T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

S5EC ve KD45-O MODAL MANTIKLARININ MODELLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe BÖLÜK

1009041002

Anabilim Dalı	:	**Matematik - Bilgisayar**
Programı	:	**Matematik - Bilgisayar**
Tez Danışmanı	:	**Prof. Dr. Çiğdem GENCER**

Temmuz 2013

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın içinde daima yer alan, hiçbir yardım teklifimi geri çevirmeyen, zorlandığım zaman beni motive eden, yaptığı yorumlarla bana rehber olan Prof. Dr. Çiğdem GENCER'e; sorduğum her soruya verdiği tatmin edici cevaplarla beni etkileyen Prof. Dr. Dick de JONGH'a; bu tezin yazımında yardım eden, zorlandığım zamanlarda benimle birlikte düşünen İstanbul Kültür Üniversitesi'ndeki arkadaşım İlayda ATEŞ'e ve son olarak varlıklarını her zaman yanımda hissettiğim aileme teşekkür ederim.

Temmuz 2013 Ayşe BÖLÜK

İÇİNDEKİLER

Üniversitesi	**:**	**İstanbul Kültür Üniversitesi**
Enstitüsü	**:**	**Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı	**:**	**Matematik - Bilgisayar**
Programı	**:**	**Matematik - Bilgisayar**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Çiğdem GENCER**
Tez Türü ve Tarihi	**:**	**Yüksek Lisans - Temmuz 2013**

ÖZET

S5EC ve KD45-O MODAL MANTIKLARININ MODELLERİ ÜZERİNE

Ayşe BÖLÜK

Bu tezde, S5EC ve KD45-O modal mantıklarının sonlu Henkin ve filtreleme yöntemiyle elde edilen modellerinin izomorf olduğu ispatlanmıştır. Bu amaçla S5EC ve KD45-O modal mantıklarının modal tamlığından ve kanonik modellerinden yararlanılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Epistemik mantık, makul olma, sağlamlık, tamlık, kanonik model, sonlu Henkin yöntemi, filtreleme yöntemi.

University	**:**	**İstanbul Kültür University**
Institute	**:**	**Institute of Science**
Science Programme	**:**	**Mathematics and Computer**
Programme	**:**	**Mathematics and Computer**
Supervisor	**:**	**Prof. Dr. Çiğdem GENCER**
Degree Awarded and Date	**:**	**M.Sc. - July 2013**

ABSTRACT

ON MODELS OF THE MODAL LOGICS S5EC AND KD45-O

Ayşe BÖLÜK

We prove in this thesis that the models for the modal logics S5EC and KD45-O obtained by the finite Henkin method are isomorphic to the ones obtained by the filtration. For that purpose, we use the completeness and canonical models.

Keywords : Epistemic logic, plausibility, soundness, completeness, canonical model, finite Henkin method, filtration method.

Bölüm 1

Giriş

İlk olarak felsefe alanındaki çalışmalarda kullanılan modal mantık, günümüzde matematik, bilgisayar bilimleri, yapay zeka ve oyun teori gibi alanlarda da kullanılmaktadır. Geçmişi antik Yunanlılara kadar dayanmasına rağmen 1918'e kadar modalite alanındaki çalışmalar informel olarak kalmıştır. Modalite kavramlarına formel olarak ilk yaklaşım, C .I. Lewis'in 1918'deki çalışmasında, 'zorunluluk' ve 'olanaklılık' modal kavramları olarak karşımıza çıkmaktadır [12]. Bu fikre göre bir φ formülü için $\Box\varphi$ ve $\Diamond\varphi$ ifadeleri sırasıyla 'φ zorunludur', 'φ olasıdır' olarak ifade edilir. Bu tarihten sonra başka kavramları da formel olarak ifade etmek için modal operatörler kullanılmıştır. 1930'larda Kurt Gödel, matematiksel ispatlanabilirlik kavramını formelize etmek için modal operatör kullanmayı tercih etmiştir. Burada Gödel, $\Box\varphi$'yi φ'nin matematiksel ispatlanabilirliği olarak, $\Diamond\varphi$'yi ise φ'nin tutarlılığı olarak yorumlamıştır [4].

Lewis ve Gödel'in çalışmalarını takip eden yıllarda dinamik mantık, zaman mantığı ve epistemik mantık gibi mantıklar, çeşitli modaliteleri modal operatörler arasına eklemişlerdir. Örneğin epistemik mantıkta, semantik olarak $\Box$ operatörü gibi çalışan K operatörü bir şeyin bilinmesi olarak ifade edilir [6]. Modal mantığın alt mantıklardan olan epistemik mantık, bilgisayar biliminde bilgi tabanlı programlamanın ana konularından biri haline gelmiştir [4].

Bu çalışmada, epistemik mantığın temel kavramları olan bilgi ve değerleri ele alan S5EC ve KD45-O modal mantıkları incelenmiştir. Bu amaçla öncelikle Bölüm 2'de bu mantıkların dili, formülleri, aksiyom sistemleri, türetim kuralları ve modelleri tanımlanmıştır.

Bölüm 3 ve bölüm 4'te verilen aksiyom sistemlerinin sağlam ve tam oldukları gösterilmiştir. Tamlık ispatında filtreleme ve sonlu Henkin metodları uygulanmıştır.

Bölüm 5'te ise filtreleme ve sonlu Henkin metoduyla elde edilen modellerin izomorf oldukları ispatlanmıştır.

Bölüm 2

Ön Bilgiler

2.1 Epistemik Mantık

Bu bölümde tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak amacıyla bazı temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Buradaki tüm bilgiler [1], [2], [5], [10]'da bulunabilir.

Mantığın ve mantıksal formalizmin bilgisayar bilimlerinde, yapay zeka ve ekonomi gibi alanlarda kullanımı son yıllarda büyük oranda artmıştır. Bu mantıklar orjinal olarak felsefe için geliştirilmiş olan mantıklardır. Bu mantıklardan biri olan epistemik mantık, modal mantığın temel kavramları olan zorunluluk ve olanaklılık kavramlarının epistemik anlamda yeniden yorumlanmasıyla elde edilmiştir.

Bilgi ve değerler kavramlarına dayalı olan epistemik mantık, bu kavramları formel olarak incelemek için geliştirilmiştir. Bilgi kavramının formel hale getirilmesi ilk olarak von Wright'ın [15] çalışmalarında ortaya çıkar ve bu çalışmalar daha çok sentaks temeline dayanır. Daha sonra Hintikka 1962 yılında yazdığı bir kitapta mümkün dünyalar semantiğini kullanarak bilgi kavramına açık bir semantik verenlerden biri olmuştur [8]. Geçmişi Leibniz'e kadar uzanan ve Hintikka tarafından geliştirilip formalizasyonunun da Kripke [11] tarafından yapıldığı mümkün dünyalar kavramı, bilginin formel hale getirilmesinde temel bir rol oynamıştır.

Mümkün dünyalar kavramının altında yatan fikir, bir kişinin gerçek bir durumun yanında alternatif başka durumların (mümkün dünyaların) da var olduğunu düşünmesidir. Buradan, bir kişinin bir φ ifadesini bilmesi için gerek ve yeter koşulun onun mümkün olduğunu düşündüğü (onun bilgisiyle tutarlı olan) her durumda φ'nin doğru olması olarak ortaya çıkar. Örneğin San Francisco'da yaşayan bir a kişisinin Londra'daki hava durumu hakkında bir bilgisi yoksa onun için mümkün olan bazı dünyalarda ”Londra'da hava güneşlidir” ifadesi sağlanırken, bazı dünyalarda da ”Londra'da hava yağmurludur” ifadesi sağlanır. Bu nedenle de bu kişinin Londra'daki havanın güneşli olduğunu bildiğini söyleyemeyiz. Bununla birlikte eğer güvenilir bir kaynaktan havanın güneşli olduğu bilgisini alırsa artık o ”Londra'da hava yağmurludur” ifadesinin sağlandığı dünyaları mümkün dünya olarak görmeyecektir [7].

Şimdi bilgi kavramının formel olarak nasıl ifade edileceğini inceleyelim.

2.1.1 Epistemik Mantık Sentaksı

Epistemik mantığın dili, klasik önermeler mantığının diline K (knowledge) operatörünün eklenmesiyle elde edilir.

Tanım 2.1.1. *$n \in N$ için $\mathbf{P} = \{p_n \mid n \in N\}$ atomik önermeler kümesi ve $\mathbf{A} = \{1, ..., m\}$, m temsilcilerin bir kümesi olsun. $\mathbf{A}$ üzerindeki $\varphi, \psi, ...$ epistemik formüllerin L_K kümesi aşağıdaki özellikler altında kapalı en küçük kümedir:*

(i) $p \in \mathbf{P}$ ise $p \in L_K$,

(ii) $\varphi, \psi \in L_K$ ise $(\varphi \wedge \psi), \neg\varphi \in L_K$,

(iii) $\varphi \in L_K$ ise her $i \in \mathbf{A}$ için $K_i\varphi \in L_K$.

Burada $K_i\varphi$; i kişisi φ'yi bilir şeklinde yorumlanır. Burada ”kişi” bir insan, makine veya bir oyundaki oyuncu da olabilir. Bununla birlikte K_i modal operatörünün dual operatörü olan $\hat{K}_i = \neg K_i \neg\varphi$; i kişisi φ gerçeğinin doğru olabileceğini düşünür şeklinde yorumlanabilir.

2.1.2 Epistemik Mantık Semantiği

Tanım 2.1.2. $\mathbf{P}$ *atomik önermelerin sayılabilir bir kümesi ve* $\mathbf{A}$ *kişilerin sonlu bir kümesi olsun. $i \in \mathbf{A}$ olmak üzere bir epistemik Kripke model, $\mathfrak{M} = \langle S, R_i, V\rangle$ yapısıdır öyle ki*

(i) S boştan farklı durumlar kümesi,

(ii) R_i, S üzerinde erişilebilirlik bağıntısı,

(iii) V her bir duruma doğruluk değeri atayan bir fonksiyondur.

Eğer i kişisi iki durumu birbirinden ayırt edemiyorsa iki durum arasında R_i bağıntısı vardır. Bu nedenle bu bağıntıya ayırtedilmezlik bağıntısı da denir. Genel olarak ayırtedilemezlik bağıntısı denklik bağıntısı olarak ele alınır.

Örnek 2.1.3. *Groningen, Liverpool ve Otago (GLO) senaryosunun modelinde ayırtedilemezlik bağıntısını inceleyelim [6]. Bir b kişisi Groningen şehrinde yaşasın ve Groningen ile Liverpool şehirlerindeki hava durumu hakkında bir teori oluştursun. Buna göre Groningen'de hava ya güneşlidir (g ile gösterelim) veya değildir ($\neg g$), benzer durum Liverpool için de geçerlidir: güneşli (l) veya değil ($\neg l$). Bu durumda aşağıdaki 4 durum ortaya çıkmaktadır.*

$$\begin{tikzcd}
(g,l) \arrow[loop above, "b"] \arrow[d, leftrightarrow, "b"'] & (\neg g,l) \arrow[loop above, "b"] \arrow[d, leftrightarrow, "b"] \\
(g,\neg l) \arrow[loop below, "b"] & (\neg g,\neg l) \arrow[loop below, "b"]
\end{tikzcd}$$

Şekil 1. GLO modeli

Burada (g,l) durumu hem Groningen'de hem de Liverpool'da havanın güneşli olduğu durumu göstermektedir. b, Groningen'de yaşadığından buradaki hava durumunu bilir fakat Liverpool'dakini bilemez. Başka bir değişle (g,l) durumunu (g,$\neg$l) durumundan ayıramazken ($\neg$g,l) durumunu da ($\neg$g,$\neg$l)'den ayıramaz.

Tanım 2.1.4. *Bir φ formülünün türetimi $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n = \varphi$ formüllerinin sonlu dizisidir öyle ki $1 \leq i \leq n$ için her bir φ_i formülü ya bir aksiyomdur ya da kendinden önce gelen φ_j ($j < i$ için) formüllerine bir türetim kuralı uygulanarak elde edilir. Bir φ formülü,* **S** *sisteminin kuralları ve aksiyomları kullanılarak türetilmişse $\mathbf{S} \vdash \varphi$ yazılır. Bu durumda φ'ye* **S***-teoremdir denir.*

Şimdi bir epistemik modeli ve bu modelde doğruluk kavramını inceleyelim.

Tanım 2.1.5. $\mathfrak{M} = \langle S, R_i, V \rangle$ *bir Kripke model ve s bir durum olmak üzere, epistemik formüller* $(\mathfrak{M}, s)$ *ikilisi üzerinde yorumlanırlar.* $(\mathfrak{M}, s)$, $s \in S$ *anlamındadır.* $\mathfrak{M}$ *epistemik bir model ise* $(\mathfrak{M}, s)$ *ikilisine bir epistemik durum denir.* $(\mathfrak{M}, s)$ *yerine* $\mathfrak{M}, s$ *yazılacaktır.*

$\mathfrak{M} = \langle S, R_i, V \rangle$ *bir model olmak üzere;* $\mathfrak{M}, s$*'de φ doğrudur ifadesi* $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ *şeklinde yazılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır:*

(i) $\mathfrak{M}, s \models p$ *olması için gerek ve yeter koşul (g.y.k.)* $s \in V(p)$ *olmasıdır.*

(ii) $\mathfrak{M}, s \models \neg\varphi$ *olması için (g.y.k.)* $\mathcal{M}, s \models \varphi$ *olmamasıdır.*

(iii) $\mathfrak{M}, s \models \psi \wedge \chi$ *olması (g.y.k.)* $\mathfrak{M} \models \psi$ *ve* $\mathfrak{M} \models \chi$ *olmasıdır.*

(iv) $\mathfrak{M}, s \models K_i\varphi$ *olması için (g.y.k.)* $(s,t) \in R_i$ *olan her t için* $\mathfrak{M}, t \models \varphi$ *olmasıdır.*

(v) $\mathfrak{M}, s \models \hat{K}_i\varphi$ *olması için (g.y.k.)* $(s,t) \in R_i$ *en az bir t vardır öyle ki* $(s,t) \in R_i$ *ve* $\mathfrak{M}, t \models \varphi$*'dir.*

φ bir epistemik formül olsun. φ'nin bir $\mathfrak{M} = \langle S, R_i, V \rangle$ **Kripke modelinde geçerli** ($\mathfrak{M}, s \models \varphi$) olması için (g.y.k.) her $s \in S$ için $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ olmasıdır. Bununla birlite φ'nin **geçerli** ($\models \varphi$) olması için (g.y.k.) her $\mathfrak{M}$ ve her $s \in S$ için $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ olmasıdır.

φ formülü $\mathfrak{M}$ modelinin bir s durumunda yanlış ise φ formülü s'de yanlıştır denir ve $\mathfrak{M}, s \not\models \varphi$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.6. *Bir S5EC modelde $\models \psi$ ve $\models \psi \to \varphi$ ise $\models \varphi$'dir.*

İspat. $\mathfrak{M}$ bir S5EC model ve s, bu model üzerinde keyfi bir durumu için $\mathfrak{M}, s \models \psi \to \varphi$ ve $\mathfrak{M}, s \models \psi$ olsun. Bu durumda $\mathfrak{M}, s \models \neg\psi \vee \varphi$'dir. Buradan $\mathfrak{M}, s \not\models \psi \vee \mathfrak{M}, s \models \varphi$ elde edilir. Bununla birlikte $\mathfrak{M}, s \models \psi$ olduğundan $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ olur. $\mathfrak{M}$ ve s keyfi olarak seçildiklerinden $\models \varphi$ elde edilir. ⊠

Örnek 2.1.7. *GLO senaryosundaki model M_1 olsun. $M_1, (\neg g, l) \models K_b \neg g \wedge \neg K_b l$'dir.*

İspat. $M_1, (\neg g, l) \models K_b \neg g$'dir çünkü b'nin $(\neg g, l)$ durumundan ayırt edemediği durumlar $(\neg g, l)$, $(\neg g, \neg l)$'dir ve $M_1, (\neg g, l) \models \neg g$, $M_1, (\neg g, l) \models \neg g$ olduğundan $M_1, (\neg g, l) \models K_b \neg g$'dir. Bununla birlikte yine $(\neg g, l)$ durumunun bağlantılı olduğu durumlardan bir tanesi $(\neg g, \neg l)$ ve $M_1, (\neg g, \neg l) \models \neg l$ olduğundan $M_1, (\neg g, l) \models \neg K_b l$'dir. Buradan $M_1, (\neg g, l) \models K_b \neg g \wedge \neg K_b l$ olur. ⊠

Bilgi için aksiyom sistemini tanımlamak için öncelikle minimal modal mantık **K**'yi tanımlayalım.

Tanım 2.1.8. **A** $= \{1, ..., m\}$ *olmak üzere,* **K** *sistemi aşağıdaki aksiyomları içeren ve verilen türetim kuralları altında kapalı olan bir sistemdir:*

Aksiyomlar:

(A1) Bütün önermesel totolojiler

(A2) $K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi)(i = 1, ..., m)$

Türetim Kuralları:

(R1) Modus Ponens: $\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$ *ve*

(R2) Zorunluluk: $\frac{\varphi}{K_i\varphi}$ *'dir.*

Burada (A2) aksiyomu K aksiyomu olarak adlandırılır ve bu aksiyom bilginin türetim altında kapalı olduğunu söyler. Bununla birlikte (A1) ve (A2) aksiyomları bilgi kavramını tam olarak temsil edemez. Bunun için **K** sisteminin aksiyomlarına aşağıdaki aksiyomlar eklenir:

(A3) $K_i\varphi \rightarrow \varphi(i = 1, ..., m)$

(A4) $K_i\varphi \rightarrow K_iK_i\varphi(i = 1, ..., m)$

(A5) $\neg K_i\varphi \rightarrow K_i\neg K_i\varphi(i = 1, ..., m)$

(A3), (A4) ve (A5) aksiyomları sırasıyla T, 4 ve 5 şemaları olarak da adlandırılırlar. (A1)-(A5) aksiyomları (R1)-(R3) türetim kurallarından oluşan bu mantık S5 mantığı olarak adlandırılır. S5 sistemi, bilgi kavramını temsil etmesi açısından diğer sistemlere göre teknik özellikleriyle daha iyi ve yeterli bir sistemdir.

Şimdi de aksiyomlar ile modeller arasındaki ilişkiyi ifade eden önermeyi verelim.

Önerme 2.1.9. $\mathfrak{M} = \langle S, R_i, V\rangle$ *Kripke model olmak üzere,*
(i) $\mathfrak{M} \models$ *A3 ise* $\mathfrak{M}$ *yansımalı,*
(ii) $\mathfrak{M} \models$ *A4 ise* $\mathfrak{M}$ *geçişli,*
(iii) $\mathfrak{M} \models$ *A5 ise* $\mathfrak{M}$ *öklidyen'dir.*

İspat. (i) $\mathfrak{M} \models$ (A3) olsun. Bu durumda her $s \in S$ için $\mathfrak{M}, s \models K_i\varphi \rightarrow \varphi$'dir. Buradan $\mathfrak{M}, s \models K_i\varphi \rightarrow \mathfrak{M} \models \varphi$ olur. Öyleyse $\mathfrak{M}, s \models K_i\varphi$ ise $\mathfrak{M}, s \models \varphi$'dir. $s' \in S$ ve $(s, s') \in R_i$ olsun. O halde model tanımından $\mathfrak{M}, s' \models \varphi$'dir. Bununla birlikte $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ olduğu için özel olarak s', s olarak seçilirse $(s, s') \in R_i$ olur. R_i yansımalıdır.

(ii)$\mathfrak{M} \models$ (A4) olsun. Öyleyse her $s \in S$ için $\mathfrak{M}, s \models K_i\varphi \rightarrow K_iK_i\varphi$'dir. Öyleyse $\mathfrak{M}, s \models K_i\varphi$ ise $\mathfrak{M}, s \models K_iK_i\varphi$'dir. $t, m \in S$ ve $(s, t), (t, m) \in R_i$ olsun. $\mathfrak{M}, s \models K_iK_i\varphi$ ise $\mathfrak{M}, t \models K_i\varphi$ olur. Buradan $\mathfrak{M}, m \models \varphi$ elde edilir. Bununla birlikte $\mathfrak{M}, s \models K_i\varphi$ kullanılırsa $(s, m) \in R_i$ olur. R_i geçişlidir.

(iii) $\mathfrak{M} \models$ (A5) olsun. Bu durumda her $s \in S$ için $\mathfrak{M}, s \models \neg K_i\varphi \rightarrow K_i\neg K_i\varphi$'dir. $(s, t), (s, u) \in R_i$ olsun. $(t, u) \in R_i$ olduğunu göstermeliyiz. $\mathfrak{M}, s \models K_i\neg K_i\varphi$ ise $\mathfrak{M}, t \models \neg K_i\varphi$'dir. O halde bir $t' \in S$ vardır öyle ki $(t, t') \in R_i$ ve $\mathfrak{M}, t' \models \neg\varphi$'dir. Bununla birlikte $\mathfrak{M}, s \models \neg K_i\varphi$ ise $(s, u) \in R_i$ olduğundan $\mathfrak{M}, u \models \neg\varphi$'dir. Bu durumda model olma tanımı kullanılarak t', u olarak seçilirse $(t, u) \in R_i$ olur. O halde R_i öklidyendir. ⊠

Tanım 2.1.10. *S5 modal mantığı için bir Kripke model* $\langle S, R_i, V\rangle$*'de* R_i *yansımalı, simetrik ve geçişlidir.*

2.1.3 S5EC Sistemi

Bir önceki bölümde temel bilgi kavramını inceledik. Bu bölümde ise bilginin grup kavramlarını inceleyeceğiz. Bunlardan ilki, genel bilgi kavramıdır ve E (everyone knows) ile gösterilir. Eğer φ bir B grubunun bütün kişileri arasında biliniyorsa φ genel bilgi (general knowledge) olarak adlandırılır ve $E_B\varphi$ ile gösterilir. İkinci kavram ortak bilgi (common knowledge) kavramıdır; eğer φ doğru ve grubun bütün kişileri tarafından biliniyor, bununla birlikte her bir kişi diğerlerinin φ'yi bildiğini biliyor ve bu şekilde devam ediyorsa φ'ye ortak bilgi denir ve $C_B\varphi$ ile gösterilir. **A** kişilerin sonlu kümesi olmak üzere,

$E_B\varphi = \bigwedge_{i\in\mathbf{A}} K_i\varphi$,

$C_B\varphi = \varphi \wedge E\varphi \wedge EE\varphi...$'dir.

Örnek 2.1.11. *İki general (koordineli saldırı) örneğini inceleyelim. a ve b iki müttefik general iki dağda bekliyor ve düşmanları da bu iki dağın arasındaki vadiden geçecek olsun. İkisi birlikte aynı zamanda düşmanlarına saldırırlarsa savaş bu generaller tarafından kazanılacak, sadece bir tanesi saldırırsa kaybedilecektir.*

General a, b'ye saldırının ne zaman olacağına dair bir φ *mesajı göndersin ve bu mesaj b tarafından alınsın. Bu durumda hem* $K_b\varphi$ *hem de* $K_bK_a\varphi$ *doğru olur. Fakat mesajın b'ye ulaşıp ulaşmadığını a henüz bilmediğinden* $K_aK_b\varphi$ *doğru değildir. b, mesajı aldığına dair a'ya mesaj göndersin, öyleyse* $K_aK_bK_a\varphi$ *doğru olur. Ancak b mesajın a tarafından alındığından emin değildir dolayısıyla* $K_aK_bK_a\varphi$ *gerçeklenmez. Böylece hiçbir zaman* $C_B\varphi$ *kurulamayacaktır. O halde a ve b'nin eş zamanlı hareket edebilmeleri için ortak bilgi gereklidir.*

S5EC sisteminin dili L_{KEC}, epistemik mantığının diline E ve C operatörlerinin eklenmesiyle elde edilir.

Tanım 2.1.12. $n \in N$ *için* $\mathbf{P} = \{p_n \mid n \in N\}$ *atomik önermeler kümesi ve* $\mathbf{A} = \{1, ..., m\}$*, m temsilcilerin bir kümesi olsun.* **A** *üzerindeki* $\varphi, \psi, ...$ *epistemik formüllerin* L_{KEC} *kümesi aşağıdaki özellikler altında kapalı en küçük kümedir:*

(i) $p \in \mathbf{P}$ *ise* $p \in L_{KEC}$,

(ii) $\varphi, \psi \in L_{KEC}$ *ise* $(\varphi \wedge \psi), \neg\varphi \in L_{KEC}$,

(iii) $\varphi \in L_{KEC}$ *ise her* $i \in \mathbf{A}$ *için* $K_i\varphi \in L_{KEC}$,

(iv) $\varphi \in L_{KEC}$ *ise her* $i \in \mathbf{A}$ *için* $C_B\varphi, E_B\varphi \in L_{KEC}$*'dir.*

Tanım 2.1.13. *Bir B grubu için S bir küme ve* $R_b(b \in B)$*, S üzerinde bir bağıntı olsun.*

(i) $R_{E_B} = \bigcup_{b \in B} R_B$.

(ii) Bir R bağıntısının geçişmeli kapanışı en küçük R^+ bağıntısıdır öyle ki

(1) $R \subseteq R^+$;

(2) Her x, y, z için eğer $(R^+xy \& R^+yz)$ ise R^+xz'dir.

R'nin yansımalı ve geçişmeli kapanışı R^* ile gösterilir.

Tanım 2.1.14. **P** *atomik önermelerin sayılabilir bir kümesi ve* **A** *temsilcilerin sonlu bir kümesi olsun. $i \in$ **A** ve $p \in$ **P** olmak üzere S5EC mantığının bir Kripke modeli $\mathfrak{M} = \langle S, R_i, R_E, R_C, V \rangle$ aşağıdaki gibi tanımlanır:*

(i) S boştan farklı durumlar kümesi,

(ii) Her $i \in A$ için $R_i \subseteq SxS$,

$R_E = R_1 \cup ... \cup R_m$,

$R_C = R_E^*$,

(iii) $V(p) \subseteq S$*'dir.*

Tanım 2.1.15. $\mathfrak{M} = \langle S, R_i, R_E, R_B, V \rangle$ *ve $s \in S$ olsun. φ, bir epistemik formül olmak üzere,*

$\mathfrak{M}, s \models E\varphi \Leftrightarrow \forall t, (s,t) \in R_{E_B}$ *ise* $\mathfrak{M}, t \models \varphi$.

$\mathfrak{M}, s \models C\varphi \Leftrightarrow \forall t, (s,t) \in R^*_{E_B}$ *ise* $\mathfrak{M}, t \models \varphi$.

Tanım 2.1.16. *S5EC sistemi, (A1)-(A5) aksiyomlarına ve (R1),(R2) türetim kurallarına aşağıda verilen aksiyomların ve türetim kuralının eklenmesiyle elde edilir:*

(A6) $E\varphi \leftrightarrow K_1\varphi \wedge ... \wedge K_m\varphi$

(A7) $C\varphi \rightarrow \varphi$

(A8) $C\varphi \rightarrow EC\varphi$

(A9) $(C\varphi \wedge C(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow C\varphi$

(A10) $C(\varphi \rightarrow E\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow C\varphi)$

Türetim Kuralları:

(R3) $\frac{\varphi}{C\varphi}$

2.2 KD45 Modal Mantığı

Bu bölümde bilginin başka bir biçimi olan değer (inanç) kavramını inceleyeceğiz. Plato, bilginin gerekçelendirilmiş doğru inanç olduğunu iddia etmiş ve bu iddia uzun bir süre felsefeciler tarafından tartışılmıştır. Fakat Gettier [9] 1963 yılında yayımladığı makalesinde bu iddiaya karşı örnekler vermiştir. Bu tarihten sonra epistemolojide gerekçelendirilmiş doğru inanç, bilgi için gerekli olan koşullardan sadece biri olarak ele alınmıştır. Bu tanıma dayanarak bilgi ve inanç kavramları arasıdaki ilişkinin $K\varphi \rightarrow B\varphi$ olduğu görülür.

Her ne kadar değer kavramı için çeşitli mantıklar var olsa da bizim ele alacağımız mantıkta inanç, doğru olması gerekmeyen bilgi olarak dikkate alınacaktır. Buradan yola çıkarak bilgi ve değer arasındaki temel farklılığın bilgide verilen ifadenin doğru olması gerekirken, inançta doğru olamayabileceği olduğunu görürüz. Bu durumda T şeması olarak adlandırılan S5 sistemindeki (A3) aksiyomu, $B\varphi \rightarrow \varphi$, bu mantıkta gerçeklenmez. Bununla birlikte inanılan önermelerin tutarlı olması beklenir, yani aynı anda hem φ'ye hem de onun tersi olan $\neg\varphi$'ye inanılamaz. Bu ise T aksiyomundan daha zayıf bir aksiyom olan D: $\neg B \perp$ ile gösterilir. Bu mantığın diğer aksiyomları S5 sistemindekiyle benzerdir. Elde edilen bu yeni sistem, KD45 sistemi olarak adlandırılır ki bu sistem zayıf S5 sistemi olarak da ele alınır.

2.2.1 KD45 Modal Mantık Sentaksı

A kişiler kümesi ve $i \in \mathbf{A}$ olmak üzere, KD45 mantığının dili bilgi mantığının diliyle aynıdır ve burada K_i operatörünün yerine B_i operatörü vardır.

2.2.2 KD45 Modal Mantık Semantiği

Formüllerin semantiği bilgi mantığındakiyle aynıdır fakat burada bağıntılar bilgi yerine kişilerin değerleri ile bağlantılıdır ve B_i operatörünün bir KD45 modelde doğruluğu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\mathfrak{M}, s \models B_i\varphi \Leftrightarrow (s,t) \in R_i$ olan her t için $\mathfrak{M}, t \models \varphi$.

Tanım 2.2.1. *KD45 sistemi aşağıdaki aksiyomları içeren ve verilen türetim kuralları altında kapalı olan bir sistemdir:*

(A1) Bütün önermesel totolojiler

(A2) $B_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (B_i\varphi \rightarrow B_i\psi)(i = 1, ..., m)$

(D) $\neg B_i(\perp)$

(A4) $B_i\varphi \rightarrow B_iB_i\varphi(i = 1, ..., m)$

(A5) $\neg B_i\varphi \to B_i\neg B_i\varphi (i = 1, ..., m)$

Türetim Kuralları:

(R1) Modus Ponens: $\frac{\varphi, \varphi\to\psi}{\psi}$ *ve*

(R2) Zorunluluk: $\frac{\varphi}{B_i\varphi}$*'dir.*

Tanım 2.2.2. *KD45 modal mantığı için bir $\mathfrak{M}$ modeli geçişli, serial ve öklidyendir.*

2.2.3 KD45-O Modal Sistemi

İnsanlar seçim yaparken veya karar verirken kendilerinde var olan inançlarını (değerlerini) kullanılar. Bir bahis oyununda para yatıracağımız takımı seçerken bu takımlardan hangisinin kazanacağına dair olan inancımız daha kuvvetliyse ona para yatırırız. Bir iş başvurusunda bulunan adaylardan hangisinin işi yapabileceğine dair inancımız daha güçlüyse onu seçeriz.

İnançların karşılaştırılması için formel dil oluşturmadan önce sıralama kavramına değinelim. φ ve ψ iki formül olmak üzere $B\varphi \succ B\psi$, φ'ye olan inancın ψ'ye olandan daha güçlü olduğunu göstermektedir. Buradaki $B\varphi \succ B\psi$ yerine $\varphi \succ_B \psi$ yazılacaktır. Dünyalar arasındaki sıralama, bir yarı lineer sıralama bağıntısı olan $\leq$ bağıntısı olacaktır. $w \leq v$ ifadesi, w dünyası v'den daha makuldür olarak yorumlanacaktır. Dünyaların kümeleri arasındaki sıralamada ise yine yarı lineer sıralama bağıntısı olan $\geq_B$ bağıntısı kullanılacaktır.

Tanım 2.2.3. *Atomik önermelerin sayılabilir kümesi Φ verilmiş olsun. $p \in \Phi$ olmak üzere bir φ, ψ KD45-O formüllerin L_B sonlu kümesi aşağıdaki özellikler altında en küçük kümedir:*

(i) $p \in \mathbf{P}$ *ise* $p \in L_B$,

(ii) $\varphi, \psi \in L_B$ *ise* $(\varphi \vee \psi), \neg\varphi \in L_B$,

(iii) $\varphi \in L_B$ *ise* $B\varphi, U\varphi \in L_B$,

(iv) $\varphi, \psi \in L_B$ *ise* $\varphi \succ_B \psi, \varphi \not\succ_B \psi \in L_B$*'dir.*

Tanım 2.2.4. *S, boştan farklı sonlu durum kümesi; V, doğruluk değer ataması fonksiyonu; $\leq$, S üzerinde tanımlı yarı lineer sıralama bağıntısı ve $\geq_B, \mathcal{P}(S)$ üzerinde tanımlı yarı lineer sıralama bağıntısı olmak üzere $\mathfrak{M} = \langle S, \leq, \geq_B, V\rangle$ modeli aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir KD45-O modeldir:*

(i) $X \subseteq Y$ *ise* $Y \geq X$,

(ii) $\mathcal{B}, \leq$*-minimal dünyaların kümesi olmak üzere, eğer* $\mathcal{B} \subseteq X$ *ve* $\mathcal{B} \nsubseteq Y$ *ise* $X >_B Y$*'dir. Burada* $>_B$ *sıralaması kesin sıralamadır,*

(iii) $X \neq \emptyset$ *ise* $X >_B \emptyset$,

burada $\leq$-minimal dünyaların kümesi $\mathcal{B} = \{t \mid \text{her } t' \in S \text{ için } t \leq t'\}$'dır [3].

Tanım 2.2.5. *Bir KD45-O model* $\mathfrak{M}$*'de* φ *formülünün doğruluk tanımı aşağıdaki şekilde verilir:*

(i) $\mathcal{M}, s \models p$ *olması için gerek ve yeter koşul (g.y.k.)* $s \in V(p)$ *olmasıdır.*

(ii) $\mathfrak{M}, s \models \neg\varphi$ *olması için (g.y.k.)* $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ *olmamasıdır.*

(iii) $\mathfrak{M}, s \models \psi \vee \chi$ *olması (g.y.k.)* $\mathfrak{M} \models \psi$ *veya* $\mathfrak{M} \models \chi$ *olmasıdır.*

(iv) $\mathfrak{M}, s \models B_i\varphi$ *olması için (g.y.k.) her* $\leq$*-minimal dünya* t *için* $\mathfrak{M}, t \models \varphi$ *olmasıdır.*

(v) $\mathfrak{M}, s \models U\varphi$ *olması için (g.y.k.) her* t *dünyası için* $\mathfrak{M}, t \models \varphi$ *olmasıdır.*

(vi) $\mathfrak{M}, s \models \varphi \succcurlyeq \psi$ *olması için (g.y.k.)* $\{t|\mathfrak{M}, t \models \varphi\} \geq_B \{t|\mathfrak{M}, t \models \psi\}$ *olmasıdır.*

(vii) $\mathfrak{M}, s \models \varphi \succ \psi$ *olması için (g.y.k.)* $\{t|\mathfrak{M}, t \models \varphi\} >_B \{t|\mathfrak{M}, t \models \psi\}$ *olmasıdır.*

Burada $U\varphi$, modeldeki her mümkün dünyada φ doğrudur şeklinde ifade edilir. $\neg U\neg\varphi$'nin duali olan $E\varphi$ ise modelde φ'nin doğru olduğu bir dünyanın varlığını gösterir ve $\varphi \succ_B \perp$ şeklinde ifade edilir [14].

KD45-O sistemi aksiyomatik olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 2.2.6. *KD45-O sistemi aşağıda verilen aksiyom ve türetim kurallarından oluşur:*

(a) KD45 sisteminin aksiyomları
(b) Sıralama aksiyomları

Aksiyomlar:

(i) $\varphi \succcurlyeq_B \varphi$
(ii) $(\varphi \succcurlyeq_B \psi) \wedge (\psi \succcurlyeq_B \chi) \rightarrow (\varphi \succcurlyeq_B \chi)$
(iii) $(\varphi \succ_B \psi) \leftrightarrow (\varphi \succcurlyeq_B \psi) \wedge \neg(\psi \succcurlyeq_B \varphi)$
(iv) $(\varphi \succcurlyeq_B \psi) \vee (\psi \succ_B \varphi)$
(v) $(B\varphi \wedge \neg B\psi) \rightarrow (\varphi \succ_B \psi)$
(vi) $(\varphi \succcurlyeq_B \psi) \rightarrow B(\varphi \succcurlyeq_B \psi)$
(vii) $(\varphi \succ_B \psi) \rightarrow B(\varphi \succ_B \psi)$
(viii) $(\perp \succcurlyeq_B \neg(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\psi \succcurlyeq_B \varphi)$
(ix) $\varphi \rightarrow (\varphi \succ_B \perp)$
(x) $(B\varphi \succ_B \perp) \rightarrow B\varphi$

Türetim Kuralları:

(R1) KD45 sisteminin türetim kuralları
(R2) $\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\psi \succcurlyeq_B \varphi}$

2.2.4 Modal Modellerde Homomorfizma ve İzomorfizma

Bu bölümde modal modeller arasındaki homomorfizma ve izomorfizma kavramlarını tanıtacağız.

Tanım 2.2.7. *Bir* **S** *modal mantığı için* $\mathfrak{M} = \langle S, R, V\rangle$ *ve* $\mathfrak{M}' = \langle S', R', V'\rangle$ *iki* **S** *model olsun.* $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ *fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa bir homomorfizma olarak adlandırılır:*

(i) Her bir önerme değişkeni p *ve her* $s \in S$ *için* $s \in V(p)$ *ise* $f(s) \in V'$*'dür.*

(ii) Her $s, t \in S$ *için* $(s,t) \in R$ *ise* $(f(s), f(t)) \in R'$*'dür.*

Tanım 2.2.8. *Bir* **S** *modal mantığı için* $\mathfrak{M} = \langle S, R, V\rangle$ *ve* $\mathfrak{M}' = \langle S', R', V'\rangle$ *iki* **S** *model olsun.* $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ *fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa bir kuvvetli homomorfizma olarak adlandırılır:*

(i) Her bir önerme değişkeni p *ve her* $s \in S$ *için* $s \in V(p)$ *olması için gerek ve yeter koşul* $f(s) \in V'(p)$ *olmasıdır.*

(ii) Her $s, t \in S$ *için* $(s,t) \in R$ *olması için gerek ve yeter koşul* $(f(s), f(t)) \in R'$ *olmasıdır.*

Tanım 2.2.9. *Bijektif kuvvetli bir homomorfizmaya izomorfizma denir.* $\mathfrak{M}$*'den modelinden* $\mathfrak{M}'$*'n ye bir izomorfizma var ise* $\mathfrak{M}$ *modeli* $\mathfrak{M}'$*'ye izomorftur denir ve* $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$ *ile gösterilir.*

Örnek 2.2.10. $p \in \mathbf{P}$ *olmak üzere,* $\mathfrak{M} = \langle \boldsymbol{N}, <, V\rangle$ *ve* $\mathfrak{M}' = \langle \boldsymbol{N} - \{0\}, <, V'\rangle$ *modelleri aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun.*

$$\bullet^0 \longrightarrow \bullet^1_p \longrightarrow \bullet^2 \longrightarrow \bullet^3_p \longrightarrow \bullet^4 \cdots$$

$\mathfrak{M}$ *modeli*

$$\bullet^1 \longrightarrow \bullet^2_p \longrightarrow \bullet^3 \longrightarrow \bullet^4_p \cdots$$

$\mathfrak{M}'$ *modeli*

Şekil 2. $\mathfrak{M}$ ve $\mathfrak{M}'$ modelleri

Bu durumda

$$f : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M} & \to & \mathfrak{M}' \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

ile tanımlı fonksiyonu bir izomorfizmadır.

İspat.

(i) f fonksiyonu kuvvetli bir homomorfizmadır:

- $(\Rightarrow)$: $w \in V(p)$ olsun. Bu durumda bir $n \in \mathbf{N}$ için $w = 2n+1$ şeklindedir. Buradan $f(w) = w+1 = 2n+2 \in \{2,4,6,...\} = V'(p)$ olur. Öylseyse $f(w) \in V'$'dür.

  $(\Leftarrow)$: $f(w) \in V'$ olsun. Öyleyse bir $n \in \mathbf{N}$ için $f(w) = w+1 = 2n$ şeklindedir. Buradan $f(w)-1 = w = 2n-1 \in \{1,3,5,...\} = V(p)$ elde edilir. O halde $w \in V(p)$'dir.

- $(\Rightarrow)$: Her $x, y \in \mathbf{N}$ için $x < y$ olsun. Bu durumda $f(x) = x+1 < y+1 = f(y)$ olur.

  $(\Leftarrow)$: Her $f(x), f(y) \in \mathbf{N} - \{0\}$ için $f(x) < f(y)$ olsun. Buradan $f(x) = x+1 < y+1 = f(y)$'dir. Bu durumda $x+1-1 < y+1-1$ yani $x < y$'dir.

(ii) f fonksiyonu bijektiftir:

- f bire birdir:

  $f(x) = f(y) \Rightarrow x+1 = y+1 \Rightarrow x = y$'dir.

- f örtendir:

  Eğer $x \in \mathbf{N} - \{0\}$ ise $x-1 \in \mathbf{N}$'dır. O halde her $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ için $y = n-1$ olacak şekilde bir $y \in \mathbf{N}$ vardır. Öyleyse f örtendir.

$\boxtimes$

Bölüm 3

S5EC ve KD45-O Modal Mantıkları için Sağlamlık Teoremleri

3.1 S5EC Modal Mantığında Sağlamlık

Bu bölümde S5EC ve KD45-O modal mantıklarının Tanım 2.1.16 ve Tanım 2.2.1'de verilen aksiyom sistemlerine göre sağlam oldukları kanıtlanacaktır. Herhangi bir modal mantığın sağlamlık teoremi o mantıkta türetilebilir olan bir formülün geçerli olduğunu ifade eder.

Teorem 3.1.1. *Herhangi bir φ formülü için S5EC $\vdash \varphi \Rightarrow$ S5EC $\models \varphi$'dir.*

İspat. İspat φ'nin türetiminin uzunluğu üzerinde tümevarımla yapılır.

Temel Adım: Türetimin uzunluğu n=1 olsun. Bu durumda φ bir aksiyomdur. Bu durumda KD45-O sistemindeki her bir aksiyomun geçerli olduğunu göstermeliyiz. $\mathfrak{M} = \langle S, R_1, ...R_m, R_E, R_C, V\rangle$ bir S5EC model, s ve t bu model üzerinde herhangi iki durum olsun.

(A1) φ formülü bir totoloji olsun. Bu durumda $\models_{PC} \varphi$'dir. Bununla birlikte, modal mantık önermeler mantığını içerdiğinden $\models \varphi$'dir.

(A2) $\mathfrak{M}, s \models K_i\varphi$ ve $\mathfrak{M}, s \models K_i(\varphi \to \psi)$ olsun. Bu durumda $(s,t) \in R_i$ olan her t için $\mathfrak{M}, t \models \varphi$ ve $\mathfrak{M}, t \models \varphi \to \psi$. Öyleyse Önerme 2.1.5'ten $(s,t) \in R_i$ olan her t için $\mathfrak{M}, t \models \psi$. Buradan $\mathfrak{M}, s \models K_i\psi$'dir.

(A3) $\mathfrak{M}, s \models K_i\varphi$ olsun. Bu durumda $(s,t) \in R_i$ olan her t durumu için $\mathfrak{M}, t \models \varphi$'dir. R_i bağıntısı yansımalı olduğundan t durumu s olarak seçilirse $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ olur.

(A4) $\mathfrak{M}, s \models \neg K_i\varphi$ olsun. Öyleyse bir $t \in S$ vardır öyle ki $(s,t) \in R_i$ ve $\mathfrak{M}, t \models \neg\varphi$'dir. $\mathfrak{M}, s \models K_i\neg K_i\varphi$ yani $(s,t') \in R_i$ şeklindeki her $t' \in S$ için $\mathfrak{M}, t' \models \neg K\varphi$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $(s,t') \in R_i$ olsun. R_i bağıntısı aynı zamanda simetrik olduğundan $(t', s) \in R_i$'dir. Bu durumda R_i bağıntısının geçişlilik özelliğinden $(t', t) \in R_i$ olur. $\mathfrak{M}, t \models \neg\varphi$ olduğundan $\mathfrak{M}, t' \models \neg K\varphi$ olur.

(A5) $\mathfrak{M}, s \models \neg K_i\varphi$ olsun. Bu durumda $(s,t) \in R_i$ olacak şekilde bir t vardır öyle ki $\mathfrak{M}, t \models \neg\varphi$. $\mathfrak{M}$'de keyfi bir u durumu alalım öyle ki $(s,u) \in R_i$ olsun. $(s,t) \in R_i$ ve R_i bir denklik bağıntısı olduğundan $(u,t) \in R_i$'dir. $\mathfrak{M}, t \models \neg\varphi$ olduğu için $\mathfrak{M}, u \not\models \neg K_i\varphi$. u, keyfi seçildiği için $\mathfrak{M}, s \models K_i\neg K_i\varphi$.

(A6) $(\Rightarrow)$: $\mathfrak{M}, s \models E\varphi$ ve $\mathfrak{M}, s \not\models (K_1\varphi \wedge ... \wedge K_m\varphi)$ olsun. Bu durumda en az bir $i \leq m$ için $\mathfrak{M}, s \not\models K_i\varphi$'dir. O halde bir $u \in S$ vardır öyle ki $(s,u) \in R_i$ ve $\mathfrak{M}, u \models \neg\varphi$'dir. $(s,u) \in R_i$ olduğundan $s \to u$ elde edilir. Buradan ise $\mathfrak{M}, s \not\models E\varphi$ olur ki bu bir çelişkidir.

$(\Leftarrow)$: $\mathfrak{M}, s \models (K_1\varphi \wedge ... \wedge K_m\varphi)$ ve $s \to t$ olacak şekilde bir t durumunu ele alalım. Bunun anlamı $(s,t) \in R_1 \cup ... \cup R_m$, bu nedenle bazı $i \leq m$'ler için $(s,t) \in R_i$. $\mathfrak{M}, s \models K_i\varphi$ olduğundan $\mathfrak{M}, t \models \varphi$. Bundan dolayı $\mathfrak{M}, s \models E\varphi$ olur.

(A7) $\mathfrak{M}, s \models C\varphi$. Buradan $s \twoheadrightarrow t$ koiulu sağlayan her t için $\mathfrak{M}, t \models \varphi$. Bununla birlikte $s \to s$ olduğundan $s \twoheadrightarrow s$'yi elde ederiz. Bu nedenle $\mathfrak{M}, s \models \varphi$.

(A8) $\mathfrak{M}, s \models C\varphi$ olsun. Şu halde $s \twoheadrightarrow t$ koşulu sağlayan her t için $\mathfrak{M}, t \models \varphi$. $s \to u$ ve $u \twoheadrightarrow v$ olacak şekilde $u, v \in S$ durumlarını ele alalım. Öyleyse $s \twoheadrightarrow v$ olacak şekilde bir bağıntı vardır ve $\mathfrak{M}, s \models C\varphi$ olduğundan $\mathfrak{M}, v \models \varphi$'dir. Bununla birlikte $u \twoheadrightarrow v$ olduğundan ve v keyfi seçildiğinden $\mathfrak{M}, u \models C\varphi$. Buradan da $\mathfrak{M}, s \models EC\varphi$'yi elde ederiz.

(A9) $\mathfrak{M}, s \models C\varphi \wedge C(\varphi \to \psi)$ olsun. $\mathfrak{M}, s \models C\psi$ yani $s \twoheadrightarrow t$ koşulunu sağlayan her t için $\mathfrak{M}, t \models \psi$ olduğunu göstermeliyiz. $s \twoheadrightarrow t$ olsun. Şu halde $\mathfrak{M}, s \models C\varphi$ olduğundan $\mathfrak{M}, t \models \varphi$ ve yine $\mathfrak{M}, s \models C(\varphi \to \psi)$ olduğundan $\mathfrak{M}, t \models (\varphi \to \psi)$'dir. Önerme 2.1.5'ten $\mathfrak{M}, t \models \psi$'dir.

(A10) $\mathfrak{M}, s \models C(\varphi \to E\varphi)$ ve $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ olsun. Göstermemiz gereken $\mathfrak{M}, s \models C\varphi$ yani $s \twoheadrightarrow t$ olan her t için $\mathfrak{M}, t \models \varphi$. $s \to^k t$ olan bütün t'ler için $\mathfrak{M}, t \models \varphi$'yi sağlayan her $k \geq 0$ için k üzerinde tümevarımla göstermemiz yeterlidir. Temel adım olarak k=0 için açıktır çünkü bu durumda t, s'nin kendisidir ve $\mathfrak{M}, s \models \varphi$'dir. Her $k < n$ için iddia doğru olsun. $k = n$ için iddiayı ispatlayalım. t bir durum olsun öyle ki $s \to^n t$ olsun. Öyleyse bir u durumu vardır öyle ki $s \to^{n-1} u \to t$. Tümevarım hipotezinden $\mathfrak{M}, u \models \varphi$. Ayrıca $s \twoheadrightarrow u$ olduğundan $\mathfrak{M}, u \models \varphi \to E\varphi$. Buradan $\mathfrak{M}, u \models E\varphi$'dir yani $u \to v$ olan her v için $\mathfrak{M}, v \models \varphi$'dir. Özellikle v, t olarak seçilirse $\mathfrak{M}, t \models \varphi$'dir.

Tümevarım Hipotezi: Teorem türetimin uzunluğu n için doğru olsun.

Tümevarım Adımı: Türetimin uzunluğu n+1 olsun. Geçerliliğin, türetimin uzunluğu n+1 olduğunda korunduğunu göstermeliyiz.

(R1) φ formülü MP ile n+1 adımda elde edilmiş olsun. Bu durumda $\psi \to \varphi$ ve ψ formülleri vardır öyle ki bu formüllerin türetimlerinin uzunluğu n'dir. Tümevarım hipotezinden, $\models \psi$ ve $\models \psi \to \varphi$ elde edilir. Önerme 2.1.5'ten $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ elde edilir. $\mathfrak{M}$ ve s keyfi olduklarından $\models \varphi$'dir.

(R2) $\varphi \vdash K_i\varphi$ olsun. Öylseyse φ formülünün türetiminin uzunluğu n'dir ve tümevarım hipotezinden $\models \varphi$ olur. Buradan $\mathfrak{M}, s \models \varphi$'dir. $(s, t) \in R_i$ olsun. $\models \varphi$ olduğundan $\mathfrak{M}, t \models \varphi$'dir. Şu halde t keyfi seçildiğinden $\mathfrak{M}, s \models K_i\varphi$'dir.

(R3) $\varphi \vdash K_i\varphi$ olsun. Öylseyse φ formülünün türetiminin uzunluğu n'dir ve tümevarım hipotezinden $\models \varphi$ olur. Bu durumda $\mathfrak{M}, s \models \varphi$'dir. $(s, t) \in R_C$ olsun. $\models \varphi$ olduğundan $\mathfrak{M}, t \models \varphi$'dir. Öyleyse $\mathfrak{M}, s \models C_i\varphi$'dir.

⊠

3.2 KD45-O Modal Mantığında Sağlamlık

Teorem 3.2.1. *φ herhangi bir KD45-O formül olmak üzere* $\vdash_{KD45-O} \varphi \Rightarrow \models_{KD45-O} \varphi$.

İspat. İspat φ'nin türetiminin uzunluğu üzerinde tümevarımla yapılır.

Temel Adım: Türetimin uzunluğu n=1 olsun. Bu durumda φ ya bir aksiyomdur ya da bir totolojidir. φ bir totoloji ise her model altında doğrudur yani $\models \varphi$'dir. φ bir aksiyom ise KD45-O sistemindeki her bir aksiyomun geçerli olduğunu göstermeliyiz. $M = \langle S, \leq, \geq_B, V \rangle$ bir KD45-O model ve s bu model üzerinde bir durum olsun.

(a) KD45 aksiyomları

- $(M, s) \models B_i\varphi$ ve $(M, s) \models B_i(\varphi \to \psi)$ olsun. Şu halde $\leq$ bağıntısına göre her minimal t için $(M, t) \models \varphi$ ve $(M, t) \models \varphi \to \psi$'dir. Buradan $(M, t) \models \psi$ yani $(M, s) \models B_i\psi$.

- $(M, s) \models B \perp$ olsun. Öyleyse $\leq$ bağıntısına göre her minimal t için $(M, t) \models \perp$ olur. Fakat böyle bir t bulunmadığından $(M, s) \not\models B \perp$'dir.

- $(M, s) \models B\varphi$ olsun. Şu halde $\leq$ bağıntısına göre her minimal t için $(M, t) \models \varphi$'dir. Buradan her $k \in S$ için $(M, k) \models B\varphi$'dir. Özel olarak bu k'ler merkezdeki durumlardan seçilirse $(M, s) \models BB\varphi$ olur.

- $(M, s) \models \neg B \neg B\varphi \Rightarrow$
  $(M, s) \not\models$B¬B$\varphi \Rightarrow$
  $(M, t) \models \neg$Bφ, $\leq$ bağıntısına göre en az bir t için $\Rightarrow$
  $(M, t) \not\models$B$\varphi \Rightarrow$
  $(M, t') \not\models \varphi$, $\leq$ bağıntısına göre en az bir t' için $\Rightarrow$
  $(M, s) \models \neg$Bφ

(b) Sıralama aksiyomları

(i) $\{t \mid (M, t) \models \varphi\} \geq_B \{t \mid (M, t) \models \varphi\}$. Her iki küme birbirine eşit olduğundan makullükleri de eşittir. Şu halde $(M, s) \models \varphi \succcurlyeq_B \varphi$'dir.

(ii) $(M, s) \models (\varphi \succcurlyeq_B \psi) \wedge (\psi \succcurlyeq_B \sigma)$ olsun. Bu durumda $\{t \mid (M, t) \models \varphi\} \geq_B \{t \mid (M, t) \models \psi\}$ ve $\{t \mid (M, t) \models \psi\} \geq_B \{t \mid (M, t) \models \sigma\}$'dır. Buradan $\geq_B$ bağıntısı geçişli olduğundan $\{t \mid (M, t) \models \varphi\} \geq_B \{t \mid (M, t) \models \sigma\}$ yani $(M, s) \models \varphi \succcurlyeq_B \sigma$ elde edilir.

(iii) $(\Leftarrow)$: $(M,s) \models (\varphi \succcurlyeq_B \psi) \wedge \neg(\psi \succcurlyeq_B \varphi)$ ve $(M,s) \not\models (\varphi \succ_B \psi)$ olsun. Buradan $(M,s) \models \neg(\varphi \succ_B \psi)$'dir yani bir $w \in \{t \mid (M,t) \models \psi\}$ vardır öyle ki her $w' \in \{t \mid (M,t) \models \varphi\}$ için $w \leq w'$'dür. Bu ise $(M,s) \models \neg(\psi \succcurlyeq_B \varphi)$ olması ile bir çelişkidir. O halde $(M,s) \models (\varphi \succcurlyeq_B \psi) \wedge \neg(\psi \succcurlyeq_B \varphi) \rightarrow \neg(\varphi \succ_B \psi)$'dir.

$(\Rightarrow)$: $(M,s) \models (\varphi \succ_B \psi)$ ve $(M,s) \not\models (\varphi \succcurlyeq_B \psi) \wedge \neg(\psi \succcurlyeq_B \varphi)$ olsun. Bu durumda $(M,s) \models \neg(\varphi \succcurlyeq_B \psi) \vee (M,s) \models (\psi \succcurlyeq_B \varphi)$'dir.

- Durum 1. $(M,s) \models \neg(\varphi \succcurlyeq_B \psi)$ ise bir $w \in \{t \mid (M,t) \models \psi\}$ vardır öyle ki her $w' \in \{t \mid (M,t) \models \varphi\}$ için $w < w'$'dür. Bu ise $(M,s) \models (\varphi \succ_B \psi)$ olması ile bir çelişkidir.

- Durum 2. $(M,s) \models (\psi \succcurlyeq_B \varphi)$ ise bir $w \in \{t \mid (M,t) \models \psi\}$ vardır öyle ki her $w' \in \{t \mid (M,t) \models \varphi\}$ için $w \leq w'$'dür. Bu ise $(M,s) \models (\varphi \succ_B \psi)$ olması ile bir çelişkidir.

O halde $(M,s) \models (\varphi \succ_B \psi) \rightarrow (\varphi \succcurlyeq_B \psi) \wedge \neg(\psi \succcurlyeq_B \varphi)$ elde edilir.

(iv) $(M,s) \models \neg(\varphi \succcurlyeq_B \psi)$ ve $(M,s) \models \neg(\psi \succ_B \varphi)$ olsun. $(M,s) \models \neg(\varphi \succcurlyeq_B \psi)$ ise bir $w_1 \in S$ vardır öyle ki $w_1 \in \{t \mid (M,t) \models \psi\}$ ve her $w' \in \{t \mid (M,t) \models \varphi\}$ için $w_1 < w'$'dür. Bununla birlikte $(M,s) \models \neg(\psi \succ_B \varphi)$ olduğundan bir $w_2 \in S$ vardır öyle ki $w_2 \in \{t \mid (M,t) \models \varphi\}$ ve her $w'' \in \{t \mid (M,t) \models \psi\}$ için $w_2 \leq w''$'dür. Özel olarak w'', w_1 olarak seçilirse bu durum $w_1 < w'$ ile bir çelişkidir. O halde $(M,s) \models (\varphi \succcurlyeq_B \psi) \vee (\psi \succ_B \varphi)$'dir.

(v) $(M,s) \models B\varphi \wedge \neg B\psi$ olsun. $(M,s) \models \neg B\psi$ ise $\leq$ bağıntısına göre en az bir minimal t için $(M,t) \not\models \psi$'dir. $(M,s) \models B\varphi$ ise $\leq$ bağıntısına göre her minimal t için $(M,t) \models \varphi$. Böylece $\{t \mid (M,t) \models \varphi\} >_B \{t \mid (M,t) \models \psi\}$ olduğundan $\models \varphi \succ_B \psi$.

(vi) $(M,s) \models \varphi \succcurlyeq_B \psi$ ve $(M,s) \not\models B(\varphi \succcurlyeq_B \psi)$ olsun. Bu durumda $\leq$ bağıntısına göre en az bir minimal t için $(M,t) \not\models \varphi \succcurlyeq_B \psi$'dir. Bu durumda bir w_1 durumu vardır öyle ki $w_1 \in \{t \mid (M,t) \models \psi\}$ ve her $w_2 \in \{t \mid (M,t) \models \psi\}$ için $w_1 < w_2$'dir. Bu ise $(M,s) \models \phi \succcurlyeq_B \psi$ olması ile çelişkidir. O halde $(M,s) \models B(\varphi \succcurlyeq_B \psi)$'dir.

(vii) $(M,s) \models \phi \succ_B \psi$ ve $(M,s) \not\models B(\varphi \succ_B \psi)$ olsun. Bu durumda $\leq$ bağıntısına göre en az bir minimal t için $(M,t) \not\models \varphi \succ_B \psi$'dir. Bu durumda bir w_1 durumu vardır öyle ki $w_1 \in \{t \mid (M,t) \models \psi\}$ ve her $w_2 \in \{t \mid (M,t) \models \psi\}$ için $w_1 \leq w_2$'dir. Bu ise $(M,s) \models \phi \succ_B \psi$ olması ile çelişkidir. O halde $(M,s) \models B(\varphi \succ_B \psi)$'dir.

(viii) $(M,s) \models \perp \succcurlyeq_B \neg(\varphi \to \psi) \Rightarrow$
$(M,s) \models U(\varphi \to \psi) \Rightarrow$
$\forall t \in S((M,t) \models (\varphi \to \psi)) \Rightarrow$
$\forall t \in S((M,t) \models \varphi \Rightarrow ((M,t) \models \psi) \Rightarrow$
$\forall t \in S(\{t \mid ((M,t) \models \varphi\} \subseteq \{t \mid ((M,t) \models \psi\}) \Rightarrow$
$(M,s) \models \psi \succcurlyeq_B \varphi$

(ix) $(M,s) \models \varphi$. Buradan $\{t \mid (M,t) \models \perp\} = \emptyset$ olduğundan $\{t \mid (M,t) \models \varphi\} >_B \{t \mid (M,s) \models \perp\}$ yani $(M,s) \models \varphi \succ_B \perp$ elde edilir.

(x) $(M,s) \models \neg U \neg B\varphi \Rightarrow$
$(M,s) \not\models U \neg B\varphi \Rightarrow$
$\exists t \in S, (M,t) \not\models \neg B\varphi \Rightarrow$
$\exists t \in S, (M,t) \models B\varphi \Rightarrow$
Her $\leq$ minimal t' için, $(M,t') \models \varphi \Rightarrow$
$(M,s) \models B\varphi$.

Tümevarım Hipotezi: Teorem türetimin uzunluğu n için doğru olsun.

Tümevarım Adımı: Türetimin uzunluğu n+1 olsun. Geçerliliğin, türetimin uzunluğu n+1 olduğunda korunduğunu göstermeliyiz.

(R1) φ formülü MP ile n+1 adımda elde edilmiş olsun. Bu durumda $\psi \to \varphi$ ve ψ formülleri vardır öyle ki bu formüllerin türetimlerinin uzunluğu n'dir. Tümevarım hipotezinden, $\models \psi$ ve $\models \psi \to \varphi$ elde edilir. Önerme 2.1.5'ten $(M,s) \models \varphi$ elde edilir. M ve s keyfi olduklarından $\models \varphi$'dir.

(R2) $B_i\varphi$ formülünün türetiminin uzunluğu n+1 olsun. Öylseyse φ formülünün türetiminin uzunluğu n'dir ve tümevarım hipotezinden $\models \varphi$ olur. Buradan $(M,s) \models \varphi$'dir. Bununla birlikte $\leq$ bağıntısına göre her minimal t için

$(M.t) \models \varphi$'dir. Buradan $(M, s) \models B_i\varphi$ olur. O halde s keyfi seçildiğinden $\models B_i\varphi$'dir.

(R3) $\varphi \to \psi \vdash_{n+1} \psi \succcurlyeq_B \varphi$ olsun. Öylseyse $\varphi \to \psi$ formülünün türetiminin uzunluğu n'dir ve tümevarım hipotezinden $\models \varphi \to \psi$ olur. Bu durumda $\mathfrak{M}, s \models \varphi \to \psi$'dir. Buradan $\{t \mid (M,t) \models \varphi\} \subseteq \{t \mid (M,t) \models \psi\}$'dir. Tanım 2.2.3 (ii)'den $\{t \mid (M,t) \models \psi\} \geq_B \{t \mid (M,t) \models \varphi\}$ olur. Öyleyse $\models \psi \succcurlyeq_B \varphi$ elde edilir.

$\boxtimes$

Bölüm 4

S5EC ve KD45-O Modal Mantıkları için Tamlık Teoremleri

Bu bölümde S5EC ve KD45-O sistemlerinin, Tanım 2.1.16 ve Tanım 2.2.1'de verilen aksiyom sistemlerine göre tam olduğu ispatlanacaktır. Tamlık teoremleri bir mantıkta gerçeklenebilen formüllerin türetiminin var olduğunu gösteren teoremlerdir. Bununla birlikte ispatları ise model oluşturmaya dayalıdırlar. Bu modelleri oluşturmanın farklı yöntemleri vardır. Burada ise bu modelleri oluşturmanın üç farklı yöntemi verilecektir: Kanonik model, sonlu Henkin yöntemi ve filtreleme yöntemi. Bu bölümdeki tüm bilgiler [1], [2], [10] ve [5]'te de bulunabilir.

4.1 Kanonik Model

Bu bölümde maksimal tutarlı formül kümelerinde model oluşturma yöntemi olan kanonik model yöntemi anlatılacaktır.

Tanım 4.1.1. *$\mathbf{S}$ bir modal mantık, φ bir $\mathbf{S}$ formül ve Γ bir formül kümesi olmak üzere,*

(i) $\nvdash_{\mathbf{S}} \neg\varphi$ *ise φ formülü $\mathbf{S}$-tutarlıdır.*

(ii) $\Psi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ *sonlu bir küme olmak üzere eğer $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$ tutarlı ise Ψ kümesi tutarlıdır.*

(iii) Sonlu olmayan epistemik formüller kümesi φ için eğer φ'nin her sonlu alt kümesi tutarlı ise φ de tutarlıdır.

(iv) Eğer $\Gamma \nvdash_{\mathbf{S}} \bot$ ise Γ formül kümesine $\mathbf{S}$-tutarlıdır denir. Aksi halde, $\mathbf{S}$-tutarsızdır denir.

Tanım 4.1.2. *Bir Γ formüller kümesinin maksimal $\mathbf{S}$-tutarlı olması için gerek ve yeter koşul*

(a) Γ kümesinin $\mathbf{S}$-tutarlı,

(b) $\Gamma \subseteq \Gamma'$ ve Γ' tutarlı ise $\Gamma = \Gamma'$ olmasıdır.

Lemma 4.1.3. *Γ, maksimal* **S***-tutarlı formül kümesi olmak üzere,*

(i) Her φ formülü için, $\varphi \in \Gamma$ veya $\neg\varphi \in \Gamma$'dır,

(ii) φ ve $\varphi \to \psi \in \Gamma$ ise $\psi \in \Gamma$'dır,

(iii) $\vdash_{\mathbf{S}} \varphi$ ise $\varphi \in \Gamma$'dır.

(iv) $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ olması için g.y.k. $\varphi \in \Gamma$ ve $\psi \in \Gamma$ olmasıdır,

İspat.

(i) $\varphi \notin \Gamma$ ve $\neg\varphi \notin \Gamma$ olsun. Bu durumda maksimallik tanımı gereği $\Gamma \cup \{\varphi\}$ ve $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ **S**-tutarsıdır. Öyleyse tanım 4.1.1 (iii)'den Γ'nın sonlu alt kümeleri Γ', Γ'' vardır öyle ki $\Gamma' \cup \{\varphi\}$ ve $\Gamma'' \cup \{\neg\varphi\}$ **S**-tutarsızdır. $\Gamma' \cup \Gamma'' = \{\psi_1, ..., \psi_n\}$ ve $\Psi = \psi_1 \wedge ... \wedge_m$ olsun. Bu durumda tanım 4.1.1 (ii)'den $\vdash \neg(\Psi \wedge \varphi \wedge \neg\varphi)$ olur. Buradan $\vdash \neg\Psi \vee \neg\varphi \vee \varphi$ elde edilir. $\varphi \vee \neg\varphi$ totoloji olduğundan $\vdash \neg\Psi$ elde edilir ki bu ise $\{\psi_1, ..., \psi_n\}$ kümesinin **S**-tutarsız olduğunu gösterir. Bu ise Γ'nın tutarlı olması ile bir çelişkidir.

(ii) $\varphi, \varphi \to \psi \in \Gamma$ ve $\psi \notin \Gamma$ olsun. Bu durumda Γ'nın sonlu bir alt kümesi Γ' vardır öyle ki $\Gamma' \cup \{\psi\}$, **S**-tutarsızdır. $\Gamma' = \{\psi_1, ..., \psi_n\}$ ve $\Psi = \psi_1 \wedge ... \wedge_m$ olsun. Öyleyse $\vdash \neg(\Psi \wedge \psi)$'dir. $\Gamma' \cup \{\varphi\} \cup \{\varphi \to \psi\} \vdash_{PC} \Psi \wedge \psi$ olduğundan $\Gamma' \cup \{\varphi\} \cup \{\varphi \to \psi\}$ kümesi **S** tutarsızdır bu ise Γ'nın **S** tutarlılığı ile bir çelişkidir.

(iii) $\varphi \notin \Gamma$ olsun. Bu durumda (i)'den $\neg\varphi \in \Gamma$ 'dır. Türetim tanımından $\Gamma \vdash \neg\varphi$ olur. O halde $\Gamma \vdash_{PC} \varphi \wedge \neg\varphi$'dir. Buradan $\Gamma \vdash \perp$ olur ki bu Γ'nın tutarlılığı ile bir çelişkidir.

(iv) $(\Rightarrow)$: $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ olsun. Bu durumda $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$'dir. Buradan $\Gamma \vdash_{PC} \varphi$ ve $\Gamma \vdash_{PC} \psi$ elde edilir. (iii)'den $\varphi \in \Gamma$ ve $\psi \in \Gamma$'dır.

$(\Leftarrow)$: $\varphi \in \Gamma$ ve $\psi \in \Gamma$ olsun. Türetim tanımından $\Gamma \vdash_{PC} \varphi$ ve $\Gamma \vdash_{PC} \psi$ olur. Buradan $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$'dir. (iii)'den $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$'dır.

$\boxtimes$

Tanım 4.1.4. **S** *modal mantığı için kanonik model $\mathfrak{M}_{\mathbf{S}} = \langle W_{\mathbf{S}}, R_{\mathbf{S}}, V_{\mathbf{S}} \rangle$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

(i) $W_{\mathbf{S}} = \{\Gamma \mid \Gamma$ *maksimal* $\mathbf{S}$ *tutarlı formül kümesi* $\}$,

(ii) $R_{\mathbf{S}} = \{\langle \Gamma, \Gamma' \rangle \mid \Box\varphi \in \Gamma$ *ise* $\varphi \in \Gamma'$*'dür*$\}$,

(iii) $V_{\mathbf{S}}(p) = \{\Gamma \in W_{\mathbf{S}} \mid p \in \Gamma\}$.

Lemma 4.1.5. (Lindenbaum) Γ, $\mathbf{S}$ *tutarlı formüller kümesi olsun. Bu durumda maksimal* $\mathbf{S}$*-tutarlı bir* Γ' *kümesi vardır öyle ki* $\Gamma \subseteq \Gamma'$ *dır.*

İspat. Γ'nın maksimal $\mathbf{S}$-tutarlı bir genişlemesi Γ' olduğunu göstermeliyiz. Γ'nın $\mathbf{S}$-tutarlı ve dilin formüllerinin $\varphi_1, \varphi_2, ...$ şeklinde numaralandırıldığını varsayalım. Γ' aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\Gamma_0 = \Gamma$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{eğer } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}, \mathbf{S} \text{ tutarlıysa} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

$\Gamma' = \bigcup_{n>0} \Gamma_n$

Şimdi Γ''nün maksimal ve $\mathbf{S}$-tutarlı olduğunu gösterelim.

Γ', $\mathbf{S}$-tutarlıdır: Γ', $\mathbf{S}$-tutarlı olmasın. Şu halde Γ''nın tutarlı olmayan bir Ψ alt kümesi vardır öyle ki bir n için $\Psi \subseteq \Gamma_n$'dir. Fakat her Γ_n, $\mathbf{S}$-tutarlı olduğu için bu bir çelişkidir. O halde Γ' $\mathbf{S}$-tutarlıdır.

Γ' maksimaldir: Keyfi bir φ_n formül olsun öyle ki $\varphi_n \notin \Gamma'$. Şu halde aynı zamanda $\varphi_n \notin \Gamma_n$'dir. $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ tutarsız olduğundan $\Gamma' \cup \{\varphi_n\}$ de tutarsıdır. O halde Γ''nün $\mathbf{S}$-tutarlı bir genişlemesi yoktur. Buradan Γ''nün maksimal olduğu elde edilir. $\boxtimes$

Lemma 4.1.6. (Truth) $\mathfrak{M}_{\mathbf{S}} = \langle W_{\mathbf{S}}, R_{\mathbf{S}}, V_{\mathbf{S}} \rangle$ *modeli,* $\mathbf{S}$ *modal mantığı için kanonik model olsun. Her* φ *formülü ve* $\Gamma \in W_{\mathbf{S}}$ *için*

$$\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \mathfrak{M}_{\mathbf{S}}, \Gamma \models \varphi.$$

İspat. İspat φ formülünün karmaşıklığı üzerinde tümevarımla yapılır.

- $\varphi : p$ olsun.

  $(\Rightarrow)$: $p \in \Gamma$ ise tanım 4.1.5 (iii)'den $\Gamma \in V_{\mathbf{S}}(p)$'dir. Model olma tanımından $\mathfrak{M}, \Gamma \models p$'dir.

  $(\Leftarrow)$: $\neg p \in \Gamma$ olsun. Bu durumda tanım 4.1.5 (iii)'den $\mathfrak{M}, \Gamma \models \neg p$ olur. Buradan $\mathfrak{M}, \Gamma \not\models p$'dir.

- $\varphi : \neg\psi$ ve lemma ψ için doğru olsun.

  $\neg\psi \in \Gamma \Leftrightarrow$

  Γ maksimal tutarlı olduğundan, $\psi \notin \Gamma \Leftrightarrow$

  Tümevarım hipotezinden, $\mathfrak{M}, \Gamma \not\models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{M}, \Gamma \models \neg\psi$'dir.

- $\varphi : \psi_1 \wedge \psi_2$ ve lemma ψ_1 ve ψ_2 için doğru olsun.

  $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Gamma \Leftrightarrow$

  $\psi_1 \in \Gamma \wedge \psi_2 \in \Gamma \Leftrightarrow$

  Tümevarım hipoezinden, $\mathfrak{M}, \Gamma \models \psi_1 \wedge \mathfrak{M}, \Gamma \models \psi_2 \Leftrightarrow$

  $\mathfrak{M}, \Gamma \models \psi_1 \wedge \psi_2$'dir.

- $\varphi : \Box\psi$ ve lemma ψ için doğru olsun.

  ($\Rightarrow$): $\Box\psi \in \Gamma$ ve $\langle \Gamma, \Gamma' \rangle \in R_{\mathbf{S}}$ olacak şekilde keyfi bir $\Gamma' \in W_{\mathbf{S}}$ ele alalım. $R_{\mathbf{S}}$ bağıntısının tanımından $\psi \in \Gamma'$ elde edilir. Tümevarım hipotezinden $\mathfrak{M}, \Gamma' \models \psi$'dir. Γ' keyfi bir durum olduğundan $\mathfrak{M}, \Gamma \models \Box\psi$ elde edilir.

  ($\Leftarrow$): $\mathfrak{M}, \Gamma \models \Box\psi$ olsun. $P = \{\alpha \mid \Box\alpha \in \Gamma\} \cup \{\neg\psi\}$ kümesinin tutarsız olduğunu gösterelim. $P \cup \{\neg\alpha\}$ kümesi tutarlı olsun. O halde bu kümenin maksimal bir genişlemesi P' vardır ve $\neg\psi \in P'$'dür. Bununla birlikte P'nin tanımından $\langle \Gamma, P' \rangle \in R_{\mathbf{S}}$'dir. $\neg\psi \in P'$ olduğundan tümevarım hipoteziyle $\mathfrak{M}, P' \models \neg\psi$ elde edilir. Buradan $\mathfrak{M}, \Gamma \models \neg\Box\psi$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $P\{\alpha \mid \Box\alpha \in \Gamma\} \cup \{\neg\psi\}$ kümesi tutarsızdır.

  Şu halde $\varphi_1, ..., \varphi_n \in P$ olmak üzere $P \cup \{\neg\psi\}$ kümesinin bir alt kümesi vardır öyle ki $\varphi_1, ..., \varphi_k, \neg\psi$ tutarsızdır. Buradan $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k \wedge \neg\psi)$ elde edilir. Öyleyse

  $$\vdash (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \rightarrow (....(\varphi_k \rightarrow \psi)...))\text{'dir. (1)}$$

  $\varphi_2 \rightarrow (....(\varphi_k \rightarrow \psi)...)$ ifadesini σ ile gösterelim.

  $$\vdash (\varphi_1 \rightarrow \sigma)$$
  $$\vdash \Box(\varphi_1 \rightarrow \sigma)$$

  K aksiyomundan $\vdash \Box\varphi_1 \rightarrow \Box\sigma$ olur.

Γ kümesi maksimal tutarlı olduğundan bütün totolojileri içerir: $\Box\varphi_1 \rightarrow \Box\sigma \in \Gamma$'dır. $\Box\varphi_1 \in \Gamma$ olduğundan $\Box\sigma \in \Gamma$'dır. Bu işlem k defa tekrarlanırsa $\Box\psi \in \Gamma$ elde edilir.

$\boxtimes$

Teorem 4.1.7. *Herhangi bir modal mantık* **S***, kanonik modeli* $\mathfrak{M}_{\mathbf{S}}$*'ye göre tamdır.*

İspat. φ, **S**'de tutarlı bir formül olsun. Bu durumda $\Gamma = \{\varphi\}$ kümesi de tutarlıdır. Buradan, Lindenbaum lemması ile $\Gamma \subseteq \Gamma'$ olacak şekilde maksimal tutarlı bir Γ' kümesinin olduğu elde edilir. Truth lemmasından, **S**'deki her ψ formülü için $\mathfrak{M}_{bfS}, \Gamma' \models \psi$'dir. Özel olarak bu ψ'ler Γ'dan seçilirse $\mathfrak{M}_{\mathbf{S}}, \Gamma' \models \Gamma$ yani $\mathfrak{M}_{\mathbf{S}}, \Gamma' \models \varphi$ olur. $\boxtimes$

4.1.1 S5EC'nin Kanonik Modeli

Tanım 4.1.8. *S5EC mantığının kanonik modeli* $\mathfrak{M}^c = \langle S^c, R_1^c, ..., R_m^c, R_E^c, R_C^c, V^c\rangle$ *modeli aşağıdaki gibi tanımlanır:*

(i) $S^c = \{\Gamma \mid \Gamma$ *maksimal tutarlı formül kümesi* $\}$,

(ii) $R_i^c = \{(\Gamma, \Gamma') \mid \Gamma/K_i \subseteq \Gamma'\}$,
$R_{E^c} = \{(\Gamma, \Gamma') \mid \Gamma/E_B \subseteq \Gamma'\}$,
$R_{C^c} = \{(\Gamma, \Gamma') \mid \Gamma/C_B \subseteq \Gamma'\}$,

(iii) $V(p) = \{\Gamma \in \Gamma \mid p \in \Gamma\}$.

Burada $\Gamma/K_i = \{\varphi \mid K_i\varphi \in \Gamma\}$, $\Gamma/E = \{\varphi \mid E\varphi \in \Gamma\}$ ve $\Gamma/C = \{\varphi \mid C\varphi \in \Gamma\}$'dir.

Teorem 4.1.9. *S5EC'nin kanonik modeli* $\mathfrak{M}^c = \langle S^c, R_1^c, ..., R_m^c, R_{E^c}, R_{C^c}, V^c\rangle$ *aşağıdaki özellikleri sağlar:*

(i) R_i^c *bir denklik bağıntısıdır.*

(ii) $R_{E^c} = R_1^c \cup ... \cup R_m^c$

(iii) $(R_{E^c})^* \subseteq R_{C^c}$

İspat.

(i) R_i^c'nin bir denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansımalı ve öklidyen olduğunu göstermek yeterlidir.

(a) R_i^c yansımalıdır: $(\Gamma, \Gamma') \in R_{i^c}$ olsun. (A3): $K_i\varphi \to \varphi \in \Gamma$'dan eğer $\varphi \in \Gamma/K_i$ ise $\varphi \in \Gamma$'dır. Γ maksimal tutarlı ve modus ponens altında kapalı olduğundan: $K_i\varphi \in \Gamma$ ve $K_i\varphi \to \varphi \in \Gamma$ ise $\varphi \in \Gamma$. Bu nedenle $\Gamma/K_i \subseteq \Gamma$, yani $(\Gamma, \Gamma) \in R_{i^c}$'dir.

(b) R_i^c öklidyendir: $(\Theta, \Psi), (\Theta, \Sigma) \in R_{i^c}$ ve $\varphi \in \Psi/K_i$ olsun. $\varphi \in \Sigma$ olduğunu göstermemiz gerekir. Tersini varsayalım. $\varphi \in \Sigma$ olmasın. $\theta/K_i \subseteq \Sigma$ olduğundan $\varphi \notin \Theta/K_i$'dir. Başka bir ifadeyle $K_i\varphi \notin \Theta$'dır. Θ maksimal tutarlı olduğundan $\neg K_i\varphi$'dir. (A5) aksiyomu ve modus ponensten $K_i\neg K_i\varphi \in \Theta$'dır. Son olarak $\Theta/K_i \subseteq \Psi$'den $\neg K_i\varphi \in \Psi$ elde edilir ki bu ise ψ'nin tutatlılığı ile çelişir. O halde $(\Theta, \Psi) \in R_i^c$'dir yani, R_i^c öklidyendir.

(ii) $R_{E^c} \subseteq R_{1^c} \cup ... \cup R_{m^c}$ ve $R_{1^c} \cup ... \cup R_{m^c} \subseteq R_{E^c}$ olduğu göstermeliyiz.

($\subseteq$) $(\Theta, \Psi) \in R_{E^c}$ ve bazı $1 \leq i \leq m$ için $(\Theta, \Psi) \notin R_i^c$ olsun. Şu halde her $1 \leq i \leq m$ için $\varphi \in \Theta/K_i$ ve $\varphi \notin \Psi$ koşullarını sağlayan bir φ vardır. Bu nedenle her i için $K_i\varphi \in \Theta$'dır ve Ψ'nin maksimal tutarlılığından $\neg\varphi_i \in \Psi$'dir. Öyleyse $\neg\varphi_1 \wedge ... \wedge \neg\varphi_m \in \Psi$'dir. $\varphi = \varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ olsun. $\vdash \varphi_i \to \varphi$ olduğundan $\vdash K_i(\varphi_i \to \varphi)$'dir. K aksiyomundan $\vdash K_i\varphi_i \to K_i\varphi$'dir. Θ maksimal tutarlı olduğundan $K_i\varphi_i \to K_i\varphi \in \Theta$, buradan da her i için $K_i\varphi \in \Theta$'dır. Böylece $K_1\varphi \wedge ...K_m\varphi \in \Theta$ olduğundan (A6) aksiyomu gereği $E\varphi \in \Theta$'dır. Bu sonuçtan $\varphi \in \Theta/E \subseteq \Psi$ elde edilir. Ayrıca $\neg\varphi_1 \wedge ... \wedge \neg\varphi_m \in \Psi$ olduğundan $\neg\varphi \in \Psi$'dir. Bu bir çelişkidir. Şu halde bazı i'ler için $(\Theta, \Psi) \in R_i^c$'dir.

($\supseteq$) $(\Theta, \Psi) \in R_{1^c} \cup ... \cup R_{m^c}$ olsun. Öyleyse bazı j'ler için $(\Theta, \Psi) \in R_{j^c}$'dir. $\varphi \in \Theta/E$ olsun. (A6) aksiyomundan her i için $K_i\varphi \in \Theta$'dır.Özellikle $K_j\varphi \in \Theta$ ve bu nedenle $\Theta/K_j \subseteq \Psi$. O halde $\Theta/E \subseteq \Psi$'dir.

(iii) $(\Theta, \Psi) \in (R_{E^c})^*$ olsun. $(\Theta, \Psi) \in R_{C^c}$ olduğunu göstermeliyiz. Şu halde $\Theta = \Gamma_0, ..., \Gamma_n = \Psi$ dizisi vardır öyle ki $(\Gamma_i, \Gamma_{i+1}) \in R_{E^c}$'dir. $\varphi \in \Theta/C$ olsun. (A8) aksiyomundan $EC\varphi \in \Theta = \Gamma_0$'dır. Buradan $C\varphi \in \Gamma_0/E \subseteq \Gamma_1$elde edilir. Bu işlemi n-1 defa tekrarlarsak $C\varphi \in \Gamma_n = \psi$'yi elde ederiz. Şu halde $\varphi \in \psi$'dir.

$\boxtimes$

Burada $(R_{E^c})^* = R_{C^c}$ olmadığı için elde edilen model bir yarı-S5EC modeldir.

4.1.2 KD45-O'nun Kanonik Modeli

Tanım 4.1.10. *KD45-O mantığının kanonik modeli $\mathcal{M}^c = \langle S^c, R_B, R_U, V^c \rangle$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

(i) $S^c = \{\Gamma \mid \Gamma$ *maksimal KD45-O tutarlı* $\}$,

(ii) $R_B = \{(\Gamma, \Gamma') \mid B\varphi \in \Gamma \Rightarrow \varphi \in \Gamma'\}$,
$R_U = \{(\Gamma, \Gamma') \mid U\varphi \in \Gamma \Rightarrow \varphi \in \Gamma'\}$

(iii) $V^c(p) = \{\Gamma \mid p \in \Gamma\}$.

Tanım 4.1.10 (ii)'de verilen R_U bağıntısı bütün dünyalar arasında tanımlı olmadığından bir evrensel bağıntı değildir. Dolayısıyla elde edilen kanonik model, KD45-O model olma özelliklerini sağlamak için yetersiz kalır.

Bu nedenle hem S5EC hem de KD45-O modal mantıkları için kanonik modeller değiştirilerek bu modellerin başka bir biçimleri oluşturulacaktır. Bu yeni modelleri elde etmek için [1], [2] ve [10]'dan yararlanılacaktır.

4.2 Sonlu Model Özelliği

Sonlu model özelliği, bir mantığın dilindeki herhangi bir formülün modeli varsa onun sonlu modelinin de var olduğunu söyleyen önemli bir özelliktir. Bu sonlu modeli elde etmenin çeşitli yöntemleri vardır. Bu bölümde sonlu model elde etmenin yöntemlerinden ikisi olan sonlu Henkin yöntemi ve filtreleme yöntemi verilecektir.

Tanım 4.2.1. *Bir* **S** *mantığının sonlu model özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul* **S***'de sağlanabilen her bir formülün, bir sonlu modelde de sağlanmasıdır.*

Tanım 4.2.2. *φ ve ϕ birer formül olsun. Bir formül kümesi Φ'nin, alt formülleri altında kapalı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakilerin sağlanmasıdır.*

(i) $\varphi \wedge \psi \in \Phi$ *ise* $\varphi, \psi \in \Phi$*'dir.*

(ii) $\neg\varphi \in \Phi$ *ise* $\varphi \in \Phi$*'dir.*

(iii) $\Box\varphi \in \Phi$ *ise* $\varphi \in \Phi$*'dir.*

4.2.1 Sonlu Henkin Yöntemi

Bu bölümde öncelikle bir **S** modal mantığı için sonlu Henkin yöntemi açıklanacak, sonra S5EC ve KD45-O modal mantıklarının bu yöntemle elde edilen modelleri tanıtılacaktır.

Tanım 4.2.3. Φ *ve* Γ*,* $\Gamma \subseteq \Phi$ *olacak şekilde iki formül kümesi olsun.* Γ*'nın,* Φ*'de maksimal* **S***-tutarlı olması için gerek ve yeter koşul* Γ*'nın* **S***-tutarlı ve* $\Gamma \subset \Gamma'$ *olacak şekilde* **S***-tutarlı bir* $\Gamma' \subseteq \Phi$ *formül kümesinin bulunmamasıdır.*

Tanım 4.2.4. Φ *sonlu ve yeterli bir formül kümesi olsun. Bu durumda* **S** *modal mantığının sonlu Henkin yöntemi ile elde edilen* $\mathfrak{M}^{\Phi}_{\mathbf{S}} = \langle W^{\Phi}_{\mathbf{S}}, R^{\Phi}_{\mathbf{S}}, V^{\Phi}_{\mathbf{S}} \rangle$ **modeli** *aşağıdaki gibi tanımlanır;*

(i) $W^{\Phi}_{\mathbf{S}} = \{\Gamma \mid \Gamma, \Phi$*'de maksimal* **S***-tutarlıdır* $\}$,

(ii) $R^{\Phi}_{\mathbf{S}} = \{\langle \Gamma, \Gamma' \rangle \mid$ *her* φ *için* $\Box\varphi \in \Gamma$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\Box\varphi \in \Gamma'$ *olmasıdır*$\}$,

(iii) $V^{\Phi}_{\mathbf{S}}(p) = \{\Gamma \mid p \in \Gamma\}$.

Lemma 4.2.5. (Lindenbaum) Φ *sonlu ve yeterli bir formül kümesi ve* $\Gamma \subseteq \Phi$*,* **S***-tutarlı ise* Γ*'nın* $\Gamma' \subseteq \Phi$ *olacak şekilde maksimal* **S***-tutarlı bir genişlemesi vardır.*

İspat. Φ'de **S**-tutarlı olan Γ formül kümesinin yine Φ'de maksimal **S**-tutarlı bir Γ' formül kümesine genişletilebileceği gösterilmelidir. Φ kümesi sonlu ve eleman sayısı k olsun ve Φ'deki formülleri $\varphi_1, ..., \varphi_k$ şeklinde numaralandıralım. Γ' kümesini, aşağıdaki gibi tanımlanmış olan **S**-tutarlı kümelerin birleşimi olarak tanımlanacaktır.

$\Gamma_0 = \Gamma$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{eğer } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}, \Phi' de\mathbf{S} \text{ tutarlıysa} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

$\Gamma' = \bigcup_{n<k} \Gamma_n$. Şimdi de elde edilen Γ' kümesinin Φ'de maksimal **S**-tutarlı olduğu gösterilmelidir.

Γ', Φ'de **S**-tutarlıdır: Γ', Φ'de **S**-tutarlı olmasın. Şu halde Γ''nın tutarlı olmayan bir Ψ alt kümesi vardır öyle ki bir n için $\Psi \subseteq \Gamma_n$'dir. Fakat her Γ_n, Φ'de **S**-tutarlı olduğu için bu bir çelişkidir. O halde Γ', Φ'de **S**-tutarlıdır.

Γ' maksimaldir: Keyfi bir $\varphi_n \in \Phi$ formül olsun öyle ki $\varphi_n \notin \Gamma'$. Şu halde aynı zamanda $\varphi_n \notin \Gamma_n$'dir. $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ Φ'de tutarsız olduğundan $\Gamma' \cup \{\varphi_n\}$ de tutarsıdır. O halde Γ''nün Φ'de **S**-tutarlı bir genişlemesi yoktur. Buradan Γ''nün Φ kümesinde maksimal olduğu elde edilir.

⊠

Lemma 4.2.6. *Φ sonlu ve yeterli bir formül kümesi ve Γ, Φ de maksimal* **S***-tutarlı ise aşağıdakiler sağlanır:*

(i) Γ kümesi Φ'de türetim altında kapalıdır.

(ii) $\neg\varphi \in \Phi$ ise $\neg\varphi \in \Gamma$ olması için gerek ve yeter koşul $\varphi \notin \Gamma$ olmasıdır.

(iii) $\varphi \wedge \psi \in \Phi$ ise $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ olması için gerek ve yeter koşul $\varphi \in \Gamma$ ve $\psi \in \Gamma$ olmasıdır.

İspat.

(i) $\varphi \notin \Gamma$ olsun. Bu durumda (i)'den $\neg\varphi \in \Gamma$ 'dır. Türetim tanımından $\Gamma \vdash \neg\varphi$ olur. O halde $\Gamma \vdash_{PC} \varphi \wedge \neg\varphi$'dir. Buradan $\Gamma \vdash \perp$ olur ki bu Γ'nın tutarlılığı ile bir çelişkidir.

(ii) ($\Leftarrow$): $\neg\varphi \in \Gamma$ olsun. Φ alt formüller altında kapalı olduğundan $\varphi \in \Phi$'dir. Γ, Φ'de **S**-tutarlı olduğu için $\varphi \notin \Gamma$'dır.

($\Rightarrow$): $\varphi \notin \Gamma$ olsun. Bu durumda $\Gamma \cup \{\varphi\}$ kümesi tutarsızdır yani $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \perp$'dur. Buradan $\Gamma \vdash \varphi \to \perp$ elde edilir. Şu halde $\Gamma \vdash \neg\varphi$'dir. Lemmanın (i) koşulu gereği $\neg\varphi \in \Gamma$ olur.

(iii) ($\Rightarrow$) : $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ olsun. $\varphi \wedge \psi \in \Phi$ ve Φ alt formüller altında kapalı olduğundan $\varphi, \psi \in \Phi$'dır. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ ise bu durumda $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$'dir. Buradan $\Gamma \vdash_{PC} \varphi$ ve $\Gamma \vdash_{PC} \psi$ elde edilir. (iii)'den $\varphi \in \Gamma$ ve $\psi \in \Gamma$'dır.

($\Leftarrow$) : $\varphi \in \Gamma$ ve $\psi \in \Gamma$ olsun. Türetim tanımından $\Gamma \vdash_{PC} \varphi$ ve $\Gamma \vdash_{PC} \psi$ olur. Buradan $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$'dir. (iii)'den $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$'dır.

⊠

4.2.2 S5EC için Sonlu Henkin Yöntemi

Şimdi S5EC için sonlu Henkin yöntemiyle elde edilen modeli tanımlayabiliriz.

Tanım 4.2.7. *φ bir formül ve*

- $\Phi_1 = \{\psi, \neg\psi \mid \psi, \varphi$*' nin bir alt formülüdür* $\}$,
- $\Phi_2 = \{K_i\psi, \neg K_i\psi \mid E\psi \in \Phi_1\}$,
- $\Phi_3 = \{K_iC\psi, \neg K_iC\psi, EC_\psi, EC_\psi \mid C\psi \in \Phi_1\}$

olsun. $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \Phi_3$ *kümesine* φ*'nin alt formüllerinin yeterli kümesidir denir. Burada* Φ *sonlu,* $\varphi \in \Phi$ *ve* Φ *alt formüller altında kapalıdır.*

Tanım 4.2.8. Φ *sonlu ve yeterli bir formül kümesi olmak üzere, S5EC mantığının Henkin metoduyla elde edilen modeli* $\mathfrak{M}^\Phi = \langle S^\Phi, R_1^\Phi, ..., R_m^\Phi, R_E^\Phi, R_C^\Phi, V^\Phi\rangle$ *aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$S^\Phi = \{\Gamma \mid \Gamma, \Phi$*'de maksimal tutarlı formül kümesi*$\}$

$R_i^\Phi = \{(\Gamma, \Gamma') \mid$ *her* $\varphi \in \Phi$ *için* $K_i\varphi \in \Gamma$ *olması için gerek ve yeter koşul* $K_i\varphi \in \Gamma'$ *olmasıdır*$\}$

$R_E^\Phi = \{(\Gamma, \Gamma') \mid$ *her* $\varphi \in \Phi$ *için* $E_i\varphi \in \Gamma$ *ise* $\varphi, E_i\varphi \in \Gamma'$*'dır*$\}$

$R_C^\Phi = \{(\Gamma, \Gamma') \mid$ *her* $\varphi \in \Phi$ *için* $C_i\varphi \in \Gamma$ *olması için gerek ve yeter koşul* $C_i\varphi \in \Gamma'$ *olmasıdır*$\}$

$V^\Phi(p) = \{\Gamma \in S^\Phi \mid p \in \Gamma\}$

Tanım 4.2.9. $\Gamma = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ *formül kümesi verilmiş olsun.* $\hat{\Gamma}$ *formülü* $\hat{\Gamma} = \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$ *şeklinde tanımlanır.*

Lemma 4.2.10. Φ *yeterli bir küme olmak üzere* Γ *ve* Σ *kümeleri* Φ*'de maksimal tutarlı olsun.* $\hat{\Gamma} \wedge < K_i > \Sigma$ *tutarlı ise* $(\Gamma, \Sigma) \in R_i^\Phi$*'dir.*

İspat. $(\Gamma, \Sigma) \notin R_i^\Phi$ olsun. $\hat{\Gamma} \wedge < K_i > \Sigma$ formülünün tutarsız olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda bir $\varphi \in \Phi$ formülü için $K_i\varphi \in \Gamma$ ve $K_i\varphi \notin \Sigma$'dır. Buradan $\vdash \hat{\Gamma} \to K_i\varphi$ ve $\vdash \hat{\Sigma} \to \neg K_i\varphi$ elde edilir. Bu durumda aşağıdaki türetimi verebiliriz.

1. $\vdash \hat{\Sigma} \to \neg K_i\varphi$
2. $\vdash K_i\varphi \to \neg\hat{\Sigma}$
3. $\vdash K_i(K_i\varphi \to \neg\hat{})$ (Zorunluluk kuralından)
4. $\vdash K_iK_i\varphi \to K_i\neg\hat{\Sigma}$ (K aksiyomundan)
5. $\vdash K_i\varphi \to K_i\neg\hat{\Sigma}$ ($K_i\varphi \to K_iK_i\varphi$ aksiyomundan)
6. $\vdash \hat{\Gamma} \to K_i\neg\hat{\Sigma}$ ($\vdash \hat{\Gamma} \to K_i\varphi$ olduğundan)
7. $\vdash \hat{\Gamma} \to \neg < K_i > \hat{\Sigma}$
8. $\vdash \neg(\hat{\Gamma} \wedge < K_i > \hat{\Sigma})$
9. $\vdash (\hat{\Gamma} \wedge < K_i > \hat{\Sigma}) \to \perp$

elde edilir. O halde $\hat{\Gamma} \wedge < K_i > \hat{\Sigma}$ formülü tutarsızdır. Öyleyse $\hat{\Gamma} \wedge < K >_i \Sigma$ tutarlı ise $(\Gamma, \Delta) \in K_i$'dir. ⊠

Lemma 4.2.11. *Γ, Φ'de maksimal tutarlı bir küme olmak üzere, her $C\varphi \in \Phi$ için, $C\varphi \in \Gamma$ olması için gerek ve yeter koşul hem $C\varphi$ hem de φ'nin $\Gamma = \Theta_0, ..., \Theta_n = \Gamma'$ zincirindeki her bir kümenin elemanı olmasıdır.*

İspat. ($\Rightarrow$): $C\varphi \in \Gamma$ olsun. İspat zincirin uzunluğu üzerine tümevarımla yapılır.

Temel Adım: Zincirin uzunluğu n=0 olsun. Bu durumda $\Gamma = \Theta_0 = \Gamma'$'dür. $C\varphi \in \Phi$ ve Φ yeterli bir küme olduğundan $\varphi \in \Phi$'dir. Bununla birlikte $\vdash C\varphi \rightarrow \varphi$ ve Γ, Φ'de türetim altında kapalı olduğundan $\varphi \in \Gamma$'dır.

Tümevarım Hipotezi: Zincirin uzunluğu n ve lemma n için doğru olsun.

Tümevarım Adımı: Zincirin uzunluğu n+1 olsun. Tümevarım hipotezinden $C\varphi \in \Theta_n$'dir. $(\Theta_n, \Theta_{n+1}) \in R_i^{\Phi}$ olsun. $C\varphi \rightarrow EC\varphi$ bir aksiyom, Θ_n maksimal tutarlı bir küme ve türetim altında kapalı olduğundan $EC\varphi \in \Theta_n$'dir. Bununla birlikte, $E\varphi \leftrightarrow K\varphi_1 \wedge ... \wedge K\varphi_m$ aksiyomundan her $a \in B$ için $\vdash E\varphi \rightarrow K_a\varphi$'yi elde ederiz. Buradan $K_aC\varphi \in \Theta_n$'dir. $(\Theta_n, \Theta_{n+1}) \in R_i$ olduğundan $C\varphi \in \Theta_{n+1}$'dir. Temel adıma benzer olarak $\varphi \in \Theta_{n+1}$ elde edilir.

($\Leftarrow$): Hem $C\varphi$ hem de φ, $\Gamma = \Theta_0, ..., \Theta_n = \Gamma'$ zincirindeki her bir kümenin elemanı olsun. Her $C\varphi \in \Phi$ için $C\varphi \in \Gamma$ olduğunu göstermeliyiz. C_Φ kümesi Φ'deki maksimal tutarlı Σ kümelerinin kümesi olsun öyle ki φ formülü, $\Sigma = \chi_0, ..., \chi_k = \Sigma'$ zincirindeki her kümenin elemanıdır.

$$\Psi = \bigvee_{\Sigma \in C_\Phi} \hat{\Sigma}$$

formülünü göz önüne alalım. Φ'de tutarlı $\hat{\Gamma}$ formülü Ψ formülünün bir alt formülü olduğundan $\vdash \hat{\Gamma} \rightarrow \Psi$'dır. Bununla birlikte $\Sigma \in C_\Phi$ ise $\varphi \in \Sigma$'dır. Şu halde φ formülü $\hat{\Sigma}$'nın bir alt formülü ve $\hat{\Sigma}$ formülü Ψ formülünün bir alt formülü olduğundan $\vdash \Psi \rightarrow \varphi$'dir.

Şimdi de $\vdash \Psi \rightarrow E\Psi$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\Psi \wedge \neg E\Psi$ formülü tutarlı olsun. Bu durumda Ψ'nin bir alt formülü $\hat{\Sigma}$ vardır öyle ki $\hat{\Sigma} \wedge \neg E\Psi$ tutarlıdır. Buradan bir a kişisi için $\hat{\Sigma} \wedge < K_a > \neg\Psi$ formülünün tutarlı olduğu elde edilir. $\neg\Psi$ tutarlı olduğundan $\hat{\Sigma} \wedge < K_a > \bigvee_{\Omega \in (S^\Phi - C_\Phi)} \hat{\Omega}$ formülü tutarlıdır. $\hat{\Sigma} \wedge \bigvee_{\Omega \in (S^\Phi - C_\Phi)} < K_a > \hat{\Omega}$ formülü de tutarlıdır. Bu durumda Φ'de maksimal tutarlı bir Ω formül kümesi için $\hat{\Omega} \notin C_\Phi$ ve $\hat{\Sigma} \wedge \bigvee_{\Lambda \in (S^\Phi - C_\Phi)} < K_a > \hat{\Lambda}$ tutarlı olduğu elde edilir. Lemma 4.2.10'dan $(\Sigma, \Omega) \in R_a^{\Phi}$'dır. Bununla birlikte $\Omega \notin C_\Phi$ olduğundan Ω'da bir zincir vardır öyle ki φ bu zincirdeki kümelerden en az birinin elemanı değildir. Şu halde ilk elemanı Σ olan bir zincir vardır öyle ki φ

formülü bu zincirdeki kümelerden herhangi bir tanesinin elemanı değildir. Bu ise $\Sigma \in C_\Phi$ olması ile bir çelişkidir.

O halde $\Psi \to E\Psi$ tutarlıdır yani $\vdash \Psi \to E\Psi$'dir. Buradan $\vdash C(\Psi \to E\Psi)$'dir. $\vdash C(\Psi \to E\Psi) \to (\Psi \to C\Psi)$'den modus ponens ile $\vdash \Psi \to C\Psi$ elde edilir. Bununla birlikte $\vdash \hat{\Gamma} \to \Psi$'den $\vdash \hat{\Gamma} \to C\Psi$ elde edilir. Ayrıca $\Psi \to \varphi$ ile birlikte C için dağılma ve zorunluluk kuralları uygulanırsa $\hat{\Gamma} \to C\varphi$ elde edilir. Γ formül kümesi Φ'de maksimal tutarlı olduğundan $C\varphi \in \Gamma$ olur. ⊠

Lemma 4.2.12. *Tanım 4.2.8'de verilen $\mathfrak{M}^\Phi$ modeli bir S5EC modeldir.*

İspat. $\mathfrak{M}^\Phi$ modelinin (i)-(iii) koşullarını gerçeklediğini göstermeliyiz.

(i) R_i^Φ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu göstermeliyiz.

R_i^Φ yansımalıdır. $K_i\varphi \in \Gamma$ olsun. $K_i\varphi \to \varphi$ bir aksiyom ve Γ maksimal tutarlı bir küme olduğundan $\varphi \in \Gamma$'dır. R_i^Φ bağıntısının tanımı gereği $(\Gamma, \Gamma') \in R_i^\Phi$'dir.

R_i^Φ öklidyendir. (Γ, Γ'), $(\Gamma, \Gamma'') \in R_i^\Phi$ ve $K_i\varphi \in \Gamma$ olsun. $(\Gamma, \Gamma') \in R_i^\Phi$ olduğundan $K_i\varphi \in \Gamma'$'dür. Bununla birlikte $(\Gamma, \Gamma'') \in R_i^\Phi$ olduğundan φ, $K_i\varphi \in \Gamma''$'dür. Şu halde R_i^Φ'nin tanımından $(\Gamma', \Gamma'') \in R_i^\Phi$'dir.

(ii) $R_E^\Phi = R_1^\Phi \cup ... \cup R_m^\Phi$ olduğunu gösterelim.

$(\subseteq)$: $(\Gamma, \Gamma') \in R_E^\Phi$ ve $(\Gamma, \Gamma') \notin R_i^\Phi$ olsun. Bu durumda her $1 \leq i \leq m$ için $K_i\varphi \in \Gamma$ olurken $\varphi \notin \Gamma'$ veya $K_i\varphi \notin \Gamma'$'dür.

- $\varphi \notin \Gamma'$ olsun. Bu durumda Γ''nün maksimal tutarlılığından $\neg\varphi_i \in \Gamma'$'dür. Öyleyse $\neg\varphi_1 \wedge ... \wedge \neg\varphi_m \in \Gamma'$'dür. $\varphi = \varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ olsun. $\vdash \varphi_i \to \varphi$ olduğundan $\vdash K_i(\varphi_i \to \varphi)$'dir. K aksiyomundan $\vdash K_i\varphi_i \to K_i\varphi$. Γ maksimal tutarlı olduğundan $K_i\varphi_i \to K_i\varphi \in \Gamma$, buradan da her i için $K_i\varphi \in \Gamma$. Böylece $K_1\varphi \wedge ... \wedge K_m\varphi \in \Gamma$ olduğundan (A6) aksiyomu gereği $E\varphi \in \Gamma$'dır. Bu sonuçtan $\varphi \in \Gamma/E \subseteq \Gamma'$ elde edilir. Ayrıca $\neg\varphi_1 \wedge ... \wedge \neg\varphi_m \in \Gamma'$ olduğundan $\neg\varphi \in \Gamma'$'dır. Bu ise bir çelişkidir. Şu halde bazı i'ler için $(\Gamma, \Gamma') \in R_i^\Phi$'dir.
- $K_i\varphi \notin \Gamma'$ olsun. Γ' maksimal tutarlı olduğundan $\neg K_i\varphi \in \Gamma'$'dır. O halde $\neg K_1\varphi \wedge ... \wedge \neg K_i\varphi \in \Gamma'$'dür. Bununla birlikte $(\Gamma, \Gamma') \in R_E^\Phi$

olduğundan $E\varphi \in \Gamma'$'dür. (A6) aksiyomundan ve Γ''nün maksimal tutarlı olmasından $K_i\varphi \wedge ... \wedge K_m\varphi \in \Gamma'$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Şu halde $R_E^\Phi \subseteq R_1^\Phi \cup ... \cup R_m^\Phi$'dir.

($\supseteq$) : $(\Gamma, \Gamma') \in R_1^\Phi \cup ... \cup R_m^\Phi$ olsun. Şu halde $K_i\varphi \in \Gamma$ ise $\varphi, K_i\varphi \in \Gamma'$'dür. Buradan $K_1\varphi \wedge ...K_m\varphi \in \Gamma'$'dür. (A6) aksiyomu gereği $E\varphi \in \Gamma'$'dır yani, $(\Gamma, \Gamma') \in R_E^\Phi$'dir. $R_1^\Phi \cup ... \cup R_m^\Phi \subseteq R_E^\Phi$ elde edilmiş olur.

(iii) ($\subseteq$): $(\Gamma, \Gamma') \in R_E^*$ ve $C\varphi \in \Gamma$ olsun. Öyleyse $\Gamma = \Theta_0, ..., \Theta_n = \Gamma'$ zinciri vardır öyle ki $(\Theta_i, \Theta_{i+1}) \in R_E^\Phi$'dir. (A8) $C\varphi \to EC\varphi$ aksiyomu ve $C\varphi \in \Gamma$ ile $EC\varphi \in \Theta_0$ elde edilir. $(\Theta_i, \Theta_{i+1}) \in R_E^\Phi$ ifadesi kullanılırsa $C\varphi \in \Theta_1$'dir. Bu işlem n defa tekrarlanırsa $C\varphi \in \Gamma'$ elde edilmiş olur.

($\supseteq$): $(\Gamma, \Gamma') \in R_C^\Phi$ olsun. $(\Gamma, \Gamma') \in {R_E}^*$ olduğunu göstermek için $\Gamma = \Theta_0, ..., \Theta_n = \Gamma'$ olacak şekilde Φ'deki maksimal tutarlı kümelerin bir zinciri vardır öyle ki her k için $(0 \leq k < n)$ $\langle \Theta_k, \Theta_{k+1} \rangle \in R_E$ olduğunu göstermeliyiz. Burada her Γ_k'de φ'nin doğru olduğu için istenilen gösterilmiş olur.

Böylece $\mathfrak{M}^\Phi$ modeli , bir S5EC modeldir. ⊠

Lemma 4.2.13. (Truth) Φ *sonlu ve yeterli bir formül kümesi,* $\Gamma \subseteq \Phi$ *ve* $\varphi \in \Phi$ *olmak üzere* $\Gamma \models \varphi$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\varphi \in \Gamma$ *olmasıdır.*

İspat. $\varphi \in \Phi$ olsun. İspat φ formülünün karmaşıklığı üzerinde tümevarımla yapılır.

Temel Adım: φ önerme değişkeni p olsun. $p \in \Gamma$ olması için gerek ve yeter koşul $\Gamma \in V^\Phi(s_\Gamma)(p)$ olduğundan istenilen elde edilmiş olur.

Tümevarım Hipotezi: Her maksimal tutarlı küme $\Gamma \subseteq \Phi$ ve $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ için lemma doğru olsun.

Tümevarım Adımı:

(i) $\wedge$ ve $\neg$ bağlaçları için ispat 4.1.6'dakine benzer şekilde yapılır.

(ii) $\varphi = C\varphi_1$ olsun.

$C\varphi_1 \in \Gamma \Leftrightarrow$

$\varphi_1 \in \Gamma = \Gamma_0, ..., \Gamma_n = \Gamma' \Leftrightarrow$ (Tümevarım Adımı)

$\mathfrak{M}^\Phi, \Gamma_0 \models \varphi_1 \wedge ... \wedge \mathfrak{M}^\Phi, \Gamma_n \models \varphi_1 \Leftrightarrow$

$\mathfrak{M}^\Phi, \Gamma \models C\varphi_1$.

(iii) $(\Leftarrow)$: $\varphi = E\psi$ olsun. Θ, Φ'de maksimal tutarlı keyfi bir küme olsun öyle ki $(\Gamma, \Theta) \in R_E$. R_E'nin tanımından, $\psi \in \Theta$'dır. Tümevarım hipotezinden, $\mathfrak{M}^\Phi, \Theta \models \psi$'dir. Θ kümesi keyfi seçildiğinden $\mathfrak{M}^\Phi, \Gamma \models E\psi$'dir.

$(\Rightarrow)$: $\mathfrak{M}^\Phi, \Gamma \models E\psi$ olsun. $\Gamma/E = \{\varphi \mid E\varphi \in \Gamma\} \cup \{\neg\psi\}$ kümesinin tutarsız olduğunu gösterelim. $\Gamma/E \cup \{\neg\psi\}$ tutarlı olsun. Bu durumda bir maksimal genişleme Γ' vardır ve $\Gamma/E \subseteq (\Gamma/E) \cup \{\neg\psi\} \subseteq \Gamma'$ olduğundan $(s_\Gamma, s'_\Gamma) \in R_E$'dir. $\neg\psi \in \Gamma'$ olduğundan tümevarım hipoteziyle $\mathfrak{M}^\Phi, s'_\Gamma \models \neg\psi$ olur. Buradan $\mathfrak{M}^\Phi, s_\Gamma \models \neg E\psi$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Şu halde $\Gamma/E \cup \{\neg\psi\}$ kümesinin sonlu bir alt kümesi vardır öyle ki $\varphi_1, ..., \varphi_k, \neg\psi$ tutarsızdır. Buradan $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k \wedge \neg\psi)$'dir. Öyleyse

$$\vdash (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \rightarrow (....(\varphi_k \rightarrow \psi)...))\text{'dir. } (1)$$

Şimdi de

$$E(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (E\varphi \rightarrow E\psi) \ (2)$$

olduğunu gösterelim. $\mathfrak{M}$ keyfi bir model ve s bu modelde bir durum olmak üzere $\mathfrak{M}, s \models E(\varphi \rightarrow \psi)$ ve $\mathfrak{M}, s \models E\varphi$ olsun. Bu durumda, $(s, t) \in R_E$ koşulunu sağlayan her t durumu için $\mathfrak{M}, t \models \varphi \rightarrow \psi$ ve $\mathfrak{M}, t \models \varphi$. Buradan $(s, t) \in R_E$ koşulunu sağlayan her t durumu için $\mathfrak{M}, t \models \psi$ olduğu elde edilir. O halde $\mathfrak{M}, s \models E\psi$'dir.

$\varphi_2 \rightarrow (....(\varphi_k \rightarrow \psi)...)$ ifadesini σ ile gösterelim. Bu durumda

$$\vdash (\varphi_1 \rightarrow \sigma)\text{'dır. } (3)$$

Ayrıca $\vdash \varphi$ ise her i $(0 \leq i < n)$için $\vdash K_i\varphi$'dir. Buradan $\vdash K_1\varphi \wedge ... \wedge K_n\varphi$ olur. (A6)'dan $\vdash E\varphi$ elde edilir. Buradan (3) ile

$$\vdash E(\varphi_1 \rightarrow \sigma) \ (4)$$

olur.

(2) ve (4)'ten

$$\vdash E\varphi_1 \to E\sigma\text{'dır. (5)}$$

Γ kümesi maksimal tutarlı olduğundan bütün totolojileri içerir: $(E\varphi_1 \to E\sigma) \in \Gamma$'dır. Buradan $E\varphi_1 \in \Gamma$ olduğundan $E\sigma \in \Gamma$'dır. Bu işlem tekrarlanırsa $E\psi \in \Gamma$ elde edilir.

(iv) $K_i\varphi$ için ispat (iii)'tekine benzer şekilde yapılır.

$\boxtimes$

Teorem 4.2.14. *S5EC sonlu model özelliğine sahiptir.*

İspat. φ, S5EC dilinde bir formül olmak üzere, $\nvdash_{S5EC} \varphi$ olsun. Bu durumda φ'nin yeterli kümesi Φ için $\{\neg\varphi\}$ kümesini içeren Φ'de maksimal tutarlı tutarlı bir genişlemesi Γ vardır. Sonlu Henkin yöntemiyle elde edilen $\mathfrak{M}^\Phi$ için $\mathfrak{M}, \Gamma \models \neg\varphi$'dir. Bu model φ formülü için bir karşı model olduğundan $\nvDash \varphi$ olur. Bu durumda S5EC sonlu model özelliğine sahiptir. $\boxtimes$

4.2.3 KD45-O için Sonlu Henkin Yöntemi

KD45-O için sonlu Henkin yöntemiyle elde edilen modeli tanımlayabiliriz. Bu bölümdeki bilgiler [14]'te de bulunabilir.

Tanım 4.2.15. *φ bir KD45-O formül olmak üzere φ'nin alt formüllerini içeren Φ kümesi aşağıdaki özellikleri sağlarsa KD45-O sistemi için yeterli bir küme olarak adlandırılır:*

1. *Eğer $\psi \in \Phi$ ise $\neg\psi \in \Phi$'dir.*
2. *Eğer $B\psi$, $B\chi \in \Phi$ ise $B(\psi \vee \chi) \in \Phi$'dir.*
3. *Eğer $B\psi$, $B\chi \in \Phi$ ise $B(\psi \wedge \chi) \in \Phi$'dir.*
4. *Eğer $B\psi \in \Phi$ ise $UB\psi \in \Phi$'dir.*
5. *Eğer $B\psi, B\chi \in \Phi$ ise $B\psi \succcurlyeq_B B\chi$'dir.*
6. *$BT, B\perp \in \Phi$'dir.*

Tanım 4.2.16. *Φ yeterli bir küme olmak üzere, KD45-O mantığının sonlu kanonik modeli $\mathfrak{M}^c = \langle S^c, R_B, R_U, V^c \rangle$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

(i) $S^c = \{\Gamma \mid \Gamma, \Phi\text{'de maksimal KD45-O tutarlı }\}$,

(ii) $R_B = \{(\Gamma, \Gamma') \mid (B\varphi \in \Gamma \Rightarrow B\varphi, \varphi \in \Gamma')$ *ve*$(\neg B\varphi \in \Gamma \Rightarrow \neg B\varphi \in \Gamma')\}$,
$R_U = \{(\Gamma, \Gamma') \mid (U\varphi \in \Gamma \Rightarrow B\varphi, \varphi \in \Gamma')$ *ve* $(\neg U\varphi \in \Gamma \Rightarrow \neg U\varphi \in \Gamma')\}$

(iii) $V^c(p) = \{\Gamma \mid p \in \Gamma\}$.

Lemma 4.2.17. *$KD45{-}O$ mantığının sonlu kanonik modeli $\mathfrak{M}^c = \langle S^c, R_B, R_U, V^c\rangle$ aşağıdaki özellikleri gerçekler.*

(i) R_U bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

(ii) R_B bağıntısı, R_U'nun öklidyen alt bağıntısıdır.

İspat.

(i) Öncelikle R_U'nun bir denklik bağıntısı olduğunu gösterelim. Bunun için R_U'nun yansımalı, simetrik ve geçişli olduğunu göstereceğiz.

(a) R_U yansımalıdır: Her $\Gamma \in S^c$ için $(\Gamma, \Gamma) \in R_U$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $U\varphi \in \Gamma$ olmak üzere $\varphi \in \Gamma$ olduğunu göstermeliyiz. İspat çelişkiyle yapılır: $\varphi \notin \Gamma$ olsun. Γ maksimal tutarlı olduğundan $\neg\varphi \in \Gamma$'dır. Zorunluluk kuralıyla birlikte Γ maksimal tutarlı olduğundan $U\neg\varphi \in \Gamma$'dır. Bu bir çelişkidir. O halde $\varphi \in \Gamma$ ve $(\Gamma, \Gamma) \in R_U$'dur.

(b) R_U simetriktir: $(\Gamma, \Gamma') \in R_U$ olsun. $(\Gamma', \Gamma) \in R_U$ olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda $U\varphi \in \Gamma'$ ise $\varphi, U\varphi \in \Gamma$ olduğunu göstermeliyiz. $U\varphi \notin \Gamma$ olsun. Γ maksimal tutarlı olduğundan $\neg U\varphi \in \Gamma$'dır. $(\Gamma, \Gamma') \in R_U$ olduğundan $\neg U\varphi \in \Gamma'$ olur ki bu Γ''nün tutarlı olması ile bir çelişkidir. Şimdi de $\varphi \notin \Gamma$ olsun. Γ maksimal tutarlı olduğundan $\neg\varphi \in \Gamma$ ve zorunluluk kuralından $U\neg\varphi \in \Gamma$'dır. $(\Gamma, \Gamma') \in R_U$ olduğundan $\neg\varphi \in \Gamma'$ olur. $U\varphi \in \Gamma'$ ile birlikte $U\varphi \to \varphi$ bir teorem olduğundan $\varphi \in \Gamma'$ elde edilir. Bu ise Γ''nin tutarlı olması ile bir çelişkidir.

$\neg U\varphi \in \Gamma'$, $\neg U\varphi \notin \Gamma$ olsun. Bu durumda $(\Gamma, \Gamma') \in R_U$ olduğundan $\neg U\varphi \notin \Gamma'$ ve bu bir çelişkidir.

Şu halde R_U bağıntısı simetriktir.

(c) R_U geçişlidir: $(\Gamma, \Gamma'), (\Gamma', \Gamma'') \in R_U$ ve $U\varphi \in \Gamma$ olsun. $(\Gamma, \Gamma'') \in R_U$ olduğunu göstermeliyiz. $(\Gamma, \Gamma') \in R_U$ olduğundan $U\varphi \in \Gamma'$'dür. Bununla birlikte $(\Gamma', \Gamma'') \in R_U$ olduğundan $\varphi, U\varphi \in \Gamma''$'dür. Öyleyse $U\varphi \in \Gamma$ olduğunda $\varphi, U\varphi \in \Gamma''$ ve $(\Gamma, \Gamma'') \in R_U$'dur.

$\neg U\varphi \in \Gamma$ olsun. $(\Gamma, \Gamma') \in R_U$ olduğundan $\neg U\varphi \in \Gamma'$'dür. Benzer şekilde $(\Gamma', \Gamma'') \in R_U$ olduğundan $\neg U\varphi \in \Gamma''$ olur ki buradan $(\Gamma, \Gamma'') \in R_U$ elde edilir.

O halde R_U bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişli olduğundan bir denklik bağıntısıdır.

(b) Şimdi de R_B'nin R_U'nun öklidyen alt bağıntısı olduğunu gösterelim.

(i) R_B bağıntısı öklidyendir: $(\Gamma, \Gamma'), (\Gamma, \Gamma'') \in R_B$ ve $B\varphi \in \Gamma'$ olsun. Bu durumda $B\varphi \in \Gamma$'dır. $(\Gamma, \Gamma'') \in R_B$ olduğundan $\varphi, B\varphi \in \Gamma''$ olur. Şu halde $B\varphi \in \Gamma'$ iken $\varphi, B\varphi \in \Gamma''$'dır. Buradan $(\Gamma', \Gamma'') \in R_B$ elde edilir.

(ii) $(\Gamma, \Gamma') \in R_B$ ve $U\varphi \in \Gamma$ olsun. $U\varphi \to B\varphi$ formülü $KD45 - O$'nun bir teoremi olduğundan Lemma 4.3.3 (iv) ile $B\varphi \in \Gamma$ elde edilir. Bununla birlikte $(\Gamma, \Gamma') \in R_B$ olduğundan $\varphi, B\varphi \in \Gamma'$'dür. $\varphi \to U\varphi$, $KD45 - O$'nun teoremi olduğundan $U\varphi \in \Gamma'$ elde edilir. Buradan $(\Gamma, \Gamma') \in R_U$ yani, $R_B \subseteq R_U$'dur.

⊠

R_U bağıntısı bir denklik bağıntısı olduğundan U denklik sınıfları içinde boştan farklı B-yansımalı elemanlardan oluşan bir küme vardır ve bu küme $\mathcal{B}$ ile gösterilir.

KD45-O mantığında U, evrensel bir operatördür. Dolayısıyla R_U bağıntısının da evrensel olması gerekmektedir. Fakat elde edilen modelde R_U böyle bir özelliğe sahip olmadığından doğrulmuş alt model yöntemine başvuracağız.

Tanım 4.2.18. *$KD45-O$ mantığının kanonik modeli olan $\mathfrak{M}^c$'nin Φ_0 ile R_U'dan doğrulmuş alt modeli $\mathfrak{M}_{\Phi_0} = \langle S_{\Phi_0}, T_B, T_U, V_{\Phi_0} \rangle$ aşağıdaki gibi tanımlanır:*

(i) $S_{\Phi_0} \subseteq S^{\Phi}$,

(ii) $T_B = R_B \cap (S_{\Phi_0} \times S_{\Phi_0})$,

(iii) $T_U = R_U \cap (S_{\Phi_0} \times S_{\Phi_0})$,

(iv) $V_{\Phi_0}(p) = V(p) \cap S_{\Phi_0}$

Böylece elde edilen modelde T_U bağıntısı denklik bağıntısı olması yanında evrensel bağıntı da oldu.

Lemma 4.2.19. (Truth) *Γ maksimal tutarlı bir küme ve φ bir KD45-O formül olsun. Bu durumda, tanım 4.2.18'de verilen $\mathfrak{M}_{\Phi_0}$ modeli için*

$$\mathfrak{M}_{\Phi_0}, \Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma\text{'dır.}$$

İspat. İspat, φ'nin karmaşıklığı üzerinde tümevarımla yapılır.

(i) φ atomik formül ise istenilen V_{Φ_0}'ın tanımından elde edilir.

(ii) $\neg, \vee$ bağlaçları için ispat lemma 4.1.6'dakine benzer şekilde yapılır.

(iii $\varphi = B\psi$ olsun.

($\Leftarrow$) : $\varphi \in \Gamma$ olsun. Bir $\Gamma' \in S_{\Phi_0}$ için, $(\Gamma, \Gamma') \in T_B$ ise $\psi \in \Gamma'$'dür. $\psi \vdash B\psi$ ve Γ' türetim altında kapalı olduğundan $B\psi \in \Gamma'$'dür. O halde $B\varphi \to \varphi \in \Gamma'$'dür. Buradan $\Gamma\prime$'nün yansımalı yani $\Gamma' \in \mathcal{B}$ olduğu elde edilir. Γ' keyfi seçildiğinden $\mathfrak{M}_{\Phi_0}, \Gamma \models B\psi$'dir.

($\Rightarrow$) : $\mathfrak{M}_{\Phi_0}, \Gamma \models \varphi$ olsun. Öncelikle $\Gamma/B =^{\{} \psi \mid B\psi \in \psi\}$ olmak üzere $(\Gamma/B) \cup \{\neg\psi\}$ kümesinin tutarsız olduğunu gösterelim. $(\Gamma/B) \cup \{\neg\psi\}$ tutarlı olsun. Bu durumda Lindenbaum lemmasından bu kümenin maksimal tutarlı bir Ψ genişlemesi vardır. $\Gamma/B \subseteq (\Gamma/B) \cup \{\neg\psi\} \subseteq \Psi$ olduğundan $(\Gamma/B, \Psi) \in T_B$ olur. $\neg\varphi \in \Psi$ olduğundan $\Psi \models \neg\varphi$'dir. Bununla birlite $(\Psi, \Psi) \in T_B$ olduğu için $\Gamma \models \neg B\psi$ olur ki bu $\Gamma \models \varphi$ olmasıyla bir çelişkidir. O halde $(\Gamma/B) \cup \{\neg\psi\}$ kümesi tutarsızdır.

$(\Gamma/B) \cup \{\neg\psi\}$ tutarsız ise Γ/B'nin sonlu bir alt kümesi $\Sigma = \{\sigma_1, ...\sigma_m\}$ vardır öyle ki $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$ tutarsızdır. Buradan $\vdash \neg(\sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_m \wedge \neg\psi)$'dir. $\neg(\sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_m \wedge \neg\psi)$ önermesel olarak $\sigma_1 \to (\sigma_2 \to ...(\sigma_m \to \psi)...)$'ye denk olduğundan $\vdash (\sigma_1 \to (\sigma_2 \to ...(\sigma_m \to \psi)...)$'dir. $\sigma' = (\sigma_2 \to ...(\sigma_m \to \psi)...)$ olsun. Bu durumda $\vdash (\sigma_1 \to \sigma')$'dür. B için zorunluluk kuralından $\vdash B(\sigma_1 \to \sigma')$. Yine B için K aksiyomunu uygularsak $\vdash (B\sigma_1 \to B\sigma')$ elde edilir. Bu işlem m defa tekrarlanırsa $\vdash B\psi$ elde edilir. Γ kümesi türetim altında kapalı olduğundan $B\psi \in \Gamma$ olur.

(iv) $\varphi = U\psi$ olsun. İspat (iii)'tekine benzer şekilde yapılır.

(v) $\varphi = \psi \succcurlyeq_B \sigma$ olsun.

$(\Rightarrow)$: $\psi \succcurlyeq_B \sigma \in \Gamma$ olsun. $\psi \succcurlyeq_B \sigma \to B(\psi \succcurlyeq_B \sigma)$ bir aksiyom olduğundan ve Γ aksiyomları içerdiğinden $B(\psi \succcurlyeq_B \sigma) \in \Gamma$'dır. (iii)'nin kullanılmasıyla $\Gamma \models B(\psi \succcurlyeq_B \sigma)$ olur. Dolayısıyla herhangi bir $\leq$-minimal Γ' durumu için $\Gamma' \models \psi \succcurlyeq_B \sigma$'dır. Bununla birlikte Γ yansımalı olduğundan özel olarak $\Gamma' = \Gamma$ olarak seçilirse $\Gamma \models \psi \succcurlyeq_B \sigma$ olur.

$(\Leftarrow)$: $\Gamma \models \psi \succcurlyeq_B \sigma$ ve $\psi \succcurlyeq_B \sigma \notin \Gamma$ olsun. Bu durumda Γ'nın maksimalliğinden $\neg(\psi \succcurlyeq_B \sigma) \in \Gamma$ elde edilir. Bununla birlikte tanım 2.2.6'daki (vi) aksiyomunu kullanılırsa $B\neg(\psi \succcurlyeq_B \sigma) \in \Gamma$ elde edilir. (iii)'den $\Gamma \models B\neg(\psi \succcurlyeq_B \sigma)$'dir. Bu durumda herhangi bir $\leq$-minimal Γ' durumu için $\Gamma' \models \neg(\psi \succcurlyeq_B \sigma)$'dir. Bu ise $\Gamma \models \psi \succcurlyeq_B \sigma$ olmasıyla bir çelişkidir. O halde $\psi \succcurlyeq_B \sigma \in \Gamma$'dır.

$\boxtimes$

Tanım 4.2.20. *X bir formüller kümesi ve φ bir formül olmak üzere eğer φ'nin doğru olduğu dünyaların kümesi X ise φ, X'i temsil eder denir ve $V(\varphi) = X$ ile gösterilir. Φ yeterli bir küme olmak üzere eğer Φ'deki bazı $B\varphi$ formülleri için φ, X'i temsil ediyorsa X'e temsil edilebilirdir denir.*

Şimdi de $\mathfrak{M}_{\Phi_0}$ modeli üzerinde yarı sıralama bağıntısı olacak şekilde $\leq$ ve $\geq_B$ bağıntılarını tanımlayalım. Bunun için,

(1) $\leq$ bağınıtısı S_{Φ_0} üzerinde yarı lineer makullük sıralaması,

(2) $\geq_B$ bağıntısı da $P(S_{\Phi_0})$ üzerinde Tanım 2.2.4'teki (i)-(iii) koşullarını sağlayan bir yarı lineer sıralama bağıntısı olacak şekilde tanımlanmalıdır.

(1) için: $B\varphi \to UB\varphi$ formülü bu $\mathcal{B}$ kümesinin tek türlü belirlendiğini ve bir B denklik sınıfı olduğunu gösterir. S_{Φ_0} kümesinin elemanları üzerinde makullük sıralaması $\mathcal{B}$'deki herhangi bir durum $S_{\Phi_0} \setminus \mathcal{B}$'dekinden daha makuldür şeklinde tanımlanır ve her iki kümenin kendi içindeki durumların eşit makullükte olduğu varsayılır.

(2) için: $\mathcal{P}(S_{\Phi_0})$ üzerinde $\geq_B$ bağıntısını tanımlayabilmek için S_{Φ_0}'nin temsil edilebilir alt kümeleri kullanılır. Φ'nin tanımından S_{Φ_0}'ın temsil edilebilir alt kümeleri küme birleşimi, kesişimi altında kapalıdır ve S_{Φ_0} ile boş kümeyi içerir.

$P(S_{\Phi_0})$'nin temsil edilebilir elemanları üzerindeki makullük sıralaması $\geq_1$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\psi \succcurlyeq_B \chi$ doğru olması için ve yeter koşul (g.y.k.) $V(\psi) \geq_1 V(\chi)$ olmasıdır.

$\succcurlyeq$ bağıntısı Tanım 2.2.6'daki (i)-(iii) aksiyomlarını gerçeklediğinden bir yarı lineer sıralama bağıntısıdır. Bu nedenle S_{Φ_0}'nin temsil edilebilir alt kümeleri $\geq_1$ altında da yarı lineer sıralıdır.

Şimdi de $\geq_1$ bağıntısının Tanım 2.2.4'teki koşulları gerçeklediğini gösterelim.

(i) $V(\psi) \subseteq V(\chi)$ ise $U(\psi \to \chi)$'dir. $U(\psi \to \chi) \to \chi \succcurlyeq_B \psi$ aksiyomundan $V(\psi) \geq_1 V(\chi)$'dir. Böylece alt küme koşulu sağlanmış olur.

(ii) $V(\psi)$, $\mathcal{B}$'yi içersin fakat $V(\chi)$, $\mathcal{B}$'yi içermesin. Bu durumda $B(\psi) \wedge \neg B(\chi)$ doğrudur. $B(\psi) \wedge \neg B(\chi) \to \psi \succ \chi$ aksiyomu gereği MP ile $V(\psi) \geq_1 V(\chi)$ yani $V(\psi) > V(\chi)$ elde edilir.

(iii) $\varphi \neq \perp$ ise $V(\varphi) \neq V(\perp)$'dir. $\varphi \to (\varphi \succ_B \perp)$ aksiyomundan $V(\varphi) >_B V(\perp) = \emptyset$'dir. Böylece $\geq_1$, $\mathcal{P}(S_{\Phi_0})$ kümesinin temsil edilebilir elemanları üzerinde bir sıralama bağıntısı olduğu elde edilir.

Geriye $\geq_1$ bağıntısını $\mathcal{P}(S_{\Phi_0})$ kümesinin bütün elemanları üzerinde sıralama yapacak şekilde $\geq$ bağıntısına genişletmek kalır. Bunun için $X \subseteq S_{\Phi_0}$ ve X'in temsil edilebilir en büyük alt kümesi $R(X)$ ile gösterilmelidir. Model sonlu ve temsil edilebilir kümeler birleşim altında kapalı olduğundan böyle bir küme vardır. O halde $\geq$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$X \geq Y$ olması için g.y.k. $R(X) \geq_1 R(Y)$ olmasıdır.

$\mathfrak{M}_{\Phi_0}$ modelinin $\geq$ bağıntısı için Tanım 2.2.4'teki koşulları gerçeklediğini göstermeliyiz.

$\geq_1$ yarı lineer olduğundan $\geq$ bağıntısı da yarı lineerdir.

(i) $X \subseteq Y$ ise $R(X) \subseteq R(Y)$ olduğundan alt küme koşulu sağlanmış olur.

(ii) $\mathcal{B} = R(\mathcal{B})$ olduğunu göstermeliyiz.

$w \notin \mathcal{B}$ olacak şeklide bir w dünyasını ele alalım. $\mathcal{B}$'nin dışındaki dünyalardaki T_B bağıntısı yansımalılık özelliğine sahip olmadığından $(w, w) \notin T_B$'dir. Bu durumda bir $B\psi \in \Phi$ için $B\psi_w$ formülü w'da doğru iken, ψ_w burada doğru değildir.

Buradan $B\psi_w$'nun $\mathcal{B}$ üzerindeki her durumda doğru olduğunu elde ederiz. $\mathcal{B}$'nin tümleyenindeki w durumları için her ψ_w'nun evetlemesi ψ'yi ele alalım. $\mathcal{B}$'nin bütün elemanlarında ψ doğruyken $B\varphi \in \Phi$'dir. Fakat $\psi \rightarrow \psi_u$ ve $\mathcal{B}$'nin tümleyeninde ψ_u yanlış olduğundan $B(\psi)$ de bu durumlarda yanlıştır. O halde ψ, $\mathcal{B}$'yi temsil eder.

Buradan $\mathcal{B} = R(\mathcal{B})$ eşitliğini elde edilir ki bu da inanç koşulunu sağlar. Yani $\mathcal{B} \subseteq X$, $\mathcal{B} \nsubseteq Y$ ise $\mathcal{B} \subseteq R(X)$ ve $\mathcal{B} \nsubseteq R(Y)$'dir. R'nin tanımından $R(X) \geq_1 R(Y)$'dir ki bu da $X \geq Y$ olduğunu gösterir.

Böylece bir KD45-O model olan M_{Φ_0} üzerinde $\leq$ ve $\geq_B$ bağıntılarını tanımladık. O halde elde edilen $\mathfrak{M}^\Phi = \langle S_{\Phi_0}, \leq, \geq_B, V^\Phi \rangle$ modeli, bir KD45-O modeldir. ⊠

Teorem 4.2.21. *KD45-O modeli sonlu model özelliğine sahiptir.*

İspat. $\nvdash_{KD45-O} \varphi$ olsun. Bu durumda $\neg\varphi$ kümesi tutarlıdır. Lindenbaum lemmasından, $\{\neg\varphi\}$ kümesinin maksimal tutarlı bir Γ genişlemesi vardır. Γ'dan doğrulmuş olan model üzerinde sıralama bağıntılarının tanımlanmasıyla elde edilen model $\mathfrak{M}^\Phi$, bir $KD45-O$ modeldir ve $\mathfrak{M}^\Phi, \Gamma \models \neg\varphi$'dir.

⊠

4.2.4 Filtreleme Yöntemi

Bu bölümde S5EC ve KD45-O modal mantıklarının filtrelenmiş modelleri tanıtılarak, bu modellerin özellikleri verilecektir.

Tanım 4.2.22. $\mathfrak{M} = \langle S, R, V \rangle$ *bir Kripke model,* Φ *alt formüller altında kapalı sonlu formül kümesi ve* $\psi \in \Phi$ *olsun.* S *üzerinde* $\equiv_\phi$ *bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$s \equiv_\Phi t$ *olması için gerek ve yeter koşul*

$$\mathfrak{M}, s \models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{M}, t \models \psi$$

olmasıdır. $s \equiv_\Phi t$ *bağıntısı bir denklik bağıntısıdır ve* $s \in S$*'nin denklik sınıfı* $[s]_\Phi$ *şeklinde gösterilir.*

Tanım 4.2.23. $\mathfrak{M} = \langle S, R, V \rangle$ *bir Kripke model ve* Φ *alt formüller altında kapalı sonlu formüller kümesi olsun.* $\mathfrak{M}$*'nin* Φ *ile elde edilen filtrelemesi* $N_\Phi = \langle W, T, V_{N_\Phi} \rangle$ *modelidir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

(i) $W = \{[s] \mid s \in S\}$

(ii) $W\times W$ *üzerinde tanımlı* T *bağıntısı aşağıdaki Min(T/R) ve Max(T) koşullarını gerçekler.*

Min(T/R): Her $[s],[t]\in W$ *için eğer* $(s',t')\in R, [s]=[s']$ *ve* $[t]=[t']$ *olacak şekilde* $s',t'\in S$ *var ise* $([s],[t])\in T$*'dir.*

Max(T): Her $[s],[t]\in W$ *için eğer* $([s],[t])\in T$ *ise her* $\Box\psi\in\phi$ *için* $(\mathfrak{M},s\models\Box\psi\rightarrow\mathfrak{M},t\models\psi)$*'dir. (Yani hem Min(T/R) hem de Max(T) koşulunu sağlayan bir T bağıntısına, R'nin* Φ *ile filtrelemesi denir.)*

(iii) $V_{N_\Phi}(p)=V(p)$.

$\mathfrak{M}=\langle S,R,V\rangle$ modeli ve T, R'nin Φ ile bir filtrelemesi ise N_Φ modeline $\mathfrak{M}$'nin Φ ile bir filtrelemesidir denir.

Teorem 4.2.24. *$N_\Phi=\langle W,T,V_{N_\Phi}\rangle$, $\mathfrak{M}=\langle S,R,V\rangle$ modelinin Φ ile bir filtrelemesi olsun. Her $\psi\in\Phi$ ve $s\in S$ için $\mathfrak{M},s\models\psi\Leftrightarrow(N_\Phi,[s])\models\psi$'dir.*

İspat. İspat ψ'nin karmaşıklığı üzerine tümevarımla yapılır.

(i) ψ atomik formül olsun. V_{N_Φ}'nin tanımından elde edilir.

(ii) $\psi=\varphi\vee\chi$ olsun.

$\mathfrak{M},s\models\psi\Leftrightarrow$

$\mathfrak{M},s\models(\varphi\vee\chi)\Leftrightarrow$

$\mathfrak{M},s\models\varphi\vee\ \mathfrak{M},s\models\chi\Leftrightarrow$

$(N_\phi,[s])\models\varphi\vee(N_\phi,[s])\models\chi\Leftrightarrow$

$(N_\phi,[s])\models\varphi\vee\chi\Leftrightarrow$

$(N_\phi,[s])\models\psi$

(iii) $\psi=\neg\varphi$ olsun.

$\mathfrak{M},s\models\neg\varphi\Leftrightarrow$

$\mathfrak{M},s\not\models\varphi\Leftrightarrow$

$(N_\phi,[s])\not\models\varphi\Leftrightarrow$

$(N_\phi,[s])\models\neg\varphi\Leftrightarrow$

$(N_\phi,[s])\models\psi$

(iv) $\psi=\Box\varphi$ olsun.

($\Rightarrow$) $(N_\phi,[s])\not\models\psi$ olsun. Şu halde $([s],[t])\in T$ için $(N_\phi,[t])\not\models\varphi$'dir. Tümevarım hipotezi gereği $\mathfrak{M},t\not\models\varphi$'dir. $([s],[t])\in T$ olduğu için maksimallik koşulundan $\mathfrak{M},s\not\models\Box\varphi$'dir.

($\Leftarrow$) $\mathfrak{M}, s \not\models \Box\varphi$ olsun. Bu durumda bir t durumu vardır öyle ki $(s,t) \in R$'dir ve $\mathfrak{M}, t \not\models \varphi$'dir. Tümevarım hipotezinden $(N_\phi, [t]) \not\models \varphi$'dir. Bununla birlikte minimallik koşulu gereği $([s],[t]) \in T$ olduğundan $(N_\phi, [s]) \not\models \Box\varphi$'dir.

$\boxtimes$

4.2.5 S5EC için Filtreleme Yöntemi

Şimdi S5EC sisteminin kanonik modelinin filtreleme yöntemiyle elde edilen modelini inceleyeceğiz. Bu bölümdeki bilgiler [13]'te bulunabilir.

Tanım 4.2.25. *S5EC'nin kanonik modeli $\mathfrak{M}^c$, φ tutarlı bir formül ve Φ altında yeterli bir küme olsun. $\mathfrak{M}^c$'nin Φ ile bir filtrelemesi $N_\Phi = \langle W, T_1, ..., T_m, T_E, T_C, V_\Phi \rangle$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

(i) $W = \{[s]_\Phi | s \in S^c\}$

(ii) Her $T_i (i \leq m)$ için aşağıdakiler sağlanır:

- *Her $[s]_\Phi, [t]_\phi \in W$ için $([s]_\Phi, [t]_\Phi) \in T_i \Leftrightarrow$ Her $K_i\psi \in \Phi$ için:* $(\mathfrak{M}^c, s \models K_i\psi \Leftrightarrow \mathfrak{M}^c, t \models K_i\psi)$,
- $T_E = (T_1 \cup ... \cup T_m)$,
- $T_C = (T_E)^*$

(iii) $V_{N_\Phi}(p) = V(s)(p)$.

Lemma 4.2.26. *Tanım 4.2.25'te verilen N_Φ modeli bir S5EC modelidir.*

İspat. S5EC denklik bağıntıları tarafından karakterize edildiğinden her i $\leq$m için T_i'lerin birer denklik bağıntısı olduğunu göstermek yeterlidir. T_i bağıntıları birer denklik bağıntısı olduğu aşikardır. O halde N_Φ modeli bir S5EC modeldir. $\boxtimes$

Lemma 4.2.25'te verilen N_Φ modeli sonlu bir modeldir. Bu sonlu model $\mathfrak{M}^c$'nin bir filtrelemesidir. Bunu kanıtlamak için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır.

Lemma 4.2.27. *(Tanımlanabilirlik) W, tanım 4.2.25'teki gibi tanımlanmış olsun. Her A$\subseteq$ W için bir σ_A vardır öyle ki her $[s] \in W$ için, $\mathfrak{M}^c, s \models \sigma_A \Leftrightarrow [s] \in A$'dır.*

İspat. $\mathfrak{M}^c, s$'de doğru olan $\psi \in \Phi$ formüllerinin evetlemesi Form(s) olsun. [s]'nin tanımından $\mathfrak{M}^c, s \models$ Form(s) $\Leftrightarrow$ [s]=[t]. [s] $\in$ A için bütün Form(s)'lerin veyalaması σ_A olsun ve bunu $\bigvee_{[t]\in A}$Form(t) ile gösterelim.

$\mathfrak{M}^c, s \models \sigma_A \Leftrightarrow$

$\mathfrak{M}^c, s \models \bigvee_{[t]\in A}\text{Form(t)} \Leftrightarrow$

$[t] \in$ A olmak üzere $\mathfrak{M}^c, s \models$Form(t) $\Leftrightarrow$

$[s] = [t] \Leftrightarrow$

$[s] \in$ A. $\boxtimes$

Teorem 4.2.28. *Tanım 4.2.25'te verilen verilen N_Φ modeli, $\mathfrak{M}^c$'nin Φ ile elde edilen bir filtrelemesidir.*

İspat. İspat $T_1, ..., T_m, T_E, T_C$ bağıntılarının sırasıyla $R_{1^c}, ..., R_{m^c}, R_{E^c}, R_{C^c}$ bağıntılarının Φ ile elde edilen filtrelemeleri olduğu gösterilerek yapılır.

1. T_i'lerin ($i \leq m$) minimallik ve maksimallik koşullarını sağladığını göstermeliyiz. Minimallik koşulu için, [s], [t] $\in W$ ve $(s', t') \in R_{i^c}$, [s]=[s'] ve [t]=[t'] olacak şekilde $s', t' \in S^c$ olduğunu kabul edelim. $K_i\psi \in \Phi$ olsun.

   $\mathfrak{M}^c, s \models K_i\psi \Leftrightarrow$ ([s]=[s'])

   $\mathfrak{M}^c, s' \models K_i\psi \Leftrightarrow$ (R_{i^c} bir denklik bağıntısı ve $(s', t') \in R_{i^c}$)

   $\mathfrak{M}^c, t' \models K_i\psi \Leftrightarrow$ ([t]=[t'])

   $\mathfrak{M}^c, t \models K_i\psi$

   Bu nedenle $([s], [t]) \in T_i$.

   Maksimallik koşulu için, $[s], [t] \in W$ ve $([s], [t]) \in T_i$ olsun. $\mathfrak{M}^c, s \models K_i\psi$ olduğunu kabul edelim. T_i'nin tanımından $\mathfrak{M}^c, t \models K_i\psi$ ifadesini elde ederiz. R_{i^c} yansımalı olduğundan $\mathfrak{M}^c, t \models \psi$.

2. T_E'nin minimallik koşulunu sağladığını ispatlamak için, $(s, t) \in R_{E^c}$ olduğunu kabul edelim. $\mathfrak{M}^c$ bir $S5EC$ model olduğundan $R_{1^c} \cup ... \cup R_{m^c} = R_{E^c}$ eşitliğini elde ederiz. T_i bağıntısı R_{i^c}'nin bir filtrelemesi olduğundan $([s], [t]) \in T_i$'yi elde ederiz. T_E'nin tanımından da $([s], [t]) \in T_E$.

   Maksimallik koşulu için $([s], [t]) \in T_E$ ve $E_\psi \in \Phi$ için $\mathfrak{M}^c, s \models E\psi$ olsun. ϕ yeterli olduğundan her $i \leq m$ için $K_i\psi\Phi$'yi elde ederiz. $([s], [t]) \in T_E$ olduğundan bir $i \leq m$ vardır öyle ki $([s], [t]) \in T_i$'dir ve $\mathfrak{M}^c, s \models K_i\psi$ ve T_i, R_{i^c}'nin bir filterelemesi olduğundan $\mathfrak{M}^c, s \models \psi$ ifadesini elde ederiz ve buradan T_E, maksimallik koşulunu sağlamış olur.

3. T_C bağıntısının minimallik koşulunu sağladığını göstermek için $(s,t) \in R_{C^c}$ olduğunu kabul edelim. $A \subseteq W$ kümesi

$A = \{[u] \in W | ([s],[u]) \in T_{E^*}\}$ olsun.

$\mathfrak{M}^c, s \models C(\sigma_A \to E\sigma_A) \to (\sigma_A \to C\sigma_A)$ (1)

olduğunu gösterelim. İlk olarak

$\mathfrak{M}^c, s \models C(\sigma_A \to E\sigma_A)$ (2)

olduğunu ispatlamalıyız. $(s,x) \in R_{C^c}$ ve $\mathfrak{M}^c, x \models \sigma_A$ olsun; $\mathfrak{M}^c, x \models E\sigma_A$ olduğunu gösterelim, bu nedenle $(x,y) \in R_{E^c}$ kabul edelim. $\mathfrak{M}^c, s \models \sigma_A$ olduğundan ve A'nın tanımından $([s],[x]) \in T_{E^*}$, buradan bir n$\in$ N için $([s],[x]) \in T_{E^n}$'dir. T_E, R_E'nin bir filtrelemesi olduğundan $([s],[y]) \in T_E$ ifadesini elde ederiz ve $([s],[y]) \in T_{E^{n+1}}$ olduğundan $([s],[y]) \in T_{E^*}$.Şu halde $[y] \in A$ ve bu nedenle $\mathfrak{M}^c, y \models \sigma_A$ olur.

Son olarak $([s],[s]) \in T_{E^*}$ olduğu için A'nın tanımından

$\mathfrak{M}^c, s \models \sigma_A$. (3)

(1),(2) ve (3)'ten ($\mathfrak{M}^c, s \models C\sigma_A$. Bunun anlamı $\mathfrak{M}^c, t \models \sigma_A$, σ_A'nın tanımı ile $[t] \in A$ olur. Yani $[t]$, $[s]$'nin T_{E^*}-ardılıdır ve buradan $([s],[t]) \in T_C$ olur.

Maksimallik koşulu için, $([s],[t]) \in T_C$ ve $C\psi \in \Phi$ için $\mathfrak{M}^c, s \models C\psi$ olsun. T_C'nin tanımından $n \in N$ için $([s],[t]) \in T_{E^n}$. Bunun anlamı $i < n$ için $([s_i],[s_{i+1}]) \in T_E$ olacak şekilde $[s] = [s_1],[s_2],...,[s_n] = [t]$ vardır. $\mathfrak{M}^c$, (A8) için bir model olduğundan $\mathfrak{M}^c, s_i \models C\psi \Rightarrow \mathfrak{M}^c, s_i \models EC\psi$. Ayrıca $C\psi \in \Phi$ ve Φ yeterli olduğundan $EC\psi \in \Phi$'yi elde ederiz. T_E, R_{E_c}'nin Φ ile filtrelemesi olduğundan Max(T_E) koşulu, $\mathfrak{M}^c, s_i \models EC\psi \Rightarrow \mathfrak{M}^c, s_{i+1} \models C\psi$'yi garanti eder. Tüm bunlarla birlikte her $i < n$ için $\mathfrak{M}^c, s_i \models C\psi \Rightarrow \mathfrak{M}^c, s_{i+1} \models C\psi$. $\mathfrak{M}^c, s_1 = \mathfrak{M}^c, s \models C\psi$, tümevarımla $\mathfrak{M}^c, t = \mathfrak{M}^c, s_n \models C\psi$. R_{C^c} yansımalı olduğundan $\mathfrak{M}^c, t \models \psi$'yi elde ederiz.

$\boxtimes$

Teorem 4.2.29. *Herhangi bir φ formülü için S5EC $\models \varphi \Rightarrow$ S5EC $\vdash \varphi$'dir.*

İspat. S5EC $\nvdash \varphi$ olsun. Şu halde $\neg\varphi$ tutarlıdır. Öyleyse $\neg\varphi$'yi içeren maksimal tutarlı bir Γ formül kümesi vardır ve $\mathfrak{M}^c, \Gamma \models \neg\varphi$. Tanım 4.2.25'te verilen N_Φ

bir S5EC model olduğundan $N, [\Gamma] \models \neg\varphi$'dir. O halde $S5EC \models \neg\varphi$'dir. O halde S5EC sonlu model özelliğine sahiptir. $\boxtimes$

4.2.6 KD45-O için Filtreleme Yöntemi

Tanım 4.2.30. *φ tutarlı bir formül ve Φ yeterli bir küme olsun. Tanım 4.2.18'deki gibi tanımlanan $\mathfrak{M}_{\Phi_0}$ modelinin Φ ile bir filtrelemesi $\mathfrak{M}_\Phi = \langle S_\Phi, T_{B\Phi}, T_{U\Phi}, V_\Phi \rangle$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

- $S_\Phi = \{[\Gamma]_\Phi | \Gamma \in S^c\}$,
- $T_{U\Phi} = \{([\Gamma]_\Phi, [\Gamma']_\Phi) \mid$ *her* $U\psi \in \Phi$ *için,* $\mathfrak{M}, [\Gamma]_\Phi \models U\psi$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\mathfrak{M}, [\Gamma']_\Phi \models U\psi$ *olmasıdır*$)\}$,

  $T_{B\Phi} = \{([\Gamma]_\Phi, [\Gamma']_\Phi) \mid$ *her* $B\psi \in \Phi$ *için,*

  (i) (eğer $\mathfrak{M}, [\Gamma]_\Phi \models B\psi$ *ise* $\mathfrak{M}, [\Gamma']_\Phi \models B\psi$ *ve* $\mathfrak{M}, [\Gamma']_\Phi \models \psi$*)*

  (ii) (eğer $\mathfrak{M}, [\Gamma]_\Phi \models \neg B\psi$ *ise* $\mathfrak{M}, [\Gamma']_\Phi \models \neg B\psi)\}$,
- $V_\Phi(p) = \{[\Gamma]_\Phi : \Gamma \in V_{\Phi_0}(p)\}$.

Lemma 4.2.31. *Tanım 4.2.30'da verilen $\mathfrak{M}_\Phi$ modeli, $\mathfrak{M}_{\Phi_0}$'ın bir filtrelemesidir.*

İspat. $T_{U\Phi}$ ve $T_{B\Phi}$ bağıntılarının, $\mathfrak{M}_{\Phi_0}$ modelinde verilen T_U ve T_B bağıntılarının filtrelemeleri oldukları gösterilmelidir.

$T_{U\Phi}$'nin minimallik ve maksimallik koşullarını sağladığını göstermeliyiz.

(i) $[\Gamma], [\Sigma] \in S_\Phi$ ve $(\Gamma', \Sigma') \in S_{\Phi_0}$ olsun öyle ki $(\Gamma', \Sigma') \in T_U$, $[\Gamma] = [\Gamma']$ and $[\Sigma] = [\Sigma']$. $U\psi \in \Phi$ olduğunu varsayalım. Eğer $\mathfrak{M}_\Phi, [\Gamma] \models U\psi$ ise $[\Gamma] = [\Gamma']$ olduğundan $\mathfrak{M}_\Phi, [\Gamma'] \models U\psi$'dir. Buradan $\mathfrak{M}_\Phi, \Gamma' \models U\psi$'dir. Truth lemmasından $U\psi \in \Gamma'$ elde edilir. $(\Gamma', \Sigma') \in T_U$ olduğundan $\psi \in \Sigma'$'dır. $\Sigma' \subseteq [\Sigma']$ olduğundan $\psi \in [\Sigma']$'dır. Yine Truth lemmasının kullanılmasıyla $\mathfrak{M}_\Phi, [\Sigma'] \models U\psi$'yi elde ederiz. Buradan $\mathfrak{M}_\Phi, [\Sigma] \models U\psi$ ve $([\Gamma], [\Sigma]) \in T_U^\Phi$'dir.

$[\Gamma], [\Sigma] \in S_\Phi$ ve $([\Gamma], [\Sigma]) \in T_{U\Phi}$ olsun. $\mathfrak{M}_{\Phi_0}, \Gamma \models U\psi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Truth lemmasından $U\psi \in \Gamma$ olur. T_U'nun tanımından $\psi \in \Sigma$ elde edilir. Truth lemmasından $\mathfrak{M}_{\Phi_0}, \Sigma \models \psi$ olur.

(ii) $T_{B\Phi}$ için ispat (i)'dekine benzer şekilde yapılır.

$\boxtimes$

Lemma 4.2.32. *Tanım 4.2.30'da verilen* $\mathfrak{M}_\Phi$ *modeli bir* $KD45 - O$ *modeldir.*

İspat. Bunun için $T_{U\Phi}$ bağıntısının bir denklik bağıntısı ve $T_{B\Phi}$ bağıntısının $T_{U\Phi}$'nin öklidyen alt bağıntısı olduğunu göstermek yeterlidir.

Eğer $([\Gamma]_\Phi, [\Gamma']_\Phi) \in T_{B\Phi}$ ise $([\Gamma]_\Phi, [\Gamma']_\Phi) \in T_{U\Phi}$ olduğunu göstermeliyiz. $([\Gamma], [\Gamma']) \in T_{B\Phi}$ ve $([\Gamma], [\Gamma']) \notin T_{U\Phi}$ olsun. Bu durumda, bir $U\varphi \in \Phi$ formülü vardır öyle ki $\mathfrak{M}, [\Gamma]_\Phi \models U\varphi$ ve $\mathfrak{M}, [\Gamma']_\Phi \not\models U\varphi$'dir. Truth lemmasından $U\varphi \in [\Gamma]_\Phi$ ve $U\varphi \notin [\Gamma']_\Phi$'dir. O halde, $U\varphi \in \Gamma$ ve $U\varphi \notin \Gamma'$'dür. Buradan, $U\varphi \to B\varphi$ bir teorem ve Γ maksimal tutarlı bir küme olduğundan $B\varphi \in \Gamma$'dır. $(\Gamma, \Gamma') \in T_B$ olduğundan $\varphi \in \Gamma'$ olduğunu elde ederiz. $\varphi \to U\varphi$ bir teorem olduğundan $U\varphi \in \Gamma'$ olur. $\Gamma' \subseteq [\Gamma']$ olduğundan $U\varphi \in [\Gamma']$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde, $T_{B\Phi} \subseteq T_{U\Phi}$'dir.

$\leq_\Phi$ ve $\geq_{B\Phi}$ bağıntılarının sırasıyla S_Φ ve $\mathscr{P}(S_\Phi)$ kümeleri üzerinde tanımlanması sonlu Henkin yöntemindekiyle aynıdır. Böylece elde edilen $\mathfrak{M}_\Phi = \langle S_\Phi, \leq_\Phi, \geq_{B\Phi}, V_\Phi \rangle$ modeli bir KD45-O modeldir. $\boxtimes$

Bölüm 5

Yeni Sonuclar

Bu bölümde S5EC ve KD45-O modal mantıklarının iki farklı yöntemle elde edilen modellerinin izomorf olduğu kanıtlanacaktır.

5.1 S5EC Modal Mantığı için Yeni Sonuçlar

Teorem 5.1.1. *Φ sonlu, yeterli bir küme ve $\mathfrak{M}^{\Phi}$ ve N_{Φ} sırasıyla S5EC'nin sonlu Henkin metodu ve filtreleme yöntemiyle elde edilen modelleri olsun. Bu durumda $\mathfrak{M}^{\Phi} \cong N_{\Phi}$'dir.*

İspat. $\mathfrak{M}$ ve N_{Φ} modelleri arasında bijektif, kuvvetli bir homomorfizmanın var olduğunu kanıtlamamız gerekir.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathfrak{M}^{\Phi} & \to & N_{\Phi} \\ & \Gamma & \mapsto & [\Gamma] \end{array}$$

$\Gamma = [\Gamma] \cap \Phi$ ile tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan f fonksiyonu bir izomorfizmadır. Bunun için öncelikle f'nin bir fonksiyon olduğunu göstermeliyiz. Bunun için aşağıdaki lemmalara ihtiyacımız vardır.

Lemma 5.1.2. *Φ maksimal tutarlı bir küme ve Γ, Φ'de maksimal S5EC tutarlı olsun. Bu durumda, $\Gamma \subseteq \Gamma'$ olacak şekilde bir maksimal S5EC tutarlı kümesi vardır.*

İspat. Γ, Φ'de maksimal S5EC tutarlı bir küme olsun. Bu durumda, maksimal tutarlılık tanımından Γ kümesi S5EC tutarlıdır. Lindenbaum Lemmasından $\Gamma \subseteq \Gamma'$ olacak şekilde maksimal S5EC tutarlı bir kümenin var olduğu elde edilir. ⊠

Lemma 5.1.3. *Φ'de maksimal S5EC tutarlı bir küme Γ için $\Gamma \subseteq \Gamma'$ ve $\Gamma \subseteq \Gamma''$ olacak şekilde Γ', Γ'' kümeleri maksimal S5EC tutarlı olsun. Bu durumda, $\Gamma' \equiv_{\Phi} \Gamma''$'dür.*

İspat. Çelişki yoluyla yapılır. İki maksimal S5EC tutarlı küme Γ', Γ'' olsun. Φ'de maksimal S5EC tutarlı bir küme Γ için $\Gamma \subseteq \Gamma'$ ve $\Gamma \subseteq \Gamma''$ olsun. $\mathfrak{M}, \Gamma' \models \varphi$ ve $\mathfrak{M}, \Gamma'' \not\models \varphi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, Truth Lemma'dan $\varphi \in \Gamma'$ ve $\varphi \notin \Gamma''$'dür. $\varphi \in \Gamma'$ ise $\neg\varphi \notin \Gamma'$'dür. $\Gamma \subseteq \Gamma'$ ve Γ' tutarlı olduğundan $\neg\varphi \notin \Gamma$'dır. $\Gamma \subseteq \Gamma''$ olduğundan $\neg\varphi \notin \Gamma''$ elde edilir. Bu ise Γ'''nün tutarlı olması ile bir çelişkidir. $\boxtimes$

O halde $\Gamma \mapsto [\Gamma]$ ile tanımlı f bağıntısı bir fonksiyondur.

Şimdi f fonksiyonunun kuvvetli homomorfizma olduğunu göstermeliyiz.

(i) Her bir önerme değişkeni $\mathbf{p}$ ve $\Gamma \in S^\Phi$ için $\Gamma \in V^\Phi(\mathbf{p})$ olması için gerek ve yeter koşulun $f(\Gamma) \in V_\Phi(\mathbf{p})$ olduğu gösterilmelidir. İki durumda incelenir.

Durum 1. $\mathbf{p} \in \Phi$ olsun.

$(\Rightarrow)$: $\Gamma \in V^\Phi(\mathbf{p})$ olsun. Bu durumda $\mathbf{p} \in \Gamma$'dır. $\Gamma \subseteq \Gamma'$ olduğundan $\mathbf{p} \in \Gamma'$ olur. Buradan $f(\Gamma) = [\Gamma'] \in V_\Phi(\mathbf{p})$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $[\Gamma'] \in V_\Phi(\mathbf{p})$ olsun. Bu durumda, $\mathbf{p} \in \Gamma'$'dür. $\Gamma \subseteq \Gamma'$ ve Γ, Φ'de maksimal S5EC tutarlı olduğundan $\mathbf{p} \in \Gamma$'dır. Buradan $\Gamma \in V^\Phi(\mathbf{p})$ olduğu elde edilir.

Durum 2. $\mathbf{p} \notin \Phi$ olsun.

$\Gamma \subset \Phi$ olduğundan $\mathbf{p} \notin \Gamma$'dır. $V^\Phi(\mathbf{p})$'nin tanımından $\Gamma \notin V^\Phi(\mathbf{p})$ olur. Buradan da $V_\Phi(\mathbf{p}) = \emptyset$ olur. Öyleyse $[\Gamma'] \notin V_\Phi(\mathbf{p})$'dir.

(ii) Şimdi de f fonksiyonunun bağıntıları koruduğunu göstermeliyiz.

(a) $\Gamma, \Gamma' \in S^\Phi$ olmak üzere $(\Gamma, \Gamma') \in R_i^\Phi$ olması için gerek ve yeter koşul $(f(\Gamma), f(\Gamma')) \in T_i$ olmasıdır:

$(\Rightarrow)$: $(\Gamma, \Gamma') \in R_i^\Phi$ olsun. $K_i\varphi \in [\Gamma]$ olduğunu varsayalım. O halde $K_i\varphi \in \Gamma$'dır. $(\Gamma, \Gamma') \in R_i^\Phi$ olduğundan $K_i\varphi \in \Gamma'$'dür. $\Gamma' \subseteq [\Gamma']$ olduğundan $K_i\varphi \in [\Gamma']$ olur. Buradan Truth lemmasından $N_\Phi, [\Gamma'] \models K_i\varphi$ elde edilir.

$K_i\varphi \in [\Gamma']$ olsun. Bu durumda $K_i\varphi \in \Gamma'$'dür. $(\Gamma, \Gamma') \in R_i^\Phi$ olduğundan $K_i\varphi \in \Gamma$'dır. $\Gamma \subseteq [\Gamma]$ olduğundan $K_i\varphi \in [\Gamma]$ olur. Buradan Truth lemmasından $N_\Phi, [\Gamma] \models K_i\varphi$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $(f(\Gamma), f(\Gamma')) \in T_i$ olsun. $K_i\varphi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. $\Gamma \subseteq [\Gamma]$ olduğundan $K_i\varphi \in [\Gamma]$'dır. Truth lemmasından $N_\Phi, [\Gamma] \models K_i\varphi$ elde edilir. $(f(\Gamma), f(\Gamma')) \in T_i$ olduğundan $N_\Phi, [\Gamma'] \models K_i\varphi$'dir. Truth lemmasının kullanılmasıyla $K_i\varphi \in [\Gamma']$ elde edilir ki $\Gamma' \subseteq [\Gamma']$ ve $K_i\varphi \in \Phi$ olduğundan $K_i\varphi \in \Gamma'$ elde edilir.

$K_i\varphi \in \Gamma'$ olsun. $\Gamma \subseteq [\Gamma]$ olduğundan $K_i\varphi \in [\Gamma']$'dır. Truth lemmasından $N_\Phi, [\Gamma'] \models K_i\varphi$ elde edilir. $(f(\Gamma), f(\Gamma')) \in T_i$ olduğundan $N_\Phi, [\Gamma] \models K_i\varphi$'dir. Truth lemmasının kullanılmasıyla $K_i\varphi \in [\Gamma]$ elde edilir ki $\Gamma \subseteq [\Gamma]$ ve $K_i\varphi \in \Phi$ olduğundan $K_i\varphi \in \Gamma$ olur.

(b) $\Gamma, \Gamma' \in S^\Phi$ olmak üzere $(\Gamma, \Gamma') \in R_E^\Phi$ olması için gerek ve yeter koşul $(f(\Gamma), f(\Gamma')) \in T_E$ olmasıdır:

$(\Rightarrow)$: $(\Gamma, \Gamma') \in R_E^\Phi$ olsun. $R_E \subseteq R_1^\Phi \cup ... \cup R_n^\Phi$ olduğundan bazı i'ler $(1 \leq i \leq n)$ için $(\Gamma, \Gamma') \in R_i^\Phi$'dir. O halde (a)'dan $([\Gamma], [\Gamma']) \in T_i$ olur. $T_1 \cup ... \cup T_n \subseteq T_E$ olduğundan $([\Gamma], [\Gamma']) \in T_E$'dir.

$(\Leftarrow)$: $(\Gamma, \Gamma') \in T_E$ olsun. Bu durumda $T_E \subseteq T_1 \cup ... \cup T_n$ olduğundan bazı i'ler $(1 \leq i \leq n)$ için $([\Gamma], [\Gamma']) \in T_i$'dir. O halde (a)'dan $(\Gamma, \Gamma') \in R_i^\Phi$ elde edilir. $R_1^\Phi \cup ... \cup R_n^\Phi \subseteq R_E^\Phi$ olduğundan $(\Gamma, \Gamma') \in R_E^\Phi$'dir.

(c) $\Gamma, \Gamma' \in S^\Phi$ olmak üzere $(\Gamma, \Gamma') \in R_C^\Phi$ olması için gerek ve yeter koşul $(f(\Gamma), f(\Gamma')) \in T_C$ olmasıdır:

$(\Rightarrow)$: $(\Gamma, \Gamma') \in R_C^\Phi$ olsun. Öyleyse $R_C^\Phi \subseteq R_E^*$ olduğundan $(\Gamma, \Gamma') \in R_E^*$'dır. Bu durumda $\Gamma = \Theta_0, ..., \Theta_n = \Gamma'$ olacak şekilde bir dizi vardır öyle ki her i $(1 \leq i \leq n)$ için $(\Theta_i, \Theta_{i+1}) \in R_E^\Phi$'dir. O halde (b)'den $([\Theta_i], [\Theta_{i+1}]) \in T_E$ olur. Buradan $([\Gamma], [\Gamma']) \in T_E^*$'dır. $T_E^* \subseteq T_C$ olduğundan $([\Gamma], [\Gamma']) \in T_C$ olur.

$(\Leftarrow)$: $(f(\Gamma), f(\Gamma')) \in T_C$ olsun. Öyleyse $T_C \subseteq T_E^*$ olduğundan $(\Gamma, \Gamma') \in T_E^*$'dır. Bu durumda $f(\Gamma) = [\Theta_0], ..., [\Theta_n] = f(\Gamma')$ olacak şekilde bir dizi vardır öyle ki her i $(1 \leq i \leq n)$ için $([\Theta_i], [\Theta_{i+1}]) \in T_E$'dir. O halde (b)'den $(\Theta_i, \Theta_{i+1}) \in R_E^\Phi$ olur. Buradan $(\Gamma, \Gamma') \in R_E^*$'dır. $R_E^* \subseteq R_C$ olduğundan $(\Gamma, \Gamma') \in R_C$ olur.

O halde (i) ve (ii) ile f fonksiyonu kuvvetli bir homomorfizmadır. Şimdi de f fonksiyonunun bijektif olduğunu göstermeliyiz.

f fonksiyonu bire birdir: Γ ve Γ', Φ'de maksimal S5EC tutarlı kümeler ve $[\Gamma] = [\Gamma']$ olsun. $\Gamma = \Gamma'$ olduğunu göstermeliyiz.

$(\subseteq)$: $\varphi \in \Gamma$ olsun. $\Gamma \subseteq [\Gamma]$ olduğundan $\varphi \in [\Gamma]$ olur. Truth lemmadan $N_\Phi, [\Gamma] \models \varphi$ elde edilir. $[\Gamma] = [\Gamma']$ olduğundan aynı zamanda $N_\Phi, [\Gamma'] \models \varphi$'dir. Truth lemmadan $\varphi \in [\Gamma']$ olur. $\varphi \in \Phi$ ve $\Gamma' = [\Gamma'] \cap \Phi$ olduğundan $\varphi \in \Gamma'$'dır.

$(\supseteq)$: $\varphi \in \Gamma'$ olsun. $\Gamma' \subseteq [\Gamma']$ olduğundan $\varphi \in [\Gamma']$ olur. Truth lemmadan $N_\Phi, [\Gamma'] \models \varphi$ elde edilir. $[\Gamma] = [\Gamma']$ olduğundan aynı zamanda $N_\Phi, [\Gamma] \models \varphi$'dir. Truth lemmadan $\varphi \in [\Gamma]$ olur. $\varphi \in \Phi$ ve $\Gamma = [\Gamma] \cap \Phi$ olduğundan $\varphi \in \Gamma$'dır.

f fonksiyonu örtendir: Her $[\Gamma] \in W$ için $f(\Gamma') = [\Gamma]$ olacak şekilde en az bir $\Gamma' \in S^\Phi$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için $[\Gamma] \cap \Phi$ kümesinin boştan farklı olduğunu göstermeliyiz. $[\Gamma] \cap \Phi = \emptyset$ olsun. Bu durumda $\Phi = \Gamma'$ olacak şekilde maksimal tutarlı bir $\Gamma' \in S^\Phi$ vardır öyle ki $\Gamma' \notin [\Gamma] = \{\Gamma_1, ...\Gamma_n\}$'dir. Öyleyse bir $\varphi \in \Phi$ için $\Gamma_1 \models \varphi \wedge ... \wedge \Gamma_n \models \varphi$ ve $\Gamma' \not\models \varphi$'dir. $\Phi = \Gamma'$ olduğundan $\varphi \in \Gamma'$ olur ki bu bir çelişkidir.

Öyleyse $f(\Gamma') = [\Gamma]$ olacak şekilde en az bir $\Gamma' = [\Gamma] \cap \Phi \in S^\Phi$ vardır.

Buradan f fonksiyonunun örtenliği elde edilir.

O halde f fonksiyonu bijektif, kuvvetli bir homomorfizma ve $\mathfrak{M}^\Phi \cong N_\Phi$'dir.

$\boxtimes$

5.2 KD45-O Modal Mantığı için Yeni Sonuçlar

Teorem 5.2.1. Φ *sonlu, yeterli bir küme ve* $\mathfrak{M}^\Phi$ *ve* $\mathfrak{M}_\Phi$ *sırasıyla KD45-O'nun sonlu Henkin metodu ve filtreleme yöntemiyle elde edilen modelleri olsun. Bu durumda* $\mathfrak{M}^\Phi \cong \mathfrak{M}_\Phi$*'dir.*

İspat. $\mathfrak{M}^\Phi$ ve $\mathfrak{M}_\Phi$ modelleri arasında bijektif, kuvvetli bir homomorfizmanın var olduğunu kanıtlamamız gerekir.

$$\begin{array}{rcl} f: \mathfrak{M}^\Phi & \to & \mathfrak{M}_\Phi \\ \Gamma & \mapsto & [\Gamma] \end{array}$$

$\Gamma = [\Gamma] \cap \Phi$ ile tanımlansın. Bu şekilde tanımlı f fonksiyonu bir izomorfizmadır. Bunun için öncelikle f'nin bir fonksiyon olduğunu göstermeliyiz. Bunu göstermek için aşağıdaki lemmalara ihtiyacımız vardır.

Lemma 5.2.2. $\Gamma \in \mathcal{B}$ *olması için gerek ve yeter koşul* $[\Gamma] \in \mathcal{B}$ *olmasıdır.*

İspat. $\Gamma \in \mathcal{B}$ olsun. Öyleyse $(\Gamma, \Gamma) \in R_B$'dir. Bir $B\varphi \in \Phi$ formülü için $\mathfrak{M}_\Phi, [\Gamma] \models B\varphi$ olduğunu varsayalım. Truth lemmasından $B\varphi \in [\Gamma]$'dır. $\Gamma = [\Gamma] \cap \Phi$ olduğundan $B\varphi \in \Gamma$'dır. $(\Gamma, \Gamma) \in R_B$ olduğundan $\varphi \in \Gamma$ elde edilir. $\Gamma \subseteq [\Gamma]$ olduğu kullanılırsa $\varphi \in [\Gamma]$ elde edilir. Truth lemmasından $\mathfrak{M}_\Phi, [\Gamma] \models \varphi$ olur.

$[\Gamma] \in \mathcal{B}$ olsun. Bu durumda $([\Gamma], [\Gamma]) \in R_B$'dir. Bir $B\varphi \in \Phi$ formülü için $B\varphi \in \Gamma$ olsun. $\Gamma \subseteq [\Gamma]$ olduğundan $B\varphi \in [\Gamma]$ olur. Truth lemmasından $\mathfrak{M}_\Phi, [\Gamma] \models B\varphi$ elde edilir. $([\Gamma], [\Gamma]) \in R_B$ olduğundan $\mathfrak{M}_\Phi, [\Gamma] \models \varphi$ olur ki Truth lemmasının tekrar kullanılmasıyla $\varphi \in [\Gamma]$ olur. $\Gamma \subseteq [\Gamma]$ ve Γ maksimal tutarlı ve bununla birlikte $[\Gamma]$ denklik sınıfındaki her küme aynı formülleri gerçeklediklerinden $\varphi \in \Gamma$'dır. ⊠

Lemma 5.2.3. *Φ maksimal tutarlı bir küme ve Γ, Φ'de maksimal KD45-O tutarlı olsun. Bu durumda $\Gamma \subseteq \Gamma'$ olacak şekilde bir maksimal KD45-O tutarlı kümesi vardır.*

İspat. Γ, Φ'de maksimal KD45-O tutarlı bir küme olsun. Bu durumda, maksimal tutarlılık tanımından Γ kümesi KD45-O tutarlıdır. Lindenbaum Lemmasından $\Gamma \subseteq \Gamma'$ olacak şekilde maksimal KD45-O tutarlı bir kümenin var olduğu elde edilir. ⊠

Lemma 5.2.4. *Φ'de maksimal KD45-O tutarlı bir küme Γ için $\Gamma \subseteq \Gamma'$ ve $\Gamma \subseteq \Gamma''$ olacak şekilde Γ', Γ'' kümeleri maksimal KD45-O tutarlı olsun. Bu durumda, $\Gamma' \equiv_\Phi \Gamma''$'dür.*

İspat. Φ'de maksimal KD45-O tutarlı bir küme Γ için $\Gamma \subseteq \Gamma'$ ve $\Gamma \subseteq \Gamma''$ olsun. $\mathfrak{M}, \Gamma' \models \varphi$ ve $\mathfrak{M}, \Gamma'' \not\models \varphi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, Truth Lemma'dan $\varphi \in \Gamma'$ ve $\varphi \notin \Gamma''$'dür.

$\varphi \in \Gamma'$ ise $\neg\varphi \notin \Gamma'$'dür. $\Gamma \subseteq \Gamma'$ ve Γ' tutarlı olduğundan $\neg\varphi \notin \Gamma$'dır. $\Gamma \subseteq \Gamma''$ olduğundan $\neg\varphi \notin \Gamma''$ elde edilir. Bu ise Γ'''nün tutarlı olması ile bir çelişkidir. ⊠

O halde $\Gamma \mapsto [\Gamma]$ şeklinde tanımlanan f bağıntısı bir fonksiyondur.

Şimdi f fonksiyonunun kuvvetli homomorfizma olduğunu gösterelim.

(i) Her bir önerme değişkeni $\mathbf{p}$ ve $\Gamma \in S_\Phi$ için $\Gamma \in V^\Phi(\mathbf{p})$ olması için gerek ve yeter koşulun $f(\Gamma) \in V_\Phi(\mathbf{p})$ olduğu gösterilmelidir. İki durum söz konusudur:

Durum 1. $\mathbf{p} \in \Phi$ olsun.

$(\Rightarrow)$: $\Gamma \in V^{\Phi}(\mathbf{p})$ olsun. Bu durumda $\mathbf{p} \in \Gamma$'dır. $\Gamma \subseteq \Gamma'$ olduğundan $\mathbf{p} \in \Gamma'$ olur. Buradan $f(\Gamma) = [\Gamma'] \in V_{\Phi}(\mathbf{p})$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $[\Gamma'] \in V_{\Phi}(\mathbf{p})$ olsun. Bu durumda, $\mathbf{p} \in \Gamma'$'dür. $\Gamma \subseteq \Gamma'$ ve Γ, Φ'de maksimal S5EC tutarlı olduğundan $\mathbf{p} \in \Gamma$'dır. Buradan $\Gamma \in V^{\Phi}(\mathbf{p})$ olduğu elde edilir.

Durum 2. $\mathbf{p} \notin \Phi$ olsun.

$\Gamma \subset \Phi$ olduğundan $\mathbf{p} \notin \Gamma$'dır. $V^{\Phi}(\mathbf{p})$'nin tanımından $\Gamma \notin V^{\Phi}(\mathbf{p})$ olur. Buradan da $V_{\Phi}(\mathbf{p}) = \emptyset$ olur. Öyleyse $[\Gamma'] \notin V_{\Phi}(\mathbf{p})$'dir.

(ii) Şimdi de f fonksiyonunun bağıntıları koruduğunu gösterelim:

(a) $\Gamma, \Gamma' \in S_{\Phi_0}$ olmak üzere $(\Gamma, \Gamma') \in \leq$ olması için gerek ve yeter koşul $(f(\Gamma), f(\Gamma')) \in \leq_{\Phi}$ olmasıdır:

$(\Rightarrow)$: $(\Gamma, \Gamma') \in \leq$ ve $(f(\Gamma), f(\Gamma')) \notin \leq_{\Phi}$ olsun. Bu durumda $f(\Gamma) = [\Gamma] \notin \mathcal{B}$ ve $f(\Gamma') = [\Gamma'] \in \mathcal{B}$. Buradan $\Gamma \notin \mathcal{B}$ ve $\Gamma' \in \mathcal{B}$'dir. Bu ise $(\Gamma, \Gamma') \in \leq$ olmasıyla bir çelişkidir.

$(\Leftarrow)$: $(f(\Gamma), f(\Gamma')) \in \leq_{\Phi}$ ve $(\Gamma, \Gamma') \notin \leq$ olsun. O halde $\Gamma' \in \mathcal{B}$ ve $\Gamma \notin \mathcal{B}$'dir. Buradan $[\Gamma'] \in \mathcal{B}$ ve $[\Gamma] \notin \mathcal{B}$ olur ki bu bir çelişkidir.

(b) $\Gamma, \Gamma' \in S_{\Phi_0}$ olmak üzere $(\Gamma, \Gamma') \in \geq_B$ olması için gerek ve yeter koşul $(f(\Gamma), f(\Gamma')) \in \geq_{B\Phi}$'dir:

$(\Rightarrow)$: $(\Gamma, \Gamma') \in \geq_B$ olsun. Bu durumda bazı $B\varphi, B\psi \in \Phi$ için $\varphi \succcurlyeq_B \psi$'dir öyle ki $V^{\Phi}(\varphi) = R(\Gamma) \subseteq \Gamma$ ve $V^{\Phi}(\psi) = R(\Gamma') \subseteq \Gamma'$'dür. $\Gamma \subseteq [\Gamma]$ ve $\Gamma' \subseteq [\Gamma']$ olduğundan sırasıyla $V(\varphi) = R([\Gamma]) \subseteq [\Gamma]$ ve $V(\psi) = R([\Gamma']) \subseteq [\Gamma']$ olur.

$(\Leftarrow)$: $([\Gamma], [\Gamma']) \in \geq_{B\Phi}$ olsun. Bu durumda bazı $B\varphi, B\psi \in \Phi$ için $\varphi \succcurlyeq_B \psi$'dir öyle ki $V(\varphi) = R([\Gamma]) \subseteq [\Gamma]$ ve $V(\psi) = R([\Gamma']) \subseteq [\Gamma']$'dür. $\Gamma \subseteq [\Gamma]$ ve $\Gamma' \subseteq [\Gamma']$ olduğundan sırasıyla $V(\varphi) = R(\Gamma) \subseteq \Gamma$ ve $V(\psi) = R(\Gamma') \subseteq \Gamma'$ olur.

O halde f fonksiyonu kuvvetli bir homomorfizmadır. Şimdi de f fonksiyonunun bijektif olduğu gösterilmelidir:

f fonksiyonu bire birdir: Γ ve Γ', Φ'de maksimal KD45-O tutarlı kümeler olsun. Bununla birlikte $[\Gamma] = [\Gamma']$ olduğunu varsayalım. $\Gamma = \Gamma'$ olduğunu göstermeliyiz.

$(\subseteq)$: $\varphi \in \Gamma$ olsun. $\Gamma \subseteq [\Gamma]$ olduğundan $\varphi \in [\Gamma]$ olur. Truth lemmadan $\mathfrak{M}_\Phi, [\Gamma] \models \varphi$ elde edilir. $[\Gamma] = [\Gamma']$ olduğundan aynı zamanda $\mathfrak{M}_\Phi, [\Gamma'] \models \varphi$'dir. Truth lemmadan $\varphi \in [\Gamma']$ olur. $\varphi \in \Phi$ ve $\Gamma' = [\Gamma'] \cap \Phi$ olduğundan $\varphi \in \Gamma'$'dür.

$(\supseteq)$: $\varphi \in \Gamma'$ olsun. $\Gamma' \subseteq [\Gamma']$ olduğundan $\varphi \in [\Gamma']$ olur. Truth lemmadan $\mathfrak{M}_\Phi, [\Gamma'] \models \varphi$ elde edilir. $[\Gamma] = [\Gamma']$ olduğundan aynı zamanda $\mathfrak{M}_\Phi, [\Gamma] \models \varphi$'dir. Truth lemmadan $\varphi \in [\Gamma]$ olur. $\varphi \in \Phi$ ve $\Gamma = [\Gamma] \cap \Phi$ olduğundan $\varphi \in \Gamma$'dır.

f fonksiyonu örtendir: Her $[\Gamma] \in S_\Phi$ için $f(\Gamma') = [\Gamma]$ olacak şekilde en az bir $\Gamma' \in S_{\Phi_0}$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için $[\Gamma] \cap \Phi$ kümesinin boştan farklı olduğunu göstermeliyiz. $[\Gamma] \cap \Phi = \emptyset$ olsun. Bu durumda $\Phi = \Gamma'$ olacak şekilde maksimal tutarlı bir $\Gamma' \in S_{\Phi_0}$ vardır öyle ki $\Gamma' \notin [\Gamma] = \{\Gamma_1, ...\Gamma_n\}$'dir. Öyleyse bir $\varphi \in \Phi$ için $\Gamma_1 \models \varphi \wedge ... \wedge \Gamma_n \models \varphi$ ve $\Gamma' \not\models \varphi$'dir. $\Phi = \Gamma'$ olduğundan $\varphi \in \Gamma'$ olur ki bu bir çelişkidir.

Öyleyse $f(\Gamma') = [\Gamma]$ olacak şekilde en az bir $\Gamma' \in S_{\Phi_0}$ vardır.

O halde f fonksiyonu bijektif, kuvvetli bir homomorfizmadır yani $\mathfrak{M}^\Phi \cong \mathfrak{M}_\Phi$'dir.

$\boxtimes$

Bölüm 6

Sonuç

Bu tezde, epistemik mantıkta bilgi operatörünün farklı şekilde yorumlanmasından elde edilen iki farklı modal sistem olan S5EC ve KD45-O'nun modelleri incelenmiştir. KD45-O sistemi, S5EC'den farklı olarak mümkün dünyalar üzerinde bir küme sıralaması da içerir ve B operatörü tek bir temsilcinin değerlerini ele alır. KD45-O'ya benzer olan ancak B operatörünün birden fazla temsilciyi (multi-agent) göz önünde bulundurduğu KD45-O_m sistemi için bu tezde ele alınan problem bir başka araştırma konusudur.

KAYNAKLAR

[1] Ates İ. ve Gencer Ç. On Models of the Modal Logic GL. Turing Centenary Conference, cie 2012: How the World Computes - University of Cambridge, Abstracts Booklet, sayfa:8, 2012.

[2] Ateş İ. S4 and GL model mantıkları üzerine (Yüksek Lisans Tezi), İstanbul Kültür Üniversitesi, 2012.

[3] Baltag A. , Smets S. Dynamic Belief Revision over Multi-Agent Plausibility Models, University of Liverpool, Liverpool, 2006.

[4] Blackburn P., van Benthem J., Wolter F. Handbook of Modal Logic, Volume 3, Elsevier B.V., 2007.

[5] Bölük A., Ates I., Gencer Ç. On Models of the Modal Logic KD45-O, Tenth International Tbilisi Symposium on Language, Logic and Computation, 2013.

[6] van Ditmarsch H.P., van der Hoek W. and Kooi B.P. Dynamic Epistemic Logic. manuscript, 2006.

[7] Fagin R., Halpern J.Y., Moses Y., Vardi M.Y. Reasoning About Knowledge. Massachusetts Institute of Technology, 1995.

[8] Hintikka J. Knowledge and Belief. Cornell University Press, 1962.

[9] Gettier E. Is Justified True Belief Knowledge? Analysis 23, 1963.

[10] Kahraman, O. K ve K4 Modal Mantıklarının Modelleri ¨Uzerine, İstanbul Kültür Üniversitesi, 2011.

[11] Kripke S. Semantical Analysis of Modal Logic. Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 1963.

[12] Lewis C. I. A Survey of Symbolic Logic. University of California Press, Berkeley, 1918.

[13] Meyer, J.-J. Ch. and van der Hoek W. Epistemic Logic for AI and Computer Science. Cambridge University Press, 1995.

[14] de Jongh D., Ghosh S. Comparing Strengths of Beliefs Explicitly, Logic Journal of IGPL; doi: 10.1093/jigpal/jzs050, 2012.

[15] von Wright G.H. An Essay in Modal Logic. North Holland, Amsterdam, 1951.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında İstanbul'da doğdu. 2006 yılında İstanbul Kültür Üniversitesi Matematik-Bilgisayar Bölümüne kaydoldu. 2010 yılında lisans öğrenimini tamamlayarak İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı.