İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜZERİNDE TANIMLI HER NORM-SINIRLI OPERATÖRÜN REGÜLER OLDUĞU BANACH ÖRGÜLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nazlı DOĞAN

1109041005

Anabilim Dalı: Matematik-Bilgisayar
Programı: Matematik-Bilgisayar

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mert ÇAĞLAR

AĞUSTOS 2013

İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜZERİNDE TANIMLI HER NORM-SINIRLI OPERATÖRÜN REGÜLER OLDUĞU BANACH ÖRGÜLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nazlı DOĞAN

1109041005

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih	:	**19 Temmuz 2013**
Tezin Savunulduğu Tarih	:	**05 Ağustos 2013**

Tez Danışmanı:	**Doç. Dr. Mert ÇAĞLAR**
Diğer Jüri Üyeleri:	**Prof. Dr. Zafer ERCAN**
	(Abant İzzet Baysal Üniversitesi)
	Yrd. Doç. Dr. R. Tunç MISIRLIOĞLU
Yedek Üye:	**Yrd. Doç. Dr. Yaşar POLATOĞLU**

AĞUSTOS 2013

ÖZET

ÜZERİNDE TANIMLI HER NORM-SINIRLI OPERATÖRÜN REGÜLER OLDUĞU BANACH ÖRGÜLERİ

DOĞAN, Nazlı

Yüksek Lisans Tezi, Matematik-Bilgisayar Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mert ÇAĞLAR

Temmuz 2013, 113 sayfa

Bu tez çalışması A. A. Wickstead'in *Separable Banach lattices on which every linear operator is regular* başlıklı makalesine [18] dayanmakta ve yedi bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde Boole cebiri teorisi detaylı olarak çalışılmıştır. Üçüncü bölümde Riesz uzayları tanıtılmış, bu çalışma içerisinde kullanılan özelliklerine değinilmiş, ve bir Riesz uzayının evrensel tamlanışı detaylarıyla karakterize edilmiştir. Dördüncü bölümde Banach örgüleri tanıtılmış, bu çalışma içerisinde kullanılan özelliklerine değinilmiş, ve Banach örgüleri üzerinde tanımlı regüler operatörler ile norm-sınırlı operatörler arasındaki ilişki tanıtılmıştır. Beşinci bölümde yerel konveks uzayların kompakt konveks alt kümelerinde tanımlı reel değerli fonksiyon sınıflarıyla ilgilenilmiş ve bölümün sonunda afin fonksiyonlar ile AM-uzaylarının bir karakterizasyonu verilmiştir. Altıncı bölümde Fonksiyonel Analizde karşılaşılan klâsik uzaylarda regüler operatörler ile norm-sınırlı operatörler arasındaki ilişki incelenmiştir. Son bölümde, A. W. Wickstead'in ayrılabilir AM-uzaylarının sıra-birime sahip olmasıyla ilgili bir karakterizasyonu incelenerek üzerinde tanımlı olan her norm-sınırlı operatörün regüler olduğu ayrılabilir Banach örgülerinin karakterizasyonu üzerinde durulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Banach örgüsü, regüler operatör, evrensel tamlanış, simpleks, afin fonksiyon.

Abstract

BANACH LATTICES ON WHICH EVERY NORM-BOUNDED OPERATOR IS REGULAR

DOĞAN, Nazlı

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics and Computer Science

Supervisor: Assoc. Prof. Mert ÇAĞLAR

July 2013, 113 pages

This thesis, based on the paper entitled *Separable Banach lattices on which every linear operator is regular* by A. A. Wickstead [18], consists of seven chapters. Chapter two provides a detailed study of the theory of Boolean algebras. In chapter three, having introduced Riesz spaces, properties of them used in the thesis are given, and the universal completion of a Riesz space is characterized. The purpose of chapter four is to introduce Banach lattices along with their properties that are necessary throughout, and examine the relationships between norm-bounded and regular operators. Chapter five deals with several classes of real-valued functions on compact convex subsets of locally convex spaces and contains a characterization of AM-spaces by affine functions in its final part. The subject matter of chapter six is the relationship between regular and norm-bounded operators on the classical spaces of Functional Analysis. In the final chapter, a characterization of separable AM-spaces to have an order-unit given by A. W. Wickstead is thoroughly studied, and the problem of characterizing separable Banach lattices on which every norm-bounded operator is regular is discussed.

KEYWORDS: Banach lattice, regular operator, universal completion, affine function, simplex.

Teşekkür

Öncelikle 2010 yılından beri bana yol gösteren, yüksek lisans eğitimim boyunca sabırla yönlendiren tez danışmanım Sayın Mert Çağlar'a, yüksek lisans ders döneminde ve sonrasında yaptığı yardımlardan dolayı Sayın R. Tunç Mısırlıoğlu'na, 2010 yılından beri beni cesaretlendiren, destekleyen, yardımlarını esirgemeyen çok değerli Hocam Aydın Aytuna'ya, her zaman manevi desteklerini hissettiren sevgili arkadaşlarım Tuğba Yıldırım ve Çiğdem Çelik'e, sonsuz inanç ve sevgilerinden dolayı sevgili aileme, son olarak bu süreçte maddi desteğinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

İÇINDEKILER

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Genel operatör teorisi içinde özel ve önemli bir yeri olan pozitif operatörler teorisi çalışılmaya başlandığından bu yana, bir E Banach örgüsünden bir başka F Banach örgüsüne giden tüm norm-sınırlı operatörlerin hangi koşullar altında iki pozitif operatörün farkı şeklinde yazılabileceği problemi doğal olarak gündeme gelmiş ve bu problemi merkeze alan birçok çalışma yapılmıştır. Bu tez çalışmasında, sözü edilen problemin önemli bir özel durumu incelenmektedir.

E ve F Banach örgüleri olmak üzere, E uzayından F uzayına giden ve iki pozitif operatörün farkı olarak yazılabilen (diğer bir deyişle, *regüler* olan) operatörlerin vektör uzayı $\mathcal{L}^r(E,F)$ ile, tüm norm-sınırlı operatörlerin vektör uzayı ise $\mathcal{L}(E,F)$ ile gösterildiğinde, $\mathcal{L}^r(E,F)$ uzayının $\mathcal{L}(E,F)$ uzayının bir alt uzayı olduğu hemen görülür. Bu iki uzay, genel olarak, birbirinden farklıdır. $\mathcal{L}^r(E,F)$ uzayı ile $\mathcal{L}(E,F)$ uzayı arasındaki ilişki incelenmek istendiğinde, hangi koşullar altında her norm-sınırlı operatörün regüler olduğu, ve bu özellik sağlandığında operatör normu ile $\mathcal{L}^r(E,F)$ uzayı üzerinde tanımlanan r-normunun ne zaman birbirlerine eşit oldukları biçiminde iki temel problemle karşılaşılır. Eğer $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$ oluyorsa ve her operatörün operatör normu ile r-normu ile birbirlerine eşitse, $\mathcal{L}^r(E,F) \equiv \mathcal{L}(E,F)$ şeklinde gösterelim.

1974 yılında Fremlin tarafından, $\mathcal{L}^r(E,l_1) = \mathcal{L}(E,l_1)$ eşitliği var ise E uzayının bir AL-uzayına izomorfik olduğu gösterilmiştir. 1975 yılında Cartwright ve Lotz, Fremlin'in sonucunu geliştirerek, $\mathcal{L}^r(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$ eşitliği var ve F (E') uzayı bir l_p uzayına örgü izomorfik alt uzaya sahip ise E (F) uzayının bir AL- $(AM$-$)$ uzayına örgü izomorfik olduğunu kanıtlamışlardır. Aynı makalede, $\mathcal{L}^r(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$ eşitliği varsa E uzayının bir AL- uzayına, F uzayının da bir

AM-uzayına örgü izomorfik olması gerektiği savı ortaya atılmıştır; ancak 1977'de Yuri Abramovich, $\mathcal{L}^r(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$ eşitliğini sağlayan bir AL-uzayına örgü izometrik olmayan bir E uzayı ve bir AM-uzayına örgü izomorfik olmayan bir F uzayı kurarak, bu savın gerçeklenmeyeceğini göstermiştir. Yine aynı eserde, eğer $\mathcal{L}^r(E) = \mathcal{L}(E)$ ise E uzayının ya bir AL-uzayına ya da bir AM-uzayına örgü izometrik olduğu gösterilmiştir. Keyfî bir E AL-uzayı için $\mathcal{L}^r(E) = \mathcal{L}(E)$ eşitliği sağlanmasına rağmen, $\mathcal{L}^r(E) = \mathcal{L}(E)$ eşitliğinin sağlanmadığı E AM-uzayları mevcuttur. 2011 yılında Wickstead tam olarak hangi AM-uzaylarının bu eşitliğin sağlandığını göstermeye çalışmış ve ayrılabilir Banach örgüleri için ilgili problemi çözmüştür.

Bölüm 2

KISMÎ SIRALAMA VE ÖRGÜLER

Bu bölümde dağılma özelliğine sahip örgüler özellikle Boole cebirleri üzerinde daha sonra kullanacağımız çeşitli tanımlar ve teoremler verilecektir. Stone Gösteriliş Teoremi verilecek ve dağılma özelliğine sahip bir örgünün Stone uzayı üzerinde kabuk-çekirdek topolojisi kurulacaktır. Kabuk-çekirdek topolojisinin önemli topolojik özellikleri araştırılacaktır. Daha fazla bilgi için [11] kaynağına başvurulabilir.

2.1 Dağılma Özelliğine Sahip Örgüler

X boştan farklı bir küme olsun. Bütün (x, y) $(x, y \in X)$ sıralı ikililerinin kümesine X'in kendisiyle *kartezyen çarpımı* denir ve $X \times X$ ile gösterilir. $X \times X$ kartezyen çarpımının boştan farklı bir alt kümesine X kümesi üzerinde bir *bağıntı* denir ve genellikle bir bağıntı R ile ve bağıntının elemanları da xRy ile gösterilir. İyi bilinen bağıntılardan birisi *denklik bağıntısıdır*; bir R bağıntısı

(i) xRy ve yRz iken xRz (geçişme),

(ii) her $x \in X$ için xRx (yansıma),

(iii) xRy iken yRx (simetri),

özelliklerine sahipse R bağıntısına denklik bağıntısı denir. Bir diğer iyi bilinen bağıntı ise *kısmi sıralamadır*; bir R bağıntısı

(i) xRy ve yRz iken xRz,

(ii) her $x \in X$ için xRx,

(iii) xRy ve yRx iken $x = y$ (ters simetri),

özelliklerine sahipse R bağıntısına kısmi sıralama denir. X üzerindeki bir R kısmi sıralama bağıntısının xRy elemanlarını genellikle $x \leq y$ (ya da, denk olarak $y \geq x$) şeklinde yazacağız. Keyfi $x, y \in X$ elemanlarına ya $x \leq y$ ya da $y \leq x$ gerçekleniyorsa karşılaştırılabilir, ne $x \leq y$ ne de $y \leq x$ gerçeklenmiyorsa karşılaştırılamaz denir. Eğer X kümesinin bütün elemanları karşılaştırılabilir ise bu kısmi sıralama bağıntısına *lineer sıralama* denir.

X kısmi sıralı bir küme olmak üzere X kümesi üzerindeki kısmi sıralamayı boştan farklı her $Y \subset X$ alt kümesi üzerine indirebiliriz, eğer Y kümesi indirdiğimiz kısmi sıralamaya göre lineer sıralı ise Y kümesine X kümesi içinde bir *zincir* denir.

X kısmi sıralı bir küme ve $Y \subset X$ boştan farklı olsun. Bir $x_0 \in X$ elemanı her $y \in Y$ için $x_0 \geq y$ sağlıyorsa x_0 elemanına Y kümesinin bir *üst sınırı* denir. Y kümesinin bir x_0 üst sınırı diğer tüm üst sınırlarından küçükse, yani keyfi üst sınır x_0' için $x_0 \leq x_0'$ sağlıyorsa, x_0 elemanına Y kümesinin *en küçük üst sınırı* veya *supremumu* denir ve $x_0 = \sup Y$ veya $x_0 = \sup\{y : y \in Y\}$ ile gösterilir. Ayrıca bir kümenin supremumu tek türlü belirlidir, eğer x_0 ve x_0' bir Y kümesinin supremumları olsaydı $x_0 \leq x_0'$ ve $x_0' \leq x_0$ olduğundan $x_0 = x_0'$ bulunurdu. Benzer şekilde bir kümenin *alt sınırı*, *en büyük alt sınırı* ve *infimumu* tanımlanır ve bir Y kümesinin infimumu $\inf Y = \inf\{y : y \in Y\}$ ile gösterilir.

X kısmi sıralı bir küme ve $x_0 \in X$ olmak üzere $x \in X$ ve $x_0 \leq x$ iken $x_0 = x$ ise x_0 elemanına *maksimal eleman* denir (x_0 maksimal elemanın her $x \in X$ elemanından büyük olması gerekmez). Bir $x_0 \in X$ elemanı her $x \in X$ için $x_0 \geq x$ sağlıyorsa x_0 elemanına X kümesinin *en büyük elemanı* denir ve aynı zamanda x_0 elemanı tek maksimal elemandır. Fakat X kısmi sıralı kümesi tek maksimal elemana sahip olsa bile bu elemanın en büyük eleman olması gerekmez. *Minimal eleman* ve *en küçük eleman* tanımları benzer şekilde verilir.

İyi bilinen ve sıkça kullanılacak Zorn Lemmasını verelim.

Zorn Lemması: X kısmi sıralı bir küme olmak üzere X kümesi içindeki her zincirin bir üst sınırı varsa, X kümesi en az bir maksimal elemana sahiptir.

Tanım 2.1.1. *X kısmi sıralı bir küme olsun.*

(i) Eğer X kümesinin boştan farklı her alt kümesinin supremumu ve infimumu varsa X kümesine sıra tam denir.

(ii) Eğer X kümesinin boştan farklı üstten sınırlı (alttan sınırlı) her alt kümesinin supremumu (infimumu) varsa X kümesine Dedekind tam denir.

(iii) Eğer X kümesinin boştan farklı üstten sınırlı (alttan sınırlı) sayılabilir her alt kümesinin supremumu (infimumu) varsa X kümesine Dedekind σ-tam denir.

(iv) Eğer X kümesinin iki elemanlı her alt kümesinin supremumu ve infimumu varsa X kümesine örgü denir.

Bir X örgüsünde $x, y \in X$ olmak üzere x ve y elemanlarından oluşan kümenin supremumunu $\sup(x, y)$ veya $x \vee y$ ile göstereceğiz. Benzer şekilde x ve y elemanlarından oluşan kümenin infimumunu $\inf(x, y)$ veya $x \wedge y$ ile göstereceğiz. İndüksiyon ile bir örgü içindeki sonlu her kümenin supremumu ve infimumu olduğunu da söylebiliriz ve sonlu bir $\{x_1, \ldots, x_n\}$ kümesinin supremumunu ve infimumunu sırasıyla $\sup\{x_1, \ldots, x_n\}$ ($x_1 \vee \ldots \vee x_n$ veya $\bigvee_{i=1}^{n} x_i$) ve $\inf\{x_1, \ldots, x_n\}$ ($x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ veya $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i$) ile göstereceğiz.

Tanım 2.1.2. *Bir X örgüsünde her $x, y, z \in X$ için*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

oluyorsa dağılma özelliğine sahiptir denir.

Tanımdaki supremum ve infimumun yerlerini değiştirebiliriz, yani bir X örgüsünün dağılma özelliğine sahip olması için gerek yeter koşul her $x, y, z \in X$ için

$$x \vee (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

olmasıdır.

Bir X örgüsü en küçük ve(veya) en büyük elemana sahip ise bu elemanları sırasıyla θ ve e ile göstereceğiz. X dağılma özelliğine sahip, en küçük ve en büyük elemanı olan bir örgü olmak üzere $x, x' \in X$ elemanları için $x \wedge x' = \theta$ ve $x \vee x' = e$ sağlanıyorsa x' elemanına x elemanının *tümleyeni* denir. Bu durumda x elemanı da x' elemanının tümleyenidir.

Teorem 2.1.3. *X dağılma özelliğine sahip, en küçük ve en büyük elemanı olan bir örgü olmak üzere eğer bir $x \in X$ elemanın tümleyeni varsa tek türlü belirlidir, diğer bir deyişle her elemanın en fazla bir tümleyeni vardır.*

Kanıt. Bir $x \in X$ elemanının x' ve x^* gibi iki tümleyeni olduğunu varsayalım. O halde

$$x^* = x^* \vee \theta = x^* \vee (x \wedge x^*) = (x^* \vee x) \wedge (x^* \vee x') = e \wedge (x^* \vee x') = (x^* \vee x').$$

Benzer şekilde $x' = (x^* \vee x')$ elde edilir. Sonuç olarak $x' = x^*$ bulunur. □

2.2 Boole Cebiri ve Boole Halkası

Dağılma özelliğine sahip, en küçük, en büyük elemanı olan ve her elemanın tümleyene sahip olduğu örgüler Boole cebiri olarak adlandırılır.

Teorem 2.2.1. *X bir Boole cebiri, $x, y \in X$ ve $x \leq y$ olmak üzere*

$$X_{x,y} = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$$

kümesi de X üzerinde sıralamayı üzerine indirdiğimizde bir Boole cebiridir ve bu Boole cebirinin en küçük elemanı x ve en büyük elemanı y'dir.

Kanıt. X Boole cebirinin en büyük elemanını e, en küçük elemanını θ ile gösterelim. X üzerinde sıralamayı $X_{x,y}$ üzerine indirdiğimizde $X_{x,y}$ kümesinin dağılma özelliğine sahip bir örgü olduğu açıktır. Şimdi $X_{x,y}$ kümesindeki her $z \in X_{x,y}$ elemanın $X_{x,y}$ içinde tümleyeninin olduğunu gösterelim. z elemanın X kümesi içindeki tümleyenini z' ile gösterelim. $z^* = (z' \wedge y) \vee x$ dersek

$$z \wedge z^* = z \wedge \{(z' \wedge y) \vee x\} = \{z \wedge (z' \wedge y)\} \vee (z \wedge x) = \theta \vee x = x,$$

$$z \vee z^* = z \vee (z' \wedge y) \vee x = z \vee (z' \wedge y) = (z \vee z') \wedge (z \vee y) = e \wedge y = y$$

bulunur, bu ise z^* elemanın z elemanının $X_{x,y}$ kümesi içindeki tümleyeni olduğunu söyler. $\square$

X en küçük elemana sahip bir örgü ve $x, y \in X$ olmak üzere $x \wedge y = \theta$ ise x ve y elemanlarına *dik* veya *ayrık* denir. Boştan farklı $U \subset X$ kümesinin her iki elemanı ayrık ise U kümesine ayrık denir. Boştan farklı bir $Y \subset X$ kümesinin bütün elemanlarına dik olan elemanların kümesine *ayrık tümleyen* denir ve

$$Y^d := \{x \in X : x \wedge y = \theta \ \forall y \in Y\}$$

ile gösterilir.

X bir Boole cebiri olmak üzere boştan farklı bir $I \subset X$ kümesi

$$x, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I \quad \text{ve} \quad x \in I,\ y \leq x \Rightarrow y \in I$$

özelliklerine sahipse I kümesine *ideal* denir. $\{\theta\}$ kümesi bir idealdir. Ayrıca boştan farklı $Y \subset X$ alt kümesinin ayrık tümleyeni de bir idealdir. Bir I idealinin her alt kümesinin X içinde supremumu var ve bu supremum I idealinin elemanı ise I idealine *bant* denir. İdeal ve bant tanımlarından, ideallerin (bantların) kesişimlerinin ideal (bant) olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca boştan farklı bir $D \subset X$ kümesini kapsayan ideallerin kesişimine D kümesi tarafından üretilen ideal denir. Benzer şekilde D kümesi tarafından üretilen bant D kümesini kapsayan bantların kesişimidir.

X boştan farklı bir küme ve Γ, X kümesinin alt kümelerinin bir topluluğu olmak üzere her $A, B \in \Gamma$ için $A \cup B \in \Gamma$ ve $A \setminus B \in \Gamma$ sağlanıyorsa Γ topluluğuna bir *halka* denir. Tanımdan da kolayca görüleceği gibi Γ topluluğu sonlu birleşim ve kesişim altında kapalıdır. Γ topluluğu içerme bağıntısıyla kısmi sıralıdır. Açıkça görüleceği gibi dağılma özelliğine sahip, en küçük eleman olarak boş kümeyi içeren bir örgüdür. Eğer X kümesinin kendisi Γ topluluğunun elemanı ise Γ kümesine *cebir* denir. Bu durumda Γ en büyük elemanı X olan bir Boole cebiridir ve her $A \in \Gamma$ için $X \setminus A$ kümesi dağılma özelliğine sahip yapılar içinde verilen tümleyen tanımına göre A kümesinin tümleyenidir.

X bir Boole cebiri olsun. $B, E \subset X$ olmak üzere her $0 < b \in B$ için $0 < x \leq b$ olacak şekilde $x \in E$ varsa E kümesi B kümesini *minorize* ediyor denir ve E

kümesine B kümesinin *minorantı* denir. Boştan farklı bir $M \subset X$ kümesinin üst sınırlarının kümesini $u.b.(M)$ ile gösterelim.

Bir Boole cebirinin ayrık bir alt kümesine *ters zincir* diyelim.

Teorem 2.2.2. *(Tüketme Prensibi) X bir Boole cebiri ve $M \subset X$ boştan farklı bir alt küme olsun. Bir $E \subset X$ kümesi M kümesi tarafından üretilen B bandını minorize etsin. Bu durumda öyle bir $E_0 \subset E$ ters zinciri vardır ki $u.b.(E_0) = u.b.(M)$ ve her $x \in E_0$ için öyle bir $y \in M$ vardır ki $x \leq y$ sağlanır.*

Kanıt. $\mathfrak{U}$ ile aşağıdaki koşulları sağlayan tüm A ters zincirlerinin kümesini gösterelim:

(a) $A \subset E$, (b) her $x \in A$ öyle bir $y \in M$ vardır ki $x \leq y$ sağlanır.

Eğer $\theta \neq y \in M$ elemanı varsa minorant olma koşulundan $y \geq x$ olacak şekilde $\theta \neq x \in E$ elemanı vardır. Böylece $\{x\} \in \mathfrak{U}$ bulunur ki bu durumda $\mathfrak{U}$ boştan farklıdır. $\mathfrak{U}$ içerme bağıntıyla sıralı bir kümedir ve Zorn Lemmasının koşullarını sağlar. O halde $\mathfrak{U}$ bir maksimal elemana sahiptir, bu maksimal elemanı E_0 ile gösterelim. $\mathfrak{U}$ topluluğunun tanımındaki (b) koşulundan $u.b.(M) \subset u.b.(E_0)$ bulunur. Özellikle $u.b.(E_0) = \{e\}$ ise ispat tamamlanır.

Ters kapsamayı göstermek için öyle bir $e \neq b_0 \in u.b.(E_0)$ elemanın $u.b.(M)$ kümesinde olmadığını varsayalım. O zaman öyle bir $x \in M$ elemanı vardır ki $x_0 := b_0^{'} \wedge x \neq \theta$. Minorant olma koşulundan, öyle bir $y \in E$ elemanı için $\theta < y \leq x_0$ sağlanır. Böylece $E_0 \cup \{y\} \in \mathfrak{U}$ bulunur ki bu ise E_0 kümesinin maksimal olmasıyla çelişir. O halde $u.b.(E_0) \subset u.b.(M)$ bulunur. □

Lemma 2.2.3. *En küçük üst sınıra sahip olan boştan farklı her $M \subset X$ kümesi için öyle bir $A \subset X$ ters zinciri vardır ki $\sup A = \sup M$ ve her $x \in A$ elemanı için $x \leq y$ sağlayan öyle bir $y \in M$ bulabiliriz.*

Kanıt. $E := \bigcup_{y \in M} [\theta, y]$ kümesi M için minorant alınır ve yukarıdaki lemma kullanılırsa istenilen elde edilir. □

Sonuç 2.2.4. *Bir Boole cebirinin tam olması için gerek yeter koşul her ters zincirin supremuma sahip olmasıdır.*

X dağılma özelliğine sahip ve en küçük elemanı θ olan bir örgü olsun. Keyfi $x \in X$ elemanı için;

$$\{y \in X : \theta \leq y \leq x\}$$

kümesini $X_{\theta,x}$ ile gösterelim ve $X_{\theta,x}$ kümesine X örgüsünün bir başlangıç parçası denir. Her $x \in X$ için $X_{\theta,x}$ başlangıç parçalarının bir Boole cebiri olduğunu varsayalım, yani $y \leq x$ sağlayan keyfi iki $x, y \in X$ elemanı için öyle bir $z \in X$ vardır ki $z \wedge y = \theta$ ve $z \vee y = x$ sağlanır. Bulunan z elemanı y elemanının x elemanına göre tümleyeni olarak adlandırılır. Buradaki z elemanı için $z = x \ominus y$ notasyonunu kullanalım. Açıktır ki $x \ominus y = \theta$ olması için gerek yeter koşul $x = y$ olmasıdır. Bu şekilde X üzerinde toplama ve çarpma işlemi tanımlayabiliriz öyle ki bu işlemlere göre X bazı ek özellikleri olan değişmeli bir halka olur. İşlemler, $x + y$ toplamı $x \wedge y$ elemanının $x \vee y$ elemanına göre tümleyeni, xy çarpımı $x \wedge y$ olarak tanımlanır. Bu işlemlere göre X değişmeli bir halka olur (daha fazla bilgi için, [11] s.8). X örgüsünün en küçük elemanı θ bu halkanın sıfır elemanı olur yani her $x \in X$ için $x + \theta = x$. Genelde bu halkanın birim elemanı yoktur, eğer X bir Boole cebiri ise, o zaman en büyük elemanı e bu halka için birim eleman olur. Ayrıca bu halkanın ek başka özellikleri de vardır; her eleman eşgüçlü(idempotent) elemandır yani her $x \in X$ için $x^2 = x$, ayrıca her $x \in X$ için $x + x = \theta$ yani $x = -x$ sağlanır.

Doğal olarak bir R Boole halkasının dağılma özelliğine sahip, θ en küçük eleman, her $R_{\theta,x}$ başlangıç parçasının Boole cebiri olacak şekilde bir kısmi sıralamaya sahip olup olmadığı ve böyle bir örgü yapısından elde edilecek olan Boole halkasının başlangıçtaki Boole halkası olup olmadığı sorusu soruldu. Bir R Boole halkası verildiğinde $xy = x$ ise $x \leq y$ diyelim. Bu tanımlamanın bir kısmi sıralama olduğu ve R Boole halkasının dağılma özelliğine sahip olduğunu, θ en küçük elemanı olduğunu görmek kolaydır. x ve y elemanlarının infimumu xy elemanı ve supremumu $x + y + xy$ elemanıdır. Gerçekten $z = x + y + xy$ dersek $xz = x$ ve $yz = y$ olduğundan z elemanı x ve y elemanları için bir üst sınırdır. z' elemanı x ve y elemanları için bir başka üst sınır olsa

$$zz' = xz' + yz' + xyz' = x + y + xy = z,$$

ve böylece $z \leq z'$ elde edilir. Bu ise $z = x+y+xy$ elemanının supremum olduğunu gösterir. $\theta \leq y \leq x$ olmak üzere $x+y$ elemanı y elemanının x elemanına göre $R_{\theta,x}$ içindeki tümleyenidir, böylece $R_{\theta,x}$ bir Boole cebiridir. O halde R Boole halkası istenilen özellikleri sağlayan bir kısmi sıralamaya sahiptir. Bu Boole halkası yapısındaki kısmi sıralamadan türetilen çarpma işlemi $xy = x \wedge y$ başlangıçtaki çarpma işlemidir ve x ve y elemanlarının toplamı xy elemanının $x \vee y = x+y+xy$ elemanına göre tümleyenidir, yani toplam $x+y+xy+xy = x+y$ başlangıçtaki Boole halkası üzerideki toplamadır. Bu şekilde sıralı bir Boole halkası yapısı elde ederiz.

2.3 Asal İdealler ve Stone Gösteriliş Teoremi

X dağılma özelliğine ve θ en küçük elemanına sahip bir örgü olsun. Bir $Z \subseteq X$ kümesi

- $z_l, z_2 \in Z$ iken $z_1 \vee z_2 \in Z$,
- $z \in Z$ olmak üzere $z^{'} \leq z$ sağlayan her $z^{'} \in Z$,

özelliklerine sahipse Z kümesine ideal denir. X kümesinin kendisinden farklı ideallerine has ideal diyeceğiz. Bir P idealinde $x \wedge y \in P$ sağlayan $x, y \in X$ elemanları için ya $x \in P$ ya da $y \in P$ oluyorsa P idealine *asal ideal* denir. I bir ideal ve M bir asal ideal olmak üzere $I \subset M' \subset M$ sağlayan her M' asal ideal için $M' = M$ oluyorsa M asal idealine I idealine göre minimal asal ideal denir. Bir M ideali $\{\theta\}$ idealine göre minimal ise kısaca minimal asal ideal denir. X içindeki tüm has asal ideallerin topluluğunu $\mathscr{P}$ ile, tüm has minimal ideallerin kümesini $\mathscr{M}$ ile ve bir elemanı içermemeye göre maksimal olan Q ideallerinin kümesini $\mathscr{Q}$ ile gösterelim ($\mathscr{Q} = \{Q : \exists x \in X \ \ni x \notin I,\ I \text{ ideali için } I \subseteq Q\}$).

Teorem 2.3.1. (i) *Bir P idealinin asal olması için gerek yeter koşul $A \cap B \subset P$ sağlayan her A, B idealleri için $A \subset P$ veya $B \subset P$ olmasıdır.*
(ii) *$x_0 \in X$ ve $P \subset X$ ideali x_0 elemanını içermemeye göre maksimal, yani $Q \supset P$ ve $x_0 \notin Q$ ise $Q = P$, ise P ideali asaldır.*
(iii) *Her maksimal ideal asaldır.*

Kanıt. (i) P bir asal ideal ve $A, B \subset X$ idealleri için $A \cap B \subset P$ olsun. Ne $A \subset P$ ne de $B \subset P$ olmazsa öyle $x \in A$ ve $y \in B$ vardır ki ne x elemanı ne de y elemanı P idealinin elemanıdır. Öte yandan $x \wedge y \in A \cap B \subset P$ ve P asal olduğundan ya $x \in P$ ya da $y \in P$ olur. Bu ise çelişkidir. Böylece $A \subset P$ veya $B \subset P$ bulunur.

Tersine, P ideali her $A \cap B \subset P$ olan $A, B \subset X$ idealleri için $A \subset P$ veya $B \subset P$ özelliğine sahip olsun. $x \wedge y \in P$ iken $x \in P$ veya $y \in P$ olduğunu gösterelim. Bunun için A ve B ile sırasıyla x ve y tarafından üretilen idealleri gösterelim, yani $A = \{z : z \leq x\}$ ve $B = \{z : z \leq y\}$ olsun. O halde $A \cap B = \{z : z \leq x \wedge y\}$ olur ve böylece $x \wedge y \in P$ olduğundan $A \cap B \subset P$ bulunur. Kabulümüzden $A \subset P$ veya $B \subset P$ bulunur, yani ya $x \in P$ ya da $y \in P$.

(ii) $x_0 \in X$ ve P ideali x_0 elemanını içermeme özelliğine göre maksimal olsun. Eğer P asal değilse öyle $y, z \in X \setminus P$ elemanları vardır ki $y \wedge z \in P$ sağlanır. $P \cup \{y\}$ tarafından üretilen ideal x_0 elemanını içerir, böylece öyle $p_1 \in P$ ve $y_1 \leq y$ vardır ki $x_0 = p_1 \vee y_1$ şeklindedir. Benzer şekilde, $P \cup \{z\}$ tarafından üretilen ideal x_0 elemanını içerir, böylece $p_2 \in P$ ve $z_1 \leq z$ vardır ki $x_0 = p_2 \vee z_1$ şeklindedir. $p_3 = p_1 \vee p_2$ dersek $x_0 \leq p_3 \vee y_1$, $x_0 \leq p_3 \vee z_1$ ve $x_0 \leq (p_3 \vee y_1) \wedge (p_3 \vee z_1) = p_3 \wedge (y_1 \vee z_1) \in P$, böylece $x_0 \in P$ bulunur ki bu ise hipotez ile çelişir.

(iii) P bir maksimal ideal ve $x_0 \in X \setminus P$ ise P, x_0 elemanını içermeme bağıntısına göre maksimal olduğundan (ii) şıkkından P asal ideal bulunur. □

Teorem 2.3.2. *I bir ideal ve $x_0 \notin I$ verildiğinde öyle bir $P \supset I$ ideali vardır ki P ideali x_0 elemanını içermeme özelliğine göre maksimaldir. Bir önceki teoremden P ideali asaldır. Böylece, keyfi bir I ideali için*

$$I = \bigcap \{ P \in \mathscr{P} \ : \ P \supset I \}$$

bulunur. Özel olarak,

$$\{\theta\} = \bigcap \{P : P \text{ asal ideal}\}$$

olur.

Kanıt. I idealini içeren x_0 elemanını içermeyen ideallerin kümesi içerme bağıntısına göre kısmi sıralıdır. Ayrıca bu küme içindeki her zincir bir üst sınıra sahiptir (zincirdeki elemanların birleşimi üst sınır olarak alınabilir). Böylece küme bir maksimal elemana sahiptir, yani öyle bir $P \supset I$ ideali vardır ki P, x_0 elemanını içermeme özelliğine göre maksimaldir. Ayrıca önceki teoremden P asaldır. □

$S \subset X$ ve $\theta \notin S$ olmak üzere $x, y \in S$ iken $x \wedge y \in S$ ise S kümesine *ast alt örgü* denir. $x_0 \neq \theta$ aldığımızda $y \geq x_0$ elemanlarının kümesi bir ast alt örgüdür. Boş kümede bir ast alt örgüdür. Açıkça görüleceği gibi bir P asal idealinin küme teorik tümleyeni $S = X \setminus P$ bir ast alt örgüdür ve $x \in S$ ve $y \geq x$ ise $y \in S$ özelliğine sahiptir. Tersine, S bir ast alt örgü olmak üzere küme teorik tümleyeninin $S' = X \setminus S$ bir ideal olması gerekmez. Ancak, bir P ideali için $S = X \setminus P$ bir ast alt örgü ise P ideali asaldır.

Bir ast alt örgü başka bir ast alt örgü tarafından has alt küme olarak içerilmiyorsa *maksimal* denir. Bir S ast alt örgüsü verildiğinde S ast alt örgüsünü içeren bütün ast alt örgülerin kümesi içerme bağıntısına göre kısmi sıralıdır. Bu kısmi sıralı yapı içindeki her zincir üstten sınırlıdır (zincirdeki elemanların birleşimi üst sınır olarak alınabilir). Böylece bir maksimal elemana sahiptir, yani S ast alt örgüsü bir S_m maksimal ast alt örgü tarafından içerilir. Ayrıca $x_0 \in S_m$ ve $y \geq x_0$ ise $y \in S_m$'dir. Eğer bir $z \notin S_m$ ise en az bir $x \in S_m$ için $z \wedge x = \theta$ olur. Gerçekten, eğer her $x \in S_m$ için $z \wedge x \neq \theta$ olsaydı, $z \wedge x$ elemanlarını S_m kümesine eklediğimizde ($z \wedge x$ elemanları S_m kümesine ait değildir aksi halde $z \in S_m$ bulunur) bir ast alt örgü elde ederiz ki bu ise S_m kümesinin maksimal olmasıyla çelişir.

Teorem 2.3.3. (i) *$S \subset X$ alt kümesinin maksimal ast alt örgü olması için gerek yeter koşul $X \setminus S$ kümesinin bir minimal asal ideal olmasıdır.*
(ii) *Her asal ideal bir minimal asal ideal içerir.*
(iii) *$X \neq \{\theta\}$ ise bir M minimal asal ideali bir $x \in X$ elemanının hem kendisini hem de ayrık tümleyenini $\{x\}^d$ aynı anda içeremez.*
(iv) *M bir minimal asal ideal ve $x \in M$ ise $\{x\}^{dd} \subset M$'dir.*

Kanıt. (i) S bir maksimal ast alt örgü olsun. $M = X \setminus S$ olsun. $s \in S$, $t \geq s$ iken $t \in S$ olduğundan $x \in M$ ve $y \leq x$ ise $y \in M$ bulunur. Öte yandan $x, y \in M$ alırsak öyle bir $s, t \in S$ vardır ki $x \wedge s = \theta$ ve $y \wedge t = \theta$ olur. $s_1 = s \wedge t$ dersek $s_1 \in S$ ve $x \wedge s_1 = y \wedge s_1 = \theta$, buradan da $(x \vee y) \wedge s_1 = \theta$ bulunur ki bu ise $x \vee y \notin S$ olduğunu söyler. O halde $x \vee y \in M$ bulunur. Böylece M kümesinin bir ideal olduğunu gösterdik. Öte yandan M idealinin tümleyeni S bir ast alt örgü olduğu için M bir asal idealdir. Ayrıca M ideali bir M^* asal idealini kesin olarak içerseydi, S ast alt örgüsü $X \setminus M^*$ tarafından kesin olarak içerilirdi. Bu ise S

maksimal ast alt örgü olduğundan mümkün değildir, böylece M bir minimal asal idealdir.

Tersine, M bir minimal asal ideal olsun. O halde $S = X \setminus M$ bir ast alt örgüdür. Eğer S maksimal değilse, S ast alt örgüsünü kesin olarak içeren S^* maksimal ast alt örgüsü vardır. Böylece, yukarıda gösterdiğimiz gibi, $X \setminus S^*$ bir minimal asal idealdir ve $X \setminus S^* \subset M$ bulunur ki bu ise M idealinin minimal olmasıyla çelişir. Böylece S maksimal ast alt örgüdür.

(ii) Bir P asal ideali verildiğinde $S = X \setminus P$ bir ast alt örgüdür. S daima bir S^* maksimal ast alt örgüsü tarafından içerildiğinden $M = X \setminus S^*$ minimal asal ideali P ideali tarafından kapsanır.

(iii) M bir asal ideal olsun. Bir $x \in X$ için $\{x\}$ ve $\{x\}^d$ kümelerinin M tarafından içerildiğini kabul edelim. $S = X \setminus M$ bir maksimal ast alt örgü olduğundan $x \in M$ için öyle bir $y \in S$ vardır ki $x \wedge y = \theta$. O halde $y \in \{x\}^d$ bulunur bu ise $y \in S \cap M$ olduğunu söyler ki bu imkansızdır. O halde bir minimal asal idealde hem $\{x\}$ hem de $\{x\}^d$ aynı anda bulunamaz.

(iv) M bir minimal ideal ve $x \in M$ olsun. ($M \neq X$ olduğunu kabul edebiliriz) (iii) şıkkından $y \in X \setminus M$ ve $y \in \{x\}^d$ elemanı vardır. $\{x\}^{dd}$, M idealinin içinde değilse, yani öyle bir $z \in \{x\}^{dd}$ elemanı vardır ki $z \in S$. Öte yandan $y, z \in S$ ve $y \wedge z = \theta$ bulunur ki bu ise S'nin ast alt örgü olmasıyla çelişir. □

$\mathscr{R} \subseteq \mathscr{P}$ ve $x \in X$ olmak üzere $\{R\}_x$ ile x elemanını içermeyen $R \in \mathscr{R}$ ideallerinin kümesini gösterelim.

Teorem 2.3.4. *$\{P\}_x \subset \{P\}_y$ olması için gerek yeter koşul $x \leq y$ olmasıdır. Böylece $\{P\}_x = \{P\}_y$ olması için gerek yeter koşul $x = y$ olmasıdır.*

Kanıt. $x \leq y$ iken $\{P\}_x \subset \{P\}_y$ olduğunu görmek kolaydır. Tersine $\{P\}_x \subset \{P\}_y$ olduğunu ama $x \leq y$ olmadığını varsayalım. O halde x elemanı y elemanı tarafından üretilen I_y idealine ait değildir. O zaman $P \supset I_y$ ve $x \notin P$ olacak şekilde bir P asal ideali vardır. Böylece $P \in \{P\}_x \subset \{P\}_y$ bulunur, bu ise $y \in I_y \subset P$ olmasıyla çelişir. O halde $x \leq y$ olur. □

X ve Y sırasıyla en küçük elemanları θ_X ve θ_Y olan dağılma özelliğine sahip iki örgü olsun. Bir $\pi : X \to Y$ fonksiyonu her $x_l, x_2 \in X$ için $\pi(\theta_X) = \theta_Y$, $\pi(x_1) = y_1$,

$\pi(x_2) = y_2$ iken $\pi(x_1 \vee x_2) = y_1 \vee y_2$ ve $\pi(x_1 \wedge x_2) = y_1 \wedge y_2$ özelliklerini sağlıyorsa π fonksiyonuna *örgü homomorfisi* denir. Bir π örgü homomorfisi birebir ve üzerine ise π homomorfisine *örgü izometrisi* denir.

Dağılma özelliğine sahip en küçük elemanlı bir X örgüsünün bir kümenin alt kümelerinin içerme bağıntısına göre kısmi sıralanmış ve boş kümeyi en küçük eleman kabul eden bir örgüye izomorfik olup olmadığı soruldu ve M. H. Stone böyle iki yapı arasında bir izomorfizma kurulabileceğini gösterdi.

$\emptyset \neq \mathscr{R} \subset \mathscr{P}$ olmak üzere her $x \in X$ için $\{R\}_x$ ile x elemanını içermeyen $R \in \mathscr{R}$ ideallerinin kümesini göstermiştik. $\{R\}_\theta$ boş kümedir ve her $x, y \in X$ için

$$\{R\}_x \cap \{R\}_y = \{R\}_{x \wedge y} \quad \text{ve} \quad \{R\}_x \cup \{R\}_y = \{R\}_{x \vee y}\,. \tag{2.1}$$

Böylece $Y := \{\{R\}_x : x \in X\}$ kümesi dağılma özelliğine sahip en küçük eleman olarak boş kümeyi içeren bir örgüdür. Eğer X en büyük elemanı e olan bir Boole cebiri ise $\{R\}_e = \mathscr{R}$, Y için en büyük elemandır, böylece Y bir Boole cebiri olur.

Teorem 2.3.5 (Stone Gösteriliş Teoremi)**.** *X, dağılma özelliğine sahip, en küçük elemanlı bir örgü ve $\emptyset \neq \mathscr{R} \subset \mathscr{P}$ olsun.*

$$x \longrightarrow \{R\}_x$$

gönderimi X örgüsünden $Y = \{\{R\}_x : x \in X\}$ örgüsü üzerine bir örgü homomorfisidir. Eğer $\mathscr{R} = \mathscr{P}$ ise bu gönderim bir örgü izometrisi olur. Buradaki Y örgüsüne X örgüsünün Stone gösterilimi veya Stone uzayı denir ve bu uzay örgü izometrilerine göre tek türlü belirlidir.

Kanıt. Yukarıda verilen (2.1) eşitliklerinden, $x \mapsto \{R\}_x$ gönderimi bir örgü homomorfisidir. Diğer taraftan da, eğer $\mathscr{R} = \mathscr{P}$ ise, Teorem 2.3.4 bu gönderimin bir örgü izometrisi olduğunu söyler. $\square$

2.4 Kabuk-Çekirdek Topolojisi

Bu kısımda $\mathscr{P}$ ve alt kümeleri üzerinde kabuk-çekirdek topolojisini kuracağız ve bu topolojinin Boole cebirleri ve Boole halkaları tarafından karakterize edilen özellikleri üzerinde duracağız.

X, dağılma özelliğine sahip, en küçük elemanlı bir örgü ve $\mathscr{R} \subset \mathscr{P}$ boştan farklı bir alt küme olsun. Boştan farklı keyfî bir $\mathscr{R}_1 \subset \mathscr{R}$ kümesinin *çekirdeği*

$$k(\mathscr{R}_1) = \bigcap \{R : R \in \mathscr{R}_1\}$$

olarak tanımlanır; eğer $\mathscr{R}_1$ boş ise $k(\mathscr{R}_1) = X$ alınır. Açıkça görüleceği gibi, $k(\mathscr{R}_1)$ kümesi X örgüsü içinde bir idealdir. Boştan farklı bir $D \subset X$ kümesi için D kümesinin *kabuğu*

$$h(D) = \{R : R \in \mathscr{R}, R \supset D\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada tanımlar $\mathscr{R}$ kümesinin seçimine bağlıdır, farklı seçimler için $k(\mathscr{R}_1)$ ve $h(D)$ yapıları değişebilir.

Teorem 2.4.1. *(i) Her $\mathscr{R}_1 \subset \mathscr{R}$ için $h(k(\mathscr{R}_1)) \supset \mathscr{R}_1$ ve her $D \subset X$ için $k(h(D)) \supset I_D$ burada I_D, D tarafından üretilen idealidir.*
(ii) $D \subset X$ olmak üzere $\mathscr{R}_1 = h(D)$ şeklindeyse $h(k(\mathscr{R}_1)) = \mathscr{R}_1$ bulunur.
(iii) $\mathscr{R}_1 \subset \mathscr{R}$ olmak üzere $I = k(\mathscr{R}_1)$ şeklindeyse $k(h(I)) = I$ bulunur.
(iv) Eğer $\mathscr{R} = \mathscr{P}$ ise her $I \subset X$ ideali için $k(h(I)) = I$ bulunur.

Kanıt. (i) Tanımlardan açıktır.
(ii) $\mathscr{R}_1 = h(D)$ olsun. $h(k(\mathscr{R}_1)) \subset \mathscr{R}_1$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\mathscr{R}_1 = h(D)$ olduğundan $k(\mathscr{R}_1) = k(h(D)) \supset D$ bulunur, böylece

$$h(k(\mathscr{R}_1)) \subset h(D) = \mathscr{R}_1.$$

(iii) Benzer şekilde yapılır.
(iv) $\mathscr{R} = \mathscr{P}$ olsun. Bir $I \subset X$ has ideali

$$I = \bigcap \{ P \in \mathscr{P} : P \supset I \}$$

şeklinde yazılabildiğinden $\mathscr{P}_1 = \{ P \in \mathscr{P} : P \supset I \}$ dersek $I = k(\mathscr{P}_1)$ bulunur. Böylece (iii) şıkkından $k(h(I)) = I$ bulunur. Ayrıca doğrudan $I = X$ için $k(h(I)) = I$ olduğu görülebilir. □

Teorem 2.4.2. *$\mathscr{R} \subset \mathscr{P}$ ve bütün $R \in \mathscr{R}$ ideallerinin kesişimi $\{\theta\}$ olsun. Bir $I \subset X$ ideali için*

$$I^d = k(h(I)^c) \text{ olur.}$$

Kanıt. Eğer $I = X$ ise $h(I)$ boş kümedir ve $h(I)^c = \mathscr{R}$ bulunur. Böylece $k(h(I)^c) = \{\theta\} = I^d$.

$I \neq X$, $y \in I^d$ ve $R \in h(I)^c$ olsun. O halde I ideali R tarafından içerilmez, yani öyle bir $x \in I$ vardır ki x, R idealinin elemanı değildir. $x \in I$ ve $y \in I^d$ olduğundan $x \wedge y = \theta$ olur, buradan da $y \in R$ bulunur (R asal ideal). Böylece keyfi $y \in I^d$ elemanı keyfi $R \in h(I)^c$ idealinin içindedir. Bu ise $I^d \subset k(h(I)^c)$ olduğunu gösterir.

Tersine keyfi $y \in k(h(I)^c)$ elemanının her $x \in I$ ile dik olduğunu, $x \wedge y = \theta$, göstermeliyiz. Bunun için her $R \in \mathscr{R}$ için $x \wedge y \in R$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Eğer $R \in h(I)$ ise $x \in I \subset R$ böylece $x \wedge y \in R$ bulunur. Eğer $R \in h(I)^c$ ise $y \in R$, böylece $x \wedge y \in R$. O halde her $R \in \mathscr{R}$ için $x \wedge y \in R$. $\square$

Sonuç 2.4.3. *(i) $\mathscr{R} \subset \mathscr{P}$ ve bütün $R \in \mathscr{R}$ ideallerinin kesişimi $\{\theta\}$ olsun. Her $x \in X$ için*

$$\{x\}^d = k(\{R\}_x).$$

(ii) Eğer $\mathscr{R} = \mathscr{M}$ ise her $x \in X$ için

$$h(k(\{M\}_x)) = \{M\}_x$$

gerçeklenir.

Kanıt. (i) $x \in X$ ve I, x ile üretilen ideal olsun. O halde $I^d = \{x\}^d$ ve $h(I)^c = \{R\}_x$. Böylece Teorem 2.4.2 kullanılarak istenen elde edilir.
(ii) $x \neq \theta$ olduğunu varsayabiliriz. Bir önceki şıktan $\{x\}^d = k(\{M\}_x)$ olur ve böylece

$$h\left(\{x\}^d\right) = h(k(\{M\}_x)) \supset \{M\}_x$$

elde edilir. Öte yandan, $M \in h\left(\{x\}^d\right)$ minimal asal ideal alırsak $\{x\}^d \subset M$ olduğundan Teorem 2.3.3 (iii) gereğince $x \notin M$, böylece $M \in \{M\}_x$ bulunur. O halde $h(k(\{M\}_x)) \subset \{M\}_x$, sonuç olarak $h(k(\{M\}_x)) = \{M\}_x$ bulunur. $\square$

Teorem 2.4.4. *$\{M\}_x \subset \{M\}_y$ olması için gerek yeter koşul $\{x\}^{dd} \subset \{y\}^{dd}$ olmasıdır. O halde $\{M\}_x = \{M\}_y$ olması için gerek yeter koşul $\{x\}^{dd} = \{y\}^{dd}$ veya denk olarak $\{x\}^d = \{y\}^d$ olmasıdır.*

Kanıt. $\{M\}_x \subset \{M\}_y$ ise $k(\{M\}_x) \supset k\left(\{M\}_y\right)$ yani Sonuç 2.4.3 (i) 'den $\{x\}^d \supset \{y\}^d$ bulunur ki bu ise $\{x\}^{dd} \subset \{y\}^{dd}$ olduğunu söyler. Tersine $\{x\}^{dd} \supset \{y\}^{dd}$ ise $\{x\}^{ddd} \supset \{y\}^{ddd}$, yani $\{x\}^d \supset \{y\}^d$, böylece $k(\{M\}_x) \supset k\left(\{M\}_y\right)$. O halde

$$h(k(\{M\}_x)) \subset h\left(k\left(\{M\}_y\right)\right)$$

olur, böylece Sonuç 2.4.3 (ii)'den $\{M\}_x \subset \{M\}_y$ bulunur. □

Şimdi $\mathscr{R}$ üzerinde tüm $\{R\}_x$ formundaki kümeleri bir taban olarak kabul eden topoloji oluşturacağız. $\{R\}_{x_i}$ kümelerinin keyfi sonlu kesişimi $x_0 = \inf\{x_1, \ldots, x_n\}$ olmak üzere yine $\{R\}_{x_0}$ formundadır, yani $\{R\}_x$ kümeleri $\mathscr{R}$ üzerinde bir topoloji üretir.

Teorem 2.4.5. *$\mathscr{R}$ yukarıda açıklandığı gibi topolojiye sahip olsun. Keyfi $I \subset X$ ideali için, bu idealin kabuğu olan*

$$h(I) = \{\, R : \; R \in \mathscr{R}\,,\; R \supset I\}$$

bu topolojide kapalı bir kümedir. Tersine, her kapalı küme uygun bir idealin kabuğudur. Dahası herhangi bir $\mathscr{R}_1 \subset \mathscr{R}$ kümesinin kapanışı tam olarak $h(k(\mathscr{R}_1))$ kümesidir, bu sebepten dolayı bu topoloji genellikle kabuk-çekirdek topolojisi olarak adlandırılır. Ayrıca $\mathscr{R}$ üzerindeki kabuk-çekirdek topolojisi $\mathscr{P}$ üzerindeki kabuk-çekirdek topolojisinin $\mathscr{R}$ üzerine indirgediği topolojidir.

Kanıt. Kapalı kümeler $\{\, R\, : R \in \mathscr{R},\;\; x \in R\,\}$ kümelerinin kesişimi şeklindedir, yani bir kapalı küme için öyle bir $D \subset X$ vardır ki bu kapalı küme

$$h(D) = \{\, R : \; R \in \mathscr{R}, \;\; R \supset D\}$$

şeklindedir. Öte yandan I_D, D tarafından üretilen ideal olmak üzere $h(D) = h(I_D)$ olduğundan $\mathscr{R}$ kümesinin bir alt kümesinin kapalı olması için gerek yeter koşul X içindeki bir idealin kabuğu olmasıdır.

$\mathscr{R}_1 \subset \mathscr{R}$ olmak üzere kapanış kümesini belirleyelim. Açıktır ki $\mathscr{R}_1$ kümesi kapalı $h(k(\mathscr{R}_1))$ kümesinin içindedir. Öte yandan $\mathscr{R}_2 \supset \mathscr{R}_1$ kapalı bir $\mathscr{R}_2$ kümesi alsak $I \subset X$ olmak üzere $\mathscr{R}_2 = h(I)$ şeklindedir. Böylece $h(I) \supset \mathscr{R}_1$. O halde

$$h(k(h(I))) \supset h(k(\mathscr{R}_1))$$

yani Teorem 2.4.1 (ii)'den $h(I) \supset h(k(\mathscr{R}_1))$. Burada $\mathscr{R}_2 = h(I)$ olduğundan $\mathscr{R}_2 \supset h(k(\mathscr{R}_1))$ bulunur ki istenilen sağlanır.

Son olarak $\mathscr{R}$ üzerindeki kabuk-çekirdek topolojisinin tanımı gereği bu topoloji $\mathscr{P}$ üzerindeki kabuk-çekirdek topolojisinin $\mathscr{R}$ üzerine düşürülmüş halidir. □

Şimdi $\{P\}_x$ ve $\{M\}_x$ kümelerinin kompakt olmalarına ilişkin bazı durumları inceleyeceğiz.

Teorem 2.4.6. *$x_0 \in X$, $\{x_\tau : \tau \in \{\tau\}\} \subset X$ ve $\{P\}_{x_0} \subset \bigcup\limits_{\tau} \{P\}_{x_\tau}$ olsun. O zaman indeks kümesinde öyle $\tau_1, \ldots, \tau_n$ indisleri vardır ki $x_0 \leq \sup\{x_{\tau_1}, \ldots, x_{\tau_n}\}$ sağlanır ve böylece $\{P\}_{x_0} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{P\}_{x_{\tau_i}}$ bulunur.*

Kanıt. $\{P\}_{x_0} \subset \bigcup\limits_{\tau} \{P\}_{x_\tau}$ olsun. Her τ için $y_\tau = x_0 \wedge x_\tau$ dersek $\theta \leq y_\tau \leq x_\tau$ ve $\{P\}_{x_0} = \bigcup\limits_{\tau} \{P\}_{y_\tau}$ olur. x_0 elemanın sonlu tane y_τ elemanlarının supremumu olduğunu göstereceğiz. Olmadığını varsayalım. O halde x_0 elemanı tüm y_τ elemanları tarafından üretilen I idealinin elemanı değildir. Ayrıca öyle bir $P \supset I$ asal ideali vardır ki $x_0 \notin P$. Böylece $P \in \{P\}_{x_0}$ ama her τ için $y_\tau \in P$ olduğundan $P \notin \{P\}_{y_\tau}$. Bu ise $\{P\}_{x_0} = \bigcup\limits_{\tau} \{P\}_{y_\tau}$ olmasıyla çelişir. Böylece uygun $\tau_1, \ldots, \tau_n$ indeksleri için $x_0 \leq \sup\{x_{\tau_1}, \ldots, x_{\tau_n}\}$ olur. □

Teorem 2.4.7. *$\mathscr{R}$, $\mathscr{P}$ kümesinin boştan farklı bir alt kümesi ve $\mathscr{M} \subset \mathscr{R}$ olsun. $\{x_\tau : \tau \in \{\tau\}\}$ için $\{R\}_{x_\tau}$ sonlu kesişim özelliğine sahip olsun. O zaman $\bigcap\limits_{\tau \in \{\tau\}} \{R\}_{x_\tau}$ boştan farklıdır.*

Kanıt. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{R\}_{x_{\tau_i}}$ sonlu kesişimi $y = \inf\{x_{\tau_1}, \ldots, x_{\tau_n}\}$ olmak üzere $\{R\}_y$ biçimindedir. $\{R\}_{x_\tau}$ sonlu kesişim özelliğine sahip olduğundan (x_τ) ve sonlu infimumlarını eklediğimiz küme X içinde bir ast alt örgüdür. Bu ast alt örgü bir maksimal S ast alt örgüsü tarafından içerilir ve $M = X \backslash S$ dersek M minimal asal idealdir. Ayrıca her τ için $x_\tau \notin M$ olduğundan $M \in \bigcap \{R\}_{x_\tau}$, yani kesişim boştan farklıdır. □

Teorem 2.4.8. *Eğer tüm $\{M\}_x$ elemanlarından oluşan örgü bir Boole halkası ve $x_0 \in X$, $x_\tau \in X$ $(\tau \in \{\tau\})$ için $\{M\}_{x_0} \subset \bigcup\limits_{\tau} \{M\}_{x_\tau}$ sağlanıyorsa öyle $\tau_1, \ldots, \tau_n$ indeksleri vardır ki $\{M\}_{x_0} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{M\}_{x_{\tau_i}}$ sağlanır.*

Kanıt. x_τ ile $x_0 \wedge x_\tau$ yer değiştirilerek her τ için $\theta \leq x_\tau \leq x_0$ olduğunu varsayabiliriz ve böylece $\{M\}_{x_0} = \bigcup\limits_{\tau} \{M\}_{x_\tau}$ bulunur. $\{M\}_x$ elemanlarından oluşan örgü bir Boole halkası olduğundan keyfi $\{M\}_{x_\tau}$ elemanının $\{M\}_{x_0}$ elemanına göre tümleyeni $\{M\}_{y_\tau}$ formundadır. $\{M\}_{x_0} = \bigcup\limits_{\tau} \{M\}_{x_\tau}$ olduğundan $\bigcap\limits_{\tau} \{M\}_{y_\tau}$ boş kümedir. Bir önceki teoremden, öyle sonlu tane $\tau_1, \ldots, \tau_n$ indis vardır ki $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{M\}_{y_{\tau_i}}$ boş kümedir, yani $\{M\}_{x_0} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{M\}_{x_{\tau_i}}$ bulunur. □

Teorem 2.4.9. *$\mathscr{P}$ örgüsü kabuk-çekirdek topolojisiyle birlikte T_0-uzayıdır, bu topolojinin taban elemanları $\{P\}_x$ kümeleri hem açık hem de kompakttır. Biri diğerini içermeyen $P_1, P_2 \in \mathscr{P}$ idealleri T_1-ayrılabilir, yani hem P_1 hemde P_2 elemanlarının diğerini içermeyen açık komşulukları vardır. Bu durum P_1 ve P_2 minimal asal ideal veya P_1 ve P_2 bir $x \in X$ elemanını içermemeye göre maksimal iken de geçerlidir.*

Kanıt. $P_1 \neq P_2$ olsun. O halde öyle $x_1 \in P_1$ vardır ki $x_1 \notin P_2$ veya $x_2 \in P_2$ vardır ki $x_2 \notin P_1$. İlk durumdan $\{P\}_{x_1}$, P_2 elemanının açık komşuluğudur ve P_1 elemanının içermez, ikinci durumda $\{P\}_{x_2}$, P_1 elemanının açık komşuluğudur ve P_2 elemanının içermez. Böylece $\mathscr{P}$ örgüsü kabuk-çekirdek topolojisiyle birlikte T_0-uzayıdır. Tanımdan her $\{P\}_x$ açıktır ve Teorem 2.4.6 gereğince $\{P\}_x$ kompakttır. P_1 ve P_2 birbirini içermeyen iki ideal olsun. O halde $x_1 \in P_1$ ve $x_2 \in P_2$ elemanları vardır ki $x_1 \notin P_2$ ve $x_2 \notin P_1$ sağlanır. Böylece $\{P\}_{x_2}$, P_1 elemanının P_2 elemanını içermeyen açık komşuluğudur, benzer şekilde $\{P\}_{x_2}$, P_1 elemanının P_2 elemanını içermeyen açık komşuluğudur. □

Bir topolojik uzaydaki kapalı bir küme ile bu kapalı kümeye ait olmayan bir eleman sınırlı sürekli reel değerli bir fonksiyon ile ayrılabilir, yani F kapalı bir küme ve $x \in X \setminus F$ ise öyle bir $f : X \to \mathbb{R}$ sınırlı sürekli fonksiyonu için $f(x_0) = 0$ ve her $y \in F$ için $f(y) = 1$, ise bu topolojik uzaya *tam düzenli* uzay denir.

Teorem 2.4.10. *$\mathscr{M}$ üzerindeki kabuk-çekirdek topolojisi Hasudorff topolojidir ve taban elemanları $\{M\}_x$ hem açık hem kapalı kümelerdir. Böylece bu topoloji tam düzenlidir.*

Kanıt. $\mathscr{M}$ üzerindeki kabuk-çekirdek topolojisine göre T_1-uzayıdır, çünkü $M_1 \neq M_2$ ise ne M_1 ne de M_2 bir diğerini içermez. Sonuç 2.4.3 (ii)'den her $x \in X$ için

$$h(k(\{M\}_x)) = \{M\}_x$$

olduğundan taban elemanları $\{M\}_x$ kapalıdır. Böyleyse M_1, M_2 elemanını içermeyen açık ve kapalı bir komşuluğa sahiptir. O halde bu komşuluğun tümleyeni M_2 elemanının açık kapalı bir komşuluğudur. Böylece bu topoloji Hausdorfftur. Bu topolojinin tam düzenli olduğunu göstermek için bir $M_0 \in \mathscr{M}$ ve $\mathscr{J} \subset \mathscr{M}$ kapalı ve $M_0 \notin \mathscr{J}$ alt kümesini alalım. O zaman $\mathscr{M} \setminus \mathscr{J}$ açık olduğundan M_0 elemanının $\{M\}_{x_0}$ $(x_0 \in X)$ formunda bir açık komşuluğunu içerir. Her $M \in \{M\}_{x_0}$ için $f(M) = 1$ ve diğer M elemanları için $f(M) = 1$ tanımlarsak $\{M\}_{x_0}$ hem açık hem kapalı olduğundan f fonksiyonu süreklidir. □

Bir topolojik uzayın taban elemanları hem açık hem kapalı kümelerden oluşuyorsa bu topolojik uzaya *tamamen bağlantısız* uzay denir. Bir önceki teoreme göre $\mathscr{M}$ tamamen bağlantısız topolojik uzaydır.

Teorem 2.4.11. *Tüm $\{M\}_x$ elemanlarının örgüsü bir Boole halkası ise $\mathscr{M}$ üzerindeki kabuk-çekirdek topolojisi Hausdorff topolojidir, taban elemanları $\{M\}_x$ hem kapalı hem açıktır hemde kompakttır. Böylece bu topoloji tamamen bağlantısız, yerel kompakt ve tam düzenlidir. $\mathscr{M}$ örgüsünün her açık kapalı ve öyle bir $x_0 \in X$ için $\{M\}_{x_0}$ içinde olan alt kümesi $y_0 \leq x_0$ olmak üzere $\{M\}_{y_0}$ formundadır.*

Kanıt. Teorem 2.4.8'den $\{M\}_x$ kümeleri kompakttır. Diğer iddia için $\mathscr{B} \subset \mathscr{M}$ açık kapalı ve öyle bir $x_0 \in X$ için $\mathscr{B} \subset \{M\}_{x_0}$ olacak şekilde $\mathscr{B}$ kümesi alalım. $\mathscr{B}$ kümesi $\{M\}_{x_0}$ kompakt kümesinin kapalı alt kümesi olduğundan kompakttır. Ayrıca $\mathscr{B}$ açık olduğundan $\mathscr{B} = \bigcup_{\tau \in \{\tau\}} \{M\}_{x_\tau}$ şeklinde yazılabilir ve burada her τ için $x_\tau \leq x_0$'dır. $\mathscr{B}$ kümesinin kompaktlığından öyle sonlu $\tau_1, \ldots, \tau_n$ indeksleri vardır ki $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \{M\}_{x_{\tau_i}}$. O halde $y_0 = \sup\{x_{\tau_1}, \ldots, x_{\tau_2}\}$ dersek $\mathscr{B} = \{M\}_{y_0}$ şeklindedir. □

Teorem 2.4.12. *$\mathscr{P}$ örgüsünün üzerindeki kabuk-çekirdek topolojisine göre kompakt olması için gerek yeter koşul X örgüsünün en büyük elemana sahip olmasıdır.*

Kanıt. $\mathscr{P}$ kompaktsa, $\mathscr{P} = \bigcup_{x\in X} \{P\}_x$ yazdığımızda bu örtülüşün sonlu bir alt örtülüşü vardır $\mathscr{P} = \bigcup_{i=1}^{n} \{P\}_{x_i}$ yazılabilir. $x_0 = \sup\{x_1, \ldots, x_n\}$ dersek $\mathscr{P} = \{P\}_{x_0}$ bulunur. Böylece her $x \in X$ için $\{P\}_x \subset \mathscr{P} = \{P\}_{x_0}$ olur, Teorem 2.3.4 gereği $x \leq x_0$ bulunur, bu ise x_0 elemanının X örgüsünün en büyük elemanı olduğunu söyler.

Tersine X örgüsü bir en büyük e elemanına sahipse her $x \in X$ için $x \leq e$ ve böylece $\{P\}_x \subset \{P\}_e$ bulunur. $\mathscr{P} = \bigcup_{x\in X} \{P\}_x = \{P\}_e$ ve her $\{P\}_x$ kompakt olduğundan (Teorem 2.4.9) $\mathscr{P}$ kompakt bulunur. □

Genellikle $\mathscr{P}$ kabuk-çekirdek topolojisine göre T_0-uzayıdır ama T_1-uzayı olması gerekmez. Bir sonraki teorem hangi koşullar altında $\mathscr{P}$ uzayının T_1 hatta T_2 olduğunu söyler.

Teorem 2.4.13. *Aşağıdakiler birbirine eşdeğerdir.*

(i) Her has asal ideal bir maksimal idealdir.

(ii) $\mathscr{P} = \mathscr{M}$.

(iii) $\mathscr{P}$ *üzerindeki kabuk-çekirdek topolojisine göre bir Hausdorff uzaydır.*

(iv) $\mathscr{P}$ *üzerindeki kabuk-çekirdek topolojisine göre bir* T_1*-uzayıdır.*

Kanıt. $(i) \Rightarrow (i)$ Her has asal ideal maksimal olsun ve P_1 ve P_2 has asal idealleri için $P_2 \subset P_1$ olsun. P_2 maksimal olduğundan $P_1 = P_2$. Bu ise bir has asal P_1 idealinin bir başka asal ideali kesin olarak içeremeyeceğini söyler, yani P_1 bir minimal asal idealdir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Teorem 2.4.10'dan istenilen elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Açıktır.

$(iv) \Rightarrow (i)$ $\mathscr{P}$ bir T_1-uzayı ve P_1 ve P_2 farklı iki has asal ideal olsun. O zaman $P_1 \subset P_2$ olması mümkün değildir. Eğer $P_1 \subset P_2$ olsaydı, $P_2 \in \{P\}_x$ sağlayan her $x \in X$ için $P_1 \in \{P\}_x$ bulunur, yani P_2 elemanının her komşuluğu P_1 elemanının da bir komşuluğudur. Bu ise kabulümüzle çelişir. Böylece ne P_1 ne de P_2 diğerini tarafından içerilmez. Bu ise her has asal idealin maksimal olduğunu gösterir. Çünkü bir has asal P_1 ideali maksimal olmasaydı öyle bir I has ideali tarafından içerilirdi. Teorem 2.3.2 gereğince I ideali bir has asal P_2 ideali tarafından içerilir, yani P_1 kesin olarak P_2 has asal idealinin içinde bulunur ki bu bir çelişkidir. □

$x, y \in X$ elemanları için $\{M\}_x = \{M\}_y$ veya denk olarak (Teorem 2.4.4) $\{x\}^{dd} = \{y\}^{dd}$ sağlanıyorsa x ve y elemanlarına $\mathscr{M}$-denk diyelim ve $x \equiv y\,(\mathscr{M})$ yazalım. Eğer $x \equiv \theta\,(\mathscr{M})$ ise $x = \theta$ ve $x_1 \equiv y_1\,(\mathscr{M})$, $x_2 \equiv y_2\,(\mathscr{M})$ ise $x_1 \vee x_2 \equiv y_1 \vee y_2\,(\mathscr{M})$ ve $x_1 \wedge x_2 \equiv y_1 \wedge y_2\,(\mathscr{M})$ sağlanır.

Bir $x_0 \in X$ elemanı verildiğinde $\theta \leq y \leq x_0$ sağlayan $y \in X$ elemanı için $y_1 \equiv y\,(\mathscr{M})$, $y_1 \wedge y_2 = \theta$ ve $y_1 \vee y_2 = x_0\,(\mathscr{M})$ sağlayacak şekilde $y_1, y_2 \in X$ elemanları bulunabiliyorsa x_0 elemanına $\mathscr{M}$-tümleme özelliğine sahiptir denir. Bir $x_0 \in X$ elemanının $\mathscr{M}$-tümleme özelliğine sahip olması için gerek yeter koşul $\{M\}_y \subset \{M\}_{x_0}$ sağlayan y elemanı için öyle bir $y_2 \in X$ vardır ki $\{M\}_{x_0} = \{M\}_y \cup \{M\}_{y_2}$ ve $\{M\}_y \cap \{M\}_{y_2} = \emptyset$ sağlanır. Diğer bir deyişle, bir $x_0 \in X$ elemanının $\mathscr{M}$-tümleme özelliğine sahip olması için gerek yeter koşul

$$\left\{\, \{M\}_y \,:\, \{M\}_y \subset \{M\}_{x_0} \,\right\}$$

başlangıç parçalarının bir Boole cebir olmasıdır.

Teorem 2.4.14. *Bir $\{M\}_{x_0}$ kümesinin $\mathscr{M}$ üzerindeki kabuk-çekirdek topolojisine göre kompakt olması için gerek yeter koşul x_0 elemanının $\mathscr{M}$-tümleme özelliğine sahip olmasıdır. Bu durumda, $\{M\}_{x_0}$ kümesinin hem açık hem kapalı olan alt kümeleri $\{M\}_x$ formundadır $(x \in X)$.*

Kanıt. İlk olarak x_0 elemanının $\mathscr{M}$-tümleme özelliğine sahip olduğunu varsayalım, yani başlangıç parçası

$$\left\{\, \{M\}_y \,:\, \{M\}_y \subset \{M\}_{x_0} \,\right\}$$

bir Boole cebiri olsun. $\{M\}_{x_0}$ kümesinin kompakt olduğunu göstermek için $\{M\}_{x_0} \subset \bigcup_\tau \{M\}_{x_\tau}$ iken $\{M\}_{x_0}$ kümesinin $\{M\}_{x_\tau}$ kümelerinin sonlu tanesiyle örtülebileceğini göstermeliyiz. Her x_τ ile $x_0 \wedge x_\tau$ yer değiştirerek genelliği bozmaksızın her τ için $\theta \leq x_\tau \leq x_0$ olduğunu varsayabiliriz ve böylece $\{M\}_{x_0} = \bigcup_\tau \{M\}_{x_\tau}$ elde edilir. x_0 elemanı $\mathscr{M}$-tümleme özelliğine sahip olduğundan herhangi bir $\{M\}_{x_\tau}$ kümesinin $\{M\}_{x_0}$ kümesine göre tümleyeni $\{M\}_{y_\tau}$ formundadır. Buradan $\bigcap_\tau \{M\}_{y_\tau} = \emptyset$ olduğunu söyleyebiliriz. Teorem 2.4.7 gereğince öyle sonlu $\tau_1, \ldots, \tau_n$ indisleri vardır ki $\bigcap_{i=1}^{n} \{M\}_{y_{\tau_i}} = \emptyset$ bulunur, yani $\{M\}_{x_0} = \bigcup_{i=1}^{n} \{M\}_{y_{\tau_i}}$. □

Sonuç 2.4.15. *Tüm $\{M\}_x$ kümelerinin $\mathscr{M}$ üzeindeki kabuk-çekirdek topolojisine göre kompakt olması için gerek yeter koşul bütün $\{M\}_x$ yapılarının kümesinin bir Boole halkası olmasıdır.*

Kanıt. Bir önceki teoremin ve Teorem 2.4.11'in sonucudur. □

Teorem 2.4.16. *Bir R Boole halkasında bir has idealin asal olması için gerek yeter koşul bu idealin bir maksimal olmasıdır.*

Kanıt. I bir has asal ideal olsun. $x, y \in R$ elemanlarının I idealinde olmadıklarını varsayalım. I asal ideal olduğundan $xy \notin I$ olur. Böyleyse $y-x \in I$ bulunur. Eğer $y-x \notin I$ olsaydı, $xy \notin I$ olduğundan $xy\,(y-x) \notin I$ bulunurdu, yani $xy-xy \notin I$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde, özetlersek, eğer x ve y elemanları I asal idealinin içinde değilse öyle bir $i \in I$ vardır ki $y = x + i$ şeklindedir. Şimdi I idealinin maksimal olmadığını varsayalım, yani I ideali bir başka J has ideali tarafından içerilsin. O zaman öyle $x \in J$, $x \notin I$ ve öyle $y \in R$, $y \notin J$ elemanları bulabiliriz. $x, y \notin I$ olduğundan öyle bir $i \in I$ için $y = x + i$ şeklinde yazabiliriz. Bu ise $y \in J$ olduğunu söyler. O halde I ideali maksimaldir.

Tersi için asal olmayan bir I ideali alalım, yani öyle $x, y \notin I$ için $xy \in I$ olsun. I ve x ile üretilen J idealini göz önüne alalım. J ideali $i \in I$, $a \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $i + ax + n \bullet x$ şeklindeki elemanlardan oluşur, burada $n \bullet x$ ile x elemanının n defa toplamını gösteriyoruz. O halde $I \subset J \subset R$ ve $I \neq J$ ($x \notin I$). Ayrıca $J \neq R$, çünkü $y \notin J$'dir. Eğer $y \in J$ olsaydı $y = i + ax + n \bullet x$ ve $ax + n \bullet x \notin I$ olurdu, böylece $xy = xi + ax + n \bullet x \notin I$ bulunurdu, çünkü $xi \in I$ ama $ax + n \bullet x \notin I$. Ama bu ise $xy \in I$ olmasıyla çelişir. O halde $I \neq J \neq R$ bulunur, bu ise I idealinin asal değilken maksimal olmadığını gösterir. □

Teorem 2.4.17. *$\mathscr{P}$ uzayının kabuk-çekirdek topolojisine göre Hausdorff olması için gerek yeter koşul X örgüsünün bir Boole halkası olmasıdır.*

Kanıt. İlk olarak $\mathscr{P}$ uzayının Hausdorff olduğunu varsayalım. O halde Teorem 2.4.13 kullanılarak $\mathscr{P} = \mathscr{M}$ bulunur. Böylece $\{P\}_x$ yapılarının oluşturduğu örgü ile $\{M\}_x$ yapılarının oluşturduğu örgü aynıdır ve Stone Gösteriliş Teoreminden bu örgü X örgüsüne örgü izometriktir. Öte yandan, Teorem 2.4.9'dan $\{M\}_x = \{P\}_x$ kümeleri $\mathscr{P} = \mathscr{M}$ üzerindeki kabuk-çekirdek topolojisine göre kompakttır, Sonuç

2.4.15'den $\{M\}_x$ yapılarının kümesi bir Boole halkasıdır. Böylece X örgüsü bir Boole halkası ile örgü izometriktir.
Tersine, eğer X bir Boole halkası ise Teorem 2.4.13 ve bir önceki teoremden $\mathscr{P}$ uzayının Hausdorff olduğunu söyleyebiliriz. $\square$

Sonuç 2.4.18. *$\mathscr{P}$ uzayının kabuk-çekirdek topolojisine göre kompakt Hausdorff olması için gerek yeter koşul X örgüsünün bir Boole cebiri olmasıdır.*

Kanıt. Teorem 2.4.12'den uzayının kabuk-çekirdek topolojisine göre kompakt olması için gerek yeter koşul X örgüsünün en büyük elemana sahip olmasıdır. Bir önceki teoreme göre $\mathscr{P}$ uzayının kabuk-çekirdek topolojisine göre Hausdorff olması için gerek yeter koşul X örgüsünün bir Boole halkası olmasıdır. O halde $\mathscr{P}$ uzayının kabuk-çekirdek topolojisine göre kompakt Hausdorff olması için gerek yeter koşul X örgüsünün bir Boole cebiri olmasıdır. $\square$

Bir topolojik uzayda açık kümelerin kapanışları da açık ise o topolojik uzaya *büsbütün bağlantısız* uzay denir.

Teorem 2.4.19. *Bir X Boole cebirinin Dedekind tam olması için gerek yeter koşul $\mathscr{P}$ uzayının kabuk-çekirdek topolojisine göre büsbütün bağlantısız olmasıdır.*

Kanıt. İlk olarak X Boole cebirinin Dedekind tam olduğunu varsayalım. $O \subset \mathscr{P}$ açık bir alt küme olsun. O halde $O = \bigcup_{\tau} \{P\}_{x_\tau}$ formundadır. X Dedekind tam olduğundan $x_0 = \sup x_\tau \in X$ vardır. $\{P\}_{x_0}$ kümesi hem açık hem kapalı olduğundan $\{P\}_{x_0} = \overline{O}$ olduğunu gösterirsek istenilen elde edilir. Her τ için $x_\tau \leq x_0$ ve burdan $\{P\}_{x_\tau} \subset \{P\}_{x_0}$ bulunur. Böylece $O \subset \{P\}_{x_0}$ ve

$$\overline{O} \subset \overline{\{P\}_{x_0}} = \{P\}_{x_0}.$$

$\overline{O}$ kümesinin kesin olarak $\{P\}_{x_0}$ tarafından içerildiğini varsayalım. O halde $\{P\}_{x_0} \setminus \overline{O}$ boştan farklı açık bir kümedir ve öyle bir $y \neq \theta$ için $\{P\}_y$ açık kümesini içerir. $\{P\}_{x_0} \setminus \{P\}_y$ kümesi ise z, y elemanının x_0 elemanına göre tümleyeni olmak üzere $\{P\}_z$ formundadır böylece $\{P\}_{x_0}$ kümesi $\{P\}_y$ ve $\{P\}_z$ kümelerinin ayrık birleşimi olarak yazılır ($\theta \neq z \leq x_0$). Ayrıca $\mathscr{P}$ içinde $\overline{O}$ ve $\{P\}_y$ kümeleri ayrık olduğundan $\overline{O} \subset \{P\}_z$ bulunur. Böylece her τ için $\{P\}_{x_\tau} \subset \{P\}_z$ olur ve Teorem 2.3.4 gereğince $x_\tau \leq z$ bulunur, bu ise $x_0 = \sup x_\tau \leq z$ olduğunu söyler.

Bu $z \leq x_0$, $z \neq x_0$ olmasıyla çelişir. O halde $\overline{O} = \{P\}_{x_0}$ bulunur. Böylece $\mathscr{P}$ uzayının büsbütün bağlantısız olduğunu göstermiş olduk.

Tersine $\mathscr{P}$ uzayının büsbütün bağlantısız olduğunu kabul edelim. X örgüsünün Dedekind tam olduğunu göstermek için $\{x_\tau, : \tau \in \{\tau\}\}$ alt kümesini alalım. $\sup x_\tau \in X$ var olduğunu göstermeliyiz. $O = \bigcup_\tau \{P\}_{x_\tau}$ dersek $\overline{O}$ hem kapalı hem açık olduğundan öyle bir $x_0 \in X$ vardır ki $\overline{O} = \{P\}_{x_0}$ biçimindedir. Buradan her τ için $\{P\}_{x_\tau} \subset \{P\}_{x_0}$ olur, Teorem 2.4.4 gereğince her τ için $x_\tau \leq x_0$ bulunur. Bu ise x_0 elemanının $\{x_\tau, : \tau \in \{\tau\}\}$ kümesi için bir üst sınır olduğunu gösterir. $y \in X$ bir başka üst sınır olsa $\{P\}_y \supset O$ ve

$$\{P\}_y = \overline{\{P\}_y} \supset \overline{O} = \{P\}_{x_0}$$

bulunur. O halde $y \geq x_0$. Bu ise $x_0 = \sup x_\tau$ olduğunu gösterir. Böylece X Dedekind tam bir uzaydır. $\square$

BÖLÜM 3

RIESZ UZAYLARI VE EVRENSEL TAMLANIŞ

Bu bölümde Riesz uzayları tanıtılacak ve bu çalışma içinde kullanılan özelliklerine değinilecektir. Ayrıca bu bölümde evrensel tam uzaylar ve bir Riesz uzayının evrensel tamlanışı ile ilgili detaylı bilgi verilecektir. Daha fazla bilgi için [11] ve [6] kaynakları kullanılabilir.

3.1 Riesz Uzayları

E bir vektör uzayı üzerinde bir $\geq$ kısmi sıralama bağıntısı var ve bu kısmi sıralama bağıntısı E uzayı üzerindeki cebirsel işlemlerle uyumlu, yani

1. $x \geq y$ iken her $z \in E$ için $x + z \geq y + z$,
2. $x \geq y$ iken her $\alpha \geq 0$ için $\alpha x \geq \alpha y$

sağlanıyorsa E uzayına *sıralı vektör uzayı* denir.

E sıralı vektör uzayında $x \geq 0$ sağlayan $x \in E$ elemanlarına *pozitif* eleman denir. E uzayındaki tüm pozitif vektörlerin kümesine E uzayının *pozitif konisi* denir ve E^+ ile gösterilir, yani $E^+ := \{x \in E : x \geq 0\}$.

E sıralı vektör uzayında her iki elemanlı alt kümenin supremumu ve infimumu varsa E uzayına *Riesz uzayı* veya *vektör örgüsü* denir. Genel olarak her $x, y \in E$ için supremum ve infimum

$$x \vee y := \sup\{x, y\} \qquad \text{ve} \qquad x \wedge y := \inf\{x, y\}$$

ile gösterilir. Riesz uzaylarının tipik örnekleri fonksiyon uzaylarıdır, örneğin $\mathbb{R}^\Omega$: Ω kümesinde tanımlı tüm reel-değerli fonksiyonların kümesi, fonksiyonlar üzerindeki noktasal sıralamaya göre Riesz uzayıdır. Ayrıca diğer klasik fonksiyonel analiz uzayları da Riesz uzayı yapısına sahiptir.

$x \in X$ olmak üzere

$$x^+ := x \vee 0, \quad x^- := (-x) \vee 0 \text{ ve } \quad |x| := x \vee (-x)$$

elemanları sırasıyla x elemanının pozitif kısmı, negatif kısmı ve mutlak değeri(veya modülü) olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.1 (Riesz Ayrışım Özelliği). *$x_1, \ldots, x_n$ ve $y_1, \ldots, y_m$ bir Riesz uzayının elemanları olsun. Eğer*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{m} y_j$$

ise Riesz uzayın öyle bir sonlu $\{z_{ij} : i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m\}$ alt kümesi vardır ki

$$\text{her } i = 1, \ldots, n \text{ için} \quad x_i = \sum_{j=1}^{m} z_{ij},$$

ve

$$\text{her } j = 1, \ldots, m \text{ için} \quad y_j = \sum_{i=1}^{n} z_{ij}$$

sağlanır.

Kanıt. [[6], Theorem 1.20]. □

Bir Riesz uzayında x ve y elemanları için $|x| \wedge |y| = 0$ oluyorsa bu iki elemana *ayrık* veya *dik* denir ve $x \perp y$ ile gösterilir. Bir E Riesz uzayının boştan farklı bir alt kümesinin *dik tümleyeni*

$$A^d := \{x \in E : x \perp y, \text{ her } y \in A\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir Riesz uzayından bir $\{x_\alpha\}$ ağı için her $\alpha \geq \beta$ iken $x_\alpha \leq x_\beta$ oluyorsa $\{x_\alpha\}$ ağına *azalan* denir ve $x_\alpha \downarrow$ ile gösterilir. Azalan bir $\{x_\alpha\}$ ağı için $\inf\{x_\alpha\} = x$ varsa $x_\alpha \downarrow x$ ile gösterilir. Benzer şekilde $x_\alpha \uparrow$ ve $x_\alpha \uparrow x$ tanımlanabilir.

Bir E Riesz uzayında her $x \in E^+$ için $\frac{1}{n}x \downarrow 0$ ise E uzayına *Arşimet özelliğine* sahiptir denir.

Teorem 3.1.2. (*Kantorovich*). *E ve F iki Riesz uzayı ve F Arşimet özelliğine sahip olsun. Bir* $T : E^+ \to F^+$ *tasvirinin toplamsal olduğunu, yani her* $x, y \in E^+$ *için* $T(x+y) = T(x) + T(y)$ *olduğunu kabul edelim. O zaman T tasvirinin tüm E uzayına bir genişlemesi vardır. Bu genişlemeyi tekrar T ile gösterirsek her* $x \in E$ *için genişleme*

$$T(x) = T\left(x^+\right) + T\left(x^-\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Kanıt. [6, Theorem 1.10]. □

Tanım 3.1.3. *X ve Y sıralı vektör uzayları olmak üzere bir* $T : X \to Y$ *operatörü her* $x \geq 0$ *için* $Tx \geq 0$ *sağlıyorsa T operatörüne pozitif denir ve* $T \geq 0$ *veya* $0 \leq T$ *ile gösterilir.*

Açıkça görüleceği gibi bir $T : X \to Y$ operatörünün pozitif olması için gerek yeter koşul $T(X^+) \subset Y^+$ olması veya denk olarak $x \leq y$ iken $Tx \leq Ty$ olmasıdır. X ve Y uzayları üzerindeki operatörlerin (reel) vektör uzayı $T - S$ operatörü pozitif iken $T \geq S$ yazarsak sıralı bir vektör uzayı olur.

Tanım 3.1.4. *X ve Y sıralı vektör uzayları olmak üzere bir* $T : X \to Y$ *operatörü iki pozitif operatörün farkı şeklinde yazılabiliyorsa T operatörüne regüler operatör denir. Bir T operatörün regüler olması* $T \leq S$ *sağlayan bir pozitif* $S : X \to Y$ *operatörünün olmasına denktir.*

Bu tez çalışmasında X sıralı vektör uzayından Y sıralı vektör uzayına giden regüler operatörlerin vektör uzayını (pozitif operatörler tarafından üretilen uzay ile aynı) $\mathcal{L}^r(X, Y)$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.5. *E ve F iki Riesz uzayı ve* $T : E \to F$ *bir operatör olmak üzere eğer*

$$|T| := T \vee (-T)$$

supremumu varsa bu supremuma T operatörünün modülü denir.

Bir Riesz uzayında boştan farklı üstten sınırlı her kümenin supremumu (denk olarak boştan farklı alttan sınırlı her kümenin infimumu) varsa uzaya *Dedekind* *tam* veya *sıra tam* denir. Bir Riesz uzayının Dedekind tam olması için gerek yeter koşul her $0 \leq x_\alpha \uparrow\leq x$ ağı için $\sup\{x_\alpha\}$ var olmasıdır. Benzer şekilde, bir Riesz uzayına içindeki her boştan farklı sayılabilir üstten sınırlı kümenin supremumu olması veya denk olarak her $0 \leq x_n \uparrow\leq x$ dizisi için $\sup\{x_n\}$ var olması durumunda *Dedekind σ-tam* denir.

Teorem 3.1.6. (*F.Riesz-Kantorovich*). *E ve F iki Riesz uzayı ve F Dedekind tam olsun. O halde $\mathcal{L}^r(E,F)$ Dedekind tam bir Riesz uzayıdır. Dahası, her $T, S \in \mathcal{L}^r(E,F)$, $x \in E^+$ için*

$$|T|(x) = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\},$$

$$[S \vee T](x) = \sup\left\{S(y) + T(z) : y, z \in E^+ \text{ ve } y + z = x\right\},$$

$$[S \wedge T](x) = \inf\left\{S(y) + T(z) : y, z \in E^+ \text{ ve } y + z = x\right\}$$

şeklinde verilir.

Kanıt. [6, Theorem 1.18]. □

Teorem 3.1.7. *E ve F iki Riesz uzayı, F Dedekind tam ve $T : E \to F$ pozitif bir operatör olmak üzere her $x \in X$ için*

$$T\left(x^+\right) = \max\{S(x) : S : E \to F,\ 0 \leq S \leq T\},$$

$$T\left(x^-\right) = \max\{-S(x) : S : E \to F,\ 0 \leq S \leq T\},$$

$$T(|x|) = \max\{S(x) : S : E \to F,\ -T \leq S \leq T\}.$$

Kanıt. [6, Theorem 1.23]. □

Bir E Riesz uzayının bir G alt vektör uzayı E üzerindeki örgü işlemleri altında kapalı ise G uzayına bir *Riesz alt uzayı* denir. Bir G Riesz alt uzayında her $0 < x \in E$ ($0 \leq x$ ve $x \notin 0$) için $0 < y \leq x$ sağlayacak $y \in G$ varsa G uzayına *sıra yoğun* denir.

Bir Riesz uzayının bir A alt kümesi $y \in A$ ve $|x| \leq |y|$ iken $x \in A$ özelliğine sahipse A kümesine *katı* denir. Bir Riesz uzayının katı bir vektör uzayına *ideal* denir.

Bir Riesz uzayında bir $\{x_\alpha\}$ ağı ve x elemanı için, her α için $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ sağlayacak şekilde bir başka aynı indeks kümesine sahip $\{y_\alpha\}$ ağı varsa $\{x_\alpha\}$ ağı x elemanına *sıra yakınsar* denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ile gösterilir. Bir Riesz uzayının bir A kümesinin sıra yakınsak her ağının limiti A kümesine ait ise A kümesine *sıra kapalı* denir.

Sıra kapalı idealler *bant* olarak adlandırılır. Bir E Riesz uzayı içindeki B bandı için $E = B \oplus B^d$ yazılabiliyorsa B bandına *projeksiyon bandı* denir. Bir Riesz uzayındaki her bant bir projeksiyon bandı ise Riesz uzayına *projeksiyon özelliğine* sahiptir denir.

Teorem 3.1.8. *Dedekind tam Riesz uzayları projeksiyon özelliğine sahiptir.*

Kanıt. [6, Theorem 1.4]. □

E Riesz uzayı ve B, E uzayı içinde projeksiyon bandı olsun. O halde $E = B \oplus B^d$ olur, yani her $x \in E$ için $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in B$ ve $x_2 \in B^d$ olacak şekilde tek türlü belirli bir parçalanış vardır. Buradaki parçalanışa göre bir $P_B : E \to E$

$$P_B(x) := x_1$$

projeksiyonu tanımlayabiliriz. P_B pozitif bir projeksiyondur. Bu formdaki projeksiyonlar sıra projeksiyon veya bant projeksiyon olarak adlandırılır.

E bir Riesz uzayı ve $A \subset E$ boştan farklı bir alt küme olsun. A tarafından üretilen ideal A kümesini içeren en küçük (içerme bağıntısına göre) idealdir ve bu ideal

$$E_A = \left\{ x \in E : \exists\, x_1, \ldots, x_n \in A \text{ ve } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ vardır ki } |x| \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i| \right\}$$

şeklindedir. Bir $x \in E$ elemanı tarafından üretilen ideali E_x ile gösterirsek

$$E_x = \{ y \in E : \exists\, \lambda > 0 \text{ vardır ki } |y| \leq \lambda |x| \}$$

bulunur. E_x formundaki idealler *esas ideal* olarak adlandırılır.

Benzer şekilde, bir A kümesi tarafından üretilen bant A kümesini içeren en küçük banttır. Bir $x \in E$ elemanı tarafından üretilen bant *esas bant* olarak adlandırılır ve B_x ile gösterilir. Bir $x \in E$ elemanı tarafından üretilen esas bant B_x projeksiyon bandı ise x elemanına *projeksiyon eleman* denir.

Teorem 3.1.9. *Bir E Riesz uzayının Dedekind tam olması için gerek yeter koşul her $0 \leq e \in E$ elemanı için E_e alt uzayının Dedekind tam olmasıdır.*

Kanıt. E Dedekind tam Riesz uzayı olsun. Bir $0 \leq e \in E$ ve üstten sınırlı $A \subset E_e$ kümesini alalım. A üstten sınırlı ise öyle bir $m \in E_e$ vardır ki her $a \in A$ için $a \leq m$ sağlanır. E Dedekind tam olduğundan E içinde $s = \sup_{a \in A} a$ supremumu vardır. Bu supremumun E_e uzayına ait olduğunu göstereceğiz. Bir $a \in A$ aldığımızda öyle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sayıları vardır ki $|a| \leq \lambda e$ ve $|m| \leq \mu e$ sağlanır. Ayrıca $a \leq s \leq m$ olduğundan $|s| \leq |a| \vee |m| \leq (\lambda e) \vee (\mu e) = \max\{\lambda, \mu\} e$ olur. O halde s, A kümesi için E_e içinde bir üst sınır olur. E_e içinde bir başka t üst sınırı alsak t, E içinde de bir üst sınır olur, s elemanı E içindeki en küçük üst sınır olduğundan $s \leq t$ bulunur. Bu ise E_e uzayının Dedekind tam olduğunu söyler.

Şimdi her $0 \leq e \in E$ için E_e uzayının Dedekind tam olduğunu kabul edelim. $A \subset E$ üstten $m \in E$ ile sınırlı olsun. Bir $a_0 \in A$ alalım ve $A' := \{a \wedge a_0 : a \in A\}$ kümesini tanımlayalım. Bir $b \in E$ elemanının A kümesi için bir üst sınır olması için gerek yeter koşul A' kümesi için bir üst sınır olmasıdır. O halde A' kümesinin üst sınırlarına bakmamız yeterlidir. A' kümesinin bütün elemanları a_0 ile m arasındadır. Buradan her $a \in A'$ için $|a| \leq |a_0| \vee |m|$ bulunur, yani $A' \subset E_{|a_0| \vee |m|}$ ve A' kümesi $E_{|a_0| \vee |m|}$ içinde üstten m ile sınırlıdır. Kabulümüzden A' kümesi $E_{|a_0| \vee |m|}$ içinde supremuma sahiptir, bu supremuma s diyelim. Bu s elemanı A' kümesinin E içinde de bir üst sınırıdır. Öte yandan E içinde A' kümesinin bir başka t üst sınırını alsak, $t \wedge m \in E_{|a_0| \vee |m|}$ elemanı da bir üst sınır olur, o halde $s \leq t \wedge m \leq t$ olacağından s elemanı E içindeki supremumdur. □

E bir Riesz uzayı olmak üzere bir $e > 0$ elemanı tarafından üretilen B_e bandı bütün uzaya eşitse, $B_e = E$, e elemanına *zayıf sıra birim* denir. Benzer şekilde bir E Riesz uzayında bir $e > 0$ elemanı tarafından üretilen ideal E_e bütün uzaya eşit ise, $E_e = E$, e elemanına *kuvvetli sıra birim* ya da sadece *sıra birim* denir.

L bir Riesz uzayı ve $\mathscr{B}(L)$, L Riesz uzayı üzerindeki bütün bantların topluluğu olsun. $\mathscr{B}(L)$ kümesi içerme bağıntısına göre kısmi sıralıdır.

Teorem 3.1.10. *Bir L Riesz uzayının tüm bantlarından oluşan $\mathscr{B}(L)$ topluluğu içerme bağıntısına göre sıra tam bir Boole cebirdir.*

Kanıt. [2, Theorem 22.7]. □

3.2 $C^{\infty}(X)$-uzayları

$\mathbb{R}^{\infty}$ ile $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin iki nokta kompaktlaştırmasını gösterelim. Bu kısmı biraz daha açarsak, $\mathbb{R}^{\infty}$ kümesinin elemanları bütün reel sayılar ve $+\infty$, $-\infty$ noktalarıdır, $\mathbb{R}$ üzerindeki toplama ve çarpma işlemini alışılmış biçimde genişletebiliriz ve 0 ile eklediğimiz noktaların çarpımı $0.(\pm\infty) = (\pm\infty).0 = 0$ şeklindedir. Dahası, $\mathbb{R}$ üzerindeki lineer sıralamayı $\mathbb{R}^{\infty}$ üzerine her $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-\infty < \alpha < +\infty$ alarak genişletebiliriz. Ayrıca $\mathbb{R}^{\infty}$ üzerindeki topoloji için

$$(\alpha : -\infty < a < \alpha < b < +\infty)$$

sınırlı açık aralıklar ile

$$(\alpha : -\infty \leq \alpha < b < +\infty) \quad \text{ve} \quad (\alpha : -\infty < a < \alpha \leq +\infty)$$

aralıkları bir tabandır. $\mathbb{R}^{\infty}$ uzayı genellikle genişletilmiş reel sayılar sistemi olarak adlandırılır.

X bir topolojik uzay olmak üzere $f : X \to \mathbb{R}^{\infty}$ sürekli fonksiyonu için $R(f) = \{x : |f(x)| < +\infty\}$ kümesi X içinde yoğun ise f fonksiyonuna X üzerinde *genişletilmiş sürekli fonksiyon* denir. X üzerinde tanımlı tüm genişletilmiş sürekli fonksiyonların kümesini $C^{\infty}(X)$ ile gösterelim. $f, g \in C^{\infty}(X)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ alındığında $\inf(f,g)$, $\sup(f,g)$ ve αf fonksiyonları her $x \in X$ için

$$(\inf(f,g))(x) = \inf\{f(x), g(x)\},$$

$$(\sup(f,g))(x) = \sup\{f(x), g(x)\},$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

şeklinde tanımlanırlar ve yine genişletilmiş sürekli fonksiyonlardır. Keyfi $f \in C^{\infty}(X)$ için $R(f) = \{x : |f(x)| < +\infty\}$ kümesi açık ve yoğundur. Eğer $f, g, h \in C^{\infty}(X)$ ve her $x \in R(f) \cap R(g)$ için $h(x) = f(x) + g(x)$ sağlanıyorsa h fonksiyonuna f ve g fonksiyonlarının toplamı denir. $R(f) \cap R(g)$ yoğun olduğundan $h = f + g$ toplamı varsa tek türlü belirlidir. $f + g$ toplamı her $f, g \in C^{\infty}(X)$ için var olmayabilir, mesela X uzayı olarak $[0, +\infty)$ kümesinin tek nokta kompaktlaştırması $\{x : 0 \leq x \leq +\infty\}$ kompakt uzayını alalım. Her $x \in X$ için $f(x) = x$

ve $g(x) = -x$ alırsak, $f, g \in C^{\infty}(X)$ bulunur ama $f+g$ fonksiyonunu $x = +\infty$ noktasından tanımlamak mümkün değildir. Bu örnek $C^{\infty}(X)$ yapısının bir vektör uzayı olmayabileceğini gösterir, çünkü $C^{\infty}(X)$ toplama işlemi altında kapalı olmak zorunda değildir. Eğer X uzayı büsbütün bağlantısız topolojik uzay ise $C^{\infty}(X)$ yapısının uygun tanımlar altında bir vektör uzayı, böylece bir Riesz uzayı olduğunu göstereceğiz.

Teorem 3.2.1. *X büsbütün bağlantısız topolojik uzay ve f fonksiyonu $O \subset X$ açık kümesi üzerinde sonlu reel değerler alan sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman f fonksiyonu $\overline{O}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş sürekli bir $\overline{f}$ fonksiyonuna tek türlü belirli bir şekilde genişletilebilir. Dahası, her $x \in X \setminus \overline{O}$ için $\overline{f}(x) = 0$ dersek $\overline{f}$ fonksiyonu tüm X uzayına genişletilmiş olur.*

Kanıt. Her $t \in \mathbb{R}$ için

$$F_t := \{x \in O : f(x) < t\}.$$

$F_t \subset O$ tanımlayalım. Her $t \in \mathbb{R}$ için F_t kümesi açıktır ve $\overline{F_t}$ kümesi hem açık hem kapalıdır. Ayrıca $t_1 \leq t_2$ ise $\overline{F}_{t_1} \subset \overline{F}_{t_2}$ ve böylece

$$O \subset \bigcup_t \overline{F}_t \subset \overline{O}$$

Her $x \in \bigcup_t \overline{F}_t$ için $\overline{f}(x) = \inf\left\{t : x \in \overline{F}_t\right\}$ ve her $x \in \overline{O} \setminus \bigcup_t \overline{F}_t$ için $\overline{f}(x) = +\infty$ tanımlayalım. $\overline{f}$ fonksiyonunun f fonksiyonunun istenilen genişlemesi olduğunu göstereceğiz. İlk olarak her $x \in O$ için $\overline{f}(x) = f(x)$ olduğunu gösterelim. Eğer $f(x) < t$ ise $x \in F_t$, dolayısıyla $x \in \overline{F}_t$ olur ve böylece $\overline{f}(x) \leq t$ bulunur. O halde her $f(x) < t$ sağlayan t için sağlanır ve $\overline{f}(x) \leq f(x)$ bulunur. Öte yandan bir t reel sayısı için $\{x : f(x) > t\}$ kümesi ile F_t kümesinin kesişimi boştur. Ayrıca rutin bir argüman, A ve B açık kesişimleri boş ve $\overline{A}$ ve $\overline{B}$ açık kümeler ise $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, ile

$$\overline{\{x : f(x) > t\}} \cap \overline{F}_t$$

kesişiminin boş olduğunu söyleyebiliriz. $f(x) > t$ sağlayan bir $x \in O$ elemanı $x \notin \overline{F}_t$ olur. Böylece bu noktada $\overline{f}(x) > t$ bulunur. Bu ise her $x \in O$ için $\overline{f}(x) \geq f(x)$ olduğunu söyler. Böylece her $x \in O$ için $\overline{f}(x) = f(x)$ olduğunu gösterdik, o halde $\overline{f}$ fonksiyonu f fonksiyonunun bir genişlemesidir.

$\overline{f}$ fonksiyonunun $\overline{O}$ kümesi üzerinde sürekli olduğunu göstermek için her $t \in (-\infty, +\infty]$ için $\{x : \overline{f}(x) < t\}$ kümesinin açık ve her $t \in [-\infty, \infty)$ için $\{x : \overline{f}(x) \leq t\}$ kümesinin kapalı olduğunu göstermeliyiz. Öte yandan

$$\{x : \overline{f}(x) < t\} = \bigcup \{\overline{F}_s : s < t\},$$

$$\{x : \overline{f}(x) \leq t\} = \bigcap \{\overline{F}_s : s > t\}$$

eşitlikleri olduğundan istenilen sağlanır. □

Bu teorem özellikle X uzayının açık yoğun bir alt kümesi üzerinde tanımlı sonlu değerler alan sürekli f fonksiyonunun tek türlü şekilde bir $\overline{f} \in C^{\infty}(X)$ fonksiyonuna genişletilebileceğini söyler. Bir sonraki teoremde bu genişleme kullanılacaktır.

Teorem 3.2.2. *X büsbütün bağlantısız topolojik uzay ise $C^{\infty}(X)$ bir Riesz uzayıdır.*

Kanıt. $f_1, f_2 \in C^{\infty}(X)$ alalım ve O_1 ve O_2 ile sırasıyla f_1 ve f_2 fonksiyonlarının sonlu değer aldığı açık yoğun kümeleri gösterelim. O zaman $O_1 \cap O_2$ kümesi de açık ve yoğundur ve her $x \in O_1 \cap O_2$ için $f_1(x) + f_2(x)$ değerine eşit olan fonksiyon $O_1 \cap O_2$ üzerinde sonlu değerli ve süreklidir. Dolayısıyla bu fonksiyon tek türlü bir şekilde X üzerinde tanımlı bir genelleştirilmiş fonksiyona genişletilir. Tanım olarak bu fonksiyon $f_1 + f_2$ fonksiyonudur. Benzer şekilde, $f \in C^{\infty}(X)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $x \in X$ için $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ ve $\alpha f \in C^{\infty}(X)$. Benzer şekilde $f, g \in C^{\infty}(X)$ olmak üzere $\sup(f, g)$ ve $\inf(f, g)$ tanımlanır. □

Tanım 3.2.3. *Bir L Riesz uzayında her $(u_\tau \in L^+ : \tau \in \{\tau\})$ elemanları ikişer ikişer dik olan kümenin supremumu varsa L uzayına yanal-tam denir.*

Dedekind tam olma ve yanal-tam olma birbirinden bağımsızdır. Eğer L uzayı olarak $[0, 1]$ aralığında tanımlı reel değerli ve $\{x : f(x) \neq 0\}$ kümesi en fazla sayılabilir olan fonksiyonların uzayını alırsak L Dedekind tamdır ama yanal-tam değildir. Öte yandan L uzayı olarak $C[0, 1]$ alınırsa L yanal-tam ama Dedekind tam değildir.

Tanım 3.2.4. *Bir L Riesz uzayı hem Dedekind tam hem yanal-tam ise bu uzaya evrensel tamdır denir.*

Şimdi $C(X)$ uzaylarının ne zaman Dedekind tam olduğunu inceleyeceğiz. Bunun için bileşen kavramını kullanacağız:

E bir Riesz uzayı ve $e \in E^+$ olmak üzere bir $x \in E^+$ vektörü $x \wedge (e-x) = 0$ koşulunu sağlıyorsa e vektörünün bileşeni denir. Bir $e \in E^+$ elemanının bütün bileşenlerinin kümesini $\mathfrak{C}(e)$ ile gösterelim, yani

$$\mathfrak{C}(e) = \left\{x \in E^+ : x \wedge (e-x) = 0\right\}.$$

E üzerindeki sıralamayı $\mathfrak{C}(e)$ üzerinde indirdiğimizde $\mathfrak{C}(e)$ bir Boole cebir olur.

Teorem 3.2.5. *X kompakt Hausdorff topolojik uzay olsun. Aşağıdakiler birbirine eşdeğerdir.*
(i) X büsbütün bağlantısız uzaydır.
(ii) $C(X)$ Dedekind tamdır.
(iii) $C(X)$ içindeki her sınırlı ayrık elemanlardan oluşan aile $C(X)$ içinde bir supremuma sahiptir.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ X uzayının büsbütün bağlantısız olduğunu kabul edelim ve boştan farklı bir $\mathscr{F} \subset C(X)^+$ alalım. $\inf \mathscr{F} \in C(X)$ var olduğunu gösterelim. Her $r > 0$ sayısı için

$$V_r := \{x \in X : \exists f \in \mathscr{F} \text{ için } f(x) < r\}.$$

açık kümelerini tanımlayalım. $0 < r_1 < r_2$ iken $V_{r_1} \subset V_{r_2}$ ve böylece $\overline{V}_{r_1} \subset \overline{V}_{r_2}$ olduğunu görmek kolaydır. X büsbütün bağlantısız topolojik uzay olduğundan $\overline{V_r}$ kümeleri de açıktır ve $X = \bigcup\limits_{r>0} \overline{V_r}$. Şimdi bir $g : X \to [0, \infty)$

$$g(x) = \inf\left\{r : x \in \overline{V_r}\right\}$$

fonksiyonu tanımlayalım. $g \in C(X)$ ve $g = \inf \mathscr{F}$ olduğunu göstereceğiz.

g fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermek için, her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$U_\alpha = \{x : g(x) < \alpha\} \quad \text{ve} \quad W_\alpha = \{x : g(x) \leq \alpha\}.$$

kümelerini oluşturalım. Kolayca görüleceği gibi her $\alpha \geq 0$ için $U_\alpha = \bigcup\limits_{0<r<\alpha} \overline{V_r}$, her $\alpha \leq 0$ için $U_\alpha = \emptyset$, her $\alpha \geq 0$ için $W_\alpha = \bigcap\limits_{r>\alpha} \overline{V_r}$ ve her $\alpha < 0$ için $W_\alpha = \emptyset$. Buradan U_α kümelerinin açık, W_α kümelerinin kapalı olduğu görülür. Bir (a, b) açık aralığı alırsak $g^{-1}((a,b)) = U_b \setminus W_a$ bir açık kümedir. Bu ise g fonksiyonunun sürekli olduğunu söyler, yani $g \in C(X)$.

g fonksiyonun $\mathscr{F}$ kümesi için bir alt sınır olduğunu görelim. Bir $f \in \mathscr{F}$ alalım ve her $x \in X$ ve keyfi $\epsilon > 0$ için $f(x) < f(x) + \epsilon$ olur ve böylece $g(x) < f(x) + \epsilon$ bulunur. O halde g fonksiyonu $\mathscr{F}$ kümesi için bir alt sınırdır.

$C(X)$ içinde $g = \inf \mathscr{F}$ olduğunu gösterelim. Her $f \in \mathscr{F}$ için $h \leq f$ sağlayan bir başka $h \in C(X)$ fonksiyonu alalım. $0 < s < r$ olsun. Her $x \in V_s$ için öyle bir $f \in \mathscr{F}$ vardır ki $h(x) \leq f(x) < s$ sağlanır ve böylece $h(x) < s$ olur. h sürekli bir fonksiyon olduğundan her $x \in \overline{V_s}$ için $h(x) \leq s$ olur. Böyleyse $\overline{V_s} \subset \{x \in X : h(x) < r\}$ bulunur. O halde

$$U_r = \{x \in X : g(x) < r\} = \bigcup_{0<s<r} \overline{V_s} \subset \{x \in X : h(x) < r\}.$$

Her $\epsilon > 0$ için $g(x) < g(x) + \epsilon$, o halde $h(x) < g(x) + \epsilon$ ve böylece her $x \in X$ için $h(x) \leq g(x)$ olur. Bu ise $g = \inf \mathscr{F}$ olduğunu söyler.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Açıktır.

$(iii) \Rightarrow (i)$ $C(X)$ içindeki her sınırlı ayrık elemanlardan oluşan ailenin $C(X)$ içinde supremuma sahip olduğunu varsayalım. X uzayındaki açık kapalı alt kümelerin Boole cebiri ile $\mathbf{1}$, 1 sabit fonksiyonu olmak üzere $\mathfrak{C}(\mathbf{1})$ Boole cebiri örgü izometriktir. Böylece X uzayındaki açık kapalı alt kümelerin oluşturduğu Boole cebirinin Stone uzayı X uzayıdır ve Sonuç 2.2.4 ve Teorem 2.4.19'dan istenilen elde edilir, yani X büsbütün bağlantısızdır. □

Teorem 3.2.6. *X büsbütün bağlantısız bir uzay olmak üzere $C^\infty(X)$ Riesz uzayı Dedekind tam ve yanal-tamdır.*

Kanıt. İlk $C^\infty(X)$ uzayının Dedekind tam olduğunu gösterelim. $(u_\tau : \tau \in \{\tau\}) \subset C^\infty(X)$ ve her τ için $0 \leq u_\tau \leq u_0$ olucak şekilde $u_0 \in C^\infty(X)$ fonksiyonu var olsun. O_0 kümesi ile u_0 fonksiyonunun sonlu olduğu açık yoğun kümeyi gösterelim. O halde her τ için u_τ fonksiyonu O_0 kümesi üzerinde sürekli ve sonlu, böylece her τ için $u_\tau \in C(O_0)$ ve $u_0 \in C(O_0)$. O_0 büsbütün bağlantısız topolojik uzay olduğundan, bir önceki teoremden $C(O_0)$ Dedekind tamdır. O zaman öyle bir $u \in C(O_0)$ vardır ki $C(O_0)$ içinde $u = \sup u_\tau$ sağlanır. $u \in C(O_0)$ yani u fonksiyonu O_0 açık yoğun kümesi üzerinde sonlu değerler aldığından u fonksiyonunun tüm

X üzerinde tanımlı bir genişletilmiş sürekli fonksiyon $\overline{u}$ genişlemesi vardır. O_0 üzerinde $u_\tau \leq u$ olduğundan ve süreklilik gereğince her $x \in X$ için $u_\tau \leq \overline{u}$ olur. O halde $\overline{u}$, $(u_\tau : \tau \in \{\tau\})$ kümesi için $C^\infty(X)$ içinde bir üst sınırdır. Bir başka v üst sınırı alsak, yani her $x \in X$ için $u_\tau(x) \leq v(x)$ olsa, $x \in O_0 \subset X$ için de $u_\tau(x) \leq v(x)$ olur ve dolayısıyla O_0 üzerinde $\overline{u} \leq v$ sağlanır. Süreklilikten X üzerinde de $\overline{u} \leq v$ bulunur. Bu ise $C^\infty(X)$ uzayının içinde $\overline{u} = \sup u_\tau$ olduğunu söyler, yani $C^\infty(X)$ Dedekind tamdır.

$C^\infty(X)$ uzayının yanal-tam olduğunu göstermek için $(u_\tau : \tau \in \{\tau\}) \subset C^\infty(X)^+$ ikişer ikişer ayrık elemanlardan oluşan bir küme alalım. Her τ için O_τ, u_τ fonksiyonunun sonlu değerler aldığı açık yoğun küme olsun. O zaman O_τ kümeleri ikişer ikişer ayrıktır ve

$$O = \left(\bigcup_\tau O_\tau\right) \cup \left(X \setminus \overline{\bigcup_\tau O_\tau}\right)$$

dersek O kümesi açık ve yoğundur. O kümesi üzerinde bir u fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım; her τ için $x \in O_\tau$ ise $u(x) = u_\tau(x)$ ve her $x \in X \setminus \overline{\bigcup_\tau O_\tau}$ için $u(x) = 0$. O halde u fonksiyonu O üzerinde sürekli ve sonlu değerler alan bir fonksiyon ve her $x \in O$ için $u_\tau(x) \leq u(x)$ sağlanır. u fonksiyonunun tüm X uzayına genişlemesi $\overline{u} \in C^\infty(X)$ fonksiyonu için kolayca görüleceği gibi $C^\infty(X)$ içinde $\overline{u} = \sup u_\tau$ olur ve böylece $C^\infty(X)$ uzayının yanal-tam olduğunu söyleyebiliriz.

□

3.3 Evrensel Tamlanış

Bu bölümde bir Riesz uzayının evrensel tamlanışının nasıl oluşturulduğunu ve hangi formda olduğunu araştıracağız.

L bir Riesz uzayı olsun. $\mathscr{B}(L)$ ile L uzayı üzerindeki bantların oluşturduğu Boole cebirini, $\mathscr{B}(L)$ üzerindeki asal idealleri w ile, $\mathscr{B}(L)$ Boole cebirinin Stone gösterilişini Ω ve $f \in L$ elemanı tarafından üretilen bantı $[f]$ ile gösterelim. Ω üzerindeki kabuk-çekirdek topolojisinin taban elemanları

$$U_B = \{w : B \notin w\}$$

şeklindedir.

Tanım 3.3.1. *$e \in L^+$ sıfırdan farklı sabit bir eleman olsun. Her $f \in L$ ve her $w \in \Omega$ için*

$$f^\wedge(w) = f^\wedge(w; e) = \sup\left\{\alpha : \left[(\alpha e - f)^+\right] \in w\right\}$$

genişletilmiş reel sayısını tanımlayalım. Eğer hiç bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\left[(\alpha e - f)^+\right] \in w$ sağlanmıyorsa $f^\wedge(w) = -\infty$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\left[(\alpha e - f)^+\right] \in w$ sağlanıyorsa $f^\wedge(w) = +\infty$ diyelim.

Yukarıdaki tanım ile ilgili olarak, eğer bir α için $\left[(\alpha e - f)^+\right] \in w$ sağlanıyorsa her $\beta < \alpha$ için $\left[(\beta e - f)^+\right] \in w$ sağlanır, böylece yukarıdaki tanım iyi tanımlıdır. Bir diğer gözlenmesi gereken nokta ise $[f], [g] \in w$ ise $[f+g] \in w$ olmasıdır. Gerçekten, w bir ideal ve $[f], [g] \in w$ olduğundan $\sup([f], [g]) \in w$ olur, buradan $[|f| + |g|] \in w$ bulunur. Böylece $[f+g] = [|f+g|] \in w$ elde edilir. Ayrıca, $[f] = [|f|] \in w$ ise $[f^+], [f^-] \in w$, böylece $[\alpha e - f] \in w$ olması için gerek yeter koşul $\left[(\alpha e - f)^+\right] \in w$ ve $\left[(\alpha e - f)^-\right] \in w$ olmasıdır. w bir asal ideal ve $\mathscr{B}(L)$ içinde

$$\left[(\alpha e - f)^+\right] \perp \left[(\alpha e - f)^-\right]$$

olduklarından $\left[(\alpha e - f)^+\right]$ ve $\left[(\alpha e - f)^-\right]$ bantlarından en az biri w asal idealine aittir. Eğer $[\alpha e - f] \in w$ birden fazla α için sağlanıyorsa gözlemlediğimiz sonuçlardan $[e] \in w$ bulunur. Eğer $[e]$ bandı w asal idealine ait değilse tek bir α_0 genelleştirilmiş reel sayısı için

$$\alpha_0 = \sup\left\{\alpha : \left[(\alpha e - f)^+\right] \in w\right\} = \inf\left\{\alpha : \left[(\alpha e - f)^-\right] \in w\right\}$$

sağlanır ve her $\alpha < \alpha_0$ için $\left[(\alpha e - f)^+\right] \in w$ ve her $\alpha > \alpha_0$ için $\left[(\alpha e - f)^+\right] \notin w$, ayrıca her $\alpha > \alpha_0$ için $\left[(\alpha e - f)^-\right] \in w$ ve her $\alpha < \alpha_0$ için $\left[(\alpha e - f)^-\right] \notin w$.

Teorem 3.3.2. *$e \in L^+$ sıfırdan farklı sabit bir eleman ve $w \in \Omega$ için $[e] \notin w$ olsun.*

(i) $[f] \in w$ sağlayan her $f \in L$ için $f^\wedge(w) = 0$.

(ii) $e^\wedge(w) = 1$.

(iii) Her $f \in L$ ve her $\beta \in \mathbb{R}$ için $(\beta f)^\wedge(w) = \beta f^\wedge(w)$.

(iv) Her $f, g \in L$ için $f^\wedge(w) + g^\wedge(w)$ iyi tanımlıysa (yani $f^\wedge(w)$ ve $g^\wedge(w)$ biri

$+\infty$ *ve diğeri* $-\infty$ *durumu olmasın)* $(f+g)^{\wedge}(w) = f^{\wedge}(w) + g^{\wedge}(w)$.
(v) $h = \inf(f,g)$ *ise* $h^{\wedge}(w) = \inf(f^{\wedge}(w), g^{\wedge}(w))$. *Benzer durum* $\sup(f,g)$ *için de geçerlidir. Özellikle*

$$(f^{+})^{\wedge}(w) = \sup(f^{\wedge}(w), 0),$$

$$(f^{-})^{\wedge}(w) = -\inf(f^{\wedge}(w), 0),$$

$$|f|^{\wedge}(w) = |f^{\wedge}(w)|.$$

Kanıt. (i) $[f] \in w$ olsun. $\alpha < 0$ için

$$\left[(\alpha e - f)^{+}\right] \subset \left[(-f)^{+}\right] = [f^{-}] \in w$$

olduğundan $f^{\wedge}(w) \geq 0$ bulunur. $\alpha > 0$ için $\alpha e \leq f + (\alpha e - f)^{+}$ olduğundan eğer $\left[(\alpha e - f)^{+}\right] \in w$ ise $[\alpha e] \in w$ olacağından her $\alpha > 0$ için $\left[(\alpha e - f)^{+}\right] \notin w$ bulunur. O halde $f^{\wedge}(w) = 0$.
(ii) Açıktır.
(iii) Eğer $g = 0$ ise $g^{\wedge}(w) = 0$ olduğundan $\beta = 0$ ve keyfi f için eşitlik sağlanır. $0 < \beta < +\infty$ alalım. O halde

$$\left(\alpha : \left[(\alpha e - f)^{+}\right] \in w\right) = \left(\alpha : \left[(\alpha\beta e - \beta f)^{+}\right] \in w\right) = \left(\gamma/\beta : \left[(\gamma e - \beta f)^{+}\right] \in w\right)$$

olduğundan bu eşitlikte supremum alırsak $f^{\wedge}(w) = \beta^{-1}(\beta f)^{\wedge}(w)$ ve böylece

$$\beta f^{\wedge}(w) = (\beta f)^{\wedge}(w)$$

elde ederiz. İspatı tamamlamak için $\beta = -1$ durumunu göz önüne almak yeterlidir.

$$\begin{aligned}(-f)^{\wedge}(w) &= \sup\left(\alpha : \left[(\alpha e + f)^{+}\right] \in w\right) = \sup\left(\alpha : \left[(-\alpha e - f)^{-}\right] \in w\right) \\ &= \sup\left(-\gamma : \left[(\gamma e - f)^{-}\right] \in w\right) = -\inf\left(\gamma : \left[(\gamma e - f)^{-}\right] \in w\right) \qquad (3.1) \\ &= -f^{\wedge}(w)\end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır.
(iv) $f, g \in L$ için $f^{\wedge}(w) + g^{\wedge}(w)$ iyi tanımlı olsun. Öncelikle

$$f^{\wedge}(w) + g^{\wedge}(w) \leq (f+g)^{\wedge}(w)$$

sağlandığını gösterelim. Eğer $f^{\wedge}(w)+g^{\wedge}(w)=-\infty$ ise eşitsizlik doğrudur. Şimdi $f^{\wedge}(w)>-\infty$ ve $g^{\wedge}(w)>-\infty$ olduğunu kabul edelim. O halde öyle bir $\alpha\in\mathbb{R}$ için $\alpha<f^{\wedge}(w)+g^{\wedge}(w)$ sağlanır. α sayısını $\alpha_1<f^{\wedge}(w)$ ve $\alpha_2<g^{\wedge}(w)$ ve $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ olacak şekilde yazalım. O halde $\left[(\alpha_1 e-f)^+\right]\in w$ ve $\left[(\alpha_2 e-g)^+\right]\in w$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left[\{\alpha e-(f+g)\}^+\right] &= \left[\{(\alpha_1 e-f)+(\alpha_2 e-g)\}^+\right]\subset\left[(\alpha_1 e-f)^+ +(\alpha_2 e-g)^+\right]\\ &=\sup\left(\left[(\alpha_1 e-f)^+\right],\left[(\alpha_2 e-g)^+\right]\right)\end{aligned}$$

bulunur ki bu ise $\alpha<f^{\wedge}(w)+g^{\wedge}(w)$ iken $\alpha\le(f+g)^{\wedge}(w)$ olduğunu söyler. Böylece istenen eşitsizlik sağlanır. Bu sonucu $-f$ ve $-g$ elemanlarına uygularsak ters eşitsizliği de elde ederiz ve böylece

$$f^{\wedge}(w)+g^{\wedge}(w)=(f+g)^{\wedge}(w)$$

bulunur.

(v) $f,g\in L$ olmak üzere $h=\inf(f,g)$ olsun. Tanımdan açıkça görüleceği gibi $h^{\wedge}(w)\le f^{\wedge}(w)$ ve $h^{\wedge}(w)\le g^{\wedge}(w)$ böylece $h^{\wedge}(w)\le\inf(f^{\wedge}(w),g^{\wedge}(w))$ bulunur. Eğer infimum $-\infty$ ise ispat biter. O halde $\inf(f^{\wedge}(w),g^{\wedge}(w))>-\infty$ olduğunu kabul edebiliriz. $h^{\wedge}(w)\ge\inf(f^{\wedge}(w),g^{\wedge}(w))$ olduğunu göstermek için, ilk olarak

$$\begin{aligned}(\alpha e-h)^+ &= \{\alpha e-inf(f,g)\}^+=\{\alpha e+\sup(-f,-g)\}^+\\ &=\{\sup(\alpha e-f,\alpha e-g)\}^+=\sup\left\{(\alpha e-f)^+,(\alpha e-g)^+\right\}\end{aligned}$$

olduğunu gözlemleyelim. $\alpha<\inf(f^{\wedge}(w),g^{\wedge}(w))$ sağlayan α için $\left[(\alpha e-f)^+\right]$ ve $\left[(\alpha e-g)^+\right]$ bantları w idealinin elemanlarıdır, böylece üstteki eşitlik $\left[(\alpha e-h)^+\right]$ bantının da w idealine ait olduğunu söyler, yani $\alpha\le h^{\wedge}(w)$. O halde

$$\inf(f^{\wedge}(w),g^{\wedge}(w))\le h^{\wedge}(w)$$

bulunur. Sonuç olarak istenen eşitlik bulunmuş olur. $\sup(f,g)$ içinde benzer ispat yapılır. $\square$

$e\in L^+$ sabit bir eleman, $f\in L$ ve

$$w\in U_{[e]}=\{w:[e]\notin w\},$$

olsun. Tanım 3.3.1'de tanımladığımız $f^\wedge(w) = f^\wedge(w;e)$ sayısını göz önüne alalım. f sabitlenmiş ve w değişken olarak görülürse $f^\wedge$, $U_{[e]}$ üzerinde genişletilmiş reel değerli bir fonksiyondur. Şimdi bu $f^\wedge$ fonksiyonunun $U_{[e]}$ topolojik uzayından $\mathbb{R}^\infty$ içine sürekli bir fonksiyon olduğunu gösterelim.

Teorem 3.3.3. *Her $f \in L$ elemanına karşılık gelen $f^\wedge$ fonksiyonu $U_{[e]}$ üzerinde süreklidir.*

Kanıt. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\{w : f^\wedge(w) < \alpha\} = \bigcup_{\beta<\alpha} \left\{w : \left[(\beta e - f)^+\right] \notin w\right\},$$

bulunur. Her iki tarafını $w \in U_{[e]}$ elemanlarına kısıtlayalım. Birleşimin içindeki kümeler $U_{[e]}$ ile taban elemanlarının kesişimidir, böylece bu küme $U_{[e]}$ içinde açıktır. $\alpha = +\infty$ için

$$\{w : f^\wedge(w) < +\infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{w : f^\wedge(w) < n\}$$

yazarsak benzer işlemleri burada da uygulayabiliriz. Bulduğumuz bu sonuçları $-f^\wedge$ fonksiyonuna uygularsak her $\alpha \geq -\infty$ için $\{w : f^\wedge(w) > \alpha\}$ kümesi açık olur. O halde $f^\wedge$ fonksiyonu $U_{[e]}$ üzerinde süreklidir. □

$f \in L$ ve $0 < e \in L^+$ olmak üzere her $\alpha > 0$ için $|f| \leq \alpha e$ sağlanıyorsa ya $f = 0$ bulunur ya da f elemanı e elemanına göre sonsuz küçüktür denir.

Teorem 3.3.4. *$f \in [e]$ olsun. Her $\alpha > 0$ için $|f| \leq \alpha e$ olması için gerek yeter koşul her $w \in U_{[e]}$ için $f^\wedge(w) = f^\wedge(w;e) = 0$ olmasıdır.*

Kanıt. $\alpha > 0$ olmak üzere $|f| \leq \alpha e$ ise $-\alpha e \leq f \leq \alpha e$ olur ve Teorem 3.3.2 gereğince her $w \in U_{[e]}$ için $-\alpha \leq f^\wedge(w) \leq \alpha$ bulunur. Eğer her $\alpha > 0$ için $|f| \leq \alpha e$ oluyorsa her $w \in U_{[e]}$ için $f^\wedge(w) = 0$ bulunur. Tersine her $w \in U_{[e]}$ için $f^\wedge(w) = 0$ olduğunu varsayalım. O halde her $\alpha > 0$ ve her $w \in U_{[e]}$ için $\left[(\alpha e - f)^+\right]$ bandı w idealinin elemanı değildir. Şimdi bir $\alpha_0 > 0$ için $(\alpha_0 e - f)^- \neq 0$ olduğunu varsayalım. O halde $\left[(\alpha_0 e - f)^-\right]$ bandı $[0]$ bandını kesin olarak içerir. O halde Teorem 2.4.2'den öyle bir $w_0 \in \Omega$ ideali bulabiliriz ki $\left[(\alpha_0 e - f)^-\right] \notin w_0$ bulunur. Ayrıca

$$(\alpha_0 e - f)^- = (f - \alpha_0 e)^+ \leq f^+$$

olduğundan $[f^+] \notin w_0$ bulunur. Dahası $f \in [e]$ ise $f^+ \in [e]$ ve böylece $[f^+] \subset [e]$ olacağından $[e]$ bandı w_0 idealine ait değildir. Böylece öyle bir $w_0 \in U_{[e]}$ ideali bulduk ki ne $\left[(\alpha_0 e - f)^+\right]$ bandı ne de $\left[(\alpha_0 e - f)^-\right]$ bandı w_0 idealinin içinde değildir. Bu ise w_0 idealinin asal olmasıyla çelişir. O halde her $\alpha > 0$ için $(\alpha e - f)^- = 0$ bulunur. Bir başka deyişle, her $\alpha > 0$ için $\alpha e - f \geq 0$ ve böylece $f \leq \alpha e$. Bu sonucu $-f$ fonksiyonuna uygularsak her $\alpha > 0$ için $|f| \leq \alpha e$ bulunur. □

Aşağıdaki teorem önemli bir sonuçtur. Yukarıdaki teoremden kolayca görülebilir.

Teorem 3.3.5. *L Riesz uzayının Arşimet özelliğine sahip olması için gerek yeter koşul $e \in L^+$ sıfırdan farklı ve her $w \in U_{[e]}$ olmak üzere $f^\wedge(w; e) = 0$ sağlayan $f \in [e]$ için $f = 0$ olmasıdır.*

Teorem 3.3.4'ün ispatındaki irdeleme ile aşağıdaki genellemeyi verebiliriz.

Lemma 3.3.6. *$0 < u \leq e$ ve $f \in [u]$ olsun. Her $\alpha > 0$ için $|f| \leq \alpha e$ olması için gerek yeter koşul her $w \in U_{[u]}$ için $f^\wedge(w) = f^\wedge(w; e) = 0$ olmasıdır.*

L Arşimet özelliğine sahip bir Riesz uzayı ve $e \in L^+$ sıfırdan farklı bir eleman olmak üzere, her $f \in L$ için $f^\wedge(w; e)$ fonksiyonunun sonlu değerler aldığı kümenin $U_{[e]}$ içinde yoğun olduğunu göstereceğiz ve böylece $f^\wedge \in C^\infty\left(U_{[e]}\right)$ olduğunu söyleyeceğiz.

Teorem 3.3.7. *L Arşimet özelliğine sahip bir Riesz uzayı ve $e \in L^+$ sıfırdan farklı bir eleman olmak üzere, her $f \in L$ için $f^\wedge(w; e)$ fonksiyonunun sonlu değerler aldığı küme $U_{[e]}$ içinde yoğundur.*

Kanıt. Öncelikle $f \in L^+$ olduğunu kabul edebiliriz. Bir $f \in L^+$ için teoremin hipotezinin gerçeklenmediğini varsayalım. O zaman öyle bir $u \in L^+$ ve $0 < u \leq e$ elemanı vardır ki her $w \in U_{[u]}$ için $f^\wedge(w; e) = +\infty$ olur. Açıkça görüleceği gibi hiç bir $w \in U_{[u]}$ için $[f] \in w$ olamaz çünkü bir $w \in U_{[u]}$ ideali için $[f] \in w$ olsa Teorem 3.3.2 (i) şıkkından $f^\wedge(w; e) = 0$ bulunur. Böylece

$$U_{[u]} \subset U_{[e]} \cap U_{[f]}$$

bulunur. Genelliği bozmaksızın $u \leq f$ olduğunu varsayabiliriz çünkü

$$U_{[u]} = U_{[u]} \cap U_{[f]} = U_{\inf\{[u],[f]\}} = U_{[\inf(u,f)]}$$

olduğundan u ile $\inf(u,f)$ değiştirebiliriz. Her $w \in U_{[u]}$ için $f^{\wedge}(w;e) = +\infty$ olduğundan her $\alpha > 0$ için $\left[(\alpha e - f)^{+}\right] \in w$ sağlanır. Önceki gözlemlediklerimizden her $\alpha > 0$ için

$$\left[(\alpha e - f)^{-}\right] = \left[(f - \alpha e)^{+}\right]$$

bandı w idealinin elemanı değildir, böylece $\left[(\alpha^{-1} f - e)^{+}\right]$ bandı w idealinin elemanı değildir. Öte yandan, her $\alpha < 0$ için $\left[(\alpha^{-1} f - e)^{+}\right] = [0]$ bandı w idealinin elemanıdır. Dolayısıyla her $w \in U_{[u]}$ için $e^{\wedge}(w;f) = 0$ bulunur. O halde $0 < u \leq e$ olduğundan her $w \in U_{[u]}$ için

$$u^{\wedge}(w;f) = 0$$

bulunur. Bir önceki lemmanın sonucu olarak her $\alpha > 0$ için $u \leq \alpha f$ sağlanır, yani u elemanı f elemanına göre sonsuz küçüktür. Ayrıca u elemanının sıfırdan farklı ve uzayın Arşimet özelliğine sahip olduğunu varsaydığımızdan bu bir çelişkidir. □

Önemli bir sonuç olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.3.8. *L Arşimet özelliğine sahip bir Riesz uzayı ve $e \in L^{+}$ elemanı sıfırdan farklı olsun. O halde L^{+} pozitif konisinin $f \longrightarrow f^{\wedge}(w;e)$ tasviri altındaki görüntüsü*
$C^{\infty}\left(U_{[e]}\right)$ Riesz uzayının bir Riesz alt uzayıdır.

Lemma 3.3.9. *L Arşimet özelliğine sahip bir Riesz uzayı, $e \in L^{+}$ elemanı sıfırdan farklı ve $B \subset L$ bir bant olsun. Bir $f \in B$ için*

$$w \in U_{B^d} \cap U_{[e]} = U_{\inf\left(B^d,[e]\right)} = U_{B^d \cap [e]}$$

ise $f^{\wedge}(w;e) = 0$ sağlanır.

Kanıt. Eğer $w \in U_{B^d}$ ise B^d bantı w asal idealine ait değildir. Böyleyse B bantı w idealindedir. $[f] \subset B$ olduğundan $|f| \in w$ bulunur ve eğer $w \in U_{[e]}$ ise Teorem 3.3.2 (i) şıkkından $f^{\wedge}(w;e) = 0$ bulunur. □

Teorem 3.3.10. *Tekrar, L Arşimet özelliğine sahip bir Riesz uzayı, $e \in L^{+}$ elemanı sıfırdan farklı olsun. Ayrıca $0 < u \in L^{+}$ olsun ve bir $g \in C^{\infty}\left(U_{[e]}\right)$ fonksiyonu her $w \in U_{[e]}$ için $g(w) \geq 0$ ve w ideali $U_{[e]}$ uzayının boştan farklı bir O açık kümesinin içinde olmak üzere*

$$0 < g(w) \leq u^{\wedge}(w; e)$$

sağlansın. O zaman öyle bir $v \in L^{+}$ elemanı vardır ki her $w \in U_{[e]}$ için

$$v^{\wedge}(w; e) \leq g(w)$$

sağlanır.

Kanıt. Her $n \in \mathbb{N}$ için O açık kümesinin

$$n^{-1} < g(w) \leq u^{\wedge}(w; e) < n$$

sağlayan alt kümesini göz önüne alalım. Bu O_n kümesi O kümesinin açık bir alt kümesidir ve n yeterince büyük seçilirse O_n boştan farklıdır. O_n kümesinin $B \neq \{0\}$ olmak üzere U_B taban elemanını içerdiğini varsayalım. O halde bir $0 < p \in B$ aldığımızda $U_{[p]} \subset O_n$ ve her $w \in U_{|p|}$ için

$$n^{-1} < g(w) \leq u^{\wedge}(w; e) < n \qquad (*)$$

bulunur. $U_{[p]} \subset O \subset U_{[e]}$ olduğundan dolayı genelliği bozmaksızın $0 < p \leq e$ olduğunu varsayabiliriz (değilse, p ile $\inf(p, e)$ değiştirebiliriz). Şimdi u ile p elemanlarının ayrık olmadıklarını göstereceğiz. Gerçekten, $p \perp u$ olsaydı her $w \in U_{[e]}$ için

$$\inf\left(u^{\wedge}(w; e), p^{\wedge}(w; e)\right) = 0$$

ve böylece her $w \in U_{[p]}$ için $p^{\wedge}(w; e) = 0$ bulunur ki Lemma 3.3.6 gereğice $p = 0$ olur. Bu ise $p > 0$ olmasıyla çelişir. O halde p ve u ayrık olamaz, yani, u, $[p]^{d}$ bantının elemanı değildir. Öte yandan $[p] \oplus [p]^{d}$, L içinde sıra yoğun olduğundan, öyle bir $(w_\tau : \tau \in \{\tau\}) \subset [p] \oplus [p]^{d}$ yukarı yönlendirilmiş kümesi vardır ki $0 \leq w_\tau \uparrow n^{-2} u$ sağlanır. O halde öyle $w'_\tau \in [p]$ ve $w''_\tau \in [p]^{d}$ vardır ki $w_\tau = w'_\tau + w''_\tau$ şeklinde yazılır. Ayrıca $u \notin [p]^{d}$ olduğu için her τ için $w'_\tau = 0$ sağlanmaz, eğer her τ için $w'_\tau = 0$ olsaydı $w_\tau \in [p]^{d}$ ve dolayısıyla $u \in [p]^{d}$ bulunurdu. Diğer bir deyişle $0 < v \leq n^{-2} u$ olacak şekilde $v \in [p]$ vardır. Böylece her $w \in U_{[e]}$ için

$$v^{\wedge}(w;e) \leq n^{-2} u^{\wedge}(w;e)$$

bulunur. Bunu (*) eşitsizliği ile birleştirirsek her $w \in U_{[p]}$ için

$$v^{\wedge}(w;e) \leq n^{-1} < g(w)$$

elde ederiz ve bir önceki lemmadan her $w \in U_{[p]^d} \cap U_{[e]}$ için $v^{\wedge}(w;e) = 0$ bulunur. Böylece her $w \in U_{[e]}$ için

$$v^{\wedge}(w;e) \leq g(w)$$

elde edilir. Son olarak $0 < v \in [p] \subset [e]$ olduğundan $U_{[e]}$ üzerinde $v^{\wedge}(w;e)$ özdeş olarak sıfırdan farklıdır. □

Sonuç olarak en azından $[e]$ bandındaki her eleman için $f \mapsto f^{\wedge}(w;e)$ gönderiminin sadece sonlu değil keyfî supremum ve infimumu koruduğunu gösterebiliriz.

Teorem 3.3.11. *L Arşimet özelliğine sahip bir Riesz uzayı, $e \in L^+$ elemanı sıfırdan farklı olsun. $(u_\tau : \tau \in \{\tau\}) \subset L^+$, her τ için $u_\tau \in [e]$ ve $u = \sup u_\tau$ supremumu var olsun. O halde $C^\infty\left(U_{[e]}\right)$ içinde*

$$u^{\wedge}(w;e) = \sup u_\tau^{\wedge}(w;e).$$

gerçeklenir.

Kanıt. Açıkça görüleceği gibi $u^{\wedge}$ fonksiyonu $u_\tau^{\wedge}$ fonksiyonlarından oluşan küme için bir üst sınırdır. Öte yandan Teorem 3.2.6'dan $C^\infty\left(U_{[e]}\right)$ Dedekind tam olduğundan, öyle bir $h \in C^\infty\left(U_{[e]}\right)$ vardır ki $h(w) = \sup u_\tau^{\wedge}(w;e)$. Her $w \in U_{[e]}$ için

$$g(w) := u^{\wedge}(w;e) - h(w) \geq 0$$

fonksiyonunu tanımlayalım. g fonksiyonunun özdeş olarak sıfır olduğunu göstermeliyiz. Eğer g özdeş olarak sıfır değilse, bir önceki teoremden öyle bir $v \in L^+$ vardır ki her $w \in U_{[e]}$ için $v^{\wedge}(w;e) \leq g(w)$ sağlanır. Aslında teoremin ispatında da bulunduğu gibi v elemanı $[e]$ bandının içindedir.

$v > 0$ ve $u = \sup u_\tau$ olduğundan her τ için $u - (u_\tau + v) \geq 0$ olamaz, o halde öyle bir τ_0 indeksi vardır ki $(u - (u_{\tau_0} + v))^- > 0$ olur. Ama $u - (u_{\tau_0} + v)$ elemanına karşılık gelen $\{u - (u_{\tau_0} + v)\}^{\wedge}$ fonksiyonu

$$u_{\tau_0}^{\wedge} + v^{\wedge} \leq h + g = u^{\wedge},$$

olduğundan $U_{[e]}$ üzerinde negatif değerler almayan bir fonksiyondur. Öte yandan $(u - (u_{\tau_0} + v)) \in [e]$ olduğundan $(u - (u_{\tau_0} + v))^{-} \in [e]$ bulunur ve Teorem 3.3.4 gereğince $(u - (u_{\tau_0} + v))^{-} = 0$ olur, çünkü $(u - (u_{\tau_0} + v))^{-}$ elemanına karşılık gelen fonksiyon $U_{[e]}$ üzerinde özdeş olarak sıfır. Bu ise $(u - (u_{\tau_0} + v))^{-} > 0$ olmasıyla çelişir. Böylece g fonksiyonu özdeş olarak sıfırdır. □

Şimdi L uzayının Arşimet özelliğine sahip, $e > 0$ zayıf sıra birimli Riesz uzayı olduğunu kabul edelim. e zayıf sıra birim olduğundan $[e] = L$ ve böylece $U_{[e]}$ ile Ω aynı uzaylardır. Sonuç 2.4.18'de kanıtladığımız gibi Ω kompakt Hausdorff topolojik uzaydır. Ayrıca $\mathscr{B}(L)$ Boole cebiri Dedekind tam olduğundan ve Teorem 2.4.19'dan Ω büsbütün bağlantısız topolojik uzay olur. Her taban elemanı U_B açık, kapalı ve kompakt olduğundan U_B kümesi Ω üzerinden indirdiğimiz kabuk-çekirdek topolojisine göre büsbütün bağlantısızdır. O halde Teorem 3.2.6'dan $C^{\infty}(\Omega)$ ve $C^{\infty}(U_B)$ evrensel olarak tamdır. Buraya kadar yapılan işler birleştirilirse aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.12. *L Arşimet özelliğine sahip bir Riesz uzayı ve $e \in L^{+}$ zayıf sıra birim olmak üzere $f \longrightarrow f^{\wedge}(w; e)$ tasviri L Riesz uzayı ile $C^{\infty}(\Omega)$ uzayının bir Riesz alt uzayı $L^{\wedge}$ arasında örgü izometrisidir. Üstelik bu izomorfi keyfi supremum ve infimumu korur.*

K Dedekind tam bir Riesz uzayı ve $L \subset K$ bir Riesz alt uzayı olmak üzere her $f \in K$ için

$$f = \sup\{g : g \in L, g \leq f\} = \inf\{g : g \in L, g \geq f\}$$

sağlanıyorsa K uzayına L uzayının *Dedekind tamlanışı* denir.

Teorem 3.3.13. *L Arşimet özelliğine sahip bir Riesz uzayı ve $e \in L^{+}$ zayıf sıra birim olmak üzere $L^{\wedge}$ uzayı tarafından $C^{\infty}(\Omega)$ uzayı içinde üretilen D_L ideali L uzayının Dedekind tamlanışıdır ve D_L uzayı $C^{\infty}(\Omega)$ içinde sıra yoğundur.*

Kanıt. D_L ideali $g \in C^{\infty}(\Omega)$ olmak üzere $|g(w)| \leq u^{\wedge}(w; e)$ sağlayacak şekilde öyle bir $u \in L^{+}$ bulabildiğimiz $g \in C^{\infty}(\Omega)$ elemanlarından oluşur. $C^{\infty}(\Omega)$ Dedekind tam olduğundan D_L ideali de kendi içinde Dedekind tam Riesz uzayıdır.

L uzayı D_L uzayının $L^\wedge$ alt uzayına örgü izometrik olduğundan D_L uzayının L uzayının Dedekind tamlanışı olduğunu göstermek için her $0 < g \in D_L$ ve her $w \in \Omega$ için

$$0 \leq v^\wedge (w; e) \leq g (w) \leq u^\wedge (w; e)$$

olacak şekilde $u, v \in L^+$ elemanları bulmamız yeterlidir. Teorem 3.3.10 bu şartları sağlayan u ve v elemanlarının varlığını garantiler, böylece D_L uzayı L uzayının Dedekind tamlanışıdır.

e tarafından üretilen bant $C^\infty (\Omega)$ uzayı olduğundan D_L tarafından üretilen bant $C^\infty (\Omega)$ olur. Böylece D_L sıra yoğun olur.

□

Sonuç 3.3.14. *L Dedekind tam Riesz uzayı ve e zayıf sıra birim olmak üzere $L^\wedge$ uzayı $C^\infty (\Omega)$ içinde sıra yoğundur.*

Kanıt. $L^\wedge$ Dedekind tam olduğundan D_L Dedekind tamlanışına eşit olacağından istenilen elde edilir. □

Şimdi bir Riesz uzayının evrensel tamlanışını inceleyeceğiz.

Tanım 3.3.15. *Evrensel olarak tam olan bir L' Riesz uzayı*
(i) L Riesz uzayı L' uzayının bir $L^\wedge$ alt uzayına örgü izometriktir.
(ii) Her $f' \in (L')^+$ için

$$f' = \sup \{g^\wedge \in L^\wedge : g^\wedge \leq f'\} .$$

koşullarını sağlıyorsa L uzayının evrensel tamlanışı denir.

Dedekind tam Riesz uzaylarının Riesz alt uzayları Arşimet özelliğine sahiptir. Bir L Riesz uzayı Arşimet özelliğine sahip ise evrensel tamlanışı vardır. L uzayı Dedekind tamlanışa sahip olduğu durumda açıkça görüleceği gibi L uzayının Dedekind tamlanışı evrensel tamlanışının içindedir. Ayrıca eğer L uzayı evrensel tamlanışa sahip ise bu evrensel tamlanış örgü izomorfileri altında tek türlü belirlidir.

Şimdiye kadar yapılan birçok şey birleştirilerek aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.3.16. *L Arşimet özelliğine sahip zayıf sıra birimli bir Riesz uzayı ise $C^\infty(\Omega)$ uzayı L uzayının evrensel tamlanışıdır.*

Kanıt. $L^\wedge$ uzayı evrensel olarak tam olan $C^\infty(\Omega)$ uzayının Riesz alt uzayı ve $L^\wedge$ ile üretilen ideal D_L, $C^\infty(\Omega)$ içinde sıra yoğun olduğundan $C^\infty(\Omega)$ uzayı L Riesz uzayının evrensel tamlanışıdır. □

Şimdi Arşimet özelliğine sahip bir Riesz uzayının Arşimet özelliğine sahip zayıf sıra birimli bir Riesz uzayının içinde görülebileceğini irdeleyeceğiz. Böylece Arşimet özelliğine sahip bir uzayın evrensel tamlanışı olduğunu söyleyebileceğiz.

L Riesz uzayı ve $\{e_i\} \subset L^+$ kümesinin elemanları ikişer ikişer dik olsun, yani her $i \neq j$ için $e_i \wedge e_j = 0$. Eğer her i için $u \wedge e_i = 0$ olan u sadece 0 ise $\{e_i\}$ kümesine *tam ayrık aile* denir.

Teorem 3.3.17. *L bir Riesz uzayı ve $\{e_i : i \in I\}$ projeksiyon elemanlardan oluşan tam ayrık aile bir aile olsun. O halde her $u \in L^+$ için*

$$u = \sup\{P_{e_i} : i \in I\}$$

olur.

Kanıt. $u \in L^+$ ve $0 \leq w \in L$ olmak üzere her $i \in I$ için $P_{e_i}(u) \leq u - w$ olduğunu varsayalım. O halde her $i \in I$ için $0 \leq w \leq u - P_{e_i}(u) \in B_{e_i}^d$ yani her $i \in I$ için $w \wedge e_i = 0$ olur. Böylece $w = 0$ ve $u = \sup\{P_{e_i} : i \in I\}$ bulunur. □

$\{L_\alpha : \alpha \in A\}$ Riesz uzaylarının bir ailesi olmak üzere bu Riesz uzaylarının kartezyen çarpımı $L = \prod L_\alpha$ elemanların koordinat kordinat karşılaştırılmasına göre, yani $\{u_\alpha : \alpha \in A\} \geq \{v_\alpha : \alpha \in A\}$ olması gerek yeter koşul her α için $u_\alpha \geq v_\alpha$ olması, bir Riesz uzayıdır.

$\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ projeksiyon elemanlardan oluşan tam ayrık bir aile olsun. B_α ile e_α tarafından üretilen bandı ve K ile $\prod B_\alpha$ uzayını gösterelim. Kolayca görüleceği gibi her $u \in L^+$ için $\pi(u) = \{P_{e_\alpha}(u) : \alpha \in A\}$ şeklinde tanımlanan $\pi : L^+ \to K^+$ tasviri toplamsaldır. Böylece π tasvirini $\pi(u) = \pi(u^+) - \pi(u^-)$ tek türlü belirli bir biçimde $\pi : L \to K$ genişletebiliriz. Ayrıca π tasviri Riesz homomorfisidir ve $\pi(L)$ uzayı K içinde sıra yoğundur ve $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ elemanı K için bir sıra birimdir. Sonuç olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.18. *$\pi : L \to \prod B_\alpha$ tasviri L uzayı zayıf sıra birimi olan $\prod B_\alpha$ uzayının sıra yoğun bir alt uzayına izomorf olur.*

Sonuç 3.3.19. *L Arşimet özelliğine sahip bir uzaysa $C^\infty(\Omega)$ uzayı L uzayının evrensel tamlanışıdır.*

Kanıt. Teorem 3.3.18 ve Teorem 3.3.16'nın sonucudur. □

Bölüm 4

BANACH ÖRGÜLERİ VE ÜZERLERİNDEKİ REGÜLER OPERATÖRLER

Bu bölümde Banach örgüleri tanıtılacak ve bu çalışma içinde kullanılan özelliklerine değinilecektir. AL- ve AM-uzaylarının önemli özelliklerinden bahsedilecektir. İlk kısımda özellikle bir AM-uzayın sıra birime sahip olması ile ilgili bir koşul verilecektir. Son kısımda Banach örgüleri üzerindeki regüler operatörler ile norm sınırlı operatörler arasındaki ilişki tanıtılacaktır.

4.1 Banach Örgüleri

Bir Riesz uzayı üzerindeki bir $\|\cdot\|$ normu için $|x| \leq |y|$ iken $\|x\| \leq \|y\|$ oluyorsa bu norma *örgü normu* veya *Riesz normu* denir ve bu Riesz uzayına normlu Riesz uzayı denir. Eğer bir normlu Riesz uzayı üzerindeki norma göre tam ise *Banach örgüsü* olarak adlandırılır.

Tanım 4.1.1. *Bir Riesz uzayı üzerinde bir örgü normu* $\|\cdot\|$ *için* $x_\alpha \downarrow 0$ *iken* $\|x_\alpha\| \downarrow 0$ *oluyorsa bu norma sıra sürekli norm denir.*

Sıra sürekli norma sahip olan Banach örgüleri Dedekind tamdır ([6] s.186). Dahası, sıra sürekli norm ile ayrık elemanlardan oluşan diziler yakından ilişkilidir.

Teorem 4.1.2. (*Fremlin-Meyer-Nieberg*). *Bir Banach örgüsünün sıra sürekli norma* *sahip olması için gerek yeter koşul her sıra sınırlı ayrık elemanlardan oluşan dizinin normda sıfıra yakınsamasıdır.*

Kanıt. [6, Theorem 4.14]. □

İki Banach uzayı arasındaki bir $T : X \to Y$ operatörüne, her $x \in X$ için

$$K \|x\| \leq \|Tx\| \leq M \|x\|$$

olacak şekilde K ve M pozitif sabitler varsa *gömme* operatörü denir. Burada X uzayına Y uzayının içine *gömülebilir* denir.

İki Banach örgüsü arasındaki $T : E \to F$ gömme operatörü aynı zamanda örgü homomorfisi (yani her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$) ise T operatörüne *örgü gömme* operatörü ve E uzayına F içine *örgü gömülebilir* denir. Bu durumda $T(E)$, F uzayının kapalı bir Riesz uzayıdır ve $T(E)$ ile E özdeş görülebilir.

Teorem 4.1.3. (*Lazonovsky-Mekler-Meyer-Nieberg*). *Her Dedekind σ-tam E Banach örgüsü için aşağıdakiler birbirine eşdeğerdir.*

1. *E sıra sürekli norma sahiptir.*
2. *l_∞ uzayı E içine örgü gömülemez.*

Kanıt. [6, Theorem 4.56]. □

Şimdi Banach örgüleri içindeki iki önemli sınıftan bahsedeceğiz, AL- ve AM-uzayları. $L_1(\mu)$ ve $C(K)$ uzayları bu uzaylar için prototip oldukları için bu uzayların Banach örgüleri içinde önemli bir yeri vardır.

Bir E Banach örgüsüne

- $1 \leq p < \infty$ olmak üzere her $x, y \in E^+$ ve $x \wedge y = 0$ için

$$\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$$

  oluyorsa *soyut L_p-uzayı*,

- her $x, y \in E^+$ ve $x \wedge y = 0$ için

$$\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

  oluyorsa *soyut M-uzayı* denir.

  Bir soyut L_1 uzayı AL-uzayı olarak, soyut M-uzayı AM-uzayı olarak adlandırılır.

AL- ve AM-uzayları arasında önemli bir dualite özelliği vardır.

Teorem 4.1.4. *E bir Banach örgüsü olmak üzere*

(i) E bir AL-uzayı ise E' sıra birime sahip bir AM-uzayıdır.

(ii) E bir AM-uzayı ise E' bir AL-uzayıdır.

Kanıt. [12, Theorem 1.4.7]. □

Bu arada belirtmek gerekir ki her soyut L_p uzayı E sıra sürekli norma sahiptir. Gerçekten, bir $\{x_n\} \subseteq [0, x]$ ayrık elemanlardan oluşan dizi alırsak

$$\sum_{n=1}^{k} \|x_n\|^p = \left\| \sum_{n=1}^{k} x_n \right\|^p = \left\| \bigvee_{n=1}^{k} x_n \right\|^p \leq \|x\|^p$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$ olur ve böylece $\|x_n\| \to 0$ bulunur. Teorem 4.1.2'den norm sıra süreklidir. O halde her soyut L_p- uzayları Dedekind tamdır.

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere soyut L_p-uzaylarının en belirgin örneği $L_p(\mu)$ uzayıdır. Aslında bu uzaylar soyut L_p-uzaylarının tek formudur.

Teorem 4.1.5. *(Kakutani-Bohnenblust-Nakano) Her soyut L_p-uzayı bir $L_p(X, \Sigma, \mu)$ uzayına örgü izometriktir.*

Kanıt. [7, Theorem 3.34]. □

AM-uzayları içinde bir karakterizasyon olduğunu gösterebilmek için bazı gerekli teoremleri vereceğiz.

Lemma 4.1.6. *X bir vektör uzayı ve $f, f_1, \ldots, f_n$, X üzerinde tanımlı lineer fonksiyoneller olsun. f fonksiyonelinin $f_1, \ldots, f_n$ fonksiyonellerinin bir lineer kombinasyonu olması için gerek yeter koşul $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker} f_i \subseteq \mathrm{Ker} f$ olmasıdır.*

Kanıt. [6, Lemma 3.15]. □

Teorem 4.1.7. *E bir AM-uzayı, $0 < x' \in E'$ ve $\|x'\| = 1$ olsun. O zaman $U' \subset E'$ kapalı birim yuvar olmak üzere x' elemanının U'_+ kümesinin ekstrem noktası olması için gerek yeter koşul x' fonksiyonelinin bir örgü homomorfisi olmasıdır.*

Kanıt. İlk olarak x' elemanının U'_+ kümesinin bir ekstrem noktası olduğunu varsayalım. Eğer $0 < y' < x'$ ise

$$x' = \|y'\| \frac{y'}{\|y'\|} + \|x' - y'\| \frac{x' - y'}{\|x' - y'\|}$$

ve $E^{'}$ uzayı AL-uzayı olduğu için $\|y'\| + \|x' - y'\| = \|x'\| = 1$ sağlandığından $y' = \|y'\| \, x'$ bulunur. Böylece, eğer $|y'| < x'$ ise öyle bir λ vardır ki $|\lambda| \leq 1$ ve $y' = \lambda x'$. $x \in E$ olsun. Teorem 3.1.7'den $|y'| \leq x'$ olacak şekilde bir $y' \in E'$ vardır ki $x'(|x|) = |y'(x)|$ sağlanır. Böylece

$$|x'(x)| \leq x'(|x|) = |y'(x)| \leq |\lambda x'(x)| \leq |x'(x)| \leq x'(|x|)$$

yani $|x'(x)| = x'(|x|)$ elde ederiz. Bu ise x' fonksiyonelinin bir örgü homomorfisi olduğunu söyler.

Tersi için x' fonksiyonelinin bir örgü homomorfisi olduğunu kabul edelim. $0 < y' < x'$ ve $x \in \mathrm{Ker}x'$ alalım. O halde

$$|y'(x)| \leq y'(|x|) \leq x'(|x|) = |x'(x)| = 0$$

olduğundan $x \in \mathrm{Ker}y'$ bulunur, yani, $\mathrm{Ker}x' \subset \mathrm{Ker}y'$. Lemma 4.1.6'dan $y' = \lambda x'$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ şeklinde yazılır. Şimdi $x' = \alpha y' + (1 - \alpha) z'$ ve $y', z' \in U'_+$, $0 < \alpha < 1$ şeklinde yazıldığını varsayalım. Açıkça görüleceği gibi, $\|y'\| = \|z'\| = 1$. Öte yandan $0 \leq \alpha y' \leq x'$ ve $0 \leq (1 - \alpha) z' \leq x'$ olduğundan $y' = \beta x'$ ve $z' = \gamma x'$ olacak şekilde $\beta, \gamma > 0$ vardır. $\beta = \gamma = 1$ olduğundan x' elemanı U'_+ kümesinin bir ekstrem noktasıdır. □

Teorem 4.1.8. ($Stone - Weierstrass$) *K kompakt Hausdorff bir topolojik uzay olsun. $C(K)$ uzayının K kümesinin noktalarını ayıran ve sabit **1** fonsiyonunu içeren bir U alt örgüsü $C(K)$ içinde supremum normuna göre yoğundur.*

Kanıt. [12, Theorem 2.1.1]. □

E bir Riesz uzayı ve $e \in E$ bir sıra birim ise

$$\|x\|_e := \inf \{\lambda : |x| \leq \lambda e\}$$

şeklinde tanımladığımız yapı bir örgü normudur ve bu norm sıra birim normu olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.9. ($Kakutani - Bohnenblust$ ve $M.Krein - S.Krein$) *E bir AM-uzayı, e bir sıra birim ve $\|.\|_e$ sıra birim normu olsun.*

$$B = \left\{x' \in E'_+ : \langle x', e \rangle = 1\right\}$$

ve $K = \partial_e (B)$, *B kümesinin ekstrem noktaları olsun. K kümesi zayıf* **-kompakt ve E uzayından* $C(K)$ *uzayına her* $x' \in K$ *için* $f_x(x') = \langle x', x \rangle$ *olacak şekilde tanımlanan* $x \mapsto f_x$ *gönderimi bir örgü izometrisidir.*

Kanıt. Banach- Alaoğlu Teoreminden B kümesinin zayıf*-kompakt olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca Krein-Milman Teoreminden $K = \partial_e (B) \neq \emptyset$. Teorem 4.1.7'den K kümesi aslında B kümesinin elemanı olan tüm örgü homomorfilerinin kümesidir. Sonuç olarak, K kümesi B kümesinin zayıf*-kapalı alt kümesidir, böylece zayıf*-kompakttır. Her $x \in E^+$ için f_x ile

$$f_x(x') = \langle x', x \rangle \text{ her } x' \in K$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu tanımlamayla f_x fonksiyonunu K üzerinde sürekli olur ve her $x \geq 0$ için

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sup\left\{\langle x', x \rangle : \|x'\| \leq 1, x' \geq 0\right\} \\ &= \sup\left\{\langle x', x \rangle : x' \in B\right\} \\ &= \sup\left\{\langle x', x \rangle : x' \in K\right\} = \|f_x\| \end{aligned} \tag{4.1}$$

sağlanır, yani her $x \in E$ için $\|x\| = \|f_x\|$ bulunur. K kümesi B kümesinin elemanı olan tüm örgü homomorfilerinin kümesi olduğundan, $x \longrightarrow f_x$ tasviri $C(K)$ uzayının $f_e = \mathbf{1}$ elemanını içeren kapalı bir alt uzayına bir örgü izomorfisidir. Teorem 4.1.8 gereğince $U = C(K)$ bulunur. Böylece istenilen elde edilir. □

Önerme 4.1.10. *E bir AL-uzayı olsun. Her* $u, v \in E^+$ *için*

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$$

sağlanır, yani AL-uzayı üzerindeki norm pozitif koni üzerinde toplamsaldır.

Kanıt. E uzayının bir AL-uzayı olduğunu kabul edelim. Teorem 4.1.4'ü kullanırsak E uzayının ikinci duali bir AL-uzayıdır ve Teorem 4.1.5 gereğince bir $L_1(X, \Sigma, \mu)$ uzayına örgü izomorfiktir. $L_1(X, \Sigma, \mu)$ üzerindeki norm $L_1(X, \Sigma, \mu)$ uzayının pozitif konisi üzerinde toplamsal olduğundan ve E uzayını ikinci dualinin içinde bir Riesz alt uzayı olarak görebileceğimizden, E üzerindeki normun pozitif koni üzerinde toplamsal olduğunu çıkarabiliriz. □

Yukarıdaki sonuçtaki benzer gözlemle aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Önerme 4.1.11. *E bir AM-uzayı olsun. Her $u, v \in E^+$ için*

$$\|u \vee v\| = \max\{\|u\|, \|v\|\}$$

sağlanır.

Yukarıda verdiğimiz son iki önermeye göre, AM- ve AL-uzaylarının tanımlarını

1. Her $u, v \in E^+$ $\|u \vee v\| = \max\{\|u\|, \|v\|\}$ sağlanıyorsa E uzayına bir AM-uzayı denir.

2. Her $u, v \in E^+$ için $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ sağlanıyorsa E uzayına AL-uzayı denir.

olarak değiştirebiliriz.

Şimdi AM-uzaylarıyla ilgili esas problemimizde kullanılacak olan bir karakterizasyon vereceğiz.

Teorem 4.1.12. *E bir Banach örgüsü olmak üzere aşağıdakiler birbirine eşdeğerdir.*

(i) E bir AM-uzayıdır.

(ii) E uzayının içindeki her göreli kompakt kümenin E içinde bir supremumu vardır.

(iii) E içinde sıfıra yakınsayan ayrık elemanlardan oluşan her dizi E'' içinde sıra sınırlıdır.

(iv) Öyle bir $C > 0$ sayısı vardır ki her ayrık $x_1, \ldots, x_n \in E^+$ elemanları için

$$\|x_1 + \ldots + x_n\| \leq C \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\}$$

sağlanır.

Kanıt. [12, Theorem 2.1.12]. □

Aşağıdaki teorem AM-uzaylarının önemini vurgular.

Teorem 4.1.13. *E bir Banach örgüsü ve $x \in E$ olsun. x elemanı tarafından üretilen E_x esas ideali*

$$\|y\|_\infty = \inf\{\lambda > 0 : |y| \leq \lambda |x|\}, \quad y \in E_x$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_\infty$ sıra birim normuna göre bir AM-uzayıdır ve bu norma göre kapalı birim yuvar $[-|x|, |x|]$ sıra aralığıdır.

Kanıt. E_x üzerindeki $\|\cdot\|_\infty$ normun bir örgü normu olduğu ve kapalı birim yuvarının $[-|x|, |x|]$ sıra aralığının olduğunu göstermek kolaydır.

$\{x_n\} \subset E_x$ dizisinin $\|\cdot\|_\infty$-Cauchy olduğunu varsayalım. Gerekirse bir alt dizisi ile devam ederek, her n ve p için

$$|x_{n+p} - x_n| \leq 2^{-n} |x| \qquad (*)$$

olduğunu varsayabiliriz. Böylece $\{x_n\}$ dizisi E içinde norm-Cauchy bulunur. E uzayı tam olduğundan bu dizinin y gibi bir limiti vardır. $(*)$ eşitsizliğinde $p \to \infty$ iken limit alırsak her n için $|y - x_n| \leq 2^{-n} |x|$ buluruz. Bu ise $y \in E_x$ olduğunu gösterir ve $\|y - x_n\|_\infty \to 0$. Böylece $(E_x, \|\cdot\|_\infty)$ bir Banach örgüsüdür. Son olarak $(E_x, \|\cdot\|_\infty)$ yapısının bir AM-uzayı olduğunu gösterelim. $u, v \in E_x$ ve $u \wedge v = 0$ olsun. $m = \max\{\|u\|_\infty, \|v\|_\infty\}$ dersek $m \leq \|u + v\|_\infty = \|u \vee v\|_\infty$ olduğu kolayca görülür. Öte yandan

$$0 \leq u \vee v \leq [\|u\|_\infty |x|] \vee [\|v\|_\infty |x|] \leq m |x| \vee m |x| = m |x|$$

eşitsizliği $\|u \vee v\| \leq m$ olduğunu gösterir, böylece ispat tamamlanır. □

Şimdi içindeki her ayrık ve pozitif elemanlardan oluşan norm sınırlı kümenin supremuma sahip olduğu Banach örgülerinin Dedekind tam ve sıra birime sahip olduğunu gösterelim.

Teorem 4.1.14. *İçindeki her ayrık ve pozitif elemanlardan oluşan norm sınırlı kümenin supremuma sahip olduğu Banach örgüsü E Dedekind tamdır.*

Kanıt. E Banach örgüsü içindeki her ayrık ve pozitif elemanlardan oluşan norm sınırlı kümenin supremumu olsun. E uzayının Dedekind tam olduğunu göstermek için, Teorem 3.1.9'dan her $x \in E^+$ için E_x uzayının Dedekind tam olduğunu göstermek yeterlidir. E_x uzayı sıra birime sahip bir AM- uzayı olduğundan ve Teorem 4.1.9 gereğince E_x uzayı K kompakt topolojik uzay olmak üzere $C(K)$ formundadır. Teorem 3.2.5'te $C(K)$ uzayındaki her ayrık ve pozitif elemanlardan oluşan norm sınırlı küme supremuma sahip ise $C(K)$ uzayının Dedekind tam olduğunu söylemiştik. O halde her $x \in E^+$ için E_x Dedekind tamdır. Böylece E Dedekind tamdır. □

Tanım 4.1.15. *Bir E Banach örgüsü içinde her norm sınırlı yukarı yönlendirilmiş pozitif elemanlardan oluşan kümenin supremumu varsa E örgüsü üzerindeki norm Levi norm olarak adlandırılır. Eğer bu özellik sadece diziler için geçerliyse norma dizisel Levi norm denir.*

Açıkça görüleceği gibi Levi norma sahip Banach örgüleri Dedekind tamdır ve her dizisel Levi norma sahip Banach örgüleri Dedekind σ-tamdır.

Bu bölümde, iki önemli teorem vereceğiz. Kabaca söylemek gerekirse bu teoremlerin temeli keyfi ağ ve dizi ile çalışmak yerine terimleri ikişer ikişer ayrık diziler ve ağlarla çalışabilmeyi amaçlamaktadır.

Tanım 4.1.16. *E bir Riesz uzayı olsun. $A \subseteq E^+$ yukarı yönlendirilmiş kümesinde her $a, b \in A$ ve $a \geq b$ iken $(a-b) \wedge b = 0$ oluyorsa A kümesine yanal artan denir.*

Yanal artan ağlar ve diziler arasından önemli bir fark vardır. Eğer (x_n) yanal artan bir dizi ise bu dizi ile elemanlar ikişer ikişer ayrık olan bir (u_n) dizisi üretebiliriz (mesela $u_1 = x_1$ ve $u_n = x_{n+1} - x_n$ her $n \geq 2$). Ancak yanal artan ağlar için böyle kullanışlı bir ağ oluşturma yöntemi yoktur. Bu yüzden de bizim için ağlarla çalışmak daha karmaşıktır. Bir sonraki önerme ve teorem bu problemle ilgilidir.

Önerme 4.1.17. *E Dedekind tam Riesz uzayının evrensel tam olması için gerek yeter koşul E^+ içindeki her yanal artan kümenin supremumunun olmasıdır.*

Kanıt. E^+ içindeki her yanal artan kümenin supremumu olsun ve $A \subset E^+$ ikişer ikişer ayrık elemanlardan oluşsun. O halde A kümesinin sonlu tane elemanını toplamakla oluşturacağımız küme yanal artandır. Kabulumüzden bu kümenin supremumu vardır ve bu supremum aynı zamanda A kümesininde supremumudur. Böylece E uzayı evrensel tam bulunur.

Şimdi E uzayının evrensel tam olduğunu varsayalım. Uygun bir Q kompakt, Hausdorff ve büsbütün bağlantısız bir topolojik uzay olmak üzere E uzayının $C^{\infty}(Q)$ uzayına sıra izomorfik olduğunu biliyoruz. $A \subset C^{\infty}(Q)$ alt kümesi yanal artan bir küme olsun. $Q_0 = \bigcup_{a \in A} \{s \in Q : a(s) > 0\}$ kümesi üzerinde bir y fonksiyonunu $a(s) > 0$ ise $y(s) = a(s)$ olarak tanımlayalım. Bu şekilde tanımladığımız y fonksiyonunun iyi tanımlı olduğunu göstermek için $a \geq b$ ve $b(s) > 0$ iken $y(s) = a(s) = b(s)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. O halde keyfi $b, c \in A$ elemanları için $a \geq b, c$ olacak şekilde $a \in A$ bulabiliriz ve a elemanıyla b ve c elemanlarının aynı değeri aldıklarını göstermiş oluruz. Eğer $a \geq b$ ise $(a-b) \wedge b = 0$ olduğundan her $s \in Q$ için $(a-b)(s) \wedge b(s) = 0$ bulunur. $b(s) > 0$ olduğunda $(a-b)(s) = 0$ yani $a(s) = b(s)$ bulunur. Böylece y fonksiyonu Q_0 açık kümesi üzerinde iyi tanımlıdır, böylece sürekli bir şekilde Q_0 kümesinin kapanışına genişletebiliriz. $Q \setminus \overline{Q_0}$ kümesi üzerinde y fonksiyonunu sıfır olarak tanımlayarak y fonksiyonunu tüm Q üzerine genişletebiliriz. Böylece $y \in C^{\infty}(Q)$ bulunur ki açıkça görüleceği gibi y fonksiyonu A kümesinin supremumudur. $\square$

Teorem 4.1.18. *E bir Banach örgüsü olmak üzere aşağıdakiler birbirine eşdeğerdir.*
(a) E uzayı Levi norma sahiptir.
(b) E^{+} içindeki her norm sınırlı yanal artan alt küme supremumuma sahiptir.
(c) $A \subset E^{+}$ ikişer ikişer ayrık elemanlardan oluşan bir küme ve

$$B = \left\{ \sum_{\alpha \in \sigma} \alpha : \sigma \subset A \text{ sonlu} \right\}$$

kümesi norm sınırlı ise, A kümesi supremuma sahiptir. Bu supremum aynı zamanda B kümesinin supremumudur.

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ Açıktır.

$(b) \Rightarrow (a)$ durumunu inceleyelim. (b) elimizde varken her sıra sınırlı ikişer ikişer birbirine dik pozitif elemanlardan oluşan kümenin supremumu vardır. Böylece Teorem 4.1.14'ten E uzayı Dedekind tamdır. O halde E uzayı evrensel tamlanışı $E^{\wedge} = C^{\infty}(\Omega)$ içinde sıra yoğun ideal olarak görülebilir.

$(x_{\alpha}) \subset E^{+}$ artan norm sınırlı bir ağ olsun. İki durumu göz önüne alacağız: bu ağ $C^{\infty}(\Omega)$ içinde ya sıra sınırlıdır ya da sıra sınırlı değildir. İlk durumda

$z = \sup_\alpha x_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ vardır. Her α için

$$G_\alpha := \overline{\{q \in \Omega : 2x_\alpha(q) > z(q)\}}$$

kümelerini tanımlarsak her α için G_α açık ve kapalı bir kümedir. Açıkça görüleceği gibi $\alpha_1 < \alpha_2$ iken $G_{\alpha_1} \subset G_{\alpha_2}$'dir. Böylece $(z\chi_{G_\alpha})_\alpha$ yanal artan bir ağdır. $x_\alpha \uparrow z$ olduğundan $\bigcup G_\alpha$ kümesi Ω içinde yoğundur. O halde $z\chi_{G_\alpha} \uparrow z$ bulunur. Her α için $z\chi_{G_\alpha} \leq 2x_\alpha$ olduğundan her α için $z\chi_{G_\alpha} \in E$ bulunur. Sonuç olarak (b)'den $z \in E$ bulunur. O halde (x_α) ağının supremumu E uzayının içindedir.

İkinci durumu göz önüne alalım, yani (x_α) ağı $C^\infty(\Omega)$ içinde sıra sınırlı olmasın. O halde öyle açık kapalı $\Omega_0 \subset \Omega$ ve $D \subset \Omega_0$ vardır ki her $q \in \Omega_0$ için $\sup x_\alpha(q) = \infty$ bulunur. Dayanağı Ω_0 kümesi içinde olan $0 \leq z \in C^\infty(\Omega)$ elemanı alalım. $(z \wedge x_\alpha)$ ağı E içinde artan norm sınırlı bir ağdır ve her $q \in D$ için $\sup_\alpha (z \wedge x_\alpha)(q) = z(q)$ olduğundan açıkça görüleceği gibi $\sup_\alpha z \wedge x_\alpha$ supremumu $C^\infty(\Omega)$ içinde vardır ve z elemanına eşittir. Bir önceki kısımdan $z \in E$ bulunur. Bir başka deyişle, $C^\infty(\Omega_0)$ evrensel tam uzayı E uzayının içindedir ve böylece $C^\infty(\Omega_0)$ uzayının üzerinde bir norm vardır. Bu ise imkansızdır.

(a) veya (b) ise (c) şartları açıktır. Şimdi $(c) \Rightarrow (b)$ olduğunu ve dolayısıyla üç durumun denk olduğunu göstereceğiz.

(c) şıkkından E^+ içinde ikişer ikişer ayrık elemanlardan oluşan sıra sınırlı bir kümenin supremumu olduğundan Teorem 4.1.14 gereğince E uzayı Dedekind tam bulunur. Böylece tekrar E uzayını evransel tamlanışı $E^\wedge = C^\infty(\Omega)$ içine sıra yoğun ideal olarak gömebiliriz.

$A \subset E^+$ yanal artan norm sınırlı bir alt küme olsun, A kümesinin E içinde supremumunun olduğunu göstermeliyiz. Önerme 4.1.17'den A kümesi $E^\wedge$ içinde supremuma sahiptir, bu supremumu y ile gösterelim. Genelliği bozmaksızın her $q \in \Omega$ için $y(q) = 1$ varsayabiliriz, aksi takdirde y elemanı tarafından $C^\infty(\Omega)$ içinde üretilen esas ideali göz önüne alırız.

Önerme 4.1.17'nin ispatında kullanılan argümandan $\Omega_0 \subset \Omega$ yoğun alt kümesi üzerinde $a \in A$ ve $a(s) > 0$ için $1 = y(s) = a(s)$ bulunur. Bu ise her $a \in A$ elemanının Ω içinde bir açık kapalı kümenin karakteristik fonksiyonu olduğunu gösterir ve bu kümelerin birleşimi Ω içinde yoğundur. Şimdi bir $\{s \in \Omega : a(s) = 1\}$ kümesi tarafından içerilen Ω kümesinin tüm açık kapalı G alt kümelerinin topluluğunu göz önüne alalım. C ise bu G kümelerinin maksimal ayrık topluluğu olsun. Eğer $\bigcup \{G : G \in C\}$ kümesi Ω içinde yoğun değilse öyle bir $t \in \Omega$ elemanı $\bigcup \{G : G \in C\}$ kümesinin kapanışında değildir. Ama bir $a \in A$ elemanı için $a(t) = 1$'dir. $\{s : a(s) = 1\} \setminus \overline{\bigcup \{G : G \in C\}}$ kümesini C topluluğuna eklersek bir ayrık topluluk oluşur, bu ise C topluluğunun maksimal olmasıyla çelişir. O halde $D = \{\chi_G : G \in C\} \subset C(\Omega)$ alt kümesidir ve y elemanı bu küme için supremumdur. E uzayı $E^{\wedge}$ içinde bir ideal ve $G \subset \{s : a(s) = 1\}$ için $0 \leq \chi_G \leq a$ olduğundan her $\chi_G \in D$ için $\chi_G \in E$ bulunur.

$k = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere $\chi_{G_k} \in D$ alırsak her $1 \leq k \leq n$ için $\chi_{G_k} \leq a_k$ olacak şekilde $a_k \in A$ elemanları vardır. A kümesi yukarı yönlendirilmiş olduğundan öyle bir $b \in A$ elemanı vardır ki her $1 \leq k \leq n$ için $a_k \leq b$ bulunur. Böylece her k için $\chi_{G_k} \leq b$ bulunur. Öte yandan χ_{G_k} fonksiyonları dik olduğundan $\sum\limits_{k=1}^{n} \chi_{G_k} \leq b$ ve böylece $\left\| \sum\limits_{k=1}^{n} \chi_{G_k} \right\| \leq \|b\|$. (c) şıkkından D kümesi E içinde z supremumuna sahiptir. Açıkça görüleceği gibi $z \leq y$ ve $z \in C(\Omega)$ olarak görülebileceğinden z fonksiyonu Ω içinde yoğun olan $\bigcup \{G : G \in C\}$ kümesi üzerinde en az 1 değerini alır, böylece $z \geq y$ bulunur. O halde $z = y$ bulunur ve bu ise $y \in E$ olduğunu yani A kümesinin E içinde supremumu olduğunu söyler. $\square$

Önerme 4.1.19. *İçindeki her ayrık ve pozitif elemanlardan oluşan norm sınırlı alt kümenin supremuma sahip olduğu bir E Banach örgüsü sıra birime sahiptir.*

Kanıt. E içindeki her ayrık ve pozitif elemanlardan oluşan norm sınırlı kümenin E içinde supremuma sahip olduğunu varsayalım. Teorem 4.1.12 ve Teorem 4.1.19'dan E uzayı Levi norma sahip bir AM-uzayıdır. O halde E uzayının kapalı birim yuvarından alınan sonlu supremumlardan oluşan aile supremuma sahiptir. Bu supremum E için bir sıra birimdir. $\square$

4.2 Banach Örgüleri Üzerinde Regüler Operatörler

Bu bölümde Banach örgüleri üzerindeki regüler operatörler ile norm sınırlı operatörler arasındaki ilişkiyi ilgileneceğiz. E ve F iki Banach örgüsü olmak üzere E

uzayından F uzayına giden tüm norm sınırlı operatörlerin vektör uzayını $\mathcal{L}(E,F)$ ile göstereceğiz ve $\mathcal{L}^r(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca bu içerme kesin içerme olabilir. Bir sonraki örnek bununla ilgilidir.

Örnek 4.2.1. $T : C[0,1] \to c_0$ *operatörünü*

$$Tf = \left(f(1) - f(0), f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0), \ldots, f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0), \ldots\right)$$

şeklinde tanımlayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ *için* $\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right| \leq 2\|f\|_\infty$ *olduğundan her* $f \in C[0,1]$ *için* $\|Tf\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$ *olur. Böylece* T *norm sınırlıdır. Öte yandan* T *regüler olsaydı sıra sınırlı kümeleri sıra sınırlı kümelere götürürdü. O halde öyle bir* $u = (u_1, u_2, \ldots) \in c_0$ *vektörü vardır ki* $\mathbf{1}$ *bir sabit fonksiyonu olmak üzere her* $f \in [0, \mathbf{1}]$ *için* $|Tf| \leq u$ *bulunurdu. Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $f_n(0) = 0$ *ve* $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ *olacak şekilde* $f_n \in [0, \mathbf{1}]$ *alalım. O halde* $1 = \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f_n(0)\right| \leq u_n$ *sağlanır. Bu ise* $u \in c_0$ *olmasıyla çelişir. O halde* T *regüler değildir.*

E ve F Banach örgüleri olarak alındığında $\mathcal{L}(E,F)$ uzayının operatör normuna göre Banach uzayı olduğunu biliyoruz. Ama $\mathcal{L}^r(E,F)$ uzayı operatör normu altında Banach uzayı olmayabilir. Dahası, $\mathcal{L}^r(E,F)$ üzerindeki operatör normu ile $\mathcal{L}^r(E,F)$ üzerindeki sıra yapısı arasındaki ilişki iyi anlaşılmış değildir. Bu sebepten dolayı $\mathcal{L}^r(E,F)$ uzayı üzerinde sıra yapısıyla yakından ilişkili bir norm tanımlayacağız ve bu norma göre $\mathcal{L}^r(E,F)$ uzayı Banach örgüsü olur. Bu norm r-normu olarak adlandırılır ve her $T \in \mathcal{L}^r(E,F)$ için

$$\|T\|_r = \inf\left\{\|T_1 + T_2\| : T = T_1 - T_2,\ T_1, T_2 \in \mathcal{L}^+(E,F)\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Eşdeğer olarak

$$\|T\|_r = \inf\left\{\|2T_1 - T\| : T_1 \in \mathcal{L}^+(E,F) \text{ ve } T_1 \geq T\right\}.$$

Her $T \in \mathcal{L}^r(E,F)$ için (1) $\|T\| \leq \|T\|_r$; (2) Eğer $T_0 \geq T$ ve $T_0 \geq -T$ ise $\|T_0\| \geq \|T\|_r$ olduklarını görmek kolaydır. (Gerçekten $T = \frac{1}{2}[(T_0 + T) - (T_0 - T)]$ ve $T_0 + T, T_0 - T \in \mathcal{L}^r(E,F)$ şeklinde yazılabileceğinden $\|T\|_r = \left\|\frac{1}{2}[(T_0 + T) + (T_0 - T)]\right\| = \|T_0\|$.) r-normu ile $\mathcal{L}^r(E,F)$ uzayı sıralı bir Banach uzayı olur.

Genelde $\mathcal{L}(E,F)$ uzayı bir Riesz uzayı değildir. Hatta her regüler operatör bile modüle sahip olmayabilir. Aşağıda Kaplan'ın örneği bu duruma bir örnektir.

Örnek 4.2.2. (*Kaplan*). *c tüm yakınsak reel-değerli dizilerin Riesz uzayı olsun. $S,T : c \to c$ operatörleri*

$$S(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, \ldots)$$

ve

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_1, x_3, x_3, x_5, x_5, \ldots)$$

şeklinde tanımlanmış olsun. $R := S - T$ diyelim. R regüler operatörünün modülünün olmadığını göstereceğiz. $|R|$ modül operatörünün olduğunu varsayalım. $P_n : c \to c$ pozitif operatörlerini

$$P_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, x_{n+1}, \ldots)$$

şeklinde tanımlayalım. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\pm R \leq |R| P_{2n} \leq |R|$ bulunur, ve böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $|R| P_{2n} = |R|$ sağlanır. Bunun anlamı ise c uzayının her elemanının $|R|$ operatörü altındaki görüntüsünde çift indisli terimleri sıfır olduğudur. Öte yandan her $n \in \mathbb{N}$ için e_n n. terimi 1 diğer terimleri sıfır olan dizi ve $e = (1,1,1,\ldots)$ olsun. O halde

$$-R(e_n) \leq |R| e_n \leq |R| e$$

eşitsizliğinden $|R| e$ dizisinin tek terimli indisleri 1'den büyük eşit bulunur. O halde $|R| e \notin c$ ve böylece R operatörü modüle sahip değildir.

$\mathcal{L}(E,F)$ ve $\mathcal{L}^r(E,F)$ uzayları arasındaki ilişkiyi incelediğimizde iki temel problemle karşılaşırız: E ve F Banach örgüleri olmak üzere ne zaman tüm norm sınırlı operatörler regülerdir ? ve her norm sınırlı operatör regüler ise norm sınırlı operatörlerin operatör normu ile r-normu eşit midir? Bundan sonra $\mathcal{L}(E,F) \equiv \mathcal{L}^r(E,F)$ ile $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$ ve her $T \in \mathcal{L}(E,F)$ için $\|T\| = \|T\|_r$ olduğunu kastedeceğiz.

Teorem 4.2.3. *E ve F Banach örgüleri olmak üzere $\mathcal{L}(E,F) \equiv \mathcal{L}^r(E,F)$ olması için aşağıdaki koşullardan biri sağlanmalıdır:*

(1) *F sıra birime sahip Dedekind tam AM-uzayıdır.*

(2) *E bir AL-uzayı ve $P : F'' \longrightarrow F$ pozitif büzülme projeksiyonu vardır.*

Kanıt. (1) $T : E \to F$ norm sınırlı bir operatör ve e, F uzayının sıra birimi olsun. F uzayının birim yuvarı $[-e, e]$ sıra aralığı olduğundan her $x \in E^+$ için

$$|T|(x) = \sup\{|T(y)| : |y| \leq x\}$$

vardır. Böylece $|T|$ operatörü vardır ve operatör normu $\leq \|T\|$ bulunur. Böylece her $T \in \mathcal{L}(E, F)$ için $\|T\|_r = \|T\|$ olur.

(2) Üstteki durum ve Riesz-Kantorovich Teoreminden (Teorem 3.1.6), $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \equiv \mathcal{L}^r(E, \mathbb{R})$ uzayı Dedekind tamdır. Ayrıca E' uzayı Teorem 4.1.4'ten sıra birime sahip bir AM-uzayıdır. Böylece $T \in \mathcal{L}(E, F)$ alırsak (1) şıkkından dual operatörü $T' : F' \longrightarrow E'$ regüler ve $\left\|T'\right\|_r = \left\|T'\right\| = \|T\|$ olur. O halde ikinci dual operatörü T'', $\left|T''\right|$ modülü olduğundan regülerdir. Dahası $Q : E \longrightarrow E''$ değerleme operatörü olmak üzere

$$\mp T \leq P \circ \left|T''\right| \circ Q$$

olduğundan T regüler olur.

Öte yandan P projeksiyonun varlığından F uzayı Dedekind tamdır. Sonuç olarak, $\mathcal{L}(E, F)$ içinde $|T|$ modülü vardır. Son olarak $|T| \leq P \circ \left|T''\right| \circ Q$ olduğundan $\|T\|_r \leq \left\|T''\right\|_r$ ve $\left\|T''\right\|_r \leq \left\|T'\right\|$ iken $\left\|T'\right\|_r = \|T\|$ olduğundan, $\|T\|_r \leq \|T\|$ elde edilir ve böylece $\|T\|_r = \|T\|$ bulunur. □

Sonuç 4.2.4. *E keyfi Banach örgüsü olmak üzere $\mathcal{L}(E, l_\infty) \equiv \mathcal{L}^r(E, l_\infty)$.*

İlk olarak AL-uzayları üzerindeki duruma açıklık getireceğiz.

Teorem 4.2.5. *Her E AL-uzayı için $P : E'' \longrightarrow E$ pozitif büzülme projeksiyonu vardır.*

Kanıt. [15, Corollary 1]. □

Sonuç 4.2.6. *E ve F AL-uzayları olmak üzere $\mathcal{L}(E, F) \equiv \mathcal{L}^r(E, F)$.*

Kanıt. Teorem 4.2.3 ve Teorem 4.2.5'in sonucudur. □

Sonuç 4.2.7. *$\mathcal{L}(l_1, l_1) \equiv \mathcal{L}^r(l_1, l_1)$, $\mathcal{L}(L_1[0,1], L_1[0,1]) \equiv \mathcal{L}^r(L_1[0,1], L_1[0,1])$, $\mathcal{L}(l_1, L_1[0,1]) \equiv \mathcal{L}^r(l_1, L_1[0,1])$, $\mathcal{L}(L_1[0,1], l_1) \equiv \mathcal{L}^r(L_1[0,1], l_1)$ denklikleri sağlanır.*

Şimdi önemli bir sınıf olan KB-uzayları ile ilgileneceğiz. Bir E Banach örgüsü içindeki her pozitif elemanlardan oluşan artan norm sınırlı dizi norm yakınsak ise E uzayına *Kantorovich-Banach* uzayı ya da kısaca KB-uzay denir. Bu uzayları dikkate almamızın temel sebebi E uzayının KB-uzayı olması için gerek yeter koşul E uzayının $E^{''}$ uzayının bir bandı olmasıdır ([6, Theorem 4.60]). Böylece her yansımalı Banach örgüleri bir KB-uzayıdır. Ayrıca her KB-uzayı E için $P : E^{''} \longrightarrow E$ olacak şekilde pozitif büzülüme projeksiyonu vardır.

Sonuç 4.2.8. *E bir AL-uzayı be F bir KB-uzayı ise $\mathcal{L}(E,F) \equiv \mathcal{L}^r(E,F)$.*

Sonuç 4.2.9. *Her $q \in (1,\infty)$ için $\mathcal{L}(L_1[0,1], l_q) \equiv \mathcal{L}^r(L_1[0,1], l_q)$ ve $\mathcal{L}(L_1[0,1], L_q[0,1]) \equiv \mathcal{L}^r(L_1[0,1], L_q[0,1])$ olur.*

Kanıt. Her $q \in (1,\infty)$ için l_q ve $L_q[0,1]$ yansımalı Banach örgüleri olduğundan KB-uzaylarıdır. O halde bir önceki sonuçtan istenilen elde edilir. $\square$

BÖLÜM 5

KOMPAKT-KONVEKS KÜMELER ÜZERİNDE AFİN FONKSİYONLAR UZAYI

Bu bölümün sonunda AM-uzaylarının bir yerel konveks uzayın konveks kompakt bir alt kümesi üzerindeki afin fonksiyonlar ile bir karakterizasyonunu vereceğiz. Bu karakterizasyon için özellikle bir kompakt konveks küme üzerindeki ölçüler ile çalışacağız. Hatta bu bölümün üçüncü kısımı dayanağı bir kompakt konveks kümenin ekstrem noktaları üzerinde olan ölçülerle ilgilidir. Kabaca konuşursak esas hareket noktası kompakt konveks kümelerin tüm elemanlarının ekstrem noktaların bir ortalaması olarak görülebileceğinden gelmektedir ve konveks kombinezon düşüncesi ile extrem noktalar üzerinde integral alma düşüncesi yer değiştirilerek daha hassas bir konsept oluşturulur. Bu kısımda kullanılan yapılar için [17], [14] ve [4] kaynaklarına başvurulabilir.

5.1 Simplekler, Yüzler ve Gösteriliş Teoremleri

E bir vektör uzayı ve C bir konveks küme olmak üzere bir $F \subset C$ konveks alt kümesi için $x, y \in C$, $0 < \lambda < 1$ ve $\lambda x + (1-\lambda) y \in F$ iken $x, y \in F$ oluyorsa F kümesine C kümesinin bir *yüzü* denir. Bir $x \in C$ elemanı için $\{x\}$ kümesi C kümesinin bir yüzü ise C kümesinin *ekstrem noktası* olarak adlandırılır. $\partial_e C$ ile C kümesinin ekstrem noktalarının kümesini göstereceğiz.

Lemma 5.1.1. *C bir konveks küme ve F kümesi C kümesinin bir yüzü olsun. O halde F kümesinin her yüzü C kümesinin de bir yüzüdür.*

Sonuç 5.1.2. *F kümesi C konveks kümesinin bir yüzü ise $\partial_e F \subset \partial_e C$.*

C_1 ve C_2 iki konveks küme olmak üzere bir $f : C_1 \to C_2$ fonksiyonu için $x, y \in C_1$ ve $0 < \lambda < 1$ iken $f(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ oluyorsa f fonksiyonuna *afin fonksiyon* denir. Bir K kompakt konveks kümesi üzerindeki sürekli afin fonksiyonların vektör uzayını $A(K)$ ile göstereceğiz. Supremum normuna göre $A(K)$ bir Banach uzayıdır. Noktasal sıralamaya göre $A(K)$ sıralı vektör uzayıdır. Ayrıca $f \in E'$ ve $K \subset E$ kompakt konveks alt kümesi aldığımızda $f|_K \in A(K)$. Böylece Hahn-Banach teoreminden $A(K)$ uzayının elemanları K kümesinin noktalarını ayırır.

Lemma 5.1.3. *C_1 ve C_2 iki konveks küme, $f : C_1 \to C_2$ afin, üzerine bir fonksiyon ve F kümesi C_2 kümesinin boştan farklı bir yüzü ise $f^{-1}(F)$ kümesi C_1 kümesinin boştan farklı bir yüzüdür.*

Kanıt. Açıktır. □

Teorem 5.1.4. *$(Krein - Milman)$. (E, τ) yerel konveks topolojik vektör uzayı ve $C \subset E$ konveks kümesi kompakt ise C kümesi bir ekstrem noktaya sahiptir. Dahası C kümesi ekstrem noktalarının τ-kapalı, konvex kabuğudur.*

Kanıt. [6, Theorem 3.14]. □

Teorem 5.1.5. *$(Milman)$. (E, τ) yerel konveks topolojik vektör uzay ve $C \subset E$ konveks kompakt küme ve C kümesi bir Z kümesinin kapalı konveks kabuğu olsun. O halde C kümesinin ekstrem noktaları Z kümesinin kapanışının içindedir.*

Kanıt. [14, Proposition 1.5]. □

Tanım 5.1.6. *E bir vektör uzayı ve A ve B boştan farklı iki alt küme olsun. E üzerindeki bir x^* lineer fonksiyoneli için*

- *her $a \in A$ için $x^*(a) \geq c$ ve her $b \in B$ için $x^*(b) \leq c$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ varsa x^* lineer fonksiyoneline A ve B kümelerini ayırır denir,*

- *her $a \in A$ için $x^* (a) \geq c + \epsilon$ ve her $b \in B$ için $x^* (b) \leq c$ olacak şekilde $c \in \mathbb{R}$ ve $\epsilon > 0$ varsa x^* lineer fonksiyoneline A ve B kümelerini kesin ayırır denir.*

Teorem 5.1.7. (Ayırma Teoremi). *(E, τ) yerel konveks bir uzay ve A ve B iki ayrık boştan farklı konveks alt küme olsun. Eğer A veya B kümesinin bir iç noktası varsa sıfırdan farklı öyle bir E üzerinde τ-sürekli lineer fonksiyoneli vardır ki A ve B kümelerini ayırır.*

Kanıt. [6, Theorem 3.10]. □

Teorem 5.1.8. (Kesin Ayırma Teoremi). *(E, τ) yerel konveks bir uzay ve A ve B iki ayrık konveks alt küme olsun. Eğer A kümesi τ-kapalı ve B kümesi τ-kompakt ise öyle bir $x^{'}$ τ-sürekli lineer fonksiyoneli, $c \in \mathbb{R}$ ve $\epsilon > 0$ vardır ki her $x \in B$ ve $y \in A$ için*

$$x^{'} (x) \leq c < c + \epsilon \leq x^{'} (y)$$

sağlanır.

Kanıt. [6, Theorem 3.12]. □

$P (\Omega)$ ile Ω üzerindeki pozitif regüler Borel olasılık ölçülerinin kümesini gösterelim. $\mu \in P (\Omega)$ ve D kümesi Ω kümesinin bir Borel alt kümesi olsun. Ω kümesinin Borel alt kümeleri üzerinde $\mu_D (B) = \mu (D \cap B)$ olacak şekilde bir μ_D ölçüsü tanımlayalım. μ_D ölçüsünün regüler olduğunu görmek kolaydır. Eğer $\mu (D) \neq 0$ ise $\mu (D)^{-1} \mu_D \in P(\Omega)$ bulunur. Her $w \in \Omega$ için $\mathcal{E}_w$ ile w noktasındaki Dirac ölçüsünü gösterelim.

Lemma 5.1.9. *Ω kompakt Hausdorff uzay olmak üzere $\partial_e (P (\Omega)) = \{\mathcal{E}_w : w \in \Omega\}$.*

Kanıt. $\mathcal{E}_w$ ölçüsünün ekstrem nokta olduğu kolayca görülebilir. Eğer $\mu, \nu \in P(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$ ve $\mathcal{E}_w = \alpha\mu + (1 - \alpha) \nu$ şeklinde yazılırsa

$$1 = \mathcal{E}_w (\{w\}) = \alpha\mu (\{w\}) + (1 - \alpha) \nu (\{w\})$$

$\mu (\{w\}), \nu (\{w\}) \leq 1$ olduğundan yukarıdaki eşitlik sadece $\mu (\{w\}) = \nu (\{w\}) = 1$ olduğunda geçerlidir. μ ve ν olasılık ölçüleri olduğundan $\mu = \nu = \mathcal{E}_w$ bulunur.

Tersine μ ölçüsü $P(\Omega)$ kümesinin ekstrem noktası olsun. Eğer μ ölçüsü her $w \in \Omega$ için $\mathcal{E}_w$ ölçüsüne eşit değilse, kapalı bir $D \subset \Omega$ için $0 < \mu(D) < 1$ olduğunu göstereceğiz. Ω kümesinin μ-ölçüsü 1 olan bütün kapalı alt kümelerin topluluğunu göz önüne alalım. D_1 ve D_2 iki böyle küme ise $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$ veya 1, değilse aradığımız D kümesi bulunur. Eğer $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$ ise $\mu(D_1 - D_2) = \mu(D_2 - D_1) = 1$ ve böylece $\mu(\Omega) \geq 2$ bulunur ki bu ise imkansızdır. Böylece bu aile sonlu kesişim özelliğine sahiptir, K kompakt olduğundan bu ailedeki tüm kümelerin kesişimi boştan farklıdır. Kesişimden bir w elemanı alalım. Eğer $\mu(\{w\})$ sıfırdan farklı ise ya istenen kapalı kümeyi buluruz (eğer $\mu(\{w\}) < 1$) ya da istenen sonucu bulmuş oluruz (eğer $\mu(\{w\}) = 1$). Böylece regülerlikten w elemanını içeren ve μ-ölçüsü $1/2$'den küçük olan bir açık küme bulabiliriz. bu açık kümenin tümleyeni olan kapalı kümenin ölçüsü ya 0 ile 1 arasındadır ya da 1'dir. 1 olması durumu ise w elemanının tanımıyla çelişir. Diğer durumda istenilen D kümesini elde etmiş oluruz. Şimdi $\mu \neq \mu(D)^{-1}\mu_D$ ve

$$\mu = \mu(D)\left(\mu(D)^{-1}\mu_D\right) + (1 - \mu(D))\left(\mu(\Omega - D)^{-1}\mu_{\Omega - D}\right),$$

bulunur. Bu ise μ ölçüsünün ekstrem olması ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır. □

Ω kompakt Hausdorff bir uzay ve $A \subset C(\Omega)$ sabit fonksiyonları içeren ve Ω kümesinin noktalarını ayıran kapalı bir alt uzay olsun. A^* uzayının zayıf* kompakt konvex $\{f \in A^* : f(\mathbf{1}) = \|f\| = 1\}$ (burada $\mathbf{1}$, 1 sabit fonksiyonunu gösteriyor.) alt kümesine A uzayının *durum uzayı* denir ve $S(A)$ ile gösterilir .

Özellikle bir K kompakt konveks küme alırsak $A(K)$ uzayı $C(K)$ uzayının sabit fonksiyonları içeren, K kümesinin noktalarını ayıran kapalı bir alt uzayıdır. O halde $S(A(K))$ durum uzayını oluşturabiliriz. $k \in K$ için $\tilde{k}$ ile k noktasındaki değerleme fonksiyonu ise $\tilde{k} \in S(A(K))$ bulunur.

Teorem 5.1.10. *$k \mapsto \tilde{k}$ fonksiyonu K kümesinden $S(A(K))$ üzerine bir afin homeomorfizmdir.*

Kanıt. Yukarıdaki fonksiyonun afin, sürekli ve $A(K)$ uzayının K kümesinin noktalarını ayırmasından bire-bir olduğunu görmek kolaydır. Bu fonksiyonun üzerine olduğunu göstermemiz gerekir. $\left\{\tilde{k} : k \in K\right\} \subset S(A(K))$ kompakt konveks bir alt küme olduğundan bu fonksiyonun sadece $\partial_e S(A(K))$ üzerine olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$\rho : P(K) \to S(A(K))$ kısıtlanış tasviri ve $f \in \partial_e S(A(K))$ olsun. Lemma 5.1.3'ten $\rho^{-1}(f) \subset P(K)$ kapalı bir yüzdür. Krein-Milman Teoreminden bu küme bir ekstrem noktaya sahiptir ve bu nokta $P(K)$ uzayının da ekstrem noktasıdır. Lemma 5.1.9'dan bir $k \in K$ için $\mathcal{E}_k$ formundadır ve böylece her $a \in A(K)$ için $a(k) = f(a)$ bulunur. O halde $k \to \tilde{k}$ üzerinedir. □

Sonuç 5.1.11. *Her $\mu \in P(K)$ için tek bir $k \in K$ vardır ki her $a \in A(K)$ için $a(k) = \int a d\mu$.*

Kanıt. $\mu \in P(K)$ ölçüsünü $C(K)$ üzerinde lineer sınırlı operatör olarak düşünüp bu operötörü $A(K)$ üzerine kıstlayalım. Kısıtlanış operatörü ile bir önceki teoremdeki K kümesini $S(A(K))$ üzerine götüren homeomorfinin tersi kullanırsak $k \in K$ elemanının varlığı ortaya çıkar. Öte yandan $A(K)$ uzayı K kümesinin noktalarını ayırdığından bu nokta tek türlü belirlidir. □

Bu nokta μ ölçüsünün *ağırlık merkezi* olarak adlandırılır ve $r(\mu)$ şeklinde gösterilir. Bu kavram bize K kümesinin ekstrem noktalarının bir başka karakterizasyonunu vermemizi sağlar.

Sonuç 5.1.12. *$k \in K$ noktasının ekstrem nokta olması için gerek yeter koşul $r(\mu) = k$ ise $\mu = \mathcal{E}_k$ olmasıdır.*

Kanıt. k bir ekstrem nokta değilse öyle $x, y \in K$, $x \neq y$, $0 < \lambda < 1$ vardır ki $k = \lambda x + (1-\lambda) y$ şeklinde yazılır. Açıkça görüleceği gibi $\lambda \mathcal{E}_x + (1-\lambda)\mathcal{E}_y \neq \mathcal{E}_k$ ve $r(\lambda \mathcal{E}_x + (1-\lambda)\mathcal{E}_y) = k$. Tersine k bir ekstrem nokta ise $r^{-1}(k) \subset P(K)$ boştan farklı kapalı bir yüzdür. Lemma 5.1.9'dan $P(K)$ kümesinin herhangi bir ekstrem noktası bir $k' \in K$ noktasında değerleme fonksiyonu olduğunu biliyoruz. O halde $k = k'$ olmak zorunda. Krein-Milman Teoreminden $r^{-1}(k) = \{\mathcal{E}_k\}$ bulunur. □

E sıralı bir vektör uzayı ve $C \subset E$ konveks bir küme olmak üzere eğer her $x \in E^+$ için öyle $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $c \in C$ var ve $x = \lambda c$ olacak şekilde tek türlü yazılıyorsa C kümesine E uzayının pozitif konisi için bir *taban* denir. Eğer E bir Riesz uzayı ise C kümesi *simpleks* olarak adlandırılır. Özellikle K kompakt konveks bir küme olmak üzere K kümesinin simpleks olması için gerek yeter koşul $A(K)^*$ bir Riesz uzayı olmasıdır.

Önerme 5.1.13. *K kompakt konveks bir küme olmak üzere, $A(K)$ uzayı Riesz Ayrıştırma özelliğine sahip ise K bir simplekstir.*

Kanıt. $f \in A(K)^*$ iken $f \vee 0 \in A(K)^*$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $A(K)^+$ üzerinde $h : a \longrightarrow \sup\{f(b) : 0 \leq b \leq a\}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Açıkça görüleceği gibi $h(a) \geq f(a), 0$. Eğer $a \in A(K)^+$ ve $0 \leq b \leq a$ ise $f(b) \leq \|f\| \|b\| \leq \|f\| \|a\|$ olur. Böylece $|h(a)| \leq \|f\| \|a\|$ bulunur, yani h fonksiyonu $A(K)$ uzayı üzerinde reel değerli bir fonksiyondur.

h fonksiyonu $A(K)^+$ üzerinde toplamsaldır:

$$\begin{aligned} h(a_1 + a_2) &= \sup\{f(b) : 0 \leq b \leq a_1 + a_2\} \\ &= \sup\{f(b_1 + b_2) : 0 \leq b_1 \leq a_1,\ 0 \leq b_2 \leq a_2\} \\ &= \sup\{f(b_1) : 0 \leq b_1 \leq a_1\} + \sup\{f(b_2) : 0 \leq b_2 \leq a_2\} \\ &= h(a_1) + h(a_2). \end{aligned} \tag{5.1}$$

O halde h fonksiyonu $A(K)$ üzerinde bir lineer fonksiyonele genişletilebilir. Eğer $g \geq f, 0$ ise $b \geq 0$ iken $g(b) \geq f(b)$ ve böylece $a \geq 0$ iken

$$g(a) = \sup\{g(b) : 0 \leq b \leq a\} \geq \sup\{f(b) : 0 \leq b \leq a\} = h(a).$$

Sadece h fonksiyonelinin sınırlılığını göstermek kaldı.

$a \in A(K)$ alırsak $a = \|a\| \mathbf{1} - (\|a\| \mathbf{1} - a)$ ve $\|a\| \mathbf{1} \geq 0$ ve $\|a\| \mathbf{1} - a \geq 0$ olacak şekilde yazabiliriz. Böylece

$$\begin{aligned} |h(a)| &\leq h(\|a\| \mathbf{1}) + h(\|a\| \mathbf{1} - a) \\ &\leq \|f\| (\|a\| + \|\|a\| \mathbf{1} - a\|) \\ &\leq 3 \|f\| \|a\| \end{aligned} \tag{5.2}$$

bulunur, yani $\|h\| \leq 3 \|f\|$ olur. İspat tamamlanır. □

K bir kompakt simpleks olmak üzere $A(K)^*$ üzerindeki idealleri tanımlayabiliriz. $F \subset S(A(K))$ olmak üzere $F^{\sim} = \{\lambda f : \lambda \geq 0, f \in F\}$ kümesini tanımlayalım.

Önerme 5.1.14. *$J \to J \cap S(A(K))$ tasviri $A(K)^*$ üzerindeki idealler ile $S(A(K))$ kümesinin yüzleri üzerine bir bire-bir tasvirdir ve bu tasvirin tersi $F \to F^\sim - F^\sim$ tasviridir.*

Kanıt. J bir ideal, $x, y \in S(A(K))$ ve $0 < \lambda < 1$ olmak üzere $\lambda x + (1-\lambda) y \in J$ olduğunu varsayalım. O halde $0 \leq \lambda x \leq (1-\lambda) y + \lambda x$ ve böylece $\lambda x \in J$ olur. J vektör uzayı olduğundan $x \in J$ ve böylece $x \in J \cap S(A(K))$. Benzer şekilde $y \in J \cap S(A(K))$. Böylece $J \cap S(A(K))$ kümesi bir yüzdür.

Şimdi F kümesinin $S(A(K))$ durum uzayının bir yüzü olduğunu varsayalım. Sadece $0 \leq x \leq y \in F^\sim$ ise $x \in F^\sim$ olduğunu göstremek yeterlidir. Genelliği bozmaksızın $y \in F$ ve $0 \neq x \neq y$ olduğunu varsayabiliriz. O halde bir $0 < \lambda < 1$ için $x' = \lambda^{-1} x \in S(A(K))$, böylece $y = \lambda x' + (1-\lambda) \dfrac{(y-x)}{(1-\lambda)}$ ve burada $x', \dfrac{y-x}{(1-\lambda)} \in S(A(K))$. F bir yüz olduğundan $x', \dfrac{y-x}{(1-\lambda)} \in F$. O halde $x = \lambda x' \in F^\sim$ bulunur. □

Teorem 5.1.15. *E bir Banach örgüsü, $S \subset E$ bir simpleks ve F kümesi S simpleksinin bir yüzü olsun, o halde F yüzünün norm kapanışı yine S simpleksinin bir yüzüdür.*

Kanıt. İlk olarak S simpleksinin bir G yüzünün norm kapalı olması için gerek yeter koşul $G^\sim$ kümesinin $S^\sim$ kümesinin norm kapalı yüzü olmasıdır. G yüzünün norm kapalı, $\lambda_n, \mu \geq 0$, $f_n \in F$, $g \in S$ ve $\lambda_n f_n \to \mu g$ olduğunu varsayalım. O halde

$$|\lambda_n - \mu| = |\|\lambda_n f\| - \|\mu g\|| \leq \|\lambda_n f_n - \mu g\| \to 0$$

bulunur. Böylece

$$\|\mu f_n - \mu g\| \leq \|\mu f_n - \lambda_n f_n\| + \|\lambda_n f_n - \mu f\| = |\mu - \lambda| + \|\lambda_n f_n - \mu f\| \to 0$$

yani, $\mu g \in \mu \overline{G} = \mu G \subset G^\sim$. Böylece $F^\sim$ kümesinin norm kapanışının $S^\sim$ kümesinin yüzü olduğunu göstermek yeterlidir.

f elemanı $F^\sim$ kümesinin norm kapanışında ve $0 \leq g \leq f$ olsun. $\left\|f - f'\right\| < \frac{\epsilon}{3}$ olacak şekilde $f' \in F^\sim$ alalım. Ayrıca $0 \leq g + \left(f' - g\right) \wedge 0 \leq f', g$ bulunur. $f \geq g$ olduğundan, $\left(f' - f\right) \leq \left(f' - g\right)$ ve böylece $\left(f' - f\right) \wedge 0 \leq \left(f' - g\right) \wedge 0 \leq 0$ bulunur.

$a \in A(S)$ aldığımızda $a = \|a\| 1_S - (\|a\| 1_S - a)$ şeklinde yazabildiğimizden $a = b - c$, $b, c \in A(S)^+$ ve $\|b\| + \|c\| \leq 3\|a\|$ şeklinde düşünebiliriz. $h \in A(S)^*$ ise $0 \leq b \leq a$ iken $\|b\| \leq \|a\|$ olduğunu da kullanarak

$$\begin{aligned}
\|(h \wedge 0)\| &= \sup\{|(h \wedge 0)(a)| : \|a\| \leq 1\} \\
&\leq 3 \sup\{|(h \wedge 0)(a)| : \|a\| \leq 1, a \geq 0\} \\
&= 3 \sup\{\inf\{h(b) : 0 \leq b \leq a\} : \|a\| \leq 1, a \geq 0\} \\
&\leq 3\|h\|
\end{aligned}$$

bulunur.

Böylece $\|(f' - f) \wedge 0\| \leq 3 \left\|f' - f\right\| \leq 3\left(\frac{\epsilon}{3}\right) = \epsilon$. S (ve -S) üzerinde norm toplamsal olduğundan $\left\|\left(f' - g\right) \wedge 0\right\| \leq \epsilon$ bulunur. O halde

$$0 \leq g + \left(f' - g\right) \wedge 0 \leq f' \in F^{\sim}$$

olduğunu gözlemlemiş oluruz. Buradan da $g + \left(f' - g\right) \wedge 0 \in F^{\sim}$ bulunur, böylece g elemanı $F^{\sim}$ kümesinin norm kapanışına ait olur. Böylece ispat tamamlanır.

□

5.2 Kompakt-Konveks Kümeler Üzerindeki Reel-Değerli Fonksiyonlar

K konveks kümesi üzerinde tanımlı bir f reel değerli fonksiyonu için $x, y \in K$ ve $0 < \lambda < 1$ iken $\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda) y)$ oluyorsa f fonksiyonuna *konveks* denir. Eğer $-f$ konveks ise f fonksiyonuna konkav denir. O halde hem konveks hem de konkav olan f fonksiyonu afindir.

Bir $f : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için her $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\{k \in K : f(k) \leq \alpha\}$ kümesi kapalı oluyorsa f fonksiyonuna *alt yarı sürekli* (a.y.s.) denir ve bir f fonksiyonu için $-f$ alt yarı sürekli ise f fonksiyonuna *üst yarı sürekli* (ü.y.s.) denir. Sonuç olarak hem üst yarı sürekli hem alt yarı sürekli fonksiyon süreklidir.

Bir vektör uzayının boştan farklı, toplama işlemi altında ve negatif olmayan reel skalerler ile çarpma altında kapalı olan bir A kümesi alalım. A kümesi sıfırdan farklı elemanlarının negatif katlarını içermiyorsa A kümesine bir *koni* denir. Sıralı bir vektör uzayında pozitif elemanlardan oluşan küme bir konidir ve genelde pozitif koni olarak adlandırılır.

Lemma 5.2.1. *E Riesz uzayı ve W bir koni olmak üzere $u, w \in W$ iken $u \vee w \in W$ ise $W - W$ vektör uzayı E Riesz uzayının alt örgüsüdür.*

Kanıt. $i = 1, 2$ için $u_i, w_i \in W$ olmak üzere $e_1 = u_1 - w_1$, $e_2 = u_2 - w_2$ olsun. O halde $i = 1, 2$ için $e_i' = e_i + (w_1 + w_2) \in W$. Böylece $e_1 \vee e_2 = \left(e_1' - (w_1 + w_2)\right) \vee \left(e_2' - (w_1 + w_2)\right) = e_1' \vee e_2' - (w_1 + w_2) \in W - W$ bulunur. □

Teorem 5.2.2. *K kompakt konveks bir küme olmak üzere K kümesi üzerindeki sürekli konveks fonksiyonların farklarından oluşan vektör uzayı $C(K)$ içinde yoğundur.*

Kanıt. Sürekli konveks fonksiyonların bir koni oluşturduklarını, bu koninin sonlu supremum altında kapalı olduğunu, K kümesinin noktalarını ayrıdıklarını göz önüne alarak bir önceki teorem ve Stone-Weierstrass Teoreminden istenilen elde edilir. □

$f : K \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyounun *üst-çizgesi*, Sup(f),

$$\{(k, \alpha) : k \in K, \alpha \geq f(k)\} \subseteq E \times \mathbb{R}$$

kümesidir. f fonksiyonunun *alt-çizgesi*, Sub(f),

$$\{(k, \alpha) : k \in K, \alpha \leq f(k)\} \subseteq E \times \mathbb{R}$$

kümesidir. Kolayca görüleceği gibi f fonksiyonun konveks olması için gerek yeter koşul Sup(f) kümesinin konveks olmasıdır ve konkav olması için gerek yeter koşul Sub(f) kümesinin konveks olmasıdır. Ayrıca f fonksiyonunun a.y.s. olması için gerek yeter koşul Sup(f) kümesinin kapalı olmasıdır ve ü.y.s. olması için gerek yeter koşul Sub(f) kümesinin kapalı olmasıdır.

Önerme 5.2.3. *f fonksiyonu K üzerinde sınırlı ü.y.s. konveks bir fonksiyon, g fonksiyonu K üzerinde sınırlı ü.y.s. konkav fonksiyon ve $f|_{\partial_e(K)} \leq g|_{\partial_e(K)}$ ise $f \leq g$ sağlanır.*

Kanıt. Bir $k_0 \in K$ için $g(k_0) < f(k_0)$ olduğunu varsayalım. g fonksiyonun alt çizgesi $E \times \mathbb{R}$ uzayının konveks kapalı bir kümesidir ve $(k_0, f(k_0))$ noktasını içermez. Hanh Banach Teoreminden $Sub(g)$ kümesi ile $(k_0, f(k_0))$ noktasını ayıran bir lineer sürekli fonksiyon vardır. Bu fonksiyonun K üzerine kısıtlanışını h ile gösterelim. O halde $h > g$ ve $f(k_0) > h(k_0)$ olur.

$f - h$ fonksiyonu ü.y.s. ve konvekstir. Ayrıca

$$\left\{k \in K : (f-h)(k) = \sup\left\{(f-h)\left(k'\right) : k' \in K\right\}\right\}$$

kümesi boştan farklı kapalı konveks bir kümedir ayrıca kolayca görüleceği gibi K kümesinin bir yüzüdür. Bu kümenin bir ekstrem noktası vardır ve bu ekstrem nokta K kümesinin de ekstrem noktasıdır. Böylece

$$\begin{aligned} \sup\{(f-h)(k) : k \in K\} &= \sup\{(f-h)(k) : k \in \partial_e(K)\} \\ &\leq \sup\{(f-g)(k) : k \in K\} \leq 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

olur. Bu durumda $0 < f(k_0) - h(k_0) < 0$ bulunur ki bu bir çelişkidir. □

Sonuç 5.2.4. *f ve g fonksiyonları K üzerinde sınırlı, ü.y.s ve afin fonksiyonların farkı şeklinde yazılabiliyor ve $f|_{\partial_e(K)} \leq g|_{\partial_e(K)}$ ise $f \leq g$ sağlanır.*

Kanıt. f_1, f_2, g_1 ve g_2 fonksiyonları K üzerinde sınırlı ü.y.s. ve afin fonksiyonlar ve $f = f_1 - f_2$, $g = g_1 - g_2$ şeklinde olsun. Önerme 5.2.3 gereğince $f_1 + g_2 \leq f_2 + g_1$ bulunur, böylece $f = f_1 - f_2 \leq g_1 - g_2 = g$. □

Önerme 5.2.5. *K kompakt konveks bir küme ve $f : K \to \mathbb{R}$ sınırlı, a.y.s ve afin bir fonksiyon ise $A(K)$ içinde f fonksiyonuna yakınsayan artan bir ağ vardır.*

Kanıt. $\{g \in A(K) : g < f\}$ kümesini göz önüne alalım. Bu kümenin yukarı yönlendirildiğini gösterelim. $g_1, g_2 \in A(K)$ ve $g_1, g_2 < f$ olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmaksızın f, g_1 ve g_2 fonksiyonlarının pozitif olduğunu kabul edebiliriz. $M_i = \{(k, \alpha) : k \in K, 0 \leq \alpha \leq g_i(k)\}$ ve $N = Sup(f)$ olsun. $g_l, g_2 < f$ olduğundan $N \cap (M_1 \cup M_2) = \emptyset$. f fonksiyonu afin olduğundan $N \cap co(M_1 \cup M_2) = \emptyset$. M_1 ve M_2 kompakt konveks olduklarından $co(M_1 \cup M_2)$ kümeside kompakttır. Kesin Ayırma Teoreminden $co(M_1 \cup M_2)$ kümesi ile N kümesi bir kapalı hiperdüzlem ile ayrılır. Bu kapalı hiperdüzlem aslında bir lineer sürekli fonksiyonelin grafiği olduğundan bu fonksiyonelin K üzerine kısıtlanışına h dersek $h \in A(K)$ ve $g_1, g_2 < h < f$ bulunur. Eğer bir $k_0 \in K$ ve $\alpha < f(k_0)$ ise tekrar $h < f$ ve $h(k_0) > 0$ sağlayan bir $h \in A(K)$ fonksiyonu bulabiliriz, yani $\sup\{g \in A(K) : g < f\} = f$ bulunur. □

Şimdi bir fonksiyonun üst ve alt zarfını tanımlayacağız. $X \subset K$ ve $\partial_e(K) \subset X$ olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : X \to [\alpha, \infty]$ fonksiyonunun alt zarfı

$$\check{f} = \sup\{a \in A(K) : a|_X \leq f\} \tag{5.4}$$

fonksiyonudur. Açıkca görüleceği gibi $\check{f}$ fonksiyonun üst çizgesi f fonksiyonun üst çizgesinin kapalı konveks kabuğudur. Benzer şekilde $\check{f} = \sup\{a \in A(K) : a|_X < f\}$. Özellikle söylemek gerekir ki $\check{f}$ fonksiyonu a.y.s ve konvekstir. Benzer şekilde $\hat{f} : X \to [-\infty, \alpha]$ ve $\hat{f} = -(-f)\check{}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon f fonksiyonun üst zarfıdır ve bu fonksiyonn ü.y.s ve konkav bir fonksiyondur. Bir dizi açık sonuçlar aşağıda verilmiştir:

Önerme 5.2.6. *K kompakt konveks bir küme, $\partial_e(K) \subset X \subset K$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g : X \to [-\infty, \alpha]$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:*

1. *Her $k \in K$ için $\hat{f}(k) \leq \alpha$.*
2. *$f \leq g \Rightarrow \hat{f} \leq \hat{g}$.*
3. *$\widehat{(f+g)} \leq \hat{f} + \hat{g}$.*
4. *$\widehat{(\beta f)} = \beta \hat{f}$.*

5.3 Noktaların Ölçülerle Temsili

K üzerindeki tüm regüler Borel ölçülerinin uzayı $M(K)$ üzerinde her f sürekli ve konveks fonksiyonu için $\mu(f) \leq \nu(f)$ ise $\mu < \nu$ şeklinde bir sıralama tanımlayalım.

Eğer $\nu \in P(K)$ için $\mu > \nu$ ya da $\mu < \nu$ oluyorsa $\mu \in P(K)$ ve $r(\mu) = r(\nu)$ bulunur. $a \in A(K)$ elemanı için a ve $-a$ sürekli konveks fonksiyonlar olduğundan $\mu(a) \leq \nu(a) = -\nu(-a) \leq -\mu(-a) = \mu(a)$ olur.

Önerme 5.3.1. *$\mu, \nu \in M(K)$ olmak üzere $\mu < \nu$ olması için gerek yeter koşul her $f \in C(K)$ için $\nu(f) \leq \mu\left(\hat{f}\right)$ olmasıdır.*

Kanıt. Önerme 5.2.5'te kullanılan benzer bir argümanla $\hat{f}$ fonksiyonu $A(K)$ uzayının elemanlarının sonlu infimumlarından oluşan aşağı yönlendirilmiş bir ailenin infimumudur, yani $\hat{f}$ fonksiyonu sürekli konkav fonksiyonlardan oluşan bir ailenin infimumudur. Böylece $\mu < \nu$ ise $\mu\left(\hat{f}\right) \geq \nu\left(\hat{f}\right) \geq \nu(f)$ bulunur.

Öte yandan f fonksiyonunu sürekli ve konkav seçersek $f = \hat{f}$ ve $\nu(f) \leq \mu(f)$ bulunur. Bu durumda $\mu < \nu$ olur. □

Önerme 5.3.2. *K kompakt konveks bir küme, $f \in C(K)$ ve $\mu \in P(K)$ olsun. Bu durumda $\nu > \mu$ ve $\nu(f) = \mu\left(\hat{f}\right)$ olacak şekilde $\nu \in P(K)$ vardır.*

Kanıt. Önerme 5.2.6'dan $\Phi : g \to \mu(\hat{g})$ tasviri $C(K)$ üzerinde alt toplamsal ve homojen bir fonksiyoneldir. $\mathbb{R}f$ üzerinde bir ν_0 fonksiyonelini $\nu_0(\alpha f) = \alpha\mu\left(\hat{f}\right)$ şeklinde tanımlayalım. Eğer $\alpha \geq 0$ ise $\nu_0(\alpha f) = \alpha\mu\left(\hat{f}\right) = \Phi(\alpha f)$. Eğer $\alpha < 0$ ise $\beta = -\alpha$ dersek $-\mu\left(\widehat{\beta f}\right) \leq \mu\left(\widehat{-\beta f}\right)$ olduğundan $\nu_0(\alpha f) = -\beta\mu\left(\hat{f}\right) = -\mu\left(\widehat{\beta f}\right) \leq \mu\left(\widehat{-\beta f}\right) = \mu\left(\widehat{\alpha f}\right) = \Phi(\alpha f)$ bulunur. O halde ν_0 fonksiyoneli Φ tarafından majorize edilir. Hahn Banach Teoreminden ν_0 fonksiyonelini $C(K)$ üzerinde tanımlı bir ν lineer fonksiyoneline genişletilir. O halde $\nu(f) = \mu\left(\hat{f}\right)$ ve her $g \in C(K)$ için $\nu(g) \leq \mu(\hat{g})$.

Eğer $g \in C(K)$ ve $g \leq 0$ ise $\hat{g} \leq 0$ olur, böylece $\nu(g) \leq \mu(\hat{g}) \leq 0$. Dolayısıyla ν pozitiftir. Son olarak her $g \in C(K)$ için $\nu(g) \leq \mu(\hat{g})$ olduğundan bir önceki önermeden $\nu > \mu$ bulunur. Buradan da $\nu \in P(K)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 5.3.3. *$k \in K$ olmak üzere aşağıdakiler birbirine eşdeğerdir:*
(1) *$k \in \partial_e K$.*
(2) *Her $f \in C(K)$ için $f(k) = \hat{f}(k)$.*
(3) *Her ü.y.s ve sınırlı $f : K \to [-\infty, \infty)$ için $f(k) = \hat{f}(k)$.*

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) : $k \in \partial_e K$ ve $f \in C(K)$ ise Önerme 5.3.2'den $\nu(f) = \hat{f}(k)$ ve $\nu > \mathcal{E}_k$ olacak şekilde $\nu \in P(K)$ vardır. Ayrıca ν ölçüsünün ağırlık merkezi de k noktasıdır, böylece Sonuç 5.1.12'den $\nu = \mathcal{E}_k$ bulunur, yani $f(k) = \hat{f}(k)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : f_α ağı $C(K)$ aşağı yönlendirilmiş ve f bu ağın infimumu olsun. O halde $\inf \hat{f}_\alpha$ ü.y.s. ve konkavdır ve $\hat{f}$ fonksiyonundan büyük değerler alır. Böylece $f(k) = \inf f_\alpha(k) = \inf \hat{f}_\alpha(k) \geq \hat{f}(k) \geq f(k)$ bulunur.

(3) $\Rightarrow$ (2) : Açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1) : $-f$ fonksiyonunu göz önüne alırsak $f(k) = \check{f}(k)$ olur. $\mu \in P(K)$ ve $r(\mu) = k$ olsun. $\mu > \mathcal{E}_k$ olduğundan ve Önerme 5.3.1'ten

$$f(k) = \check{f}(k) \leq \mu(f) \leq \hat{f}(k) = f(k)$$

bulunur. Öte yandan buradan ve tekrar Önerme 5.3.1'ten $\mathcal{E}_k > \mu$ bulunur. Sonuç olarak $\mathcal{E}_k = \mu$ bulunur. Sonuç 5.1.12'den k ekstrem nokta olarak bulunur. □

$f \in C(K)$ fonksiyonu için B_f *sınır kümesini* $\left\{k \in K : f(k) = \hat{f}(k)\right\}$ şeklinde tanımlayalım.

Sonuç 5.3.4. $\partial_e K = \bigcap \{B_f : f \in C(K)\}$.

Önerme 5.3.5. *$\mu \in P(K)$ olmak üzere aşağıdakiler birbirine eşdeğerdir.*
(1) *μ ölçüsü $<$ sıralamasına göre maksimaldir.*
(2) *Her $f \in C(K)$ için $\mu\left(\hat{f}\right) = \mu(f)$.*
(3) *Her konveks $f \in C(K)$ için $\mu\left(\hat{f}\right) = \mu(f)$.*

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) : Önerme 5.3.2'den $\nu > \mu$ ve $\nu(f) = \mu\left(\hat{f}\right)$ olacak şekilde $\nu \in P(K)$ vardır. Maksimallikten $\mu = \nu$ ve böylece $\mu(f) = \mu\left(\hat{f}\right)$ bulunur.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1) : f sürekli ve konveks bir fonksiyon ve $\nu > \mu$ olsun. O halde $f = \check{f}$, böylece Önerme 5.3.2'den

$$\mu(f) = \mu\left(\check{f}\right) \leq \nu(f) \leq \mu\left(\hat{f}\right) = \mu(f).$$

Böylece μ ve ν sürekli konveks fonksiyonlar üzerinde çakışırlar. Dolayısıyla Önerme 5.2.3'ten $C(K)$ üzerinde eşitler. □

Sonuç 5.3.6. *μ ölçüsü $>$ - maksimal ise $\mu\left(\overline{\partial_e K}\right) = 1$.*

Kanıt. $C \subset K$ kompakt bir alt küme ve $C \cap \overline{\partial_e K} = \emptyset$ olsun. $f|_{\overline{\partial_e K}} = 0$, $f|_C = -1$ ve $-1 \leq f \leq 0$ olacak şekilde $f \in C(K)$ alalım. $\hat{f} = 0$ olduğundan

$$0 = \mu\left(\hat{f}\right) = \mu(f) \leq -\mu(C) \leq 0$$

bulunur. Regülerlikten $\mu\left(\overline{\partial_e K}\right) = 1$. □

Önerme 5.3.5'in (2) şıkkından μ ölçüsünün maksimal olması için gerek yeter koşul her $f \in C(K)$ için $\mu(B_f) = 1$ olmasıdır. Bu sebepten dolayı maksimal ölçüler sınır ölçüler olarak da adlandırılır.

Tanım 5.3.7. *$\mu, \nu \in P(K)$ ölçüleri her $f \in A(K)$ için $\mu(f) = \nu(f)$ sağlıyorsa $\mu \sim \nu$ yazacağız.*

Önerme 5.3.8. *f fonksiyonu K kompakt konveks kümesi üzerinde sürekli bir fonksiyon ise, her $k \in K$ için*

$$\hat{f}(k) = \sup\left\{\int f d\mu : \mu \sim \mathcal{E}_k\right\}$$

olur.

Kanıt. $f'(x) := \sup\left\{\int f d\mu : \mu \sim \mathcal{E}_k\right\}$ diyelim. $f' = \hat{f}$ olduğunu göstermeliyiz. Tanımından dolayı f' fonksiyonu konkavdır biz de bu fonksiyonun ü.y.s. olduğunu göstereceğiz. K kümesi içinde bir x elemanına yakınsayan bir $\{x_\alpha\}$ ağı alalım ve her $f'(x_\alpha) \geq r$ olsun. $f'(x) \geq r$ olduğunu göstermek için $\epsilon > 0$ alalım ve her α için $\mu_\alpha \sim \mathcal{E}_{x_\alpha}$ ve $\mu_\alpha(f) > r - \epsilon$ olacak şekilde ölçüleri alalım. $P(K)$ zayıf*-kompakt olduğundan μ_α ağının bir μ_β alt ağı bir μ olasılık ölçüsüne zayıf* yakınsar. Her $g \in A(K)$ için $g(x_\beta) \to g(x)$ olduğundan $g(x_\beta) = \mu_\beta(g) \to g(x)$ olur, bu ise $\mu \sim \mathcal{E}_x$ olduğunu söyler. Böylece $r - \epsilon \leq \lim \mu_\beta(f) = \mu(f) \leq f'(x)$ yani $f'(x) \geq r$. f' ü.y.s. olduğundan $Sub(f') = \{(x,r) : f'(x) \geq r\}$ kümesi $E \times \mathbb{R}$ uzayının içinde kapalıdır (ve konvekstir). Bir k_1 noktası için $f'(k_1) < \hat{f}(k_1)$ ise ayırma teoremi

$$f(k_1) \leq f'(k_1) < h(k_1) < \hat{f}(k_1)$$

olacak şekilde bir $h \in A(K)$ fonksiyonunun varlığını garanti eder, yukarıdaki eşitsizlik ise bir çelişkidir. O halde $f' \geq \hat{f}$. Ayrıca $h \in A(K)$, $x \in K$ ve $h \geq f$ olmak üzere keyfi $\mu \sim \mathcal{E}_x$ ölçü için $h(x) = \mu(h) \leq \mu(f)$ olur. Böylece $f'(x) \leq h(x)$ ve $f' \leq \hat{f}$ bulunur. □

Önerme 5.3.9. *f fonksiyonu K kompakt konveks kümesi üzerinde sürekli bir fonksiyon ise, her $k \in K$ için*

$$\hat{f}(k) = \sup\left\{\int f d\mu : \mu \text{ bir diskret ölçü ve } \mu \sim \mathcal{E}_k\right\}$$

olur.

Kanıt. Burada "diskret ölçü" ile $\mathcal{E}_y$ ölçülerinin sonlu konveks kombinezonlarını kastediyoruz. Önerme 5.3.8'i kullanırsak sadece $f \in C(X)$, $k \in K$, $\mu \sim \mathcal{E}_x$ ve

$\epsilon > 0$ verildiğinde $\lambda \sim \mathcal{E}_x$ ve $\mu(f) - \lambda(f) < \epsilon$ olacak şekilde λ diskret ölçüsünün var olduğunu göstermeliyiz.

Bunun için K kompakt kümesini $|f(y) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}$ olacak şekilde $y, z \in U_i \cap K$ sağlayan U_i kümelerinin sonlu tanesi ile örtelim. $V_1 = U_1 \cap K$ ve $i > 1$ için $V_i = (U_i \cap K) - (V_1 \cup ... \cup V_{i-1})$ diyersek V_i kümeleri ikişer ikişer ayrık K kümesinin Borel alt kümeleridir ve $\mu(V_i) \neq 0$ olan i indisleri için dayanağı V_i kümesinin içinde ve $\lambda_i(B) = \mu(V_i)^{-1} \mu(B \cap V_i)$ (B Borel kümesi) olacak şekilde K kümesi üzerinde λ_i olasılık ölçüsü oluşturabiliriz. x_i ile λ_i ölçüsünün ağırlık merkezini gösterelim. V_i kümesi $U_i \cap X$ kompakt konveks kümesinin alt kümesi olduğundan $U_i \cap X$ kümesi x_i elemanını içerir. $\lambda = \sum \mu(V_i) \mathcal{E}_{x_i}$ ölçüsünü tanımlayalım. $h \in A(K)$ ise $\lambda(h) = \sum \mu(V_i) \lambda_i(h) = \sum \int_{v_i} h d\mu = \mu(h) = h(x)$, böylece $\lambda \sim \mathcal{E}_x$. Dahası

$$\mu(f) - \lambda(f) = \sum \left[\int_{v_i} f d\mu - f(x_i) \mu(V_i) \right] = \sum \int_{V_i} [f - f(x_i)] d\mu < \epsilon \sum \mu(V_i) = \epsilon$$

olduğundan ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 5.3.10. *K bir simpleks ise her konveks $f \in C(K)$ fonksiyonu için $\hat{f}$ fonksiyonu K üzerinde afindir.*

Kanıt. $x_1, x_2 \in K$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ve f fonksiyonu K üzerinde sürekli ve konveks olsun.$z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ diyelim.

$$\hat{f}(z) = \alpha_1 \hat{f}(x_1) + \alpha_2 \hat{f}(x_2)$$

olduğunu göstermek istiyoruz. $\hat{f}$ fonksiyonu konkav olduğundan bu fonksiyonun konveks olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bir önceki önermeden

$$\hat{f}(k) = \sup \left\{ \int f d\mu : \mu \text{ diskret ölçü ve } \mu \sim \mathcal{E}_k \right\}$$

olduğunu biliyoruz. μ bir diskret ölçü ve $\mu \sim \mathcal{E}_z$ olsun. Bu durumda öyle sonlu $\beta_j \geq 0$ ve $y_j \in K$ vardır ki $\sum \beta_j = 1$ ve $\mu = \sum \beta_j \mathcal{E}_{y_j}$ şeklinde yazabiliriz, yani $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = z = \sum \beta_j y_j$. Riesz Ayrıştırma Özelliğini $\alpha_i x_i$, $\beta_j y_j \in K^{\sim}$ elemanlarına uygularsak $\alpha_i x_i = \sum_j z'_{ij}$ $(i = 1, 2)$ ve $\beta_j y_j = z'_{1j} + z'_{2j}$ $(j \in J)$ olacak şekilde $z'_{ij} \in K^{\sim}$ elemanları vardır. Her $z'_{ij} = \gamma_{ij} z_{ij}$ $(\gamma_{ij} \geq 0, z_{ij} \in K)$ şeklinde yazılabilir ve böylece $x_i = \sum \alpha_i^{-1} \gamma_{ij} z_{ij}$. Her $i = 1, 2$ için sağ taraf bir $\mu_i \sim \mathcal{E}_{x_i}$ diskret ölçü temsil eder, böylece

$$\hat{f}(x_i) \geq \mu_i(f) = \sum_j \alpha_i^{-1} \gamma_{ij} f(z_{ij})$$

bulunur. Öte yandan $\mu(f) = \sum \beta_j f(z_{ij})$ ve her j için

$$f(y_j) = f\left(\beta_j^{-1} \gamma_{1j} z_{1j} + \beta_j^{-1} \gamma_{2j} z_{2j}\right) \leq \beta_j^{-1} \gamma_{1j} f(z_{1j}) + \beta_j^{-1} \gamma_{2j} f(z_{2j})$$

böylece $\mu(f) \leq \alpha_1 \mu_1(f) + \alpha_2 \mu_2(f) \leq \alpha_1 \hat{f}(x_1) + \alpha_2 \hat{f}(x_2)$. Tüm $\mu \sim \mathcal{E}_x$ diskret ölçüler üzerinden supremum alırsak istenilen sonucu elde ederiz. □

$A_s(K)$ ile K üzerinde tanımlı sınırlı, afin, a.y.s. fonksiyonların farklarından oluşan vektör uzayının, K üzerindeki tüm sınırlı fonksiyonlar uzayı içindeki düzgün kapanışı gösterelim.

Önerme 5.3.11. *$f \in A_s(K)$ ve $\mu \in P(K)$ ise, $\int f d\mu = f(r(\mu))$ olur.*

Kanıt. İlk olarak f fonksiyonunun sınırlı, afin, a.y.s. fonksiyon olduğunu varsayalım. Önerme 5.2.5'ten $A(K)$ içinde artan bir $f_\alpha \uparrow f$ ağı vardır. Buradan, $\mu(h)$ ile $\int h d\mu$ integralini gösterirsek

$$f(r(\mu)) = \bigvee_\alpha f_\alpha(r(\mu)) = \bigvee_\alpha \mu(f_\alpha) = \mu\left(\bigvee_\alpha f_\alpha\right) = \mu(f)$$

elde edilir. Açıkça bu formdaki fonksiyonların farkı içinde istenilen sağlanır. Sınırlı Yakınsaklık Teoremini kullanarak bu uzayın düzgün kapanışına da geçebiliriz. □

Şimdiye kadar verilen önerme ve teoremlerin önemli bir uygulaması olarak bir teklik teoremi vereceğiz.

Teorem 5.3.12. *K kompakt konvex bir küme olmak üzere aşağıdakiler birbirine eşdeğerdir:*

(1) *K bir simplekstir.*

(2) *$E : C(K) \to A_s(K)$, $E \geq 0$ ve her $a \in A(K)$ için $Ea = a$ olacak şekilde lineer operatör vardır.*

(3) *K kümesinin her elemanı tek bir sınır ölçüsünün ağırlık merkezidir.*

(4) *$r(m(k)) = k$ olacak şekilde $m : K \to P(K)$ afin fonksiyon vardır.*

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) : $f \to \hat{f}$ fonksiyonu K üzerindeki konveks sürekli fonksiyonların konisi üzerinde toplamsaldır. $k \in K$ ve k elemanını temsil eden sınır ölçüsü μ ise

Önerme 5.3.5'ten $\mu(f) = \mu\left(\hat{f}\right)$ bulunur. Teorem 5.3.10'dan $\hat{f}$ fonksiyonu afin olduğundan ve Önerme 5.3.11'den $\mu(f) = \hat{f}(k)$. Böylece g fonksiyonu da afin ve sürekli olmak üzere $\widehat{(f+g)}(k) = \mu(f+g) = \mu(f) + \mu(g) = \hat{f}(k) + \hat{g}(k)$. Böylece $\widehat{(f+g)} = \hat{f} + \hat{g}$ bulunur.

Eğer f fonksiyonu iki sürekli konveks f_1, f_2 fonksiyonlarının farkı ise $Ef = \hat{f}_1 - \hat{f}_2$ olarak tanımlayalım. $f \to \hat{f}$ fonksiyonunun toplamsal olmasından dolayı E iyi tanımlı ve lineerdir. Önerme 5.2.6'dan her sürekli f ve g fonksiyonları için $\|E(f-g)\| \leq \|f-g\|$ olur. Bu fark fonksiyonlarının $C(K)$ içinde yoğun olması ve $A_s(K)$ uzayının tam olmasından E operatörü $C(K)$ üzerine sürekli bir şekilde genişletilir. Açıkça görüleceği gibi her $a \in A(K)$ için $Ea = a$.

$f_1 - f_2 \geq 0$ (f_i sürekli ve konveks) ise $f_1 \leq f_2$ böylece $\hat{f}_1 \leq \hat{f}_2$ (Önerme 5.2.6), yani, $\hat{f}_1 - \hat{f}_2 \geq 0$ böyle E operatörü bu alt uzay üzerinde pozitiftir. Böylece tüm $C(K)$ üzerine genişlemesi de pozitif olur.

(2) $\Rightarrow$ (3) : $k \in K$ olmak üzere $\lambda(f) = (Ef)(k)$ olarak tanımlayalım. O halde λ, $C(K)$ üzerinde pozitif lineer bir fonksiyoneldir ve 1_K sabit bir fonksiyonunu 1'e götürür. λ ile K üzerindeki bir olasılık ölçüsünü özdeş görebiliriz bu ölçüyüde tekrar λ ile gösterelim. $\mu \in P(K)$ ve $r(\mu) = k$ olduğunu kabul edelim. Eğer f sürekli ve konveks ise

$$\lambda(f) = (Ef)(k) = \mu(Ef).$$

$f = \sup\{a \in A(K) : a < f\}$, böylece $Ef \geq \sup\{Ea : a < f\} = \sup\{a : a < f\}$ $= f$. O halde $\mu(Ef) \geq \mu(f)$. Bu durumda $\lambda > \mu$ bulunur. O halde λ ölçüsü k noktasını temsil eden tek maksimal ölçüdür.

(3) $\Rightarrow$ (4) : k elemanını kendisini temsil eden tek sınır ölçüsüne götüren fonksiyon istenilen özelliklere sahiptir.

(4) $\Rightarrow$ (1) : r operatörünü bir $R : C(K)^* \to A(K)^*$ pozitif lineer operatörüne ve m operatörünü bir $M : A(K)^* \to C(K)^*$ pozitif lineer operatörüne her $a \in A(K)^*$ için $R(Ma) = a$ olacak şekilde genişletelim. $a, b \in A(K)^*$ ise $R(Ma \vee Mb) \geq R(Ma), R(Mb)$ böylece a ve b değerlerinden büyük olur. Öte yandan $c \geq a, b$ ise $Mc \leq Ma, Mb$ böylece $c = R(Mc) \geq R(Ma \vee Mb)$. O halde $A(K)^*$ bir Riesz uzayıdır, yani K bir simplekstir. □

Bir S simpleksi için $\partial_e S$ kümesi S içinde kapalı ise S simpleksine *Bauer simp-*

leks denir.

Teorem 5.3.13. *K kompakt konveks bir küme olmak üzere aşağıdakiler birbirine eşdeğerdir:*
(1) *K bir Bauer simplekstir.*
(2) *K kümesinin her elemanı dayanağı $\partial_e K$ kümesi olan tek bir olasılık ölçüsü ile temsil edilir.*
(3) *K bir simpleks ve $x \to \mu_x$ fonksiyonu K kümesinden $P(K)$ ($P(K)$ üzerinde $C(K)$ uzayının dualinden indirdiğimiz zayıf * topolojisi olduğunu kabul ederek) süreklidir.*
(4) *K kümesi üzerinde tanımlı her sürekli konveks f fonksiyonu için $\hat{f} \in A(K)$.*
(5) *$A(K)$ bir Riesz uzayıdır.*

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) μ ölçüsünün dayanağının $\overline{\partial_e K} = \partial_e K$ kümesi olması için gerek yeter koşul μ ölçüsünün sınır ölçüsü olması olduğunu ve K kümesinin simpleks olduğunu göz önüne alırsak istenilen elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) Her sınır ölçüsü dayanağı $\partial_e K$ kümesinin içinde olan bir ölçü olduğundan ve (2)'den tek türlü belirli olduğundan K bir simplekstir. Ayrıca $\mu \to r(\mu)$ fonksiyonu $P\left(\overline{\partial_e K}\right)$ kümesinden K üzerine, birebir ve süreklidir. Bu fonksiyonun ters görüntüsü $x \to \mu_x$ süreklidir.

(3) $\Rightarrow$ (4) Teorem 5.3.10'dan $\hat{f}$ afin fonksiyondur. $\hat{f}(k) = \mu_k(f)$ olduğundan $k \to \hat{f}(k)$ fonksiyonu $k \to \mu_k \to \mu_k(k)$ şeklinde ayrıştırılırsa sürekli olduğu görülür.

(4) $\Rightarrow$ (5) $a_1, a_2 \in A(K)$ ise $a_1 \vee a_2$ supremumu $C(K)$ içinde hesaplanarak oluşturulan $\widehat{a_1 \vee a_2}$ fonksiyonu a_1 ve a_2 fonksiyonlarının $A(K)$ içinde en küçük üst sınırıdır.

(5) $\Rightarrow$ (1) Önerme 5.1.13'ten $A(K)$ bir Riesz uzayı olduğundan K bir simplekstir, ve böylece $A(K)^*$ bir Riesz uzayıdır. Sadece $\partial_e K$ kümesinin kapalı olduğunu göstermek kaldı. $k_1 \notin \partial_e K$ olsun ve $k_1 = (1/2)\, m + (1/2)\, n$ $(m \neq n)$ yazalım. Hahn-Banach Teoreminden $a_1(m) = a_2(n) = 1$ ve $a_1(n) = a_2(m) = 0$ olacak şekilde $a_1, a_2 \in A(K)$ bulabiliriz. $a_1 \vee a_2$ supremumunu $C(K)$ içinde oluşturursak $(a_1 \vee a_2)(k_1) = 1/2$ ama $\widehat{(a_1 \vee a_2)}(k_1) \geq 1$ bulunur. Böylece $f = a_1 \vee a_2$ olmak üzere $k_1 \notin B_f = \left\{k \in K : \hat{f}(k) = f(k)\right\}$. Ayrıca her f sürekli fonksiyonu için

$\partial_e K \subset B_f$ olduğundan $\partial_e K = \bigcap \{B_f : f = a_1 \vee a_2 ... \vee a_n, a_i \in A(K)\}$ olduğunu söyleyebiliriz. a_1, a_2 elemanlarının supremumu $A(K)$ içinde mevcut ve $\widehat{(a_1 \vee a_2)}$ fonksiyonuna eşit olduğundan $\widehat{(a_1 \vee a_2)}$ fonksiyonu sürekli olur. Böylece her B_f ve $\partial_e K$ kapalı olur. □

Teorem 5.3.14. *K bir Bauer simpleks ise her $f \in C(\partial_e K)$ fonksiyonu tek bir şekilde $f^\sim \in A(K)$ fonksiyonuna genişletilebilir; her $x \in \partial_e K$ için de $f^\sim(x) = \mu_x(f)$ ve $\|f\| = \|f^\sim\|$ olur.*

Kanıt. Teorem 5.3.13'ten $k \to \mu_k(f) := f^\sim(k)$ istenilen tek türlü belirli genişlemedir ve $\|f^\sim\| = \|f\|$. □

Sonuç 5.3.15. *K bir Bauer simpleks olmak üzere $A(K)$ uzayı ile $C(\partial_e K)$ uzayı sıra izomorfiktir.*

$0 \in \partial_e(K)$ ise

$$A_0(K) := \{f \in A(K) : f(0) = 0\},$$

$$C_0(\partial_e K) := \{f \in C(\partial_e K) : f(0) = 0\}$$

olarak gösterelim.

Teorem 5.3.16. *E bir AM-uzayı olmak üzere $K := \left\{f \in E' : \|f\| \leq 1\right\}$ zayıf* topoloji altında bir Bauer simplekstir ve E uzayı $A_0(K)$ uzayına sıra izomorfiktir.*

Kanıt. Banach-Alaoğlu Teorem ve Teorem 4.1.7'den K kümesinin bir Bauer simpleks olduğunu görmek kolaydır. Sonuç 5.3.15'ten E uzayının $C_0(\partial_e K)$ uzayına sıra izomorfik olduğunu göstermek yeterlidir. Bir T operatörünü

$$T : E \longmapsto C_0(\partial_e K) \qquad\qquad T_e : \partial_e K \longmapsto \mathbb{R}$$

$$e \longrightarrow T_e \qquad\qquad f \longrightarrow T_e(f) = f(e).$$

olarak tanımlarsak E' dual uzayı E uzayının noktalarını ayırdığından T birebirdir. Üstelik Teorem 5.3.14'ten $C_0(\partial_e K)$ uzayının her elemanını $A_0(K)$ uzayının bir elemanına genişletebiliriz ve $A_0(K)$ uzayının her elemanını E' üzerinde zayıf* sürekli bir fonksiyonele genişletebiliriz. E' dual uzayı üzerindeki her zayıf* sürekli fonksiyonel bir noktada değerlendirme operatörü olduğundan, T üzerinedir. Ayrıca Teorem 4.1.7'den T sıra homomorfizmdir. Böylece ispat tamamlanır. □

Önerme 5.3.17. *E yerel konveks bir Riesz uzayı ve K bir kompakt Bauer simpleks olmak üzere $D \subsetneqq \partial_e(K)$ $k_0 \in \partial_e(K) \setminus D$ olsun. Bu durumda $F := \overline{co}(D)$ kümesi ile $\{k_0\}$ noktası K kümesi üzerinde tanımlı bir afin sürekli fonksiyon tarafından ayırılır, yani öyle bir $g \in A(K)$ vardır ki $g(F) = \{0\}$ ve $g(k_0) = 1$.*

Kanıt. Milman Teoremi $k_0 \notin F$ olduğunu söyler. F kapalı ve $\{k_0\}$ kompakt olduğundan Teorem 5.1.8'den F ve $\{k_0\}$ lineer sürekli bir fonksiyon tarafından kesin ayrılır, yani, öyle bir sürekli lineer x' fonksiyoneli, $c \in \mathbb{R}$ sabiti ve $\epsilon > 0$ vardır ki her $x \in F$ için

$$x'(x) \leq c < c + \epsilon \leq x'(k_0)$$

bulunur. $y := \dfrac{x' - c}{x'(k_0) - c}$ fonksiyonunu tanımlarsak y afin ve süreklidir. $y := y|_K$ kısıtlanış fonnsiyonunu yine y ile gösterelim. Teorem 5.3.13'ten $A(K)$ bir Riesz uzayı olduğundan y ile $\mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ ile sabit sıfır fonksiyonunu gösteriyoruz) $A(K)$ içinde supremumunu hesaplayalım ve $g := y \vee 0$ dersek g istenilen afin sürekli fonksiyondur. □

BÖLÜM 6

KLÂSİK BANACH ÖRGÜLERİ ÜZERİNDE NORM-SINIRLI VE REGÜLER OPERATÖRLER

Bu bölümde Cartwrigth-Lotz Teorem, Orno Teoremi ve uygulamaları verilecek. Ayrıca [20] kaynağı yakından takip edilerek $C(K)$ uzayları için önemli sonuçlar verilecektir.

6.1 Klâsik Uzaylar İçin Önemli Sonuçlar

Ana düşünce noktamızdan önce kullanışlı birkaç teorem ve sonuç vereceğiz. Bu bölümde X ve Y, daima, kompakt, Hausdorff, ve sonsuz elemanlı uzayları gösterecektir. (Eğer X kompakt Hausdorff uzayı sonlu ise, açıkça görüleceği gibi, her F Banach örgüsü için $\mathcal{L}(C(X), F) = \mathcal{L}^r(C(X), F)$ ve $\mathcal{L}(F, C(X)) \equiv \mathcal{L}^r(F, C(X))$ sağlanır.)

Her $T \in \mathcal{L}(E, F)$ operatörü için $T^{'} : F^{'} \to E^{'}$ ile eşlenik operatörü göstereceğiz. Eğer T regüler ise $T^{'}$ operatörü de regülerdir. Aşağıdaki teorem F yansımalı bir uzay olduğunda daha iyi bir yaklaşım vermektedir.

Teorem 6.1.1. *E bir Banach örgüsü ve F yansımalı bir Banach örgüsü olsun.*
(1) Her $\Omega \in \mathcal{L}\left(F^{'}, E^{'}\right)$ operatörü için $T^{'} = \Omega$ olacak şekilde $T \in \mathcal{L}(E, F)$ vardır, yani $\mathcal{L}\left(F^{'}, E^{'}\right) = \left\{T^{'} : T \in \mathcal{L}(E, F)\right\}$ gerçeklenir.
(2) $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}^r(E, F)$ olması için gerek yeter koşul $\mathcal{L}\left(F^{'}, E^{'}\right) = \mathcal{L}^r\left(F^{'}, E^{'}\right)$

olmasıdır.

(3) $\mathcal{L}(E,F) \equiv \mathcal{L}^r(E,F)$ *olması için gerek yeter koşul* $\mathcal{L}\left(F',E'\right) \equiv \mathcal{L}^r\left(F',E'\right)$ *olmasıdır.*

Kanıt. (1). $\Omega \in \mathcal{L}\left(F',E'\right)$ operatörü için $T = \Omega'|_E$ alınırsa $T \in \mathcal{L}(E,F)$ ve $T' = \Omega$ olur. (2) ve (3)'ü ispat etmek zor değildir. □

Teorem 6.1.2. *E_1, E_2 ve F Banach örgüleri olsun. $\Phi_1 \in \mathcal{L}(E_1,E_2)$, $\Phi_2 \in \mathcal{L}(E_2,E_1)$ ve $\Phi_2\Phi_1$ operatörü E_1 uzayının birim operatörü olacak şekilde operatörler var olsun. O halde*

(1) $\Phi_1 \geq 0$ *ve* $\mathcal{L}(E_2,F) = \mathcal{L}^r(E_2,F)$ *ise* $\mathcal{L}(E_1,F) = \mathcal{L}^r(E_1,F)$*,*

(2) $\Phi_1 \geq 0$*,* $\|\Phi_1\| . \|\Phi_2\| = 1$ *ve* $\mathcal{L}(E_2,F) \equiv \mathcal{L}^r(E_2,F)$ *ise* $\mathcal{L}(E_1,F) \equiv \mathcal{L}^r(E_1,F)$*,*

(3) $\Phi_2 \geq 0$ *ve* $\mathcal{L}(F,E_2) = \mathcal{L}^r(F,E_2)$ *ise* $\mathcal{L}(F,E_1) = \mathcal{L}^r(F,E_1)$*,*

(4) $\Phi_2 \geq 0$*,* $\|\Phi_1\| . \|\Phi_2\| = 1$ *ve* $\mathcal{L}(F,E_2) \equiv \mathcal{L}^r(F,E_2)$ *ise* $\mathcal{L}(F,E_1) \equiv \mathcal{L}^r(F,E_1)$*.*

Kanıt. İspat kolaylıkla verilebilir. □

Sonuç 6.1.3. *F bir Banach örgüsü ve X kompakt Hausdorff topolojik uzay olsun. X uzayı içinde terimleri birbirinden farklı olan yakınsak bir dizinin olduğunu varsayalım. Bu durumda, aşağıdakiler sağlanır:*

(1) $\mathcal{L}(C(X),F) = \mathcal{L}^r(C(X),F)$ *ise* $\mathcal{L}(c,F) = \mathcal{L}^r(c,F)$*,*

(2) $\mathcal{L}(C(X),F) \equiv \mathcal{L}^r(C(X),F)$ *ise* $\mathcal{L}(c,F) \equiv \mathcal{L}^r(c,F)$*,*

(3) $\mathcal{L}(F,C(X)) = \mathcal{L}^r(F,C(X))$ *ise* $\mathcal{L}(F,c) = \mathcal{L}^r(F,c)$*,*

(4) $\mathcal{L}(F,C(X)) \equiv \mathcal{L}^r(F,C(X))$ *ise* $\mathcal{L}(F,c) = \mathcal{L}^r(F,c)$*.*

Kanıt. $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi X uzayı içinde terimleri birbirinden farklı olan yakınsak bir dizi olsun. İkişer ikişer ayrık $t_n \in U_n$ olacak şekilde U_n $(n \in \mathbb{N})$ açık kümeleri oluşturalım ve $0 \leq h_n \leq 1$, $h_n(t_n) = 1$ ve her $x \in U_n$ için $h_n(x) = 0$ olacak şekilde $h_n \in C(X)$ fonksiyonları alalım. Her $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in c$ $(\alpha_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n)$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha_\infty) h_n$ serisi düzgün yakınsak olduğundan

$$\Phi_1\alpha = \alpha_\infty \mathbf{1}_X + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha_\infty) h_n$$

olacak şekilde $\Phi_1 \in \mathcal{L}(c, C(X))$ operatörünü tanımlayabiliriz. Açıkca görüleceği gibi $\Phi_1 \geq 0$. Bir de her $f \in C(X)$ için

$$\Phi_2 f = (f(t_1), f(t_2), \ldots)$$

olacak şekilde $\Phi_2 \in \mathcal{L}^+(C(X), c)$ tanımlayalım. Bu durumda $\Phi_2\Phi_1$ operatörü c uzayının birim operatörüdür ve $\|\Phi_1\| = \|\Phi_2\| = 1$. Teorem 6.1.2'dan istenilen sonuçlar elde edilir. $\square$

Sonuç 6.1.4. *F bir Banach örgüsü olsun. Aşağıdakiler gerçeklenir:*

(1) $\mathcal{L}(C[0,1], F) = \mathcal{L}^r(C[0,1], F)$ ise $\mathcal{L}(c, F) = \mathcal{L}^r(c, F)$,

(2) $\mathcal{L}(C[0,1], F) \equiv \mathcal{L}^r(C[0,1], F)$ ise $\mathcal{L}(c, F) \equiv \mathcal{L}^r(c, F)$,

(3) $\mathcal{L}(F, C[0,1]) = \mathcal{L}^r(F, C[0,1])$ ise $\mathcal{L}(F, c) = \mathcal{L}^r(F, c)$,

(4) $\mathcal{L}(F, C[0,1]) \equiv \mathcal{L}^r(F, C[0,1])$ ise $\mathcal{L}(F, c) = \mathcal{L}^r(F, c)$.

Sonuç 6.1.4'te (1) ve (2) şıklarının tersi doğru değildir. Mesela Teorem 6.1.28'de $\mathcal{L}(c, c) \equiv \mathcal{L}^r(c, c)$ olduğunu ama Teorem 6.1.27'de $\mathcal{L}(C[0,1], c) \neq \mathcal{L}^r(C[0,1], c)$ olduğunu gözlemleyeceğiz.

Teorem 6.1.2'de E_1 uzayı olarak c_0, E_2 uzayı olarak c ve Φ_1 ile c_0 uzayını c uzayı içine götüren birim operatörü ve $\Phi_2 : c \to c_0$ operatörü olarakta

$$\Phi_2 x = (x_1 - x_\infty, x_2 - x_\infty, \ldots) \qquad \left(x \in c, x_\infty := \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n\right)$$

alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.1.5. *F Banach örgüsü için $\mathcal{L}(c, F) = \mathcal{L}^r(c, F)$ ise $\mathcal{L}(c_0, F) = \mathcal{L}^r(c_0, F)$.*

Bu sonucun tersi doğru değildir. Mesela Teorem 6.1.23'te $\mathcal{L}(c_0, c_0) = \mathcal{L}^r(c_0, c_0)$ olduğunu ama Teorem 6.1.24'te $\mathcal{L}(c, c_0) \neq \mathcal{L}^r(c, c_0)$ olduğunu söyleyeceğiz.

Teorem 6.1.6. *X kompakt Hausdorff uzay olsun. Eğer X uzayı içinde hiç yakınsak alt dizisi olmayan bir dizi varsa öyle regüler Borel μ ölçüsü ve X üzerinde $g_1, g_2, \ldots$ ölçülebilir fonksiyonları vardır ki (a) $\mu(X) = 1$, (b) $g_1 = \mathbf{1}_X$, (c) Hemen her yerde $|g(x)| = 1$, (d) $\int g_n g_m d\mu = 0$ $(n \neq m)$ sağlanır.*

Kanıt. $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi X uzayı içinde hiç yakınsak alt dizisi olmayan bir dizi olsun. $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin terimlerinin birbirinden farklı olduğunu varsayabiliriz. $X_2 := X$

diyelim. Kompaktlık argümanından bu dizinin X_2 içinde a ve b gibi iki farklı yığılma noktası vardır. O halde a ve b elemanlarının $X_3 \cap X_4 = \emptyset$ olacak şekilde X_3 ve X_4 kompakt komşulukları vardır. Açıkça görüleceği gibi X_3 ve X_4 kümeleri $\{y_n\}$ dizisinin sonsuz tane terimini içerir. Aynı işlemleri X_3 ve X_4 kümeleri için tekrarlayarak X_3 kümesinin X_5, X_6 ve X_4 kümesinin X_7, X_8 kompakt kümelerini oluşturabiliriz ve $X_5 \cap X_6 = \emptyset$, $X_7 \cap X_8 = \emptyset$'dir. Ayrıca X_5, X_6, X_7 ve X_8 kümeleri $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin sonsuz tane terimini içerir. Bu yöntemle devam ederek her X_i kümesi $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin sonsuz elemanını içerecek ve X_{2i-1} ve X_{2i} ayrık olacak şekilde $X_2, X_3, X_4, X_5, \ldots$ kompakt kümelerini oluşturabiliriz.

Şimdi X kümesi üzerinde bir regüler Borel μ ölçüsünü

$$(*) \quad \mu(X_i) = \frac{1}{2^{n-1}} \text{ if } i \in \left\{2^{n-1}+1, \ldots, 2^n\right\}, n \in \mathbb{N}$$

olacak şeklinde tanımlayacağız. $x_i \in X_i$ $(i = 2, 3, \ldots)$ olmak üzere her $f \in C(X)$ için

$$\phi_n(f) = \frac{1}{2^{n-1}}\left(f\left(x_{2^{n-1}+1}\right) + \ldots + f\left(x_{2^n+1}\right)\right), n \in \mathbb{N}$$

tanımlayalım. $D := \left\{f \in C(X) : \lim_{n\to\infty} \phi_n(f) \text{ limiti var.}\right\}$ dersek D uzayı $C(X)$ uzayının bir alt uzayıdır ve $\mathbf{1}_X \in D$. $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ operatörünü her $f \in D$ için

$$\phi(f) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(f)$$

şeklinde tanımlayalım. $\phi(\mathbf{1}_X) = 1$, $\|\phi\| = 1$ ve $\phi \in D$ olduğunu görmek kolaydır. Hahn-Banach Teoreminden ϕ operatörünü bir $\Phi \in C(X)'$ operatörüne $\Phi(\mathbf{1}_X) = 1$ ve $\|\Phi\| = 1$ olacak şekilde genişletebiliriz Bu Φ operatörü uygun bir regüler Borel μ ölçüsüne karşılık gelir. Bu μ ölçüsünün (*) koşulunu sağladığını göstereceğiz. X_i kümesi üzerinde 1 ve $X_{2^{n-1}+1} \cup \ldots \cup X_{i-1} \cup X_{i+1} \cup \ldots \cup X_{2^n}$ kümesi üzerinde 0 olacak şekilde $g \in C(X)$ alalım. μ ölçüsünün dayanağı üzerinde $g = \mathbf{1}_{X_i}$ olur. O halde

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \phi_n(g) = \phi_{n+1}(g) = \phi_{n+2}(g) = \ldots$$

olduğunu görmek kolaydır. Sonuç olarak $g \in D$

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \lim_{j\to\infty} \phi_j(g) = \phi(g) = \Phi(g) = \int g d\mu = \int \mathbf{1}_{X_i} d\mu = \mu(X_i)$$

bulunur.

X üzerinde Borel ölçülebilir $g_1, g_2, \ldots$ fonksiyonlarını $n \in \mathbb{N}$ ve $i \in \{2^{n-1}+1, \ldots, 2^n\}$

olmak üzere X_i üzerinde

$$g_n = (-1)^i$$

şeklinde tanımlarsak istenilenler elde edilir. □

Yukarıdaki ispatta $Y_i := X_{2^{i+1}-1}$, $(i \in \mathbb{N})$ alınırsa aşağıdaki sonuç kolayca ispat edilir.

Sonuç 6.1.7. *X kompakt Hausdorff uzay olsun. X uzayı içinde hiç yakınsak dizisi olmayan bir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi varsa X kümesinin öyle $Y_1, Y_2, \ldots$ kompakt alt kümeleri ve ikişer ikişer ayrık açık $U_1, U_2, \ldots$ alt kümeleri vardır ki her Y_i kümesi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin sonsuz tane elemanını içerir ve $Y_i \subset U_i$ $(i \in \mathbb{N})$ olur.*

Cartwright-Lotz Teorem, Orno Teoremi ve bu teoremlerin uygulamalarını inceleyeceğiz. Bu teoremleri genellikle olumsuz durumları belirlemek için kullanacağız ve bu iki teorem bizim ana problemimiz için önemli bir temel teşkil eder.

Lemma 6.1.8. *E Banach örgüsü olmak üzere $0 \leq x_i^{'} \in E^{'}$ $i = 1, \ldots, n$ ikişer ikişer ayrık, $0 \leq x_i \in E$, $i = 1, \ldots, n$ ve $\epsilon > 0$ olsun. Bu durumda her i için $\left\langle x_i - y_i, x_i^{'} \right\rangle < \epsilon$ olacak şekilde ikişer ikişer ayrık $y_i \in [0, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ elemanları vardır.*

Kanıt. $n = 2$ olduğunu varsayalım. $x = x_1 \vee x_2$ olsun. Teorem 3.1.6'dan $x = u_1 + u_2$ ve $\left\langle u_1, x_1^{'} \right\rangle + \left\langle u_2, x_2^{'} \right\rangle \leq \dfrac{\epsilon}{2}$ olacak şekilde $u_1, u_2 \in E$ elemanları vardır. $w_1 = u_2 - u_1 \wedge u_2$ ve $w_2 = u_1 - u_1 \wedge u_2$ diyelim. Bu durumda $w_1 \wedge w_2 = 0$, $w_1, w_2 \in [0, x]$ ve

$$\left\langle x - w_1, x_1^{'} \right\rangle = \left\langle u_1 + u_1 \wedge u_2, x_1^{'} \right\rangle \leq 2 \left\langle u_1, x_1^{'} \right\rangle < \epsilon.$$

Benzer şekilde $\left\langle x - w_2, x_2^{'} \right\rangle < \epsilon$. $y_i = x_i \wedge w_i$, $i = 1, 2$ dersek $y_1 \wedge y_2 = 0$, $y_i \in [0, x_i]$, $i = 1, 2$ ve $x_i - y_i = (x_i - w_i)^+ \leq x_i - w_i$ olur, böylece her $i = 1, 2$ için $\left\langle x_i - y_i, x_i^{'} \right\rangle < \epsilon$ bulunur. İndüksiyon ve Riesz Ayrıştırma Özelliği kullanılarak sonuç genelleştirilebilir. □

Lemma 6.1.9. *E ve F Banach örgüleri olmak üzere $0 \leq x_i^{'} \in E^{'}$, $i = 1, \ldots, m$ ikişer ikişer ayrık ve $0 \leq y_j \in F$, $j = 1, \ldots, n$ ikişer ikişer ayrık elemanlarını alalım. (α_{ij}) bir $m \times n$ reel matris ve $T : E \to F$ operatörü $Tx = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \left\langle x, x_i^{'} \right\rangle y_j$*

olarak verilsin. Bu durumda modül operatörü $|T| \in \mathcal{L}(E,F)$ *vardır ve* $|T|x = \sum\limits_{i,j} |\alpha_{ij}| \left\langle x, x_i^{'} \right\rangle y_j$ *şeklinde verilir.*

Kanıt. Açıkça görüleceği gibi $x \to \sum\limits_{i,j} |\alpha_{ij}| \left\langle x, x_i^{'} \right\rangle y_j$ operatörü hem T operatörünü hem de $-T$ operatörünü majorize eder. $R \geq \pm T$ sağlayan bir $R \in \mathcal{L}(E,F)$ alalım. Keyfi $0 \leq x \in E$, $0 \leq y^{'} \in F^{'}$ ve $\epsilon > 0$ seçelim. Lemma 6.1.8'den ikişer ikişer ayrık $x_i \in [0,x]$, $i = 1,\ldots,m$ ve ikişer ikişer ayrık $y_j^{'} \in \left[0, y^{'}\right]$, $j = 1,\ldots,n$ elemanları vardır, her i,j için $\left\langle x - x_i, x_i^{'} \right\rangle < \epsilon$ ve $\left\langle y_j, y^{'} - y_j^{'} \right\rangle < \epsilon$ sağlanır. $\beta_{ij} = \operatorname{sgn}(\alpha_{ij})$ diyelim. $i \neq j$ ise $\left\langle x_i, x_j^{'} \right\rangle < \epsilon$ ve $\left\langle y_i, y_j^{'} \right\rangle < \epsilon$ olduklarını da göz önüne alırsak T operatörüne bağlı bir K sabiti vardır ki

$$\begin{aligned} \left\langle Rx, y^{'} \right\rangle &\geq \sum_{r,s} \beta_{rs} \left\langle Tx_r, y_s^{'} \right\rangle \\ &= \sum_{i,j,r,s} \alpha_{ij}\beta_{rs} \left\langle x_r, x_i^{'} \right\rangle \left\langle y_j, y_s^{'} \right\rangle \\ &\geq \sum_{i,j} |\alpha_{i,j}| \left\langle x, x_i^{'} \right\rangle \left\langle y_j, y^{'} \right\rangle - K\epsilon. \end{aligned} \tag{6.1}$$

bulunur. Böylece

$$\left\langle Rx, y^{'} \right\rangle \geq \sum_{i,j} |\alpha_{i,j}| \left\langle x, x_i^{'} \right\rangle \left\langle y_j, y^{'} \right\rangle.$$

İstenilen elde edilmiş olur. □

Lemma 6.1.10. *E bir Banach örgüsü olsun. Bir M sabit sayısının* $x_i \in E$, $i = 1,\ldots,n$ *pozitif ve ikişer ikişer ayrık olmak üzere*

$$\left\| \sum_1^n x_i \right\| \leq M \sup_{\|x^{'}\| \leq 1} \left[\sum_1^n \left| \left\langle x_i, x^{'} \right\rangle \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğini sağladığını varsayalım. O halde E bir AM-uzayına sıra izomorfik olur.

Kanıt. $0 \leq x_i^{'} \in E^{'}$, $i = 1,\ldots,n$ ikişer ikişer ayrık, $\epsilon > 0$ ve $\alpha_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,n$ olsun. Lemma 6.1.8'i kullanarak $\left\| x_i^{'} \right\| = \left\langle x_i, x_i^{'} \right\rangle$, $i = 1,\ldots,n$ olacak şekilde ikişer ikişer ayrık ve $\|x_i\| < 1 + \epsilon$ olan x_i, $i = 1,\ldots,n$ elemanlarının var olduğunu görmek kolaydır. O halde

$$\begin{aligned} \sum_1^n \alpha_i \left\| x_i^{'} \right\| &= \sum_1^n \alpha_i \left\langle x_i, x_i^{'} \right\rangle \\ &\leq \left\langle \sum_1^n \alpha_i x_i, \sum_1^n x_i^{'} \right\rangle \leq \left\| \sum_1^n \alpha_i x_i \right\| \left\| \sum_1^n x_i^{'} \right\| \\ &\leq M(1+\epsilon) \left[\sum_1^n \alpha_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_1^n x_i^{'} \right\| \end{aligned} \tag{6.2}$$

olduğundan $\left[\sum_{1}^{n}\left\|x_i^{'}\right\|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq M\left\|\sum_{1}^{n}x_i^{'}\right\|$ bulunur.

$0 \leq x_i \in E$, $i = 1, \ldots, n$ ikişer ikişer ayrık ve her i için $\|x_i\| \leq 1$ olduğunu varsayalım.

$$\left\|\sum_{1}^{n} x_i\right\| \leq M\left[\sum_{1}^{n}\left\langle x_i, x^{'}\right\rangle^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

olacak şekilde $x^{'} \geq 0$, $\left\|x^{'}\right\| \leq 1$ olan $x^{'} \in E^{'}$ elemanı vardır. $\epsilon > 0$ aldığımızda Lemma 6.1.9'dan her i için $\left\langle x_i, x^{'}\right\rangle \leq (1+\epsilon)\left\langle x_i, x_i^{'}\right\rangle$ olacak şekilde ikişer ikişer ayrık $x_i^{'} \in \left[0, x^{'}\right]$, $i = 1, \ldots, n$ elemanları vardır. Böylece

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{1}^{n} x_i\right\| &\leq M(1+\epsilon)\left[\sum_{1}^{n}\left\langle x_i, x_i^{'}\right\rangle^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M(1+\epsilon)\left[\sum_{1}^{n}\left\|x_i^{'}\right\|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M^2(1+\epsilon)\left\|\sum_{1}^{n} x_i^{'}\right\| \leq M^2(1+\epsilon).\end{aligned} \tag{6.3}$$

Buradan $\left\|\sum_{1}^{n} x_i\right\| \leq M^2$ bulunur. Teorem 4.1.12 gereğince E bir AM-uzayıdır. □

Aşağıda Bennett [8] tarafından verilen bir sonucu kullanacağız.

Lemma 6.1.11. *n bir asal sayı ve $r \geq 2$ bir tam sayı olsun. $m = n^r - 1$ olmak üzere öyle $m \times n$ kompleks matrisi (α_{ij}) vardır ki her i, j için $|\alpha_{ij}| = 1$ ve her $(j_v), (k_v) \in n^r = \{1, \ldots, n\}^r$ için eğer $(j_1, \ldots, j_r)$, $(k_1, \ldots, k_r)$ sıralısının bir permütasyonu ise*

$$\sum_{1}^{m} \alpha_{ij_1}\alpha_{ij_2}\ldots\alpha_{ij_r}\overline{\alpha_{ik_1}\alpha_{ik_2}}\ldots\overline{\alpha_{ik_r}}$$

toplamı m değilse 0.

E ve F Banach örgüleri olmak üzere eğer F Dedekind tam ise Riesz-Kantorovich Teoreminden regüler operatörler uzayının bir Riesz uzayı olduğunu biliyoruz. Bu sebepten $Q = Q_F$ tasviri $F \to F^{''}$ doğal gömme tasviri olmak üzere $Q_F T$ operatörü $E \to F^{''}$ iki pozitif operatörün farkı şeklinde yazılabildiğimiz daha geniş bir operatörlerin uzayı $\mathcal{L}_r^{''}(E, F)$ ile çalışabiliriz. Bu arada her Banach örgüsünün duali Dedekind Tam olduğundan Riesz Kantorovich Teoreminden her $T \in \mathcal{L}_r^{''}(E, F)$ için $|Q_F T|$ modül operatörü vardır.

Teorem 6.1.12 (Cartwright-Lotz). *E ve F iki Banach örgüsü olmak üzere E uzayından F uzayına giden her kompakt operatör E uzayından F'' uzayına giden iki pozitif operatörün farkı şeklinde yazılabildiğini varsayalım. $p < \infty$ olmak üzere E' uzayı (F uzayı) l_p uzayına örgü izometrik olan bir kapalı alt uzay içeriyorsa F uzayı bir AM-uzayına örgü izomorfiktir (E uzayı bir AL-uzayına örgü izomorfiktir).*

Kanıt. E uzayından F uzayına giden kompakt operatörlerin uzayı $T \to \|T\|$ ve $T \to \||QT|\|$ normu altında Banach uzayı olduğundan öyle M sabiti vardır ki her kompakt $T : E \to F$ operatorü için $\||QT|\| \leq M \|T\|$ olur. Bu eşitsizliği Lemma 6.1.9'daki operatörlere uygularsak, ((α_{ij}), $\{x_i'\}$ ve $\{y_i\}$ Lemma 6.1.9'da olduğu gibi)

$$\sup_{\|x\|, \|y'\| \leq 1} \left\{ \sum_{i,j} |\alpha_{ij}| \, x'(x_i) \, y'(y_j) \right\} \leq M \sup_{\|x\|, \|y'\| \leq 1} \left| \sum_{i,j} \alpha_{ij} x'(x_i) \, y'(y_j) \right| \tag{6.4}$$

(6.4) eşitliği M ile $M_1 = 2M$ yer değiştirilirse (α_{ij}) kompleks matrisi içinde geçerli olduğunu görmek kolaydır.

E' uzayının l_p uzayına örgü izometrik olan bir kapalı alt uzay içerdiğini varsayalım. $x_i' \in E'$, $i = 1, \ldots$ elemanları l_p uzayının birim vektörleri olsun. Öyle $D, d > 0$ sayıları vardır ki her $x \in E$ ve her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| \sum_{i}^{m} x_i' \right\| \leq d m^{\frac{1}{p}} \quad \text{ve} \quad \left[\sum_{i=1}^{m} \left| x_i'(x) \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq D \|x\|$$

sağlanır. Bir n asal sayısı ve $r \geq \frac{p}{2}$, $r \geq 2$ olacak şekilde r tam sayısı alalım. Lemma 6.1.11'daki (α_{ij}) matrisi ile (6.4) eşitsizliğinin sol tarafı $\left\| \sum_{i=1}^{m} x_i' \right\| \left\| \sum_{j=1}^{n} y_j \right\|$ ve Hölder eşitsizliğinden sağ taraf

$$M_1 \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| x_i'(x) \right\|_{2r} \sup_{|y'| \leq 1} \left\| \sum_j \alpha_{ij} y'(y_j) \right\|_{2r}$$

değerinden küçük eşittir. Buradan

$$\left\| x_i'(x) \right\| \leq m^{p^{1-\frac{1}{2}r}} \left\| x_i'(x) \right\|_p \leq D m^{p^{-1-\frac{1}{2}r}}$$

bulunur. O halde

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}y^{'}(y_j)\right|^{2r}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{(j_v),(k_v)\in n^r}\alpha_{ij_1}\alpha_{ij_2}\ldots\alpha_{ij_r}\overline{\alpha_{ik_1}}\ldots\overline{\alpha_{ik_r}}\prod_{v=1}^{r}y^{'}(y_{j_v})\,y^{'}(y_{k_v})$$

$$=r!m\sum_{j_v\in n^r}\prod_{v=1}^{r}\left|y^{'}(y_{j_v})\right|^2=r!m\left[\sum_{j=1}^{n}\left|y^{'}(y_j)\right|^2\right]^r. \tag{6.5}$$

Böylece

$$\left\|\sum_j\alpha_{ij}y^{'}(y_j)\right\|_{2r}=(rm)^{\frac{1}{2}r}\left\|y^{'}(y_j)\right\|_2,$$

ve burdan

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}y_j\right\|\le(r)^{\frac{1}{2}r}M_1Dd^{-1}\sup_{\|y'\|\le1}\left[\sum_{j=1}^{n}\left|y^{'}(y_j)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Bu eşitsizlik n asal değilken de sağlanır, ve böylece Teorem 6.1.11'den F bir AM-uzayına örgü izomorfik olur.

Eğer F uzayı l_p uzayına örgü izormorfik olan kapalı bir alt uzay içeriyorsa benzer şekilde $E^{'}$ uzayı bir AM-uzayına izomorfiktir böylece E uzayı bir AL-uzayına örgü izomorfiktir. □

Cartwright-Lotz Teoremini pek çok durumda kullanabilmek için AL- ve AM-uzaylarının önemli anlamda farklı olduğunu vurgulamak gerekir. Burada farklılıktan kastettiğimiz şey bir AL-uzayının bir AM-uzayına örgü izomorfik olması için gerek yeter koşul sonlu boyutlu olmasıdır. Öte yandan her yansımalı AL-veya AM- uzayı sonlu boyutludur. (Daha detaylı bilgi için [[5], Teorem 9.38 ve Sonuç.9.39, s.363]). Bu iki durum aşağıdaki sonuçlarda kullanılacaktır.

Sonuç 6.1.13. *$q\in[1,\infty)$ ve $p\in(1,\infty]$ olmak üzere, $\mathcal{L}(l_p,l_q)\neq\mathcal{L}^r(l_p,l_q)$ olur.*

Kanıt. Her $q\in[1,\infty)$ için l_q uzayı bir AM-uzayına örgü izomorfik olmadığında Teorem 6.1.12'nin bir sonucudur. □

Sonuç 6.1.14. *Her $q\in[1,\infty)$ için, $\mathcal{L}(c_0,l_q)\neq\mathcal{L}^r(c_0,l_q)$ ve $\mathcal{L}(c,l_q)\neq\mathcal{L}^r(c,l_q)$ olur.*

Kanıt. c_0 ve c uzayları bir AL-uzayına örgü izomorfik olmadığından Teorem 6.1.12'nin sonucudur. □

Sonuç 6.1.15. *Her* $q \in [1, \infty)$ *için,* $\mathcal{L}(C[0,1], l_q) \neq \mathcal{L}^r(C[0,1], l_q)$ *olur.*

Kanıt. Sonuç 6.1.4 ve Sonuç 6.1.14 birleştirilirse istenilen elde edilir. □

Sonuç 6.1.16. *Her* $p \in (1, \infty]$ *ve* $q \in [1, \infty)$ *için,* $\mathcal{L}(l_p, L_q[0,1]) \neq \mathcal{L}^r(l_p, L_q[0,1])$ *olur.*

Kanıt. Her $q \in [1, \infty)$ için $L_q[0,1]$ uzayları bir AM-uzayına örgü izomorfik olmadığından Teorem 6.1.12'nin sonucudur. □

Sonuç 6.1.17. *Her* $q \in [1, \infty)$ *olmak üzere,* $\mathcal{L}(c_0, L_q[0,1]) \neq \mathcal{L}^r(c_0, L_q[0,1])$ *ve* $\mathcal{L}(c, L_q[0,1]) \neq \mathcal{L}^r(c, L_q[0,1])$ *sağlanır.*

Kanıt. Her $q \in [1, \infty)$ için $L_q[0,1]$ bir AM-uzayına örgü izomorfik olmadığından Teorem 6.1.12'nin sonucudur. □

Sonuç 6.1.18. *Her* $q \in [1, \infty)$ *için* $\mathcal{L}(C[0,1], L_q[0,1]) \neq \mathcal{L}^r(C[0,1], L_q[0,1])$ *olur.*

Kanıt. Eşit olsaydı Sonuç 6.1.4 her $q \in [1, \infty)$ için $\mathcal{L}(c, L_q[0,1]) \equiv \mathcal{L}^r(c, L_q[0,1])$ olduğunu söylerdi. □

Sonuç 6.1.19. *Her* $p \in (1, \infty)$ *ve* $q \in [1, \infty)$ *için,* $\mathcal{L}(L_p[0,1], l_q) \neq \mathcal{L}^r(L_p[0,1], l_q)$ *olur.*

Kanıt. Her $p \in (1, \infty)$ için $L_q[0,1]$ bir AL-uzayına örgü izomorfik olmadığından Teorem 6.1.12'nin sonucudur. □

Orno Teoreminde l_∞ uzaylarının sonlu boyutlu versiyonlarıyla ilgileneceğiz. l_∞^n ile l_∞ normu altında $\mathbb{R}^n$ uzayını göstereceğiz, yani l_∞^n uzayı tüm $x = (x_1, \ldots, x_n)$ sonlu dizilerinin

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

normu altındaki uzaydır.

Teorem 6.1.20 (Orno)**.** *E ve F sonsuz boyutlu Banach örgüleri ve $\mathcal{F}(E, F)$ sonlu ranklı operatörler uzayının düzgün kapanışındaki her T operatörü P ve N iki pozitif operatör olmak üzere $T = P - N$ şeklinde yazılabildiğini varsayalım. Eğer F uzayı l_∞^n uzayına örgü izometrik bir alt uzay içermiyorsa E uzayı bir AL-uzayına örgü izometriktir.*

Kanıt. [13]. □

Sonuç 6.1.21. *$p \in (1,\infty)$ ve $q \in [1,\infty)$ olmak üzere $\mathcal{L}(L_p[0,1], L_q[0,1]) \neq \mathcal{L}^r(L_p[0,1], L_q[0,1])$.*

Kanıt. Her $p \in (1,\infty)$ için L_p uzayı bir AL-uzayına örgü izometrik olmadığından Teorem 6.1.20 ve Teorem 4.1.3'ün sonucudur. □

Teorem 6.1.22. *F keyfi Banach örgüsü olmak üzere, $\mathcal{L}(l_1, F) \equiv \mathcal{L}^r(l_1, F)$ olur.*

Kanıt. $S \in \mathcal{L}(l_1, F)$ alalım. Her $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1$ için $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ olduğundan $Sx = \sum_{i=1}^{\infty} x_i S e_i$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i |Se_i| \| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \, \|Se_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \right) \|S\| < \infty$$

olduğundan $T : l_1 \to F$ operatörünü her $x \in l_1$ için

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} x_i |Se_i|$$

şeklinde tanımlayalım. Açıkça görüleceği gibi $T \in \mathcal{L}(l_1, F)$ ve $T \geq 0$, $T \geq S$, $\|T\| \leq \|S\|$. Böylece $S \in \mathcal{L}^r(l_1, F)$ bulunur. $T \geq S$ ve $T \geq -S$ olduğundan $\|S\|_r \leq \|T\| \leq \|S\|$. Sonuç olarak $\|S\|_r = \|S\|$ bulunur. □

E bir Riesz uzayı olmak üzere bir pozitif f elemanına $0 \leq g \leq f$ sağlayan her $g \in E$ için $g = \lambda f$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ varsa *diskret eleman* denir. $f_1, \ldots, f_n$ elemanları E uzayında diskret ve lineer bağımsız ise her $i \neq j$ için $f_i \wedge f_j = 0$ olur.

Teorem 6.1.23. *E bir Banach örgüsü ve F bir AM-uzayı olsun. Eğer E uzayındaki tüm diskret elemanların ürettiği lineer E_0 uzayı E içinde norm yoğun ise $\mathcal{L}(E, F) \equiv \mathcal{L}^r(E, F)$ gerçeklenir.*

Kanıt. $S \in \mathcal{L}(E, F)$ alalım. Her $f \in E_0$ için $f_1, \ldots, f_n$ elemanları diskret ve lineer bağımsız ve $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ olmak üzere $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ şeklinde yazabiliriz. Bir $T_0 : E_0 \longrightarrow F$ operatörünü

$$T_0 f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |Sf_i|$$

şeklinde tanımlayalım. $f_1, \ldots, f_n$ elemanlarının dik olmasından her $i = 1, \ldots, n$ için $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ olmak üzere

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \lambda_i f_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| f_i = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right|$$

olduğunu görmek kolaydır. Böylece F uzayı bir AM-uzayı olduğundan

$$\begin{aligned} \|T_0 f\|_F &\leq \left\|\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i S f_i|\right\|_F = \left\|\sup_{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1,1\}} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \lambda_i S f_i\right\|_F \\ &\leq \|S\| \sup_{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1,1\}} \left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \lambda_i f_i\right\|_E = \|S\| . \|f\|_E \end{aligned}$$

bulunur. Her $g \in E$ için E_0 uzayı E içinde norm yoğun olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ (ispattaki yakınsamalar norm anlamında) olacak şekilde $g_1, g_2, \ldots \in E_0$ dizisi vardır. $T : E \longrightarrow F$ operatörünü

$$Tg = \lim_{n\to\infty} T_0 g_n$$

şeklinde tanımlarsak T operatörü T_0 operatörünün bir genişlemesidir ve $\|T_0\| = \|T\| \leq \|S\|$ sağlanır. E_0 üzerinde $T_0 \geq 0$ ve $f \in E_0$ iken $|f| \in E_0$ olduğundan $g \geq 0$ ise $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$, $(g_n \in E_0)$ yazılabildiğinden

$$Tg = T\,|g| = T \lim_{n\to\infty} |g_n| = \lim_{n\to\infty} T_0 \,|g_n| \geq 0$$

$T \geq 0$ bulunur. E_0 üzerinde $T_0 \geq \pm S$ olduğundan E üzerinde $T \geq \pm S$ bulunur. Böylece $S \in \mathcal{L}^r(E, F)$ ve $\|S\|_r \leq \|T\| \leq \|S\|$ o halde $\|S\|_r = \|S\|$ bulunur. $\square$

Teorem 6.1.24. *Her (sonsuz) kompakt Hausdorff X uzayı için $\mathcal{L}(C(X), c_0) \neq \mathcal{L}^r(C(X), c_0)$ olur.*

Kanıt. 1. Durum. X uzayı içinde terimleri birbirinden farklı yakınsak bir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi olsun.

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir x_0 elemanına yakınsadığını varsayalım. Bir $S \in \mathcal{L}(C(X), c_0)$ operatörünü her $f \in C(X)$ için

$$Sf = (f(x_1) - f(x_0), f(x_2) - f(x_0), \ldots)$$

şeklinde tanımlayalım. S operatörünün regüler olmadığını göstereceğiz. S operatörünün regüler olduğunu varsayalım. O halde $T \geq S$ olacak şekilde $T \in$

$\mathcal{L}^+(C(X), c_0)$ vardır. Her x_n ve x_0 çifti için $0 \le f_n \le 1$, $f_n(x_n) = 1$ ve $f_n(x_0) = 0$ olacak şekilde $f_n \in C(X)$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(T\mathbf{1}_X)(n) \ge (Tf_n) \ge (Sf_n)(n) = f_n(x_n) - f_n(x_0) = 1$$

bulunur. Ama $T\mathbf{1}_X \in c_0$. Bu ise çelişkidir.

2.Durum. X uzayı içinde hiç yakınsak alt dizisi olmayan bir dizi olsun. Teorem 6.1.6'dan (a) $\mu(X) = 1$, (b) $g_1 = \mathbf{1}_X$, (c) Hemen her yerde $|g_n(x)| = 1$ ve (d) $\int g_n g_m d\mu$ $(n \neq m)$ olacak şekilde X üzerinde μ regüler Borel ölçüsü ve $g_1, g_2, \ldots$ ölçülebilir fonksiyonları vardır. Böylece $g_1, g_2, \ldots$ dizisi $L^2(\mu)$ içinde ortonormal bir dizidir. Bu durumda her $f \in L^2(\mu)$ için, özellikle her $f \in C(X)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \int f g_n d\mu = 0$ bulunur. Bir $S \in \mathcal{L}(C(X), c_0)$ operatörünü

$$Sf = \left(\int fg_1 d\mu, \int fg_2 d\mu, \ldots\right)$$

şeklinde tanımlayalım. $Sf \in l_2$, $S \in \mathcal{L}(C(X), c_0)$ ve $\|S\| = 1$ olduğu açıktır. S operatörünün regüler olmadığını göstereceğiz. $C(X)$ uzayı $L^2(\mu)$ uzayı içinde yoğunolduğundan $n \in \mathbb{N}$ için $\|h_n - g_n\|_{L^2} \le \frac{1}{2}$ olacak şekilde $h_n \in C(X)$ elemanları vardır.

$$\overline{h_n}(x) := \begin{cases} h_n(x) & \text{eğer } -1 \le h_n(x) \le 1 \\ 1 & \text{eğer } h_n(x) > 1 \\ -1 & \text{eğer } h_n(x) < -1 \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. O halde $\overline{h_n} \in C(X)$, $\left\|\overline{h_n} - g_n\right\|_{L^2} \le \frac{1}{2}$. (a) ve (c) özelliklerinden

$$1 - \int \overline{h_n} g_n d\mu = \int \left(g_n - \overline{h_n}\right) g_n d\mu \le \left\|g_n - \overline{h_n}\right\|_{L^2} \le \frac{1}{2}.$$

Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := \mathbf{1}_X + \overline{h_n}$ dersek, (b) ve (d) özelliklerinden $\int f_n g_n d\mu = \int \overline{h_n} g_n d\mu \ge \dfrac{1}{2}$ bulunur. S operatörü regüler olsaydı $T \ge S$ olacak şekilde $T \in \mathcal{L}^+(C(X), c_0)$ var olurdu. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$2(T\mathbf{1}_X)(n) \ge (Tf_n)(n) \ge (Sf_n)(n) = \int f_n g_n d\mu \ge \frac{1}{2}$$

olması $T\mathbf{1}_X \in c_0$ ile çelişir. $\square$

X bir topolojik uzay ve $S \subset X$ bir alt uzay olsun. Eğer S uzayı üzerindeki her sınırlı sürekli her fonksiyon X uzayı üzerinde tanımlı sınırlı sürekli bir fonksiyona genişletilebiliyorsa S uzayına X uzayının içine C^*-gömülebilir denir.

Önerme 6.1.25. *X kompakt Hausdorff topolojik uzay olsun Eğer X uzayının içinde hiç yakınsak alt dizisi olmayan bir dizi varsa $\mathcal{L}(C(X), c) \neq \mathcal{L}^r(C(X), c)$ olur.*

Kanıt. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ hiç yakınsak alt dizisi olmayan bir dizi olsun. Sonuç 6.1.7'den her biri $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin sonsuz tane elemanını içeren $Y_1, Y_2, \ldots$ kompakt kümeleri ve ikişer ikişer ayrık $U_1, U_2, \ldots$ açık kümeleri vardır ki $Y_i \subset U_i$ $(i \in \mathbb{N})$ sağlanır. Böylece her $i \in \mathbb{N}$ için $0 \leq h_i \leq 1$, her $y \in Y_i$ için $h_i(y) = 1$ ve her $x \in X \setminus U_i$ için $h_i = 0$ olacak şekilde $h_i \in C(X)$ fonksiyonları vardır Teorem 6.1.25'in ispatından her $i \in \mathbb{N}$ için

(a) $\|S_i\| = 1$

(b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $(S_i f_{in})(n) \geq \frac{1}{4}$ olcak şekilde $f_{i1}, f_{i2}, \ldots \in C(Y_i)$, $0 \leq f_{in} \leq 1$ elemanları vardır.

Her kompakt Y_i kümesi X uzayı içine C^*-gömülebilir olduğundan f_{in} fonksiyonunu bir $f_{in}^0 \in C(X)$, $0 \leq f_{in}^0 \leq 1$ $(i, n \in \mathbb{N})$ fonksiyonuna genişletebiliriz. Bir $S : C(X) \to c_0$ operatörünü her $f \in C(X)$ için

$$(Sf)\left(2^{i-1}(2j-1)\right) = \frac{1}{i}\left(S_i\left(f|_{Y_i}\right)\right)(j) \quad (i, j \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlayalım. Aslında

$$\begin{aligned} Sf = \Big(&(S_1(f|_{Y_1}))(1), \frac{1}{2}(S_2(f|_{Y_2}))(1),\ (S_1(f|_{Y_1}))(2), \frac{1}{3}(S_3(f|_{Y_3}))(1), (S_1(f|_{Y_1})) \\ &(3), \frac{1}{2}(S_2(f|_{Y_2}))(2), (S_1(f|_{Y_1}))(4)\ \frac{1}{4}(S_4(f|_{Y_4}))(1), \ldots \Big). \end{aligned} \tag{6.6}$$

$\|S\| \leq 1$ olduğu görülebilir. Böylece $S \in \mathcal{L}(C(X), c_0)$ ve buradan $S \in \mathcal{L}(C(X), c)$ bulunur. S operatörünün regüler olmadığını göstereceğiz. S operatörünün regüler olduğunu varsayalım. O halde $T \geq S$ olacak şekilde $T \in \mathcal{L}^+(C(X), c)$ vardır. $i \in \mathbb{N}$ alalım. $Th_i \geq T\left(f_{ij}^0 h_i\right) \leq S(f_{ij}^0 h_i)$, $j \in \mathbb{N}$. $f_{ij}^0 h_i|_{Y_i} = f_{ij}$, $f_{ij}^0 h_i|_{Y_k} = 0$ $(k \neq i;$ $j, k \in \mathbb{N})$ olduğundan ve (b) özelliğinden

$$Th_i\left(2^{i-1}(2j-1)\right) \geq \frac{1}{i}\left(S_i f_{ij}\right)(j) \geq \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{4}$$

böylece $Th_i(\infty) := \lim_{n\to\infty} (Th_i)(n) \geq \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{4}$. Bu durumda

$$\begin{aligned}(T\mathbf{1}_X)(\infty) &= \lim_{n\to\infty}(n) \geq (T(h_1 + \ldots + h_i))(\infty) \\ &= (Th_1)(\infty) + \ldots + (Th_i)(\infty) \geq \frac{1}{4}\left(1 + \ldots + \frac{1}{i}\right),\end{aligned}$$

buradan $(T\mathbf{1}_X)(\infty) = \infty$ çelişkisi bulunur. □

İlerleyen teoremlerde kullanacağımız

$$X_l := \{x \in X : \ \exists (x_n) \subset X \ x_i \neq x_j \ \ (i \neq j) \ \text{ ve } \lim x_n = x.\}$$

kümesini tanımlayalım.

Teorem 6.1.26. *X kompakt Hausdorff topolojik uzay olmak üzere*
(1) $\mathcal{L}(C(X), c) = \mathcal{L}^r(C(X), c)$ ise X_l kümesi sonludur,
(2) $\mathcal{L}(C(X), c) \equiv \mathcal{L}^r(C(X), c)$ ise X_l kümesi tek bir elemana sahiptir.

Kanıt. (1) $\mathcal{L}(C(X), c) = \mathcal{L}^r(C(X), c)$ ve $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_r$ olduğundan $\mathcal{L}^r(C(X), c)$ uzayından $\mathcal{L}(C(X), c)$ uzayına giden birim operatör kapalıdır, Kapalı Grafik Teoreminden böylece öyle bir $m > 0$ vardır ki her $\Phi \in \mathcal{L}(C(X), c)$ için $\|\Phi\| \leq m\|\Phi\|$.

X_l kümesinin sonsuz elemanlı olduğunu varsayalım. Keyfi $N \in \mathbb{N}$ için $x_{1\infty}, \ldots, x_{N\infty} \in X_l$ elemanlarını alalım ve $X_i = \{x_{i\infty}, x_{i1}, x_{i2}, \ldots\}$ kümesi ile $x_{i\infty}$ elemanına yakınsayan $\{x_{in}\}_{n\in\mathbb{N}}$ terimleri birbirinden farklı dizisinin elemanlarından oluşan kümeyi gösterelim ve $i \neq j$ $(i, j = 1, \ldots, N)$ iken $X_i \cap X_j = \emptyset$ olsun. $\Phi \in \mathcal{L}(C(X), c)$ operatörünü her $f \in C(X)$ için

$$\begin{aligned}\Phi f = &(f(x_{11}) - f(x_{1\infty}), \ldots, f(x_{N1}) - f(x_{N\infty}), f(x_{12}) - f(x_{1\infty}), \\ &\ldots, f(x_{N2}) - f(x_{N\infty}), \ldots),\end{aligned} \tag{6.7}$$

şeklinde tanımlayalım, yani

$$\Phi f((j-1)N + i) = f(x_{ij}) - f(x_{i\infty}) \quad (i \in \{1, \ldots, N\}, j \in \mathbb{N})$$

olsun. $\|\Phi\| = 2$ ve $(\Phi f)(\infty) := \lim_{n\to\infty}(\Phi f)(n) = 0$.

$\Psi \geq \Phi$ sağlayan keyfi bir $\Psi \in \mathcal{L}^+ (C(X), c)$ operatörü alalım ($\mathcal{L}(C(X), c) = \mathcal{L}^r (C(X), c)$ olması böyle bir Ψ operatörünün varlığını garantiler). Her $f \in C(X)$ için

$$\psi_n (f) = (\Psi f)(n) \, (n \in \mathbb{N}) \text{ ve } \psi_\infty (f) = (\Psi f)(\infty) \left(:= \lim_{n\to\infty} (\Psi f)(n)\right)$$

olacak şekilde $\psi_\infty, \psi_1, \psi_2, \ldots \in C(X)'_+$ tanımlayalım. Böylece $\Psi f = (\psi_1, \psi_2, \ldots)$ ve $\Psi_\infty (f) = \lim_{n\to\infty} \psi_n (f)$. Her $x \in X$ için

$$\delta_x (f) = f(x), \quad f \in C(X)$$

$\delta_x \in C(X)'_+$ tanımlayalım. Açıkça görüleceği gibi $x \neq y$ ise $\delta_x \perp \delta_y$. Her i için $\psi_{(j-1)N+i} \geq 0$ ve $\psi_{(j-1)N+i} \geq \delta_{x_{ij}} - \delta_{x_{i\infty}}$ olduğundan $\psi_{(j-1)N+i} \geq \left(\delta_{x_{ij}} - \delta_{x_{i\infty}}\right)^+ = \delta_{x_{ij}}$. Her $f \in C(X)^+$ için

$$\psi_\infty (f) = \lim_{j\to\infty} \psi_{(j-1)N+i} (f) \geq \lim_{j\to\infty} \delta_{x_{ij}} (f) = \lim_{j\to\infty} f(x_{ij}) = f(x_{i\infty}) = \delta_{x_{i\infty}} (f).$$

Böylece her i için $\psi_\infty \geq \delta_{x_{i\infty}}$ bulunur. Dahası, $\psi_\infty \geq \delta_{x_{1\infty}} + \ldots + \delta_{x_{N\infty}}$. Buradan

$$[(2\Psi - \Phi) f](\infty) = 2\psi_\infty (f) - 0 \geq 2 (f(x_{1\infty}) + \ldots + f(x_{N\infty}))$$

ve $[(2\Psi - \Phi) \mathbf{1}_X](\infty) \geq 2N$ bulunur. O halde $\|2\Psi - \Phi\| \geq 2N$. Böylece $\|\Phi\|_r \geq 2N = N\|\Phi\|$. N sayısının keyfiliğinden $\|\Phi\|_r \geq N\|\Phi\|$ bulunur ve bu ise $\|\Phi\|_r \leq m\|\Phi\|$ olmasıyla çelişir.

(2) Eğer X_l sonsuz elemanlı ise (1)'den $\mathcal{L}(C(X), c) \neq \mathcal{L}^r (C(X), c)$. X_l sonlu elemanlı ve $Card X_l = N \geq 2$ ise (1)'in ispatından $\|\Phi\|_r \geq N\|\Phi\| > \|\Phi\|$ olacak şekilde $\Phi \in \mathcal{L}(C(X), c)$ olduğunu biliyoruz. Bu ise $\mathcal{L}(C(X), c) \equiv \mathcal{L}^r (C(X), c)$ olmasıyla çelişir. □

Teorem 6.1.27. *X kompakt Hausdorff topolojik uzay olmak üzere aşağıdakiler birbirine eşdeğerdir:*

(1) X uzayı içindeki her dizi yakınsak bir alt diziye sahiptir ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $Card X_l = n$.

(2) X uzayı bir diskret A uzayının tek nokta kompaktlaştırmasıdır, bu A kümesi X uzayı içinde yoğundur ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $Card(X \setminus A) = n$

(3) X kümesinin öyle açık kapalı $X_1, \ldots, X_n$ alt kümeleri vardır ki $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ ve

her X_i kümesi bir diskret uzayın tek nokta kompaklaştırmasıdır.

(4) *Her kompakt Hausdorff Z uzayı için* $\mathcal{L}\left(C\left(X\right),C\left(Z\right)\right)=\mathcal{L}^r\left(C\left(X\right),C\left(Z\right)\right)$.

(5) $\mathcal{L}\left(C\left(X\right),C\left[0,1\right]\right)=\mathcal{L}^r\left(C\left(X\right),C\left[0,1\right]\right)$.

(6) $\mathcal{L}\left(C\left(X\right),c\right)=\mathcal{L}^r\left(C\left(X\right),c\right)$.

Teorem 6.1.28. *X kompakt Hausdorff topolojik uzay olmak üzere aşağıdakiler birbirine eşdeğerdir:*

(i) X uzayı içindeki her dizi yakınsak bir alt diziye sahiptir ve $CardX_l=1$.

(ii) X uzayı bir diskret uzayın tek nokta kompaktlaştırmasıdır.

(iii) Her kompakt Hausdorff Z uzayı için $\mathcal{L}\left(C\left(X\right),C\left(Z\right)\right)\equiv\mathcal{L}^r\left(C\left(X\right),C\left(Z\right)\right)$.

(iv) $\mathcal{L}\left(C\left(X\right),C\left[0,1\right]\right)\equiv\mathcal{L}^r\left(C\left(X\right),C\left[0,1\right]\right)$.

(v) $\mathcal{L}\left(C\left(X\right),c\right)\equiv\mathcal{L}^r\left(C\left(X\right),c\right)$.

Teorem (6.1.28) ve (6.1.29)'un ispatları: (1) $\Rightarrow$ (2) Her $x\in X\setminus X_l$ için $\{x\}$ kümesinin açık olduğunu göstermek yeterlidir. X_l kümesi sonlu olduğundan, $X\setminus X_l$ kümesi açıktır. Böylece her $x\in X\setminus X_l$ için $x\in V\subset\overline{V}\subset X\setminus X_l$ olacak şekilde V açık kümesi vardır. (1)'den $\overline{V}$ kümesi sonludur. O halde $\overline{V}\setminus\{x\}$ kümesi sonlu, dolayısıyla kapalıdır ve $\{x\}=V\setminus\left(\overline{V}\setminus\{x\}\right)$ açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3) ve (3) $\Rightarrow$ (1) Kolaydır.

$(i)\Leftrightarrow(ii)$ durumu (1) $\Leftrightarrow$ (3) durumunun özel bir halidir.

$(i)\Rightarrow(iii)$ $X_l=\{x_0\}$ olduğunu varsayalım. Her $f\in C\left(X\right)$ için

$$\left\{x\in X:\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|\geq\frac{1}{n}\right\}$$

kapalı kümesi sonlu elemanlıdır, böylece $A:=\{x\in X:f\{x\}\neq f\left(x_0\right)\}$ sayılabilirdir. A kümesini içeren sayılabilir sonsuz $A_f=\{x_0,x_1,x_2,\ldots\}$ kümesi için $\lim\limits_{i\to\infty}x_{if}=x_0$ olsun. O halde A_f kümesi kompakttır. $S\in\mathcal{L}\left(C\left(X\right),C\left(Y\right)\right)$ olsun. Her $f\in C\left(X\right)$ için norm yakınsaklıktan

$$f=\sum_{x\in A_f}\left(f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right)\mathbf{1}_{\{x\}}+f\left(x_0\right)\mathbf{1}_X.$$

Her $y\in Y$ ve her $N\in\mathbb{N}$ için

$$g\left(x_{if}\right)=1;\quad i\in\{1,\ldots,N\}\ \text{ ve }S\mathbf{1}_{\left\{x_{if}\right\}}\left(y\right)\geq0\ \text{ ise}$$

$$g\left(x_{if}\right)=-1;\quad i\in\{1,\ldots,N\}\ \text{ ve } S\mathbf{1}_{\left\{x_{if}\right\}}\left(y\right)<0 \text{ ise}$$

$$g\left(x\right)=1;\quad x\in A_f\setminus\{x_{1f},\ldots,x_{Nf}\}\ \text{ ve } S\mathbf{1}_X\left(y\right)-\sum_{i=1}^{N}S\mathbf{1}_{\left\{x_{if}\right\}}\left(y\right)\geq 0 \text{ ise}$$

$$g\left(x\right)=-1;\quad x\in A_f\setminus\{x_{1f},\ldots,x_{Nf}\}\ \text{ ve } S\mathbf{1}_X\left(y\right)-\sum_{i=1}^{N}S\mathbf{1}_{\left\{x_{if}\right\}}\left(y\right)< 0 \text{ ise}$$

ve $|g|\leq 1$ olacak şekilde $g\in C\left(X\right)$ alalım. O halde

$$\begin{aligned}\|S\|\geq\|Sg\|\geq Sg\left(y\right)&=\sum_{i=1}^{N}\left(g\left(x_{if}\right)-g\left(x_0\right)\right)S\mathbf{1}_{\left\{x_{if}\right\}}\left(y\right)+g\left(x_0\right)S\mathbf{1}_X\left(y\right)\\&=\sum_{i=1}^{N}\left|S\mathbf{1}_{\left\{x_{if}\right\}}\left(y\right)\right|+\left|S\mathbf{1}_X\left(y\right)-\sum_{i=1}^{N}S\mathbf{1}_{\left\{x_{if}\right\}}\left(y\right)\right|.\end{aligned}$$

Norm anlamında $N\to\infty$ iken limit alırsak

(a) $$\|S\|\,\mathbf{1}_Y\geq\sum_{x\in A_f}\left|S\mathbf{1}_{\{x\}}\right|+\left|S\mathbf{1}_X-\sum_{x\in A_f}S\mathbf{1}_{\{x\}}\right|.$$

Noktasal olarak

(b) $$\frac{1}{2}\left(S\mathbf{1}_X+\|S\|\,\mathbf{1}_Y\right)\geq S\mathbf{1}_X+\sum_{x\in A_f}\left(S\mathbf{1}_{\{x\}}\right)^{-},$$

(c) $$\frac{1}{2}\left(S\mathbf{1}_X+\|S\|\,\mathbf{1}_Y\right)\geq\sum_{x\in A_f}\left(S\mathbf{1}_{\{x\}}\right)^{+}.$$

Böylece (a)'dan

$$Tf=\sum_{x\in A_f}\left(f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right)\left(S\mathbf{1}_{\{x\}}\right)^{+}+\frac{1}{2}f\left(x_0\right)\left(S\mathbf{1}_X\right)+\|S\|\,\mathbf{1}_Y,\left(f\in C\left(X\right)\right)$$

şeklinde $T:C\left(X\right)\longrightarrow C\left(Y\right)$ operatörünü tanımlayabiliriz. (b) and (c)'den $T\geq S$ ve $T\geq 0$ olduğu görülebilir, böylece $T\in\mathcal{L}\left(C\left(X\right),C\left(Y\right)\right)$. O halde $S\in\mathcal{L}^r\left(C\left(X\right),C\left(Y\right)\right)$. $\|S\|=\|S\|_r$ göstermek kalır. $f\in C\left(X\right)$ ve $\|f\|\leq 1$ için $h:=\frac{1}{2}\left(S\mathbf{1}_X+\|S\|\,\mathbf{1}_Y\right)$ dersek

$$\begin{aligned}&\|\left(2T-S\right)f\|\\&=\sup_{y\in Y}\left|\sum_{x\in A_f}f\left(x\right)\left|S\mathbf{1}_{\{x\}}\left(y\right)\right|+f\left(x_0\right)\left(2h\left(y\right)-S\mathbf{1}_X\left(y\right)-\sum_{x\in A_f}\left|S\mathbf{1}_{\{x\}}\left(y\right)\right|\right)\right|\\&\leq\|f\|\sup_{y\in Y}\left|\sum_{x\in A_f}\left|S\mathbf{1}_{\{x\}}\left(y\right)\right|+2h\left(y\right)-S\mathbf{1}_X\left(y\right)-\sum_{x\in A_f}\left|S\mathbf{1}_{\{x\}}\left(y\right)\right|\right|\\&\leq\sup_{y\in Y}\left|2h\left(y\right)-S\mathbf{1}_X\left(y\right)\right|=\|S\|.\end{aligned}\tag{6.8}$$

Böylece, $\|S\|_r\leq\|2T-S\|\leq\|S\|$. Sonuç olarak $\|S\|=\|S\|_r$.

(1) $\Rightarrow$ (4) $X_l = \{x_1, \ldots, x_n\}$ olduğunu varsayalım. (3) sağlandığından $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$ ve her X_i kümesi bir diskret uzayın tek nokta kompaktlaştırması olacak şekilde açık kapalı $X_1, \ldots, X_n$ kümeleri vardır. Her $g \in C(X_i)$ için

$$g^*(x) = g(x); \quad x \in X_i \text{ ise}$$

$$g^*(x) = 0; \quad x \in X \setminus X_i \text{ ise}$$

şeklinde $g^* \in C(X)$ tanımlayalım. Böyle her $f \in C(X)$ fonksiyonu $f = (f|_{X_1})^* + \ldots + (f|_{X_n})^*$ şeklinde yazılabilir.

Her $S \in \mathcal{L}(C(X), C(Y))$ için

$$S_i g = S g^* \text{ her } g \in C(X_i) \;\; (i = 1, \ldots, n)$$

olacak şekilde $S_i \in \mathcal{L}(C(X_i), C(Y))$ tanımlayalım.
$(i) \Rightarrow (iii)$ kullanılırsa her i için $T_i \geq S_i$ olacak şekilde $T_i \in \mathcal{L}^+(C(X_i), C(Y))$ vardır. Şimdi bir $T \in \mathcal{L}^+(C(X), C(Y))$ operatörünü

$$Tf = T_1(f|_{X_1}) + \ldots + T_n(f|_{X_n}) \text{ her } f \in C(X)$$

şeklinde tanımlayalım. Her $f \in C(X)^+$ için

$$\begin{aligned} Tf &= T_1(f|_{X_1}) + \ldots + T_n(f|_{X_n}) \geq S_1(f|_{X_1}) + \ldots + S_n(f|_{X_n}) \\ &= S(f|_{X_1})^* + \ldots + S(f|_{X_n})^* = Sf \end{aligned} \tag{6.9}$$

yani $T \geq S$ bulunur. Sonuç olarak $S \in \mathcal{L}^r(C(X), C(Y))$.
(4) $\Rightarrow$ (5) ve $(iii) \Rightarrow (iv)$ açıktır.
(5) $\Rightarrow$ (6) ve $(iv) \Rightarrow (v)$ Sonuç 6.1.4.
(6) $\Rightarrow$ (1) ve $(v) \Rightarrow (i)$ Önerme 6.1.25 ve Teorem 6.1.26 kullanılırsa istenilen elde edilir.

Teorem 6.1.27 ile $\mathcal{L}(C[0,1], c) \neq \mathcal{L}^r(C[0,1], c)$ ve $\mathcal{L}(l_\infty, c) \neq \mathcal{L}^r(l_\infty, c)$ olduğu görülür. Dahası, Sonuç 6.1.4'ü kullanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 6.1.29. *$\mathcal{L}(C[0,1], C[0,1]) \neq \mathcal{L}^r(C[0,1], C[0,1])$ ve $\mathcal{L}(l_\infty, C[0,1]) \neq \mathcal{L}^r(l_\infty, C[0,1])$ olur.*

Teorem 6.1.30. *X ve Y kompakt Hausdorff uzaylar olsun. Y uzayının içinde terimleri birbirinden farklı yakınsak bir dizi olduğunu varsayalım. Bu durumda* *aşağıdaki* (7) *iddiası Teorem 6.1.27'nin* (1)-(6) *koşullarına denktir ve aşağıdaki (vi) iddiası Teorem 6.1.28'in (i)-(v) koşullarına denktir.*

(7) $\mathcal{L}(C(X), C(Y)) = \mathcal{L}^r(C(X), C(Y))$.

(vi) $\mathcal{L}(C(X), C(Y)) \equiv \mathcal{L}^r(C(X), C(Y))$.

Kanıt. (4) $\Rightarrow$ (7) açıktır. (7) $\Rightarrow$ (6) Sonuç 6.1.3'ten elde edilir.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ açıktır. $(vi) \Rightarrow (v)$ Sonuç 6.1.3'ten elde edilir. □

Y uzayı içinde terimleri birbirnden farklı olan yakınsak bir alt dizinin olmasıyla $\mathcal{L}(C(X), C(Y))$ ve $\mathcal{L}^r(C(X), C(Y))$ uzayları arasındaki ilişkinin sadece X uzayına bağlı olması ve Y uzayının ekstra bir özellik sağlamasını istememesi ilginçtir. Böylece aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 6.1.31. *Y kompakt Hausdorff uzayı içinde terimleri birbirinden farklı yakınsak bir dizi olsun. O halde $\mathcal{L}(l_\infty, C(Y)) \neq \mathcal{L}^r(l_\infty, C(Y))$ ve $\mathcal{L}(C[0,1], C(Y)) \neq \mathcal{L}^r(C[0,1], C(Y))$ olur.*

Tanım 6.1.32. *sgn işaret(signum) fonksiyonunu göstermek üzere $[0,1]$ üzerindeki Rademacher fonksiyonları $r_n(t) = \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi t))$ şeklinde tanımlanır.*

Rademacher fonksiyonları her $p \geq$ için $L_p([0,1])$ uzaylarının içindedir ve $L_2([0,1])$ Hilbert uzayı içinde bir ortonormal dizi oluştururlar. Dahası sonlu p için $L_p([0,1])$ uzayları üzerinde ürettikleri operatörler zayıf* 0'a yakınsarlar, yani, $p \in [1,\infty)$ olmak üzere her $f \in L_p([0,1])$ için, $\phi_n(f) = \int_0^1 r_n(t) f(t)\, dt \to 0$, $n \to \infty$.

Önerme 6.1.33. *$p \in [1,\infty)$ ise regüler olmayan bir $T : L_p([0,1]) \to c_0$ operatörü vardır.*

Kanıt. $T : L_p([0,1]) \to c_0$ operatörünü $Tx = (\phi_n(x))$ olarak alalım. T operatörü sınırlıdır. Rademacker fonksiyonlarının ortonormal olmasından dolayı $n \geq 1$ için $T(r_n) = e_n$, c_0 uzayı için bir taban vektörleridir ve $T(r_0) = 0$ böylece $T(r_0 + r_n) = e_n$. $0 \leq r_0 + r_n \leq 2r_0$ olduğundan $U \geq T, 0$ olsaydı her $n \in \mathbb{N}$ için

$$U(2r_0) \geq U(r_0 + r_n) \geq T(r_n + r_0) = e_n$$

bulunurdu ki bu ise $U(2r_0) \in c_0$ olmasıyla çelişir. O halde T regüler değildir. □

Önerme 6.1.34. *$p \in (1, \infty)$ ise $\mathcal{L}(L_p([0,1]), c) \neq \mathcal{L}^r(L_p([0,1]), c)$.*

Kanıt. X keyfi bir Banach uzayı olmak üzere $T : X \to c$ operatörü bir sınırlı zayıf* yakınsak $(f_n) \in X^*$ fonksiyonel dizisiyle $Tx = (f_n(x))$ şeklinde belirlenebilir. $f \in X^*$ fonksiyonelinin bu dizinin limiti olduğunu varsayalım.
$p^{-1} + q^{-1} = 1$ olsun, böylece $1 < q < \infty$. $n \in \mathbb{N}$ elemanını $n = 2^j k$,k tek sayı olmak üzere şeklinde yazalım ve

$$f_n(t) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{q}} j^{-\frac{1}{q}} r_k(2^{-j}t) & t \in [0, 2^{-j}] \\ 0 & t \in (2^{-j}, 1] \end{cases}$$

tanımlayalım, böylece $|f_n| = 2^{\frac{j}{q}} j^{-\frac{1}{q}} \chi_{[0,2^{-j}]}$ ve buradan

$$\|f_n\|_q = \left(2^j j^{-1} 2^{-j}\right)^{\frac{1}{q}} = j^{-\frac{1}{q}}.$$

(f_n) dizisi sınırlıdır, böylece bir $T : L_p([0,1]) \to l_\infty$ operatörünü

$$Tx = \left(\int_0^1 f_n(t)\, x(t)\, dt\right)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Aslında her $x \in L_p([0,1])$ için $Tx \in c_0 \subset c$. Bunun için $\|x\| \leq 1$ olan bir x elemanı ve $\epsilon > 0$ alalım. $j_0 \in N$ seçelim ve $j > j_0$ ise $j^{-\frac{1}{q}} < \epsilon$ olsun. Böylece k tek sayı ise $|(Tx)_{2^j k}| = \|f_{2^j k}\|_q = j^{-\frac{1}{q}} < \epsilon$. Her $j \leq j_0$ için öyle bir k_j vardır ki $k > k_j$ ise $|(Tx)_{2^j k}| = |f_{2^j k}| < \epsilon$. O halde $j \leq j_0$ ve $k \leq k_j$ olmak üzere $2^j k$ tamsayılarının sonlu tanesi dışında $|(Tx)_{2^j k}| < \epsilon$ olduğunu gördük. T regüler olsaydı $U \geq \pm T$ olacak şekilde $U : L_p([0,1]) \to c$ operatörü var olurdu. $g_n(x) = (Ux)_n$ ve $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ diyelim. $U \geq \pm T$ olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n \geq |f_n|$. Bir j sayısını sabitlersek her k tek sayısı için

$$|g_{2^j k}| \geq |f_{2^j k}| = 2^{\frac{j}{q}} j^{-\frac{1}{q}} \chi_{[0,2^{-j}]}$$

olur. Tek sayılar üzerinden $k \to \infty$ limit alırsak ve $L_q([0,1])$ uzayının pozitif konisinin zayıf* kapalı olduğunu kullanırsak $g \geq 2^{\frac{j}{q}} j^{-\frac{1}{q}} \chi_{[0,2^{-j}]}$ bulunur. Bu eşitsizlik tüm $j \in \mathbb{N}$ için geçerli olur. O halde

$$\|g\|_q^q \geq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j-1} \left(2^{\frac{j}{q}} j^{-\frac{1}{q}}\right)^q = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j} = \infty$$

yani $g \notin L_q([0,1])$ bulunur. Bu durumda T regüler değildir. $\square$

Önerme 6.1.35. $p \in (1, \infty)$ *için* $\mathcal{L}\left(L_p\left([0,1]\right), C\left([0,1]\right)\right) \neq \mathcal{L}^r\left(L_p\left([0,1]\right), C\left([0,1]\right)\right)$ *olur.*

Kanıt. Bir önceki teorem ve Sonuç 6.1.4'ün sonucudur. □

Son olarak bu bölümde yaptığımız işlerle ilgili olarak bir tablo vereceğiz. Her bir hücrede sadece eşitliklerin geçerli olup olmadığını değil bu tez çalışmasındaki yerlerine (numaralarına) referans verilmiştir.

E \ F	l_1	l_q $q \in (1,\infty)$	c_0	c	l_∞	$C[0,1]$	$L_1[0,1]$	$L_q[0,1]$ $q \in (1,\infty)$
l_1	$\equiv$ 4.2.7	$\equiv$ 6.1.22	$\equiv$ 6.1.22	$\equiv$ 6.1.22	$\equiv$ 4.2.4	$\equiv$ 6.1.22	$\equiv$ 4.2.7	$\equiv$ 6.1.22
l_p $p \in (1,\infty)$	$\neq$ 6.1.13	$\neq$ 6.1.13	$\equiv$ 6.1.23	$\equiv$ 6.1.23	$\equiv$ 4.2.4	$\equiv$ 6.1.23	$\neq$ 6.1.16	$\neq$ 6.1.16
c_0	$\neq$ 6.1.14	$\neq$ 6.1.14	$\equiv$ 6.1.23	$\equiv$ 6.1.23	$\equiv$ 4.2.4	$\equiv$ 6.1.23	$\neq$ 6.1.17	$\neq$ 6.1.17
c	$\neq$ 6.1.14	$\neq$ 6.1.14	$\neq$ 6.1.24	$\equiv$ 6.1.28	$\equiv$ 4.2.4	$\equiv$ 6.1.28	$\neq$ 6.1.17	$\neq$ 6.1.17
l_∞	$\neq$ 6.1.13	$\neq$ 6.1.13	$\neq$ 6.1.24	$\neq$ 6.1.27	$\equiv$ 4.2.4	$\neq$ 6.1.29	$\neq$ 6.1.16	$\neq$ 6.1.16
$C[0,1]$	$\neq$ 6.1.15	$\neq$ 6.1.15	$\neq$ 6.1.24	$\neq$ 6.1.27	$\equiv$ 4.2.4	$\neq$ 6.1.29	$\neq$ 6.1.18	$\neq$ 6.1.18
$L_1[0,1]$	$\equiv$ 4.2.7	$\equiv$ 4.2.9	$\neq$ 6.1.33		$\equiv$ 4.2.4		$\equiv$ 4.2.7	$\equiv$ 4.2.9
$L_p[0,1]$ $p \in (1,\infty)$	$\neq$ 6.1.19	$\neq$ 6.1.19	$\neq$ 6.1.33	$\neq$ 6.1.34	$\equiv$ 4.2.4	$\neq$ 6.1.35	$\neq$ 6.1.21	$\neq$ 6.1.21

Bölüm 7

ÜZERİNDEKİ HER NORM-SINIRLI OPERATÖRÜN REGÜLER OLDUĞU BANACH ÖRGÜLERİ

Bu bölümde A. W. Wickstead'in [18] makalesi temel olarak alınacaktır. A. W. Wickstead'in ayrılabilir AM-uzayları için verdiği sıra birime sahip olma koşulu incelenerek üzerinde tanımlı olan her norm sınırlı operatörün regüler olduğu ayrılabilir Banach örgülerinin nasıl karakterize edildiği üzerinde durulacaktır.

7.1 Sonuçlar

Teorem 7.1.1 (Abramovich). *E bir Banach örgüsü ve $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}^r(E)$ olsun. Bu durumda E uzayı ya bir AL-uzayına ya da bir AM-uzayına örgü izomorfiktir.*

Kanıt. E uzayı ya her n için l_∞^n uzayına örgü izomorfik kapalı bir alt uzay içerir ya da bir n için içermez. İlk durumda E' uzayı her n için l_1^n uzayını içerir böylece Cartwright-Lotz Teoremden E uzayı bir AM-uzayına örgü izomorfiktir. İkinci durumda Orno Teoreminden E uzayı bir AL-uzayına örgü izomorfiktir. □

Aşağıda δ_{mn} ile Kronecker delta fonksiyonunu göstereceğiz (δ_{mn}; $m = n$ ise 1 değilse and 0 değerlerini alır).

Önerme 7.1.2. *E bir Banach örgüsü, (f_n) fonksiyonelleri E içinde örgü homomorfileri ve her $m, n \in \mathbb{N}$ için $f_m(x_n) = \delta_{mn}$ olacak şekilde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^+$*

olsun. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $f_m(y_n) = \delta_{mn}$ ve $y_n \leq x_n$ olacak şekilde ayrık elemanlardan oluşan $(y_n) \subset E^+$ dizisi vardır.

Kanıt. $p := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{2^n \|x_n\|}$ tanımlayalım. $y_1^1 = x_1 \vee p - p$, $z = x_1 \vee p - x_1$ olsun, böylece $y_1^1 \perp z$, $0 \leq y_1^1 \leq x_1$ ve $0 \leq z \leq p$ olur. $n \geq 2$ için $y_n^1 = 2^n \|x_n\| z \wedge x_n$ dersek $y_n^1 \leq x_n$ olur. $m \neq n$ ise $0 \leq f_m(y_n^1) \leq f_m(x_n) = 0$. Her $n \geq 2$ için $f_1(x_n) = 0$ ve f_1 sürekli olduğundan $f_1(p) = 0$ olur, böylece

$$f_1\left(y_1^1\right) = f_1(x_1) \vee f_1(p) - f_1(p) = f_1(x_1) \vee 0 - 0 = f_1(x_1) = 1.$$

Ayrıca

$$f_m(p) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_m(x_n)}{2^n \|x_n\|} = \frac{1}{2^m \|x_m\|}$$

ve $m \geq 2$ ise $f_m(z) = f_m(x_1) \vee f_m(p) - f_m(x_1) = 0 \vee f_m(p) - 0 = f_m(p)$, böylece $f_m(y_m^1) = 2^m \|x_m\| f_m(z) \wedge f_m(y_m^1) = 1$. Bu durumda $f_m(y_n^1) = \delta_{mn}$. $y_1^1 \perp z$ olduğundan her $n \geq 2$ için $y_1^1 \perp y_n^1$.

Bu adımları $\left(y_n^1\right)_{n=2}^{\infty}$ dizisi için tekrar ederek yeni bir $\left(y_n^2\right)_{n=2}^{\infty}$ dizi oluşturabiliriz ve

$$f_m\left(y_n^2\right) = \delta_{mn}\,(n \geq 2)$$

$$y_n^2 \leq y_n^1\,(n \geq 2)$$

$$y_2^2 \perp y_n^2\,(n \geq 3)$$

sağlanır. $n \geq 2$ ise $0 \leq y_n^2 \leq y_n^1 \perp y_1^1$ ve böylece $y_n^2 \perp y_1^1$ bulunur. Bu işlemi devam ettirerek $y_n = y_n^n$ alınırsa istenilen dizi oluşturulmuş olur. □

E bir AM-uzayı olmak üzere bundan sonra K ile $\left\{f \in E'_+ : \|f\| \leq 1\right\}$ kümesini gösterelim.

Önerme 7.1.3. *E bir AM-uzayı olmak üzere E uzayının sıra birime sahip olması için gerek yeter koşul 0 elemanının $\partial_e(K) \setminus \{0\}$ kümesinin zayıf-$*$ kapanışı içinde olmamasıdır.*

Kanıt. E uzayının sıra birimli bir AM-uzayı olduğunu varsayalım. O halde Teorem 5.3.16'den $A_0(K)$ uzayı sıra birime sahip bir AM-uzayıdır. e ile $A_0(K)$ uzayının sıra birimini ve $\|\cdot\|_e$ ile sıra birim normunu gösterelim. Hahn-Banach Teoreminden her $0 \neq k \in \partial_e(K)$ elemanı için $x_k(k) = 1$ olacak şekilde bir

$x_k \in E''$ fonksiyonel vardır. x_k fonksiyonelini K kümesi üzerine kısıtladığımız fonksiyonu tekrar x_k ile gösterelim ($x_k := x_k|_K$). Ayrıca $\|x_k\|_e = 1$ olduğunu varsayalım. Böylece $\|x_k\|_e = \inf\{\lambda \geq 0 : |x_k| \leq \lambda e\} = 1$ ise $e(k) \geq 1$. Böylece 0 elemanı $\partial_e(K) \setminus \{0\}$ kümesinin zayıf-$*$ kapanışında değildir.

0 elemanının $\partial_e(K)\setminus\{0\}$ kümesinin zayıf-$*$ kapanışında olmadığını varsayalım. Milman Teoreminden $\overline{co}(\partial_e(K) \setminus \{0\}) \neq K$ (bu ispatta alınan tüm kapanışlar zayıf* topolojiye göre alınmaktadır). Ayrıca 0 elemanı $\overline{co}(\partial_e(K) \setminus \{0\})$ kümesinin de elemanı değildir: Eğer elemanı olsaydı

$$\partial_e(K) \subset \overline{co}(\partial_e(K) \setminus \{0\})$$

ve Krein Milman Teoreminden $K \subset \overline{co}(\partial_e(K) \setminus \{0\}) \subsetneqq K$ çelişkisi elde edilirdi.

Dahası keyfi bir $x \in K \setminus \{0\}$ aldığımızda tekrar Krein-Milman Teoreminden $x_\alpha \to x$ olacak şekilde bir $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \subset \overline{co}(\partial_e(K))$ ağı vardır. $x \neq 0$ olduğundan dolayı her $\alpha \in I$ için $x_\alpha \neq 0$ olduğunu varsayabiliriz. Böylece $x \in \overline{co}(\partial_e(K) \setminus \{0\})$.

Şimdi Kesin Ayırma Teoremini $\{0\}$ kompakt kümesi ile $\overline{co}(\partial_e(K) \setminus \{0\})$ kapalı kümesi için kullanalım. O halde E' uzayı üzerinde öyle zayıf-$*$-sürekli lineer x' fonksiyoneli ve $\alpha > 0$ vardır ki her $k \in K \setminus \{0\} = \overline{co}(\partial_e(K) \setminus \{0\})$ $x'(k) > \alpha$ olur. Ayrıca x' fonksiyonelini pozitif varsayabiliriz (gerekirse modül fonksiyoneline geçerek devam edebiliriz.). $x' := x'|_K$ dersek $x' \in A_0(K)$ olur ve $y \in A_0(K)$ alırsak her $k \in K \setminus \{0\}$ için

$$y(k) \leq \frac{\|y\|}{\alpha} \cdot \alpha \leq \frac{\|y\|}{\alpha} \cdot x'(k)$$

bulunur. O halde x' bir sıra birimdir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Aşağıdaki teoremde bir Banach uzayının ayrılabilir olması için gerek yeter koşul dualinin kapalı birim yuvarının zayıf-$*$ topolojiye göre metriklenebilir olması gerçeğini kullanacağız [6, Theorem 3.34].

Önerme 7.1.4. *E uzayı ayrılabilir bir AM- uzayı olmak üzere içindeki her ayrık ve pozitif elemanlardan oluşan norm sınırlı dizi sıra sınırlı ise E uzayı sıra birime sahiptir.*

Kanıt. E uzayının sıra birime sahip olmadığını varsayalım. E uzayını $A_0(K)$ uzayı olarak görebiliriz. E uzayı ayrılabilir olduğundan, K kümesi üzerindeki zayıf* topolojiye göre metriklenebilirdir ve E uzayı sıra birime sahip olmadığından 0 elemanı $\partial_e(K)\setminus\{0\}$ kümesinin kapanışındadır. K kümesinin metriklenebilir olmasından $k_n \to 0$ olacak şekilde terimleri birbirinden farklı $k_n \in \partial_e(K)$ dizisi bulunabilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $F_n = \overline{co}(\{k_m : m \neq n\})$ kümelerini tanımlayalım. $k_n \notin \overline{\{k_m : m \neq n\}}$ olduğundan $k_n \notin \partial_e F_n$ olur. k_n elemanları K kümesinin ekstrem noktaları olduklarından eğer F_n kümesinin içindelerse F_n içinde ekstrem nokta olacağından $k_n \notin F_n$. Böylece $\{k_n\}$ ve F_n ayrık kapalı iki kümedir. Önerme 5.3.17'den $f_n|_{F_n} \equiv 0$, $f_n(k_n) = 1$ ve her $k \in K$ için $0 \leq f_n(k) \leq 1$ olacak şekilde $f_n \in A(K)$ fonksiyonları vardır. $0 \in \overline{\{k_m : m \neq n\}} \subset F_n$ olduğundan $f_n(0) = 0$ ve böylece $f_n \in A_0(K)$ bulunur.

$f \mapsto f(k_n)$ operatörleri $A_0(K)$ üzerinde örgü homomorfizm ve $f_n(k_m) = \delta_{mn}$ olduğundan Önerme 7.1.2 uygulanırsa $g_n \leq f_n$ ve $g_n(k_m) = \delta_{mn}$ olacak şekilde ayrık pozitif elemanlardan oluşan $(g_n) \subset A_0(K)$ bulunur. (g_n) dizisi norm sınırlıdır. Kabulümüzden bu dizi için bir e üst sınırı vardır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $e(k_n) = g_n(k_n) = 1$ böylece $0 = e(0) = \lim\limits_{n\to\infty} e(k_n) \geq 1$ çelişkisi elde edilir. $\square$

X sayılamaz sonsuz bir küme olsun ve üzerinde diskret topoloji olsun. O halde X üzerindeki her reel değerli fonksiyon süreklidir. X_∞ kümesi ile X kümesine ∞ elemanını ekleyerek oluşturduğumuz tek nokta kompaktlaştırmasını gösterelim ve X_∞ kümesi üzerindeki fonksiyonlarla çalışırken X kümesi üzerindeki fonksiyonlarla süreklilik arasındaki ilişkiyi gözönüne aldığımız durumdan neredeyse çok uzakta olacağız. X_∞ kümesi üzerindeki reel değerli bir fonksiyon sürekli ise bu fonksiyonun aldığı değerler en fazla sayılabilir eleman için ∞ elemanında aldığı değerden farklı olabilir. ∞ elemanının açık komşulukları X kümesinin kompakt kümelerinin tümleyenleri olduklarını ve X üzerinde diskret topoloji olduğundan kompakt kümelerin sonlu elemanlı olduklarını hatırlayalım. Bir $f : X_\infty \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $c = f(\infty)$ ise $f^{-1}\left(\left(c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}\right)\right)$ kümesi her $n > 0$ için ∞ elemanının açık bir komşuluğudur. O halde X kümesinin sonlu elemanı dışındaki her elemanının f fonksiyonu altındaki görüntüsü $\left(c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}\right)$ aralığının içindedir. $n \to \infty$ limit alırsak en fazla sayılabilir sonsuz elemanın f fonksiyonu altındaki görüntüsü c noktasından farklı değerler alır. $f \in C(X_\infty)$ fonksiyonunun farklı değerlerini $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(\infty))$ şeklinde yazarsak f fonksiyonu bir dizi olarak görülebilir. ∞ elemanının her açık komşuluğunda sonlu tane eleman dışında tüm elemanlar bulunduklarından bu dizi $f(\infty)$ değerine yakınsar. Ayrıca $C(X_\infty)$ uzayı supremum normuna ve noktasal sıralamaya sahip olduğunu da göz önüne alırsak $C(X_\infty)$ uzayı c uzayına örgü izometriktir.

Aşağıdaki teoremde $C(X)$ uzayının ayrılabilir olması için gerek yeter koşul X uzayının metriklenebilir olması ([17], Önerme 1.17, s.10) gerçeğini kullanacağız.

Teorem 7.1.5. *E ayrılabilir bir Banach örgüsü olsun. $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}_r(E)$ olması için gerek yeter koşul aşağıdaki üç durumdan birinin sağlanmasıdır:*

1. *E uzayı bir AL-uzayına örgü izomoriktir,*

2. *E uzayı c uzayının sonlu çarpım uzayına örgü izomorfiktir,*

3. *E uzayı c_0 uzayına örgü izomorfiktir.*

Kanıt. (1) durumunda Sonuç 4.2.6'da, (2) durumunda Teorem 6.1.27 ve (3) durumunda Teorem 6.1.23 kullanılarak eşitliğin geçerli olduğu görülebilir.

Eşitlik varsa Teorem 7.1.1'den E uzayının bir AL- ya da bir AM-uzayına örgü izomorfiktir. O halde sadece E uzayının AM-uzayına izomorfik olduğu durum ile ilgileneceğiz. Teorem 5.3.16'da olduğu gibi E uzayını $A_0(K)$ uzayına örgü izomorfik olarak göreceğiz. $f \in A_0(K)^+$ ve $\epsilon > 0$ olmak üzere $\partial_e(K) \setminus \{0\}$ kümesinin $P_{f,\epsilon} = \{k \in \partial_e K : f(k) > \epsilon\}$ $\partial_e(K) \setminus \{0\}$ açık kümelerini göz önüne alalım. İlk olarak tüm bu kümelerin sonlu olduğunu varsayalım. K kümesi üzerindeki metrik topoloji ile çalışırak $P_{f,\epsilon}$ kümesinin her elemanının izole noktası olduğu görülebilir. Dahası $P_{f,\epsilon}$ kümelerinin hepsinin birleşimi $\partial_e(K) \setminus \{0\}$ kümesidir çünkü her f pozitif için $f(k) = 0$ ise her f için $f(k) = 0$ olur, buradan da $k = 0$ bulunur. Böylece $\partial_e(K)$ diskret topolojik uzay olur. E uzayı sıra birime sahip değilse 0 bir yığılma noktası olur. Ayrıca sıfırdan farklı bir yığılma noktası yoktur, eğer sıfırdan farklı bir l yığılma noktası olsa $f(l) > 0$ olacak şekilde $f \geq 0$ alırsak sonsuz $k \in \partial_e(K) \setminus \{0\}$ elemanı için de $f(k) > 0$ bulunur. O halde $\partial_e(K)$ uzayı $\mathbb{N}$ uzayının tek nokta kompaktlaştırması olarak görülebilir. Özellikle $\partial_e(K)$ kümesi kapalı olduğundan K Bauer simpleks ve Sonuç 5.3.15'ten $A(K)$ uzayı $C(\partial_e(K))$ uzayına dolayısıyla c uzayına örgü izomorfik olur. Böylece $A_0(K)$ yani E uzayı c_0 uzayına örgü izomorfiktir.

E uzayı sıra birime sahip değil ve bir $P_{f,\epsilon}$ kümesi sonsuz elemana sahip olsun. Burada bir $e \in A_0(K)$ elemanı için $\{k \in \partial_e(K) : e(k) \geq 1\}$ kümesinin sonsuz elemanlı olduğunu varsayabiliriz. K kümesinin kompaktlığını ve metriklenebilir olmasını kullanarak her $n \in \mathbb{N}$ için $e(k_n) \geq 1$, $k_n \to k \in K$ ve $k_n \neq k$ olacak şekilde $\partial_e(K)$ kümesinde terimleri birbirinden farklı bir $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. Önerme 7.1.4'den E^+ içinde norm sınırlı bir (x_n) dizisi vardır ki sıra sınırlı değildir. Bir $T \in \mathcal{L}(A_0(K))$ lineer sınırlı operatörünü

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} (f(k_n) - f(k))\, x_n.$$

şeklinde tanımlayalım. Kabulümüzden $U \geq T, 0$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{L}(A_0(K))$ alalım. Önerme 5.3.17'den her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(k_n) = 1$ ve $f_n(k) = 0$ olacak şekilde $f_n \in A_0(K)^+$ fonksiyonları vardır. $A_0(K)$ uzayı üzerindeki örgü işlemleri noktasal olduğundan $g_n = f_n \wedge e$ dersek $g_n(k_n) = 1$ ve $g_n(k) = 0$ bulunur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$Ue \geq Ug_n \geq \sum_{m=1}^{\infty} (g_n(k_m) - g_n(k))\, x_m \geq x_n$$

buluruz, bu ise (x_n) dizisinin sıra sınırlı olmamasıyla çelişir.

Sadece E AM-uzayının sıra birime sahip olduğu durumu incelemek kalır ki bu durumda E uzayı bir $C(X)$ uzayına örgü izometriktir. Eğer X sonlu ise, E uzayı sonlu boyutludur ve böylece bir AL-uzayına örgü izometriktir. X sonsuz elemanlı terimleri birbirinden farklı yakınsak bir alt dizi içerir böylece Teorem 6.1.30'dan (2) durumunu elde ederiz.

□

Kaynakça

[1] Y.A. Abramovich, "The space of operators that act between Banach lattices," Investigations on linear operators and the theory of functions, VIII. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* **73**(1977), 188-192, 234 (1978).

[2] Y.A. Abramovich & C.D. Aliprantis, *Locally Solid Riesz Spaces*, Academic Press, New York and London, 1978.

[3] Y.A. Abramovich & A.W. Wickstead, "When each continuous operator is regular. II," *Indag. Math. (N.S.)* **8** (1997), no. 3, 281-294.

[4] E.M. Alfsen, *Compact Convex Sets and Boundary Integrals*, Springer-Verlag, 1971.

[5] C.D. Aliprantis & K.C. Border, *Infinite Dimensional Analysis*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2006.

[6] C.D. Aliprantis & O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Academic Press, New York and London, 1985.

[7] C.D. Aliprantis & O. Burkinshaw, *Locally Solid Riesz Spaces with Application to Economics*, Mathematical Survey and Monographs, Vol. 105, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[8] G. Bennett, "Some ideals of operators on Hilbert space," *Studia Math.* **55** (1975/76), no. 1, 27-40.

[9] D.I. Cartwright & H.P. Lotz, "Some characterizations of *AM*- and *AL*-spaces," *Math. Z.* **142** (1975), 97-103.

[10] A.G. Kusraev, *Dominated Operators*, Kluwer Academic Publisher, 2000.

[11] W.A.J. Luxemburg & A.C. Zaanen, *Riesz Spaces, I*, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[12] P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Springer, Berlin Heidelberg, 1991.

[13] P. Orno, "On Banach lattices of operators," *Israel J. Math.* **19** (1974), 264-265.

[14] R.R. Phelps, *Lectures on Choquet's Theorem*, 2nd ed., Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[15] H.H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer, Berlin-Heidelberg, 1974.

[16] A.I. Veksler & V.A. Geĭler, "Order completeness and disjoint completeness of linear partially ordered spaces," *Sibirsk. Mat. Ž.* **13** (1972), 43-51.

[17] A.W. Wickstead, *Affine Functions on Compact Convex Sets*, Unpublished notes.

[18] A.W. Wickstead, "Separable Banach lattices on which every linear operator is regular," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **150** (2011), no. 3, 557-560.

[19] A.W. Wickstead, "Regular operators between Banach lattices," in *Positivity*, 255-279, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2007.

[20] H.Y. Xiong, "On whether or not $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$ for some classical Banach lattices E and F," *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* **46** (1984), no. 3, 267-282.

ÖZGEÇMİŞ

Nazlı Doğan 10 Ağustos 1990 tarihinde İstanbul'da doğdu. Necip Fazıl Kısakürek Lisesi'nde lise eğitimini tamamladıktan sonra, 2007 yılında İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü'ne başladı. 2011 yılında lisans eğitimini tamamlayarak İstanbul Kültür Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisa yar Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı.