İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH ÖRGÜLERİ İÇİN OPERATÖRLERİN KOMPAKT OLMAMA ÖLÇÜLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Begüm ÇALIŞKAN

1109041003

Anabilim Dalı: Matematik-Bilgisayar

Programı: Matematik-Bilgisayar

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. R. Tunç MISIRLIOĞLU

HAZİRAN 2013

İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH ÖRGÜLERİ İÇİN OPERATÖRLERİN KOMPAKT OLMAMA ÖLÇÜLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Begüm ÇALIŞKAN

1109041003

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih	:	**12 Haziran 2013**
Tezin Savunulduğu Tarih	:	**24 Haziran 2013**

Tez Danışmanı:	**Yrd. Doç. Dr. R. Tunç MISIRLIOĞLU**
Diğer Jüri Üyeleri:	**Prof. Dr. Eberhard MALKOWSKY (Fatih Üniversitesi)**
	Doç. Dr. Mert ÇAĞLAR
Yedek Üye:	**Yrd. Doç. Dr. Yaşar POLATOĞLU**

HAZİRAN 2013

Özet

BANACH ÖRGÜLERİ İÇİN OPERATÖRLERİN KOMPAKT OLMAMA ÖLÇÜLERİ

ÇALIŞKAN, Begüm
Yüksek Lisans Tezi, Matematik-Bilgisayar Bölümü
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. R. Tunç MISIRLIOĞLU

Haziran 2013, 56 sayfa

Bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde bir giriş yapılmış, ikinci bölümde, Banach uzayları, Banach örgüleri ve pozitif operatörler ile ilgili temel tanım ve teoremler ve ayrıca sınırlı lineer operatörlerin spektrum ve esaslı spektrum kavramları verilmiştir. Son bölüm, yani üçüncü bölüm, özellikleriyle birlikte birtakım kompakt-olmama ölçülerini içermektedir. Bu bölüme ait ilk kısımda, iyi bilinen Kuratowski ve Hausdorff kompakt-olmama ölçüleri detaylı bir şekilde çalışılmıştır. Sonraki kısımda, Banach örgülerinde yarı kompakt-olmama ölçüleri, operatörlerin esaslı spektrumlara uygulamaları ile birlikte çalışılmıştır. Sonraki iki kısımda ise, sırasıyla, ayrıklığı koruyan operatörlerin kompakt-olmama ölçüleri incelenmiş ve d-yakınsaklık ile kompakt-olmama ölçüsü arasındaki ilişki tartışılmıştır. Son kısımda ise, zayıf topoloji ile verilen zayıf kompakt-olmama ölçüsü çalışılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Banach örgüleri, pozitif operatörler, kompakt-olmama ölçüleri, yarı kompakt-olmama ölçüsü, zayıf kompakt-olmama ölçüsü.

Abstract

MEASURES OF NON-COMPACTNESS OF
OPERATORS FOR BANACH LATTICES

ÇALIŞKAN, Begüm
M.Sc.Thesis, Department of Mathematics and Computer Science
Supervisor: Assist. Prof. Dr. R. Tunç MISIRLIOĞLU

June 2013, 56 pages

The thesis consists of three chapters. By giving an introduction in the first chapter, in Chapter 2, we give Banach space fundamentals, Banach lattices and positive operators, and also some basic concepts of spectrum and essential spectrum of a bounded and linear operator. The last chapter, Chapter 3, includes several types of measures of non-compactness with their properties. In Section 3.1, we study in detail on the well-known Kuratowski and Hausdorff measures of non-compactness with their properties. In Section 3.2, we study on measures of non-semicompactness in Banach lattices wih their applications to the essential spectrum of operators. In the following two sections, we investigate the measures of non-compactness of disjointness preserving operators and discuss the relationship between d-convergence and the measure of non-compactness, respectively. In the last section, Section 3.5, the measure of non-compactness in the weak topology, called the measure of weak non-compactness, is studied.

KEYWORDS: Banach lattices, positive operators, measures of non-compactness, measure of non-semicompactness, measure of weak non-compactness.

Ailem'e

Teşekkür

Yüksek lisans eğitimim süresince tüm bilgisini ve deneyimini benimle paylaşan, sabırla destek olan ve yönlendiren tez danışmanım Sayın R. Tunç Mısırlıoğlu'na; lisansüstü ders aşamasında ve sonrasında yaptığı yardımlardan ötürü Sayın Mert Çağlar'a; tez yazım aşamasındaki teknik ve manevi desteklerinden ötürü Sayın Emel Yavuz Duman, Sayın Uğur Gönüllü, Sayın M. Selçuk Türer ve Sayın Dilan Toplu'ya; sonsuz destek ve güvenlerinden ötürü aileme; son olarak da bu süreçteki maddi desteğinden ötürü TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunuyorum.

İçindekiler

Bölüm 1

Giriş

Kompakt-olmama ölçüsü fonksiyonel analizde kullanışlı bir araçtır. Kompakt-olmama ölçüsü kavramı ilk olarak 1930'da Kuratowski tarafından [9]'da tanımlanmıştır. A sınırlı bir küme olmak üzere $\alpha(A)$ ile gösterilen bu ölçü, A kümesini örttüğümüz kümelerin çaplarının infimumudur. $\alpha(A) = 0$ olması A kümesinin ön kompakt olması ile sağlanır. Diğer bir kompakt-olmama ölçüsü olan $\chi(A)$ Hausdorff kompakt-olmama ölçüsü ise Goldenstein, Gohberg ve Markus [7] tarafından tanımlanmıştır. Bu ölçü ise, yarıçapı r sayısından küçük veya eşit olan yuvarların sonlu birleşimiyle örtebildiğimiz A kümesi için bu yarıçapların infimumu olarak tanımlanır. Bu kompakt-olmama ölçüleri ortak bir amaçla kullanılır. Bu ölçülere göre kompakt bir kümenin ölçüsü sıfır olur, ve kümelerin kompaktlıktan "ne kadar uzak" olduğu ile ilgili olarak ölçü büyür. Bu fikrin altında yatan şudur: sınırlı bir küme tek bir yuvar tarafından örtülebilir. Bazen daha küçük yarıçaplı yuvarlar da bir kümeyi örtebilir. Kompakt bir küme keyfî küçük yarıçaplı sonlu yuvarla örtülebilir, çünkü tam sınırlıdır. Bu yüzden şu soru sorulabilir: Kümeyi örttüğümüz bu sonlu sayıda yuvarın en küçük yarıçapı nedir?

Bölüm 2'de Banach uzayı, Banach örgüsü ve pozitif operatörlerle ilgili kavramlar verilmektedir. Ayrıca sınırlı bir operatörün spektrumu, esaslı spektrumu ve esaslı spektral yarıçapı kavramlarından da bahsedilmektedir.

Bölüm 3 birtakım kompakt-olmama ölçüleri ve bunların özelliklerini içermektedir. Bölüm 3.1'de, Hausdorff kompakt-olmama ölçüsü χ, Kuratowski kompakt-olmama ölçüsü α, ve genel olarak (homojen) kompakt-olmama ölçüsü β ölçüleri tanımlanmaktadır. Bir sonraki kısım, Bölüm 3.2'de, Banach örgüleri üzerindeki pozitif operatörlerin kompakt-olmama ölçüsünden ve bu operatörlerin esaslı spektrumuna uygulamalarından bahsedilmektedir. Burada B. de Pagter ve A. R. Schep'in [15]'deki sonuçlarından yararlanılmaktadır. Bu çalışmada üç temel soru önemli rol oynamaktadır. Hangi operatörler ve hangi E Banach örgüleri için: (a) χ ölçüsü monotondur, yani, $\mathcal{L}(E)$ üzerinde tanımlı $0 \leq S \leq T$ operatörleri için $\chi(S) \leq \chi(T)$ sağlanır; (b) $r_{\text{ess}}(T)$ monotondur, yani, $\mathcal{L}(E)$ üzerinde tanımlı $0 \leq S \leq T$ operatörleri için $r_{\text{ess}}(S) \leq r_{\text{ess}}(T)$ sağlanır; (c) ne zaman $r_{\text{ess}}(T) \in \sigma_{\text{ess}}(T)$ olur? Ayrıca bu makalenin ilk kısmında Banach uzayları için tanımlanan kompakt-olmama ölçü kavramı Banach örgülerine taşınmaktadır. Burada Banach örgüleri üzerinde tanımlı sıra sınırlı T operatörleri için $\rho(T)$ ile gösterilen yarı kompakt-olmama ölçüsü tanımlanmaktadır. Bu ölçü bu tip operatörlerin Hausdorff kompakt-olmama ölçüsü $\chi(T)$ ve esaslı spektral yarıçapı $r_{\text{ess}}(T)$ için kullanışlıdır. Bu kısımda, $\rho(T)$ ve $\chi(T)$ ölçüleri arasındaki ilişki verilmektedir ve AM-kompakt T operatörlei için $\chi(T) = \rho(T)$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmektedir. Ayrıca (b) ve (c) sorularına AM-kompakt operatörler için olumlu cevaplar verilmektedir. Bölüm 3.3'de ayrıklığı koruyan operatörlerin kompakt-olmama ölçüsü ile ilgili bazı sonuçlardan bahsedilmektedir. Bölüm 3.4'de d-yakınsaklık karakterize edilmekte ve d-yakınsaklık ile kompakt-olmama ölçüsü arasındaki ilişki verilmektedir. Son kısımda, Bölüm 3.5'de, ω ile gösterilen zayıf kompakt-olmama ölçüsü kavramına yer verilmiştir. Bu ölçü F.S. de Blasi tarafından [5]'de tanımlanmıştır ve fonksiyonel analizin birçok branşında kullanılmıştır. Bu ölçü, X Banach uzayı olmak üzere, tüm $\Omega \subset X$ sınırlı kümeleri için

$$\omega(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 : \Omega \text{ kümesi } X \text{ üzerinde zayıf kompakt bir } \varepsilon\text{-ağa sahiptir}\}$$

şeklinde tanımlanan $\omega : 2^X \to [0, \infty)$ fonksiyonudur. Bu kısımda, zayıf kompakt-olmama ölçüsünün birtakım özellikleri verilmektedir. Ayrıca bu ölçünün Banach örgülerine bir uygulaması olarak, ρ ve ω arasındaki ilişki incelenmektedir.

Bölüm 2

Temel kavramlar ve tanımlar

Bu kısımda Banach uzayı, Banach örgüsü ve pozitif operatörlerle ilgili kavramlar ve sonraki kısımlarda kullanılacak temel teoremler verilmektedir. Bu kavramlarla ilgili daha detaylı bilgi için [1], [13] ve [17] kaynaklarına başvurulabilir.

2.1 Normlu Uzaylar ve Banach Uzayları

X bir vektör uzayı olmak üzere, bir $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

(1) her $x \in X$ için $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(2) her $x \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

(3) her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa *norm* olarak adlandırılır. Normla donatılmış bir vektör uzayına *normlu uzay* denir. X vektör uzayı üzerindeki her d metriği, X üzerindeki bir $\|.\|$ normu için, $d(x, y) = \|x-y\|$ formülü ile verilebilir. Bir normlu uzay, norm tarafından üretilen metrik altında tam ise, *Banach uzayı* adını alır.
X, Y vektör uzayları olmak üzere, bir $T : X \to Y$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve bütün α, β skalerleri için,

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

koşulunu sağlıyorsa, *lineer operatör*, veya sadece *operatör* olarak adlandırılır. Kolaylık sağlaması için, $T(x)$ fonksiyonu yerine Tx kullanılacaktır. X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ operatörü için *operatör normu*,

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\|T\| < \infty$ ise, T operatörüne *sınırlı operatör* denir. Sınırlı bir operatörün normu,

$$\|T\| = \min\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, \ \forall x \in X\}$$

özelliğini sağlar.

Bir X normlu uzayından başka bir Y normlu uzayına tanımlı tüm sınırlı operatörler ailesi $\mathcal{L}(X, Y)$ ile gösterilecektir; $\mathcal{L}(X, X)$ ailesi ise $\mathcal{L}(X)$ ile ifade edilecektir; Y uzayının skalerle cismi olması durumunda bu aile X' ile gösterilir. Sürekli lineer fonksiyoneller uzayı olan X' dual uzayının X ile olan ilişkisi aşağıdaki temel sonuçla belirlenir.

Teorem 2.1.1. ***(Hahn-Banach)*** *Eğer V, bir X normlu uzayının bir vektör alt uzayı ise V üzerinde tanımlı her sürekli fonksiyonelin, X uzayına, normunu koruyan bir genişlemesi vardır.*

Her $x, y, z \in \mathcal{A}$ ve her α skaleri için,

(1) $(xy)z = x(yz)$ ve $(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$.

(2) $x(y + z) = xy + xz$ ve $(x + y)z = xz + yz$.

özelliklerini sağlayan, $(x, y) \mapsto xy$ (*çarpım* olarak adlandırılan) ikili işlemiyle donatılan bir $\mathcal{A}$ vektör uzayına *cebir* denir.

Her $x \in \mathcal{A}$ için $xe = ex = x$ koşulunu sağlayan bir e vektörü *birim* olarak adlandırılır, ve birim vektöre sahip bir $\mathcal{A}$ cebrine *birimli cebir* adı verilir.

Bir $\mathcal{A}$ cebrine, her $x, y \in \mathcal{A}$ için $\|xy\| \leq \|x\|.\|y\|$ koşulunu sağlayan bir $\|.\|$ normu altında Banach uzayı ise, *Banach cebri* denir.

Şimdi X bir normlu uzay olsun. Bu uzayın kapalı birim yuvarı $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ şeklinde tanımlanır, ve bazı durumlarda B_X ile gösterilir. X uzayının norm duali olan $X^{'}$, norm topoloji ile verilen X uzayının topolojik dualidir. Ayrıca,

$$\|x^{'}\| = \sup_{x \in B} |x^{'}(x)|, \quad x' \in X'$$

olarak tanımlanan $\|.\|$ normu altında da bir Banach uzayıdır. Bir X normlu uzayının *ikinci dual*i olan $X^{''}$, $X^{'}$ uzayının norm dualidir. Benzer şekilde $X^{'}$ ve $X^{''}$ uzaylarının kapalı birim yuvarları, sırasıyla

$$B^{'} = \{x^{'} \in X^{'} : \|x^{'}\| \leq 1\} \quad \text{ve} \quad B^{''} = \{x^{''} \in X^{''} : \|x^{''}\| \leq 1\}$$

şeklinde tanımlanır.

Her X normlu uzayının $\left\langle X, X' \right\rangle$ ve $\left\langle X^{'}, X^{''} \right\rangle$ şeklinde iki doğal dual ikilisi vardır. Bunlardan $\left\langle X, X' \right\rangle$ ikilisine ilişkin $\sigma(X, X^{'})$ topolojisi X normlu uzayının *zayıf topoloji*si olarak adlandırılır ve $w = \sigma(X, X^{'})$ ile gösterilir. Benzer şekilde, $X^{'}$ uzayı üzerindeki $\sigma(X^{'}, X)$ topolojisi *zayıf*$-*$ *topoloji* adlandırılır ve $w^{*} = \sigma(X^{'}, X)$ ile gösterilir.

Eğer X normlu bir uzay ise, her $x^{'} \in X^{'}$ için

$$\hat{x}(x^{'}) = x^{'}(x)$$

şeklinde tanımlı X uzayından X uzayına bir $x \longmapsto \hat{x}$ doğal norm lineer izometrisi vardır. Bu durumda her $x \in X$ için

$$\|x\| = \|\hat{x}\| = \sup_{x^{'} \in B^{'}} |x^{'}(x)|$$

yazılabilir. Bu izometri altında X uzayı, $X^{''}$ uzayının bir vektör alt uzayı olarak tanımlanabilir. Eğer bu $x \to \hat{x}$ izometrisi örtense, X normlu uzayına *refleksif* uzay denir.

Genel olarak, X Banach uzayı üzerindeki bir $\{x_n\}$ dizisi, her $x^{'} \in X^{'}$ için $x^{'}(x_n) \to x^{'}(x)$ koşulunu sağlıyorsa, $x \in X$ vektörüne *zayıf yakınsar* denir, ve $x_n \overset{w}{\to} x$ veya $x_n \overset{\sigma(X, X^{'})}{\to} x$ biçiminde gösterilir. Benzer şekilde, X Banach uzayının duali olan $X^{'}$ üzerindeki bir $\{x^{'}_n\}$ dizisi, her $x \in X$ için $x^{'}_n(x) \to x^{'}(x)$ koşulunu sağlıyorsa $x^{'} \in X^{'}$ vektörüne *zayıf-$*$ yakınsar* denir, ve $x^{'}_n \overset{w^{'}}{\to} x^{'}$ veya $x^{'}_n \overset{\sigma(X^{'}, X)}{\to} x$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.2. *Bir K kümesi, içerdiği her dizi zayıf yakınsak bir alt diziye sahip ise, zayıf kompakt olarak adlandırılır.*

Bir sonraki teorem refleksif Banach uzaylarını karakterize etmektedir.

Teorem 2.1.3. *Bir Banach uzayının refleksif olması için gerek ve yeter koşul, bu uzayın kapalı birim yuvarının zayıf kompakt olmasıdır.*

Aşağıdaki temel teoremler tanımlanan bu kavramların birbirleriyle ilişkilerini belirlemektedir.

Teorem 2.1.4. *([13])**(Mazur)** Bir Banach uzayının herhangi bir kompakt alt kümesinin kapalı konveks kabuğu da kompaktır.*

Teorem 2.1.5. *([3]) (**Eberlein-Šmulian**) Normlu bir X uzayının bir A alt kümesinin zayıf göreli kompakt (sırasıyla, zayıf kompakt) olması için gerek ve yeter koşul A kümesinin her dizisinin X uzayının bir vektörüne (sırasıyla, A kümesinin bir noktasına) zayıf olarak yakınsayan bir alt diziye sahip olmasıdır.*

Teorem 2.1.6. *([3]) (**Krein-Šmulian**) Bir Banach uzayının zayıf göreli kompakt alt kümesinin konveks dengeli kabuğu (ve dolayısıyla konveks kabuğu), zayıf göreli kompakttır.*

Teorem 2.1.7. *([13]) (**Grothendieck**). Bir X Banach uzayının A alt kümesinin,*

(1) norm tam sınırlı olması için gerek ve yeter koşul sıfıra norm yakınsak olan bir dizinin kapalı konveks kabuğu tarafından içerilmesidir.

(2) zayıf göreli kompakt olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $A \subseteq W + \varepsilon B_X$ olacak şekilde bir W zayıf kompakt kümesinin var olmasıdır.

Kanıt. (1) kısmının ispatıyla başlayalım. Eğer X uzayının bir $\|x_n\| \to 0$ ve $A \subseteq \overline{\text{co}}\{x_n\}$ koşulunu sağlayan bir $\{x_n\}$ dizisi varsa, Teorem 2.1.4'den dolayı A kümesi norm tam sınırlıdır.

Tersine, A kümesinin norm tam sınırlı olduğu varsayılsın. İstenilen $\{x_n\}$ dizisi indüksiyon ile inşâ edilecektir. $A_0 = A$ ve $k_0 = 0$ alalım. $2A_0$ kümesinin sonlu bir $\Phi_1 = \{x_1, ..., x_{k_1}\}$ alt kümesi, $2A_0 \subseteq \Phi_1 + 2^{-1}B_X$ olacak şekilde seçilsin. O halde, $A_1 = (2A_0 - \Phi_1) \cap 2^{-1}B_X$ yazılırsa A_1 kümesinin norm tam sınırlı olduğu elde edilir. Şimdi indüksiyon argümanı için, $\Phi_n = \{x_{k_{n-1}+1}, ..., x_{k_n}\}$ kümesinin $2A_{n_1} \subseteq \Phi_n + 2^{-n}B_X$ koşulunu sağlayan norm tam sınırlı $2A_{n-1}$ kümesinin sonlu bir alt kümesi olduğunu varsayalım. Burada $A_n = (2A_{n-1} - \Phi_n) \cap 2^{-1}B_X$ yazılacak olursa, A_n kümesinin norm tam sınırlı olduğu bulunur. $2A_n$ kümesinin $2A_n \subseteq \Phi_{n+1} + 2^{-n-1}B_X$ koşulunu sağlayacak sonlu bir $\Phi_{n+1} = \{x_{k_n+1}, ..., x_{k_{n+1}}\}$ kümesi seçilsin.

Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin $A \subseteq \overline{\text{co}}\{x_n\}$ koşulunu sağladığını iddia ediyoruz. Bunu görmek için ilk olarak $x \in A_n$ için $\|x\| \leq 2^{-n}$ olduğu gözlemlenmelidir, dolayısıyla buradan $\|x_n\| \to 0$ elde edilir. Diğer taraftan, eğer $x \in A$ ise, $k_{i-1} < m_i \leq k_i$ olmak üzere $m_1 < m_2 < ...$ tamsayıları

$$\left\| x - \left(\frac{x_{m_1}}{2} + ... + \frac{x_{m_n}}{2^n} \right) \right\| \leq \frac{1}{4^n}$$

koşulunu sağlayan $\frac{x_{m_1}}{2} + ... + \frac{x_{m_n}}{2^n} \in \overline{\text{co}}\{x_n\}$ elemanlarıdır. O halde $x \in \overline{\text{co}}\{x_n\}$ gerçeklenir. Bu durumda $A \subseteq \overline{\text{co}}\{x_n\}$ sağlanır ve ispat tamamlanır. □

2.2 Banach Örgüleri ve Pozitif Operatörler

Boştan farklı bir M kümesi "$\leq$" bağıntısı altında

(i) her $x \in M$ için $x \leq x$,

(ii) $x \leq y$ ve $y \leq x$ için $x = y$, ve

(iii) $x \leq y$ ve $y \leq z$ için $x \leq z$

özelliklerini sağlıyorsa, *sıralı küme* olarak adlandırılır. A kümesi, M sıralı kümesinin bir alt kümesi olsun. $x \in M$ $(z \in M)$ elemanı, her $y \in A$ için $y \leq x$ $(z \leq y)$ koşulunu sağlıyorsa A kümesinin *üst sınırı (alt sınırı)* olarak adlandırılır. Dahası, eğer A kümesine bir üst sınıra (alt sınıra) sahipse *üstten sınırlı (alttan sınırlı)* denir. Eğer A kümesi üstten ve alttan sınırlı ise, *sıra sınırlı* adı verilir. $x \leq y$ koşulunu sağlayan $x, y \in M$ vektörleri,

$$[x, y] := \{z \in M : x \leq z \leq y\}$$

ile gösterilir ve bu aralığa *sıra aralık* denir. Aynı zamanda, bir A alt kümesinin sıra sınırlı olması için gerek ve yeter koşul bir sıra aralık tarafından içerilmesidir.

Tanım 2.2.1. *"$\leq$" sıralama bağıntısıyla sıralanmış bir E reel vektör uzayı her $x, y \in E$ eleman çifti için, bunların $x \vee y = \sup\{x, y\}$ olarak gösterilen en küçük üst sınırını ve $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ olarak gösterilen en büyük üst sınırını içeriyor ve*

(i) her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ için $x + z \leq y + z$, ve

(ii) her $x \in E$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $0 \leq x$ iken $0 \leq \lambda x$

özelliklerini sağlıyorsa, vektör örgüsü (veya Riesz uzayı) olarak adlandırılır.

Bir E vektör örgüsünün *pozitif konisi* $E_+ := \{x \in E : 0 \leq x\}$ şeklinde tanımlanır. Her $x \in E$ için, x vektörünün *pozitif kısmı*, *negatif kısmı*, ve *mutlak değeri* sırasıyla

$$x^+ := x \vee 0, \quad x^- := (-x) \vee 0, \quad |x| := x \vee (-x)$$

olarak tanımlanır. $x, y \in E$ vektörlerine $|x| \wedge |y| = 0$ koşulunu sağlıyorlarsa *ayrık (veya dik)* denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir.
Bir E vektör örgüsünün bazı özellikleri aşağıda verilmiştir. ([17, Önerme II.1.4, Sonuç II.1.1 ve II.1.2] veya [13, Teorem 1.1.1]).

Önerme 2.2.2. *Her $x, y, z \in E$ ve $a \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.*

(i) $x \vee y = -(-x) \wedge (-y)$,
$(x \vee y) + z = (x + z) \vee (y + z)$,*ve*
$(x \wedge y) + z = (x + z) \wedge (y + z)$.

(ii) $x = x^+ - x^-$.

(iii) $|x| = x^+ + x^-, |\lambda x| = |\lambda||x|$, *ve* $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(iv) $x \leq y$ *eşitsizliği* $x^+ \leq y^+$ *ve* $y^- \leq x^-$ *eşitsizliklerine denktir.*

(v) $x \perp y$ *ise* $|x| \vee |y| = |x| + |y|$ *sağlanır. Bu durumda* $|x + y| = |x| + |y|$ *eşitliğini elde ederiz.*

(vi) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ *ve* $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.

(vii) Her $x, y, z \in E$ için, $(x + y) \wedge z \leq (x \wedge z) + (y \wedge z)$.

(viii) $|x-y| = (x \vee y) - (x \wedge y)$, *ve* $|x-y| = |(x \vee z) - (y \vee z)| + |(x \wedge z) - (y \wedge z)|$.

Önerme 2.2.3. *Bir vektör örgüsünün x ve y elemanları,*

(i) $x + y = (x \vee y) + (x \wedge y)$,

(ii) $x = (x-y)^+ + x \wedge y$

özelliklerini sağlar.

Kanıt. (i) $x \wedge y \leq y$ olduğundan, $y - x \wedge y \geq 0$ yazılır ve buradan $x \leq x + y - x \wedge y$ eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde, $y \leq x + y - x \wedge y$ bulunur. Sonuç olarak, $x \vee y \leq x + y - x \wedge y$ veya $x \wedge y + x \vee y \leq x + y$ sağlanır. Diğer taraftan, $y \leq x \vee y$ olduğundan $x + y - x \vee y \leq x$ yazılabilir ve aynı şekilde $x + y - x \vee y \leq y$ elde edilir. Buradan, $x + y - x \vee y \leq x \wedge y$ bulunur. O halde $x + y \leq x \wedge y + x \vee y$ elde edilir ki istenen sağlanır.
(ii) Önerme 2.2.2 kullanılarak,

$$\begin{aligned} x &= x \vee y - y + x \wedge y = (x-y) \vee (y-y) + x \wedge y \\ &= (x-y) \vee 0 + x \wedge y = (x-y)^+ + x \wedge y. \end{aligned}$$

bulunur. □

Bir Riesz uzayının boştan farklı her üstten sınırlı (alttan sınırlı) alt kümesinin bir supremumu (infimumu) varsa, bu uzay *Dedekind tam* olarak adlandırılır. Benzer şekilde, bir Riesz uzayının boştan farklı üsten sınırlı her sayılabilir alt kümesinin supremumu varsa o uzaya *Dedekind σ-tam* denir.
Bir E vektör uzayı üzerinde tanımlı bir norm $x, y \in E$ için $|x| \leq |y|$ iken $\|x\| \leq \|y\|$ koşulunu sağlıyorsa *örgü normu* olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.4. *Bir örgü normu ile donatılmış bir Riesz uzayı olan Banach uzayı, Banach örgüsü olarak adlandırılır.*

Bir E Banach örgüsü için aşağıdaki özellikler sağlanır([17, Önerme II.5.2] veya [13, Önerme 1.1.6]).

Önerme 2.2.5. *E bir Banach örgüsü olsun. O halde,*

(a) örgü işlemleri süreklidir,

(b) *pozitif koni E_+ kapalıdır, ve*

(c) *sıra aralıklar kapalı ve sınırlıdır.*

Tanım 2.2.6. *E, F kompleks Banach örgüleri olmak üzere, lineer bir $T : E \to F$ operatörü, $TE_+ \subset F_+$ koşulunu sağlıyorsa, diğer bir ifadeyle her $x \in E$ için $|Tx| \leq T|x|$ ise, pozitif olarak adlandırılır.*

Teorem 2.2.7. *([3]) Her pozitif lineer $T : E \to F$ operatörü süreklidir.*

Alt örgüler, katı kümeler, bantlar ve idealler

Bir E vektör örgüsünün F vektör alt uzayının vektör alt örgüsü olabilmesi için gerek ve yeter koşul

(1) her $x \in F$ için $|x| \in F$,

(2) her $x \in F$ için $x^+ \in F$ veya $x^- \in F$

koşullarını sağlamasıdır. Bir E vektör örgüsünün S alt kümesi, $x \in S$ ve $|y| \leq |x|$ iken $y \in S$ koşulunu sağlıyorsa *katı* küme olarak adlandırılır. O halde, vektör örgüsü üzerindeki bir normun örgü normu olabilmesi için gerek ve yeter koşul birim yuvarının katı küme olmasıdır. Katı küme olan bir lineer alt uzay *ideal* olarak adlandırılır. $|x \vee y| \leq |x| + |y|$ olduğu için idealler vektör alt örgülerdir. Sonuç olarak, bir F vektör alt örgüsü $x \in F$ ve $0 \leq y \leq x$ iken $y \in F$ koşulunu sağlıyorsa idealdir. $B \subseteq E$ alt uzayı, eğer E üzerinde bir ideal ve içerdiği bir M kümesinin supremumuna da içeriyor ve E içinde bir üst sınıra sahipse *bant* olarak adlandırılır. Alt örgülerin, ideallerin ve bantların özellikleri aşağıdaki biçimde özetlenebilir[13, Önerme 1.1.5, 1.2.3 ve 1.2.5].

Önerme 2.2.8. *E Banach örgüsü için aşağıdaki özellikler sağlanır.*

(i) *I_1, I_2 ideallerse, $I_1 + I_2$ idealdir ve dahası I_1 ve I_2 kapalı ise, $I_1 + I_2$ kapalı bir idealdir.*

(ii) *E Banach örgüsünün her katı kümesinin, alt kümesinin kapanışı katı kümedir.*

(iii) *E Banach örgüsünün her alt örgüsünün kapanışı bir alt örgüdür.*

(iv) E Banach örgüsünün her idealinin kapanışı bir idealdir.

(v) E Banach örgüsü üzerindeki her bant kapalıdır.

(vi) Boştan farklı her $A \subset E$ alt kümesi için, A tarafından üretilen ideal

$$E_A = \bigcup \{n\,[-y, y] : n \in \mathbb{N}, y = |x_1| \vee ... \vee |x_r|, x_1, ..., x_r \in A\}$$

ile verilir.

(vii) Her $x \in E_+$ için, $\{x\}$ tarafından üretilen ideal

$$E_x = \bigcup \{n\,[-x, x] : n \in \mathbb{N}\}$$

ile ifade edilir.

E bir Banach örgüsü olmak üzere, $E_e = E$ koşulunu sağlayan $e \in E^+$ vektörüne *sıra birim* denir. Eğer $\overline{E_e} = E$ ise, $e \in E_+$ *yarı iç nokta* olarak adlandırılır.
e vektörünün E uzayının bir sıra birimi olması için gerek ve yeter koşul E_+ pozitif konisinin bir yarı iç noktası olmasıdır.
D kümesi bir E Riesz uzayının boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere, *D kümesi tarafından üretilen B_D bantı* D kümesini içeren en küçük banttır. Eğer $D = \{x\}$ ise, x vektörü tarafından üretilen $B_x = B_{\{x\}}$ *esas bant* olarak adlandırılır. Bir ideal tarafından üretilen bant ise aşağıdaki şekilde belirlenir.

Teorem 2.2.9. *([1]) E Riesz uzayının bir J ideali tarafından üretilen B_J bantı,*

$$B_J = \{x \in E : \exists\{x_\alpha\} \subseteq J \text{ öyle ki } 0 \leq x_\alpha \uparrow |x|\}$$

olarak verilir. Dahası, her $x \in E$ için x tarafından üretilen B_x esas bantı

$$B_x = \{y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}$$

şeklindedir.

E uzayının boştan farklı bir A alt kümesinin *ayrık bütünleyen*i

$$A^d = \{x \in E : |x| \wedge |a| = 0 \text{ her } a \in A \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlanır. Örgü işlemleri sıra sürekli olduğundan her ayrık bütünleyen bir banttır. Arşimedyen Riesz uzaylarında ise, her bant bir ayrık bütünleyendir.

Teorem 2.2.10. *([1]) Bir Arşimedyen Riesz uzayında, boştan farklı bir A kümesi tarafından üretilen B_A bantı $B_A = A^{dd} = (A^d)^d$ şeklindedir. Ayrıca, Arşimedyen Riesz uzayındaki her B bantı $B = B^{dd}$ özelliğini sağlar.*

Bir E Riesz uzayındaki B bantı, $E = B \oplus B^d$ koşulunu sağlıyorsa *izdüşüm bantı* olarak adlandırılır. Dedekind tam Riesz uzaylarındaki her bant, izdüşüm bantıdır.

Sıra sürekli norma sahip uzaylar

Tanım 2.2.11. *E Banach örgüsünün normu, eğer E örgüsünün her monoton sıra sınırlı dizisi yakınsak ise, sıra sürekli olarak adlandırılır.*

Aşağıdaki önermenin ispatına [12, Teorem 2.4.2] kaynağından ulaşılabilir.

Önerme 2.2.12. *Bir E Banach örgüsünün sıra sürekli norma sahip olması için gerek ve yeter koşul E örgüsündeki her sıra aralığın zayıf kompakt olmasıdır.*

Örnek 2.2.13. *Her refleksif Banach örgüsü ve her L^1-uzayı sıra sürekli norma sahiptir.*

Sonuç 2.2.14. *([1]) Sıra sürekli norma sahip her Banach örgüsü Dedekind tamdır.*

Teorem 2.2.15. *E (kompleks) Banach örgüsü olmak üzere,*

(i) E örgüsünün sıra sürekli norma sahip olması için gerek ve yeter koşul her $0 \leq u \in E$ ve her $\varepsilon > 0$ için, $\psi \in B_{E^*}$ olmak üzere $\langle u, (|\psi| - \phi)^+ \rangle \leq \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir $0 \leq \phi \in E^*$ olmasıdır [23, Teorem 125.2];

(ii) E^* örgüsünün sıra sürekli norma sahip olması için gerek ve yeter koşul her $0 \leq \phi \in E^*$ ve her $\varepsilon > 0$ için, $f \in B_E$ olmak üzere $\langle (|f| - u)^+, \phi \rangle \leq \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir $0 \leq u \in E$ bulunmasıdır [23, Teorem 125.1];

(iii) E^* örgüsünün sıra sürekli norma sahip olması için gerek ve yeter koşul E örgüsünün her norm sınırlı, ayrık dizisinin sıfıra zayıf olarak yakınsamasıdır [23, Teorem 116.1].

Tanım 2.2.16. *([1]) Bir Riesz uzayının $u > 0$ vektörüne,* *(1)* $0 \leq x \leq u$, $0 \leq y \leq u$ *ve* $x \wedge y = 0$ *koşulları ancak* $x = 0$ *ve* $y = 0$ *olması durumunda sağlanıyorsa atom denir,*

(2) her $0 \leq x \leq u$ *için* $x = \lambda u$ *olacak şekilde bir* $\lambda \geq 0$ *varsa, yani* $[0, u] = \{\lambda u : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ *ise, ayrık vektör denir.*

Atomu olmayan bir Riesz uzayı *atomsuz* (veya *atomu olmayan*) olarak adlandırılır. Bir sonraki lemmada atomsuz Banach örgülerinin dual özelliklerinden bahsedilmektedir.

Lemma 2.2.17. *([1]) Bir E Banach örgüsü aşağıdaki özellikleri sağlar:*

(1) Eğer E sıra sürekli norma sahip ve atomsuzsa, E^* *norm duali de aynı şekilde atomsuz bir Banach örgüsüdür.*

(2) Eğer E^* *atomsuzsa, E örgüsü de atomsuzdur.*

Reel Banach örgülerinin kompleksleştirilmesi

Birçok durumda kompleks vektör uzayları göz önüne alındığından dolayı, kompleks Banach örgüsü kavramından bahsedeceğiz.

Bir E reel Banach örgüsünün kompleksleştirilmesi $(x, y) \in E \times E$ eleman çiftlerinden oluşan, $(x_0, y_0) + (x_1, y_1) := (x_0 + x_1, y_0 + y_1)$ ve $(a + ib)(x, y) := (ax - by, ay + bx)$ şeklinde tanımlanan toplam ve skalerle çarpım işlemleriyle birlikte, normu

$$\|(x, y)\| := \left\| \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} (x \sin\theta + y \cos\theta) \right\|$$

olarak tanımlanan ve $E_{\mathbb{C}}$ ile gösterilen bir kompleks Banach uzayıdır. E uzayı, $E_{\mathbb{C}}$ uzayının reel lineer bir alt uzayına izometrik olarak izomorfiktir. $0 \leq x \in E_{\mathbb{C}}$ olması için gerek ve yeter koşul $x \in E_+$ olmasıdır.

Bir kompleks Banach örgüsü, E reel Banach örgüsünün komplekleştirilmesi olarak alınabilecek $(E_{\mathbb{C}}, \leq)$ sıralı kompleks bir Banach uzayıdır.

$E_{\mathbb{C}}$ uzayının her elemanı için (x, y) notasyonu yerine, $x+iy$ ifadesini kullanılacaktır. $z = x + iy \in E_{\mathbb{C}}$ elemanının eşleniği ise $\bar{z} = x - iy$ şeklindedir. $z = x + iy \in E_{\mathbb{C}}$ için $\mathrm{Re} z := x$ notasyonu kullanılır. E uzayı üzerinde tanımlı $|.|$ modülü

$$|x + iy| := \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} (x \sin\theta + y \cos\theta)$$

şeklinde $E_{\mathbb{C}}$ uzayına genişletilir. Reel Banach örgüleri için verilen bütün kavramların kompleks Banach örgülerine doğal genişlemesi vardır. Bir kompleks Banach örgüsünün reel kısmı sıra sürekli norma sahipse, kendisi de sahiptir.

Tanım 2.2.18. *E reel Banach örgüsü olmak üzere $E_{\mathbb{C}} = E \oplus iE$ şeklindeki herhangi bir kompleks Banach uzayı, kompleks Banach örgüsü olarak göz önüne alınır.*

E ve F kompleks Banach örgüleri olmak üzere, $T : E_{\mathbb{C}} \to F_{\mathbb{C}}$ lineer izometrisine her $z \in E_{\mathbb{C}}$ için $|Tz| = T|z|$ koşulunu sağlıyorsa *örgü izometri* denir. $E_{\mathbb{C}} = E \oplus iE$ ve $F_{\mathbb{C}} = F \oplus iF$ kompleks Banach örgüleri arasında, her $z \in E_{\mathbb{C}}$ için $|Tz| = T|z|$ koşulunu sağlayan bir $T : E_{\mathbb{C}} \to F_{\mathbb{C}}$ örten lineer bir izometri varsa bu iki uzaya *örgü izometrik*lerdir denir.

Lemma 2.2.19. *E ve F reel Banach örgüleri olmak üzere, eğer $T : E \to F$ örten bir örgü izometriyse $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to F_{\mathbb{C}}$ de örten bir örgü izometridir.*

E ve F reel Banach örgüleri olsun. Bir $T \in \mathcal{L}(E, F)$ operatörünün $\|T\|_{\mathbb{C}}$ ile gösterilen normu, $T : E_{\mathbb{C}} \to F_{\mathbb{C}}$ operatörünün

$$\|T\|_{\mathbb{C}} = \sup_{\|z\|_{\mathbb{C}} \leq 1} \|T_{\mathbb{C}} z\|_{\mathbb{C}}$$

şeklinde tanımlanan operatör normudur. Herhangi bir sınırlı $T : E \to E$ operatörü için, $\|T\| \leq \|T\|_{\mathbb{C}} \leq 2\|T\|$ sağlanır; hattâ, pozitif operatörler için $\|T\|$ ve $\|T\|_{\mathbb{C}}$ normları çakışıktır.

Lemma 2.2.20. *E ve F (reel) Banach örgüleri olmak üzere, eğer $T : E \to F$ pozitif bir operatör ise, her $z \in E_{\mathbb{C}}$ için $|T_{\mathbb{C}} z| \leq T|z|$ eşitsizliği sağlanır.*

Sonuç 2.2.21. *([1]) Eğer T pozitif bir operatör ise, $\|T\|_{\mathbb{C}} = \|T\|$ sağlanır.*

2.3 Spektral Özellikler

2.3.1 Bir Operatörün Spektrumu

Bu kısımda, aksi belirtilmedikçe, X aşikâr olmayan (yani, $X \neq \{0\}$) kompleks Banach uzayı olacaktır. Eğer X reel Banach uzayı olarak veriliyorsa, X yerine kompleksleştirilmesi olan $X_{\mathbb{C}}$ uzayı göz önüne alınabilir. X uzayının birim operatörü, I ile gösterilecektir. Her λ kompleks sayısı λI olarak yazılabileceğinden, λ sayısını X uzayının bir operatörü olarak düşünebiliriz.

Tanım 2.3.1. *Bir $T : X \to X$ sınırlı operatörünün spektrumu, $\lambda - T$ operatörünün X üzerinde terslenebilir olmadığı λ kompleks sayılarından oluşur ve $\sigma(T)$ ile gösterilir. Bir başka ifadeyle,*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - T)^{-1} \textit{ mevcut değildir}\}$$

şeklindedir. Spektrumun bütünleyeni olan T operatörün rezolvent kümesi olarak adlandırılan ve $Res(T)$ ile gösterilen küme

$$Res(T) = \mathbb{C}\backslash\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T,\ X\textit{'den } X\textit{'e tanımlı terslenebilir bir operatördür}\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.3.2. *([1]) Aşikâr olmayan kompleks bir Banach uzayı üzerinde tanımlı bir sınırlı operatörün spektrumu kompleks düzlemin boştan farklı kompakt bir alt kümesidir.*

Tanım 2.3.3. *([1]) Keyfî bir $T \in \mathcal{L}(X)$ operatörünün spektral yarıçapı $r(T)$, operatörün spektrumunu içeren $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r\}$ en küçük kapalı birim diskinin negatif-olmayan yarıçapıdır. Aynı zamanda spektral yarıçap,*

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

şeklinde de ifade edilir.

$r(T) \leq \|T\|$ eşitsizliği sağlanır ve kesin eşitsizlik de sağlanabilir. Daha önceden de ifade edildiği üzere $T \in \mathcal{L}(X)$ operatörünün spektrumu, X uzayının herhangi bir eşdeğer normundan bağımsız olarak tanımlanır. Dolayısıyla, spektral yarıçap $r(T)$ normdan bağımsızdır. Buna rağmen, I. M. Gelfand'ın verdiği önemli formül ile spektral yarıçap norm üzerinden hesaplanabilir.

Teorem 2.3.4. ***(Gelfand)*** *Eğer $T \in \mathcal{L}(X)$ ise, spektral yarıçap*

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

şeklindedir.

Banach uzayları arasında tanımlı $T : X \to Y$ sınırlı bir operatör ise, $T^* : Y^* \to X^*$ ile gösterilen *eşlenik operatör* her $x \in X$ ve her $y^* \in Y^*$ için,

$$\langle x, T^* y^* \rangle = \langle Tx, y^* \rangle$$

şeklindeki dual formül ile tanımlanır.

Teorem 2.3.5. *([1]) $T \in \mathcal{L}(X)$ operatörünün spektrumu ile eşleniğinin spektrumu çakışıktır, yani*

$$\sigma(T) = \sigma(T^*)$$

olur. Dahası, $r(T) = r(T^*)$ sağlanır.

Bir kompleks λ sayısına, $Tx = \lambda x$ olacak şekilde λ'ya karşılık gelen ve *özvektör* olarak adlandırılan sıfırdan farklı bir x vektörü varsa *özdeğer* denir. T operatörünün özdeğerlerinin, $\lambda - T$ operatörünü bire-bir yapmayan λ kompleks sayılarından oluştuğuna dikkat edelim. Bu operatörün bütün özdeğerlerinin kümesi operatörün *nokta spektrumu* olarak adlandırılır ve

$$\begin{aligned} \sigma_p(T) &= \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda - T \quad \text{bire-bir değildir}\} \\ &= \{\lambda \in \sigma(T) : Tx = \lambda x \text{ bir } x \neq 0 \text{için}\} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.3.6. ***(Spektral Gösterilim Teoremi)***. *Eğer $T \in \mathcal{L}(X)$ ise, her $f \in \mathcal{F}(T)$ fonksiyonu için $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ sağlanır; yani*

$$\sigma(f(T)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$$

olur.

2.3.2 Kompakt Bir Operatörün Spektrumu

X ve Y Banach uzayları olmak üzere, $T : X \to Y$ tanımlı lineer operatörü için X uzayının birim yuvarının bu operatör altındaki görüntüsü Y uzayının norm tam sınırlı bir alt kümesiyse (veya, eşdeğer olarak, X uzayının her sınırlı dizisinin Y uzayında yakınsak bir alt dizisi varsa) T operatörüne *kompakt* denir. Kompakt bir operatör süreklidir.

Bu kısımda, kompakt bir operatörün spektrumunun en fazla sayılabilir bir küme olduğundan bahsedilecektir. Önceden de belirtildiği gibi X kompleks bir Banach uzayını göstermektedir.

Lemma 2.3.7. *Eğer $T \in \mathcal{L}(X)$ kompakt bir operatör ise, her $\varepsilon > 0$ için T operatörünün bütün özdeğerlerinden oluşan*

$$\{\lambda \in \sigma_p(T) : |\lambda| > \varepsilon\}$$

kümesi sonludur.

Teorem 2.3.8. *$T \in \mathcal{L}(X)$ herhangi bir kompakt operatör olmak üzere,*

(1) T operatörünün spektrumu en fazla sayılabilir sayıdadır.

(2) Spektrumun her sıfırdan farklı noktası bir özdeğerdir.

(3) Eğer T operatörünün spektrumu sayılabilir ve $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$ spektrumun herhangi bir sıralanışı ise, $\lambda_n \to 0$ dır. Özel olarak, T operatörünün spektrumundaki sıfırdan farklı her nokta bir izole noktadır.

Teorem 2.3.9. *([1]) Bir Banach uzayı üzerinde tanımlı pozitif bir operatörün spektral yarıçapı, operatörün spektrumuna aittir.*

Teorem 2.3.10. *(**Krein-Rutman**) Eğer $T : E \to E$, Banach örgüsü üzerinde tanımlı $r(T) > 0$ olan kompakt bir operatör ise, spektral yarıçapı $r(T)$ pozitif bir özvektöre sahip olan bir özdeğerdir. Bir başka ifadeyle, $Tx = r(T)x$ olacak şekilde bir $x > 0$ vektörü vardır.*

2.3.3 Sınırlı Bir Operatörün Esaslı Spektrumu

X uzayı üzerindeki bütün kompakt operatörlerin vektör uzayı $\mathcal{K}(X)$, tüm lineer operatörlerin $\mathcal{L}(X)$ ailesi üzerinde kapalı bir cebirsel idealdir. $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$ bölüm uzayı,

- $[S] + [T] = [S + T]$,
- $\lambda[T] = [\lambda T]$, ve

- $[S][T] = [ST]$

cebirsel işlemleri altında birimi $[I]$ olan bir birimsel cebirdir. Ayrıca $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$ bölüm vektör uzayı,

$$\|[T]\| = \inf\{\|S\| : S \in [T]\} = \inf\{\|S\| : S_T \in \mathcal{K}(X)\}$$

bölüm normu altında bir Banach uzayıdır. Bu bölüm normu

$$\|[S][T]\| \leq \|[S]\|.\|[T]\| \text{ ve } \|[I]\| = 1$$

özelliklerini sağladığından $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$ bir birimsel Banach cebridir. Bu Banach cebri X uzayının *Calkin cebri* olarak adlandırılır ve $\mathcal{C}(X)$ ile gösterilir; yani $\mathcal{C}(X) = \mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$ dır.
$\pi : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{C}(X)$ *bölüm fonksiyonu* (veya *doğal izdüşüm*)

$$\pi(T) = [T] = T + \mathcal{K}(X)$$

şeklinde tanımlanır. $\|\pi(T)\| \leq \|T\|$ eşitsizliğinden dolayı, π bir büzülme fonksiyonudur. Bu özellikler aşağıdaki sonuçta özetlenmiştir.

Teorem 2.3.11. *([1]) X sonsuz boyutlu Banach uzayı olmak üzere, Calkin cebri $\mathcal{C}(X)$ birimsel bir Banach cebridir. $\pi : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{C}(X)$ doğal izdüşümü bir büzülmedir ve bir cebirsel homomorfizmdir.*

Burada Calkin cebrinin bir elemanı olarak operatörlerin özelliklerine ilişkin standart terminolojiden bahsedilmektedir. Bir $T \in \mathcal{L}(X)$ operatörünün *esaslı olarak* bir (P) özelliğine sahip olması, $\pi(T)$ doğal izdüşümünün $\mathcal{C}(X)$ Calkin cebri üzerinde (P) özelliğine sahip olması anlamına gelir.
Örneğin, eğer $\pi(T)$ Calkin cebri üzerinde terslenebilir ise, $T \in \mathcal{L}(X)$ operatörünün *esaslı terslenebilir* olduğunu söyleriz.
$T : X \to Y$ iki vektör uzayı arasında tanımlı bir operatör olsun. Alışılageldiği gibi, sıfır uzayı $N(T)$ ve T operatörünün görüntüsü $R(T)$ ile ifade edilecektir. Bu uzaylar

$$N(T) = \{x \in X : Tx = 0\} \quad \text{ve} \quad R(T) = \{Tx : x \in X\}$$

şeklinde tanımlıdır. Sınırlı bir $T : X \to Y$ operatörü için $X = N(T) \oplus V$ ve $Y = R(T) \oplus W$ koşullarını sağlayan $V \subseteq X$ ve $W \subseteq Y$ kapalı alt uzayların bulunabileceği varsayılsın. O halde, $Y/R(T)$ bölüm uzayı W alt uzayına izomorfiktir ve $T : V \to R(T)$ bir izomorfizmdir. $N(T)$ sıfır uzayının boyutu $n(T)$ ile gösterilir ve *sıfırlılık* olarak adlandırılır; yani $n(T) = \text{dim}N(T)$ olur. W alt uzayının boyutu (veya, eşdeğer olarak, $Y/R(T)$ bölüm uzayının boyutu) T operatörünün *etki*si olarak adlandırılır ve $d(T) = \text{dim}Y/R(T)$ ile gösterilir. Eğer $n(T)$ veya $d(T)$ sonlu iseler,

$$i(T) = n(T) - d(T)$$

genişletilmiş reel sayısı T operatörünün *indis*i olarak adlandırılır.

Lemma 2.3.12. *([1]) Sınırlı bir $T : X \to Y$ operatörü, eğer*

(1) kapalı bir görüntü bölgesine sahip ve sıfırlılığı veya etkisi sonlu ise yarı Fredholm, ve

(2) hem sıfırlılığı hem de etkisi sonlu ise Fredholm

olarak adlandırılır.

Teorem 2.3.13. *([1]) $T \in \mathcal{L}(X)$ operatörünün esaslı terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul bir Fredholm operatörü olmasıdır.*

Tanım 2.3.14. *([1]) $T \in \mathcal{L}(X)$ operatörünün esaslı (veya Fredholm) spektrumu*

$$\begin{aligned} \sigma_{ess}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - \pi(T)\ \mathcal{C}(X) \text{ üzerinde terslenebilir değildir}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \text{ Fredholm operatörü değildir}\}. \end{aligned}$$

şeklindedir.

Lemma 2.3.15. *([1]) $T \in \mathcal{L}(X)$ operatörünün esaslı spektrumu $\sigma(T)$ kümesinin boştan farklı kompakt bir alt kümesidir.*

Tanım 2.3.16. *$T \in \mathcal{L}(X)$ operatörünün esaslı spektral yarıçapı,*

$$\begin{aligned} r_{ess}(T) &= r(\pi(T)) \\ &= \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{ess}(T)\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \|\pi(T^n)\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \inf_{n} \|\pi(T^n)\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\inf_{K\in\mathcal{K}(X)} \|T^n - K\| \right]^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Bölüm 3

Kompakt-Olmama Ölçüleri

Bu bölüm boyunca, X ve Y harfleri ile sonsuz boyutlu Banach uzayları, E ve F ile sonsuz boyutlu Banach örgüleri ifade edilecektir.

3.1 Kuratowski ve Hausdorff Kompakt-Olmama Ölçüleri

Bu kısımda Kuratowski ve Hausdorff kompakt-olmama ölçüleri ve bu ölçülerin temel özellikleri tanımlanacaktır. X uzayının sınırlı alt kümeleri Ω ve E uzayının x merkezli, r yarıçaplı kapalı yuvarı $B(x, r)$ ile gösterilecektir. Kapalı birim yuvar ise $B = B(0, 1)$ olarak ifade edilecektir.

Tanım 3.1.1. *Ω kümesinin Kuratowski kompakt-olmama ölçüsü $\alpha(\Omega)$, $\delta > 0$ sayılarının infimumudur öyle ki bu kümeyi örten sonlu sayıda kümenin çapı bu delta sayısından küçük eşittir.*

Burada söz edilen $\Omega \subset X$ kümesinin çapı,

$$\text{Çap}(\Omega) := \sup\{d(x, y) : x, y \in \Omega\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir başka ifadeyle, eğer (X, d) tam metrik uzay ise, ilk olarak K. Kuratowski tarafından [9]'da tanımlanan Ω kümesinin Kuratowski kompakt-olmama ölçüsü,

$$\alpha(\Omega) := \inf\{\delta > 0 : \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i \text{ öyle ki } \text{Çap}(\Omega_i) \leq \delta,\ 1 \leq i \leq n < \infty\}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 3.1.2. Ω *kümesinin Hausdorff kompakt-olmama ölçüsü*

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 : \Omega \textit{ kümesi, } X \textit{ üzerinde sonlu bir } \varepsilon\textit{-ağa sahiptir}\}$$

olarak tanımlanır.

Bir $S \subset X$ kümesi,

$$\Omega \subset S + \varepsilon B \equiv \{s + \varepsilon b : s \in S, b \in B\}$$

koşulunu sağlıyorsa Ω kümesinin ε-*ağı* olarak adlandırılır. Yukardaki tanım Goldenstein, Gohberg, ve Markus tarafından [7]'de verilmiştir. Bu terminolojinin kaynağı olan gözlemler şu şekildedir. $x \in X$ ve $r > 0$ için $B(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| < r\}$ olarak alınsın. $d(S, U) = \inf\{r > 0 : S \subset U + B(0, r)\}$ olmak üzere, Hausdorff metriği olarak adlandırılan $D(S, U) = \max\{d(S, U), d(U, S)\}$ şeklinde tanımlanır. Eğer $\mathcal{F} = \{U \subset X : U \neq 0, \ \overline{U}$ kompakt$\}$ şeklinde ise, her sınırlı $S \subset X$ kümesi için

$$\chi(S) = \inf_{U \in \mathcal{F}} D(S, U)$$

olarak ifade edilir.

Aynı zamanda, Hausdorff kompakt-olmama ölçüsü

$$\chi(S) := \inf\{\delta > 0 : \exists x_1, ..., x_n \in X \text{ öyle ki } S \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \delta)\}$$

şeklinde de yazılabilir.

Not 3.1.3. *(a) Kuratowski kompakt-olmama ölçüsünün tanımında geçen "çapı δ'dan küçük eşit" ifadesi, "çapı δ'dan büyük olmayan" ifadesiyle değiştirilebilir; benzer şekilde, Hausdorff kompakt-olmama ölçüsünün tanımındaki ε-ağın ε yarıçaplı açık ya da kapalı yuvarlarla tanımlanması fark yaratmaz.*

(b) Hausdorff kompakt-olmama ölçüsünün tanımında, sonlu ε-ağ yerine tam sınırlı denilebilir, sonuçta bir S ε-ağı herhangi bir $\delta > 0$ sayısı için sonlu bir δ-ağına sahiptir.

(c) α ve χ ölçülerinin tanımları sadece Banach uzayları için değil, keyfî metrik uzaylar için de anlamlıdır.

α ve χ kompakt-olmama ölçülerinin bazı özelliklerinden bahsedilecektir. Terminoloji bu özelliklerin diğer kompakt-olmama ölçüleri için de kullanılabilmesine uygun ifade edilecektir. Dolayısıyla, ψ ile göstereceğimiz aslında α ve χ ölçülerinin özellikleri aşağıdaki gibidir:

(a) **regülerlik:** $\psi(\Omega) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul Ω kümesinin tam sınırlı olmasıdır;

(b) **singüler-olmama:** Her $x \in X$ için, $\psi(\{x\}) = 0$;

(c) **monotonluk:** $\Omega_1 \subset \Omega_2$ iken $\psi(\Omega_1) \leq \psi(\Omega_2)$ gerçeklenir;

(d) **cebirsel yarı toplamsallık:** $\psi(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \psi(\Omega_1) + \psi(\Omega_2)$;

(e) **Lipschitz özelliği:** $|\psi(\Omega_1) - \psi(\Omega_2)| \leq L_\psi D(\Omega_1, \Omega_2)$, burada $L_\chi = 1$, $L_\alpha = 2$ ve D Hausdorff metriktir;

(f) **süreklilik:** Her $\Omega \subset X$ kümesi ve $\varepsilon > 0$ sayısı için $D(\Omega, \Omega_1) < \delta$ sağlayan tüm Ω_1 kümeleri için $|\psi(\Omega) - \psi(\Omega_1)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunabilir;

(g) **yarı homojenlik:** Her λ skaleri için, $\psi(\lambda\Omega) = |\lambda|\psi(\Omega)$;

Ω_1 ve Ω_2, reel veya kompleks $(X, \|.\|)$ Banach uzayının alt kümeleri ve λ bir skaler olmak üzere, Ω_1 kümesini içeren en küçük konveks küme olarak tanımlanan konveks kabuk $\mathrm{co}(\Omega_1)$ ile gösterilir. $\Omega_1 + \Omega_2 := \{s + t : s \in \Omega_1$ ve $t \in \Omega_2\}$ ve $\lambda\Omega_1 := \{\lambda s : s \in \Omega_1\}$ şeklinde tanımlanır.

(h) **konveks kabuk altında değişmezlik:** $\psi(\Omega) = \psi(\mathrm{co}(\Omega))$;

(i) **döndürme altında değişmezlik:** Her $x_0 \in X$ için $\psi(\Omega + x_0) = \psi(\Omega)$;

(j) **kapanış altında değişmezlik:** $\psi(\Omega) = \psi(\overline{\Omega})$;

(k) **yarı toplamsallık:** $\psi(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \max\{\psi(\Omega_1), \psi(\Omega_2)\}$;

Bu özellikler birbirinden bağımsız değildir; örneğin, (c), (d) ve (g) özellikleri sayesinde (j) özelliği gerçeklenir.

Teorem 3.1.4. *[2] X uzayının birim yuvarı B ile gösterilsin. Eğer X sonlu boyutlu ise, $\alpha(B) = \chi(B) = 0$ sağlanır; aksi takdirde $\alpha(B) = 2$, $\chi(B) = 1$ olur.*

Kanıt. İlk ifade α ve χ kompakt-olmama ölçülerinin regülerlik özelliğinden elde edilir.

İkinci ifadeyi, öncelikle χ için ispatlayalım. B yuvarını, B için bir 1-ağı olarak düşünülebilir, ve dolayısıyla $\chi(B) \leq 1$ elde edilir. Varsayalım ki $\chi(B) = q < 1$ olsun. $\varepsilon > 0$ sayısı $q + \varepsilon < 1$ olacak şekilde seçilsin ve $\{x_1, ..., x_m\}$, B için bir $(q + \varepsilon)$-ağı olsun. O halde,

$$B \subset \bigcup_{k=1}^{m} [x_k + (q + \varepsilon)B]$$

olarak yazılabilir. χ kompakt-olmama ölçüsünün cebirsel yarı toplamsal özelliğinden dolayı,

$$q = \chi(B) \leq (q + \varepsilon)\chi(B) = q(q + \varepsilon)$$

elde edilir. Ancak bu eşitsizlik $q = 0$ olması ile sağlanır (çünkü $q + \varepsilon < 1$ idi). Bu ise B yuvarının tam sınırlı olması ile mümkündür ki bu durum X uzayının sonsuz boyutlu olmasıyla çelişir.

İkinci ifadeyi α için ispatlarken, ifadesi "Eğer S, n-boyutlu bir normlu uzayda küre ve $(k = 1, ..., n)$ olmak üzere uzayın A_k kapalı kümeleri S için bir örtülüş ise, bu durumda A_k kümelerinden en az bir tanesi için Çap$(A) \geq$ Çap(S) sağlanır." olan Lyusternik-Shnirelman-Borsuk Teoremi'ni kullanacağız. O halde X sonsuz boyutlu olsun. Bu durumda, $\alpha(B) \leq 2$ sağlanır. Varsayalım ki $\alpha(B) < 2$ olsun. Her $k = 1, ..., n$ için Çap$(\Omega_k) < 2$ olacak şekilde, (genelliği bozmaksızın bütün Ω_k kümelerinin kapalı olduğu varsayılarak) $B \subset \bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k$ bulunur. Şimdi n-boyutlu keyfî bir X_n alt uzayının B yuvarı göz önüne alınarak ve $A_k = \Omega_k \cap X_n$ kümeleri kurulduğunda, ifadesi verilen teoremle çelişkiye ulaşılır. □

Teorem 3.1.5. *[2] Kuratowski ve Hausdorff kompakt-olmama ölçüleri için*

$$\chi(\Omega) \leq \alpha(\Omega) \leq 2\chi(\Omega)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Kanıt. Bu eşitsizlikler, aşağıdaki notların sonucunda elde edilir:

1) eğer $\{x_1, ..., x_m\}$, Ω kümesinin bir ε-ağı ise çapı 2ε olan kümelerden oluşan $\{\Omega \cap (x_k + \varepsilon B)\}_{k=1}^{m}$ ailesi, Ω kümesinin bir örtülüşüdür;

2) eğer $\{\Omega_k\}_{k=1}^{m}$ ailesi, Ω kümesi için Çap$(\Omega_k) \leq \delta$ olan bir örtülüş ve $x_k \in \Omega_k$ ise

$\{x_1, ..., x_k\}$ kümesi, Ω kümesinin δ-ağıdır.

Teorem 3.1.4'den ikinci eşitsizliğin kesinliği elde edilir. İlk eşitsizlik yine kesindir. Örneğin, X uzayı olarak sıfıra yakınsayan dizilerden oluşan c_0 uzayı alınsın. Uzay üzerindeki norm $\|x\| = \sup |x_i|$ şeklinde tanımlı ve c_0 üzerindeki standart taban $\Omega = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ olsun. Birden fazla elemanı olan bir kümenin çapı 1'e eşit olduğundan, $\alpha(\Omega) = 1$ bulunur. Diğer taraftan, Ω kümesinin herhangi bir sonsuz alt kümesinin c_0 uzayının bir elemanına olan uzaklığı 1'den küçük eşit olamayacağından $\chi(\Omega) = 1$ elde edilir. $\square$

Örnek 3.1.6. *[2] (**ℓ_p ve c_0 uzayları üzerinde Hausdorff kompakt-olmama ölçüsü**) p-inci kuvveti toplanabilir dizilerin uzayı ℓ_p ve sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı c_0 üzerinde χ kompakt-olmama ölçüsü, P_n standart tabandaki ilk n vektörün lineer gereni üzerine bir izdüşüm olmak üzere*

$$\chi(\Omega) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \|(I - P_n)x\| \qquad (\star)$$

formülü ile hesaplanır.

Kanıt. Eğer Q kümesi, Ω kümesinin bir $[\chi(\Omega) + \varepsilon]$-ağı ise, buradan $\Omega \subset Q + [\chi(\Omega) + \varepsilon]B$ yazılabilir. O halde, $x \in \Omega$ elemanı $q \in Q$ ve $b \in B$ olmak üzere $x = q + [\chi(\Omega) + \varepsilon]b$ formunda ifade edilebilir. Sonuç olarak,

$$\sup_{x\in\Omega} \|(I - P_n)x\| \leq \sup_{q\in Q} \|(I - P_n)q\| + [\chi(\Omega) + \varepsilon]$$

bulunur. Q sonlu bir küme olduğundan, eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terim $n \to \infty$ iken sıfıra yakınsar ve

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \|(I - P_n)x\| \leq \chi(\Omega) + \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir. ε sayısı keyfî seçildiğinden, $(\star)$ ifadesinin bir tarafı ispatlanmış olur.

Diğer tarafı ispatlamak için,

$$\Omega \subset P_n\Omega + (I - P_n)\Omega$$

olduğunu göz önüne alalım. χ kompakt-olmama ölçüsünün özellikleri ve $P_n\Omega$ kümesinin tam sınırlılığı kullanılarak,

$$\chi(\Omega) \leq \chi(P_n\Omega) + \chi[(I - P_n)\Omega] = \chi[(I - P_n)\Omega] \leq \sup_{x\in\Omega} \|(I - P_n)x\|$$

eşitsizliği elde edilir. n sayısı keyfî olduğundan

$$\chi(\Omega) \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \|(I-P_n)x\|$$

bulunur. $\square$

Örnek 3.1.7. *[2] (**$C[a,b]$ uzayı üzerinde Hausdorff kompakt-olmama ölçüsü**) $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı $C[a,b]$ üzerinde, χ kompakt-olmama ölçüsü*

$$\chi(\Omega) = \frac{1}{2} \lim_{\delta\to 0} \sup_{x\in\Omega} \max_{0\leq\tau\leq\delta} \|x - x_\tau\|$$

formülü ile hesaplanır. Burada x_τ,

$$x_\tau(t) = \begin{cases} x_\tau(t+\tau) & \textit{if } a \leq t \leq b-\tau, \\ x(b) & \textit{if } b-\tau \leq t \leq b. \end{cases}$$

olarak tanımlanan x fonksiyonun τ-döndürmesidir.

Kanıt. Keyfî bir $\varepsilon > 0$ seçelim ve Ω kümesinin Q, sonlu bir $[\chi(\Omega)+\varepsilon]$-ağını oluşturalım. $x \in \Omega$ olsun. Bir $y \in Q$ elemanı $\|x-y\| \leq \chi(\Omega)+\varepsilon$ şeklinde yazılabilir. Son olarak da, $\delta > 0$ ve $\tau \in [0,\delta]$ alalım. O halde,

$$\begin{aligned} \|x - x_\tau\| &\leq \|x-y\| + \|y-y_\tau\| + \|y_\tau - x_\tau\| \leq 2\|x-y\| + \|y-y_\tau\| \\ &\leq 2\chi(\Omega) + 2\varepsilon + \max_{y\in Q} \max_{0\leq\tau\leq\delta} \|y-y_\tau\|. \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\sup_{x\in\Omega} \max_{0\leq\tau\leq\delta} \|x-x_\tau\| \leq 2\chi(\Omega) + 2\varepsilon + \max_{y\in Q} \max_{0\leq\tau\leq\delta} \|y-y_\tau\|$$

bulunur. $\delta \to 0$ alarak ve Q sonlu ailesinin eşsürekli olduğunu da hesaba katarak,

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{x\in\Omega} \max_{0\leq\tau\leq\delta} \|x-x_\tau\| \leq 2\chi(\Omega) + 2\varepsilon$$

elde edilir. ε sayısının keyfî seçiminden dolayı,

$$\frac{1}{2} \lim_{\delta\to 0} \sup_{x\in\Omega} \max_{0\leq\tau\leq\delta} \|x-x_\tau\| \leq \chi(\Omega)$$

eşitsizliği bulunur.

Eşitliği göstermek için gerekli olan diğer eşitsizliği ispatlamak için ise $x \in \Omega$

fonksiyonlarının $[a,b]$ aralığından tüm reel eksene $x(t) = x(a)$ for $t \leq a$, $x(t) = x(b)$ for $t \geq b$ olarak genişletildiği varsayılmalıdır. $h > 0$ olmak üzere R_h ve P_h operatörleri

$$(R_h x)(t) = \frac{1}{2}(\max\{x(s) : s \in [t-h, t+h]\} + \min\{x(s) : s \in [t-h, t+h]\})$$

ve

$$(P_h x)(t) = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} x(s)ds$$

şeklinde tanımlansın. $P_h R_h(\Omega)$ kümesi, $C[a,b]$ üzerinde göreli kompakttır. İddia ediyoruz ki, bu küme $q_{2h} = \sup_{x\in\Omega}\max_{0\leq\tau\leq\delta}\|x - x_\tau\|$ olmak üzere Ω kümesinin bir $(q_{2h}/2)$-ağıdır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}\|P_h R_h x - x\| &= \max_{a\leq t\leq b}\left|\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}(R_h x)(s)ds - \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}x(t)ds\right| \\ &\leq \frac{1}{2h}\max_{a\leq t\leq b}\int_{t-h}^{t+h}|(R_h x)(s) - x(t)|ds \qquad (3.1)\end{aligned}$$

sağlanır. Eğer $|t-s| \leq h$ ise

$$\min\{x(\tau) : \tau \in [s-h, s+h]\} \leq x(\tau) \leq \max\{x(\tau) : \tau \in [s-h, s+h]\}$$

bulunur. Sonuç olarak, $|(R_h x)(s) - x(t)| \leq \frac{1}{2h}\max_{0\leq\tau\leq 2h}\|x - x_\tau\|$ elde edilir ve bundan dolayı $|(R_h x)(s) - x(t)| \leq q_{2h}/2$ bulunur. Bu eşitsizlik ve (3.1) ifadesinden dolayı $\chi(\Omega) \leq q_{2h}/2$ eşitsizliğine ulaşılır. $h \to 0$ alarak,

$$\chi(\Omega) \leq \frac{1}{2h}\lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in\Omega}\max_{0\leq\tau\leq\delta}\|x - x_\tau\|$$

elde edilir ki ispat biter. □

J. Mallet-Paret ve R.D. Nussbaum 2011'de yayınladıkları makalelerinde ([11]) Hausdorff ve Kuratowski kompakt-olmama ölçülerinin birçok özelliğini sağlayan genel bir ölçü kavramı geliştirmişlerdir.

Tanım 3.1.8. $(X, \|.\|)$ *reel veya kompleks Banach uzayı olsun.* X *uzayının tüm sınırlı kümeleri ile* $[0,\infty)$ *aralığı arasında tanımlı* β *eşlemesi eğer daha önce* ψ *için ifade edilen (a)-(j) özelliklerini sağlıyorsa homojen kompakt-olmama ölçüsü ve (a)-(k) özelliklerini sağlıyorsa homojen, küme-toplamsal kompakt-olmama ölçüsü olarak adlandırılır.*

β ve γ, X üzerinde homojen kompakt-olmama ölçüleri olmak üzere, eğer her S sınırlı kümesi için $\gamma(S) \leq c\beta(S)$ koşulunu sağlayan bir $c > 0$ sayısı varsa β ölçüsü γ ölçüsünü *domine ediyor* denir. Eğer β ve γ homojen kompakt-olmama ölçüleri birbirlerini domine ediyorlarsa *eşdeğer*dirler.

Hausdorff kompakt-olmama ölçüsü χ homojen, küme-toplamsal kompakt-olmama ölçüsüdür.

Eğer $T : X \to X$ sınırlı bir operatör ve β, X üzerinde homojen kompakt-olmama ölçüsü ise

$$\beta(T) := \inf\{\lambda \geq 0 : \beta(TS) \leq \lambda\beta(S) \text{ her sınırlı } S \subset X \text{ kümesi için}\},$$

$$\beta^\sharp(T) := \limsup_{m\to\infty}\beta(T^m)^{1/m}$$

olarak tanımlanırlar. İlk satırda tanımlanan küme boş ise, $\beta(T) = \infty$ olarak alınabilir. $\beta(T) < \infty$ ise, her $m \geq 1$ ve $n \geq 1$ için

$$\beta^\sharp(T) = \lim_{m\to\infty} \beta(T^m)^{1/m} = \inf_{m\geq 1} \beta(T^m)^{1/m}$$

şeklinde ifade edilir. Buna ek olarak, eğer β ölçüsü α ölçüsüne eşdeğer ise, [14]'deki sonuçlar $\beta^\sharp(T) = r_{\text{ess}}(T)$ eşitliğini gerçekler.

Not 3.1.9. *T tasviri $X_{\mathbb{C}}$ uzayı üzerinde tanımlı kompleks lineer $T_{\mathbb{C}}$ tasvirine $T_{\mathbb{C}}(u + iv) = Tu + iTv$ ile genişletilir. Ayrıca β ölçüsünün $X_{\mathbb{C}}$ üzerinde tanımlı $\beta_{\mathbb{C}}$ homojen kompakt-olmama ölçüsüne genişletilmesi aşağıdaki gibidir. $x = u+iv$ için $Re(x) := u$ ve $S_{\mathbb{C}} \subset X_{\mathbb{C}}$ sınırlı kümesi için $Re(S_{\mathbb{C}}) := \{Re(x) : x \in S_{\mathbb{C}}\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda*

$$\beta_{\mathbb{C}}(S_{\mathbb{C}}) := \sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} \beta(Re(e^{i\theta} S_{\mathbb{C}})$$

şeklindedir. $\beta_{\mathbb{C}}$ ölçüsü $X_{\mathbb{C}}$ kompleks Banach uzayı üzerinde bir homojen kompakt-olmama ölçüsüdür; aynı zamanda $\beta_{\mathbb{C}}(T_{\mathbb{C}}^m) = \beta(T^m)$ ve $\beta_{\mathbb{C}}(T_{\mathbb{C}}^m B_{\mathbb{C}}) = \beta(T^m B)$ ifadeleri gerçeklenir. Buradan,

$$\beta_{\mathbb{C}}^\sharp(T_{\mathbb{C}}) = \beta^\sharp(T)$$

sağlanır.

Bu bölümün son kısmında [11]'de detaylı olarak çalışılan sonuçlara yer verilmektedir.

Önerme 3.1.10. $(X, \|.\|)$ *Banach uzayı ve* β*,* X *üzerinde homojen kompakt-olmama ölçüsü olsun.* $S \subset X$ *sınırlı kümesi için* $\gamma(S)$ *ölçüsü,*

$$\gamma(S) := \inf\{\max_{1\leq i\leq n} \beta(S_i) : 1 \leq i \leq n < \infty \text{ olmak üzere, } S_i \text{ kümeleri için } S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i\}$$

olarak tanımlanır. Buradan γ*, sınırlı her* $S \subset X$ *kümesi için* $\gamma(S) \leq \beta(S)$ *olmak üzere homojen, küme-toplamsal bir kompakt-olmama ölçüsüdür. Dahası, eğer* β *homojen, küme-toplamsal kompakt-olmama ölçüsü ise* $\gamma = \beta$ *sağlanır.*

Önerme 3.1.11. $(X, \|.\|)$ *Banach uzayı ve* β *homojen kompakt-olmama ölçüsü olsun. Bu durumda,* α *Kuratowski kompakt-olmama ölçüsü* β *ölçüsünü domine eder.*

Kanıt. $c := \beta(B)$ olsun. β ölçüsünün homojenliğinden dolayı, $\beta(B_r) = rc$ bulunur. Eğer $S \subset X$ sınırlı bir küme ve $d := \alpha(S)$ ise, verilen $\varepsilon > 0$ için $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ ve her $1 \leq i \leq n$ için $\text{Çap}(S_i) \leq d + \varepsilon$ olacak şekilde $S_1, ..., S_n$ kümelerinin sonlu bir ailesi vardır. Her i için $x_i \in S_i$ seçilsin ve $V := \{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ tanımlansın. Buradan $S \subset V + B_{d+\varepsilon}$ sağlanır ve (d) özelliği, (a) ve (c) özellikleri ile birlikte uygulandığında

$$\beta(S) \leq \beta(V) + \beta(B_{d+\varepsilon}) = \beta(B_{d+\varepsilon}) = (d + \varepsilon)c$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ sayısı keyfî olduğundan, $\beta(S) \leq cd = c\alpha(S)$ sonucuna ulaşılır. □

Lemma 3.1.12. $i = 1, 2$ *için* $(X_i, \|.\|_i)$ *Banach uzayı olsun.* α_i *ile* X_i *üzerinde tanımlı Kuratowski kompakt-olmama ölçüsü gösterilmek üzere,* $T : X_1 \to X_2$ *sınırlı lineer operatör olsun.* T *operatörünün Kuratowski kompakt-olmama ölçüsü*

$$\alpha(T) := \inf\{\lambda \geq 0 : \text{her sınırlı } S \subset X_1 \text{ kümesi için } \alpha_2(TS) \leq \lambda\alpha_1(T)\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $\alpha(T) \leq \|T\|$ *sağlanır. Dahası eğer* β_i *her* $i = 1, 2$ *için* α_i *ölçüsüne eşdeğer olan* X_i *üzerinde homojen kompakt-olmama ölçüsü ise* T *operatöründen bağımsız olacak şekilde bir* c *sabiti bulunur. Bu durumda her* $S \subset X_1$ *sınırlı kümesi için*

$$\beta_2(TS) \leq c\alpha(T)\beta_1(S) \leq c\|T\|\beta_1(S)$$

sağlanır.

Lemma 3.1.13. *$i = 1, 2$ için $(X_i, \|.\|_i)$ Banach uzayı ve $T : X_1 \to X_2$ bire-bir, sürekli bir lineer tasvir olsun. Eğer β_2, X_2 üzerinde homojen kompakt-olmama ölçüsü ise, $S \subset X_1$ sınırlı kümesi için*

$$\tilde{\beta}_2(S) := \beta_2(TS)$$

tanımlanır. Buradan $\tilde{\beta}_2$, X_1 üzerinde homojen kompakt-olmama ölçüsüdür ve β_2 küme-toplamsal ise $\tilde{\beta}_2$ ölçüsü de küme-toplamsaldır. X_i üzerinde tanımlı Kuratowski kompakt-olmama ölçüsü α_i ile gösterilmek üzere, eğer β_2 ile α_2 eşdeğer ise $\tilde{\beta}_2$ ölçüsü ile α_1 eşdeğerdir.

Kanıt. $\tilde{\beta}_2$, X_1 üzerinde homojen (küme-toplamsal) kompakt-olmama ölçüsü olduğundan, $T : X_1 \to X_2$ lineer bir homomorfizmdir.
β_2 ile α_2 eşdeğer ise, $\tilde{\beta}_2$ ölçüsünün α_1 ölçüsüne eşdeğer olduğunu görmek için $\tilde{\beta}_2$ ile $\tilde{\beta}_2$ ile $\tilde{\alpha}_2$'nin eşdeğer olduğu görülmelidir. Burada $\tilde{\alpha}_2(S) := \alpha_2(TS)$ olarak tanımlansın. O halde, α_1 ölçüsüne eşdeğer olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Ancak $S \subset X_1$ sınırlı bir küme ise, Lemma 3.1.12'den $\alpha_2(TS) \leq \|T\|\alpha_1(S)$ ve $\alpha_1(S) = \alpha_1(T^{-1}TS) \leq \|T^{-1}\|\alpha_2(TS)$ elde edilir. Bu durumda $\tilde{\alpha}_2$ ve α_1 eşdeğerdirler. □

Lemma 3.1.14. *$i = 1, 2$ için $(X_i, \|.\|_i)$ Banach uzayı olsun. α_i ile X_i üzerindeki Kuratowski kompakt-olmama ölçüsü gösterilsin ve $T : X_1 \to X_2$ bire-bir, sürekli bir tasvir olsun. Varsayalım ki X_2 üzerinde α_2 ölçüsüne eşdeğer bir β_2 homojen kompakt-olmama ölçüsü olsun. Bu durumda, X_2 üzerinde α_2'ye eşdeğer γ_2 homojen, küme-toplamsal kompakt-olmama ölçüsü vardır. Dahası, X_1 üzerinde α_1'ye eşdeğer γ_1 homojen, küme-toplamsal kompakt-olmama ölçüsü vardır.*

Kanıt. Önerme 3.1.11'den α_2 ölçüsü β_2'yi domine eder. O halde $\alpha_2(S_n) > 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_2(S_n)}{\alpha_2(S_n)} = 0$ koşullarını sağlayan $S_n \subset X_2$ sınırlı kümelerinin bir dizisi bulunur. γ_2 homojen, küme-toplamsal kompakt-olmama ölçüsü olmak üzere Önerme 3.1.10'daki gibi β_2 ölçüsünden türetilir. Bu durumda, her $S \subset X_2$ sınırlı kümesi için $\gamma_2(S) \leq \beta_2(S)$ sağlanır, ve böylece $\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_2(S_n)}{\alpha_2(S_n)} = 0$ elde edilir. $\tilde{\gamma}_2$ ve $\tilde{\alpha}_2$ Lemma 3.1.13'deki gibi tanımlansın, o halde $U \subset X_1$ sınırlı kümesi için

$\tilde{\gamma}_2(U) := \gamma_2(TU)$ ve $\tilde{\alpha}_2(U) := \alpha_2(TU)$ sağlanır. Lemma 3.1.13 kullanılırsa $\tilde{\gamma}_2$ ve $\tilde{\alpha}_2$ homojen, küme-toplamsal kompakt-olmama ölçüleridir ve $\tilde{\alpha}_2$ ile $\tilde{\alpha}_1$ eşdeğerdir. Dolayısıyla, her U sınırlı kümesi için $\tilde{\alpha}_2(U) \leq c\alpha_1(U)$ olacak şekilde bir $c > 0$ vardır. $U_n := U^{-1}S_n$ şeklinde tanımlansın, buradan hareketle

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\tilde{\gamma}_2(U_n)}{\alpha_1(U_n)}\right) \leq c\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\tilde{\gamma}_2(U_n)}{\tilde{\alpha}_2(U_n)}\right) = c\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\gamma_2(U_n)}{\alpha_2(U_n)}\right) = 0$$

elde edilir ve böylece $\tilde{\gamma}_2$ ölçüsü ile α_1 ölçüsünün eşdeğer olduğu gösterilir. Burada eğer $\gamma_1 := \tilde{\gamma}_2$ tanımlanacak olursa ispat biter. □

Eşdeğer olmayan kompakt-olmama ölçülerinin bir sınıfının kurulduğu bir sonraki teoremde, "X üzerinde tanımlı Kuratowski kompakt-olmama ölçüsüne eşdeğer olmayan bir homojen (küme-toplamsal) kompakt-olmama β ölçüsünün var olduğu bir $(X, \|.\|)$ Banach uzayı var mıdır?" sorusu olumlu olarak cevaplanmaktadır ([11]).

Teorem 3.1.15. *$1 \leq p \leq \infty$ olsun ve Y ile $\ell^p(\mathbb{N})$ Banach uzayı göz önüne alınsın. Y üzerinde tanımlı Kuratowski kompakt-olmama ölçüsü α_Y ile gösterilmek üzere, Y üzerinde bu ölçüye eşdeğer olmayan bir homojen, küme-toplamsal γ_Y kompakt-olmama ölçüsü vardır.*

U ve V topolojik uzayları arasında tanımlı f tasviri, her $K \subset V$ kompakt kümesi için $f^{-1}(K)$ kompakt ise f tasvirine bir *öz* fonksiyon denir.

Lemma 3.1.16. *X ve Y (reel veya kompleks)Banach uzayları ve $T : X \to Y$ sınırlı lineer bir tasvir olsun. Bu durumda kapalı sınırlı her $S \subset X$ kümesi için $T|_S : S \to Y$ tasvirinin öz olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{N}(T)$ uzayının boyutunun sonlu ve $\mathcal{R}(T)$ görüntü uzayının kapalı olmasıdır.*

Nussbaum 1970'de yayınlanan makalesinde ([14]), esaslı spektral yarıçap için, Gelfand'ın spektral yarıçap için verdiği formüle benzer bir formülün ispatını vermiştir.

Teorem 3.1.17. *[13] $T \in \mathcal{L}(X)$ olmak üzere,*

$$\lim_{n\to\infty} \chi(T^n)^{1/n} = \inf\{\chi(T^n)^{1/n} : n \in \mathbb{N}\} = r_{ess}(T)$$

sağlanır.

Kanıt. Her $T, S \in \mathcal{L}(X)$ için, Hausdorff kompakt olmama ölçüsü $\chi(ST) \leq \chi(S)\chi(T)$ özelliğini sağladığından, Gelfand'ın spektral yarıçap formülünün ispatında olduğu gibi

$$n \to \infty \text{ iken } \chi(T^n)^{1/n} \to r = \inf\{\chi(T^n)^{1/n} : n \in \mathbb{N}\}$$

olarak alalım. $\delta > r$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ sayıları $|\lambda| \geq \delta$ olacak şekilde seçilsin. Eğer $T_1 = \lambda^{-1}T$ ise then $n \in \mathbb{N}$ için $\chi(T_1^n) < 1$ bulunur. O halde [13, Önerme 4.3.12] kullanılırsa

$$I - T_1 = \lambda^{-1}(\lambda I - T)$$

operatörünün Fredholm olduğu elde edilir. Dolayısıyla $|\lambda| \geq \delta$ olan her λ ve her $\delta > r$ sayıları için $\lambda \notin \sigma_{\text{ess}}(T)$ sağlanır. Bu da bize $r \geq r_{\text{ess}}(T)$ olduğunu gösterir. Şimdi $r = r_{\text{ess}}(T)$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek için çelişki yoluyla $\delta > r > r_{\text{ess}}(T)$ alalım ve

$$\Omega = \{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| \geq \delta\}$$

olsun. $|\lambda| > r_{\text{ess}}(T)$ olan her $\lambda \in \sigma(T)$ sayısının izole nokta ve T operatörünün bir özdeğeri olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak, Ω kümesi sonlu sayıda $\lambda_1, ..., \lambda_n$ elemanlarından oluşur ve U ile $P : X \to U$ izdüşümü ile birlikte spektral bir kümedir. $Q = I - P$ ve $V = Q(X)$ olarak tanımlansın. Bu durumda, göz önüne alınan kümelerle birlikte Ω spektral bir küme olduğundan,

$$\sigma(T_U) = \Omega \text{ ve } \sigma(T_V) = \sigma(T) \setminus \Omega$$

yazılabilir. T_U operatörünün esaslı spektrumu boş olduğundan, boy$(U) < \infty$ sonucuna ulaşılır. Dahası,

$$\sigma(T_V) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \delta\}$$

elde edilir. O halde buradan $\delta > r(T_V)$ bulunur. Diğer taraftan,

$$TQ = T - TP \text{ ve } TP \in \mathcal{K}(X)$$

olarak yazılabileceğinden, her $n \in \mathbb{N}$ sayısı için

$$(TQ)^n = T^n + K_n$$

koşulunu sağlayan $K_n \in \mathcal{K}(X)$ vardır. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için $\chi((TQ)^n) = \chi(T^n) \leq r^n > \delta^n$ elde edilir. Ancak bu mümkün değildir. □

Nussbaum Hausdorff kompakt-olmama ölçüsü ile ifade edebildiği bu formülün, Kuratowski kompakt-olmama ölçüsüne eşdeğer olan herhangi bir homojen kompakt-olmama ölçüsü için de doğru olduğunu ispatlamıştır.

Teorem 3.1.18. *([11])X kompleks bir Banach uzayı olmak üzere, $T : X \to X$ lineer tasvirini göz önüne alalım ve β, X üzerinde herhangi bir homojen kompakt-olmama ölçüsü olsun. Bu durumda, $\beta^*(T) := \limsup_{m\to\infty}\beta(T^m B)^{1/m} = \inf\{\lambda > 0 > \lim_{m\to\infty} \lambda^{-m}\beta(T^m B) = 0\}$ olmak üzere*

$$\beta^*(T) = r_{ess}(T)$$

sağlanır. Eğer X reel Banach uzayı ise,

$$\beta^*(T) = r_{ess}(T_{\mathbb{C}}), \qquad (\star)$$

sağlanır.

Kanıt. İlk olarak varsayalım ki X, kompleks bir Banach uzayı olsun. $r > 0$ ve $|\lambda| > \beta^*(T)$ alalım. $T_\lambda := \lambda^{-1}T$ olsun. O halde β^*'ın tanımından dolayı,

$$\lim_{m\to\infty} \beta(T_\lambda^m B_r(0)) = \lim_{m\to\infty} r\beta(T_{|\lambda|}^m B_1(0)) = 0$$

ifadesi yazılabilir. $Q_r := \overline{B_r}$ olsun. $(I - T_\lambda)|_{Q_r}$ tasvirinin öz olduğu iddia edilir ve eşdeğer olarak $(\lambda I - T)|_{Q_r}$ özdür. $r > 0$ sayısı keyfî seçilmek üzere, kapalı, sınırlı her $S \subset X$ kümesi için $(\lambda I - T)|_S$ öz olur. İddianın kanıtlanabilmesi için, $K \subset X$ kompakt kümesi alınsın ve $V := \{x \in Q_r : (I - L_\lambda)x \in K\}$ olsun. V kümesi kapalıdır, çünkü $I - T_\lambda$ tasviri süreklidir. Eğer $x \in V$ ise, $y \in K$ için $x = T_\lambda x + y$ bulunur ve buradan her $x = T_\lambda x + y$ için $x = T_\lambda^m x + \sum_{i=0}^{m-1} T_\lambda^i y$ yazılır. O halde, $K_m := (\sum_{i=0}^{m-1} T_\lambda^i)K$ kompakt olmak üzere,

$$V \subset T_\lambda^m V + \left(\sum_{i=0}^{m-1} T_\lambda^{m-1} T_\lambda^i\right) K \subset T_\lambda^m Q_r + K_m$$

gerçeklenir. Bu durumda, yukarıdaki ifadeden,

$$\beta(V) \le \beta(T_\lambda^m Q_r) + \beta(K_m) = \beta(T_\lambda^m Q_r) \le \beta(\overline{T_\lambda^m B_r(0)}) = \beta(T_\lambda^m B_r(0))$$

elde edilir ve $\beta(V) = 0$ sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla, V kümesi kompakttır. Lemma 3.1.16 kullanılarak $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ uzayının sonlu boyutlu ve $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ kapalı olduğu elde edilir. O halde, $\lambda I - T$ indisi $i(\lambda I - T) := \dim(\mathcal{N}(\lambda I - T)) -$

codim$(\mathcal{R}(\lambda I - T)) < \infty$ olan yarı Fredholm bir operatördür. Dahası, $i(\lambda I - T)$ değeri yarı Fredholm operatörlerin indisinin sürekliliğinden dolayı λ sayısından bağımsızdır. $|\lambda| > \beta^*(T)$ koşulunu sağlayan tüm λ sayıları için $\lambda I - T$ operatörünün indisi 0 dır. Esaslı spektrum $\sigma_{\text{ess}}(T)$ için Wolf'un tanımı kullanılacak olursa, $r_{\text{ess}}(T) \leq \beta^*(T)$ eşitsizliğine ulaşılır. Dolayısıyla, $r_{\text{ess}}(T) = \beta^*(T)$ elde edilir.

Eğer X reel Banach uzayı ise, $(\star)$ ifadesinden $\beta^*_{\mathbb{C}}(T_{\mathbb{C}}) = \beta^*(T)$ bulunur. $\square$

3.2 Banach Örgüleri Üzerinde Yarı Kompakt-Olmama Ölçüsü

Bu kısımda yarı kompakt-olmama ölçüsü olarak adlandırılan ve Banach örgüleri arasında tanımlı sıra sınırlı T operatörleri için, $\rho(T)$ ile gösterilen başka bir kompakt-olmama ölçüsünden bahsedilecektir. Aslında $\rho(T)$, $\chi(T)$ kompakt-olmama ölçüsü ve esaslı spektral yarıçap $r_{\text{ess}}(T)$ ile ilgili çalışmalarda kullanılan faydalı bir araçtır. Burada göz önüne alınan E Banach örgülerinin kompleks olduğu varsayılacaktır; yani, ReE reel Banach örgüsünün $E = \text{Re}E \oplus i\text{Re}E$ şeklinde kompleksleştirilmesi olarak düşünülebilir.

Verilen bir $f \in E$ vektörü için esas ideal $E_f = \{z \in E : |x| \leq n|f|, \exists n \in N\}$ Yosida Gösterilim Teoremi'nden [10, Teorem 45.4], K kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere $C(K)$ uzayına izomorfiktir öyle ki $|f|$ elemanı uzayın 1 fonksiyonuna karşılık gelir. $C(K)$ uzayındaki bir f çarpanına E_f üzerinde karşılık gelen operatör σ_f ile gösterilmektedir. Bu durumda, her $g \in E_f$ için $\sigma_f(|f|) = f$ ve $|\sigma_f(g)| = |g|$ şeklindedir. $Z(E_f)$, E_f esas idealinin merkezi olmak üzere $\sigma_f \in Z(E_f)$ ve $|\sigma_f| = I$ sağlanır($Z(E_f)$'in tanımından dolayı [23, Bölüm 20]). Genel olarak, σ_f tüm E uzayına genişletilemez. Ancak E Dedekind tam ise σ_f, $Z(E)$ merkezinin (mutlak değeri I fonksiyonuna eşit olan) bir elemanına genişletilebilir.

Bu bölümde pozitif operatörlerin kompakt-olmama ölçüsüne çalışırken kullanışlı olabilecek Banach örgüleri üzerindeki sıra sınırlı operatörlerden bahsedilecektir.

Tanım 3.2.1. *([23, Bölüm 122]) E kompleks Banach örgüsü olsun. Bir $D \subset E$ alt kümesine, her $\varepsilon > 0$ ve $f \in D$ için $\|(|f| - u)^+\| \leq \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir*

$0 \leq u \in E$ bulunabiliyorsa hemen hemen sıra sınırlı denir.

Her $f \in D$ için $\|(|f| - u)^+\| \leq \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşulun $D \subseteq [-u, u] + \varepsilon B_E$ olması gerektiği gözlemlenebilir. Gerçekten, eğer $D \subseteq [-u, u] + \varepsilon B_E$ ve $f \in D$ ise f elemanı, $|f_1| \leq u$ ve $\|f_2\| \leq \varepsilon$ olmak üzere $f = f_1 + f_2$ şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla $\|(|f| - u)^+\| \leq \|(|f_1| + |f_2| - u)^+\| \leq \|(|f_1| - u)^+\| + \|f_2\| = \|f_2\| \leq \varepsilon$ bulunur. Tersine, her $f \in D$ için $\|(|f| - u)^+\| \leq \varepsilon$ olduğunu varsayalım ve $f \in D$ alalım. $\sigma_f \in Z(E_f)$ fonksiyonu, $|\sigma_f| = I$ ve $\sigma_f(|f|) = f$ olacak şekilde seçilsin. Buradan $f = \sigma_f(|f|) = \sigma_f(|f| \wedge u) + \sigma_f((|f| - u)^+)$ yazılır. $|\sigma_f(|f| \wedge u)| \leq |f| \wedge u \leq u$ ifadesi ve Önerme 2.2.3 kullanılarak $\sigma_f(|f| \wedge u) \in [-u, u]$, ve $\|\sigma_f(|f| - u)^+\| \leq \|(|f| - u)^+\| \leq \varepsilon$ elde edilir ki buradan da $\sigma_f(|f| - u)^+ \in \varepsilon B_E$ sonucuna ulaşılır.

Norm sınırlı bir $D \subseteq E$ alt kümesi için, yarı kompakt-olmama ölçüsü

$$\rho(D) = \inf\{\delta > 0 : \exists 0 \leq u \in E \ni \forall f \in D \text{ için } \|(|f| - u)^+\| \leq \delta\}$$

şeklinde tanımlanır.

Üstteki tanımdan gözlemleneceği gibi

$$\rho(D) = \inf\{\delta > 0 : \exists 0 \leq u \in E \ni D \subseteq [-u, u] + \delta B_E\}$$

olarak da ifade edilebilir.

ρ ölçüsünün birtakım temel özelliklerini sıralayacağız. D, D_1, D_2 norm sınırlı kümeler olmak üzere,

(i) $\rho(D) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul D kümesinin hemen hemen sıra sınırlı olmasıdır;

(ii) her $\lambda \in \mathbb{C}$ için, $\rho(D_1 + D_2) \leq \rho(D_1) + \rho(D_2)$ ve $\rho(\lambda D) = |\lambda| \rho(D)$ sağlanır;

(iii) eğer $D_1 \subseteq D_2$ ise, $\rho(D_1) \leq \rho(D_2)$;

(iv) $\rho(\overline{D}) = \rho(D)$, burada $\overline{D}$ ile D kümesinin norm kapanışı gösterilir.

Not 3.2.2. . *E Banach örgüsünün birim yuvarı $B_E = \{f \in E : \|f\| \leq 1\}$ şeklinde tanımlansın. $\rho(B_E) < 1$ olması için gerek ve yeter koşulun bir $0 \leq u \in E$ sıra birimin bulunması ve E üzerindeki normun $\|.\|_u$ sıra birim normuna eşdeğer* *olması gerektiği gösterilecektir. Gerçekten, $\rho(B_E) < \delta < 1$ olduğunu varsayalım. O halde $B_E \subseteq [-u, u] + \delta B_E$ olacak şekilde bir $0 \le u \in E$ vardır. Buradan $B_E \subseteq [-u, u] + \delta[-u, u] + ... + \delta^n[-u, u] + \delta^{n+1} B_E$ yazılabilir ve dolayısıyla*

$$B_E \subseteq (1-\delta)^{-1}[-u, u] + \delta^{n+1} B_E$$

bulunur. $n \to \infty$ iken, $B_E \subseteq (1-\delta)^{-1}[-u, u]$ elde ederiz ve istenen sonuç sağlanır. Böylelikle $\rho(B_E) = 0$ veya 1 bulunur.

$D \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(f_j, \delta)$ olduğundan dolayı, her $f \in D$ için $\|(|f| - u)^+\| \le \delta$ gerçeklenir. Burada $u = \sup(|f_1|, ..., |f_n|)$ olarak alındığında, $\rho(D) \le \chi(D)$ elde edilir. Bir sonraki önermede E Banach örgüsünün belli bir sınıf D alt kümeleri için $\rho(D) = \chi(D)$ eşitliğinin sağlandığı gösterilecektir [15].

Bir Riesz uzayı üzerinde tanımlı p yarı normuna, $|x| \le |y|$ iken $p(x) \le p(y)$ eşitsizliğini gerçeklemesi halinde *örgü* (veya *Riesz*) *yarı norm*u adı verilir. Her $0 \le \phi \in E^*$ için E üzerindeki bir p_ϕ Riesz yarı normu $p_\phi(f) = \langle |f|, \phi \rangle$ şeklinde tanımlanır. Üstelik, $f \in E$ ve $\varepsilon > 0$ için $B_\phi(f, \varepsilon) = \{g \in E : p_\phi(f - g) \le \varepsilon\}$ ile gösterilir. $D \subseteq E$ kümesi, her $0 \le \phi \in E^*$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$D \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_\phi(f_j, \varepsilon)$$

olacak şekilde $f_1, ..., f_n \in E$ bulunabiliyorsa, *PL-kompakt* olarak adlandırılır([6, Tanım 4.11]). Ayrıca, D kümesinin *PL*-kompakt olması için gerek ve yeter koşul her $0 \le \phi \in E^*$ için D kümesinin p_ϕ-önkompakt olmasıdır([23, Tanım 124.7]).

Önerme 3.2.3. *E sıra sürekli norma sahip kompleks bir Banach örgüsü ve $D \subset E$ kümesi PL-kompakt olsun. Bu takdirde $\rho(D) = \chi(D)$ gerçeklenir.*

Kanıt. E Dedekind tam olduğundan, her $f \in E$ için $\sigma_f(|f|) = f$ ve $|\sigma_f| = I$ koşullarını sağlayan bir tek $\sigma_f \in Z(E)$ bulunur. Her f, $g \in E$ ve $0 \le u \in E$ için,

$$|\sigma_f(|f| \wedge u) - \sigma_g(|g| \wedge u)| \le |f - g|$$

yazabiliriz. Bu eşitsizliği ispatlamak için, $|f| + |g|$ tarafından üretilen E üzerindeki esas ideali Yosida Gösterilim Teoremi'ni kullanarak kompakt bir Hausdorff uzayı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı olarak göz önüne alabiliriz. O halde, yukarıdaki eşitsizlik $z, w \in \mathbb{C}$ ve $0 \le a \in \mathbb{R}$ için

$$|(\mathrm{sgn} z) \min(|z|, a) - (\mathrm{sgn} w) \min(|w|, a)| \le |z - w|$$

eşitsizliğinden elde edilir. Burada $z \neq 0$ ve $\mathrm{sgn}(0) = 1$ olmak üzere $\mathrm{sgn} z = z|z|^{-1}$ olarak tanımlanmaktadır.

Önermenin ispatı için, $\delta > \rho(D)$ alalım. O halde her $f \in D$ için $\|(|f| - u)^+\| \leq \delta$ olacak şekilde $0 \leq u \in E$ vardır. $\varepsilon > 0$ olsun. E sıra sürekli norma sahip ise, her $\psi \in B_{E^*}$ için $\left\langle u, (|\ \psi| - \phi)^+ \right\rangle \leq \varepsilon$ koşulunu sağlayan $0 \leq \phi \in E^*$ bulunabilir. D kümesi *PL*-kompakt olduğundan, $D \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_\phi(f_j, \varepsilon)$ olacak şekilde $f_1, ..., f_n \in E$ elemanları vardır. $g_j = \sigma_{f_j}(|f_j| \wedge u)$ olsun. $f \in D$ ve f_j elemanları $\langle |f - f_j|, \phi \rangle \leq \varepsilon$ olacak şekilde seçilsin. $0 \leq \psi \in B_{E^*}$ için,

$$\begin{aligned}
\langle |f - g_j|, \psi \rangle &\leq \left\langle |\sigma_f(|f| - u)^+|, \psi \right\rangle + \langle |\sigma_f(|f| \wedge u) - g_j|, \phi \rangle \\
&\leq \|(|f| - u)^+\| + \langle |\sigma_f(|f| \wedge u) - g_j|, \phi \rangle \\
&\leq \delta + \langle |\sigma_f(|f| \wedge u) - g_j|, \psi \rangle .
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Üstelik, yukarıdaki eşitsizlik kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\langle |\sigma_f(|f| \wedge u) - g_j, \psi \rangle &\leq \langle |\sigma_f(|f| \wedge u) - g_j|, \psi \wedge \phi \rangle + \left\langle |\sigma_f(|f| \wedge u) - g_j|, (|\psi| - \phi)^+ \right\rangle \\
&\leq \langle |f - f_j|, \phi \rangle + 2 \left\langle u, (|\psi| - \phi)^+ \right\rangle \leq 3\varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla her $0 \leq \psi \in B_{E^*}$ için, $\langle |f - g_j|, \psi \rangle \leq \delta + 3\varepsilon$ elde edilir ve buradan $\|f - g_j\| \leq \delta + 3\varepsilon$ bulunur. O halde

$$D \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(g_j, \delta + 3\varepsilon)$$

sağlanır. Bu içerme her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > \rho(D)$ için gerçeklendiğinden, $\chi(D) \leq \rho(D)$ sonucuna ulaşılır. Öncesinde gözlemlendiği gibi $\rho(D) \leq \chi(D)$ eşitsizliği her zaman sağlanır ve diğer yönden eşitsizliğin ispatıyla istenen gösterilmiş olur. $\square$

E ve F kompleks Banach örgüleri olmak üzere, bu iki uzay arasında tanımlı sıra sınırlı operatörlerin uzayı $\mathcal{L}_b(E, F)$ ile gösterilecektir. Bu uzay, tüm norm sınırlı operatör uzayı $\mathcal{L}(E, F)$'nin lineer bir alt uzayıdır. Bir $T \in \mathcal{L}_b(E, F)$ operatörü norm sınırlı kümeleri hemen hemen sıra sınırlı kümelere gönderiyorsa *yarı kompakt* olarak adlandırılır.

Tanım 3.2.4. *$T \in \mathcal{L}_b(E, F)$ operatörü için yarı kompakt-olmama ölçüsü,*

$$\rho(T) = \inf\{k \geq 0 : \textit{her } D \subseteq E \textit{ norm sınırlı kümesi için } \rho(TD) \leq k\rho(D)\}$$

şeklinde tanımlanır.

$T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ operatörü için $\rho(T)$ ölçüsünün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

(i) her norm sınırlı $D \subseteq E$ kümesi için, $\rho(TD) \leq \rho(T)\rho(D)$;

(ii) $\rho(T) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul T operatörünün yarı kompakt olmasıdır;

(iii) $\rho(T) \leq \|T\|$;

(iv) ρ, $\mathcal{L}_b(E,F)$ üzerinde bir yarı normdur;

(v) $\rho(T) = \rho(TB_E)$;

(vi) eğer $0 \leq S \leq T$ ise, $\rho(S) \leq \rho(T)$ sağlanır.

(v) ve (vi) özellikleri ispatlanacaktır. $\rho(TB_E) \leq \rho(T)\rho(B_E)$ olduğundan dolayı, $\rho(TB_E) \leq \rho(T)$ elde edilir. Şimdi $D \subseteq E$ norm sınırlı kümesini göz önüne alalım ve $\delta > \rho(D)$ olsun. Bu durumda, $D \subseteq [-u,u] + \delta B$ olacak şekilde bir $0 \leq u \in E$ vardır. Buradan $TD \subseteq T[-u,u] + \delta TB_E$ yazılabilir. Ancak T operatörü sıra sınırlı olduğundan $\rho(T[-u,u]) = 0$ dır ve $\rho(TD) < \delta\rho(TB_E)$ elde edilir. Bu durum her $\delta > \rho(D)$ için sağlandığından, $\rho(TD) \leq \rho(TB_E)\rho(D)$ bulunur ki $\rho(T) \leq \rho(TB_E)$ eşitsizliğine ulaşılır. (vi) özelliğinin ispatı için, $0 \leq S \leq T : E \to F$ olduğunu varsayalım ve $\delta > \rho(T)$ alalım. O halde, her $f \in B_E$ için $\|(T|f| - w)^+\| \leq \delta$ olacak şekilde $0 \leq w \in F$ vardır. Dolayısıyla her $f \in B_E$ için $\|(|Sf| - w)^+\| \leq \|(T|f| - w)^+$ elde edilir. Buradan $\rho(S) = \rho(SB_E) \leq \delta$ bulunur ve $\rho(S) \leq \rho(T)$ eşitsizliği elde edilir.
$T \in \mathcal{L}(E,F)$ operatörünün Hausdorff kompakt-olmama ölçüsü,

$$\chi(T) = \inf\{k \geq 0 : \text{her} D \subseteq E \text{ norm sınırlı kümesi için } \chi(TD) \leq k\chi(D)\}$$

şeklinde ifade edilir. $\chi(T) = \chi(TB_E)$ olduğundan dolayı, her $T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ operatörü için $\rho(T) \leq \chi(T)$ eşitsizliği sağlanır. Daha sonra ise $\rho(T) = \chi(T)$ eşitliğinin hangi operatör sınıfları için sağlandığı gösterilecektir.

E ve F Banach örgüleri olmak üzere, $T : E \to F$ operatörü sıra sınırlı kümeleri göreli kompakt kümelere gönderiyorsa (eşdeğer olarak da, T hemen hemen sıra sınırlı kümeleri göreli kompakt kümelere gönderiyorsa) *AM-kompakt* olarak adlandırılır.

Teorem 3.2.5. *E ve F kompleks Banach örgüleri öyle ki E^* ve F sıra sürekli norma sahip olsunlar. Eğer $T \in \mathcal{L}_b(E, F)$ AM-kompakt operatör ise, $\chi(T) = \rho(T)$ eşitliği sağlanır.*

Kanıt. $\phi \in F^*$ alalım ve $\psi = |T|^*\phi$ olsun. $\varepsilon > 0$ seçilsin. E^* uzayı sıra sürekli norma sahip olduğundan, her $f \in B_E$ için $\langle(|f| - u)^+\rangle \leq \varepsilon$ koşulunu sağlayacak biçimde $0 \leq u \in E$ vardır, veya, eşdeğer olarak, $B_E \subseteq [-u, u] + \varepsilon B_\psi$, $B_\psi = \{f \in E : \langle |f|, \psi\rangle \leq \varepsilon\}$ ifadeleri yazılabilir. O halde, $TB_\psi \subseteq B_\phi$ içermesinden dolayı $TB_E \subseteq T[-u, u] + \varepsilon B_\phi$ elde edilir. T operatörü AM-kompakt olduğundan, $T([-u, u])$ kümesi göreli kompakttır, ve dolayısıyla TB_E yarıçapı 2ε olan sonlu ϕ-yuvarıyla örtülür. Buradan da TB_E kümesinin *PL*-kompakt olduğu bulunur. Önerme 3.2.3 kullanılarak, $\chi(TB_E) = \rho(TB_E)$ eşitliğine ulaşılır. Dolayısıyla $\chi(T) = \chi(TB_E) = \rho(TB_E) = \rho(T)$ sonucu elde edilir. □

ρ ölçüsünün özellikleriyle yukarıdaki teorem birleştirildiği takdirde, χ ölçüsünün monotonluğu ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.6. *E ve F kompleks Banach örgüleri öyle ki E^* ve F sıra sürekli norma sahiplerdir. Eğer $0 \leq S \leq T$ koşulunu sağlayan $S, T \in \mathcal{L}_b(E, F)$ operatörlerinden S operatörü AM-kompakt ise, $\chi(S) \leq \chi(T)$ sağlanır.*

Kanıt. S operatörü AM-kompakt olduğundan, üstteki teoremden $\chi(S) = \rho(S)$ elde edilir. Üstelik, daha önce gözlemlendiği üzere $0 \leq S \leq T$ olması $\rho(S) \leq \rho(T)$ eşitsizliğini gerçekler. $\rho(T) \leq \chi(T)$ eşitsizliği her zaman doğru olduğundan, bu iki eşitsizliğin birleştirilmesi sonucu $\chi(S) \leq \chi(T)$ bulunur. □

Yukarıdaki sonuçta S operatörünün AM-kompaktlığı, T operatörünün AM-kompaktlığı ile değiştirildiği takdirde $\rho(S) \leq \rho(T)$ eşitsizliği yine sağlanır. Gerçekten, F örgüsü sıra sürekli norma sahip olduğundan T operatörünün AM-kompaktlığı, S operatörünün AM-kompaktlığını getirir[23, Teorem 123.4].

Buradan itibaren, AM-kompakt operatörler ve ayrıklığı koruyan operatörlerin kompakt- ve yarı kompakt-olmama ölçüleriyle ile ilgili sonuçlar verilecektir. Sonuç

3.2.6'dan, E ve E^* sıra sürekli norma sahip olmak üzere E Banach örgüsü üzerinde tanımlı $0 \leq S \leq T \in \mathcal{L}(E)$ operatörleri için, S operatörü AM-kompakt ise $r_{\text{ess}}(S) \leq r_{\text{ess}}(T)$ gerçeklenir. Bu sonucun E ve E^* üzerindeki normlar herhangi bir koşula bağlı olmaksızın gerçeklendiği gösterilecektir.

Lemma 3.2.7. *E, F ve G kompleks Banach örgüleri olsun. $S_1 \in \mathcal{L}_b(E, F)$, $S_2 \in \mathcal{L}_b(F, G)$ ve S_2 operatörünün AM-kompakt olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\chi(S_2 S_1) \leq \rho(S_1)\chi(S_2)$ sağlanır.*

Kanıt. $\delta > \rho(S_1)$ için $S_1 B_E \subseteq [-u, u] + \delta B_F$ koşulunu sağlayan bir $0 \leq u \in F$ vardır ve böylece $S_2 S_1 B_E \subseteq S_2([-u, u]) + \delta S_2 B_F$ yazılabilir. S operatörü AM-kompakt oluğundan dolayı $\chi(S_2[-u, u]) = 0$ bulunur, dolayısıyla $\chi(S_2 S_1) = \chi(S_2 S_1 B_E) \leq \delta\chi(S_2 B_F) = \delta\chi(S_2)$ elde edilir. O halde her $\delta > \rho(S_1)$ için, $\chi(S_2 S_1) \leq \rho(S_1)\chi(S_2)$ sağlanır. □

Teorem 3.2.8. *$S, T \in \mathcal{L}(E)$ operatörleri $0 \leq S \leq T$ koşulunu sağlasın ve S operatörü AM-kompakt olsun. Bu durumda, $r_{ess}(S) \leq r_{ess}(T)$ gerçeklenir.*

Kanıt. Üstteki lemmadan $\chi(S^2) \leq \rho(S)\chi(S)$ yazılabilir, ve daha önceden gözlemlendiği gibi $0 \leq S \leq T$ olması $\rho(S) \leq \rho(T)$ eşitsizliğini gerçekler. Buradan

$$\chi(S^2) \leq \rho(S)\chi(S) \leq \rho(T)\chi(S) \leq \chi(T)\chi(S)$$

elde edilir.
Bu eşitsizliği $0 \leq S^n \leq T^n$ için uygularsak,

$$\chi(S^{2n})^{\frac{1}{n}} \leq \chi(T^n)^{1/n}\chi(S^n)^{1/n} \qquad (n = 1, 2, ...)$$

buluruz ve böylece $r_{\text{ess}}(S^2) \leq r_{\text{ess}}(T) r_{\text{ess}}(S)$ eşitsizliğine ulaşılır. Ayrıca Calkin cebri için Spektral Gösterilim Teoremi'nden $r_{\text{ess}}(S^2) = r_{\text{ess}}(S)^2$ elde edilir. Buradan

$$r_{\text{ess}}(S) \leq r_{\text{ess}}(T)$$

bulunur. □

Eğer T, Banach örgüsü üzerinde pozitif bir operatör ise $r(T) \in \sigma(T)$ olduğunu biliyoruz. Doğal olarak bu içermenin pozitif operatörlerin esaslı spektrumu için de geçerli olup olmadığı sorulur. [15, Örnek 3.2.7] kaynağında genel olarak $r_{\text{ess}}(T) \notin \sigma_{\text{ess}}(T)$ olduğu belirtilmiştir. Ancak, bazı operatör sınıfları için bu sorunun cevabı olumludur. Bir sonraki önerme, esaslı spektral yarıçapın monotonluğu ile ilgilidir.

Önerme 3.2.9. *E kompleks Banach örgüsü olmak üzere $0 \leq S \in \mathcal{L}(E)$ operatörünün $0 \leq S^n \leq T \in \mathcal{L}(E)$ koşulunu sağladığını varsayalım ve her $n = 1, 2, ...$ için $r_{ess}(S^n) \leq r_{ess}(T)$ gerçeklensin. Buradan $r_{ess}(S) \in \sigma_{ess}(S)$ elde edilir.*

Kanıt. Genelliği bozmaksızın, varsayalım ki $r_{\text{ess}}(S) = 1$ olsun. Bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\sigma_{\text{ess}}(S) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z \leq \alpha\}$ şeklinde ifade edilebilir. Calkin cebri için Spektral Gösterilim Teoremi'nden

$$\sigma_{\text{ess}}(e^{tS}) = e^{t\sigma_{\text{ess}}(S)} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq e^{t\alpha}\}$$

yazılabilir ve her $t \geq 0$ için $r_{\text{ess}}(e^{tS}) \leq e^{t\alpha}$ elde edilir. Diğer taraftan, her $n = 1, 2, ...$ ve her $t \geq 0$ için

$$0 \leq \frac{t^n}{n!} S^n \leq e^{tS}$$

bulunur ve hipotezden

$$r_{\text{ess}}\left(\frac{t^n}{n!} S^n\right) \leq r_{\text{ess}}(e^{tS})$$

eşitsizliğine ulaşılır. $r_{\text{ess}}((t^n/n!)S^n) = (t^n/n!)r_{\text{ess}}(S)^n = t^n/n!$ olduğundan dolayı, her $n = 1, 2, ...$ ve $t \geq 0$ için $0 \leq (t^n/n!) \leq e^{\alpha t}$ alabiliriz. $t = n/\alpha$ alarak, $\alpha \geq 1$ durumu için Stirling formülü uygulandığında $r_{\text{ess}}(S) \in \sigma_{\text{ess}}(S)$ sonucuna ulaşılır. □

Üstteki önerme, Teorem 3.2.8 ile birleştirildiği takdirde aşağıdaki sonuç elde edilmektedir.

Teorem 3.2.10. *E kompleks Banach örgüsü üzerinde tanımlı her pozitif AM-kompakt T operatörü için $r_{ess}(T) \in \sigma_{ess}(T)$ sağlanır.*

Banach örgüleri üzerinde tanımlı birtakım özel operatörlerin kompakt-olmama ölçüsü ve esaslı spektrumu ile ilgili özelliklerinden bahsedilecektir. İlk olarak, bazı Banach örgülerindeki sıra aralıkların kompakt-olmama ölçüsünün hesaplandığı bir lemma ile başlayacağız. E Banach örgüsü olmak üzere, E üzerindeki sıra sürekli lineer fonksiyonların uzayı E_n^* ile gösterilecektir.

Lemma 3.2.11. *E Dedekind tam, atomsuz kompleks Banach örgüsü olmak üzere her $f \in E$ için $\|f\| = \sup\{\langle |f|, \phi\rangle : 0 \leq \phi \in E_n^*, \|\phi\| = 1\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $0 \leq u \in E$ için $\chi([-u,u]) = \|u\|$ sağlanır.*

Kanıt. Genelliği bozmaksızın, E örgüsünün reel olduğu durumu inceleyelim. $\delta > \chi([-u,u])$ alalım ve $\delta > \delta' > \chi([-u,u])$ olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için, $\langle u, \phi\rangle \leq \|u\| - \varepsilon$ koşulunu sağlayan $0 \leq \phi \in E_n^*$ fonksiyoneli vardır. δ' sayısının seçiminden dolayı, $[-u,u] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(f_j', \delta')$ olacak şekilde $f_1', ..., f_n' \in E$ vardır ve bu elemanların $f_1', ..., f_n' \in [-u,u]$ olduğunu varsayabiliriz. Freudenthal Spektral Teoremi'nden [10, Teorem 40.2] dolayı, $\sum_{j=1}^{m} u_j = u$ koşulunu sağlayan ayrık $u_1, ..., u_m \in E$ elemanları ve

$$f_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} u_j \qquad (i = 1, ..., n)$$

olacak şekilde $\{\alpha_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq i \leq m\} \in [-1,1]$ reel sayıları bulunur. Buradan da $[-u,u] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \delta)$ içermesi gerçeklenir. E atomsuz bir uzay ve $0 \leq \phi \in E_n^*$ olduğundan, her bir $j = 1, ..., m$ için $u_j = u_{j1} + u_{j2}$ ve $\langle u_{j1}, \phi\rangle = \langle u_{j2}, \phi\rangle = 1/2 \langle u, \phi\rangle$ koşullarını sağlayan $u_{j1}, u_{j2} \in E$ ayrık elemanları vardır. Şimdi,

$$g = \sum_{j=1}^{m} (u_{j1} - u_{j2})$$

olarak tanımlansın. $g \in [-u,u]$ olduğundan, $\|g - f_i\| \leq \delta$ olacak şekilde bir f_i elemanı bulunur. $\{u_{jk}\}$ elemanlarının ayrık olması kullanılarak,

$$\begin{aligned} \langle |g - f_i|, \phi\rangle &= \sum_{j=1}^{m} \langle (1 - \alpha_{ij}) u_{j1} + (1 + \alpha_{ij}) u_{j2}, \phi\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{m} \langle u_j, \phi\rangle = \langle u, \phi\rangle \geq \|u\| - \varepsilon \end{aligned}$$

yazılabilir ve buradan $\delta \geq \|u\| - \varepsilon$ elde edilir. Bu eşitsizlik, her $\delta > \chi([-u,u])$ ve her $\varepsilon > 0$ sayıları için gerçeklendiğinden, $\chi([-u,u]) \geq \|u\|$ bulunur. Bu eşitsizliğin tersi her zaman sağlandığından ispat tamamlanmış olur. □

Tanım 3.2.12. *E ve F Banach örgüleri olmak üzere pozitif, lineer $T : E \to F$ operatörüne her $0 \leq u \in E$ için $T[0,u] = [0, Tu]$ koşulunu sağlıyorsa Maharam operatör(veya aralık koruyan) denir.*

Lemma 3.2.12'den hareketle aşağıdaki önerme elde edilmiştir.

Önerme 3.2.13. *E ve F kompleks Banach örgülerinden F Dedekind tam ve atomsuz olsun. Her* $f \in F$ *için* $\|f\| = \sup\{\langle |f|, \phi\rangle : 0 \leq \phi \in E_n^*, \|\phi\| \leq 1\}$ *olarak tanımlansın. Eğer* $0 \leq T : E \to F$ *Maharam operatörü ise,* $\chi(T) = \|T\|$ *sağlanır.*

Kanıt. İspatı reel uzaylar üzerinden yapalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\|u\| = 1$ ve $\|Tu\| \geq \|T\| - \varepsilon$ olacak şekilde $0 \leq u \in E$ vardır. $[-Tu, Tu] = T[-u, u] \subseteq TB_E$ olduğu için, $\chi([-Tu, Tu]) \leq \chi(TB_E) = \chi(T)$ yazılabilir. Üstteki lemmadan, $\chi([-Tu, Tu]) = \|Tu\|$ elde edilir ve buradan $\chi(T) \leq \|T\| - \varepsilon$ bulunur. O halde $\chi(T) \geq \|T\|$ eşitsizliği sağlanır ve dolayısıyla $\chi(T) = \|T\|$ elde edilir. □

Tanım 3.2.14. $T : E \to F$ *lineer operatörü,* $x \wedge y = 0$ *iken* $|Tx| \wedge |Ty| = 0$ *koşulunu sağlıyorsa ayrıklığı koruyan operatör olarak adlandırılır.*

Önerme 3.2.14'ü ayrıklığı koruyan operatörlere uygulayabilmek için dual uzaylarla ilgili birtakım özelliklerden bahsedeceğiz. E ve F kompleks Banach örgüleri olsun.

(1) Eğer $T : E \to F$ operatörü ayrıklığı koruyan ve norm sınırlı ise, T operatörü sıra sınırlıdır, her $f \in E$ için $|Tf| = |T|(|f|)$ koşulunu sağlayan $|T|$ mevcuttur ve $|T|$ Riesz homomorfizmdir.

(2) Eğer $T : E \to F$ bir Riesz homomorfizm ise, eşleniği $T^* : F^* \to E^*$ Maharam operatörüdür.

(3) E ve F örgülerinin Dedekind tam olmasına ek olarak sıra sınırlı lineer $T : E \to F$ operatörünün modülü $|T|$'nin sıra sürekli bir Maharam operatörü olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $T = |T| \circ \pi$ ve $|\pi| = I$ olacak şekilde, $\pi \in Z(E)$ vardır. Gerçekten, T_1 ve T_2 reel operatörleri için $T = T_1 + iT_2$ alarak, $|T_1|, |T_2| \leq |T|$ eşitsizliğini elde ederiz. Dolayısıyla, $T_j = |T| \circ \pi_j$ ve $|\pi_j| \leq I$ $(j = 1, 2)$ olacak şekilde $\pi_1, \pi_2 \in Z(E)$ bulunur. Buradan $\pi = \pi_1 + i\pi_2$ olmak üzere $T = |T| \circ \pi$ elde edilir. $|T|$ operatörünün $C_{|T|} = N_{|T|}^d = \{x \in E : x \perp N_{|T|}\}$ şeklinde tanımlanan taşıyıcısı üzerinde $|\pi| = I$ olduğunu elde ederiz. T operatörünün sıfır ideali $N_{|T|}$ üzerinde $n = I$ alınarak, istenilen $\pi \in Z(E)$ sonucuna ulaşılır.

Teorem 3.2.15. *E ve F kompleks Banach örgüleri ve* E^* *atomsuz olsun. Eğer* $T : E \to F$ *norm sınırlı, ayrıklığı koruyan operatör ise* $\chi(T) \geq 1/2\|T\|$ *eşitsizliği sağlanır.*

Kanıt. Önceden belirtildiği gibi $|T|$ vardır ve bir Riesz homomorfizmdir. Buradan, eşlenik operatör $|T|^*$ sıra sürekli, Maharam operatörüdür. $|T^*| \leq |T|^*$ eşitsizliğinden dolayı $|T|^*$ operaötürünün sıra sürekli Maharam operatörü olduğu elde edilir, ve dolayısıyla $T^* = |T^*| \circ \pi$ ve $|\pi| = I$ olacak şekilde $\pi \in Z(F^*)$ bulunur. Ayrıca, E^* uzayı Önerme 3.2.14 koşullarını sağladığından $\chi(|T^*|) = \||T^*|\|$ bulunur. π, F^* üzerinde bir izometri olduğundan $\chi(T^*) = \chi(|T^*|) = \||T^*|\|$ eşitliğine ulaşılır. Dahası $\chi(T) \geq 1/2\chi(T^*)$ yazılabilir ([22]) ve buradan, $\chi(T) \geq 1/2\|T\|$ elde edilir. □

Yukarıdaki teoremde E^* uzayının atomsuz olması koşulu kaldırılamaz. Gerçekten E^* uzayının atomları, E üzerinde reel değerli bir Riesz homomorfizmidir. Dolayısıyla, E^* uzayının herhangi bir atomu E'den F'ye bir ranklı Riesz homomorfizmi meydana getirir. Ancak hala E^* atomsuz olmak üzere, $\chi(T) < \|T\|$ koşulunu sağlayan bir $T : E \to F$ Riesz homomorfizm örneği bilinmemektedir. Bu bağlamda Lemma 3.2.12'nin ispatındaki benzer adımları takip edilerek, şu sonuç elde edilir. E ve F Banach örgüleri, E atomsuz ve sıra sürekli norma sahip olsun. $\overline{T(E)}$ büzülme izdüşümü olacak şekilde T operatörünün bir Riesz homomorfizmi olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\chi(T) = \|T\|$ koşulunu sağlar.
Bir önceki teorem esaslı spektral yarıçap için Nussbaum'un formülü ile birleştirildiğinde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.16. *E, duali atomsuz olan kompleks bir Banach örgüsü olsun. Eğer $T : E \to E$ norm sınırlı ayrıklığı koruyan operatör ise, $r_{ess}(T) = r(T)$ koşulu sağlanır.*

Kanıt. Eğer T ayrıklığı koruyan operatör ise, her $n = 1, 2, ...$ için T^n operatörü de aynı özelliğe sahiptir ve önceki teoremden dolayı $1/2\|T^n\| \leq \chi(T^n) \leq \|T^n\|$ eşitsizliği elde edilir. Spektral yarıçap için olan formüller kullanıldığında, $r(T) = r_{\text{ess}}(T)$ olduğuna ulaşılır. □

3.3 Ayrıklığı Koruyan Operatörün Kompakt-Olmama Ölçüsü

$\alpha(T)$ ve $\chi(T)$ kompakt-olmama ölçülerinin birtakım özellikleri

(1) $\frac{1}{2}\alpha(T) \leq \chi(T) \leq 2\alpha(T)$,

(2) $\alpha(T^*) \leq \chi(T)$ ve $\alpha(T) \leq \chi(T^*)$

(3) $\alpha(T(B_E)) = \alpha(T^*(B_{F^*})$ ([1]),

(4) $\max\{\alpha(T), \chi(T)\} \leq \|T\|_e$ (burada $\|T\|_e$, T operatörünün esaslı normu olmak üzere),

şeklindedir.

Bu bölümde [18]'de söz edildiği gibi Banach örgüleri üzerindeki operatörlerin özel bir sınıfına yer verilecektir. Banach örgüleri üzerindeki operatörlerin kompakt-olmama ölçüleri ile ilgili sonuçlara [15] ve [21] kaynaklarından ulaşılabilir. E örgüsünün dual uzayı E^* ile ve E üzerindeki tüm sıra sürekli lineer fonksiyonların uzayı E_n^* ile gösterilecektir. $0 \leq \phi \in E^*$ için p_ϕ yarı normu $p_\phi(f) = \phi(|f|)$ olarak tanımlanır.

Lemma 3.3.1. *E Dedekind tam atomsuz Banach örgüsü olmak üzere $0 \leq u \in E$ alalım ve $\phi(u) = 1$ için $0 \leq \phi \in E_n^*$ olsun. Bu durumda, her $t \in [0,1]$ için $\phi(P_t u) = t$ ve $t \leq s$ için $P_t \leq P_s$ koşullarını sağlayan bir P_t bant izdüşümü vardır.*

Kanıt. $P_0 = 0$ alalım ve P_1, $\{u\}^{dd}$ üzerinde bir bant izdüşümü olsun. Zorn Leması'ndan, $0 \leq P_\tau \leq P_1$ koşulunu sağlayan bant izdüşümlerinden oluşan bir $\{P_\tau\}$ maksimal zincir bulunabilir. Dolayısıyla her $0 < t < 1$ için $\phi(P_{\tau_0} u) = t$ olacak şekilde $\tau_0 \in \{\tau\}$ vardır. E atomsuz olduğundan, ϕ sıra sürekli bulunur. Şimdi $P_t = \sup\{P_\tau : \phi(P_\tau u) = t\}$ tanımlansın. ϕ fonksiyonelinin sıra sürekli olmasından dolayı $\phi(P_t u) = t$ sağlanır ve bu durumda $t \leq s$ olmak üzere $P_t \leq P_s$ eşitsizliği gerçeklenir. □

Aşağıdaki lemmada geçen S^n ile $\mathbb{R}^{n+1}$ üzerinde $S^n = \{(x_1, ..., x_{n+1}) : (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ with $x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\}$ şeklinde tanımlanan n-küresi ifade edilir.

Lemma 3.3.2. *E Dedekind tam atomsuz Banach örgüsü olmak üzere $0 \leq u \in E$ alalım ve $\phi(u) = 1$ için $0 \leq \phi \in E_n^*$ olsun. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $(x_1, ..., x_{n+1}) \in S^n$ için $F_n(-x_1, ..., -x_{n+1}) = -F_n(x_1, ..., x_{n+1})$ koşulunu sağlayan bir p_ϕ-sürekli $F_n : S^n \to \{v \in E : |v| = u\}$ tasviri vardır.*

Kanıt. P_t, Lemma 3.3.1'de tanımlandığı gibi bant izdüşümlerinin bir ailesi olsun. Şimdi indüksiyon yöntemiyle F_n leri inşa edelim. F_1 tasvirini tanımlamak için S^1 kürelerini $\{e^{2\pi it} : 0 \leq t < 1\}$ ile ifade edelim. O halde,

$$F_1(e^{2\pi it}) = \begin{cases} 2P_{2t}u - u, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -2P_{2t-1}u + u, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

$|2P_{2t}u - u| = |P_{2t}u + P_{2t}u - P_1u| = |P_{2t}u + (P_1 - P_{2t})u| = u$ olduğunu gözlemleyebiliriz. $P_{2t} \perp P_1 - P_{2t}$ olduğundan, her t için $|F_1(e^{2\pi it})| = u$ bulunur. Ayrıca $0 \leq t < \frac{1}{2}$ ise, $F_1(-e^{2\pi it}) = F_1(e^{2\pi i(t+\frac{1}{2})}) = -2P_{2t}u + u = -F_1(e^{2\pi it})$ yazılabilir. F_1 tasvirinin p_ϕ-sürekli olduğunu göstermek için P_tu izdüşümünün t elemanının bir p_ϕ-sürekli fonksiyonu olduğunu göstermemiz gereklidir. Bunun için de, her $t, s \in [0,1]$ için $p_\phi(P_tu - P_su) = |t - s|$ sağlanığı kullanılır. O halde, F_1 tasviri istenilen koşulları sağlar. Şimdi, $F_{n-1} : S^{n-1} \to \{v \in E : |v| = u\}$ tasvirinin kurulduğunu varsayalım. Buradan F_n,

$$F_n(x_1, ..., x_{n+1}) = \begin{cases} u, & x_{n+1} = 1 \\ (P_1 - P_{x_{n+1}})F_{n-1}\left(\frac{x_1}{(1-x_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}}}, ..., \frac{x_n}{(1-x_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}}}\right) + P_{x_{n+1}}u, & 0 \leq x_{n+1} < 1 \\ -F_n(-x_1, ..., -x_{n+1}), & x_{n+1} < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Her $(x_1, ..., x_{n+1}) \in S^n$ için, $F_n(x_1, ..., x_n, 0) = F_{n-1}(x_1, ..., x_n)$ olduğundan $|F_n(x_1, ..., x_{n+1})| = u$ ve $F_n(-x_1, ..., -x_{n+1}) = -F_n(x_1, ..., x_{n+1})$ ifadeleri yazılabilir. Her $(x_1, ..., x_{n+1}) \in S^n$ noktasından F_n tasvirinin p_ϕ-sürekli olduğunu gösterebilmemiz için $x_{n+1} = 0$, $0 < x_{n+1} < 1$ ve $x_{n+1} = 1$ durumları göz önüne alınmalıdır. İlk olarak $x_{n+1} = 0$ durumunu inceleyelim. O halde, $F_n(x_1, ..., x_{n+1}) = F_{n-1}(x_1, ..., x_n)$ elde edilir. F_n tasvirinin $(x_1, ..., x_{n+1})$ noktalarındaki sürekliliğinden F_{n-1} sürekli olduğu elde edilir ve her $x_{n+1,k} \downarrow^k 0$ dizisi için $P_{x_{n+1,k}}u \downarrow 0$ bulunur. $0 < x_{n+1} < 1$ durumunu göz önüne alalım. S^{n-1} üzerinde karşılık gelen nokta

$$X = \left(\frac{x_1}{(1-x_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}}}, ..., \frac{x_n}{(1-x_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

ile tanımlansın. Şimdi $(x_1, ..., x_{n+1}), (y_1, ..., y_{n+1}) \in S^n$ noktaları $0 < x_{n+1}, y_{n+1} <$

1 şeklinde olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} p_\phi(F_n(x_1,...,x_{n+1}) - F_n(y_1,...,y_{n+1})) &\le \phi(|(P_1 - P_{x_{n+1}})F_{n-1}(X) - (P_1 - P_{yn+1})F_{n-1}(Y)|) \\ &+ \phi(P_{x_{n+1}}u - P_{y_{n+1}}u) \\ &\le \phi(|F_{n-1}(X) - F_{n-1}(Y)|) + 2\phi(|P_{x_{n+1}}u - P_{y_{n+1}}u|), \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $(x_1,...,x_{n+1})$ noktalarında F_n tasviri p_ϕ-süreklidir ve buradan F_n tasvirinin, $(0,...,1)$ noktalarında sürekli olduğu elde edilir. □

[18]'de, p_ϕ ile ilgili bir kompakt-olmama ölçüsü tanımlanmaktadır. Eğer $D \subset E$ norm sınırlı ise,

$$\alpha_\phi(D) = \inf\{\lambda : D \subset \bigcup_{j=1}^{m} D_j, p_\phi - \text{Çap}(D_j) \le \lambda\}$$

şeklindedir. Buradan $\alpha_\phi(D) \le \|\phi\|\alpha(D)$ yazılabilir.

Lemma 3.3.3. *E Dedekind tam atomsuz Banach örgüsü olmak üzere $0 \le u \in E$ alalım ve $\phi(u) = 1$ için $0 \le \phi \in E_n^*$ olsun. Bu durumda, $\alpha_\phi([-u,u]) = 2$ sağlanır.*

Kanıt. $[-u,u]$ aralığının p_ϕ-çapı 2 olduğundan, $\alpha_\phi([-u,u]) \le 2$ elde edilir. $[-u,u] \subset \bigcup_{j=1}^{n} D_j$ olduğunu varsayalım. E örgüsü, N_ϕ^d:=$\{x \in E : \phi(|x|) = 0\}$ olmak üzere $N_\phi \oplus N_\phi^d$ olarak göz önüne alınabilir. N_ϕ^d'nin u tarafından üretilen E_u esas idealini içerdiğini varsayalım ve D_j ile $D_j \cap E_u$ yer değiştirelim. $\tilde{D_j}$ ile D_j kümesinin, (E_u, p_ϕ) tamamlayıcısı içindeki p_ϕ-kapanışını gösterelim. F_{n-1} tasviri önceki lemmadaki şekilde kurulsun. O halde, S^{n-1} kürelerinin n kapalı kümeden oluşan bir örtülüşü $\bigcup_{j=1}^{n} F_{n-1}^{-1}(\tilde{D_j})$ şeklindedir. Lusternik-Schnirelman-Borsuk Teoremi'nden ([2]), $\pm(x_1,...,x_n) \in F_{n-1}^{-1}(\tilde{D_{j_0}})$ koşulunu sağlayan bir j_0 indisi ve $(x_1,...,x_n) \in S^{n-1}$ bulunur. O halde $\pm F_{n-1}(x_1,...,x_n) \in \tilde{D_{j_0}}$ sağlanır. Buradan

$$p_\phi - \text{Çap}(D_{j_0}) = p_\phi - \text{Çap}(\tilde{D_{j_0}}) \ge 2p_\phi(F_{n-1}(x_1,...,x_n)) = 2$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Önerme 3.3.4. *E Dedekind tam atomsuz Banach örgüsü olsun ve her $0 \le u \in E$ için $\|u\| = \sup\{\langle \phi, u\rangle : 0 \le \phi \in E_n^*, \|\phi\| = 1\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\alpha([-u,u]) = 2\|u\|$ sağlanır.*

Kanıt. $\varepsilon > 0$ olsun ve $u \neq 0$ olmak üzere $0 \leq u \in E$ alalım. Varsayımımızdan dolayı, $\phi(u) > (1-\varepsilon)\|u\|$ olacak şekilde bir $0 \leq \phi \in E_n^*$ vardır ve $\|\phi\| = 1$dir. O halde, üstteki lemma da kullanılarak $\alpha_\phi([-u,u]) = 2\alpha(u)$ elde edilir. Buradan, her $\varepsilon > 0$ için $\alpha([-u,u]) \geq \alpha_\phi([-u,u]) > 2(1-\varepsilon)\|u\|$ bulunur. Dolayısıyla $\alpha([-u,u]) = 2\|u\|$ bulunur. □

Önerme 3.3.5. *E ve F Banach örgüleri ve F Dedekind tam, atomsuz olsun. Her $0 \leq f \in F$ için $\|f\| = \sup\{\langle |f|, \phi\rangle : 0 \leq \phi \in F_n^*, \|\phi\| \leq 1\}$ sağlansın. Eğer $0 \leq T : E \to F$ Maharam operatör ise, $\alpha(T(B_E)) = 2\|T\|$ sağlanır.*

Kanıt. $\varepsilon > 0$ alalım. O halde $\|u\| = 1$ ve $\|Tu\| \geq \|T\| - \varepsilon$ olacak şekilde $0 \leq u \in E$ bulunur. Bu durumda $[-Tu, Tu] = T[-u,u] \subseteq T(B_E)$ için $\alpha(T(B_E)) \geq \alpha([-Tu,Tu]) = 2\|Tu\| \geq 2(\|T\| - \varepsilon)$ gerçeklenir ve $\alpha(T(B_E)) = 2\|T\|$ elde edilir. □

Teorem 3.3.6. *E ve F Banach örgüleri ve E^* atomsuz olsun. Eğer $T : E \to F$ norm sınırlı ayrıklığı koruyan operatör ise $\alpha(T) = \chi(T) = \|T\|_e = \|T\|$ sağlanır.*

Kanıt. Bölüm 3.2'de belirtildiği gibi $|T^*|$ sıra sürekli bir Maharam operatörüdür ve F^* örgüsünün merkezinde $T^* = |T^*| \circ \pi$ ve $|\pi| = I$ koşullarını sağlayan bir $\pi \in Z(F^*)$ bulunur. E^* örgüsü, yukarıdaki önermenin hipotezindeki koşulları sağlar ve buradan $\alpha(|T^*|(B_F^*)) = 2\||T^*|\|$ elde edilir. π bir izometri olduğundan, $\alpha(T^*(B_F^*)) = 2\|T^*\|$ sonucuna ulaşılır. $\alpha(T^*(B_F^*)) = \alpha(T(B_E))$ eşitliğini kullanırsak, $\alpha(T(B_E)) = 2\|T\|$ buluruz. $\alpha(T(B_E)) \leq 2\alpha(T)$ ve$\alpha(T(B_E)) \leq 2\chi(T(B_E)) = 2\chi(T)$ eşitsizlikleri $\chi(T) = \alpha(T) = \|T\|$ gerçekler. Dolayısıyla $\chi(T) \leq \|T\|_e \leq \|T\|$ elde edilir. □

3.4 Bir Uygulama Örneği: d-Topolojisi

Bu bölümde V.G. Troitsky'nin makalesinde ([20]) elde ettiği sonuçlardan bahsedilecektir.

Tanım 3.4.1. *E Banach örgüsü üzerinde tanımlı bir (x_α) ağına, her $y \in E_+$ için $|x_\alpha - x| \wedge y$ sıfıra yakınsıyorsa $x \in E$ noktasına d-yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık tarafından üretilen topoloji E uzayının d-topolojisi olarak adlandırılır.*

Önerme 3.4.2. *$A \subseteq E$ kümesi d-kompakt ise $\chi(A) = \rho(A)$ sağlanır.*

Banach örgüleri üzerinde tanımlı bir operatör sınırlı kümeleri göreli d-kompakt kümelere gönderiyorsa *d-kompakt* olarak adlandırılır. Eğer T operatörü sıra sınırlı ve d-kompakt ise AM-kompakttır. Gerçekten, $y \in E_+$ ise $T[-y, y]$ göreli d-kompakt ve sıra sınırlıdır, ancak d-topolojiye sıra sınırlı kümeler üzerinde tanımlı norm topoloji olarak bakılırsa $T[-y, y]$ göreli kompakttır. Bu durumda, Sonuç 3.2.7 d-kompakt kümelere uygulanabilir.

Önerme 3.4.3. *E ve F Banach örgüleri olmak üzere, eğer $S, T : E \to F$ operatörlerinden S operatörü T tarafından domine ediliyor ve d-kompakt ise $\chi(S) \leq \chi(T)$ sağlanır.*

Örnek 3.4.4. *(d-**kompakt olup kompakt olmayan bir operatör örneği**)* *Aralıkların bir $A_n = \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n - 1}\right]$ dizisini göz önüe alalım. $f_n = 2^{\frac{n}{2}} \chi_{A_n}$ olsun. Bu durumda, her n için $\|f_n\|_2 = 1$ sağlanır. $Te_n = f_n$ olarak ifade edilen $T : \ell_2 \to L_2[0, 1]$ operatörü bir izometrik gömmedir, dolayısıyla kompakt değildir. Ancak T operatörü d-kompakttır çünkü ℓ_2 uzayından $L_1[0, 1]$ uzayına tanımlı bir operatör olarak kompakttır. Gerçekten, $T = \sum_{n=1}^{\infty} e_n' \otimes f_n$ şeklindedir ancak $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n'\|_{\ell_2'} \|f_n\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{-n}{2}} < +\infty$ olduğundan $T : \ell_2 \to L_1[0, 1]$ nükleer operatörü olarak göz önüne alınabilir. Bu durumda operatör kompakttır.*

Her sıra sınırlı d-kompakt operatör AM-kompakttır. Aşağıdaki örnek W.B. Johnson tarafından gösterilmiştir.

Örnek 3.4.5. *(d-**kompakt olup AM-kompakt olmayan bir operatör örneği**)* *$T : L_2[0, 1] \to \ell_2$ operatörü $Tx = \left(\int x r_n\right)_{n=0}^{\infty}$ olarak tanımlansın. Burada r_n ile n-inci Rademacher fonksiyonu gösterilmektedir. [20, Not.22]'den dolayı T operatörü d-kompakttır. Diğer taraftan, $Tr_n = e_n$ olduğundan T operatörü AM-kompakt değildir.*

Önerme 3.2.2'de sıra sürekli norma sahip bir Banach örgüsü üzerinde tanımlı her PL-kompakt A kümesi için $\rho(A) = \chi(A)$ sağlandığı gösterildi. Üstelik, E^* ve F sıra sürekli norma sahip olmak üzere sıra sınırlı bir $T : E \to F$ operatörünün AM-kompakt olması için gerek ve yeter koşulun TB_E kümesinin PL-kompakt olmasıdır ([23, Teorem 125.3]). Ayrıca T operatörü d-kompakt ise, TB_E kümesi PL-kompakttır.

Örnek 3.4.6. *(d-**kompakt olup PL-kompakt olmayan bir küme örneği**)* *ℓ_1 uzayının $A = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ kümesini göz önüne alalım. A kümesi d-kompakt bir kümedir. Buna rağmen PL-kompakt değildir; çünkü $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ aldığımız takdirde E üzerindeki norm ile $f(|.|)$ çakışır. Oysa ki A göreli norm kompakt değildir.*

3.5 Zayıf Kompakt-Olmama Ölçüsü

Tanım 3.5.1. *Değerlerini kısmî sıralanmış bir $(Q, \leq)$ kümesi içinde alan, bir X Banach uzayının tüm alt kümelerinin kümesi üzerinde tanımlı bir ψ fonksiyonu, her $\Omega \subset X$ için $\psi(\overline{co}\Omega) = \psi(\Omega)$ koşulunu sağlıyor ise, kompakt-olmama ölçüsü olarak adlandırılır.*

Tanım 3.5.2. *X bir Banach uzayı olsun. $\omega : 2^E \to [0, \infty)$ fonksiyonu için, zayıf kompakt-olmama ölçüsü*

$$\omega(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 : \Omega \textit{ kümesi } E \textit{ üzerinde zayıf kompakt bir } \varepsilon\textit{-ağına sahiptir}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Sözü edilen zayıf topoloji ile birlikte X uzayının genel tanımı sağlaması anlamında zayıf kompakt-olmama ölçüsü bir kompakt-olmama ölçüsüdür. Şöyle ki,

$$\omega(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 : \text{bir } C \text{ zayıf kompakt kümesi } \Omega \subset C+\varepsilon B \text{ olacak şekilde bulunur}\}.$$

Lemma 3.5.3. *ω fonksiyonunun özellikleri:*

(1) $\Omega_1 \subset \Omega_2$ *iken* $\omega(\Omega_1) \leq \omega(\Omega_2)$*;*

(2) $\omega(\Omega) = \omega(\overline{\Omega}^w)$*, burada* $\overline{\Omega}^w$ *ile* Ω *kümesinin zayıf kapanışı gösterilmektedir;*

(3) $\omega(\Omega) = 0$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\overline{\Omega}^w$ *kümesinin zayıf kompakt olmasıdır;*

(4) $\omega(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \max\{\omega(\Omega_1), \omega(\Omega_2)\}$*;*

(5) $\omega(\Omega) = \omega(co\Omega)$*;*

(6) $\omega(\Omega) \leq \chi(\Omega)$ *ve* $\omega(\Omega) \leq \alpha(\Omega)$*;*

(7) $\omega(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \omega(\Omega_1) + \omega(\Omega_2)$ *ve* $\omega(\{a\} + \Omega) = \omega(\Omega)$ *eğer* a *bir tek eleman ise;*

(8) $\omega(\lambda\Omega) = \lambda\omega(\Omega),\ \lambda \geq 0.$

Kanıt. (1) $\Omega_1, \Omega_2 \subset X$ sınırlı kümeler ve $\Omega_1 \subset \Omega_2$ olsun. $\omega(\Omega_2) < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ alalım. O halde $\Omega_2 \subset C + \delta B_X$ olacak şekilde bir zayıf kompakt C kümesi vardır. $\Omega_1 \subset \Omega_2$ olduğundan, $\Omega_1 \subset C + \delta B_X$ yazılabilir. Buradan $\omega(\Omega_1) \leq \delta$ bulunur, ve dolayısıyla $\omega(\Omega_1) \leq \omega(\Omega_2)$ elde edilir.
(2) $\omega(\Omega)$ ölçüsünün tanımından dolayı, $\Omega \subset C + \varepsilon B$ olacak şekilde zayıf kompakt bir $C \subset X$ kümesi ve $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. Buradan $\Omega \subset \overline{\text{co}}C + \varepsilon B$ yazılabilir ve Krein-$\check{S}$mulian Teoremi'nden $\overline{\text{co}}C$ kümesi zayıf kompakttır. O halde, zayıf kompakt $\overline{\text{co}}C$ kümesi ve kapalı εB kümesinin toplamı olan $\overline{\text{co}}C + \varepsilon B$ kümesi zayıf kapalıdır. Bu durumda, $\overline{\Omega}^w \subset \overline{\text{co}}C + \varepsilon B$ iken $\omega(\overline{\Omega}^w) \leq \varepsilon$ ve $\omega(\overline{\Omega}^w) \leq \omega(\Omega)$ eşitsizlikleri gerçeklenir. İfadenin ispatı için gereken diğer eşitsizlik, ω ölçüsünün monotonluğundan elde edilir.
(3) $\overline{\Omega}^w$ zayıf kompakt bir küme olsun. $\Omega \subset \overline{\Omega}^w + 0.B$ olduğundan, $\omega(\Omega) \leq 0$ sonucuna ulaşılır. Bu durumda $\omega(\Omega) = 0$ elde edilir. Tersine, $\omega(\Omega) = 0$ olduğunu varsayalım. O halde, $\Omega \subset C + 0.B$ olacak şekilde bir C zayıf kompakt kümesi vardır. $C \subset \overline{C}^w$ içermesinde Teorem 2.1.7 kullanılarak, $\overline{C}^w \subset W + \varepsilon B$ olacak şekilde bir W zayıf kompakt kümesi bulunabilir. Bu durumda, $\Omega \subset W + \varepsilon B$ elde edilir ki, o halde Ω kümesi göreli zayıf kompakttır. Dolayısıyla $\overline{\Omega}^w$ zayıf kompakt bir kümedir.
(4) $\Omega_1 \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ ve $\Omega_2 \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ olduğundan, (1) özelliğinden dolayı $\omega(\Omega_1) \leq \omega(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ ve $\omega(\Omega_2) \leq \omega(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ elde edilir. Dolayısıyla, $\max\{\omega(\Omega_1), \omega(\Omega_2)\} \leq \omega(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan, $\max\{\omega(\Omega_1), \omega(\Omega_2)\} < \delta$ alalım. Bu durumda,

$$\omega(\Omega_1) < \delta \Rightarrow \exists C_1 \text{ (zayıf kompakt) } \ni \Omega_1 \subset C_1 + \delta B$$

$$\omega(\Omega_2) < \delta \Rightarrow \exists C_2 \text{ (zayıf kompakt) } \ni \Omega_2 \subset C_2 + \delta B$$

yazabiliriz. $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset C_1 \cup C_2 + \delta B$ sağlanır. Dolayısıyla $\omega(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq \delta$ bulunur ve buradan $\omega(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq \max\{\omega(\Omega_1), \omega(\Omega_2)\}$ elde edilir.

(5) $\Omega \subset \text{co}(\Omega)$ içermesinin sağlandığını biliyoruz. (1) özelliğinden, $\omega(\Omega) \leq \omega(\text{co}(\Omega))$ yazılabilir. Bu durumda, $\Omega \subset C + \delta B$ olacak şekilde bir zayıf kompakt C kümesi vardır. Teorem 2.1.6'dan dolayı, $\overline{\text{co}}(\Omega)$ kümesi de zayıf kompakttır ve $\text{co}(\Omega) \subset \overline{\text{co}}(\Omega) + \delta B$ bulunur. O halde $\omega(\text{co}(\Omega)) \leq \delta$ elde edilir ve $\omega(\text{co}(\Omega)) \leq \omega(\Omega)$ sonucuna ulaşılır.

(6) $\chi(\Omega) < \delta$ alalım. Bu durumda, $\Omega \subset S + \delta B$ olacak şekilde Ω kümesinin S sonlu ε-ağı vardır. S sonlu olduğundan, $\Omega \subset K + \delta B$ olacak şekilde bir zayıf kompakt K kümesi bulunur. O halde $\omega(\Omega) \leq \delta$ elde edilir.

(7) $\omega(\Omega_1)+\omega(\Omega_2) < \delta$ alalım. Bu durumda, $\omega(\Omega_1) < \delta_1$ ve $\omega(\Omega_2) < \delta_2$ olmak üzere $\delta = \delta_1 + \delta_2$ şeklinde yazılabilir. O halde, $\omega(\Omega_1) < C_1 + \delta_1 B$ ve $\omega(\Omega_2) < C_2 + \delta_2 B$ olacak şekilde C_1 ve C_2 zayıf kompakt kümeleri vardır. $\Omega_1 + \Omega_2 \subset C_1 + C_2 + \delta B$ olduğundan dolayı $\omega(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \delta$ sonucuna ulaşılır.

$\Omega \subset \{a\} + \Omega$ olduğundan, ω ölçüsünün küme-toplamsallığı kullanılarak $\omega(\Omega) \leq \omega(\{a\}+\Omega)$ elde edilir. Tersine, $\omega(\Omega) < \delta$ alalım. $\omega(\{a\}) = 0$ olduğundan $\omega(\{a\}+\Omega) \leq \omega(\{a\}) + \omega(\Omega) = \omega(\Omega) \leq \delta$ elde ederiz. Bu durumda, $\omega(\{a\} + \Omega) \leq \delta$ sağlanır.

(8) $\lambda\omega(\Omega) < \delta$ alalım. Buradan $\omega(\Omega) < \frac{\delta}{\lambda}$ yazılabilir, ve bu durumda $\Omega \subset \frac{\delta}{\lambda}B$ olacak şekilde C zayıf kompakt kümesi bulunabilir. $\lambda\Omega \subset \lambda\Omega + \delta B$ elde edilir. O halde $\omega(\lambda\Omega) \leq \lambda\omega(\Omega)$ sonucuna ulaşılır. Tersine, $\omega(\lambda\Omega) \leq \delta$ alalım. Ölçünün tanımından, $\lambda\Omega \subset +\delta B$ olacak şekilde zayıf kompakt C bulunabilir. $\lambda > 0$ olduğundan, $\Omega \subset \frac{1}{\lambda}C + \frac{\delta}{\lambda}B$ yazabiliriz. Bu durumda, $\omega(\Omega) \leq \frac{\delta}{\lambda}$ bulunur ve dolayısıyla $\omega(\Omega) \leq \frac{1}{\lambda}\omega(\lambda\Omega)$ elde edilir. □

Lemma 3.5.4. *([16]) $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \subset X$ boştan farklı alt kümeler olsun. Ω_2 kümesinin kapalı ve konveks, Ω_3 kümesinin sınırlı ve $\Omega_1 + \Omega_3 \subset \Omega_2 + \Omega_3$ sağlandığını varsayalım. Bu durumda $\Omega_1 \subset \Omega_2$ sağlanır.*

Kanıt. $a \in \Omega_1$ alalım. Göstermemiz gereken $a \in \Omega_2$ olduğudur. Verilen $x_1 \in \Omega_3$ elemanı için $a + x_1 \in \Omega_2 + \Omega_3$ olduğunu biliyoruz. O halde, $b_1 \in \Omega_2$ ve $x_2 \in \Omega_3$ olmak üzere $a+x_1 = b_1+x_2$ yazılabilir. Benzer sebeple, $b_2 \in \Omega_2$ ve $x_3 \in \Omega_3$ olmak üzere $a + x_2 = b_2 + x_3$ yazılır. Bu yöntem tekrarlanarak, eşitliğin ilk n toplamı elde edilir. $na + \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=2}^{n+1} x_i$ veya $na + x_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i + x_{n+1}$ veya $a = (1/n)\sum_{i=1}^{n} b_i + x_{n+1}/n - x_1/n$ şeklinde alabiliriz. $(1/n)\sum_{i=1}^{n} b_i = c_n$ olarak alalım. Bu durumda $a = c_n + x_{n+1}/n - x_1/n$ şeklinde ifade edilir. Ω_2 konveks bir küme olduğundan, her n için $c_n \in \Omega_2$ sağlanır. Ω_3 kümesi sınırlı olduğundan, her n için $x_1/n \to 0$ ve dolayısıyla $x_{n+1}/n \to 0$ bulunur. Dolayısıyla c_n, a'ya yakınsar. Ancak Ω_2 kapalı olduğundan, $a \in \Omega_2$ sağlanır. □

Teorem 3.5.5. *([5]) E Banach örgüsü olsun. Bu durumda,*

(i) eğer E refleksif ise, $\omega(B) = 0$;

(ii) eğer E refleksif değil ise, $\omega(B) = 1$ olur.

Kanıt. E uzayının refleksif olması için gerek ve yeter koşul B kapalı birim yuvarının zayıf kompakt olmasıdır. (i) ifadesini ispatlamak için E uzayının refleksif olduğunu varsayalım. O halde, B zayıf kompakttır ve $\omega(B) = 0$ elde edilir.
(ii) ifadesini ispatlamak için varsayalım ki E uzayı refleksif olmasın. $B \subset 0 + 1.B$ olarak yazılabileceğinden, $\omega(B) \leq 1$ eşitsizliğine ulaşılır. Şimdi $\omega(B) < 1$ olduğunu varsayalım. ω ölçüsünün tanımından, $B \subset C + \varepsilon B$ koşulunu sağlayan bir C zayıf kompakt kümesi ve $\omega(B) < \varepsilon < 1$ olacak şekilde bir ε sayısı vardır. O halde,

$$B \subset \overline{\text{co}}C + \varepsilon B$$

$$(1-\varepsilon)B + \varepsilon B \subset \overline{\text{co}}C + \varepsilon B$$

elde edilir. $\overline{\text{co}}C$ kümesi kapalı ve konveks olduğundan, Lemma 3.5.4'den $(1-\varepsilon)B \subset \overline{\text{co}}C$ elde edilir. Krein-Šmulian Teorem'inden $\overline{\text{co}}C$ kümesinin zayıf kompakt olduğu sonucuna ulaşılır.
Böylece $\overline{\text{co}}C$ zayıf kompakt kümesinin, $(1-\varepsilon)B$ zayıf kapalı alt kümesi yine zayıf kompakttır. $x \to (1-\varepsilon)^{-1}x$ zayıf sürekli olduğundan, B zayıf kompakttır ve dolayısıyla E uzayı refleksiftir. Bu ise varsayımımızla çelişir. □

Teorem 3.5.6. *$\Omega \subset E$ olmak üzere, $\omega(\Omega + rB) = \omega(\Omega) + r\omega(B)$, $r \geq 0$ sağlanır.*

Kanıt. ω ölçüsünün cebirsel yarı toplamsallığı ve yarı homojenliği kullanılarak, $\omega(\Omega + rB) \leq \omega(\Omega) + r\omega(B)$ elde edilir. E refleksif bir uzay olsun. Bu durumda, kapalı birim yuvarı zayıf kompakt olacağından $\omega(B) = 0$ sağlanır. Üstelik, Ω ve $\Omega + rB$ kümeleri sınırlı olduklarından, ikisi de göreli zayıf kompakttır ve $\omega(\Omega) = \omega(\Omega + rB) = 0$ bulunur. Bu durumda, teoremin ifadesi doğrudur. Şimdi varsayalım ki E uzayı refleksif olmasın. O halde, $\omega(B) = 1$ olur. $\omega(\Omega + rB) \geq \omega(\Omega) + r$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için ilk olarak, $r \leq \omega(\Omega + rB)$ olduğunu gözlemleyelim. Aksi takdirde, eğer $x \in \Omega$ ise, $\Omega - \{x\} + rB \supset rB$ sağlanır ve

$$r > \omega(\Omega + rB) = \omega(\Omega - \{x\} + rB) \geq \omega(rB) = r\omega(B) = r$$

buluruz ki çelişkiye ulaşılır. $\omega(\Omega + rB)$ ölçüsünün tanımından, $\delta > \omega(\Omega + rB)$ için $\Omega + rB \subset C + \delta B$ koşulunu sağlayan bir C zayıf kompakt kümesinin varlığı garanti altındadır. Buradan,

$$\Omega + rB \subset \overline{\text{co}}C + \delta B$$

$$\Omega + rB \subset \overline{\text{co}}C + (\delta - r)B + rB$$

bulunur ki burada $\overline{\text{co}}C + (\delta - r)B$ kümesi kapalıdır. Lemma 3.5.4 kullanılırsa,

$$\Omega \subset \overline{\text{co}}C + (\delta - r)B$$

elde edilir. $\overline{\text{co}}C$ zayıf kompakt olduğundan, $\omega(\Omega) \leq \delta - r$ bulunur. O halde $\omega(\Omega) + r \leq \delta$ için $\omega(\Omega) + r \leq \omega(\Omega + rB)$ elde edilir ki ispat biter. □

Bu bölüm, ρ ile ω ölçüleri arasındaki ilişkiyle ilgili elde edilen sonuç kanıtlanarak bitirilecektir.

Önerme 3.5.7. *E sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü olsun. Bu durumda her $\Omega \subset E$ için, $\omega(\Omega) \leq \rho(\Omega)$ sağlanır.*

Kanıt. $\rho(\Omega) < \delta$ alalım. O halde $\Omega \subseteq [-u, u] + \delta B_E$ olacak şekilde $0 \leq u \in E$ vardır. Önerme 2.2.12'den dolayı, E örgüsünün her $[-u, u]$ sıra aralığı zayıf kompakt bir kümedir. Dolayısıyla, $\omega(\Omega) \leq \delta$ bulunur ve buradan $\omega(\Omega) \leq \rho(\Omega)$ sonucuna ulaşılır. □

Kaynakça

[1] Y.A. Abramovich, C.D. Aliprantis, *An Invitation to Operator Theory*, Amer. Math. Society, Providence, RI, 2002.

[2] R.R. Akhmerov, M.I. Kamenskii, A.S. Potapov, A.E. Rodkina, B.N. Sadovksii, *Measures of Noncompactness and Condensing Operators*, Birkhäuser Verlag, 1992.

[3] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Academic Press, New York and London, 2006.

[4] J. Banaś and K. Goebel, *Measures of Non-compactness in Banach Spaces*, Marcel Dekker Inc., New York, 1980.

[5] F.S. De Blasi, *On a property of the unit sphere in a Banach space*, Bull. Math. Soc. Sci. Math., 259-262, 1977.

[6] P.G. Dodds and D.H. Fremlin, *Compact operators in Banach lattices*, Israel J. Math. 34, 287-320, 1979.

[7] I.T. Gohberg, L.S. Goldenstein and A.S. Markus, *Investigation of some properties of bounded linear operators in connection with their q-norms*(Russian), Uch. Zap. Kishinevsk. Un-ta 29, 29-36, 1957.

[8] A. Kumar, *Fredholm composition operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 79, 233-236, 1980.

[9] K. Kuratowski, *Sur les espaces complets*, Fund. Math. 15, 301-309, 1930.

[10] W.A.J. Luxemburg and A.C. Zaanen, *Riesz Spaces I*, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[11] J. Mallet-Paret, R.D. Nussbaum, *Inequivalent measures of noncompactness and the radius of the essential spectrum* Proc. Amer. Math. Soc., 917-930, 2011.

[12] J. Mallet-Paret, R.D. Nussbaum, *Inequivalent measures of noncompactness*, Annali di Matematica, 453-488, 2011.

[13] P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Springer-Verlag, 1991.

[14] R.D. Nussbaum, *The radius of the essential spectrum*, Duke Math. J. 38, 473-478, 1970.

[15] B. de Pagter, A.R. Schep, *Measures of non-compactness of operators in Banach lattices*, J. Funct. Anal. 78, 1988.

[16] H. Radström, *An embedding theorem for spaces of convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc. 3, 165-169, 1952.

[17] H.H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

[18] A.R. Schep, *The measures of non-compactness of a disjointness preserving operator*, J. Oper. Theory 21, 397-402, 1989.

[19] M.L. Treuden, *Asymptotically Compact Operator Approximation Theory*, PhD Thesis, Oregon State University, 1983.

[20] V.G. Troitsky, *Measures of Non-compactness of Operators on Banach Lattices*, Positivity vol.8, 165-178, 2004.

[21] L. Weis and M. Wolff, *On the essential spectrum of operators on L^1*, Semesterbericht Funktionalanalysis Tübingen, Sommersemester 1984.

[22] W. Wnuk, *Banach Lattices with Order Continuous Norms*, Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1999.

[23] A.C. Zaanen, *Riezs Spaces II*, North-Holland, Amsterdam, 1983.

Özgeçmiş

Begüm Çalışkan 1989 yılında İstanbul'da doğdu. Lise eğitimini Gaziosmanpaşa Anadolu Lisesi'nde tamamladıktan sonra 2007 yılında İstanbul Kültür Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü'ne kaydoldu. 2011 yılında lisans öğrenimini tamamlayarak İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı.