısal sonucun uzun zamandaki davranışı incelenmiştir [37]. Parçalara ayırma yöntemlerinden iki tanesi bu bölümde ifade edilecektir. Biz bunlardan Strang parçalara ayırma yöntemini problemlerimize uyguladık. Parçalara ayırma yöntemindeki temel amaç karmaşık problemi alt problemlerin dizisi olarak yazmaktır. Bu şekilde problemin çözümü daha basit alt problemlerin çözümleri ile ifade edilir. Dikkat edilmesi gereken şey problemin koruduğu geometrik özellikleri alt problemlerin de korumasıdır.

$$u' = f(u) + g(u), \quad u(0) = u_0$$

diferansiyel denkleminde parçalara ayırma yöntemi uygulanırsa

$$v' = f(v), \quad v(0) = v_0$$

$$w' = g(w), \quad w(0) = w_0$$

yazılır, buradan

$$\psi_t(v_0) := e^{tf}v_0 := v(t), \quad \varphi_t(w_0) := e^{tg}w_0 := w(t)$$

olarak elde edilir, t_1 anında problemin çözümü

$$u_1 = \varphi(\psi(u_0)) = e^{t_1g}e^{t_1f} \approx u(t_1)$$

olarak bulunur.

3.2.1 Dizisel Parçalara Ayırma Yöntemi

Sabit katsayılı adi diferansiyel denklemi göz önüne alınsın ;

$$\frac{du}{dt} = (A + B)u(t), \quad 0 < t < T < \infty, \quad u(0) = u_0 \quad (3.11)$$

Burada $A, B \in R^{s \times s}$ matrisi ve $u_0 \in \mathbb{R}^s$ vektörü veriliyor. $u : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^s$ bilinmeyen fonksiyondur.

$T = Nk$ olacak şekilde $k > 0$ alalım. (3.11) problemi şu şekilde N tane alt probleme ayrılsın;

$$\frac{du_1^n}{dt} = Au_1^n, \quad (n-1)k < t \leq nk, \quad u_1^n((n-1)k) = u_2^{n-1}, \quad (3.12)$$

$$\frac{du_2^n}{dt} = Bu_2^n, \quad (n-1)k < t \leq nk \quad u_2^n((n-1)k) = u_1^n(nk) \quad (3.13)$$

Burada $u_2^0 = u_0$ ve $t_n = nk$ noktasında tanımlanan $u_{sp}^N(nk) = u_2^n(nk)$ foksiyona (3.11) probleminin parçalara ayırma çözümü denir.

Burada yapılan her bir uzunluğu k olacak şekilde zaman aralığını N eşit parçaya ayırmak ve her bir parçada birbirlerine başlangıç koşulu ile bağlı olan daha

basit iki problemi çözmektir.

$n = 1$ için yazılırsa

$$\frac{du_1^1}{dt} = Au_1^1, \quad 0 < t \leq k \quad u_1^1(0) = u_0 \quad (3.14)$$

$$\frac{du_2^1}{dt} = Bu_2^1, \quad 0 < t \leq k \quad u_2^1(0) = u_1^1(k) \quad (3.15)$$

(3.14) den

$$u_1^1(t) = e^{At}u_1^1(0) = e^{At}u_0$$

ve (3.15) den

$$u_2^1(t) = e^{Bt}u_2^1(0) = e^{Bt}u_1^1(k)$$

elde edilir, buradan da

$$u_{sp}^N(k) = u_2^1(k) = e^{Bk}u_1^1(k) = e^{Bk}e^{Ak}u_0$$

bulunur. Aynı k anında (3.11) denkleminin çözümü ise

$$u(k) = e^{(A+B)k}u_0$$

dır.

3.2.2 Simetrik Strang Parçalara Ayırma Yöntemi

(3.11) denkleminde strang parçalara ayırma yöntemi şu şekilde uygulanır:

$$\begin{aligned} \frac{du_1^n}{dt} &= Au_1^n(t), \quad u_1^n((n-1)k) = u_3^{(n-1)}((n-1)k), \quad (n-1)k \leq t \leq (n - \frac{1}{2})k \\ \frac{du_2^n}{dt} &= Bu_2^n(t), \quad u_2^n((n-1)k) = u_1^n((n - \frac{1}{2})k), \quad (n-1)k \leq t \leq nk \\ \frac{du_3^n}{dt} &= Au_3^n(t), \quad u_3^n((n - \frac{1}{2})k) = u_2^n(nk), \quad (n - \frac{1}{2})k \leq t \leq nk \end{aligned}$$

burada $u_3^0(0) = u_0$ ve $u_{SP}^N(nk) = u_3^n(nk)$ dir.

$n = 1$ için yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{du_1^1}{dt} &= Au_1^1(t), & u_1^1(0) &= u_3^0(0) \Rightarrow u_1^1(t) = e^{At}u_1^1(0) = e^{At}u_0 \\ \frac{du_2^1}{dt} &= Bu_2^1(t), & u_2^1(0) &= u_1^0\left(\frac{1}{2}k\right) \Rightarrow u_2^1(t) = e^{Bt}u_2^1(0) = e^{Bt}u_1^0\left(\frac{1}{2}k\right) \\ \frac{du_3^1}{dt} &= Au_3^1(t), & u_3^1\left(\frac{1}{2}k\right) &= u_2^1(k) \Rightarrow u_3^1(t) = e^{At/2}u_3^1\left(\frac{1}{2}k\right) = e^{At/2}u_2^1(k)\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Buradan parçalara ayırma çözümü $u_{SP}^N(k) = u_3^1(k) = e^{Ak/2}u_2^1(k) = e^{Ak/2}e^{Bk}e^{Ak/2}u_0$ olarak bulunur.

Genellikle $u(k) \neq u_{sp}^N(k)$ dir yani hata vardır, bu hataya yerel parçalara ayırma hatası denir ve şu şekilde tanımlanır:

$$Err_{sp}(k) := u_{SP}^N(k) - u(k) \equiv [e^{(A+B)k} - e^{Bk}e^{Ak}]u_0$$

Dizisel parçalara ayırma yöntemi için bu hata $[A, B] = AB - BA$ olmak üzere

$$Err_{sp}(k) = u_{SP}^N(k) - u(k) = \frac{k^2}{2}[A, B] + O(k^3)$$

olarak bulunur. Buradan dizisel parçalara ayırma yöntemi analitik çözüme 1. mertebeden yakınsamaktadır. Strang parçalara ayırma yöntemi için hata ise

$$Err_{sp}(k) = u_{SP}^N(k) - u(k) = k^3\left(\frac{1}{12}[B, [B, A]] - \frac{1}{24}[A, [A, B]]\right)u_0 + O(k^4)$$

şeklinindedir. Dolayısıyla Strang parçalara ayırma yöntemi analitik çözüme 2. mertebeden yakınsamaktadır. Dizisel parçalara ayırma yöntemi simetrik değildir ancak Strang parçalara ayırma yöntemi simetriktir [26].

3.2.3 Parçalara Ayırma Yönteminin Diskrizasyonu

(3.11) denkleminin gerçek çözümü $[0, T]$ zaman aralığında tanımlı $u(t)$ iken, parçalara ayırma çözümü $\Omega_k := \{nk, n = 0, 1, \dots, N\}$ aralıklarında tanımlı $u_{SP}^N(nk)$ dir. Açık olarak parçalara ayırma yönteminin diskrizasyonunda $u_{SP}^N((n+1)k) =$

$C(k)u_{SP}^N(nk)$, $u_{SP}^N(0) = u_0$ şeklinde bir bağlantı vardır. Buradaki $C(k)$ uygulanan diskrizasyona göre oluşan operatördür. Dizisel parçalara ayırma yöntemi için

$$C_{ss}(k) = \exp(kB) \exp(kA)$$

ve Strang parçalara ayırma yöntemi için

$$C_{st}(k) = \exp\left(\frac{k}{2}A\right) \exp(kB) \exp\left(\frac{k}{2}A\right)$$

dır.

3.2.4 Lineer Olmayan Denklemler İçin Parçalara Ayırma Yöntemi

Parçalara ayırma yöntemi lineer olmayan diferansiyel denklemler içinde aynı mantıkla uygulanır. Örneğin NLS denklemi için yöntem şu şekilde uygulanır;

$$iu_t + u_{xx} + \beta |u|^2 = 0$$

$$A \text{ akımı} : iu_t + u_{xx} = 0$$

$$B \text{ akımı} : iu_t + \beta |u|^2 = 0$$

Akım A ve Akım B çözülür, eğer dizisel parçalara ayırma yöntemi kullanılıyor ise çözüm $\psi\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \circ \varphi\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$, Strang parçalara ayırma yöntemi kullanılıyor ise çözüm $\psi\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \circ \varphi(\Delta t) \circ \psi\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ dir.

3.2.5 İki Boyutlu Lineer Olmayan Denklemler İçin Parçalara Ayırma Yöntemi

$u = u(t, x, y)$ kompleks ya da reel değerli fonksiyon için $u(0, x, y) = u_0$ başlangıç koşullu lineer olmayan

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y + h(t, x, y) = 0 \quad (3.16)$$

diferansiyel denklem göz önüne alınsın. Bu denkleme parçalara ayırma yöntemi uygulanmak istenirse bu denklemi iki lineer, bir lineer olmayan alt denkleme ayırılır:

$$L_1 : u_t + f(u)_x = 0, \quad L_2 : u_t + f(u)_y = 0, \quad N : u_t + h(t, x, y) = 0$$

L_1 denklemini çözerken y değişkenine, L_2 denklemini çözerken x değişkenine sabit gözü ile bakılır. Bu yöntemde parçalara ayırma uzay değişkenlerine göre yapılır [15].

Teorem 3.2.1. *Hamiltonian $H(y) = H_1(y) + H_2(y)$ ve kanonik Hamiltonian sistemi*

$$\dot{y} = J^{-1}\nabla H(y) = J^{-1}\nabla H_1(y) + J^{-1}\nabla H_2(y)$$

olarak yazılsın. Bu durumda parçalara ayırma yöntemi simplektiktir [26].

BÖLÜM 4

LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER (NLS) DENKLEMLERİ

4.1 Bir Boyutlu NLS Denklemi

Son yıllarda lineer olmayan denklemler önem kazanmıştır. Fizik, kimya, biyoloji, ekonomi gibi pek çok alandaki doğa olayları, durumlar lineer olmayan denklemler yardımıyla modellenmektedir. Bu sistemlerin analizinde bilgisayarların önemli bir yeri vardır. Son 60 yılda bilgisayarların gelişmesiyle, soliton denklemleri ile ilgili önemli bilgiler elde edilmiştir. Solitonlar şekillerini değiştirmeden sabit hızla hareket eden dalgalardır. Ayrıca iki solitonun çarpışması durumunda da solitonların şekilleri ve hızları değişmez. John Scott Russell'in 1834 yılında soliton dalgalarını keşfetti [50].

Soliton denklemi olan NLS fizikte çeşitli olayları modellemekte kullanılır. NLS denklemi ile derin su dalgalarının okyanusda dağılmadan uzun mesafeler katetmenin nasıl mümkün olacağı açıklanır. Soliton teorisinin önemli uygulamaları fiber optik alanında yapılmaktadır. Solitonlar fiber optik alanında veri iletimi için kullanılabilirler. Bilgi için artan talep ve bilginin kullanılabilirliğinin artması fiber optiğe olan ilgiyi arttırmıştır. Ayrıca NLS denkleminin akışkanlar dinamiğinde de önemli bir yeri vardır.

Zayıf dalga paketleri için NLS denklemi ilk olarak 1967 yılında Benney ve Newell tarafından verildi. Ayrıca 1968 yılında Zakharov tarafından Benney ve Newell den bağımsız olarak tekrardan üretildi [20]. Zakharov ve Shabat 1972 yılında ters saçılım dönüşüm (IST) yöntemini NLS denklemi için geliştirdi [59].

1975 de Ablowitz ve Ladik integrallenabilir sonlu fark şemalarını NLS denklemleri için geliştirdi [1]. 1986 yılında Hersbst ve Weideman NLS denklemleri için parçalara ayırma yönteminin analizini yaptı [62]. Bu yöntem NLS denkleminin Hamiltonian yapısını koruyan çok hızlı pseudo-spectral şemadır. Aynı yıllarda Overman Sine-Gordon denkleminin spektrumunu hesaplayan bilgisayar kodunu yazdı [47]. Bu kod periyodik NLS denkleminin homoclinic yapısı üzerinde çalışmalar yapmak için kullanıldı [2].

[14] de lineer olmayan denklemler simplektik ve çoklu simplektik yöntemler uygulanmıştır. [3] de yazarlar ayrık, sürekli, vektörel ve skaler lineer olmayan denklemlerini detaylı bir şekilde incelemişlerdir. [10] da ise kısmi türevli diferansiyel denklemler için enerjiyi koruyan ortalama vektör alanı yöntemi uygulanmıştır, çözümlenen denklemler arasında NLS denklemleri de yer almaktadır. Pek çok önemli sonlu fark şeması NLS denklemlerine uygulandı, karşılaştırıldı ve analizi yapıldı [11, 56]. NLS denkleminin sayısal çözümü için B-spline sonlu elemanlar yöntemi kullanıldı [18].

Lineer olmayan Schrödinger diferansiyel denklemleri $\psi = \psi(x, t)$ kompleks fonksiyon ve $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$ başlangıç koşulu ve $\psi(x, t) = \psi(x + L, t)$ periyodik sınır koşulu olmak üzere

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \lambda |\psi|^2 \psi = 0 \quad (4.1)$$

şeklinde dir. Burada $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ dir. ψ kompleks fonksiyon olduğundan $\psi = p + iq$ şeklinde yazılır. Burada $p = p(x, t)$, $q = q(x, t)$ dir. Bu durumda (4.1) denklemleri

$$\begin{aligned} p_t + q_{xx} + \lambda(p^2 + q^2)q &= 0 \\ q_t - p_{xx} - \lambda(p^2 + q^2)p &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

olarak yazılır. Şimdi (4.2) sisteminin kanonik Hamiltonian sistemi olduğunu gösterebiliriz. Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 - \frac{\lambda}{2} (p^2 + q^2)^2 \right] dx. \quad (4.3)$$

olarak alınır

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p} = -\lambda p(p^2 + q^2) - p_{xx}, \quad \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q} = -\lambda q(p^2 + q^2) - q_{xx}$$

eşitlikleri elde edilir, buradan (4.2) sistemi

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q} \\ q_t &= -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p} \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

$$z = (p, q)^T \text{ ve } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ olarak alınır} \text{ kanonik Hamiltonian sistemi}$$

$$\dot{z} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta z}, \quad \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$$

şeklinde elde edilir. (4.3) de türev terimleri için ileri fark yöntemi kullanılırsa sonlu boyutlu Hamiltonian sistemi elde edilir. (4.3) de p_x ve q_x birinci mertebeden türevleri x_{j+1} ve x_j düğüm noktaları kullanılarak diskrite edilirler. Uzak değişkenine göre adım uzunluğu $\Delta x = x_{j+1} - x_j$ olmak üzere $\Delta x = L/N$ olarak alınsın. Buradaki N düğüm sayısına karşılık gelmektedir. Kolaylık olması bakımından $p_j = p(jL/N, t)$ notasyonu p gerçek çözümünün jL/N düğüm noktasında aldığı değere bir yaklaşım olarak kullanılacaktır. Benzer ifade q için de geçerlidir. Bu açıklamalardan Hamiltonian diskrizasyonu

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\Delta x^2} \sum_{j=1}^N ((p_{j+1} - p_j)^2 + (q_{j+1} - q_j)^2) - \frac{\lambda}{4} \sum_{j=1}^N (p_j^2 + q_j^2)^2.$$

olarak bulunur. Buradan Hamiltonianın gradyenti

$$\nabla \bar{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Delta x^2}(p_{j-1} - 2p_j + p_{j+1}) - \lambda p_j(p_j^2 + q_j^2) \\ -\frac{1}{\Delta x^2}(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}) - \lambda q_j(p_j^2 + q_j^2) \end{pmatrix}$$

olmak üzere yarı ayık Hamiltonian sistemi

$$\begin{aligned} p_t &= -Aq - \lambda q(p^2 + q^2), \\ q_t &= Ap + \lambda p(p^2 + q^2) \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$A = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1 & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

4.1.1 NLS Denkleminin Koruduğu Özellikler

NLS denkleminin pek çok matematiksel özellikleri vardır. Bunları bilmek sayısal çalışmaların daha doğru ve hızlı yapılmasını sağlar [46]. Şimdi NLS denkleminin koruduğu bir kaç durumu açıklayalım.

- Her zaman $|\psi|^2$ eğrisinin altında kalan alan korunmaktadır: (4.1) denkleminin her iki tarafı ψ^* ile çarpılırsa

$$i\psi^*\psi_t + \psi^*\psi_{xx} + \lambda|\psi|^4 = 0 \quad (4.5)$$

denklemini bulunur. Buradan (4.5) denkleminin kompleks eşleniği alınır ve bulunan bu denklemden (4.5) denklemini çıkarılırsa

$$|\psi|_t^2 = i\psi^*\psi_{xx} - i\psi\psi_{xx}^*$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^L |\psi|_t^2 dx = i \int_0^L (\psi^*\psi_{xx} - \psi\psi_{xx}^*) dx = 0$$

sonucuna ulaşılır. Yani

$$\frac{d}{dt} \int_0^L |\psi|^2 dx = 0$$

dır. Dolayısıyla $|\psi|^2$ nin altında kalan alan zamana bağlı olarak değişmez.

- Hareketin yani $\int_0^L (|\psi_x|^2 - |\psi|^4) dx$ integralinin zamandan bağımsız olması: (4.1) denklemini ψ_t^* ile çarpılırsa

$$i\psi_t^*\psi_t + \psi_t^*\psi_{xx} + \lambda\psi_t^*|\psi|^2\psi = 0$$

denklemini elde edilir. $\psi_t^* \psi_t = |\psi|_t^2$ olduğu kullanılırsa

$$i|\psi|_t^2 + \psi_t^* \psi_{xx} + \lambda \psi_t^* |\psi|^2 \psi = 0 \quad (4.6)$$

elde edilir. Bu denklemin kompleks eşleniği alınır (4.6) denkleminin ile toplanırsa

$$\psi_t^* \psi_{xx} + \psi_t \psi_{xx}^* + (|\psi|^4)_t = 0$$

denklemini bulunur. Buradan

$$\int_0^L (\psi_t^* \psi_{xx} + \psi_t \psi_{xx}^* + (|\psi|^4)_t) dx = \int_0^L [-|\psi_x|_t^2 + (|\psi|^4)_t] dx = 0$$

elde edilir yani $\frac{d}{dt} \int_0^L [|\psi_x|^2 - |\psi|^4] dx = 0$ dır.

4.1.2 NLS Denkleminin Ortalama Vektör Alanı Yönteminin Uygulanması

$u' = f(u)$ denkleminin için OVA yöntemi

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \int_0^1 f((1 - \tau)u^n + \tau u^{n+1}) d\tau$$

şeklinde uygulanıyordu. Şimdi benzer şekilde (4.4) denklemin sistemine OVA yöntemini uygulayalım. Bunun için öncelikle

$$\int_0^1 ((1 - \tau)y^n + \tau y^{n+1}) d\tau$$

ve

$$\int_0^1 \{ [(1 - \tau)y^n + \tau y^{n+1}]^3 + ((1 - \tau)y^n + \tau y^{n+1})((1 - \tau)z^n + \tau z^{n+1})^2 \} d\tau$$

integrallerini hesaplayalım:

$$\int_0^1 ((1 - \tau)y^n + \tau y^{n+1}) d\tau = \frac{1}{2}y^n + \frac{1}{2}y^{n+1}.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \{[(1-\tau)y^n + \tau y^{n+1}]^3 + ((1-\tau)y^n + \tau y^{n+1})((1-\tau)z^n + \tau z^{n+1})^2\} d\tau = \\
\frac{1}{4}(y^n)^3 + \frac{1}{4}(y^{n+1})^3 + 3\frac{1}{12}(y^n)^2 y^{n+1} + 3\frac{1}{12}(y^{n+1})^2 y^n \\
+ \frac{1}{4}y^n(z^n)^2 + 2\frac{1}{12}y^n z^n z^{n+1} + \frac{1}{12}y^n(z^{n+1})^2 \\
+ \frac{1}{12}y^{n+1}(z^n)^2 + 2\frac{1}{12}y^{n+1} z^n z^{n+1} + \frac{1}{4}y^{n+1}(z^{n+1})^2
\end{aligned}$$

Bu integraller kullanılarak (4.4) sistemine OVA yönteminin uygulanması sonucunda

$$\begin{aligned}
\frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2}A(q^n + q^{n+1}) - \frac{\lambda}{4}(q^n)^3 - \frac{\lambda}{4}(q^{n+1})^3 - 3\frac{\lambda}{12}(q^n)^2 q^{n+1} - 3\frac{\lambda}{12}q^n (q^{n+1})^2 \\
- \frac{\lambda}{4}q^n (p^n)^2 - 2\frac{\lambda}{12}q^n p^n p^{n+1} - \frac{\lambda}{12}q^n (p^{n+1})^2 \\
- \frac{\lambda}{12}q^{n+1} (p^n)^2 - 2\frac{\lambda}{12}q^{n+1} p^n p^{n+1} - \frac{\lambda}{4}q^{n+1} (p^{n+1})^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}A(p^n + p^{n+1}) + \frac{\lambda}{4}(p^n)^3 + \frac{\lambda}{4}(p^{n+1})^3 + 3\frac{\lambda}{12}(p^n)^2 p^{n+1} + 3\frac{\lambda}{12}p^n (p^{n+1})^2 \\
+ \frac{\lambda}{4}p^n (q^n)^2 + 2\frac{\lambda}{12}p^n q^n q^{n+1} + \frac{\lambda}{12}p^n (q^{n+1})^2 \\
+ \frac{\lambda}{12}p^{n+1} (q^n)^2 + 2\frac{\lambda}{12}p^{n+1} q^n q^{n+1} + \frac{\lambda}{4}p^{n+1} (q^{n+1})^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$a_2 = \frac{\Delta t}{2}, \quad a_3 = \frac{\lambda \Delta t}{4}, \quad a_4 = \frac{\lambda \Delta t}{12},$$

olarak katsayılar kısaltılırsa lineer olmayan şu sistem elde edilir:

$$\begin{aligned}
p^{n+1} - p^n + a_2 A(q^n + q^{n+1}) + a_3 (q^n)^3 + a_3 (q^{n+1})^3 + 3a_4 (q^n)^2 q^{n+1} + 3a_4 q^n (q^{n+1})^2 \\
+ a_3 q^n (p^n)^2 + 2a_4 q^n p^n p^{n+1} + a_4 q^n (p^{n+1})^2 \\
+ a_4 q^{n+1} (p^n)^2 + 2a_4 q^{n+1} p^n p^{n+1} + a_3 q^{n+1} (p^{n+1})^2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q^{n+1} - q^n - a_2 A(p^n + p^{n+1}) - a_3 (p^n)^3 - a_3 (p^{n+1})^3 - 3a_4 (p^n)^2 p^{n+1} - 3a_4 p^n (p^{n+1})^2 \\
- a_3 p^n (q^n)^2 - 2a_4 p^n q^n q^{n+1} - a_4 p^n (q^{n+1})^2 \\
- a_4 p^{n+1} (q^n)^2 - 2a_4 p^{n+1} q^n q^{n+1} - a_3 p^{n+1} (q^{n+1})^2 = 0
\end{aligned}$$

Elde edilen bu sistem Newton Raphson yöntemi yardımı ile çözülür bunun için de Jakobiyen matris hesaplanmalıdır. Sistemin Jakobiyen matrisi

$$\begin{aligned}
J &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix} \\
&+ a_3 \begin{pmatrix} 2q^{n+1}p^{n+1} & (p^{n+1})^2 + 3(q^{n+1})^2 \\ -3(p^{n+1})^2 - (q^{n+1})^2 & -2p^{n+1}q^{n+1} \end{pmatrix} \\
&+ a_4 \begin{pmatrix} 2q^n p^n & 3(q^n)^2 + (p^n)^2 \\ -3(p^n)^2 - (q^n)^2 & -2q^n p^n \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 2q^n p^{n+1} & 6q^n q^{n+1} \\ -6p^n p^{n+1} & -2p^n q^{n+1} \end{pmatrix} \\
&+ 2a_4 \begin{pmatrix} p^n q^{n+1} & p^n p^{n+1} \\ -q^n q^{n+1} & -q^n p^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

4.1.3 NLS Denkleminin Parçalara Ayırma Yönteminin Uygulanması

Bu kısımda (4.4) denklem sistemine Strang parçalara ayırma yöntemi uygulanacaktır. Sistem lineer ve lineer olmayan iki denklem sistemi olarak şu şekilde yazılır:

A akımı :

$$p_t = -Aq,$$

$$q_t = Ap$$

B akımı :

$$p_t = -\lambda q(p^2 + q^2),$$

$$q_t = \lambda p(p^2 + q^2)$$

Elde edilen bu iki denklem sistemine OVA yöntemi uygulanırsa

Akım A:

$$\begin{aligned} p^{n+1} - p^n + a_2 A(q^n + q^{n+1}) &= 0 \\ q^{n+1} - q^n - a_2 A(p^n + p^{n+1}) &= 0 \end{aligned}$$

ve

Akım B:

$$\begin{aligned} p^{n+1} - p^n + a_3(q^n)^3 + a_3(q^{n+1})^3 + 3a_4(q^n)^2 q^{n+1} + 3a_4 q^n (q^{n+1})^2 \\ + a_3 q^n (p^n)^2 + 2a_4 q^n p^n p^{n+1} + a_4 q^n (p^{n+1})^2 \\ + a_4 q^{n+1} (p^n)^2 + 2a_4 q^{n+1} p^n p^{n+1} + a_3 q^{n+1} (p^{n+1})^2 = 0 \\ q^{n+1} - q^n - a_3(p^n)^3 - a_3(p^{n+1})^3 - 3a_4(p^n)^2 p^{n+1} - 3a_4 p^n (p^{n+1})^2 \\ - a_3 p^n (q^n)^2 - 2a_4 p^n q^n q^{n+1} - a_4 p^n (q^{n+1})^2 \\ - a_4 p^{n+1} (q^n)^2 - 2a_4 p^{n+1} q^n q^{n+1} - a_3 p^{n+1} (q^{n+1})^2 = 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Burada

$$a_2 = \frac{\Delta t}{2}, \quad a_3 = \frac{\lambda \Delta t}{4}, \quad a_4 = \frac{\lambda \Delta t}{12}$$

dir. Akım A, lineer denklem sistemi olduğundan çözüm oldukça kolaydır, Akım B ise Newton Raphson yöntemi ile çözülür.

4.1.4 NLS Denklemleri İçin Parçalara Ayırma Yönteminin Hata Analizi

Bu kısımda [39, 38] makalelerinden yararlanılmıştır.

Bir boyutlu NLS ele alınsın.

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} + \lambda|\varphi|^2\varphi = 0 \tag{4.7}$$

φ kompleks fonksiyon olduğundan $\varphi = p + iq$ şeklinde yazılabilir. (4.7) de bu toplam yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
p_t &= -q_{xx} - \lambda(p^2 + q^2)q \\
q_t &= p_{xx} + \lambda(p^2 + q^2)p
\end{aligned}$$

elde edilir. Uzay değişkenine göre diskriize edilirse

$$\begin{aligned}
p_t &= -Cq - F_q(p, q) \\
q_t &= Cq + F_p(p, q)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada C dairesel matris, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$
 $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$, $F_q(p, q) = ((p_1 + q_1)q_1, (p_2 + q_2)q_2, \dots, (p_n + q_n)q_n)^T$ ve
 $F_p(p, q) = ((p_1 + q_1)p_1, (p_2 + q_2)p_2, \dots, (p_n + q_n)p_n)^T$ vektörleridir.

Burada $y = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -C \\ C & 0 \end{pmatrix}$ ve $f = \begin{pmatrix} -F_q(p, q) \\ F_p(p, q) \end{pmatrix}$
olarak alınır (4.8) sistemi

$$y_t = Ay + f(t, y)$$

olarak kapalı halde yazılabilir. Bu sisteme parçalara ayırma yöntemi uygulanırsa

$$y_t = Ay \tag{4.9}$$

$$y_t = f(t, y) \tag{4.10}$$

olmak üzere bir lineer bir de lineer olmayan denklem sistemi elde edilir. Bu iki sistemi çözmek için OVA yöntemi uygulansın. t_j anındaki yaklaşım Y_j ile gösterilsin. Hata analizini lineer ve lineer olmayan kısımları ayrı ayrı değerlendirerek yapalım.

Lineer Kısım

$y(t)$ fonksiyonunu $t = t_j$ anında Taylor serisine açalım ve t_{j+1} deki değerini bulalım:

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \Delta t \dot{y}(t_j) + R_1(t_{j+1})$$

Ayrıca $y_t = Ay$ olduğu da kullanılırsa

$$y(t_{j+1}) \approx y(t_j) + \Delta t Ay(t_j)$$

elde edilir.

Lineer kısma OVA yöntemi şu şekilde uygulanır:

$$\frac{Y_{j+1} - Y_j}{\Delta t} = A \left(\frac{Y_{j+1} + Y_j}{2} \right)$$

Buradan üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|e_{j+1}\| &= \|y(t_{j+1}) - Y_{j+1}\| \\ &= \left\| (1 + \Delta t A)y(t_j) - Y_j - \frac{\Delta t}{2} A(Y_{j+1} + Y_j) \right\| \\ &\leq \left\| \left(1 + \frac{\Delta t}{2} A\right) (y(t_j) - Y_j) \right\| + \left\| \frac{\Delta t}{2} Ay(t_j) - \frac{\Delta t}{2} AY_{j+1} \right\| \\ &= \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \|A\|\right) \|e_j\| \\ &\quad + \left\| \frac{\Delta t}{2} Ay(t_j) - \frac{\Delta t}{2} AY_{j+1} + \frac{\Delta t}{2} Ay(t_{j+1}) - \frac{\Delta t}{2} Ay(t_{j+1}) \right\| \\ &\leq \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \|A\|\right) \|e_j\| + \frac{\Delta t}{2} \|A\| \|e_{j+1}\| + \frac{\Delta t}{2} \|A\| \|y(t_{j+1}) - y(t_j)\| \\ \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \|A\|\right) \|e_{j+1}\| &\leq \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \|A\|\right) \|e_j\| + \frac{\Delta t}{2} \|A\| \|y(t_{j+1}) - y(t_j)\| \end{aligned}$$

elde edilir.

$0 < \Delta t \leq \frac{1}{\|A\|}$ için $\frac{1}{1 - \frac{\Delta t}{2} \|A\|} \leq 1 + \|A\| \Delta t$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kullanılırsa

$$\|e_{j+1}\| \leq (1 + \|A\| \Delta t) \left(\left(1 + \frac{\Delta t}{2} \|A\|\right) \|e_j\| + \frac{\Delta t}{2} \|A\| \|y(t_{j+1}) - y(t_j)\| \right)$$

elde edilir. j üzerinden toplam alınır ve ayrıca

$$(1 + \|A\| \Delta t)^j \leq e^{\|A\| \Delta t j}, \quad \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \|A\|\right)^j \leq e^{\frac{\Delta t}{2} \|A\| j}$$

olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|e_{j+1}\| &\leq (1 + \|A\| \Delta t)^j \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \|A\|\right)^j \left(\|e_0\| + \frac{\Delta t}{2} \|A\| \sum_{k=1}^j \|y(t_{k+1}) - y(t_k)\| \right) \\ &\leq e^{\|A\| \Delta t j} e^{\|A\| \frac{\Delta t}{2} j} \left(\|e_0\| + \frac{\Delta t}{2} \|A\| \sum_{k=1}^j \|y(t_{k+1}) - y(t_k)\| \right) \\ &= e^{\|A\| \frac{3\Delta t}{2} j} \left(\|e_0\| + \frac{\Delta t}{2} \|A\| \sum_{k=1}^j \|y(t_{k+1}) - y(t_k)\| \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $j = 0, \dots, n$ için $\Delta t_j \leq T$ olduğu kullanılırsa

$$\|e_{j+1}\| \leq e^{\|A\|\frac{3T}{2}} \left(\|e_0\| + \frac{\Delta t}{2} \|A\| \sum_{k=1}^j \|y(t_{k+1}) - y(t_k)\| \right) \quad (4.11)$$

eşitsizliği elde edilir.

Lineer Olmayan kısım

Lineer olmayan sistemin hata analizini yapmak için lineer sistem için izlenen yol benzer şekilde izlenecektir.

$y(t)$ fonksiyonunu $t = t_j$ anında Taylor serisine açalım ve t_{j+1} deki değerini bulalım:

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \Delta t \dot{y}(t_j) + R_1(t_{j+1})$$

Burada $y_t = f(t, y)$ olduğu da kullanılırsa

$$y(t_{j+1}) \approx y(t_j) + \Delta t f(t_j, y(t_j))$$

elde edilir. Lineer kısımda yapıldığı gibi lineer olmayan kısmını çözmek için OVA yöntemi uygulanırsa:

$$\frac{Y_{j+1} - Y_j}{\Delta t} = \int_0^1 f(t_j, (1 - \tau)Y_j + \tau Y_{j+1}) d\tau$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|e_{j+1}\| &= \|y(t_{j+1}) - Y_{j+1}\| \\ &= \left\| y(t_j) + \Delta t f(t_j, y(t_j)) - Y_j - \Delta t \int_0^1 f(t_j, (1 - \tau)Y_j + \tau Y_{j+1}) d\tau \right\| \\ \|e_{j+1}\| &\leq \|y(t_j) - Y_j\| + \Delta t \left\| \int_0^1 [f(t_j, y(t_j)) - f(t_j, (1 - \tau)Y_j + \tau Y_{j+1})] d\tau \right\| \\ &= \|e_j\| + \Delta t \left\| \int_0^1 [f(t_j, y(t_j)) - f(t_j, (1 - \tau)Y_j + \tau Y_{j+1})] d\tau \right\| \end{aligned}$$

bulunur. f ikinci değişkene göre Lipschitz-sürekliliği olduğundan

$$\|f(t_j, y(t_j)) - f(t_j, (1 - \tau)Y_j + \tau Y_{j+1})\| \leq L_f \|y(t_j) - (1 - \tau)Y_j - \tau Y_{j+1}\|$$

olacak şekilde $L_f \leq 0$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} \|e_{j+1}\| &\leq \|e_j\| + \Delta t L_f \int_0^1 \|y(t_j) - (1 - \tau)Y_j - \tau Y_{j+1}\| d\tau \\ &= \|e_j\| + \Delta t L_f \left[\|y(t_j) - Y_j\| + \frac{1}{2} \|Y_j - Y_{j+1}\| \right] \\ &= \|e_j\| + \Delta t L_f \|e_j\| + \frac{\Delta t}{2} L_f \|Y_j - Y_{j+1}\| \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|Y_j - Y_{j+1}\| &= \|Y_j - Y_{j+1} + y(t_j) - y(t_j) + y(t_{j+1}) - y(t_{j+1})\| \\ &\leq \|y(t_j) - Y_j\| + \|y(t_{j+1}) - Y_{j+1}\| + \|y(t_{j+1}) - y(t_j)\| \\ &= \|e_j\| + \|e_{j+1}\| + \|y(t_{j+1}) - y(t_j)\| \end{aligned}$$

olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|e_{j+1}\| &\leq \|e_j\| + \Delta t L_f \|e_j\| + \frac{\Delta t}{2} L_f \|e_j\| + \frac{\Delta t}{2} L_f \|e_{j+1}\| \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} L_f \|y(t_{j+1}) - y(t_j)\| \\ \left(1 - \frac{\Delta t}{2} L_f\right) \|e_{j+1}\| &\leq \left(1 + \frac{3}{2} \Delta t L_f\right) \|e_j\| + \frac{\Delta t}{2} L_f \|y(t_{j+1}) - y(t_j)\| \end{aligned}$$

elde edilir.

$0 < \Delta t \leq \frac{1}{\|L_f\|}$ için $\frac{1}{1 - \frac{\Delta t}{2} L_f} \leq 1 + L_f \Delta t$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kullanılırsa

$$\|e_{j+1}\| \leq (1 + L_f \Delta t) \left[\left(1 + \frac{3}{2} \Delta t L_f\right) \|e_j\| + \frac{\Delta t}{2} L_f \|y(t_{j+1}) - y(t_j)\| \right]$$

elde edilir. j üzerinden toplam alınır ve ayrıca

$$(1 + L_f \Delta t)^j \leq e^{L_f \Delta t j}, \quad \left(1 + \frac{3}{2} \Delta t L_f\right)^j \leq e^{\frac{3}{2} \Delta t L_f j}$$

olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|e_{j+1}\| &\leq (1 + L_f \Delta t)^j \left(1 + \frac{3}{2} \Delta t L_f\right)^j \left(\|e_j\| + \frac{\Delta t}{2} L_f \|y(t_{j+1}) - y(t_j)\|\right) \\
&\leq e^{L_f \Delta t j} e^{\frac{3}{2} L_f \Delta t j} \left(\|e_0\| + \frac{\Delta t}{2} L_f \sum_{k=1}^j \|y(t_{k+1}) - y(t_k)\|\right) \\
&= e^{L_f \Delta t j \frac{5}{2}} \left(\|e_0\| + \frac{\Delta t}{2} L_f \sum_{k=1}^j \|y(t_{k+1}) - y(t_k)\|\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $j = 0, \dots, n$ için $\Delta t j \leq T$ olduğu kullanılırsa

$$\|e_{j+1}\| \leq e^{L_f T \frac{5}{2}} \left(\|e_0\| + \frac{\Delta t}{2} L_f \sum_{k=1}^j \|y(t_{k+1}) - y(t_k)\|\right) \quad (4.12)$$

olarak bulunur.

4.2 İki Boyutlu NLS Denklemi

β sabit, $\psi = \psi(x, y, t)$ kompleks değerli fonksiyon olmak üzere

$$\psi(x + L, y, t) = \psi(x, y, t), \quad \psi(x, y + L, t) = \psi(x, y, t)$$

periyodik sınır koşulu ve

$$\psi(0, x, y) = \psi_0$$

başlangıç koşulu ile verilen iki boyutlu NLS denklemi

$$i\psi_{tt} + \psi_{xx} + \psi_{yy} + \beta|u|^2 u = 0 \quad (4.13)$$

şeklinindedir. Lineer olmayan ışık dalgalarının yayılımı bu denklem ile ifade edilir [58]. Plazma fiziğinde Langmuir dalgaları için de iki boyutlu NLS denklemi elde edilmiştir [60]. Newton conjugate- gradyent yöntem [58], multi-symplectic splitting yöntem [15] bu denklemi çözmek için uygulanan yöntemlerden bazılarıdır. Ayrıca lineer Crank-Nicolson yöntemi iki boyutlu NLS denklemini çözmek için uygulanmıştır [55].

ψ kompleks değerli fonksiyon olduğundan $p = p(x, y, t)$, $q = q(x, y, t)$ reel değerli fonksiyonlar olmak üzere $\psi = p + iq$ şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
p_t + q_{xx} + q_{yy} + \beta(p^2 + q^2)q &= 0 \\
q_t - p_{xx} - p_{yy} - \beta(p^2 + q^2)p &= 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

denklem sistemi elde edilir. Hamiltonian

$$\mathcal{H}(z) = \int_{\Omega} H(z) dA = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[p_x^2 + q_x^2 + p_y^2 + q_y^2 - \frac{\beta}{2} (p^2 + q^2)^2 \right] dA$$

şeklinde alınır (4.14) sistemi Hamiltonian sistemi olarak şu formda ifade edilir:

$$z_t = J^{-1} \frac{\delta \mathcal{H}(z)}{\delta z}$$

Burada $z = (p, q)^T$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J^{-1} = -J$ dir.

(4.14) sistemini sayısal olarak çözmek için önce Strang parçalara ayırma yöntemi uygulayalım daha sonra da ortalama vektör alanı yöntemi uygulayalım. (4.14) sistemine parçalara ayırma yöntemi uyguladığımızda iki lineer, bir lineer olmayan alt probleme ayrılır:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 : p_t + q_{xx} &= 0 \\
q_t - p_{xx} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 : p_t + q_{yy} &= 0 \\
q_t - p_{yy} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} : p_t + \beta(p^2 + q^2)q &= 0 \\
q_t - \beta(p^2 + q^2)p &= 0
\end{aligned}$$

Şimdi bu sistemleri tek tek diskrize edelim.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 : p_t + q_{xx} &= 0 \\
q_t - p_{xx} &= 0
\end{aligned}$$

sistemi ele alınırsa $\mathcal{H}(z) = \int_{\Omega} H(z) dA = \int_{\Omega} \frac{1}{2}[p_x^2 + q_x^2] dA$ olmak üzere bu sistem Hamiltonian sistemi olarak şu şekilde ifade edilir:

$$z_t = J^{-1} \frac{\delta \mathcal{H}(z)}{\delta z}$$

Burada $z = (p, q)^T$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dır. Hamiltonian fonksiyonelinde türev terimleri için ileri fark yöntemi kullanılırsa diskrit Hamiltonian elde edilir:

$$\bar{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2\Delta x^2} [(p_{i+1,j} - p_{i,j})^2 + (q_{i+1,j} - q_{i,j})^2]$$

Diskrit Hamiltonianın gradyenti

$$\nabla \bar{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2\Delta x^2} \begin{pmatrix} p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j} \\ q_{i+1,j} - 2q_{i,j} + q_{i-1,j} \end{pmatrix}$$

kullanılırsa yarı ayrık Hamiltonian sistemi

$$\begin{aligned} p_t &= -Aq, \\ q_t &= Ap \end{aligned} \tag{4.15}$$

olarak elde edilir, burada

$$A = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_{1,j} \\ p_{2,j} \\ \vdots \\ p_{N,j} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_{1,j} \\ q_{2,j} \\ \vdots \\ q_{N,j} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 : p_t + q_{yy} &= 0 \\ q_t - p_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

sistemi $\mathcal{H}(z) = \int_{\Omega} H(z) dA = \int_{\Omega} \frac{1}{2}[p_y^2 + q_y^2] dA$ olmak üzere

$$z_t = J^{-1} \frac{\delta \mathcal{H}(z)}{\delta z}$$

şeklinde Hamiltonian sistemi olarak ifade edilir. Burada $z = (p, q)^T$,

$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dir. Hamiltonian fonksiyoneli kullanılırsa diskrit Hamiltonian sistemi

$$\bar{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2\Delta y^2} [(p_{i,j+1} - p_{i,j})^2 + (q_{i,j+1} - q_{i,j})^2]$$

olarak elde edilir. Diskrit Hamiltoniannın gradyenti

$$\nabla \bar{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2\Delta y^2} \begin{pmatrix} p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1} \\ q_{i,j+1} - 2q_{i,j} + q_{i,j-1} \end{pmatrix}$$

kullanılırsa

$$\begin{aligned} p_t &= -Aq, \\ q_t &= Ap \end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir. Burada

$$A = \frac{1}{\Delta y^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_{i,1} \\ p_{i,2} \\ \vdots \\ p_{i,N} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_{i,1} \\ q_{i,2} \\ \vdots \\ q_{i,N} \end{pmatrix}$$

dir.

Lineer olmayan

$$\begin{aligned} \mathcal{N} : p_t + \beta(p^2 + q^2)q &= 0 \\ q_t - \beta(p^2 + q^2)p &= 0 \end{aligned}$$

sistemi ele alınsın. Hamiltonian $\mathcal{H}(z) = \int_{\Omega} H(z) dA = \int_{\Omega} \frac{\beta}{2} (p^2 + q^2)^2 dA$ olmak üzere bu sistem de

$$z_t = J^{-1} \frac{\delta \mathcal{H}(z)}{\delta z}$$

şeklinde Hamiltonian sistemi olarak ifade edilir. Burada $z = (p, q)^T$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

dir. Diskrit Hamiltonain

$$\bar{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^N \frac{\beta}{4} (p_{i,j}^2 + q_{i,j}^2)^2$$

kullanılırsa

$$\nabla \bar{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} -\beta(p_{i,j}^2 + q_{i,j}^2)p_{i,j} \\ -\beta(p_{i,j}^2 + q_{i,j}^2)q_{i,j} \end{pmatrix}$$

olarak Hamiltonianın gradyenti elde edilir. Buradan sonlu boyutlu Hamiltonian sistemi

$$\begin{aligned} p_t &= -\beta(p^2 + q^2)q, \\ q_t &= \beta(p^2 + q^2)p \end{aligned} \quad (4.17)$$

olarak yazılır. Burada

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_{1,j} \\ p_{2,j} \\ \vdots \\ p_{N,j} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_{1,j} \\ q_{2,j} \\ \vdots \\ q_{N,j} \end{pmatrix}$$

dir. Şimdi elde edilen (4.15),(4.16),(4.17) sistemlerine OVA yönteminin uygulanışını gösterelim.

4.2.1 İki Boyutlu NLS Denkleminin Ortalama Vektör Alanı Yönteminin Uygulanması

$$\begin{aligned} p_t &= -Aq, \\ q_t &= Ap \end{aligned}$$

sistemini ele alalım. Bu sisteme OVA yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} &= -\frac{1}{2}A(q^n + q^{n+1}), \\ \frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2}A(p^n + p^{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir ve $a = \frac{\Delta t}{2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} p^{n+1} - p^n + aA(q^{n+1} + q^n) &= 0 \\ q^{n+1} - q^n - aA(p^{n+1} + p^n) &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} p_t &= -Aq, \\ q_t &= Ap \end{aligned}$$

sistemine OVA yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} p^{n+1} - p^n + aA(q^{n+1} + q^n) &= 0 \\ q^{n+1} - q^n - aA(p^{n+1} + p^n) &= 0 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir.

Son olarak lineer olmayan

$$\begin{aligned} p_t &= -\beta(p + q)q, \\ q_t &= \beta(p + q)p \end{aligned}$$

sistemine OVA yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} &= -\frac{\beta}{3} [p^n q^n + \frac{1}{2} p^n q^{n+1} + \frac{1}{2} p^{n+1} q^n + p^{n+1} q^{n+1} + (q^n)^2 + q^n q^{n+1} + (q^{n+1})^2] \\ \frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} &= \frac{\beta}{3} [p^n q^n + \frac{1}{2} p^n q^{n+1} + \frac{1}{2} p^{n+1} q^n + p^{n+1} q^{n+1} + (p^n)^2 + p^n p^{n+1} + (p^{n+1})^2] \end{aligned}$$

sistemi bulunur ve burada $b = \frac{\beta \Delta t}{3}$ olarak alınır

$$\begin{aligned} p^{n+1} - p^n + b[p^n q^n + \frac{1}{2} p^n q^{n+1} + \frac{1}{2} p^{n+1} q^n + p^{n+1} q^{n+1} + (q^n)^2 + q^n q^{n+1} + (q^{n+1})^2] &= 0 \\ q^{n+1} - q^n - b[p^n q^n + \frac{1}{2} p^n q^{n+1} + \frac{1}{2} p^{n+1} q^n + p^{n+1} q^{n+1} + (p^n)^2 + p^n p^{n+1} + (p^{n+1})^2] &= 0 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Lineer sistemlerin çözümü kolaylıkla elde edilir, lineer olmayan sistemi çözmek için ise Newton Raphson yöntemi kullanılır.

4.3 İkili NLS Denklem Sistemi

$\psi_1(x, t)$ ve $\psi_2(x, t)$ kompleks fonksiyonlar ve $\psi_1 = \psi_1(x, t)$, $\psi_2 = \psi_2(x, t)$ olmak üzere periyodik sınır koşullu ikili NLS denklem sistemi

$$\begin{aligned} i\psi_{1t} + \alpha_1\psi_{1xx} + (\sigma_1 |\psi_1|^2 + v |\psi_2|^2)\psi_1 &= 0 \\ i\psi_{2t} + \alpha_2\psi_{2xx} + (\sigma_2 |\psi_2|^2 + v |\psi_1|^2)\psi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

şeklinindedir. İkili NLS denklem sisteminin lineer olmayan optik ve jeofizik akış dinamiği gibi çeşitli uygulamaları vardır. Analitik çözümler bazı integrallenebilir durumlarda elde edilir. Bunlardan biri $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = v$ olması durumu yani Manakov modelidir, bir diğeri ise $\alpha_1 = -\alpha_2, \sigma_1 = \sigma_2 = -v$ olmasıdır bu durumda, ters saçılım dönüşüm yöntemi ile çözüm elde edilir. Parametrelerin farklı olduğu durumlarda yani integrallenemeyen durumlarda lineer olmayan durumları anlamak için sayısal yöntemler kullanılmak zorundadır. Lineer olmayan durumlar, sistemde kararlı ve kararlı olmayan dalga paketlerinin etkileşimi sonucu ortaya çıkar. İkili NLS denklem sistemini çözmek için pek çok çalışmalar yapılmıştır. Örneğin simplektik, çoklu simplektik yöntemler uygulanmıştır [7]. Ayrıca sonlu fark yöntemi ikili NLS denklem sistemini çözmek için kullanılmıştır [32]. Sürekli olmayan Galerkin yöntemi hem NLS denklemi hem ikili NLS denklem sistemi hem de iki boyutlu NLS denklemi için uygulanmıştır [61]. Ancak periyodik sınır koşullu ikili NLS denklem sistemi için çok fazla çalışma bulunmamaktadır.

$p = p(x, t)$, $q = q(x, t)$ olmak üzere $\psi_1 = q_1 + iq_2$ ve $\psi_2 = q_3 + iq_4$ olarak alınırsa denklem sistemi

$$\begin{aligned} q_{1t} + \alpha_1 q_{2xx} + (\sigma_1(q_1^2 + q_2^2) + v(q_3^2 + q_4^2))q_2 &= 0, \\ q_{2t} - \alpha_1 q_{1xx} - (\sigma_1(q_1^2 + q_2^2) + v(q_3^2 + q_4^2))q_1 &= 0, \\ q_{3t} + \alpha_2 q_{4xx} + (v(q_1^2 + q_2^2) + \sigma_2(q_3^2 + q_4^2))q_4 &= 0, \\ q_{4t} - \alpha_2 q_{3xx} - (v(q_1^2 + q_2^2) + \sigma_2(q_3^2 + q_4^2))q_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

olarak yazılır. $w = \frac{1}{4}(\sigma_1(q_1^2 + q_2^2)^2 + \sigma_2(q_3^2 + q_4^2)^2) + \frac{v}{2}(q_1^2 + q_2^2)(q_3^2 + q_4^2)$ olmak üzere Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \int_{\Omega} \left[w - \frac{\alpha_1}{2}(q_{1x}^2 + q_{2x}^2) - \frac{\alpha_2}{2}(q_{3x}^2 + q_{4x}^2) \right] dx \quad (4.20)$$

şeklinde alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q_1} &= \alpha_1 q_{1xx} + (\sigma_1(q_1^2 + q_2^2) + v(q_3^2 + q_4^2))q_1 \\ \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q_2} &= \alpha_1 q_{2xx} + (\sigma_1(q_1^2 + q_2^2) + v(q_3^2 + q_4^2))q_2 \\ \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q_3} &= \alpha_2 q_{3xx} + (v(q_1^2 + q_2^2) + \sigma_2(q_3^2 + q_4^2))q_3 \\ \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q_4} &= \alpha_2 q_{4xx} + (v(q_1^2 + q_2^2) + \sigma_2(q_3^2 + q_4^2))q_4 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$q_{1t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q_2}, \quad q_{2t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q_1}, \quad q_{3t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q_4}, \quad q_{4t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q_3},$$

bulunur. Dolayısıyla (4.19) denklem sistemi kanonik Hamiltonian denklem sistemi olarak

$$\dot{z} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta z}$$

yazılır, burada $z = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T$, ve

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}.$$

dir. Burada NLS denkleminde olduğu gibi (4.20) de birinci mertebeden türev terimleri için ileri fark yöntemi kullanılır ve sonlu boyutlu Hamiltonian sistemi elde edilir. q_{ix} , $i = 1, 2, 3, 4$ birinci mertebeden türevleri x_{m+1} ve x_m düğüm noktaları yardımıyla diskrize edilirler. $\Delta x = L/N$ adım uzunluğu ve

$q_{i_m} = q_i(mL/N, t)$ de q_i gerçek çözümünün mL/N düğüm noktasındaki yaklaşım olmak üzere diskrit Hamiltonian şu şekildedir:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{H}} &= \sum_{m=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{4} [\sigma_1(q_{1_m}^2 + q_{2_m}^2)^2 + \sigma_2(q_{3_m}^2 + q_{4_m}^2)^2] + \frac{v}{2}(q_{1_m}^2 + q_{2_m}^2)(q_{3_m}^2 + q_{4_m}^2) \right\} \\ &- \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\alpha_1}{2} \left[\left(\frac{q_{1_{m+1}} - q_{1_m}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{q_{2_{m+1}} - q_{2_m}}{\Delta x} \right)^2 \right] \\ &- \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\alpha_2}{2} \left[\left(\frac{q_{3_{m+1}} - q_{3_m}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{q_{4_{m+1}} - q_{4_m}}{\Delta x} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

Diskrit Hamiltoniannın gradyenti

$$\nabla \bar{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{\Delta x^2}(q_{1_{m-1}} - 2q_{1_m} + q_{1_{m+1}}) + \sigma_1(q_{1_m}^2 + q_{2_m}^2)q_{1_m} + v(q_{3_m}^2 + q_{4_m}^2)q_{1_m} \\ \frac{\alpha_1}{\Delta x^2}(q_{2_{m-1}} - 2q_{2_m} + q_{2_{m+1}}) + \sigma_1(q_{1_m}^2 + q_{2_m}^2)q_{2_m} + v(q_{3_m}^2 + q_{4_m}^2)q_{2_m} \\ \frac{\alpha_2}{\Delta x^2}(q_{3_{m-1}} - 2q_{3_m} + q_{3_{m+1}}) + \sigma_2(q_{3_m}^2 + q_{4_m}^2)q_{3_m} + v(q_{1_m}^2 + q_{2_m}^2)q_{3_m} \\ \frac{\alpha_2}{\Delta x^2}(q_{4_{m-1}} - 2q_{4_m} + q_{4_{m+1}}) + \sigma_2(q_{3_m}^2 + q_{4_m}^2)q_{4_m} + v(q_{1_m}^2 + q_{2_m}^2)q_{4_m} \end{pmatrix}.$$

kullanılırsa yarı ayrık Hamiltonian sistemi

$$A = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \\ 1 & & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

dairesel matris olmak üzere

$$\begin{aligned}q_{1_t} &= -\alpha_1 A q_2 - \sigma_1(q_1^2 + q_2^2)q_2 - v(q_3^2 + q_4^2)q_2, \\ q_{2_t} &= \alpha_1 A q_1 + \sigma_1(q_1^2 + q_2^2)q_1 + v(q_3^2 + q_4^2)q_1, \\ q_{3_t} &= -\alpha_2 A q_4 - \sigma_2(q_3^2 + q_4^2)q_4 - v(q_1^2 + q_2^2)q_4, \\ q_{4_t} &= \alpha_2 A q_3 + \sigma_2(q_3^2 + q_4^2)q_3 + v(q_1^2 + q_2^2)q_3\end{aligned}\tag{4.21}$$

şeklinde elde edilir.

4.3.1 İkili NLS Denklem Sistemine OVA Yönteminin Uygulanması

(4.21) İkili NLS denklem sistemine OVA yönteminin uygulanışı sonucunda şu eşitlikler elde edilir:

$$\frac{q_1^{n+1} - q_1^n}{\Delta t} = -\frac{\alpha_1}{2} A(q_2^n + q_2^{n+1}) - \int_0^1 [\sigma_1(b_1^2 + b_2^2)b_2 + v(b_3^2 + b_4^2)b_2] d\tau$$

$$\frac{q_2^{n+1} - q_2^n}{\Delta t} = \frac{\alpha_1}{2} A(q_1^n + q_1^{n+1}) + \int_0^1 [\sigma_1(b_1^2 + b_2^2)b_1 + v(b_3^2 + b_4^2)b_1] d\tau$$

$$\frac{q_3^{n+1} - q_3^n}{\Delta t} = -\frac{\alpha_2}{2} A(q_4^n + q_4^{n+1}) - \int_0^1 [\sigma_2(b_3^2 + b_4^2)b_4 + v(b_1^2 + b_2^2)b_4] d\tau$$

$$\frac{q_4^{n+1} - q_4^n}{\Delta t} = \frac{\alpha_2}{2} A(q_3^n + q_3^{n+1}) + \int_0^1 [\sigma_2(b_3^2 + b_4^2)b_3 + v(b_1^2 + b_2^2)b_3] d\tau$$

Kolay ifade edilmesi için $b_i = (1 - \tau)q_i^n + \tau q_i^{n+1}$ kısaltılması yapıldı. İntegraller hesaplandıktan sonra elde edilen lineer olmayan sistem Newton Raphson yöntemiyle çözüldü. Bunun için de Jakobiyen şu şekilde hesaplandı:

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_1 A & 0 & 0 \\ -a_1 A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 A \\ 0 & 0 & -a_2 A & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ a_3 \begin{pmatrix} 2q_2^n q_1^n & (q_1^n)^2 + 3(q_2^n)^2 & 0 & 0 \\ -(q_2^n)^2 - 3(q_1^n)^2 & -2q_1^n q_2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2q_4^n q_3^n & (q_3^n)^2 + 3(q_4^n)^2 \\ 0 & 0 & -(q_4^n)^2 - 3(q_3^n)^2 & -2q_3^n q_4^n \end{pmatrix}$$

$$+ a_3 \begin{pmatrix} 2q_2^{n+1} q_1^{n+1} & 6q_2^{n+1} q_2^n + 9(q_2^{n+1})^2 & 0 & 0 \\ -6q_1^{n+1} q_1^n - 9(q_1^{n+1})^2 & -2q_1^n q_2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2q_4^{n+1} q_3^{n+1} & 6q_4^{n+1} q_4^n + 9(q_4^{n+1})^2 \\ 0 & 0 & -6q_3^{n+1} q_3^n - 9(q_3^{n+1})^2 & -2q_3^n q_4^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$+ a_3 \begin{pmatrix} 2q_2^{n+1} q_1^n + 6q_2^{n+1} q_1^{n+1} & 2q_1^n q_1^{n+1} + 3(q_1^{n+1})^2 & 0 & 0 \\ -2q_2^{n+1} q_2^n - 3(q_2^{n+1})^2 & -2q_1^{n+1} q_2^n - 6q_1^{n+1} q_2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2q_4^{n+1} q_3^n + 6q_4^{n+1} q_3^{n+1} & 2q_3^n q_3^{n+1} + 3(q_3^{n+1})^2 \\ 0 & 0 & -2q_4^n q_4^{n+1} - 3(q_4^{n+1})^2 & -2q_3^{n+1} q_4^n - 6q_3^{n+1} q_4^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$+ a_5 \begin{pmatrix} 0 & (q_3^n)^2 + (q_4^n)^2 & 2q_2^n q_3^n & 2q_2^n q_4^n \\ -(q_3^n)^2 - (q_4^n)^2 & 0 & -2q_1^n q_3^n & -2q_1^n q_4^n \\ 2q_4^n q_1^n & 2q_4^n q_2^n & 0 & (q_1^n)^2 + (q_2^n)^2 \\ -2q_3^n q_1^n & -2q_3^n q_2^n & -(q_1^n)^2 - (q_2^n)^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ a_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2q_2^n q_3^{n+1} & 2q_2^n q_4^{n+1} \\ 0 & 0 & -2q_1^n q_3^{n+1} & -2q_1^n q_4^{n+1} \\ 2q_4^n q_1^{n+1} & 2q_4^n q_2^{n+1} & 0 & 0 \\ -2q_3^n q_1^{n+1} & -2q_3^n q_2^{n+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ a_5 \begin{pmatrix} 0 & 2q_3^n q_3^{n+1} + 2q_4^n q_4^{n+1} & 2q_2^{n+1} q_3^n & 2q_2^{n+1} q_4^n \\ -2q_3^n q_3^{n+1} - 2q_4^n q_4^{n+1} & 0 & -2q_1^{n+1} q_3^n & -2q_1^{n+1} q_4^n \\ 2q_4^{n+1} q_1^n & 2q_2^n q_4^{n+1} & 0 & 2q_1^n q_1^{n+1} + 2q_2^n q_2^{n+1} \\ -2q_1^n q_3^{n+1} & -2q_3^{n+1} q_2^n & -2q_1^n q_1^{n+1} - 2q_2^n q_2^{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$+a_5 \begin{pmatrix} 0 & 3(q_3^{n+1})^2 + 3(q_4^{n+1})^2 & 6q_2^{n+1}q_3^{n+1} & 6q_2^{n+1}q_4^{n+1} \\ -3(q_3^{n+1})^2 - 3(q_4^{n+1})^2 & 0 & -6q_1^{n+1}q_3^{n+1} & -6q_1^{n+1}q_4^{n+1} \\ 6q_4^{n+1}q_1^{n+1} & 6q_4^{n+1}q_2^{n+1} & 0 & 3(q_1^{n+1})^2 + 3(q_2^{n+1})^2 \\ -6q_3^{n+1}q_1^{n+1} & -6q_3^{n+1}q_2^{n+1} & -3(q_1^{n+1})^2 - 3(q_2^{n+1})^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Burada

$$a_1 = \frac{\alpha_1 \Delta t}{2}, \quad a_2 = \frac{\alpha_2 \Delta t}{2}, \quad a_3 = \frac{\sigma_1 \Delta t}{12}, \quad a_4 = \frac{\sigma_2 \Delta t}{12}, \quad a_5 = \frac{v \Delta t}{12}$$

dir.

4.3.2 İkili NLS Denklem Sistemine Strang Parçalara Ayırma Yönteminin Uygulanması

(4.21) ikili NLS denklem sistemine Strang parçalara ayırma yöntemi şu şekilde uygulanır:

Akım A :

$$\begin{aligned} q_{1t} &= \frac{\alpha_1}{\Delta x^2} A q_2 \\ q_{2t} &= -\frac{\alpha_1}{\Delta x^2} A q_1 \\ q_{3t} &= \frac{\alpha_2}{\Delta x^2} A q_4 \\ q_{4t} &= -\frac{\alpha_2}{\Delta x^2} A q_3 \end{aligned}$$

Akım B :

$$\begin{aligned} q_{1t} &= \sigma_1(q_1^2 + q_2^2)q_2 + v(q_3^2 + q_4^2)q_2, \\ q_{2t} &= -\sigma_1(q_1^2 + q_2^2)q_1 - v(q_3^2 + q_4^2)q_1, \\ q_{3t} &= \sigma_2(q_3^2 + q_4^2)q_4 + v(q_1^2 + q_2^2)q_4, \\ q_{4t} &= -\sigma_2(q_3^2 + q_4^2)q_3 - v(q_1^2 + q_2^2)q_3 \end{aligned}$$

olmak üzere sistem lineer ve lineer olmayan iki alt sisteme ayrılır.

$$\frac{q_1^{n+1} - q_1^n}{\Delta t} = -\frac{\alpha_1}{2}A(q_2^n + q_2^{n+1}) \quad (4.22)$$

$$\frac{q_2^{n+1} - q_2^n}{\Delta t} = \frac{\alpha_1}{2}A(q_1^n + q_1^{n+1}) \quad (4.23)$$

$$\frac{q_3^{n+1} - q_3^n}{\Delta t} = -\frac{\alpha_2}{2}A(q_4^n + q_4^{n+1}) \quad (4.24)$$

$$\frac{q_4^{n+1} - q_4^n}{\Delta t} = \frac{\alpha_2}{2}A(q_3^n + q_3^{n+1}) \quad (4.25)$$

Lineer sistemine OVA yöntemi uygulandıktan sonra çözüm şu şekilde elde edilir:
(4.22), (4.23) den

$$q_1^{n+1} + \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} A q_2^{n+1} = q_1^n - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} A q_2^n =: \tilde{q}_1 \quad (4.26)$$

$$q_2^{n+1} - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} A q_1^{n+1} = q_2^n + \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} A q_1^n =: \tilde{q}_2 \quad (4.27)$$

elde edilir ve (4.26) dan q_1^{n+1} çekilirse

$$q_1^{n+1} = \tilde{q}_1 - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} A q_2^{n+1} \quad (4.28)$$

elde edilir, bulunan bu değer (4.27) de yerine yazılırsa

$$q_2^{n+1} + \alpha_1^2 \frac{\Delta^2}{4} A^2 q_2^{n+1} = \tilde{q}_2 + \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} \tilde{q}_1 \Rightarrow (I + \alpha_1^2 \frac{\Delta^2}{4} A^2) q_2^{n+1} = \tilde{q}_2 + \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} \tilde{q}_1$$

elde edilir. \tilde{q}_1, \tilde{q}_2 bilinen değerler olduğu için q_2^{n+1} buradan kolaylıkla bulunur, daha sonrada (4.28) eşitliğinden q_1^{n+1} elde edilir. Benzer işlemler (4.24) ve (4.25) eşitliklerine uygulanırsa

$$\begin{aligned} q_3^{n+1} &= \tilde{q}_3 - \alpha_2 \frac{\Delta t}{2} A q_4^{n+1} \\ (I + \alpha_2^2 \frac{\Delta^2}{4} A^2) q_4^{n+1} &= \tilde{q}_4 + \alpha_2 \frac{\Delta t}{2} \tilde{q}_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada da \tilde{q}_3, \tilde{q}_4 değerleri bilindiğinden önce q_4^{n+1} daha sonrada q_3^{n+1} bulunur.

Akım B ye OVA yöntemi uygulanır ve lineer olmayan sistem Newton Raphson yöntemi kullanılarak çözülür.

4.4 Dağılım Analizi

Sayısal çözümlerini aradığımız problemler lineer değildir. Lineer olmayan problemlerin çözümlerinin davranışları hakkında halen pek çok soru vardır. Enerji korunması çözümün davranışı hakkında yeterli bilgi vermez. Çözümün davranışını incelemek için lineer olmayan denklemleri lineer hale getirmek ve daha sonra sayısal dağılım analizini yapmak gerekiyor. Dağılım analizi ile dalganın hızı ortaya çıkıyor. Sayısal çözüm analitik çözümden daha mı hızlı yoksa daha mı yavaş sorusu cevaplanıyor. Ayrık dağılım analizi ve grup hızları lineer ve lineer olmayan denklemler için önemli bir yere sahiptirler [6]. Dalga denklemlerin çözümleri genel olarak dalga sayısı k ve frekans w ile ifade edilmektedir. Dalga sayısı ile frekans arasındaki bağıntı sürekli dağılım bağıntısını ifade etmektedir. Dağılım bağıntısı k nın fonksiyonu olarak şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$w = w(k)$$

Periyodik başlangıç koşulları ile verilen lineer problemlerin çözümleri Fourier integral dönüşümü yöntemi kullanılarak elde edilir. Sabit katsayılı lineer zamana bağlı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx + \lambda(k)t} dk$$

formundadır. Burada $A(k)$ herhangi bir fonksiyon, $i = \sqrt{-1}$ dir. Her dalga lineer kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü olarak kabul edilirse, çözüm \hat{u} sabit ve $\lambda(k)$ kompleks fonksiyon olmak üzere

$$u(x, t) = \hat{u} e^{ikx + \lambda(k)t} \quad (4.29)$$

formundadır. $\lambda(k)$ fonksiyonu, üstel fonksiyonun lineer denklemi sağlayacağı şekilde seçilir. (4.29) eşitliği

$$u(x, t) = \hat{u} e^{i(kx + Im[\lambda(k)]t)} e^{Re[\lambda(k)]t}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer her k için $Re(\lambda(k)) = 0$ ise denklem korunumlu (conservative) tiptedir ve her $k \in (-\infty, \infty)$ için $w(k)$ reel değerli fonksiyon olmak

üzere $\lambda(k) = iw(k)$ dir. Çözüm

$$u(x, t) = \hat{u}e^{i(kx+w(k)t)} \quad (4.30)$$

şeklindedir.

Dağılım bağıntısının yanısıra dalganın hızı hakkında başka tanımlara da ihtiyaç vardır. Faz hızı dalga önünün yayılma hızını vermektedir. $\theta = kx - w(k)t$ ya faz,

$$c(k) := \frac{w(k)}{k}$$

ise faz hızı denir. Grup hızı $C(k)$ dalga paketinin ortalama dağılım hızını karakterize etmektedir ve

$$C(k) := \frac{dw(k)}{dk}$$

ile hesaplanır. Dağılım bağıntısı k ya göre lineer değilse denklem dağılımlıdır. Buradan denklemin dağılımlı olması için gerekli koşulun $w''(k) \neq 0$ olduğu ortaya çıkar. Çünkü dağılım bağıntısı lineer ise $w''(k) = 0$ dır. Dolayısıyla farklı dalga sayıları için her dalga farklı hızla hareket eder. Dağılımlı dalgaların, bileşen dalgaları farklı hıza sahip olduğundan dalga formunda hareket etmezler. Ancak buna karşılık dağılımlı olmayan dalgalar dalga formunda yani farklı dalgalar aynı hızla hareket ederler. Sonuç olarak dalga davranışını karakterize etmede grup hızı faz hızından daha önemlidir. Şimdi sürekli dağılım bağıntısı için birkaç örnek verelim.

Lineer ısı denklemi: $u_t = a^2 u_{xx}$ lineer diferansiyel denklem olduğundan (4.29) nolu çözüm kullanılırsa

$$\lambda(k) = -a^2 k^2$$

elde edilir. $\lambda(k)$ reel sayı olduğundan korunumlu tipte değildir ve dolayısıyla dağılımlı değildir.

Dalga denklemi: $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

İsı denkleminde yapıldığı gibi (4.29) nolu çözüm kullanılırsa

$$\lambda(k) = \pm iak$$

elde edilir. Her k için $Re\lambda(k) = 0$ olduğundan korunumlu tiptedir. Ancak $w(k) = ak$ olduğundan dağılımlı değildir.

Lineer Klein-Gordon denklemi: $u_{tt} = a^2u_{xx} - b^2u$ denklemi de lineer olduğundan (4.29) nolu çözüm kullanılırsa

$$\lambda(k) = \pm\sqrt{a^2k^2 + b^2}$$

elde edilir. Reel kısım sıfır olduğundan korunumludur ve $w(k)$ k ya göre lineer olmadığından denklem dağılımlıdır.

4.4.1 İkili NLS Denklem Sisteminin Dağılım Analizi

NLS denklemi için dağılım analizi yapıldı [63]. Bu kısımda benzer şekilde ikili NLS denklem sistemi için dağılım analizi yapıldı. Önce ikili NLS denklem sistemi lineer hale getirildi. Elde edilen sistemin sürekli ve kesikli dağılım analizini karşılaştırmak için sistem OVA yöntemi ile çözüldü.

$$\psi_1 = ae^{i\mu_1 t}, \quad \psi_2 = be^{i\mu_2 t} \quad (4.31)$$

çözümü (4.18) denklem sisteminde yerine yazılırsa $\mu_1 = \sigma_1 a^2 + vb^2$, $\mu_2 = \sigma_2 b^2 + va^2$ elde edilir. İkili NLS denklem sisteminin lineer halini elde etmek için çözümlerin şu şekilde açıldığını kabul edelim:

$$\psi_1 = \psi_{1_0} + \epsilon_1 \psi_{1_1} + O(\epsilon_1^2)$$

$$\psi_{1_0} = ae^{i(\sigma_1 a^2 + vb^2)t}$$

$$\psi_{1_1} = \alpha(x, t)\psi_{1_0}$$

$$\psi_2 = \psi_{2_0} + \epsilon_2 \psi_{2_1} + O(\epsilon_2^2)$$

$$\psi_{2_0} = be^{i(\sigma_2 b^2 + va^2)t}$$

$$\psi_{2_1} = \beta(x, t)\psi_{2_0}$$

Buradan $\psi_1 = \psi_{10} + \epsilon_1 \psi_{11}$ ve $\psi_2 = \psi_{20} + \epsilon_2 \psi_{21}$ açılımları (4.18) de yerine yazılır. Sistemin

$$i\psi_{1t} + \alpha_1 \psi_{1xx} + (\sigma_1 |\psi_1|^2 + v |\psi_2|^2) \psi_1 = 0$$

ilk denkleminden

$$i [(\psi_{10})_t + \epsilon_1 (\psi_{11})_t] + \alpha_1 [(\psi_{10})_{xx} + \epsilon_1 (\psi_{11})_{xx}] + [\sigma_1 (\psi_{10} + \epsilon_1 \psi_{11})(\psi_{10}^* + \epsilon_1 \psi_{11}^*) + v (\psi_{20} + \epsilon_2 \psi_{21})(\psi_{20}^* + \epsilon_2 \psi_{21}^*)](\psi_{10} + \epsilon_1 \psi_{11}) = 0$$

$$\Rightarrow i(\psi_{10})_t + i\epsilon_1 (\psi_{11})_t + \alpha_1 (\psi_{10})_{xx} + \alpha_1 \epsilon_1 (\psi_{11})_{xx} + (\sigma_1 \psi_{10} \psi_{10}^* + \sigma_1 \epsilon_1 \psi_{10} \psi_{11}^* + \sigma_1 \epsilon_1 \psi_{11} \psi_{10}^* + v \psi_{20} \psi_{20}^* + v \psi_{20} \epsilon_2 \psi_{21}^* + v \epsilon_2 \psi_{21} \psi_{20}^*)(\psi_{10} + \epsilon_1 \psi_{11}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow i(\psi_{10})_t + i\epsilon_1 (\psi_{11})_t + \alpha_1 (\psi_{10})_{xx} + \alpha_1 \epsilon_1 (\psi_{11})_{xx} + \sigma_1 |\psi_{10}|^2 \psi_{10} + \sigma_1 \epsilon_1 |\psi_{10}|^2 \psi_{11} + \sigma_1 \epsilon_1 \psi_{10}^2 \psi_{11}^* \\ + \sigma_1 \epsilon_1 \psi_{11} |\psi_{10}|^2 + v |\psi_{20}|^2 \psi_{10} + v |\psi_{20}|^2 \epsilon_1 \psi_{11} + v \psi_{20} \epsilon_2 \psi_{21}^* \psi_{10} + v \psi_{20} \epsilon_2 \epsilon_1 \psi_{21}^* \psi_{11} \\ + v \epsilon_2 \psi_{21} \psi_{20}^* \psi_{10} + v \epsilon_2 \psi_{21} \psi_{20}^* \epsilon_1 \psi_{11} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow i(\psi_{10})_t + \alpha_1 (\psi_{10})_{xx} + (\sigma_1 |\psi_{10}|^2 + v |\psi_2|^2) \psi_{10} + \epsilon_1 [i(\psi_{11})_t + \alpha_1 (\psi_{11})_{xx} + 2\sigma_1 |\psi_{10}|^2 \psi_{11} \\ + \sigma_1 \psi_{10}^2 \psi_{11}^* + v |\psi_{20}|^2 \psi_{11}] + \epsilon_2 [v \psi_{20} \psi_{21}^* \psi_{10} + v \psi_{21} \psi_{20}^* \psi_{10}] \\ + \epsilon_1 \epsilon_2 [v \psi_{20} \psi_{21}^* \psi_{11} + v \psi_{21} \psi_{20}^* \psi_{11}] = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. ψ_{10} düzlem dalga çözümü olduğundan

$$\begin{aligned} \theta(1) : i(\psi_{10})_t + \alpha_1 (\psi_{10})_{xx} + (\sigma_1 |\psi_{10}|^2 + v |\psi_{20}|^2) \psi_{10} &= 0 \\ \theta(\epsilon_1) : i(\psi_{11})_t + \alpha_1 (\psi_{11})_{xx} + 2\sigma_1 |\psi_{10}|^2 \psi_{11} + \sigma_1 \psi_{10}^2 \psi_{11}^* + v |\psi_{20}|^2 \psi_{11} &= 0 \quad (4.32) \\ \theta(\epsilon_2) : v \psi_{20} \psi_{21}^* \psi_{10} + v \psi_{21} \psi_{20}^* \psi_{10} + \epsilon_1 \epsilon_2 [v \psi_{20} \psi_{21}^* \psi_{11} + v \psi_{21} \psi_{20}^* \psi_{11}] &= 0 \\ \theta(\epsilon_1 \epsilon_2) : v \psi_{20} \psi_{21}^* \psi_{11} + v \psi_{21} \psi_{20}^* \psi_{11} &= 0 \end{aligned}$$

olarak yazılır. (4.18) sisteminin ikinci denklemi içinde benzer işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \theta(1) : i(\psi_{20})_t + \alpha_2 (\psi_{20})_{xx} + (\sigma_2 |\psi_{20}|^2 + v |\psi_{10}|^2) \psi_{20} &= 0 \\ \theta(\epsilon_2) : i(\psi_{21})_t + \alpha_2 (\psi_{21})_{xx} + 2\sigma_2 |\psi_{20}|^2 \psi_{21} + \sigma_2 \psi_{20}^2 \psi_{21}^* + v |\psi_{10}|^2 \psi_{21} &= 0 \quad (4.33) \\ \theta(\epsilon_1) : v \psi_{10} \psi_{11}^* \psi_{20} + v \psi_{11} \psi_{10}^* \psi_{20} &= 0 \\ \theta(\epsilon_1 \epsilon_2) : v \psi_{10} \psi_{11}^* \psi_{21} + v \psi_{11} \psi_{10}^* \psi_{21} &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. $\psi_{1_1} = \alpha(x, t)\psi_{1_0}$ çözümü (4.32) denkleminde yazılırsa

$$i\alpha_t\psi_{1_0} - \alpha(\sigma_1 a^2 + vb^2)u_0 + \alpha_1\alpha_{xx}\psi_{1_0} + 2\sigma_1 a^2\alpha\psi_{1_0} + \sigma_1 a^2\alpha^*\psi_{1_0} + vb^2\alpha\psi_{1_0} = 0$$

elde edilir, buradan

$$i\alpha_t + \alpha_1\alpha_{xx} + \sigma_1 a^2 = -\sigma_1 a^2\alpha^*$$

ya da

$$[i\partial_t + \alpha_1\partial_{xx} + \sigma_1 a^2]\alpha = -\sigma_1 a^2\alpha^* \quad (4.34)$$

şeklinde yazılır. Bu ifade

$$L_1 := i\partial_t + \alpha_1\partial_{xx} + \sigma_1 a^2$$

olmak üzere

$$L_1[\alpha] = -\sigma_1 a^2\alpha^*$$

olarak yazılır.

$$L_1^* := [-i\partial_t + \alpha_1\partial_{xx} + \sigma_1 a^2]$$

olmak üzere

$$L_1^*[\alpha^*] = -\sigma_1 a^2\alpha$$

şeklindedir.

L_1^* (4.34) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Rightarrow (-i\partial_t + \alpha_1\partial_{xx} + \sigma_1 a^2)(i\partial_t + \alpha_1\partial_{xx} + \sigma_1 a^2)\alpha &= (-i\partial_t + \partial_{xx} + \sigma_1 a^2)(-\sigma_1 a^2\alpha^*) \\ \Rightarrow \alpha_{tt} + \alpha_1^2\alpha_{xxxx} + 2\sigma_1\alpha_1 a^2\alpha_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\psi_{2_1} = \beta(x, t)\psi_{2_0}$ çözümü (4.33) denkleminde yazılırsa

$$i\beta_t + \sigma_2 b^2\beta + \alpha_2\beta_{xx} = -\sigma_2 b^2\beta^*$$

elde edilir. Ayrıca benzer olarak

$$[i\partial_t + \alpha_2\partial_{xx} + \sigma_2b^2]\beta = -\sigma_2b^2\beta^* \quad (4.36)$$

$$L_2[\beta] = -\sigma_2b^2\beta^*$$

$$L_2^* := [-i\partial_t + \alpha_2\partial_{xx} + \sigma_2b^2], \quad L_2^*[\beta^*] = -\sigma_2b^2\beta$$

eşitlikleri yazılır. L_2^* (4.36) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa

$$\Rightarrow (-i\partial_t + \alpha_2\partial_{xx} + \sigma_2b^2)(i\partial_t + \alpha_2\partial_{xx} + \sigma_2b^2)\beta = (i\partial_t + \alpha_2\partial_{xx} + \sigma_2b^2)(-\sigma_2b^2\beta^*)$$

$$\Rightarrow \beta_{tt} + \alpha_2^2\beta_{xxxx} + 2\sigma_2\alpha_2b^2\beta_{xx} = 0 \quad (4.37)$$

elde edilir.

Böylelikle lineer ikili NLS denklem sistemi elde edilmiş olur:

$$\alpha_{tt} + \alpha_1^2\alpha_{xxxx} + 2\sigma_1\alpha_1a^2\alpha_{xx} = 0 \quad (4.38)$$

$$\beta_{tt} + \alpha_2^2\beta_{xxxx} + 2\sigma_2\alpha_2b^2\beta_{xx} = 0 \quad (4.39)$$

Kolaylık olması açısından $c = \alpha_1^2$, $d = \alpha_2^2$, $m = 2\sigma_1\alpha_1a^2$, $n = \sigma_2\alpha_2b^2$ alalım.

Şimdi lineer sistemin Hamiltonian sistem olduğunu gösterelim.

$\alpha = \alpha(x, t)$ kompleks fonksiyon olduğundan

$$\alpha(x, t) = p_1(x, t) + iq_1(x, t)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeyi (4.38) denkleminde yazarsak

$$\begin{cases} (p_1)_{tt} + c(p_1)_{xxxx} + m(p_1)_{xx} = 0 \\ (q_1)_{tt} + c(q_1)_{xxxx} + m(q_1)_{xx} = 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

elde edilir. Bu sistem şu şekilde de ifade edilir:

$$\begin{cases} ((p_1)_t)_t = (-c(p_1)_{xxx} - m(p_1)_x)_x \\ ((q_1)_t)_t = (-c(q_1)_{xxx} - m(q_1)_x)_x \end{cases}$$

Buradan

$$\begin{cases} (p_1)_t = u_x \\ u_t = -c(p_1)_{xxx} - m(p_1)_x \end{cases} \quad (4.41)$$

$$\begin{cases} (q_1)_t = v_x \\ v_t = -c(q_1)_{xxx} - m(q_1)_x \end{cases} \quad (4.42)$$

yazılır. (4.40), (4.41), (4.42) nolu sistemlere bakılırsa p ile q arasında bir farkın olmadığı görülür. O nedenle sadece $p_1(x, t)$ incelenirse $q_1(x, t)$ hakkında da aynı yorum yapılabilir. Benzer şekilde $\beta(x, t) = p_2(x, t) + iq_2(x, t)$ alınırsa

$$\begin{cases} (p_2)_t = w_x \\ w_t = -d(p_2)_{xxx} - n(p_2)_x \end{cases} \quad (4.43)$$

ve

$$\begin{cases} (q_2)_t = z_x \\ z_t = -d(q_2)_{xxx} - n(q_2)_x \end{cases} \quad (4.44)$$

elde edilir. Buradan da p_2 ile q_2 arasında bir farkın olmadığı görülür.

Şimdi

$$\begin{cases} (p_1)_t = u_x \\ u_t = -c(p_1)_{xxx} - m(p_1)_x \\ (p_2)_t = w_x \\ w_t = -d(p_2)_{xxx} - n(p_2)_x \end{cases} \quad (4.45)$$

sisteminin Hamiltonian sistemi olduğunu gösterelim. Bu sistem

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_1 \\ u \\ p_2 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x & 0 & 0 \\ \partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & \partial_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c(p_1)_{xx} - mp_1 \\ u \\ -d(p_2)_{xx} - np_2 \\ w \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Hamiltonian

$$\mathcal{H}(p_1, u, p_2, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^2 + c(p_1)_x^2 - mp_1^2 + d(p_2)_x^2 - np_2^2 + w^2) dx$$

olarak alınırsa

$$\frac{\delta H}{\delta p_1} = -mp_1 - c(p_1)_{xx}, \quad \frac{\delta H}{\delta p_2} = -np_2 - d(p_2)_{xx}, \quad \frac{\delta H}{\delta u} = u, \quad \frac{\delta H}{\delta w} = w$$

sağlanır. Dolayısıyla bu sistem Hamiltonian sistem olarak ifade edilir. Burada türev terimleri yerine ileri farklar kullanılırsa ayrık Hamiltonian

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} [u_i^2 + \frac{c}{\Delta x^2} ((p_1)_{i+1} - (p_1)_i)^2 - m(p_1)_i^2 - \frac{d}{\Delta x^2} ((p_2)_{i+1} - (p_2)_i)^2 - n(p_2)_i^2 + w_i^2]$$

olarak bulunur. Buradan diskrit Hamiltonian sistem

$$\begin{pmatrix} (p_1)_t \\ u_t \\ (p_2)_t \\ w_t \end{pmatrix} = \bar{S} \nabla \bar{\mathcal{H}}$$

olarak yazılır. Burada

$$\nabla \bar{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{\Delta x^2} ((p_1)_{i-1} - 2(p_1)_i + (p_1)_{i+1}) - m(p_1)_i \\ u_i \\ -\frac{d}{\Delta x^2} ((p_2)_{i-1} - 2(p_2)_i + (p_2)_{i+1}) - m(p_2)_i \\ w_i \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2\Delta x} & \dots & -\frac{1}{2\Delta x} \\ -\frac{1}{2\Delta x} & 0 & \frac{1}{2\Delta x} & 0 \\ & & \dots & \\ \frac{1}{2\Delta x} & \dots & -\frac{1}{2\Delta x} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} 0 & G & 0 & 0 \\ G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \\ 0 & 0 & G & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Diskrit Hamiltonian sisteminden

$$\begin{aligned}
(p_1)_t &= \frac{1}{2\Delta x}(-A_2)u \\
u_t &= \frac{c}{2\Delta x^3}Ap_1 + \frac{m}{2\Delta x}A_2p_1 \\
(p_2)_t &= \frac{1}{2\Delta x}(-A_2)w \\
w_t &= \frac{d}{2\Delta x^3}Ap_2 + \frac{n}{2\Delta x}A_2p_2
\end{aligned}$$

yazılır. Burada A ve A_2 matrisi şu formdadır:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diskrit Hamiltonian sistemi OVA yöntemi ile şu şekilde çözülür:

$$\frac{p_1^{n+1} - p_1^n}{\Delta t} = -\frac{1}{4\Delta x}A_2(u^{n+1} + u^n) \quad (4.46)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{c}{4\Delta x^3}A(p_1^n + p_1^{n+1}) + \frac{m}{4\Delta x}A_2(p_1^{n+1} + p_1^n) \quad (4.47)$$

$$\frac{p_2^{n+1} - p_2^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\Delta x}A_2(w^n + w^{n+1}) \quad (4.48)$$

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} = \frac{d}{4\Delta x^3}A(p_2^n + p_2^{n+1}) + \frac{n}{4\Delta x}A_2(p_2^{n+1} + p_2^n) \quad (4.49)$$

A ve A_2 matrislerini açarsak

$$\frac{1}{\Delta t}((p_1)_j^{n+1} - (p_1)_j^n) = \frac{1}{4\Delta x}(-u_{j-1}^n + u_{j+1}^n - u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) &= \frac{c}{4\Delta x^3}((p_1)_{j-2}^n - 2(p_1)_{j-1}^n + 2(p_1)_{j+1}^n - (p_1)_{j+2}^n + (p_1)_{j-2}^{n+1} - 2(p_1)_{j-1}^{n+1} \\ &+ 2(p_1)_{j+1}^{n+1} - (p_1)_{j+2}^{n+1}) + \frac{m}{4\Delta x}((p_1)_{j-1}^n - (p_1)_{j+1}^n + (p_1)_{j-1}^{n+1} - (p_1)_{j+1}^{n+1}) \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\frac{1}{\Delta t}((p_2)_j^{n+1} - (p_2)_j^n) = \frac{1}{4\Delta x}(-w_{j-1}^n + w_{j+1}^n - w_{j-1}^{n+1} + w_{j+1}^{n+1}) \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(w_j^{n+1} - w_j^n) &= \frac{c}{4\Delta x^3}((p_2)_{j-2}^n - 2(p_2)_{j-1}^n + 2(p_2)_{j+1}^n - (p_2)_{j+2}^n + (p_2)_{j-2}^{n+1} - 2(p_2)_{j-1}^{n+1} \\ &+ 2(p_2)_{j+1}^{n+1} - (p_2)_{j+2}^{n+1}) + \frac{m}{4\Delta x}((p_2)_{j-1}^n - (p_2)_{j+1}^n + (p_2)_{j-1}^{n+1} - (p_2)_{j+1}^{n+1}) \end{aligned} \quad (4.53)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.50) den

$$-u_{j-1}^n + u_{j+1}^n - u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} = \frac{4\Delta x}{\Delta t}((p_1)_j^{n+1} - (p_1)_j^n) \quad (4.54)$$

yazılır burada $n = n - 1$ alınırsa

$$-u_{j-1}^{n-1} + u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^n + u_{j+1}^n = \frac{4\Delta x}{\Delta t}((p_1)_j^n - (p_1)_j^{n-1}) \quad (4.55)$$

elde edilir. (4.54) den (4.55) çıkarılırsa

$$\begin{aligned} -(u_{j-1}^n - u_{j-1}^{n-1}) + (u_{j+1}^n - u_{j+1}^{n-1}) - (u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n) + (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) \\ = \frac{4\Delta x}{\Delta t}((p_1)_j^{n+1} - 2(p_1)_j^n + (p_1)_j^{n-1}) \end{aligned} \quad (4.56)$$

elde edilir. (4.51) de önce $j = j - 1$, $n = n - 1$ daha sonra aynı denklemde $j = j + 1$, $n = n - 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} u_{j-1}^n - u_{j-1}^{n-1} &= \frac{c\Delta t}{4\Delta x^3}((p_1)_{j-3}^{n-1} - 2(p_1)_{j-2}^{n-1} + 2(p_1)_j^{n-1} - (p_1)_{j+1}^{n-1} + (p_1)_{j-3}^n - 2(p_1)_{j-2}^n + 2(p_1)_j^n - (p_1)_{j+1}^n) \\ &+ \frac{m\Delta t}{4\Delta x}((p_1)_{j-2}^{n-1} - (p_1)_j^{n-1} + (p_1)_{j-2}^n - (p_1)_j^n) \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} u_{j+1}^n - u_{j+1}^{n-1} &= \frac{c\Delta t}{4\Delta x^3}((p_1)_{j-1}^{n-1} - 2(p_1)_j^{n-1} + 2(p_1)_{j+2}^{n-1} - (p_1)_{j+3}^{n-1} + (p_1)_{j-1}^n - 2(p_1)_j^n + 2(p_1)_{j+2}^n - (p_1)_{j+3}^n) \\ &+ \frac{m\Delta t}{4\Delta x}((p_1)_j^{n-1} - (p_1)_{j+2}^{n-1} + (p_1)_j^n - (p_1)_{j+2}^n) \end{aligned} \quad (4.58)$$

denklemleri elde edilir. Son olarak (4.51) de önce $j = j - 1$ daha sonra da aynı denklemde $j = j + 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n &= \frac{c\Delta t}{4\Delta x^3}((p_1)_{j-3}^n - 2(p_1)_{j-2}^n + 2(p_1)_j^n - (p_1)_{j+1}^n + (p_1)_{j-3}^{n+1} - 2(p_1)_{j-2}^{n+1} + 2(p_1)_j^{n+1} - (p_1)_{j+1}^{n+1}) \\ &+ \frac{m\Delta t}{4\Delta x}((p_1)_{j-2}^n - (p_1)_j^n + (p_1)_{j-2}^{n+1} - (p_1)_j^{n+1}) \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n &= \frac{c\Delta t}{4\Delta x^3}((p_1)_{j-1}^n - 2(p_1)_j^n + 2(p_1)_{j+2}^n - (p_1)_{j+3}^n + (p_1)_{j-1}^{n+1} - 2(p_1)_j^{n+1} + 2(p_1)_{j+2}^{n+1} - (p_1)_{j+3}^{n+1}) \\ &+ \frac{m\Delta t}{4\Delta x}((p_1)_j^n - (p_1)_{j+2}^n + (p_1)_j^{n+1} - (p_1)_{j+2}^{n+1}) \end{aligned} \quad (4.60)$$

elde edilir. (4.57),(4.58),(4.59),(4.60) nolu eşitlikleri (4.56) nolu eşitlikte yazarsak

$$\begin{aligned}
\frac{c\Delta t}{4\Delta x^3}[(p_1)_{j-3}^{n-1} &- 2(p_1)_{j-2}^{n-1} - (p_1)_{j-1}^{n-1} + 4(p_1)_j^{n-1} - (p_1)_{j+1}^{n-1} - 2(p_1)_{j+2}^{n-1} + (p_1)_{j+3}^{n-1} + 2(p_1)_{j-3}^n - 4(p_1)_{j-2}^n \\
&- 2(p_1)_{j-1}^n + 8(p_1)_j^n - 2(p_1)_{j+1}^n - 4(p_1)_{j+2}^n + 2(p_1)_{j+3}^n + (p_1)_{j-3}^{n+1} - 2(p_1)_{j-2}^{n+1} - (p_1)_{j-1}^{n+1} \\
&+ 4(p_1)_j^{n+1} - (p_1)_{j+1}^{n+1} - 2(p_1)_{j+2}^{n+1} + (p_1)_{j-3}^{n+1}] + \frac{m\Delta t}{4\Delta x}[(p_1)_{j-2}^{n-1} - 2(p_1)_j^{n-1} + (p_1)_{j+2}^{n-1} \\
&+ 2(p_1)_{j-2}^n - 4(p_1)_j^n + 2(p_1)_{j+2}^n + (p_1)_{j-2}^{n+1} - 2(p_1)_j^{n+1} + (p_1)_{j+2}^{n+1}] \\
&= \frac{4\Delta x}{\Delta t}[(p_1)_j^{n+1} - 2(p_1)_j^n + (p_1)_j^{n-1}]
\end{aligned} \tag{4.61}$$

elde edilir. Burada her iki tarafı $\frac{1}{(\Delta t)(4\Delta x)}$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t^2}[-(p_1)_j^{n+1} + 2(p_1)_j^n - (p_1)_j^{n-1}] &= \frac{c}{16\Delta x^4}[(p_1)_{j-3}^{n-1} - 2(p_1)_{j-2}^{n-1} - (p_1)_{j-1}^{n-1} + 3(p_1)_j^{n-1} - (p_1)_{j+1}^{n-1} - 2(p_1)_{j+2}^{n-1} \\
&+ (p_1)_{j+3}^{n-1} + 3(p_1)_{j-3}^n - 4(p_1)_{j-2}^n - 2(p_1)_{j-1}^n + 8(p_1)_j^n - 2(p_1)_{j+1}^n - 4(p_1)_{j+2}^n \\
&+ 2(p_1)_{j+3}^n + (p_1)_{j-3}^{n+1} - 2(p_1)_{j-2}^{n+1} - (p_1)_{j-1}^{n+1} + 4(p_1)_j^{n+1} - (p_1)_{j+1}^{n+1} \\
&- 2(p_1)_{j+2}^{n+1} + (p_1)_{j-3}^{n+1}] + \frac{m}{16\Delta x^2}[(p_1)_{j-2}^{n-1} - 2(p_1)_j^{n-1} + (p_1)_{j+2}^{n-1} + 2(p_1)_{j-2}^n \\
&- 4(p_1)_j^n + 2(p_1)_{j+2}^n + (p_1)_{j-2}^{n+1} - 2(p_1)_j^{n+1} + (p_1)_{j+2}^{n+1}]
\end{aligned} \tag{4.62}$$

elde ederiz. Şimdi burada

$$(p_1)_j^n = \widehat{p}_1 e^{i(jk\Delta x + nw\Delta t)} = \widehat{p}_1 e^{i(j\bar{k} + n\bar{w})}, \quad \bar{k} = k\Delta x, \quad \bar{w} = w\Delta t$$

alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t^2}(e^{-i\bar{w}} - 2 + e^{i\bar{w}}) &+ \frac{c}{16\Delta x^4}[(e^{-i\bar{w}} + 2 + e^{i\bar{w}})(e^{-3i\bar{k}} - 2e^{-2i\bar{k}} - e^{-i\bar{k}} + 4 - e^{i\bar{k}} - 2e^{2i\bar{k}} + e^{3i\bar{k}})] \\
&+ \frac{m}{16\Delta x^2}[(e^{-i\bar{w}} + 2 + e^{i\bar{w}})(e^{-2i\bar{k}} - 2 + e^{2i\bar{k}})] = 0
\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\text{elde edilir. Burada } e^{-i\bar{w}} - 2 + e^{i\bar{w}} = -4\sin^2\left(\frac{\bar{w}}{2}\right), \quad e^{-i\bar{w}} + 2 + e^{i\bar{w}} = 4\cos^2\left(\frac{\bar{w}}{2}\right)$$

eşitliklerinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{\Delta t^2}[-4\sin^2\left(\frac{\bar{w}}{2}\right)] &+ \frac{c}{16\Delta x^4}[4\cos^2\left(\frac{\bar{w}}{2}\right)(e^{-3i\bar{k}} - 2e^{-2i\bar{k}} - e^{-i\bar{k}} + 4 - e^{i\bar{k}} - 2e^{2i\bar{k}} + e^{3i\bar{k}})] \\
&+ \frac{m}{16\Delta x^2}[4\cos^2\left(\frac{\bar{w}}{2}\right)(-4\sin^2(\bar{k}))] = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki taraf $\frac{-\Delta t^2}{4\cos^2(\frac{\bar{w}}{2})}$ ile çarpılır, $e^{-i\bar{k}} + e^{i\bar{k}} = 2\cos(\bar{k})$ eşitliği de kullanılırsa

$$\Rightarrow \tan^2\left(\frac{\bar{w}}{2}\right) - \frac{c\Delta t^2}{16\Delta x^4}[2\cos(3\bar{k}) - 4\cos(2\bar{k}) - 2\cos(\bar{k}) + 4] + \frac{m\Delta t^2}{4\Delta x^2}\sin^2(\bar{k}) = 0 \tag{4.64}$$

bulunur. Son olarak burada $\cos(3k) = \cos^3(k) - 3\cos(k)\sin^2(k)$,

$\cos(2k) = \cos^2(k) - \sin^2(k)$ trigonometrik dönüşümler kullanılır ve $\cos(\bar{k}) = c_1$, $\sin(\bar{k}) = c_2$ alınır

$$\Rightarrow \tan^2\left(\frac{\bar{w}}{2}\right) = \frac{c\Delta t^2}{16\Delta x^4}[2c_1^3 - 6c_1c_2^2 - 4c_1^2 + 4c_2^2 - 2c_1 + 4] - \frac{m\Delta t^2}{4\Delta x^2}c_2^2$$

elde edilir. Kolaylık olması açısından $l_1 = -\frac{m\Delta t^2}{4\Delta x^2}$, $l_2 = \frac{c\Delta t^2}{16\Delta x^4}$ alınırsa

$$\begin{aligned}\bar{w}_1 &= 2\arctan(\sqrt{l_1c_2^2 + l_2[2c_1^3 - 6c_1c_2^2 - 4c_1^2 + 4c_2^2 - 2c_1 + 4]}) \\ \bar{w}_2 &= 2\arctan(-\sqrt{l_1c_2^2 + l_2[2c_1^3 - 6c_1c_2^2 - 4c_1^2 + 4c_2^2 - 2c_1 + 4]})\end{aligned}$$

elde edilir. \bar{w}_1 ve \bar{w}_2 nin bu şekilde yazılabilmesi için tanjant fonksiyonunun terslenebilir olması gerekir. Tanjant fonksiyonu $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında terslenebilir. Dolayısıyla $-\pi < w < \pi$ olmalıdır. w ve k $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığında tanımlandığından bu koşul sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned}w_1 &= \frac{2}{\Delta t}\arctan(\sqrt{l_1c_2^2 + l_2[2c_1^3 - 6c_1c_2^2 - 4c_1^2 + 4c_2^2 - 2c_1 + 4]}) \\ w_2 &= \frac{2}{\Delta t}\arctan(-\sqrt{l_1c_2^2 + l_2[2c_1^3 - 6c_1c_2^2 - 4c_1^2 + 4c_2^2 - 2c_1 + 4]})\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler q_2 ve w için yapılırsa

$$\Rightarrow \tan^2\left(\frac{\bar{w}}{2}\right) = \frac{d\Delta t^2}{16\Delta x^4}[2c_1^3 - 6c_1c_2^2 - 4c_1^2 + 4c_2^2 - 2c_1 + 4] - \frac{n\Delta t^2}{4\Delta x^2}c_2^2$$

bulunur. Buraya kadar yapılan kesikli dağılım içindi, şimdi sürekli dağılım için yapalım.

$$\partial_{tt}\alpha + \alpha_1\partial_{xxxx}\alpha + 2\sigma_1\alpha_1a^2\partial_{xx}\alpha = 0$$

$$\partial_{tt}\beta + \alpha_2\partial_{xxxx}\beta + 2\sigma_2\alpha_2b^2\partial_{xx}\beta = 0$$

lineer sistem için dağılım analizi çözümün

$$\alpha = e^{i(kx+wt)}, \quad \beta = e^{i(k_1x+w_1t)}$$

şeklinde olduğu kabul edilerek bulundu. Açık olarak $\alpha_{tt} = -w^2\alpha$, $\alpha_{xx} = -k^2\alpha$ ve $\alpha_{xxxx} = k^4\alpha$ dir. Buradan

$$w^2 - k^2(\alpha_1^2k^2 - 2\sigma_1\alpha_1a^2) = 0$$

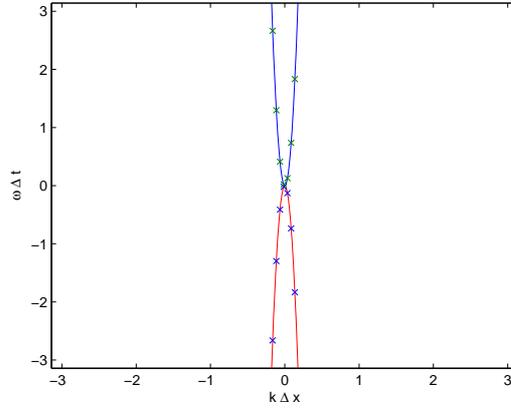
elde edilir. β için ise

$$w_1^2 - k_1^2(\alpha_2^2k_1^2 - 2\sigma_2\alpha_2b^2) = 0$$

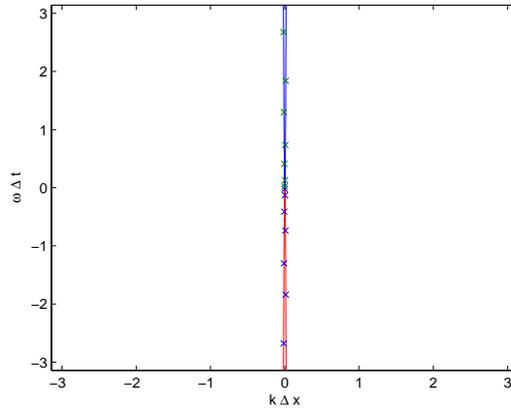
bulunur.

Sürekli ve kesikli dağılım analizleri karşılaştırıldığında OVA yönteminin analitik dağılım analizini korumadığı görülmektedir. Farklı Δx değerleri için dağılım

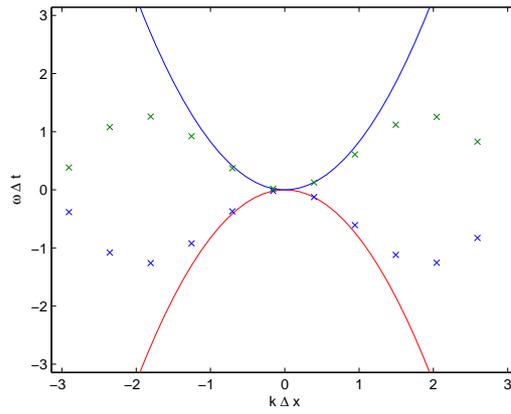
eğrileri elde edildi. OVA yöntemi ikili NLS denklem sistemine uygulandı ve dağılım bağıntısı elde edildi. Şekil 4.1 den farklı Δx değerleri için OVA yönteminin farklı dağılım özellikleri gösterdiği anlaşılmaktadır. $\Delta x < 01$ olduğu sürece sayısal dağılım grafiği ile analitik dağılım grafiği örtüşmektedir. Ancak $\Delta x > 1$ olması durumunda k nın $[-1, 1]$ aralığındaki değerlerinde örtüşmekte aralık dışında farklılık göstermektedir.



(a) $\Delta x = 0.1$



(b) $\Delta x = 0.01$



(c) $\Delta x = 1.1$

Şekil 4.1: İkili NLS denklem sistemi için dağılım analizi ($\Delta t = 0.1$)

BÖLÜM 5

MODEL İNDİRGEME YÖNTEMİ

Fen ve mühendislik alanlarında elde edilen büyük dinamik sistemleri optimize etmek, kontrol etmek kolay olmamaktadır. Bu sistemler genellikle lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin diskrize edilmiş hali ile ifade edilmektedir. Ancak bu sistemlerin davranışlarını anlamak, analiz etmek kolay olmadığından son zamanlarda bilim adamları analitik ve sayısal yöntem geliştirmek üzerinde çalışmaktadırlar. Bilgisayarlar çok miktarda datayı analiz etmekte ve hafızasında depolayabilmektedir. Ancak program içinde bu dataların kullanılması ve tekrar depolanması işlemi çok zaman almaktadır. Tüm bunların sonucunda model indirgeme yöntemleri büyük önem kazanmıştır. Dataların analizinde hızlı ve etkili model indirgeme yöntemlerinden biri uygun dik ayrışım (UDA) (Proper Ortogonal Decomposition (POD)) yöntemidir. Bu yöntemde amaç yüksek boyutlu süreçleri ifade eden daha az boyutlu yaklaşımlar elde etmektir [48]. UDA, Principal Component Analysis [28], the Karhunen-Loeve Decomposition [36, 41] ve tekil değer ayrışımı (the single value decomposition) olarak da bilinmektedir. UDA yöntemi görüntü tanımlama (image processing), sinyal analizi (signal analysis), data karşılaştırmada kullanılmaktadır [23, 49]. Ayrıca akışkanlar dinamiğinde de pek çok uygulama alanı bulunmaktadır [5, 29]. UDA yöntemi projeksiyon yöntemlerinin genel kategorisi içine düşmektedir. Projeksiyon yöntemlerde dinamik sistem orjinal faz uzayının alt uzayı üzerinde tanımlanmaktadır. UDA yönteminin avantajı lineer olmayan problemlere uygulansa bile sadece standart matris çarpımına dayanmasıdır.

5.1 Uygun Dik Ayrışım (UDA) Yöntemi

Herhangi $u(x, t)$ fonksiyonu sonlu toplamlar yardımıyla ifade edilmek istenirse [13]

$$u(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{k=1}^M a_k(t) \Phi_k(\mathbf{x}) \quad (5.1)$$

şeklinde yazılır. Burada açıktır ki M sonsuza gidecek şekilde limit alınırsa bu toplam gerçek çözümü verir. (5.1) denkleminde \mathbf{x} uzay koordinatı, t de zaman koordinatına karşılık gelmektedir. (5.1) denklemini $\Phi_k(\mathbf{x})$ fonksiyonlarının farklı seçimlerine göre farklı şekillerde ifade edilebilir. \mathbf{x} , $X \subset \mathbb{R}$ sınırlı aralık üzerinde tanımlı ise $\Phi_k(\mathbf{x})$ fonksiyonları Fourier serisi, Chebyshev polinomları ya da Legendre polinomları olarak seçilebilir. Farklı $\Phi_k(\mathbf{x})$ baz fonksiyonlarının seçimi için farklı $a_k(t)$ zaman fonksiyonları dizisi elde edilir. UDA, $\Phi_k(\mathbf{x})$ fonksiyonlarının uygun seçimi ile ilgilidir. $\Phi_k(x)$ fonksiyonları

$$\int_X \Phi_{k_1}(\mathbf{x}) \Phi_{k_2}(\mathbf{x}) dx = \begin{cases} 1, & k_1 = k_2 \\ 0, & k_1 \neq k_2 \end{cases}$$

olacak şekilde seçilirse, (5.1) den

$$a_k(t) = \int_X u(\mathbf{x}, t) \Phi_k(\mathbf{x}) dx$$

elde edilir. Buradan $a_k(t)$ değerinin sadece $\Phi_k(\mathbf{x})$ fonksiyonuna bağlı olduğu diğer $\Phi_s(\mathbf{x})$ fonksiyonlarına bağlı olmadığı görülür. Ortanormal fonksiyonlara $u(\mathbf{x}, t)$ fonksiyonunun uygun dik ayrışım düğümleri denir. (5.1) ifadesine de $u(\mathbf{x}, t)$ fonksiyonunun UDA 1 denir.

5.1.1 UDA ve Tekil Değer Ayrışımı (TDA)

UDA ile tekil değer ayrışımı (TDA) arasında sıkı bir ilişki vardır, bu kısımda bu ilişki üzerinde durulacaktır. Bu bölüm ve daha sonraki iki bölüm için [57] referansından yararlanılmıştır.

$Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ reel değerli $m \times n$ boyutlu ve kolonları $y_j \in \mathbb{R}^m$ olan matrisi göz önüne alınsın. Ayrıca $\text{rank } d \leq \min \{m, n\}$ olsun. Kolaylık olması bakımından Y matrisinin $\{Y_{:,j}\}_{j=1}^n$ kolonlarında dinamik sistemin t_j anında $i = 1, \dots, m$ kadar

x_i konumunda fonksiyonun aldığı değerler, benzer şekilde $\{Y_{i,\cdot}\}_{i=1}^m$ satırlarında $j = 1, \dots, n$ kadar t_j anında x_i konumunda fonksiyonun aldığı değerler yer alsın. Yani Y matrisi

$$Y = \begin{pmatrix} u(x_1, t_1) & u(x_1, t_2) & \cdots & u(x_1, t_n) \\ u(x_2, t_1) & u(x_2, t_2) & \cdots & u(x_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(x_m, t_1) & u(x_m, t_2) & \cdots & u(x_m, t_n) \end{pmatrix}$$

şeklinde olsun. Y matrisine anlık kayıt data matrisi denir.

TDA

$$U^T Y V = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: \Sigma \quad (5.2)$$

olacak şekilde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_d > 0$ reel sayılarının, kolonları sırasıyla $\{u_i\}_{i=1}^m$ ve $\{v_i\}_{i=1}^n$ olan $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ve $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal matrislerinin varlığını garantiliyor. σ_i değerlerine Y matrisinin tekil değerleri, U matrisinin ilk d kolonuna sol tekil vektörler, V matrisinin ilk d kolonuna sağ tekil vektörler denir. $D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_d) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ve (5.2) deki sıfırlar uygun boyutlu sıfır matrislerdir. Ayrıca $i = 1, \dots, d$ için $\{u_i\}_{i=1}^d$ ve $\{v_i\}_{i=1}^d$ vektörleri

$$Y v_i = \sigma_i u_i, \quad Y^T u_i = \sigma_i v_i \quad (5.3)$$

eşitliklerini sağlar. Bu vektörler sırasıyla $Y Y^T$ ve $Y^T Y$ matrisleri için özvektörlerdir. Özdeğerler ise açık olarak $\lambda_i = \sigma_i^2 > 0$ ($i = 1, \dots, d$) dir. (5.2) den

$$Y = U \Sigma V^T \quad (5.4)$$

yazılır. $U^d \in \mathbb{R}^{m \times d}$ and $V^d \in \mathbb{R}^{n \times d}$ olmak üzere Y matrisi

$$Y = U^d D (V^d)^T \quad (5.5)$$

olarak yazılır. Burada

$$\begin{aligned} U_{ij}^d &= U_{ij}, & 1 \leq i \leq m, & \quad 1 \leq j \leq d \\ V_{ij}^d &= V_{ij}, & 1 \leq i \leq n, & \quad 1 \leq j \leq d \end{aligned}$$

dir. $B^d = D(V^d)^T \in \mathbb{R}^{d \times n}$ alınırsa (5.5) eşitliği

$$Y = U^d B^d$$

şeklinde yazılır. Sonuçta Y matrisinin kolonları U^d matrisinin d tane lineer bağımsız kolonlarının terimleri ile ifade edildi. y_j ($j = 1, \dots, n$) kolonları $\{u_i\}_{i=1}^d$ bazları ile ifade edildiğinde katsayılar B^d matrisinin j . kolonundaki elemanlardan oluşur. U ortogonal matris olduğundan

$$y_j = \sum_{i=1}^d \langle u_i, y_j \rangle_{\mathbb{R}^m} u_i$$

elde edilir. Burada $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ile \mathbb{R}^m uzayındaki iç çarpım ifade edilmektedir. Buradan $j = 1, \dots, n$ için

$$y_j = \sum_{i=1}^d \langle y_j, u_i \rangle_{\mathbb{R}^m} u_i$$

yazılır.

Teorem 5.1.1. $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinin rankı $\text{rank} Y \leq \min\{m, n\}$ olsun. Ayrıca $U = [u_1, u_2, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal matrisler ve $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matris olmak üzere Y matrisinin tekil değer ayrışımı $Y = U\Sigma V^T$ olsun. Buradan herhangi $l \in 1, \dots, d$ için

$$\max_{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n |\langle y_j, \tilde{u}_i \rangle_{\mathbb{R}^m}|^2, \quad \langle \tilde{u}_i, \tilde{u}_j \rangle_{\mathbb{R}^m} = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq l \quad (5.6)$$

maksimum probleminin çözümü U matrisinin ilk l kolonu yani $\{u_i\}_{i=1}^l$ tekil vektörleridir.

(5.6) için gerekli optimal koşul

$$YY^T u_i = \lambda_i u_i, \quad i = 1, \dots, l \quad (5.7)$$

özdeğer problemi ile verilir. Tekil değer ayrışımından elde edilen $\{u_i\}_{i=1}^l$ vektörleri (5.7) probleminin çözümüdür.

Tanım 5.1.2. $\{u_i\}_{i=1}^l$, ($l \in \{1, \dots, d\}$) vektörlerine UDA bazı denir.

UDA bazı aşağıdaki minimum probleminin çözümü olarak da tanımlanır:

$$\min_{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l \in \mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^n \left\| y_j - \sum_{i=1}^l \langle y_j, \tilde{u}_i \rangle \right\|_{\mathbb{R}^m}^2, \quad \langle \tilde{u}_i, \tilde{u}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq l \quad (5.8)$$

Şimdi UDA bazının hesaplanışını verelim. $n < m$ ise

$$Y^T Y v_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, \dots, l$$

$n \times n$ özdeğer-özvektör problemi çözülür ve $v_1, v_2, \dots, v_l \in \mathbb{R}^n$ özvektörleri bulunur. Bulunan bu vektörler (5.3) deki birinci eşitlikte yerine yazılırsa

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Y v_i, \quad i = 1, \dots, l$$

şeklinde UDA bazı elde edilir. UDA bazının hesaplanmasındaki bu yöntem anlık kayıt yöntemi de denir.

Eğer $m > n$ ise (5.7) deki $m \times m$ boyutlu özdeğer-özvektör problemi çözülerek UDA bazı bulunur. UDA yönteminde iyi bir yaklaşım elde etmede l değerinin seçimi önemli bir rol oynamaktadır. l değerinin yeterince küçük olması

$$I(l) = \frac{\sum_{j=1}^l \lambda_j}{\sum_{j=1}^m \lambda_j}$$

değerinin bire yakın olmasına bağlıdır. Problemin boyutunun iyi bir şekilde indirgenmesi isteniyorsa özdeğerler hızlı bir şekilde azalmalıdır. Akışkanlar dinamiği, ısı transferi gibi bir çok uygulamada özdeğerler hızlı bir şekilde azalmaktadır [48].

5.1.2 UDA Yönteminin Zamana Bağlı Sistemlere Uygulanması

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + f(t, y(t)), \quad t \in (0, T] \quad (5.9)$$

$$y(0) = y_0 \quad (5.10)$$

yarı lineer başlangıç değer problemi $T > 0$ olmak üzere ele alınsın. Burada $y_0 \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ve $f : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu sürekli ve ikinci değışkene göre Lipschitz-sürekli olsun. $[0, T]$ aralığı üzerinde $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$ düğüm noktaları alınsın. Kolaylık olması için adım uzunlukları $\Delta t = T/(n-1)$ eşit alınsın. Bu durumda $t_j = (j-1)\Delta t$ olur.

(5.9) sistemi için UDA bazı (rank $l \leq n$)

$$\min_{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l \in \mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^n \alpha_j \left\| y_j - \sum_{i=1}^l \langle y_j, \tilde{u}_i \rangle_W \tilde{u}_i \right\|_W^2, \quad \langle \tilde{u}_i, \tilde{u}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq l \quad (5.11)$$

probleminin çözümünden elde edilir. Burada α_j negatif olmayan t ye bağılı ağırlık fonksiyonudur. $j = 1, \dots, n$ için $\alpha_j = 1$ ve $W = I$ alınırsa (5.8) elde edilir. Açık olarak $\{y_j\}_{j=1}^n$ değıerleri seçilen $\{t_j\}_{j=1}^n$ anlarına bağılıdır. Dolayısıyla $\{u_i\}_{i=1}^l$ baz vektörleri ve $\{\lambda_i\}_{i=1}^l$ özdeğıerleri de $\{t_j\}_{j=1}^n$ değıerlerine bağılıdır. Buradan

$$u_i = u_i^n, \quad \lambda_i = \lambda_i^n, \quad 1 \leq i \leq l$$

yazılır.

(5.11) problemindeki α_j ağırlıklarının uygun seçimlerinin nasıl olması gerektiğini UDA yönteminin sürekli hali üzerinden giderek açıklayalım. $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ (5.9) sisteminin tek çözümü olsun. UDA bazı bulmak için

$$\min_{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l \in \mathbb{R}^m} \int_0^T \left\| y(t) - \sum_{i=1}^l \langle y(t), \tilde{u}_i \rangle_W \tilde{u}_i \right\|_W^2 dt, \quad \langle \tilde{u}_i, \tilde{u}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq l \quad (5.12)$$

minimum problemini ele almak gerekir.

$$Ru = \int_0^T \langle y(t), u \rangle y(t) dt, \quad u \in \mathbb{R}^m$$

şeklinde $R : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ operatörü tanımlansın. R sürekli, negatif olmayan, simetrik operatör yardımıyla minimum probleminin çözümü aşağıdaki teoremlerle şu şekilde verilir.

Teorem 5.1.3. $y \in C([0, T]; \mathbb{R}^m)$, (5.9) sistemi için tek çözüm olsun. (5.12) deki minimum probleminin çözümü olan UDA bazı $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l$ özdeğıerler olmak üzere R nin $\{u_i\}_{i=1}^l$ özvektörleridir.

Ayrıca UDA bazı anlık kayıt yöntemi yardımı ile şu şekilde elde edilir.

$$(Kv)(t) = \int_0^T \langle y(s), y(t) \rangle_W v(s) ds$$

şeklinde tanımlanan $K : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$ sürekli, negatif olmayan, simetrik ve kompakt operatör yardımıyla UDA bazı

$$Kv_i = \lambda_i v_i \quad 1 \leq i \leq l, \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l > 0, \quad \int_0^T v_i(t)v_j(t)dt = \delta_{ij}$$

özdeğer probleminin çözümü ile

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_0^T v_i(t)y(t)dt \quad i = 1, \dots, l$$

şeklinde elde edilir.

Kesikli hal ile sürekli hal arasındaki ilişkiyi kurmak için

$$R^n u := \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle y_j, u \rangle_W y_j$$

olacak şekilde $R^n : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ operatörü tanımlansın. R operatörü ile aynı özelliklere sahip olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Sürekli ve kesikli hal için özdeğer problemleri şu

$$R^n u_i^n = \lambda_i^n u_i^n \quad \lambda_1^n \geq \dots \geq \lambda_l^n \geq \dots \geq \lambda_{d(n)}^n > \lambda_{d(n)+1}^n = \dots = \lambda_m^n = 0 \quad (5.13)$$

$$Ru_i = \lambda_i u_i \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l \geq \dots \geq \lambda_d > \lambda_{d+1} = \dots = \lambda_m = 0 \quad (5.14)$$

şekildedir. Ayrıca

$$\int_0^T \|y(t)\|_W^2 dt = \sum_{i=1}^d \lambda_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

ve benzer olarak

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \|y(t_j)\|_W^2 = \sum_{i=1}^{d(n)} \lambda_i^n = \sum_{i=1}^m \lambda_i^n$$

eşitlikleri sağlanır. Kolaylık olması için α_j nin n ye bağlı olduğu indisle belirtilmedi. Buradan α_j , $\Delta t \rightarrow 0$ iken

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \|y(t_j)\|_W^2 \rightarrow \int_0^T \|y(t)\|_W^2 dt$$

sağlayacak şekilde seçilmesi gerektiği elde edilir.

Teorem 5.1.4. $y \in C'([0, T]; \mathbb{R}^m)$, (5.9) sisteminin tek çözümü, $\{u_i^n, \lambda_i^n\}_{i=1}^m$, $\{u_i, \lambda_i\}_{i=1}^m$ R^n ve R için özdeğer-özvektör çifti olsun. $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ olacak şekilde $\lambda \in \{1, \dots, m\}$ sabitlendiği ve

$$\sum_{i=l+1}^m \lambda_i \neq 0, \quad \sum_{i=l+1}^m |\langle y_0, u_i \rangle_W|^2 \neq 0$$

eşitsizliklerinin sağlandığı varsayalım. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R^n - R\|_{L(\mathbb{R}^m)} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_i^n - \lambda_i| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_i^n - u_i\|_W = 0, \quad 1 \leq i \leq l \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=l+1}^m (\lambda_i^n - \lambda_i) &= 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=l+1}^m |\langle y_0, u_i^n \rangle_W|^2 = \sum_{i=l+1}^m |\langle y_0, u_i \rangle_W|^2 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

5.1.3 İndirgenmiş Modelin Elde Edilmesi

Önceki kısımda UDA bazının nasıl elde edildiği açıklandı. Bu kısımda ise UDA bazının hesaplandığı varsayımı altında indirgenmiş modelin elde edilişi üzerinde durulacaktır.

$\{u_i\}_{j=1}^l \in \mathbb{R}^m, l \in \{1, 2, \dots, m\}$ UDA bazı olsun.

Her $t \in [0, T]$ için

$$y^l(t) = \sum_{j=1}^l \langle y^l(t), u_j \rangle_W u_j \quad (5.15)$$

şeklinde tanımlı bir yaklaşımda bulunalım. Kolaylık olması bakımından $y_j^l(t) := \langle y^l(t), u_j \rangle_W$ alalım.

$$y(t) = \sum_{j=1}^m \langle y(t), u_j \rangle_W u_j, \quad \forall t \in [0, T]$$

sağlandığından $l < m$ için $y^l(t)$, $y(t)$ için bir yaklaşımdır. Bu yaklaşım (5.9) ve (5.10) da yerine yazılırsa

$$\sum_{j=1}^l \dot{y}_j^l(t) u_j = \sum_{j=1}^l y_j^l(t) A u_j + f(y^l(t), t) \quad (5.16)$$

$$\sum_{j=1}^l y_j^l(0) u_j = y_0 \quad (5.17)$$

elde edilir. (5.16) sistemi katsayı fonksiyonları $y_j^l(t)$ ($1 \leq j \leq l$) olmak üzere \mathbb{R}^m üzerinde tanımlı başlangıç değer problemidir. $l \leq m$ olduğundan katsayıları hesaplanabilmesi için iç çarpım uygulanır ve $1 \leq i \leq l$, $t \in (0, T]$ için

$$\dot{y}_i^l(t) = \sum_{j=1}^l y_j^l(t) \langle A u_j, u_i \rangle_W + \langle f(t, y^l(t)), u_i \rangle_W \quad (5.18)$$

sistemi elde edilir. Kolaylık olması bakımından $a_{ij} = \langle A u_j, u_i \rangle_W$ olmak üzere $B = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ olarak alınsın. Bu durumda (5.18) sistemi

$$\dot{y}^l(t) = B y^l(t) + F(t, y^l(t)), \quad t \in (0, T] \quad (5.19)$$

olarak ifade edilir. Burada

$$y^l = \begin{pmatrix} y_1^l \\ \vdots \\ y_l^l \end{pmatrix} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^l$$

ve

$F = (F_1, \dots, F_l)^T : [0, T] \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ olmak üzere

$$F_i(t, y) = \left\langle f \left(t, \sum_{j=1}^l y_j u_j \right), u_i \right\rangle_W, \quad t \in [0, T], \quad y = (y_1, \dots, y_l) \in \mathbb{R}^l$$

şeklindedir. Başlangıç koşulu ise

$$y_0 = \begin{pmatrix} \langle y_0, u_1 \rangle_W \\ \vdots \\ \langle y_0, u_l \rangle_W \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^l$$

olmak üzere

$$y^l(0) = y_0$$

dır. (5.19) sistemine (5.9) sisteminin indirgenmiş modeli denir.

5.2 NLS Denkleminin UDA Yönteminin Uygulanması

NLS denkleminin yarı ayrık Hamiltonian sistemi olarak

$$\begin{aligned} p_t &= -Aq - \lambda q(p^2 + q^2) \\ q_t &= Ap + \lambda p(p^2 + q^2) \end{aligned} \quad (5.20)$$

şeklinde ifade edildiği gösterilmişti. Şimdi bu sisteme UDA yönteminin uygulanışını ve elde edilen sistemin orta nokta yöntemi, OVA yöntemi yardımıyla nasıl çözüldüğünü açıklayalım. $\{u_j\}_{j=1}^l, \{v_j\}_{j=1}^l$ UDA bazı olmak üzere $p(x, t)$ ve $q(x, t)$ fonksiyonları için şöyle bir yaklaşımda bulunalım:

$$p^l(x, t) = \sum_{j=1}^l a_j(t)u_j(x), \quad q^l(x, t) = \sum_{j=1}^l b_j(t)v_j(x) \quad (5.21)$$

$\{u_j\}_{j=1}^l, \{v_j\}_{j=1}^l$ ortogonal baz olduğundan $a_j(t)$ ve $b_j(t)$ fonksiyonlarını bulmak için iç çarpım uygulanırsa

$$a_j(t) = \langle p^l, u_j \rangle =: \gamma_j, \quad b_j(t) = \langle q^l, v_j \rangle =: \beta_j \quad (5.22)$$

elde edilir ve bulunan bu değerler (5.21) de yerlerine yazılırsa

$$p^l = \sum_{j=1}^l \gamma_j u_j, \quad q^l = \sum_{j=1}^l \beta_j v_j$$

elde edilir. p^l ve q^l (5.20) sisteminde yazılırsa

$$\sum_{j=1}^l \dot{\gamma}_j u_j = - \sum_{j=1}^l \beta_j A v_j - \lambda \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right) \left\{ \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right)^2 \right\} \quad (5.23)$$

$$\sum_{j=1}^l \dot{\beta}_j v_j = \sum_{j=1}^l \gamma_j A u_j + \lambda \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right) \left\{ \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right)^2 \right\} \quad (5.24)$$

elde edilir. (5.23) ve (5.24) eşitliklerine sırasıyla u_i ve v_i ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_i &= - \sum_{j=1}^l \beta_j \langle A v_j, u_i \rangle - \lambda \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right) \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right)^2, u_i \right\rangle - \lambda \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right)^3, u_i \right\rangle \\ \dot{\beta}_i &= \sum_{j=1}^l \gamma_j \langle A u_j, v_i \rangle + \lambda \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right) \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right)^2, v_i \right\rangle + \lambda \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right)^3, v_i \right\rangle \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada

$$B = ((b_{ij})), \quad b_{ij} = \langle A v_j, u_i \rangle \quad (5.25)$$

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_l] \in \mathbb{R}^{m \times l}, \quad U = [u_1, u_2, \dots, u_l] \in \mathbb{R}^{m \times l}$$

$$\beta \in \mathbb{R}^l$$

$$\left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right)^3 = (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_l v_l)^3 = (V\beta)^3,$$

$$\langle (V\beta)^3, u_i \rangle = u_i^t (V\beta)^3 \Rightarrow \langle (V\beta)^3, U \rangle = U^t * (V\beta)^3, \quad (5.26)$$

$$\left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right) \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right)^2 = (V\beta) \cdot (U\gamma)^2$$

$$\langle (V\beta) \cdot (U\gamma)^2, U \rangle = U^t * (V\beta) \cdot (U\gamma)^2 \quad (5.27)$$

olarak yazılır ve (5.25), (5.26), (5.27) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= -B\beta - \lambda U^T * (V\beta) \cdot (U\gamma)^2 - \lambda U^T * (V\beta)^3 \\ \dot{\beta} &= B^T \gamma + \lambda V^T * (U\gamma) \cdot (V\beta)^2 + \lambda V^T * (U\gamma)^3 \end{aligned} \quad (5.28)$$

elde edilir. Bu sistemi çözmek için orta nokta yöntemi ve OVA yöntemi kullanıldı.

Öncelikle (5.28) sistemini çözmek için parçalara ayırma yöntemi kullanalım. Bu durumda sistem bir lineer bir de lineer olmayan sisteme ayrılır:

A Akımı

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= -B\beta \\ \dot{\beta} &= B^T\gamma\end{aligned}$$

B Akımı

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= -\lambda U^T * (V\beta).(U\gamma)^2 - \lambda U^T * (V\beta)^3 \\ \dot{\beta} &= \lambda V^T * (U\gamma).(V\beta)^2 + \lambda V^T * (U\gamma)^3\end{aligned}$$

Orta Nokta Yönteminin Uygulanması

Her bir sistemi çözmek için orta nokta yöntemi uygulayalım.

Akım *A* için orta nokta yöntemi uygulanırsa

$$\frac{\gamma^{n+1} - \gamma^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2}B(\beta^{n+1} + \beta^n) \quad (5.29)$$

$$\frac{\beta^{n+1} - \beta^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}B^T(\gamma^{n+1} + \gamma^n) \quad (5.30)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\gamma^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}B\beta^{n+1} &= \gamma^n - \frac{\Delta t}{2}B\beta^n =: \hat{\gamma} \\ \beta^{n+1} - \frac{\Delta t}{2}B^T\gamma^{n+1} &= \beta^n + \frac{\Delta t}{2}B^T\gamma^n =: \hat{\beta}\end{aligned}$$

bulunur. İlk denklemden γ^{n+1} ikinci denklemden de β^{n+1} çekilirse

$$\begin{aligned}\gamma^{n+1} &= \hat{\gamma} - \frac{\Delta t}{2}B\beta^{n+1} \\ \beta^{n+1} - \frac{\Delta t}{2}B^T(\hat{\gamma} - \frac{\Delta t}{2}B\beta^{n+1}) &= \hat{\beta} \Rightarrow (I + \frac{\Delta t^2}{4}B^TB)\beta^{n+1} = \hat{\beta} + \frac{\Delta t}{2}B^T\hat{\gamma}\end{aligned}$$

elde edilir, $\widehat{\gamma}$ ve $\widehat{\beta}$ değerleri bilindiğinden ikinci denklemden β^{n+1} hesaplanır, bulunan bu değer birinci denklemde yerine yazılırsa γ^{n+1} de bulunmuş olur.

Akım B için de benzer işlemler şu şekilde yapılır:

$$\begin{aligned}\frac{\gamma^{n+1} - \gamma^n}{\Delta t} &= -\lambda U^t * \left(\frac{V\beta^{n+1} + V\beta^n}{2} \right)^3 - \lambda U^t * \left(\frac{V\beta^{n+1} + V\beta^n}{2} \right) \cdot \left(\frac{U\gamma^{n+1} + U\gamma^n}{2} \right)^2 \\ \frac{\beta^{n+1} - \beta^n}{\Delta t} &= \lambda V^t * \left(\frac{U\gamma^{n+1} + U\gamma^n}{2} \right)^3 + \lambda V^t * \left(\frac{U\gamma^{n+1} + U\gamma^n}{2} \right) \cdot \left(\frac{V\beta^{n+1} + V\beta^n}{2} \right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma^{n+1} - \gamma^n + \frac{\lambda\Delta t}{8} U^t * \{ (V\beta^{n+1})^3 + 3(V\beta^{n+1})^2 \cdot (V\beta^n) + 3(V\beta^{n+1}) \cdot (V\beta^n)^2 + (V\beta^n)^3 \} \\ + \frac{\lambda\Delta t}{8} U^t * \{ (V\beta^{n+1}) \cdot (U\gamma^{n+1})^2 + 2(V\beta^{n+1}) \cdot (U\gamma^{n+1}) \cdot (U\gamma^n) + (V\beta^{n+1}) \cdot (U\gamma^n)^2 \} \\ + \frac{\lambda\Delta t}{8} U^t * \{ (V\beta^n) \cdot (U\gamma^{n+1})^2 + 2(V\beta^n) \cdot (U\gamma^{n+1}) \cdot (U\gamma^n) + (V\beta^n) \cdot (U\gamma^n)^2 \} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta^{n+1} - \beta^n - \frac{\lambda\Delta t}{8} V^t * \{ (U\gamma^{n+1})^3 + 3(U\gamma^{n+1})^2 \cdot (U\gamma^n) + 3(U\gamma^{n+1}) \cdot (U\gamma^n)^2 + (U\gamma^n)^3 \} \\ - \frac{\lambda\Delta t}{8} V^t * \{ (U\gamma^{n+1}) \cdot (V\beta^{n+1})^2 + 2(U\gamma^{n+1}) \cdot (V\beta^{n+1}) \cdot (V\beta^n) + (U\gamma^{n+1}) \cdot (V\beta^n)^2 \} \\ - \frac{\lambda\Delta t}{8} V^t * \{ (U\gamma^n) \cdot (V\beta^{n+1})^2 + 2(U\gamma^n) \cdot (V\beta^{n+1}) \cdot (V\beta^n) + (U\gamma^n) \cdot (V\beta^n)^2 \} = 0\end{aligned}$$

Elde edilen bu lineer olmayan sistemin çözümü için Newton Raphson yöntemi kullanılır. Dolayısıyla sistemin Jakobiyen matrisi hesaplanmalıdır. $b = \frac{\lambda\Delta t}{8}$ olmak üzere Jakobiyen matrisi şu şekildedir:

Jakobiyen

$$\begin{aligned}J &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + 3b \begin{pmatrix} 0 & U^t * (V \cdot (V\beta^{n+1})^2) \\ -V^t * (U \cdot (U\gamma^{n+1})^2) & 0 \end{pmatrix} \\ &+ 6b \begin{pmatrix} 0 & U^t * (V \cdot (V\beta^{n+1}) \cdot (V\beta^n)) \\ -V^t * (U \cdot (U\gamma^{n+1}) \cdot (U\gamma^n)) & 0 \end{pmatrix} \\ &+ 3b \begin{pmatrix} 0 & U^t * (V \cdot (V\beta^n)^2) \\ -V^t * (U \cdot (U\gamma^n)^2) & 0 \end{pmatrix} \\ &+ b \begin{pmatrix} 2U^t * (U \cdot (U\gamma^{n+1}) \cdot (V\beta^{n+1})) & U^t * (V \cdot (U\gamma^{n+1})^2) \\ -V^t * (U \cdot (V\beta^{n+1})^2) & -2V^t * (V \cdot (V\beta^{n+1}) \cdot (U\gamma^{n+1})) \end{pmatrix} \\ &+ 2b \begin{pmatrix} U^t * (U \cdot (V\beta^{n+1}) \cdot (U\gamma^n)) & U^t * (V \cdot (U\gamma^{n+1}) \cdot (U\gamma^n)) \\ -V^t * (U \cdot (V\beta^{n+1}) \cdot (V\beta^n)) & -V^t * (V \cdot (U\gamma^{n+1}) \cdot (V\beta^n)) \end{pmatrix} \\ &+ b \begin{pmatrix} 2U^t * (U \cdot (V\beta^n) \cdot (U\gamma^n)) & U^t * (V \cdot (U\gamma^n)^2) \\ -V^t * (U \cdot (V\beta^n)^2) & -2V^t * (V \cdot (U\gamma^n) \cdot (V\gamma^n)) \end{pmatrix} \\ &+ 2b \begin{pmatrix} U^t * ((V\beta^n) \cdot (U \cdot (U\gamma^{n+1}))) & 0 \\ 0 & -V^t * ((U\gamma^n) \cdot (V \cdot (V\beta^{n+1}))) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ortalama Vektör Alanı Yönteminin Uygulanması

İkinci olarak da lineer ve lineer olmayan sistemi çözmek için OVA yöntemini uygulayalım. Akım A ya OVA yöntemi uygulanmasında elde edilen sistem ile orta nokta yönteminin uygulanmasında elde edilen sistem aynıdır. Ancak Akım B ye OVA yöntemi uygulandığında elde edilen lineer olmayan sistem farklıdır:

$$\begin{aligned}\gamma^{n+1} & - \gamma^n + \lambda\Delta t U^t * \left\{ \frac{1}{4}(V\beta^n)^3 + \frac{1}{4}(V\beta^{n+1})^3 + \frac{3}{12}(V\beta^n)^2 \cdot (V\beta^{n+1}) + \frac{3}{12}(V\beta^n) \cdot (V\beta^{n+1})^2 \right\} \\ & + \lambda\Delta t U^t * \left\{ \frac{1}{4}(V\beta^n) \cdot (U\gamma^n)^2 + \frac{2}{12}(V\beta^n) \cdot (U\gamma^n) \cdot (U\gamma^{n+1}) + \frac{1}{12}(V\beta^n) \cdot (U\gamma^{n+1})^2 \right\} \\ & + \lambda\Delta t U^t * \left\{ \frac{1}{4}(V\beta^{n+1}) \cdot (U\gamma^n)^2 + \frac{2}{12}(V\beta^{n+1}) \cdot (U\gamma^n) \cdot (U\gamma^{n+1}) + \frac{1}{12}(V\beta^{n+1}) \cdot (U\gamma^{n+1})^2 \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta^{n+1} & - \beta^n - \lambda\Delta t V^t * \left\{ \frac{1}{4}(U\gamma^n)^3 + \frac{1}{4}(U\gamma^{n+1})^3 + \frac{3}{12}(U\gamma^n)^2 \cdot (U\gamma^{n+1}) + \frac{3}{12}(U\gamma^n) \cdot (U\gamma^{n+1})^2 \right\} \\ & - \lambda\Delta t V^t * \left\{ \frac{1}{4}(U\gamma^n) \cdot (V\beta^n)^2 + \frac{2}{12}(U\gamma^n) \cdot (V\beta^n) \cdot (V\beta^{n+1}) + \frac{1}{12}(U\gamma^n) \cdot (V\beta^{n+1})^2 \right\} \\ & - \lambda\Delta t V^t * \left\{ \frac{1}{4}(U\gamma^{n+1}) \cdot (V\beta^n)^2 + \frac{2}{12}(U\gamma^{n+1}) \cdot (V\beta^n) \cdot (V\beta^{n+1}) + \frac{1}{12}(U\gamma^{n+1}) \cdot (V\beta^{n+1})^2 \right\}\end{aligned}$$

Elde edilen bu lineer olmayan sistemin çözümü için Newton Raphson yöntemi kullanılır. Dolayısıyla sistemin Jakobiyeen matrisi hesaplanmalıdır. $c = \lambda\Delta t$ olmak üzere Jakobiyeen matris $a = \frac{3}{4}U^t * (V \cdot (V\beta^{n+1})^2) + \frac{6}{12}U^t * (V \cdot (V\beta^{n+1}) \cdot (V\beta^n))$, $b = -\frac{3}{4}V^t * (U \cdot (U\gamma^{n+1})^2) - \frac{6}{12}V^t * (U \cdot (U\beta^{n+1}) \cdot (U\gamma^n))$ olmak üzere

$$\begin{aligned}J & = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \\ & + c \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{12}U^t * (V \cdot (V\beta^n)^2) \\ -\frac{3}{12}V^t * (U \cdot (U\gamma^n)^2) & 0 \end{pmatrix} \\ & + c \begin{pmatrix} \frac{2}{12}U^t * (U \cdot (V\beta^n) \cdot (U\gamma^n)) & 0 \\ 0 & -\frac{2}{12}V^t * (V \cdot (U\gamma^n) \cdot (V\beta^n)) \end{pmatrix} \\ & + c \begin{pmatrix} \frac{2}{12}U^t * (U \cdot (V\beta^n) \cdot (U\gamma^{n+1})) & 0 \\ 0 & -\frac{2}{12}V^t * (V \cdot (U\gamma^n) \cdot (V\beta^{n+1})) \end{pmatrix} \\ & + c \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12}U^t * (V \cdot (U\gamma^n)^2) \\ -\frac{1}{12}V^t * (U \cdot (V\beta^n)^2) & 0 \end{pmatrix} \\ & + c \begin{pmatrix} \frac{2}{12}U^t * (U \cdot (V\beta^{n+1}) \cdot (U\gamma^n)) & \frac{2}{12}U^t * (V \cdot (U\gamma^n) \cdot (U\gamma^{n+1})) \\ -\frac{2}{12}V^t * (U \cdot (V\beta^n) \cdot (V\beta^{n+1})) & -\frac{2}{12}V^t * (V \cdot (U\gamma^{n+1}) \cdot (V\beta^n)) \end{pmatrix} \\ & + c \begin{pmatrix} \frac{2}{4}U^t * (U \cdot (V\beta^{n+1}) \cdot (U\gamma^{n+1})) & \frac{1}{4}U^t * (V \cdot (U\gamma^{n+1})^2) \\ -\frac{1}{4}V^t * (U \cdot (V\beta^{n+1})^2) & -\frac{2}{4}V^t * (V \cdot (U\gamma^{n+1}) \cdot (V\beta^{n+1})) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

5.2.1 NLS Denklemi İçin UDA Yönteminin Hata Analizi

Bu kısımda $\{u_i\}_{i=1}^l$ UDA bazının hesaplandığı varsayımı altında NLS denklemi için hata analizi yapılacaktır. Uzay değişkenine göre diskrize edilmiş NLS denklemi

$$\begin{aligned} p_t &= -Aq - \lambda q(p^2 + q^2) \\ q_t &= Ap + \lambda p(p^2 + q^2) \end{aligned}$$

şeklindeydi. Burada $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)^T$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)^T$, $q(p^2 + q^2) = (q_1(p_1^2 + q_1^2), q_2(p_2^2 + q_2^2), \dots, q_m(p_m^2 + q_m^2))^T$, $p(p^2 + q^2) = (p_1(p_1^2 + q_1^2), p_2(p_2^2 + q_2^2), \dots, p_m(p_m^2 + q_m^2))^T$ dır. Kolay gösterilmesi için

$$y = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -\lambda q(p^2 + q^2) \\ \lambda p(p^2 + q^2) \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa sistem

$$y_t = \tilde{A}y + f(t, y) \tag{5.31}$$

formunda yazılır. $[0, T]$ zaman aralığı için $\Delta t = T/(n - 1)$ olacak şekilde sabit bir adım uzunluğu belirlensin. $1 \leq j \leq n$ olmak üzere düğüm noktaları $t_j = (j - 1)\Delta t$ olarak alınsın. Analizin kolay gösterilmesi bakımından eşit uzaklıktaki düğüm noktaları seçildi. Ancak yapılacak işlemler benzer şekilde eşit uzaklıkta olmayan noktalar için de yapılabilir. Analiz yaparken $f(t, y)$ fonksiyonunun ikinci değişkene göre Lipschitz-sürekliliği kullanılacaktır. Bu nedenle öncelikle $f(t, y)$ fonksiyonunun ikinci değişkene göre Lipschitz-sürekliliğini gösterelim.

$f(t, y)$ fonksiyonu $f(t, y) = \begin{pmatrix} -\lambda q(p^2 + q^2) \\ \lambda p(p^2 + q^2) \end{pmatrix}$ şeklinde alınmıştı. Ancak ispatı

$f_1(y, t) = \begin{pmatrix} -q(p^2 + q^2) \\ p(p^2 + q^2) \end{pmatrix}$ için yapalım. Çünkü $f_1(t, y)$ ikinci değişkene göre

Lipschitz-sürekliliği fonksiyon ise λ sabit olmak üzere $\lambda f_1(t, y)$ de ikinci değişkene göre Lipschitz-sürekliliği fonksiyondur. Her $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{2m}$ için

$$\|f_1(t, y_1) - f_1(t, y_2)\| \leq L_{f_1} \|y_1 - y_2\|$$

olacak şekilde $L_{f_1} > 0$ sabitinin var olduğu gösterilmelidir. $y_1 = (p_1, q_1)^T$, $y_2 = (p_2, q_2)^T$ alalım.

$$\begin{aligned}
\|f_1(t, y_1) - f_1(t, y_2)\| &= \left\| \begin{pmatrix} -(p_1^2 + q_1^2)q_1 \\ (p_1^2 + q_1^2)p_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -(p_2^2 + q_2^2)q_2 \\ (p_2^2 + q_2^2)p_2 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} -(p_1^2 + q_1^2)q_1 + (p_2^2 + q_2^2)q_2 \\ (p_1^2 + q_1^2)p_1 - (p_2^2 + q_2^2)p_2 \end{pmatrix} \right\| \\
&= |(p_1^2 + q_1^2)q_1 - (p_2^2 + q_2^2)q_2| + |(p_1^2 + q_1^2)p_1 - (p_2^2 + q_2^2)p_2| \\
&\leq |q_1^3 - q_2^3| + |p_1^2q_1 - p_2^2q_2| + |p_1^3 - p_2^3| + |q_1^2p_1 - q_2^2p_2|
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
|q_1^3 - q_2^3| &\leq |q_1 - q_2||q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2| \leq c_1|q_1 - q_2| \\
|p_1^2q_1 - p_2^2q_2| &= |p_1^2q_1 - p_1^2q_2 + p_1^2q_2 - p_2^2q_2| \leq p_1^2|q_1 - q_2| + |q_2||p_1^2 - p_2^2| \\
&\leq c_2|q_1 - q_2| + c_3|p_1 - p_2|, \quad c_2 = p_1^2, \quad c_3 = |q_2||p_1 + p_2|
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
|p_1^3 - p_2^3| &\leq c_4|p_1 - p_2| \\
|q_1^2p_1 - q_2^2p_2| &\leq c_5|p_1 - p_2| + c_6|q_1 - q_2|, \quad c_5 = q_1^2, \quad c_6 = |p_2||q_1 + q_2|
\end{aligned}$$

olduğu kullanılırsa $\|f_1(t, y_1) - f_1(t, y_2)\| \leq L_{f_1}(|q_1 - q_2| + |p_1 - p_2|) = L_{f_1} \|y_1 - y_2\|$ elde edilir. Burada $L_{f_1} = \max\{c_2, c_3, c_5, c_6\}$ dir. Buradan da $L_f = |\lambda|L_{f_1}$ olmak üzere

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L_f \|y_1 - y_2\|$$

elde edilir.

Şimdi $y^l(t)$

$$y^l(t) = \sum_{j=1}^l y_j^l(t) u_j^n \quad (5.32)$$

olacak şekilde $y(t)$ için bir yaklaşım olsun. Bu durumda (5.31) denkleminin indirgenmiş modeli

$$\begin{aligned} \langle \dot{y}^l(t), u_i^n \rangle &= \langle \tilde{A}y^l(t) + f(t, y^l(t)), u_i^n \rangle, \quad i = 1, \dots, l \quad (5.33) \\ \langle y^l(0), u_i^n \rangle &= \langle y_0, u_i^n \rangle, \quad i = 1, \dots, l \end{aligned}$$

şeklindedir. (5.33) denklem sistemini çözmek için orta nokta yöntemi kullanıldı. $Y_j, t_j, \quad 1 \leq j \leq n$ anındaki $y^l(t_j)$ değerine bir yaklaşım olsun. Buradan (5.33) sisteminin ayrık sistemi $i = 1, \dots, l, \quad 2 \leq j \leq n$ olmak üzere

$$\left\langle \frac{Y_j - Y_{j-1}}{\Delta t}, u_i^n \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \tilde{A}(Y_j + Y_{j-1}) + f\left(t, \frac{Y_j + Y_{j-1}}{2}\right), u_i^n \right\rangle, \quad (5.34)$$

$$\langle Y_1, u_i^n \rangle = \langle y_0, u_i^n \rangle, \quad i = 1, \dots, l \quad (5.35)$$

olarak elde edilir. Hata analizi için

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \|y(t_j) - Y_j\|^2$$

toplama incelenecektir. $u \in \mathbb{R}^{2m}$ için

$$P_n^l u = \sum_{i=1}^l \langle u, u_i^n \rangle u_i^n$$

olacak şekilde $P_n^l : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow V_n^l, \quad (V_n^l = \text{span}\{u_1^n, \dots, u_l^n\})$ projeksiyonu tanımlansın. P_n^l projeksiyonu lineer, sınırlı dolayısıyla süreklidir. Özel olarak $\|P_n^l\|_{L(\mathbb{R}^{2m})} = 1$ dir. $\varrho_j^l = y(t_j) - P_n^l y(t_j)$ ve $\vartheta_j^l = P_n^l y(t_j) - Y_j$ olmak üzere

$$y(t_j) - Y_j = y(t_j) - P_n^l y(t_j) + P_n^l y(t_j) - Y_j = \varrho_j^l + \vartheta_j^l$$

şeklinde ayrışım yapılsın. Bunun yanısıra

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \left\| y(t_j) - \sum_{i=1}^l \langle y(t_j), u_i^n \rangle u_i^n \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \|y(t_j) - P_n^l y(t_j)\|^2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \|\varrho_j^l\|^2$$

eşitliği de sağlanır. Ayrıca $\{u_i^n\}_{i=1}^l$ UDA bazı olduğundan

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \|\varrho_j^l\|^2 = \sum_{i=l+1}^{2m} \lambda_i^n$$

sağlanır. Şimdi ϑ_j^l için bir değerlendirmede bulunalım. $\bar{\partial}\vartheta_j^l = (\vartheta_j^l - \vartheta_{j-1}^l)/\Delta t$ notasyonu kullanılarak $2 \leq j \leq n$ için

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\partial}\vartheta_j^l, u_i^n \rangle &= \langle P_n^l \left(\frac{y(t_j) - y(t_{j-1})}{\Delta t} \right) - \frac{Y_j - Y_{j-1}}{\Delta t}, u_i^n \rangle \\
&= \left\langle \dot{y}(t_j - \frac{\Delta t}{2}) - \left(\frac{1}{2} \tilde{A}(Y_j + Y_{j-1}) + f \left(\frac{Y_j + Y_{j-1}}{2} \right) \right), u_i^n \right\rangle \\
&+ \left\langle P_n^l \left(\frac{y(t_j) - y(t_{j-1})}{\Delta t} \right) - \dot{y}(t_j - \frac{\Delta t}{2}), u_i^n \right\rangle \\
&= \left\langle \tilde{A} \left(y(t_j - \frac{\Delta t}{2}) - \frac{Y_j + Y_{j-1}}{2} \right) + f(y(t_j - \frac{\Delta t}{2})) - f \left(\frac{Y_j + Y_{j-1}}{2} \right), u_i^n \right\rangle \\
&+ \left\langle P_n^l \left(\frac{y(t_j) - y(t_{j-1})}{\Delta t} \right) - \frac{y(t_j) - y(t_{j-1})}{\Delta t}, u_i^n \right\rangle + \left\langle \frac{y(t_j) - y(t_{j-1})}{\Delta t} - \dot{y}(t_j - \frac{\Delta t}{2}), u_i^n \right\rangle \\
&= \left\langle \tilde{A} \left(y(t_j - \frac{\Delta t}{2}) - \frac{Y_j + Y_{j-1}}{2} \right) + f(y(t_j - \frac{\Delta t}{2})) - f \left(\frac{Y_j + Y_{j-1}}{2} \right) + w_j^l + z_j^l, u_i^n \right\rangle \quad (5.36)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$z_j^l = P_n^l \left(\frac{y(t_j) - y(t_{j-1})}{\Delta t} \right) - \frac{y(t_j) - y(t_{j-1})}{\Delta t}, \quad w_j^l = \frac{y(t_j) - y(t_{j-1})}{\Delta t} - \dot{y}(t_j - \frac{\Delta t}{2})$$

dır. (5.36) eşitliğinde $u_i = \vartheta_j^l + \vartheta_{j-1}^l$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\partial}\vartheta_j^l, \vartheta_j^l + \vartheta_{j-1}^l \rangle &= \left\langle \tilde{A} \left(y(t_j - \frac{\Delta t}{2}) - \frac{Y_j + Y_{j-1}}{2} \right) + f(y(t_j - \frac{\Delta t}{2})) - f \left(\frac{Y_j + Y_{j-1}}{2} \right), \vartheta_j^l + \vartheta_{j-1}^l \right\rangle \\
&+ \left\langle w_j^l + z_j^l, \vartheta_j^l + \vartheta_{j-1}^l \right\rangle \quad (5.37)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\langle \bar{\partial}\vartheta_j^l, \vartheta_j^l + \vartheta_{j-1}^l \rangle = \frac{1}{\Delta t} (\|\vartheta_j^l\|^2 - \|\vartheta_{j-1}^l\|^2)$$

dır ve f fonksiyonu ikinci değişkene göre Lipschitz-süreklidir yani

$$\left\| f(y(t_j - \frac{\Delta t}{2})) - f \left(\frac{Y_j + Y_{j-1}}{2} \right) \right\| \leq L_f \left\| y(t_j - \frac{\Delta t}{2}) - \frac{Y_j + Y_{j-1}}{2} \right\|$$

olacak şekilde $L_f \geq 0$ vardır. Bu bilgiler ve Cauchy-Schwartz eşitsizliği (5.37) eşitliğinde kullanılırsa

$$\|\vartheta_j^l\|^2 \leq \|\vartheta_{j-1}^l\|^2 + \Delta t \left((\|A\| + L_f) \left\| y(t_j - \frac{\Delta t}{2}) - \frac{Y_j + Y_{j-1}}{2} \right\| + \|z_j^l\| + \|w_j^l\| \right) \|\vartheta_j^l + \vartheta_{j-1}^l\|$$

$$\|\vartheta_j^l\|^2 - \|\vartheta_{j-1}^l\|^2 \leq \Delta t \left((\|A\| + L_f) \left\| y(t_j - \frac{\Delta t}{2}) - \frac{Y_j + Y_{j-1}}{2} \right\| + \|z_j^l\| + \|w_j^l\| \right) \|\vartheta_j^l + \vartheta_{j-1}^l\|$$

$$\|\vartheta_j^l\|^2 - \|\vartheta_{j-1}^l\|^2 \leq \Delta t \left((\|A\| + L_f) \left\| y(t_j - \frac{\Delta t}{2}) - \frac{Y_j + Y_{j-1}}{2} \right\| + \|z_j^l\| + \|w_j^l\| \right) (\|\vartheta_j^l\| + \|\vartheta_{j-1}^l\|)$$

Her iki taraf $(\|\vartheta_j^l\| + \|\vartheta_{j-1}^l\|)$ ile bölünürse

$$\|\vartheta_j^l\| \leq \|\vartheta_{j-1}^l\| + \Delta t \left((\|A\| + L_f) \left\| y(t_j - \frac{\Delta t}{2}) - \frac{Y_j + Y_{j-1}}{2} \right\| + \|z_j^l\| + \|w_j^l\| \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} y(t_j - \frac{\Delta t}{2}) &= y(t_j) - \frac{\Delta t}{2} \dot{y}(\xi_j), & \xi_j &\in (t_j - \frac{\Delta t}{2}, t_j) \\ y(t_j - \frac{\Delta t}{2}) &= y(t_{j-1}) + \frac{\Delta t}{2} \dot{y}(\xi_{j-1}), & \xi_{j-1} &\in (t_{j-1}, t_j - \frac{\Delta t}{2}) \end{aligned}$$

açılımlarından c_0 sabit olmak üzere

$$y(t_j - \frac{\Delta t}{2}) = \frac{y(t_j) + y(t_{j-1})}{2} + \frac{\Delta t}{2} c_0$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \left\| y(t_j - \frac{\Delta t}{2}) - \frac{Y_j + Y_{j-1}}{2} \right\| &= \left\| \frac{y(t_j) + y(t_{j-1})}{2} + \frac{\Delta t}{2} c_0 - \frac{Y_j + Y_{j-1}}{2} \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} (\|\varrho_j^l\| + \|\vartheta_j^l\| + \|\varrho_{j-1}^l\| + \|\vartheta_{j-1}^l\| + c_0 \Delta t) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlik kullanılırsa

$$\|\vartheta_j^l\| \leq \|\vartheta_{j-1}^l\| + \Delta t \left(\frac{1}{2} (\|A\| + L_f) (\|\varrho_j^l\| + \|\vartheta_j^l\| + \|\varrho_{j-1}^l\| + \|\vartheta_{j-1}^l\| + c_0 \Delta t) + \|z_j^l\| + \|w_j^l\| \right)$$

elde edilir ve buradan

$$(1 - c_1 \Delta t) \|\vartheta_j^l\| \leq (1 + c_1 \Delta t) \|\vartheta_{j-1}^l\| + \Delta t (c_1 (\|\varrho_j^l\| + \|\varrho_{j-1}^l\|) + c_2 \Delta t + \|z_j^l\| + \|w_j^l\|)$$

elde edilir. Burada

$$c_1 = \max\{\|A\|, L_f\}, \quad c_2 = c_0 c_1$$

dir.

$0 < \Delta t \leq \frac{1}{2c_1}$ için

$$\frac{1}{1 - c_1 \Delta t} \leq 1 + 2c_1 \Delta t$$

olduğunu ve ayrıca

$$(1 + 2c_1\Delta t)^j \leq e^{2c_1\Delta t j} \quad \text{ve} \quad (1 + c_1\Delta t)^j \leq e^{c_1\Delta t j}$$

olduğunu göz önünde bulunduralım. j üzerinden toplam alırsa

$$\|\vartheta_j^l\| \leq (1 + 2c_1\Delta t)^j \left((1 + c_1\Delta t)^j \|\vartheta_0^l\| + \Delta t \sum_{k=1}^j (c_1(\|\varrho_k^l\| + \|\varrho_{k-1}^l\|) + c_2\Delta t + \|z_k^l\| + \|w_k^l\|) \right)$$

$$\|\vartheta_j^l\| \leq e^{2c_1\Delta t j} \left(e^{c_1\Delta t j} \|\vartheta_0^l\| + \Delta t \sum_{k=1}^j (c_1(\|\varrho_k^l\| + \|\varrho_{k-1}^l\|) + c_2\Delta t + \|z_k^l\| + \|w_k^l\|) \right)$$

$$\|\vartheta_j^l\| \leq e^{2c_1\Delta t j} \left(\Delta t \sum_{k=1}^j (c_1(\|\varrho_k^l\| + \|\varrho_{k-1}^l\|) + c_2\Delta t + \|z_k^l\| + \|w_k^l\|) \right) \quad (\|\vartheta_0^l\| = 0)$$

elde edilir. Burada her iki tarafın karesi alınır ve

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılırsa $C = 5e^{4c_1 T} \max\{c_1^2, c_2^2, 1, j\}$, ($\Delta t j \leq T$)

olmak üzere

$$\|\vartheta_j^l\|^2 \leq C\Delta t^2 \sum_{k=1}^j \left(\|\varrho_k^l\|^2 + \|\varrho_{k-1}^l\|^2 + \Delta t^2 + \|z_k^l\|^2 + \|w_k^l\|^2 \right)$$

elde edilir . Şimdi w_k^l için bir yaklaşımda bulunalım.

$$\begin{aligned} \Delta t^2 \sum_{k=1}^j \|w_k^l\|^2 &= \Delta t^2 \sum_{k=1}^j \left\| \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{\Delta t} - \dot{y}(t_k - \frac{\Delta t}{2}) \right\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^j \left\| y(t_k) - y(t_{k-1}) - \Delta t \dot{y}(t_k - \frac{\Delta t}{2}) \right\|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^j \left(\tilde{C} \Delta t^2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|y_{ttt}(t)\| dt \right)^2 \\ &\leq \tilde{C}^2 \Delta t^4 \sum_{k=1}^j \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|y_{ttt}(t)\| dt \right)^2 \\ &\leq \tilde{C}^2 \Delta t^4 \int_0^T \|y_{ttt}(t)\|^2 dt \end{aligned}$$

Burada \tilde{C} n den bağımsız sabit sayıdır. Şimdi de z_k^l için bir yaklaşımda bulunalım.

$$\begin{aligned}
\|z_k^l\|^2 &= \left\| P_n^l \left(\frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{\Delta t} \right) - \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{\Delta t} \right\|^2 \\
&= \left\| P_n^l \left(\frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{\Delta t} \right) - P_n^l \dot{y}(t_k) + P_n^l \dot{y}(t_k) - \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{\Delta t} \right\|^2 \\
&\leq 2\|P_n^l\|_{L(\mathbb{R}^{2m})}^2 \left\| \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{\Delta t} - \dot{y}(t_k) \right\|^2 \\
&\quad + 2 \left\| P_n^l \dot{y}(t_k) - \dot{y}(t_k) + \dot{y}(t_k) - \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{\Delta t} \right\|^2 \\
&\leq 2\|w_k^l\|^2 + 4\|P_n^l \dot{y}(t_k) - \dot{y}(t_k)\|^2 + 4 \left\| \dot{y}(t_k) - \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{\Delta t} \right\|^2 \\
&= 4\|P_n^l \dot{y}(t_k) - \dot{y}(t_k)\|^2 + 6\|w_k^l\|^2
\end{aligned}$$

$1 \leq k \leq n$ için $\Delta t \leq 2\alpha_k$ diyelim. Buradan yeterince küçük Δt için $\Delta t^2 \leq 2\alpha_k$ ve $\Delta t^4 \leq 2\alpha_k$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\Delta t^2 \sum_{k=1}^j \|z_k^l\|^2 &= 4\Delta t^2 \sum_{k=1}^j \|P_n^l \dot{y}(t_k) - \dot{y}(t_k)\|^2 + 6\Delta t^2 \sum_{k=1}^j \|w_k^l\|^2 \\
&\leq 8 \sum_{k=1}^n \alpha_k \|P_n^l \dot{y}(t_k) - \dot{y}(t_k)\|^2 + 6\tilde{C}^2 \Delta t^4 \|y_{ttt}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^{2m})}
\end{aligned}$$

ve

$$\Delta t^2 \sum_{k=1}^j \Delta t^2 \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k$$

bulunur. Elde edilen bu eşitsizlikler kullanılarak

$$\begin{aligned}\|\vartheta_j^l\|^2 &\leq C\Delta t^2 \sum_{k=1}^j \left(\|\varrho_k^l\|^2 + \|\varrho_{k-1}^l\|^2 + \Delta t^2 + \|z_k^l\|^2 + \|w_k^l\|^2 \right) \\ \|\vartheta_j^l\|^2 &\leq 2C \sum_{k=1}^n \alpha_k \|\varrho_k^l\|^2 + C \sum_{k=1}^n (\alpha_k + 8\alpha_k \|P_n^l \dot{y}(t_k) - \dot{y}(t_k)\|^2) \\ &\quad + 7C\tilde{C}^2 \Delta t^4 \|y_{ttt}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^{2m})}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\sum_{k=1}^n \alpha_k = T$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \alpha_j \|\vartheta_j^l\|^2 &\leq 2CT \sum_{k=1}^n \alpha_k \|\varrho_k^l\|^2 + CT^2 + 8CT \sum_{k=1}^n \alpha_k \|P_n^l \dot{y}(t_k) - \dot{y}(t_k)\|^2 \\ &\quad + 7CT\tilde{C}^2 \Delta t^4 \|y_{ttt}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^{2m})}\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\|P_n^l \dot{y}(t_j) - \dot{y}(t_j)\|^2 = \sum_{i=l+1}^{2m} |\langle \dot{y}(t_j), u_i^n \rangle|^2$$

olduğu da göz önünde bulundurulursa

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \|\vartheta_j^l\|^2 \leq C^* \left(\Delta t^4 + \sum_{i=l+1}^{2m} \left(\lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_j |\langle \dot{y}(t_j), u_i^n \rangle|^2 \right) \right)$$

elde edilir. Burada $C^* = 4CT \max\{T, 8, 7\tilde{C}^2 \|y_{ttt}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^{2m})}\}$ dir.

ϑ_j^l ve ϱ_j^l için elde edilen bu yaklaşımlar birleştirilirse hata analizi l ve n den bağımsız $C_E = \max\{2, 2C^*\}$ sabit sayı olmak üzere

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \alpha_j \|y(t_j) - Y_j\|^2 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \|\vartheta_j^l + \varrho_j^l\|^2 \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^n \alpha_j \|\vartheta_j^l\|^2 + 2 \sum_{j=1}^n \alpha_j \|\varrho_j^l\|^2 \\ &\leq 2C^* \left(\Delta t^4 + \sum_{i=l+1}^{2m} \left(\lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_j |\langle \dot{y}(t_j), u_i^n \rangle|^2 \right) \right) + 2 \sum_{i=l+1}^{2m} \lambda_i \\ &\leq C_E \left(\sum_{i=l+1}^{2m} \left(2\lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_j |\langle \dot{y}(t_j), u_i^n \rangle|^2 \right) + \Delta t^4 \right)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 5.2.1. $y \in C([0, T]; \mathbb{R}^{2m}) \cap C'((0, T); \mathbb{R}^{2m})$ fonksiyonu (5.31) için tek çözüm olsun ve $\ddot{y} \in L_2(0, T; \mathbb{R}^{2m})$ sağlasın. Ayrıca sabit bir $l \in \{1, \dots, 2m\}$ için $\{u_i^n\}_{i=1}^l$ NLS denklemleri için UDA bazı ve $\{Y_j\}_{j=1}^n$ (5.34) sistemi için tek çözüm olsun. Bu durumda

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \|y(t_j) - Y_j\|^2 \leq C_E \left(\sum_{i=l+1}^{2m} \left(2\lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_j |\langle \dot{y}(t_j), u_i^n \rangle|^2 \right) + \Delta t^4 \right)$$

olacak şekilde sabit bir $C_E > 0$ sabiti vardır.

5.3 İki Boyutlu NLS Denklemlerine UDA Yöntemlerinin Uygulanması

İki boyutlu NLS denklemlerini şu sistemle ifade etmiştik:

$$\begin{aligned} p_t + q_{xx} + q_{yy} + \beta(p^2 + q^2)q &= 0 \\ q_t - p_{xx} - p_{yy} - \beta(p^2 + q^2)p &= 0 \end{aligned}$$

Şimdi bu sistem x, y değişkenine göre diskrite edilirse

$$\begin{aligned} p_t + \hat{A}q + \beta(p^2 + q^2)q &= 0 \\ q_t - \hat{A}p - \beta(p^2 + q^2)p &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $p, q \in \mathbb{R}^{m^2}$, $\hat{A} \in \mathbb{R}^{m^2 \times m^2}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} p &= (p(x_1, y_1), \dots, p(x_m, y_1), \dots, p(x_1, y_m), \dots, p(x_m, y_m))^T, \\ q &= (q(x_1, y_1), \dots, q(x_m, y_1), \dots, q(x_1, y_m), \dots, q(x_m, y_m))^T \end{aligned}$$

$$\hat{A} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} C & & & & \\ & C & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & C & \\ & & & & C \end{pmatrix} + \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2I & I & & & I \\ & I & -2I & I & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & I & -2I & I \\ I & & & & I & -2I \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. p ve q x, y değişkenlerine bağlı olduğu için baz fonksiyonları da bu iki değişkene bağlıdır. $\{u_j\}_{j=1}^l, \{v_j\}_{j=1}^l$ UDA bazlarının hesaplandığı varsayımı altında UDA metodunu uygulayalım.

$$p^l = \sum_{j=1}^l \gamma_j u_j, \quad q^l = \sum_{j=1}^l \eta_j v_j$$

olacak şekilde p^l, q^l p ve q için bir yaklaşım olsun. p^l ve q^l yi diskrize edilmiş sistemde yazarsak

$$\sum_{j=1}^l \dot{\gamma}_j u_j = - \sum_{j=1}^l \eta_j \hat{A} v_j - \beta \left(\sum_{j=1}^l \eta_j v_j \right) \left\{ \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^l \eta_j v_j \right)^2 \right\}$$

$$\sum_{j=1}^l \dot{\eta}_j v_j = \sum_{j=1}^l \gamma_j \hat{A} u_j + \beta \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right) \left\{ \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^l \eta_j v_j \right)^2 \right\}$$

eşitlikleri elde edilir. NLS deki benzer işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= -B\eta - \beta U^T * (V\eta) \cdot (U\gamma)^2 - \beta U^T * (V\eta)^3 \\ \dot{\eta} &= B^T \gamma + \beta V^T * (U\gamma) \cdot (V\eta)^2 + \beta V^T * (U\gamma)^3 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Burada $B = ((b_{ij}))$, $b_{ij} = \langle \hat{A} v_j, u_i \rangle$ dir. U, V, γ, η da NLS denkleminde UDA uygulandığındaki benzer kısaltmalardır. İndirgenmiş bu sistemi çözmek için orta nokta yöntemi ve OVA yöntemi kullanılırsa NLS denkleminde takip edilen yollar izlenir.

5.4 İkili NLS Denklem Sistemine UDA Yöntemi- nin Uygulanması

İkili NLS denklem sisteminin yarı ayırık Hamiltonian sistem olarak ifadesi şu şekildeydi:

$$\begin{aligned}
q_{1t} &= -\alpha_1 A q_2 - \sigma_1 (q_1^2 + q_2^2) q_2 - v (q_3^2 + q_4^2) q_2, \\
q_{2t} &= \alpha_1 A q_1 + \sigma_1 (q_1^2 + q_2^2) q_1 + v (q_3^2 + q_4^2) q_1, \\
q_{3t} &= -\alpha_2 A q_4 - \sigma_2 (q_3^2 + q_4^2) q_4 - v (q_1^2 + q_2^2) q_4, \\
q_{4t} &= \alpha_2 A q_3 + \sigma_2 (q_3^2 + q_4^2) q_3 + v (q_1^2 + q_2^2) q_3
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Şimdi bu sisteme UDA yönteminin uygulanışını ve indirgenmiş modelin elde edilmesini gösterelim. $\{u_j\}_j^l, \{v_j\}_j^l, \{w_j\}_j^l, \{k_j\}_j^l$ UDA bazları olmak üzere q_1, q_2, q_3, q_4 fonksiyonları için şöyle bir yaklaşımda bulunalım:

$$q_1^l = \sum_{j=1}^l \gamma_j u_j, \quad q_2^l = \sum_{j=1}^l \beta_j v_j, \quad q_3^l = \sum_{j=1}^l \eta_j w_j, \quad q_4^l = \sum_{j=1}^l \zeta_j k_j$$

Elde edilen bu fonksiyonlar (5.38) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^l \dot{\gamma}_j u_j &= -\alpha_1 \sum_{j=1}^l \beta_j A v_j - \sigma_1 \left\{ \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right)^2 \right\} \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right) \\
&\quad - v \left\{ \left(\sum_{j=1}^l \eta_j w_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^l \zeta_j k_j \right)^2 \right\} \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right)
\end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^l \dot{\beta}_j v_j &= \alpha_1 \sum_{j=1}^l \gamma_j A u_j + \sigma_1 \left\{ \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right)^2 \right\} \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right) \\
&\quad + v \left\{ \left(\sum_{j=1}^l \eta_j w_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^l \zeta_j k_j \right)^2 \right\} \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right)
\end{aligned} \tag{5.40}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^l \dot{\eta}_j w_j &= -\alpha_2 \sum_{j=1}^l \zeta_j A k_j - \sigma_2 \left\{ \left(\sum_{j=1}^l \eta_j w_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^l \zeta_j k_j \right)^2 \right\} \left(\sum_{j=1}^l \zeta_j k_j \right) \\
&\quad - v \left\{ \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right)^2 \right\} \left(\sum_{j=1}^l \zeta_j k_j \right)
\end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^l \dot{\zeta}_j k_j &= \alpha_2 \sum_{j=1}^l \eta_j A w_j + \sigma_2 \left\{ \left(\sum_{j=1}^l \eta_j w_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^l \zeta_j k_j \right)^2 \right\} \left(\sum_{j=1}^l \eta_j w_j \right) \\
&+ v \left\{ \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right)^2 \right\} \left(\sum_{j=1}^l \eta_j w_j \right) \quad (5.42)
\end{aligned}$$

sistemi elde edilir. (5.39),(5.40),(5.41),(5.42) eşitliklerine sırasıyla u_i, v_i, w_i, k_i ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_i &= -\alpha_1 \sum_{j=1}^l \beta_j \langle A v_j, u_i \rangle - \sigma_1 \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right)^2 \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right), u_i \right\rangle - \sigma_1 \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right)^3, u_i \right\rangle \\
&- v \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \eta_j w_j \right)^2 \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right), u_i \right\rangle - v \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \zeta_j k_j \right)^2 \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right), u_i \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\beta}_i &= \alpha_1 \sum_{j=1}^l \gamma_j \langle A u_j, v_i \rangle + \sigma_1 \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right)^2 \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right), v_i \right\rangle + \sigma_1 \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right)^3, v_i \right\rangle \\
&+ v \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \eta_j w_j \right)^2 \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right), v_i \right\rangle + v \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \zeta_j k_j \right)^2 \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right), v_i \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_i &= -\alpha_2 \sum_{j=1}^l \zeta_j \langle A k_j, w_i \rangle - \sigma_2 \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \eta_j w_j \right)^2 \left(\sum_{j=1}^l \zeta_j k_j \right), w_i \right\rangle - \sigma_2 \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \zeta_j k_j \right)^3, w_i \right\rangle \\
&- v \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right)^2 \left(\sum_{j=1}^l \zeta_j k_j \right), w_i \right\rangle - v \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right)^2 \left(\sum_{j=1}^l \zeta_j k_j \right), w_i \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta}_i &= -\alpha_2 \sum_{j=1}^l \eta_j \langle A w_j, k_i \rangle - \sigma_2 \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \zeta_j k_j \right)^2 \left(\sum_{j=1}^l \eta_j w_j \right), k_i \right\rangle - \sigma_2 \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \eta_j w_j \right)^3, k_i \right\rangle \\
&- v \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right)^2 \left(\sum_{j=1}^l \eta_j w_j \right), k_i \right\rangle - v \left\langle \left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right)^2 \left(\sum_{j=1}^l \eta_j w_j \right), k_i \right\rangle
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
B &= ((b_{ij})), \quad b_{ij} = \langle Av_j, u_i \rangle, \quad C = ((c_{ij})), \quad c_{ij} = \langle Ak_j, w_i \rangle \\
V &= [v_1, v_2, \dots, v_l] \in \mathbb{R}^{m \times l}, \quad U = [u_1, u_2, \dots, u_l] \in \mathbb{R}^{m \times l}, \\
W &= [w_1, w_2, \dots, w_l] \in \mathbb{R}^{m \times l}, \quad K = [k_1, k_2, \dots, k_l] \in \mathbb{R}^{m \times l} \\
\left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right)^3 &= (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_l v_l)^3 = (V\beta)^3, \\
\langle (V\beta)^3, u_i \rangle &= u_i^t (V\beta)^3 \Rightarrow \langle (V\beta)^3, U \rangle = U^t * (V\beta)^3, \\
\left(\sum_{j=1}^l \beta_j v_j \right) \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j u_j \right)^2 &= (V\beta) \cdot (U\gamma)^2 \\
\langle (V\beta) \cdot (U\gamma)^2, U \rangle &= U^t * (V\beta) \cdot (U\gamma)^2
\end{aligned}$$

şeklinde eşitlikler kullanılırsa sistem

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma} &= -\alpha_1 B\beta - \sigma_1 U^T * (U\gamma)^2 \cdot (V\beta) \\
&\quad - \sigma_1 U^T * (V\beta)^3 - vU^T * (W\eta)^2 \cdot (V\beta) - vU^T * (K\zeta)^2 \cdot (V\beta) \\
\dot{\beta} &= \alpha_1 B^T \gamma + \sigma_1 V^T * (V\beta)^2 \cdot (U\gamma) \\
&\quad + \sigma_1 V^T * (U\gamma)^3 + vV^T * (W\eta)^2 \cdot (U\gamma) + vV^T * (K\zeta)^2 \cdot (U\gamma) \\
\dot{\eta} &= -\alpha_2 C\zeta - \sigma_2 W^T * (W\eta)^2 \cdot (K\zeta) - \sigma_2 W^T * (K\zeta)^3 \\
&\quad - vW^T * (U\gamma)^2 \cdot (K\zeta) - vW^T * (V\beta)^2 \cdot (K\zeta) \\
\dot{\zeta} &= \alpha_2 C^T \eta + \sigma_2 K^T * (K\zeta)^2 \cdot (W\eta) + \sigma_2 K^T * (W\eta)^3 \\
&\quad + vK^T * (U\gamma)^2 \cdot (W\eta) + vK^T * (V\beta)^2 \cdot (W\eta)
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Bu sistemi çözmek için orta nokta yöntemi kullanıldı.

5.4.1 İkili NLS Denklem Sistemi İçin UDA Yönteminin Hata Analizi

İkili NLS denklem sisteminin diskrize edilmiş hali

$$\begin{aligned}
q_{1t} &= -\alpha_1 Aq_2 - \sigma_1 (q_1^2 + q_2^2)q_2 - v(q_3^2 + q_4^2)q_2, \\
q_{2t} &= \alpha_1 Aq_1 + \sigma_1 (q_1^2 + q_2^2)q_1 + v(q_3^2 + q_4^2)q_1, \\
q_{3t} &= -\alpha_2 Aq_4 - \sigma_2 (q_3^2 + q_4^2)q_4 - v(q_1^2 + q_2^2)q_4, \\
q_{4t} &= \alpha_2 Aq_3 + \sigma_2 (q_3^2 + q_4^2)q_3 + v(q_1^2 + q_2^2)q_3
\end{aligned}$$

şeklindeydi. Buradan

$$y = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 A & 0 & 0 \\ \alpha_1 A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 A \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} -\sigma_1(q_1^2 + q_2^2)q_2 - v(q_3^2 + q_4^2)q_2 \\ \sigma_1(q_1^2 + q_2^2)q_1 + v(q_3^2 + q_4^2)q_1 \\ -\sigma_2(q_3^2 + q_4^2)q_4 - v(q_1^2 + q_2^2)q_4 \\ \sigma_2(q_3^2 + q_4^2)q_3 + v(q_1^2 + q_2^2)q_3 \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa sistem

$$y_t = \tilde{A}y + f(t, y)$$

formunda yazılır. NLS denkleminde izlenen aynı yol ikili NLS denklem sistemi içinde geçerlidir, ancak $f(t, y)$ fonksiyonunun Lipschitz sürekli olduğu gösterilmelidir.

Her $y, \hat{y} \in \mathbb{R}^{4m}$ için

$$\|f(t, y) - f(t, \hat{y})\| \leq L_f \|y - \hat{y}\|$$

olacak şekilde $L_f > 0$ sabitinin var olduğu gösterilmelidir. $y = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T$, $\hat{y} = (\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3, \hat{q}_4)^T$ alalım.

$$\begin{aligned} \|f(t, y) - f(t, \hat{y})\| &= \left\| \begin{pmatrix} -\sigma_1(q_1^2 + q_2^2)q_2 - v(q_3^2 + q_4^2)q_2 \\ \sigma_1(q_1^2 + q_2^2)q_1 + v(q_3^2 + q_4^2)q_1 \\ -\sigma_2(q_3^2 + q_4^2)q_4 - v(q_1^2 + q_2^2)q_4 \\ \sigma_2(q_3^2 + q_4^2)q_3 + v(q_1^2 + q_2^2)q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sigma_1(\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2)\hat{q}_2 - v(\hat{q}_3^2 + \hat{q}_4^2)\hat{q}_2 \\ \sigma_1(\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2)\hat{q}_1 + v(\hat{q}_3^2 + \hat{q}_4^2)\hat{q}_1 \\ -\sigma_2(\hat{q}_3^2 + \hat{q}_4^2)\hat{q}_4 - v(\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2)\hat{q}_4 \\ \sigma_2(\hat{q}_3^2 + \hat{q}_4^2)\hat{q}_3 + v(\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2)\hat{q}_3 \end{pmatrix} \right\| \\ &= |\sigma_1[q_1^2 q_2 - \hat{q}_1^2 \hat{q}_2 + q_2^3 - \hat{q}_2^3] + v[q_3^2 q_2 - \hat{q}_3^2 \hat{q}_2 + q_4^2 q_2 - \hat{q}_4^2 \hat{q}_2]| \\ &+ |\sigma_1[q_2^2 q_1 - \hat{q}_2^2 \hat{q}_1 + q_1^3 - \hat{q}_1^3] + v[q_3^2 q_1 - \hat{q}_3^2 \hat{q}_1 + q_4^2 q_1 - \hat{q}_4^2 \hat{q}_1]| \\ &+ |\sigma_2[q_3^2 q_4 - \hat{q}_3^2 \hat{q}_4 + q_4^3 - \hat{q}_4^3] + v[q_1^2 q_4 - \hat{q}_1^2 \hat{q}_4 + q_2^2 q_4 - \hat{q}_2^2 \hat{q}_4]| \\ &+ |\sigma_2[q_4^2 q_3 - \hat{q}_4^2 \hat{q}_3 + q_3^3 - \hat{q}_3^3] + v[q_1^2 q_3 - \hat{q}_1^2 \hat{q}_3 + q_2^2 q_3 - \hat{q}_2^2 \hat{q}_3]| \end{aligned}$$

Burada da NLS denkleminin Lipschitz sürekli olduğunu göstermek için takip edilen yol izlenir ve

$$\|f(t, y) - f(t, \hat{y})\| \leq L_f \|y - \hat{y}\|$$

olacak şekilde L_f sabitinin olduğu kolaylıkla gösterilir.

Teorem 5.4.1. $y \in C([0, T]; \mathbb{R}^{4m}) \cap C'(0, T; \mathbb{R}^{4m})$ fonksiyonu (5.38) için tek çözüm olsun ve $\dot{y} \in L_2(0, T; \mathbb{R}^{4m})$ sağlasın. Ayrıca sabit bir $l \in \{1, \dots, 4m\}$ için $\{u_i^n\}_{i=1}^l$ ikili NLS denklem sistemi için UDA bazı ve $\{Y_j\}_{j=1}^n$ diskrit sistem için tek çözüm olsun. Bu durumda

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \|y(t_j) - Y_j\|^2 \leq C_E \left(\sum_{i=l+1}^{4m} \left(2\lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_j |\langle \dot{y}(t_j), u_i^n \rangle|^2 \right) + \Delta t^4 \right)$$

olacak şekilde sabit bir $C_E > 0$ sabiti vardır.

BÖLÜM 6

SAYISAL SONUÇLAR

6.0.2 Bir Boyutlu NLS Denklemi

Başlangıç koşulu $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$ olarak verilen periyodik sınır koşullu lineer olmayan Schrödinger denklemi

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \lambda|\psi|^2\psi = 0$$

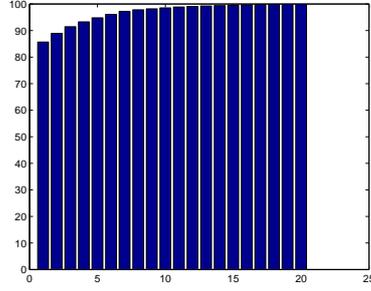
şeklindeydi. Bu bölümde denklemin sayısal çözümü için UDA yöntemi, OVA yöntemi ve orta nokta yöntemi kullanılmıştır. İki farklı örnek üzerinde bu yöntemler değerlendirilmiştir. Denklem $\psi = p + iq$ alınarak Hamiltonian sistemi halinde yazılmış ve yöntemler bu sisteme uygulanmıştır.

İlk örnekte $T = 500$ için reel kısım p , sanal kısım q ve kompleks çözüm ψ için elde edilen özdeğer grafiklerine, bağıl bilgi grafiklerine ve datalara bakıldığında neredeyse aynı sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Benzer durumla $T = 10$ alınması halinde de karşılaşıldığından UDA baz sayısı reel kısım p üzerinden hesaplandı. Ayrıca bağıl bilgi ve özdeğer grafikleri de p için verildi. Bununla birlikte denkleme OVA yöntemi ile orta nokta yöntemi uygulanması sonucunda benzer grafikler elde edildiğinden grafikler sadece orta nokta yöntemi için tablolar ise iki yöntem içinde verildi.

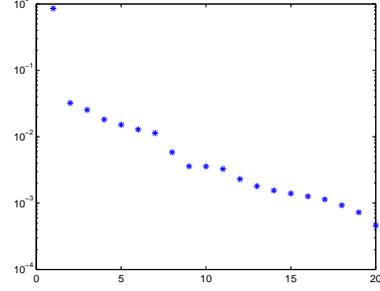
Örnek 6.0.2. *Başlangıç koşulları [10]*

$$p(x, 0) = \exp\left(\frac{-(x-1)^2}{2}\right)$$
$$q(x, 0) = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

olarak alındı. $x \in [-20, 20]$, $\Delta x = 2$, $\Delta t = 0.1$, $\lambda = 1$ değerleri alındı. $T = 10$ ve $T = 500$ için grafikler elde edildi, tablolar hazırlandı.

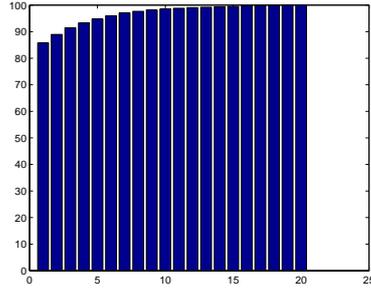


(a) $T = 500$

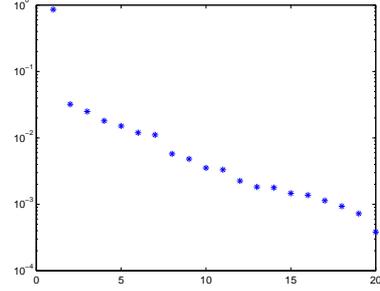


(b) $T = 500$

Şekil 6.1: Örnek 6.0.2, p için bağıl bilgi grafiği (soldaki) ve normalize edilmiş özdeğer grafiği (sağdaki)

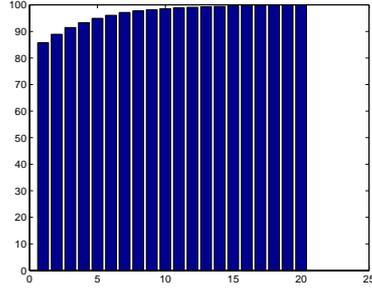


(a) $T = 500$

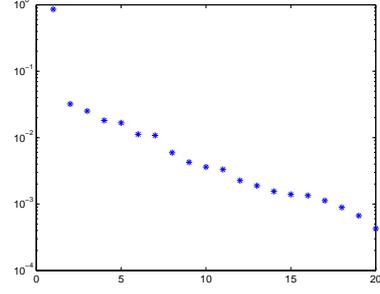


(b) $T = 500$

Şekil 6.2: Örnek 6.0.2, q için bağıl bilgi grafiği (soldaki) ve normalize edilmiş özdeğer grafiği (sağdaki)

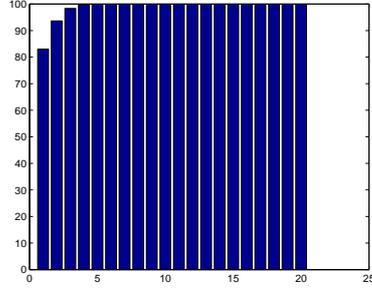


(a) $T = 500$

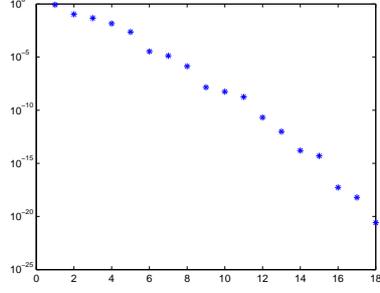


(b) $T = 500$

Şekil 6.3: Örnek 6.0.2, ψ için bağıl bilgi grafiği (soldaki) ve normalize edilmiş özdeğer grafiği (sağdaki)



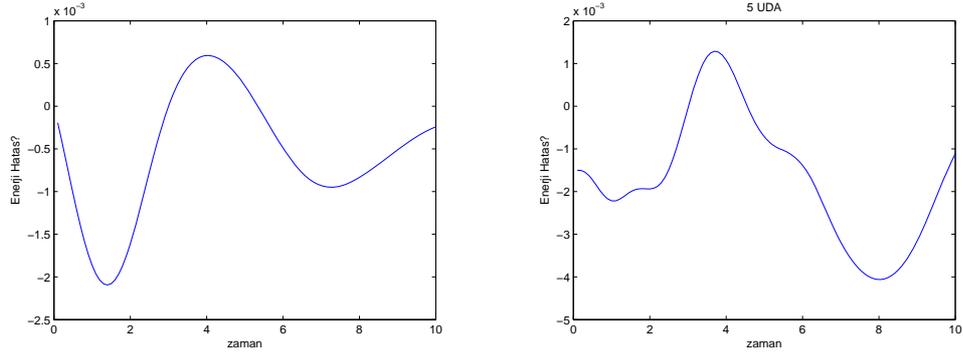
(a) $T = 10$



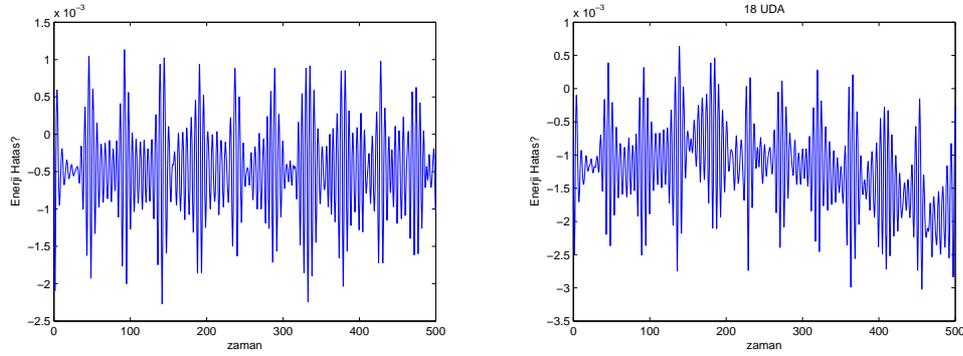
(b) $T = 10$

Şekil 6.4: Örnek 6.0.2, Bağıl bilgi grafiği (soldaki) ve normalize edilmiş özdeğer grafiği (sağdaki)

Şimdi bu örnek için $T = 10$ ve $T = 500$ için enerji hatası grafiklerini verelim.



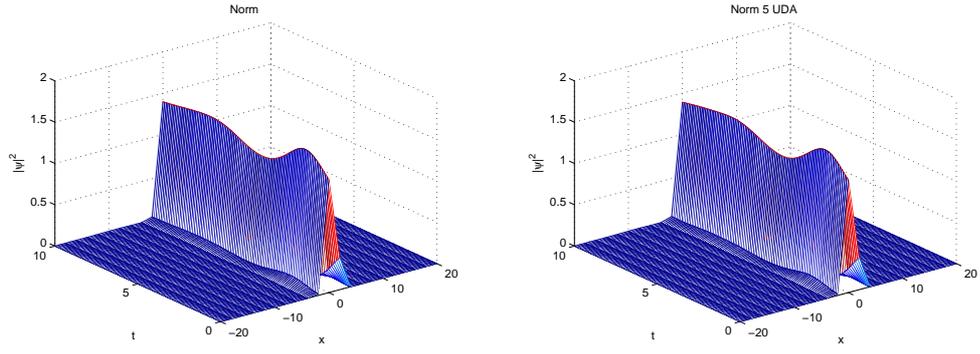
Şekil 6.5: Örnek 6.0.2, $T = 10$ için enerji hatası grafiği



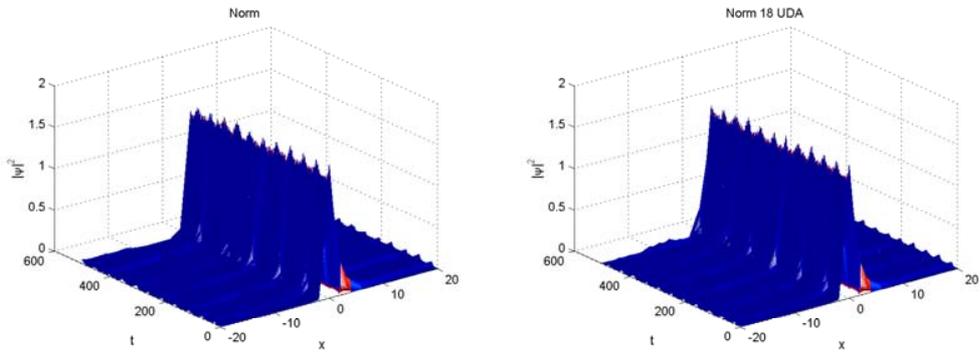
Şekil 6.6: Örnek 6.0.2, $T = 500$ için enerji hatası grafiği

#UDA	Bilgi (p için)	Bilgi (q için)	Bilgi (ψ için)	Enerji Hat. Aras. Fark	Çözümler Aras. Fark
5	94.787	94.762	94.923	4.095e-002	9.531e-002
10	98.514	98.480	98.512	3.424e-002	1.012e-001
15	99.547	99.545	99.554	1.245e-00	6.043e-002
16	99.674	99.682	99.689	7.551e-003	8.209e-002
17	99.788	99.796	99.802	7.047e-003	8.455e-002
18	99.881	99.889	99.891	3.069e-003	7.617e-002
19	99.954	99.962	99.957	2.991e-003	5.517e-002
20	100	100	100	3.843e-012	1.625e-011

Tablo 6.1: Örnek 6.0.2, $T=500$ için hata tablosu (UDA Yöntemi, Orta Nokta Yöntemi)



Şekil 6.7: Örnek 6.0.2, $T = 10$ için norm çözümü



Şekil 6.8: Örnek 6.0.2, $T = 500$ için norm çözümü

#UDA	Bilgi	Enerji Hataları Arasındaki Fark	Çözümler Arasındaki Fark
2	93.634	1.744e-002	1.172e-001
3	98.320	6.674e-002	6.989e-002
4	99.763	8.484e-003	1.127e-002
5	99.995	3.257e-003	3.282e-003
6	99.999	6.682e-004	5.600e-004
7	100	1.601e-004	1.177e-004

Tablo 6.2: Örnek 6.0.2, $T=10$ için hata tablosu (UDA Yöntemi, Orta Nokta Yöntemi)

Son olarak $T = 500$ ve $T = 10$ için OVA yöntemi ve UDA yöntemi arasındaki hata tablosunu verelim.

#UDA	Bilgi	Enerji Hataları Arasındaki Fark	Çözümler Arasındaki Fark
5	94.799	4.100e-002	1.838e-001
10	98.493	2.966e-002	1.788e-001
15	99.532	1.405e-002	1.819e-001
16	99.666	4.980e-003	1.618e-001
17	99.781	4.037e-003	1.631e-001
18	99.877	1.500e-003	1.504e-001
19	99.952	2.840e-003	1.087e-001
20	100	7.035e-012	5.198e-011

Tablo 6.3: Örnek 6.0.2, T=500 için hata tablosu (UDA Yöntemi, OVA Yöntemi)

#UDA	Bilgi	Enerji Hataları Arasındaki Fark	Çözümler Arasındaki Fark
2	93.610	1.781e-002	1.933e-001
3	98.311	6.619e-002	8.348e-002
4	99.761	8.097e-003	2.607e-002
5	99.995	3.450e-003	5.244e-003
6	99.999	6.764e-004	1.801e-003
7	100	1.715e-004	4.950e-004

Tablo 6.4: Örnek 6.0.2, T=10 için hata tablosu (UDA Yöntemi, OVA Yöntemi)

$T = 500$ ve $T = 10$ için hata tablolarına (Tablo 6.1, Tablo 6.2, Tablo 6.3, Tablo 6.4) bakıldığında öncelikle OVA yöntemi ile orta nokta yönteminin çok yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. Baz sayısının seçiminde de iki yöntem arasında pek fark olmadığı bilgi sütunlarından anlaşılmaktadır. Örneğin $T=500$ için OVA yöntemi kullanıldığında UDA yöntemi ile iyi bir yaklaşım yapmak için 18 tane bazın verdiği sonuç ile orta nokta yöntemi kullanıldığında verdiği sonuç neredeyse aynıdır. Bu nedenle iki T için de grafikler sadece orta nokta yöntemi için verildi. Her iki T değeri içinde tablolardan baz sayısının artması durumunda yaksamanın daha iyi olduğu görülmektedir.

$T = 500$ için UDA yöntemi ile iyi bir yaklaşım yapmak için bağıl bilgi grafi-

ğinden, normalize edilmiş özdeğer grafiğinden ve tablolardan 18 UDA bazı seçmek gerektiği anlaşılmaktadır. $|\psi|^2$ grafiğine bakıldığında orta nokta yöntemi ile UDA yönteminin benzer eğriler verdiği görülmektedir. Bunun yanısıra enerji hataları grafiğinden iki yöntemin de enerjiyi koruduğu, zamanla artmadığı farkedilmektedir.

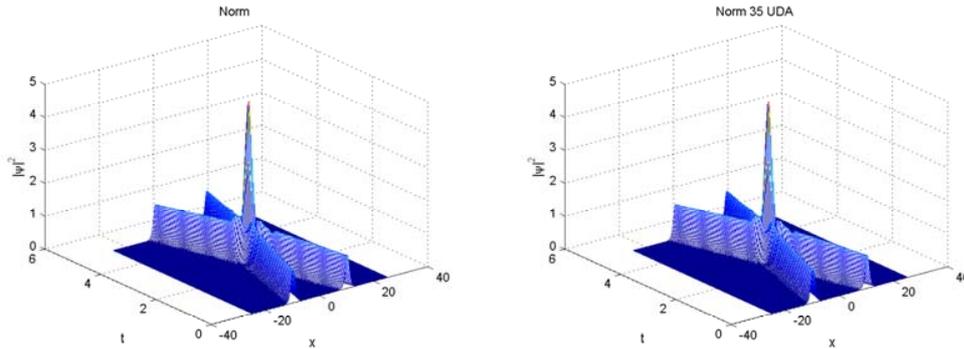
$T = 10$ için ise UDA yöntemi ile iyi bir yaklaşım yapmak için grafiklerden ve tablolardan 5 UDA bazı almanın yeterli olduğu görülmektedir. Benzer şekilde enerji grafiklerinden $T = 10$ için de her iki yöntemin enerjiyi koruduğu anlaşılmaktadır. Açıkça T değerinin artması durumunda UDA yöntemi ile yaklaşımda bulunmak için daha çok sayıda UDA bazı almak gerekmektedir.

Şimdi önceki örnekten farklı olarak elastik çarpışmanın elde edildiği başka bir lineer olmayan Schrödinger denklemi örneği verilecektir.

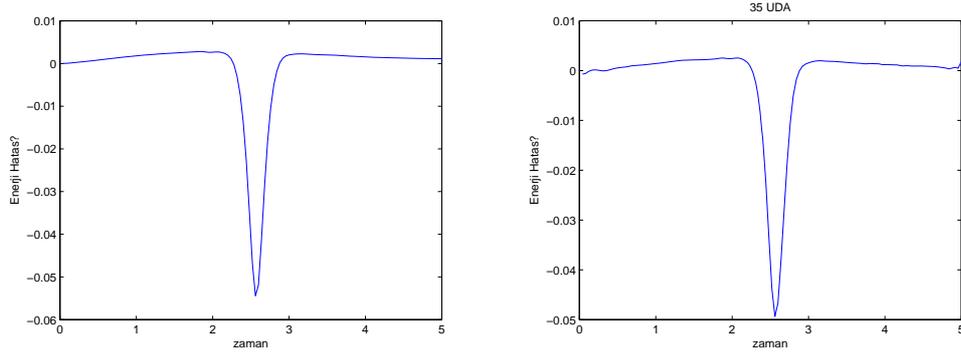
Örnek 6.0.3. Başlangıç koşulu [61] $c_1 = 4, x_1 = -10, c_2 = -4, x_2 = 10$ olmak üzere

$$\psi(x, 0) = \sum_{j=1}^2 \exp\left(\frac{1}{2}ic_j(x - x_j)\right) \text{sech}(x - x_j)$$

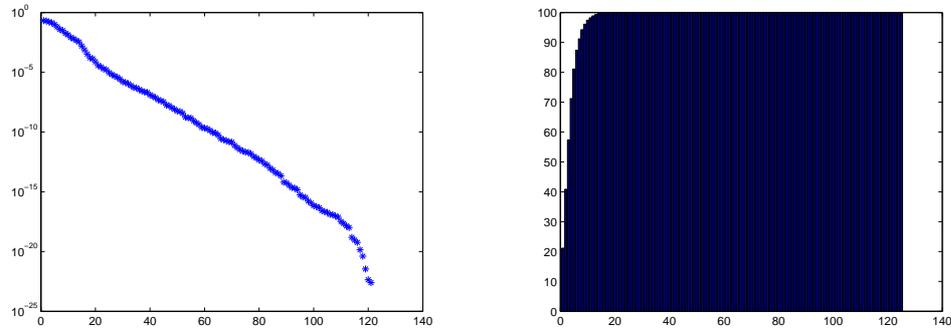
olarak alındı. $x \in [-25, 25], \Delta x = 0.2, \Delta t = 0.04, T = 5$ için sonuçlar elde edildi.



Şekil 6.9: Örnek 6.0.3, Norm çözümü



Şekil 6.10: Örnek 6.0.3, Enerji hatası grafiği



Şekil 6.11: Örnek 6.0.3, Normalize edilmiş özdeğer grafiği (soldaki) ve bağlı bilgi grafiği (sağdaki)

#UDA	Bilgi	Enerji Hataları Arasındaki Fark	Çözümler Arasındaki Fark
15	99.842	1.352e-001	8.962e-002
20	99.987	2.013e-002	2.667e-002
25	99.997	1.912e-002	1.346e-002
30	99.999	1.119e-002	6.304e-003
35	100	5.168e-002	4.071e-003

Tablo 6.5: Örnek 6.0.3, Hata Tablosu (UDA Yöntemi, Orta Nokta Yöntemi)

#UDA	Bilgi	Enerji Hataları Arasındaki Fark	Çözümler Arasındaki Fark
15	99.840	1.326e-001	9.008e-002
20	99.986	1.969e-002	2.708e-002
25	99.997	1.635e-002	1.400e-002
30	99.999	9.830e-003	6.431e-003
35	100	4.684e-003	3.852e-003

Tablo 6.6: Örnek 6.0.3, Hata Tablosu (UDA Yöntemi, OVA Yöntemi)

Şekil 6.9 grafiği iki solitonun çarpışmasını göstermektedir. Çarpışma sonrasında dalgaların şekillerinin ve yönlerinin değişmediği görülmektedir. Yani elastik çarpışma elde edilmiştir. Şekil 6.10 da ise iki yöntemin uygulanması sonucunda elde edilen enerji değişim grafikleri yer almaktadır. Enerji grafiklerinden çarpışma anındaki $t \in [2, 3]$ enerji değişimi çok açık bir şekilde görülmektedir. $T = 5$ değeri için her iki yöntemin de enerjiyi koruduğu anlaşılmaktadır. Bağlı bilgi grafiğinden, normalize edilmiş özdeğer grafiğinden ve tablodan UDA yöntemi ile iyi bir sonuç elde etmek için 35 tane UDA bazı almak gerektiği görülmektedir. Tablolar (Tablo 6.5, Tablo 6.6) incelendiğinde enerji hataları arasındaki farkın OVA yöntemi kullanılması durumunda daha küçük olduğu görülmektedir. Çözümler arasındaki fark ise UDA ile orta nokta yöntemi ve OVA yöntemi kullanılması durumunda neredeyse aynıdır. Tablolardan bazı sayısının artması durumunda yakınsamanın daha iyi olduğu görülmektedir.

6.0.3 İkili NLS Denklemler Sistemi

Periyodik sınır koşullu ve $\psi_1(x, 0) = \psi_{1_0}$, $\psi_2(x, 0) = \psi_{2_0}$ başlangıç koşullu lineer olmayan Schrödinger denklem çifti

$$\begin{aligned} i\psi_{1t} + \alpha_1\psi_{1xx} + (\sigma_1|\psi_1|^2 + v|\psi_2|^2)\psi_1 &= 0 \\ i\psi_{2t} + \alpha_2\psi_{2xx} + (\sigma_2|\psi_2|^2 + v|\psi_1|^2)\psi_2 &= 0 \end{aligned}$$

şeklindeydi. Sistemde $\psi_1 = q_1 + iq_2$ ve $\psi_2 = q_3 + iq_4$ alınarak elde edilen Hamiltonian sistem UDA ve orta nokta yöntemi yardımıyla çözüldü. Yöntemler

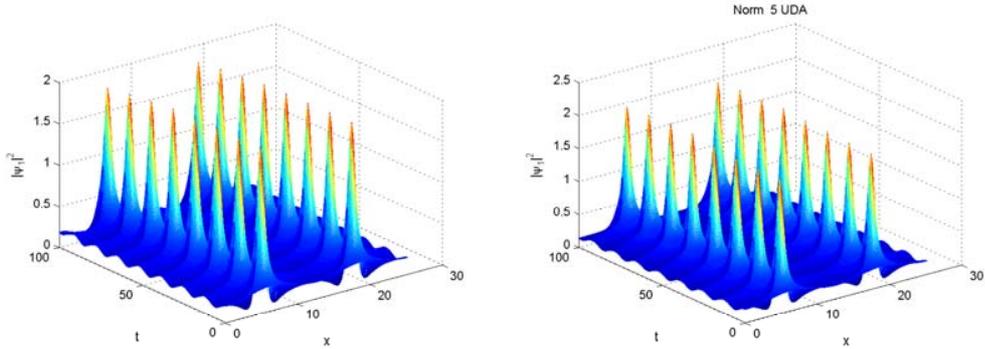
uygulandığında reel kısım q_1, q_3 , sanal kısım q_2, q_4 ve kompleks çözüm ψ_1, ψ_2 için elde edilen özdeğer grafikleri ve bağıl bilgi grafiklerinden benzer sonuçlar elde edildiği görüldüğünden özdeğer grafikleri ve bağıl bilgi grafikleri sadece q_1 için verilmiş UDA bazı q_1 için hesaplanmıştır.

Örnek 6.0.4. *Başlangıç koşulları [7]*

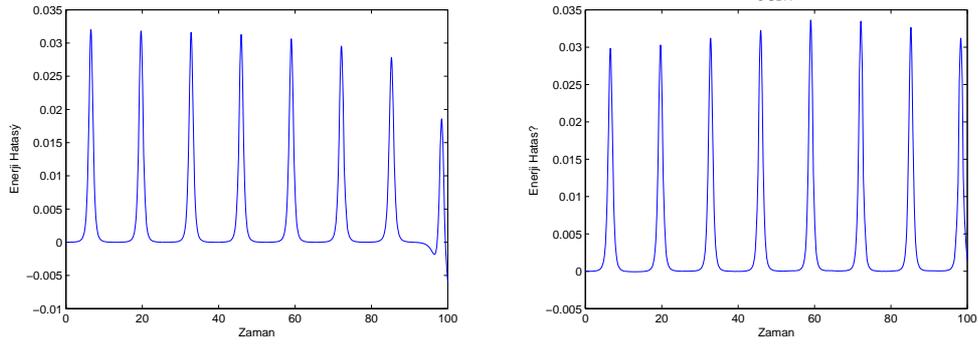
$$\begin{aligned}\psi_1(x, 0) &= \psi_{10}(1 - \xi \cos(lx)) \\ \psi_2(x, 0) &= \psi_{20}(1 - \xi \cos(l(x + \theta)))\end{aligned}$$

ve periyodik sınır koşulları $\psi_1(x, t) = \psi_1(x + L, t)$, $\psi_2(x, t) = \psi_2(x + L, t)$ olarak alındı. Burada $\xi \ll 1$ düzensizlik direncini (the strength of the perturbation), l düzensiz dalgaların sayısını (the wave number of the perturbation) ve θ iki düzensiz dalga arasındaki başlangıç faz farkını (the initial phase difference between two perturbations) vermektedir [7].

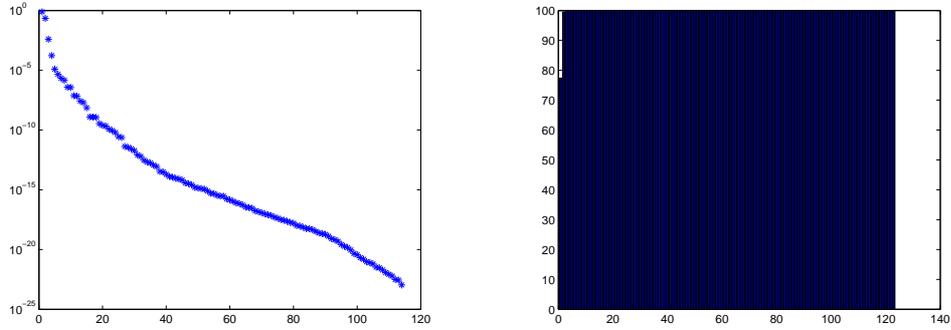
Sayısal sonuçlar $x \in [0, 8\pi]$, $v = 1$, $\Delta x = 8\pi/128$, $\Delta t = 0.05$, $\theta = 0$, $l = 1/2$, $\xi = 0.1$ ve $L = 8\pi$ için alındı.



Şekil 6.12: Örnek 6.0.4, Norm çözümü



Şekil 6.13: Örnek 6.0.4, Enerji hatası grafiği



Şekil 6.14: Örnek 6.0.4, Normalize edilmiş özdeğer grafiği (soldaki) ve bağlı bilgi grafiği (sağdaki)

#UDA	Bilgi	Enerji Hataları Arasındaki Fark	Çözümler Arasındaki Fark
2	99.579	3.287e-002	2.759e-001
3	99.980	3.464e-002	2.862e-001
4	99.997	2.289e-002	1.493e-001
5	99.999	8.648e-003	4.592e-002
6	99.999	8.033e-003	4.610e-002

Tablo 6.7: Örnek 6.0.4, Hata Tablosu

$v = 1$ Manakov'un üzerinde çalıştığı ikili NLS denklem sisteminin integral-lenebildiği durumdur [42]. İkili NLS denklem sisteminin ψ_1 ve ψ_2 olmak üzere iki çözümü vardır. İki yöntemin uygulanması sonucunda elde edilen ψ_1 değerleri arasındaki fark ile ψ_2 değerleri arasındaki fark aynı bulunduğundan Tablo 6.7 de

tek bir değer yer almaktadır. Normalize edilmiş özdeğer grafiğine, bağıl bilgi grafiğine ve tablodaki değerlere bakıldığında UDA yöntemi ile iyi bir yaklaşım elde etmek için 5 tane UDA bazı almanın yeterli olduğu görülmektedir. Baz sayısının az olması daha kısa sürede czmn elde edilmesini sağlamaktadır. Enerji grafiklerine bakıldığında enerjinin korunduğu ve iki grafiğin neredeyse aynı olduğu görülmektedir. Tablo 6.7 de baz sayısı artarken yakınsamanın kararlı bir şekilde arttığı anlaşılmaktadır. Elde edilen grafiklerden ve tablodan bu örnek için UDA yöntemi etkili ve hızlı bir yöntemdir.

6.0.4 İki Boyutlu NLS Denklemi

β sabit olmak üzere, periyodik sınır koşullu ve $\psi(0, x, y) = \psi_0$ başlangıç koşullu iki boyutlu lineer olmayan Schrödinger denklemi

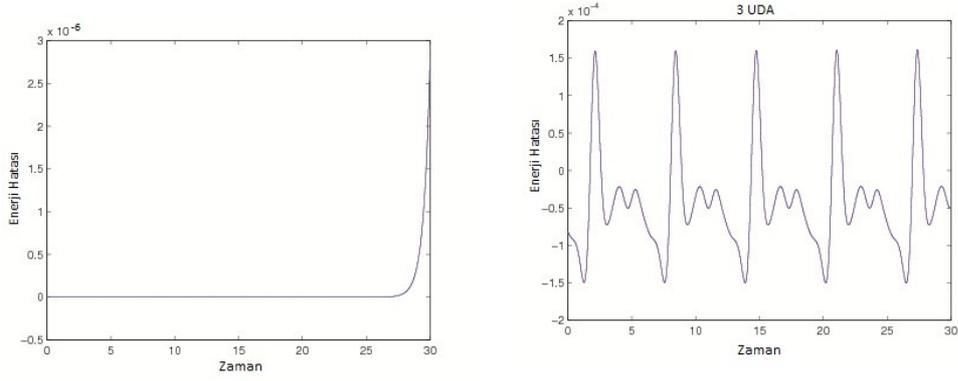
$$i\psi_t + \psi_{xx} + \psi_{yy} + \beta|\psi|^2\psi = 0$$

şeklindeydi. Bir boyutlu NLS ve ikili NLS denklem sisteminde de olduğu gibi $\psi = p + iq$ şeklinde yazılarak ve Hamiltonian denklem sistemi elde edildi. Bu sistemi czmek için UDA ve orta nokta yöntemi uygulandı. Diğer örneklerde olduğu gibi reel kısım p , sanal kısım q ve kompleks czm ψ için benzer sonuçlar elde edildiği için UDA bazı reel kısım p için verildi.

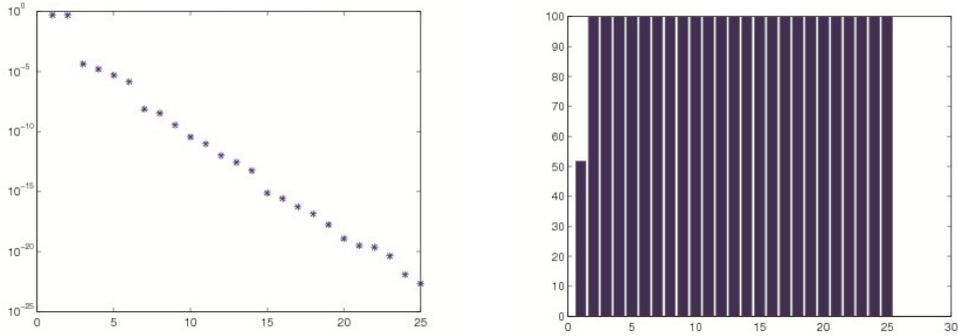
rnek 6.0.5. *İki boyutlu lineer olmayan Schrödinger denklemine örnek olarak gerçek czm [15]*

$$\psi(x, y, t) = \exp(i(x + y - t)),$$

olan denklem ele alındı. $\Delta x = \Delta y = 2\pi/80, \beta = 1, \Delta t = 0.001, T = 30$ için sayısal sonuçlar elde edildi.



Şekil 6.15: Örnek 6.0.5, Enerji hatası grafiği



Şekil 6.16: Örnek 6.0.5, Normalize edilmiş özdeğer grafiği (soldaki) ve bağıl bilgi grafiği (sağdaki)

#UDA	Bilgi	Enerji Hataları Arasındaki Fark	Çözümler Arasındaki Fark
1	51.67	1.274e+001	3.087e-001
2	99.994	2.207e-004	4.962e-003
3	99.999	1.613e-004	4.720e-003
4	100	6.788e-004	4.993e-003

Tablo 6.8: Örnek 6.0.5, Hata Tablosu

Bağıl bilgi grafiği, özdeğerler grafiği ve Tablo 6.8 den UDA ile iyi bir yaklaşım elde edebilmek için 3 UDA bazı almak gerektiği anlaşılmaktadır. Orta nokta yöntemi ile elde edilen enerji grafiğine bakıldığında $T \in [25, 30]$ aralığına kadar enerjinin ilk elde edilen değere eşit olduğu daha sonra arttığı ancak artışın çok küçük olduğu görülmektedir. Buna karşın UDA yöntemi ile elde edilen grafikte ise

enerji hatasının belli aralıkta kaldığı artmadığı görülmektedir ve açık olarak enerji korunmaktadır. Diğer örneklerden farklı olarak tabloda $l = 3$ UDA baz sayısına kadar yakınsamanın arttığı daha sonra azaldığı görülmektedir.

BÖLÜM 7

SONUÇ

Tez çalışmasında UDA, OVA ve orta nokta yöntemlerinin bir ve iki boyutlu lineer olmayan Schrödinger diferansiyel denklemlerine ve denklem çiftine uygulanışı verilmiştir. Özel olarak periyodik başlangıç koşullu Schrödinger denklemleri üzerinde çalışılmıştır. Bu denklemler Hamiltonian denklem sistemi formunda ifade edildiklerinden bu form üzerinden yöntemler uygulanmıştır. Tablolardaki hatalar

$$Hata = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|U_i - U_i^l\|_{\infty}$$

ile hesaplanmıştır. Schrödinger denklemleri enerjiyi ve normu korumaktadırlar. UDA, OVA ve orta nokta yöntemlerinde denklemlerin enerjisini ve normunu korudukları gösterilmiştir. UDA yönteminde bazlar tekil değer ayrışımı yöntemi ile bulunmuştur. Ayrıca ilk defa lineer olmayan Schrödinger denklemine UDA yöntemi uygulanmış ve hata analizi yapılmıştır. UDA yönteminin ne kadar etkili ve hızlı bir yöntem olduğu örnekler üzerinde gösterilmiştir. Bunun yanısıra ilk defa ikili NLS denklem sistemine OVA yöntemi uygulanışının dağılım analizi yapılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] M. J. Ablowitz and J. F. Ladik, Nonlinear differential-difference equations, *Journal of Mathematical Physics*, 16, 598-603, 1975.
- [2] M. J. Ablowitz and B. M. Herbst, On Homoclinic Structure and numerically induced chaos for NLS, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 50, 339-351, 1990.
- [3] M. J. Ablowitz, B. Prinari and A. D. Trubatch, Integrable Nonlinear Schrödinger Systems and their Soliton Dynamics, *Dynamics of PDE*, 1, 239-299, 2004.
- [4] A. Aubry and P. Chartier, Pseudo Symplectic Runge-Kutta Methods, *BIT*, 38, 439-461, 1998.
- [5] N. Aubry, P. Holmes, J. L. Lumley and E. Stone, The dynamics of Coherent Structures in the Wall Region of a Turbulent Boundary Layer, *J. Fluid Mech.*, 192, 115-173, 1988.
- [6] U. M. Ascher, *Numerical methods for evolutionary differential equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008.
- [7] A. Aydın and B. Karasözen, Symplectic and Multi-symplectic methods for coupled nonlinear Schrödinger equations with periodic solutions, *Computer Physics Communications*, 177, 566-583, 2007.
- [8] E. Celledoni, R. I. McLachlan, D. I. McLaren, B. Owren, G. R. W. Quispel and W. M. Wright, Energy-preserving Runge-Kutta methods, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 43, 645-649, 2009.
- [9] E. Celledoni, R. I. McLachlan, B. Owren and G. R. W. Quispel, Structure of B-series for Some Classes of Geometric Integrators, *Found. Comput. Math.*, 10, 673-693, 2010.

- [10] E. Celledoni, V. Grimm, R. I. McLachlan, D. I. McLaren, D. R. J. O’Neale, B. Owren and G. R. W. Quispel. Preserving energy resp. dissipation in numerical PDEs, using the Average Vector Field method, *Journal of Computational Physics*, 20, 6770-6789, 2012.
- [11] Q. S. Chang, E. Jia and W. Sun, Difference schemes for solving the generalized nonlinear Schrödinger equation, *J. Comput. Phys.*, 148, 397-415, 1999.
- [12] P. Chartier, E. Faou and A. Murua, An algebraic approach to invariant preserving integrators: the case of quadratic and Hamiltonian invariants, *Numer. Math.*, 103, 575-590, 2006.
- [13] A. Chatterjee, An Introduction to the Proper Orthogonal Decomposition, *Mendeley*, 78, 808-817, 2000.
- [14] J. B. Chen, M. Z. Qin and Y. F. Tang, Symplectic and Multi-Symplectic Methods for the Nonlinear Schrödinger Equation, *Computers and Mathematics with Applications*, 43, 1095-1106, 2002.
- [15] Y.-M. Chen, H.-J. Zhu and S.-H. Song, Multi-Symplectic Splitting Method for Two-Dimensional Nonlinear Schrödinger Equation, *Commun. Theor. Phys.*, 56, 617-622, 2011.
- [16] D. Cohen and E. Hairer, Linear energy-preserving integrators for poisson systems, *BIT Numerical Mathematics*, 51, 91-101, 2011.
- [17] R. Courant, K. Friedrichs and H. Lewy, On the partial difference equations of mathematical physics, *IBM J.*, 11, 215-234, 1967.
- [18] I. Dag, A quadratic B-spline finite element method for solving nonlinear Schrödinger equation, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 174, 247-258, 1999.
- [19] M. Dahlby and B. Owren, A general framework for deriving integral preserving numerical methods for PDEs, *SIAM J. Sci. Comput.*, 33, 2318-2340, 2010.

- [20] F. Dias and T. Bridges, Weakly nonlinear wave packets and the nonlinear Schrödinger equation.
- [21] E. Faou, E. Hairer and T. L. Pham, Energy conservation with non-symplectic methods: examples and counter-examples, *BIT*, 44, 699-709, 2004.
- [22] K. Feng, On difference schemes and symplectic geometry, Proceedings of the 5-th Intern. Symposium on differential geometry differential equations, Aug. 1984, Beijing 4258, 1985.
- [23] K. Fukunaga, *Introduction to Statistical Pattern Recognition*, Computer Science and Scientific Computing. Academic Press Inc., Boston, MA, second edition, 1990.
- [24] D. Furihata and T. Matsuo, Discrete Variational Derivative Method: A Structure- Preserving Numerical Method for Partial Differential Equations, Chapman and Hall, 2010.
- [25] D. F. Griffiths and D. J. Hihham, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Springer, 2010.
- [26] E. Hairer, C. Lubich and G. Wanner, *Geometric Numerical Integration Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, 31. Springer, New York, 2002.
- [27] E. Hairer, Energy-preserving variant of collocation methods, *J. Numer. Anal. Ind. Appl. Math.*, 5, 73-84, 2010.
- [28] H. Hoetelling, Simplified Calculation of Principal Component Analysis, *Psychometrika*, 1, 27-35, 1935.
- [29] P. Holmes, J. L. Lumley and G. Berkooz. Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry, *Cambridge Monographs on Mechanics. Cambridge University Press, Cambridge*, 1996.
- [30] F. Iavernaro and B. Pace, s-stage trapezoidal methods for the conservation of Hamiltonian functions of polynomial type, *AIP Conf. Proc.*, 936, 603-606, 2007.

- [31] F. Iavernaro and D. Trigiante, High-order symmetric schemes for the energy conservation of polynomial Hamiltonian problems, *J. Numer. Anal. Ind. Appl. Math.*, 4, 87-101, 2009.
- [32] M.S. Ismail and T.R. Taha, Numerical simulation of coupled nonlinear Schrödinger equation, *Math. Comput. Simulation*, 56, 547-562, 2001.
- [33] B. Karasözen, Poisson integrators, *Math. Comput. Modelling*, 40, 1225-1244, 2004.
- [34] B. Karasözen and Ö. Erdem, Energy preserving methods for Volterra lattice equation, *J. App. Eng. Math.*, 1, 169-179, 2011.
- [35] B. Karasözen and G. Şimşek, Enerji preserving integration of Bi-Hamiltonian partial differential equations, *J. App. Eng. Math.*, 1, 75-86, 2011.
- [36] K. Karhunen, Zur Spektraltheorie Stochastischer Prozesse, *Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. I. Math.-Phys.*, 34, 1946.
- [37] K. Khanamiryan, O. Nevanlinna and T. Vesanen, Long-term behavior of the numerical solution of the cubic non-linear Schrödinger equation using Strang splitting method. Preprint submitted to Elsevier, 2012.
- [38] L. Kong, J. Hong, F. Fu and J. Chen, Symplectic structure-preserving integrators for the two dimensional Gross-Pitaevskii equation for BEC, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235, 4937-4948, 2001.
- [39] K. Kunisch and S. Volkwein, Galerkin proper orthogonal decomposition methods for parabolic problems, *Numer. Math*, 90, 117-148, 2001.
- [40] B. Leimkuhler and S. Reich, *Simulating Hamiltonian Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.
- [41] M. Loeve, Fonctions Aleatoire de Second Order, *Revue*, 48, 195-206, 1946.
- [42] S. V. Manakov, On the theory of the two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves, *Sov. Phys. JETP*, 38, 248, 1974.

- [43] R. I. McLachlan, G. R. W. Quispel and N. Robidoux, Geometric integration using discrete gradients, *R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 357, 1021-1045, 1999.
- [44] R. I. McLachlan and G.R.W. Quispel, Splitting methods, *Acta Numerica*, 341-434, 2002.
- [45] D. I. McLaren and G. R. W. Quispel, Integral-preserving integrators, *J. Phys. A: Math. Gen.* 37, 489-495, 2004.
- [46] C. P. Olivier, *A numerical study of the spectrum of the nonlinear Schrödinger equation*, MS. Thesis, Stellenbosch University, 2008.
- [47] E. A. Overman, D. W. Mclaughlin and A. R. Bishop, Coherence and Chaos in the Driven Damped Sine-Gordon equation: measurement of the soliton spectrum. *Physica D.*, 19, 1-41, 1986.
- [48] R. Pinnau, Model Reduction via Proper Orthogonal Decomposition.
- [49] A. Rosenfeld and A.C. Kak, *Digital Picture Processing Vol.2*, Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press Inc., New York, second edition, 1982.
- [50] J. S. Russel, Report of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, *Report on Waves*, John Murray, London, 1844.
- [51] R.D. Ruth, A canonical integration technique, *IEEE Trans. Nuclear Science* NS-30, 2669-2671, 1983.
- [52] G. R. W. Quispel and D. I. McLaren, A new class of energy-preserving numerical integration methods, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41, 045206, 2008.
- [53] J. M. Sanz-Serna and M. P. Calvo, *Numerical Hamiltonian Problems*, Chapman & Hall, 1994.
- [54] E. Schlizerman, E. Ding, O. M. Williams and J. N. Kutz, The Proper Orthogonal Decomposition for Dimensionality Reduction in Mode-Locked Lasers and Optical Systems, *International Journal of Optics*, 831604, 2012.

- [55] P. L. Sulem, C. Sulem and A. Patera, Numerical simulation of singular solutions to the two-dimensional cubic Schrödinger equation, *Commun. Pure Appl. Math.*, 37, 755-778, 1984.
- [56] T. R. Taha and M. J. Ablowitz, Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations II. Numerical, nonlinear Schrödinger equation, *J. Comput. Phys.*, 55, 203-230, 1984.
- [57] S. Volkwein, Model Reduction Using Proper Orthogonal Decomposition
- [58] J. Yang, Newton-conjugate-gradient methods for solitary wave computations, *Journal of Computational Physics*, 228, 7007-7024, 2009.
- [59] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, Exact Theory of Two Dimensional Self-Focusing and One Dimensional Self-Modulation of Waves in Nonlinear Media, *Soviet Physics Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 34, 62-69, 1972.
- [60] V. E. Zakharov and V. S. Synakh, The nature of self-focusing singularity, *Sov. Phys. JETP*, 41, 465-468, 1975.
- [61] Y. Xu and C.-W. Shu, Local discontinuous Galerkin methods for nonlinear Schrödinger equations, *Journal of Computational Physics*, 205, 72-97, 2005.
- [62] J. A. C. Weideman and B. M. Herbst, Split-step methods for the solution of the Nonlinear Schrödinger Equation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 23, 485-507, 1986.
- [63] T. H. Włodarczyk, *Stability and Preservation Properties of Multisymplectic Integrators*, PhD thesis, University of Central Florida, Orlando, 2007.
- [64] P. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. 2. Springer, 1995.
- [65] R. de Vogelaere, Methods of integration which preserve the contact transformation property of the Hamiltonian equations, Report No. 4, Dept. Math., Univ. of Notre Dame, Notre Dame, Ind. 1956.

ÖZGEÇMİŞ

Canan AKKOYUNLU, 10 Mart 1983 yılında İstanbul'da doğmuştur. 2000 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik bölümüne, 2004 yılında Anadolu Üniversitesi İşletme bölümüne kaydolmuştur. 2005 yılında Matematik bölümünden, 2009 yılında İşletme bölümünden mezun olmuştur. 2006 yılında İstanbul Kültür Üniversitesi Matematik-Bilgisayar Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başlamıştır, aynı zamanda yüksek lisans öğrenimine de başlamıştır ve 2008 de mezun olup aynı üniversitede Doktora öğrenimine başlamıştır. İki tane yayınlanmış makalesi bulunmaktadır. Evli ve bir çocuk annesidir.