T.C.
İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EĞİTİMDE ÇİZGE KURAMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özlem ŞENOL
1009041001

Anabilim Dalı: Matematik Bilgisayar
Programı: Matematik Bilgisayar

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erol BALKANAY

Ocak 2014

ÖNSÖZ

Bu çalışma, İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanan "Eğitimde Çizge Kuramı" isimli tezi içermektedir.

Çalışmalarımın her aşamasında bilgi ve deneyimleriyle desteğini benden esirgemeyen, öğretmenliğime yeni değerler katan, kendisinden çok şey öğrendiğim, danışmanım Sayın Prof. Dr. Erol BALKANAY' a emeklerinden dolayı çok teşekkür ederim.

Programa kaydolduğum ilk günden beri içten samimiyeti, yol göstericiliği, anlayışı ve desteği için Sayın Yrd. Doç. Dr. S. Hikmet ÇAĞLAR' a teşekkürlerimi sunarım.

Bu günlere gelmemde en büyük rolü oynayan, bana her zaman güç ve güven veren, desteğini esirgemeyen babam Mehmet ŞENOL' a ve annem Kadriye ŞENOL' a teşekkür eder, bu iki eğitimcinin kızı olmaktan duyduğum sonsuz mutluluğu belirtmek isterim. Hayat boyu yanımdan ayrılmayan değerli kardeşim Özgür ŞENOL' a çalışmalarım boyunca bana sağladığı her türlü destek için içtenlikle teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında beni destekleyen, gerek kaynak sağlama gerekse tercüme konusunda yardımlarını esirgemeyen değerli arkadaşlarım Zeynep ÇETREZ ve Tomris KARDEŞ' e, tez çalışmalarım sebebiyle zaman zaman aksamaya uğrayan iş yerimdeki çalışmalarım için bana her zaman anlayış gösteren çalışma arkadaşım ve yöneticim Miray ADANA' ya teşekkürlerimi sunarım.

Ocak 2014 Özlem ŞENOL

İçindekiler

Enstitüsü : Fen Bilimleri
Anabilim Dalı : Matematik-Bilgisayar
Programı : Matematik -Bilgisayar
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Erol BALKANAY
Tez Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans – Ocak 2014

ÖZET

Bu çalışmada çizge kuramının eğitim sistemine bazı uygulamalarının verilmesi amaçlanmıştır. Bu bağlamda önce çizge kuramının temelleri anlatılmış sonra da "Çizgelerde Bağlantılılık ve Optimal Bağlantılılık" kavramı açıklanmıştır. Ayrıca Networklarla ilgili temel kavramlar üzerinde durulmuştur.Bu bağlamda networklarda bireysel rolleri temsil etmemize yarayan "Yıldız, Köprü, Darboğaz, Yalıtık köşe" gibi kavramlar ve yapısal özelliklerin temsilinde kullanılan "Merkezlik, Prestij, Yoğunluk" gibi kavramlar incelenmiştir. Tezde amaçlandığı üzere, Yönlü işaretli çizgeler ve Optimal bağlantılılıkla ilgili uygulamalara yer verilmiştir.

Özlem ŞENOL

Anahtar sözcükler: Çizge, Yönlü Çizge, Yönlü İşaretli Çizge, Bağlantılılık, Optimal Bağlantılılık, Network, Networkta Roller, Merkezlik ve Prestij, Yoğunluk

University	:	Istanbul Kültür University
Institute	:	Institute of Sciences
Department	:	Mathematics-Computer Science
Programme	:	Mathematics-Computer Science
Supervisor	:	Ph.D. Erol BALKANAY
DegreeAwarded and Date	:	M.Sc.– January 2014

ABSTRACT

In this study,our aim is to give some applications of graph theory in system of education. In this context, first described the basics of graph theory then "the concept of connectivity in graphs" is explained. It is also given fundamental concepts of Networks. Besides these, individual roles in networks such as “Stars, Bridges, Bottlenecks, Isolated vertices” and structural features such as “Centrality, Prestige and Density” were examined. Some applications of “Directed Signed Graphs and Optimal Connectivity to System of Education” are given.

Özlem ŞENOL

Keywords: Graph, Directed Graph, Directed Signed Graph, Connectivity, Optimal Connectivity, Networks, Roles in Networks, Centrality and Prestige, Density

1 GİRİŞ

Yıllar yılı özellikle sosyal bilimlerdeki araştırmalara konu olan, insan ilişkileri, bu ilişkilerin çeşitli etkenlerle uğradığı değişimler, toplumsal süreçler, toplulukların özelliklerine göre bu süreçlere verdiği tepkiler analiz edilirken elde edilen yüklü miktarda verinin yorumlanması gereksinimi, çizge kuramının bir uygulaması olan sosyal ağ kavramını karşımıza çıkarmıştır. Antropoloji ve sosyal psikoloji başta olmak üzere, iletişimden iş dünyasına, sosyal bilimler ve fen bilimleri alanlarının pek çoğunda, çizgeler kullanılmıştır.Bu bağlamda karşımıza çıkan *Sosyal Ağ* "birbiri ile iletişim halinde olan üyelerin ve bu üyeler arasındaki bağlantıların tümü" olarak tanımlanabilir. Sosyal ağ kavramında, çizge kuramını kullanmak, üzerinde çalıştığımız sosyal yapıyı, yapıdaki tüm üyeleri ve bunlar arasındaki bağlantılar kümesini içeren görsel özellikli bir model kurabilmemizi sağlar.

Araştırmacılar sosyal ağ yapısını pek çok farklı konuya uyarlamıştır. Sağlık sektöründe yapılan bir araştırma(*) şöyledir. Doktorlara yeni geliştirilen bir ilaç tanıtılır ve bu ilacın hangi doktorlar tarafından, ne kadar sürede kullanılmaya başlandığı araştırılır. 4 farklı kentte yapılan bu araştırmada doktorlara;

- Alanınızda bilgi ve tavsiye almak için kiminle konuşursunuz?
- Bir hafta boyunca karşılaştığınız vakaları kiminle tartışırsınız?
- İş arkadaşlarınızdan kimlerle dışarıda görüşürsünüz?

Soruları yöneltilmiştir. Araştırmanın sonucunda; ismi, 3 farklı arkadaşı tarafından herhangi bir sorunun yanıtı olarak yazılan doktorların %70'inin ilk 6 ayda ilacı yazmaya başladıkları görülürken, ismi hiç kimse tarafından yazılmayan doktorların ise ilk 10 ayın sonunda sadece %47 oranında ilacı reçetelere yazdıkları gözlenmiştir. Bu araştırmanın da gösterdiği gibi daha çok bağlantı, bilginin daha hızlı yayılması demektir.

(*)*Coleman, Katz ve Menzel'in yaptığı bu çalışmada verilerin toplanması 17 ay sürmüştür. (Social and Economic Networks by Matthew O. Jackson-sf:104)*

Bir başka araştırma New York şehrindeki ünlü Broadway müzikallerinin başarı veya başarısızlık sebeplerini değerlendirmek amaçlı yapılmıştır[(*)]. Bu araştırmada yeni bir müzikal için kurulan ajanslarda, çalışanların eskiden birbirini tanıyor olmalarının ajansın, dolayısıyla da müzikalin başarısına etkisi araştırılmıştır. Daha önce birbirini tanıma oranları arttıkça parabolik bir eğri oluşturan başarı grafiğinde, en başarılı müzikallerin, çalışanların birbirini daha önceden yarı yarıya tanıdığı ajanslardan çıktığı gözlemlenmiştir. Önceden tanışanların çok az olduğu ve önceden tanışanların çok fazla olduğu ajansların çıkardığı müzikaller başarısızlıkla sonuçlanmıştır. Bu bir tesadüf değildir.

Bu konuda en çok ilgimizi çeken araştırmalardan biri de "obezitenin yayılması" ile ilgili araştırmadır. Bu araştırma obez insanların, arkadaşlarının da obez olduğu sonucuna varmıştır. Dolayısıyla bulaşıcı bir hastalık olmayan obezitenin, arkadaşları nasıl etkilediği, obezitenin mi arkadaşlığı yoksa arkadaşlığın mı obeziteyi doğurduğu tartışılmıştır.[(**)] Bu araştırma aklımıza arkadaş etkisinin öğrencilerimiz üzerindeki olumlu veya olumsuz yansımalarını getirdi. Arkadaş davranışları öğrencilerimizi nasıl etkiler, kötü arkadaş mı öğrenciyi başarısız yapar, yoksa öğrenci zaten başarısız olduğu için mi böyle arkadaşlar seçer? Burada baskın olan kimdir? İyi ve başarılı öğrencilerden oluşan bir okulda, davranış bozuklukları giderilebilir mi, bireysel başarı oranları arttırılabilir mi? Son yıllarda özel dershane ve okullarda oldukça popüler olan "bireysel öğrenme metotları" "kişiye özgü eğitim modelleri" gibi kavramlar konusunda da aklımızda bir takım soru işaretleri oluştu.

Sosyal ağlarla ilgili yaptığımız çalışmalar sırasında, yapıyı değiştirmenin, bireyi de değiştirdiğini kanıtlayan pek çok araştırma inceleme fırsatı bulduk. Okullarımızın temeli öğrenci-öğretmen etkileşimidir. Öğretmenin veya öğrencilerin bireysel davranışlarının etkisinden çok, okul yapımızın tamamına hâkim olan davranışların etkisi, okul çatımıza katılan her birey üzerinde bir yansımaya sebep olacaktır.

[(*)] *Nicholas Christakis –BIGTHINK* http://www.youtube.com/watch?v=wadBvDPeE4E
[(**)] *N.A. Christakis and J.H. Fowler, "The Spread of Obesity in a Large Social Network Over 32 Years," New England Journal of Medicine 357(4): 370-379 (July 2007)*

Öte yandan teknolojinin ilerlemesiyle hızla gelişen, çeşitlenen ve genişleyen iş kollarında, kurumların verimlilikleri pek çok değişkene bağlıdır. Bu değişkenlerin sistemli bir analizinin yapılması iş verimliliğini arttırmak için atılabilecek, bize göre vazgeçilmez, önemli adımlardan biridir. Doğru zamanda, doğru kararlar vermek, doğru insanlarla çalışabilmek; kurumun, bulunduğu sektörde yerini güçlendirecek, bu kurumu kaliteli elemanlar tarafından tercih edilen bir çalışma ortamına dönüştürecektir. Bu güçlü yarışmacı ortamda, bu tip analizler de araştırmacıların son yıllarda oldukça ilgisini çekmiştir. İş dünyasında "Sosyal Ağ" kavramından faydalanmak da böyle bir gereksinimle gelişmiştir. Kurum içi çalışanlar ve yöneticiler arasındaki ilişkilerden tutun da müşteriler ve sektörde faydalanılan yan kurumlar, hatta rakip kurumlarla olan ilişkilerin tümünün kurum hedeflerinin gerçekleşmesindeki payı oldukça yüksektir. Bazen olumlu sonuç vereceği düşünülen bir kararın, diğer değişkenlerle ilişkisi irdelendiğinde, aslında asıl hedef için hiç de uygun olmadığı yapılan analizler sonucunda şaşırtıcı bir şekilde ortaya çıkmaktadır. Günümüzde çalışanlar, zamanlarının pek çoğunu iş yerlerinde geçirmektedir. Ailelerinden çok iş arkadaşlarıyla birlikte olan, evlerinden çok ofislerinde bulunan çalışanların verimliliğini etkileyen pek çok etken bulunmaktadır. Tüm bu etkenleri bir arada değerlendiren araştırmacılar, network odaklı bakış açısı ile yaklaşarak, *yaşayan sosyal ortamlar* olan kurumların önemli sorunlarına yüksek oranda doğru çözümler bulunabileceğini fark etmişlerdir.

Çizge kuramı, "çizge" adı verilen yapıları inceleyen bir matematik dalıdır. Çizge ise birimler, kişiler veya davranışlar gibi olgular arasındaki ilişkileri modelleyen bir yapı olarak algılanabilir. Bu yapı noktalar ve yay/kenarlardan oluşur. Noktalar kişi, kurum veya davranışları, yay/kenarlar ise bunlar arasındaki ilişkileri temsil eder. Çizge kuramı söz konusu bireyler, kurumlar veya devletlerarasındaki bağlantı, ilişki veya bağıntıların oluşturduğu bir sosyal yapıyı, bir model olarak, sosyal ağ ile temsil etmemizi sağlar. Bu modelleri kullanmak, zihnimizi organize ederek bildiklerimizi pek çok farklı değişkenle bir arada değerlendirme olanağı sunar. Sosyal ağ ise çizge kuramının bir alt dalı olarak karşımıza çıkar. "Sosyal Ağ" yapısına göre sosyal çevre, "*etkileşim içindeki birimler arasındaki, kalıp haline dönüşmüş, olağan ilişkiler*" olarak ifade edilebilir. Genel olarak, kurumlar ve değişkenlerin kalıplaşmış ilişkileri, "yapı" olarak adlandırılırsa, yapıları etkileyen değişkenlere de “yapısal etkenler” denebilir. Ekonomik etkenlerden politik etkenlere, kültürel etkenlerden çevre etkenlerine kadar pek çok çeşitli yapısal etken ile bunların, kurum içi ve kurum dışındaki birimlerle olan ilişkileri ve bu ilişkilerin doğurabileceği olası sonuçlar, kurumumuzun sağlamlığını doğrudan etkiler.

Eğitim yöneticileri, temelinde ikili ilişkiler, sosyoekonomik durumlar, kültürel farklar gibi pek çok etken barındıran farklı türden sorunlar ile yüzleşirler. Eğitim yönetimi, okullarımızın hızla gelişen dünyaya adaptasyonu için yenilikçi bir anlayış gerektirir. Öğretmen, öğrenci ve velinin dâhil olduğu bu büyük sosyal çevrenin manevra kabiliyetinin yüksek olmasının, hızlı değişimlere ayak uydurmada kolaylık sağlayacağı kanısındayız. Elbette şimdiye kadar kullanılan pek çok yöntem tüm bu gereksinimlerin karşılanmasını sağlamıştır. Bu yöntemlere ek olarak, özellikle internet kullanımının yaygınlaşmasıyla karşımıza sıklıkla çıkan sosyal ağların eğitim yönetiminde de uygulanmasının faydalı olacağı görüşündeyiz.

Tüm bu olguların ışığında, çizge kuramını Eğitim sistemine uygulamayı amaçladık.

2 ÇİZGE KURAMI

Bu bölümde temel çizge kuramı kavramları anlatılmıştır. Çizgeyi oluşturan elemanların tanımları verilmiştir. Tokalaşma Lemmasının buradaki anlamı ve ispatı yapılmıştır. Çalışmamızda kullandığımız bazı özel çizgeler tanımlanmıştır. Yönsüz çizgelerin peşinden yönlü çizgeler ve yönlü çizgelere ait temel kavramların tanımları yapılmıştır.

Hem yönlü hem de yönsüz çizgelerdeki matris gösterimlerinden komşuluk ve çakışım matrisleri açıklanıp, komşuluk matrisinin bağlantılılıkla ilgili bir teoremi verilmiştir. Bağlantılılık kavramı üzerinde üçüncü bölümde daha geniş durulacaktır.

2.1 Çizge Kuramına Giriş

“*Çizge”* , köşeler kümesi *(V)* ve kenarlar kümesi *(E)* olmak üzere iki kümeden oluşmuştur. Kenarlar , köşeler arasındaki ilişkiyi göstermek için kullanılmaktadır. Çizgede köşeler, çözmek istediğimiz problemdeki nesneleri soyutlamak için kullanılır. Kenarlar ise yukarıda belirtildiği gibi söz konusu nesneler arasındaki ilişkilere göre iki köşeyi birbirine bağlamak için kullanılır. Bu çalışmada köşeler kümesi V, kenarlar kümesi de E ile gösterilecektir. Böylelikle köşeler kümesi V *ve* kenarlar kümesi E olan bir G grafı $G = (V, E)$ şeklinde gösterilebilecektir.

Çizgeler yönlü ve yönsüz olarak ikiye ayrılır. Yönlü çizgelerde α köşesi ve b köşesi arasındaki kenarın üzerine, ilişkinin yönüne bağlı olarak bir ok konulur. Yönsüz çizgelerde ise ilişki zaten çift yönlüdür.

Tanım 2.1.1: Bir çizgede iki köşe arasında bir kenar varsa bu iki köşeye "*komşu köşeler*" denir.

Tanım 2.1.2: Bir birine ekli bir köşe ile kenara *ilgilidir*ler denir.

Tanım 2.1.3: Bir çizgede u ve v herhangi iki komşu köşe ve bu komşu köşeleri birbirine bağlayan kenar e olmak üzere u ve v köşeleri, e kenarı ile *çakışma durumundadır* denir.

Tanım 2.1.4: Bir çizgede bir köşenin derecesi denilince bu köşenin çakışma durumunda olduğu kenar sayısı anlaşılır. Bir v köşesinin derecesi $der(v)$ veya $deg(v)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5: Bir çizgede *k uzunluklu bir gezi* denilince v_i ler köşeleri göstermek üzere

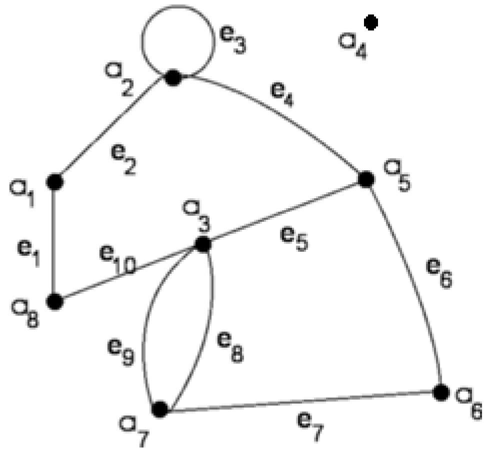
$$v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_kv_{k+1}$$

şeklinde birbirine ulalı k tane kenar anlaşılır. Bir gezide kenar ve köşe tekrarı olabilir.

Tanım 2.1.6: Tüm kenarları farklı olan geziye bir *iz* denir.

Tanım 2.1.7: Tüm kenarları ve köşeleri farklı olan gezi ise *yol* adını alır.

Bu tanımları bir örnek üzerinde inceleyelim.



Şekil – 2.1.1

Şekil – 2.1.1'deki çizgede köşeler kümesini ***V***, kenarlar kümesini ***E*** göstermek üzere;

$V = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8\}$

$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_{10}\}$

Burada α_5 köşesi ile e_6 kenarı ilgilidir.

e_8 ve e_9 *katlı (paralel) kenarlar,*

α_4 *yalıtık köşe*

e_3 *ilmik* olarak adlandırılır.

$der(\alpha_1) = 2$
$der(\alpha_2) = 4$
$der(\alpha_7) = 3$ olur.

$\alpha_1\alpha_8\alpha_3\alpha_5\alpha_3\alpha_7\alpha_6\alpha_5$ $\quad 7\ uzunluklu\ bir\ gezi,$

$\alpha_1\alpha_2\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_3\alpha_5$ $\quad bir\ iz,$

$\alpha_8\alpha_3\alpha_5\alpha_2$ $\quad bir\ yoldur.$

Tanım 2.1.8: Başladığı yerde bitiren geziye *kapalı gezi* denir.

Tanım 2.1.9: Tüm kenarları farklı olan kapalı geziye *kapalı iz* denir.

Tanım 2.1.10: Tüm kenarları ve köşeleri farklı olan kapalı geziye *çevrim* denir.

Tokalaşma Lemması: Çizgede köşe dereceleri toplamı kenar sayısının iki katıdır. Bir G grafında $|E|$ kenar sayısını göstermek üzere,

$$\sum_{v \in V} degv = 2|E|$$

İspat: Bir $e \in E$ kenarı iki köşe ile çakışma durumunda olduğundan her bir kenar için birer olmak üzere *iki* derece üretir. Kenar sayısı $|E|$ olduğuna göre çizgedeki tüm derecelerin toplamı

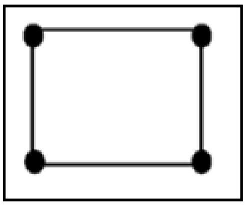
$$\sum_{v \in V} degv = 2|E|$$

olacaktır.

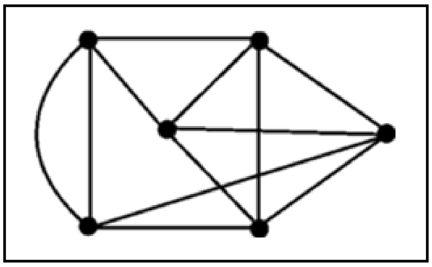
2.2 Bazı Özel Çizgeler

Tanım 2.2.1: Basit Çizge: Katlı kenar ve ilmik içermeyen çizgelere basit çizge denir.

Tanım 2.2.2: Düzgün Çizgeler: Tüm köşelerinin derecesi aynı olan çizgelere *Düzgün Çizge* denir. Her köşesinin derecesi r olan bir düzgün çizge *r-düzgün* ile ifade edilir.



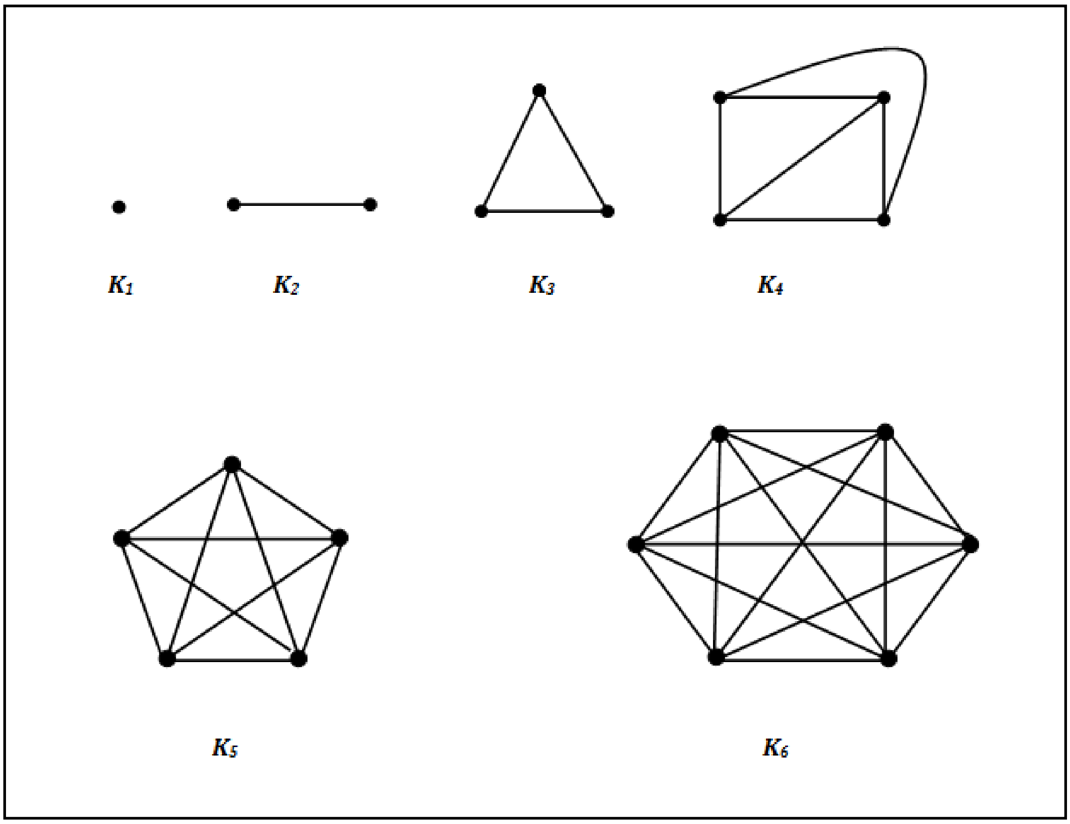
Şekil – 2.2.1: $2 - düzgün$



Şekil – 2.2.2: $4 - düzgün$

Tanım 2.2.3: Tam Çizge: Farklı her tepe ikilisi arasında tam birer tane kenar bulunduran n köşeli bir basit çizge n köşeli *tam çizge* adını alır ve K_n ile gösterilir.

$K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ K_5,\ K_6$ tam çizgeleri aşağıda gösterilmiştir.



Şekil – 2.2.3

Tanım 2.2.4: İkiye Parçalanabilir Çizge: Bir $G = (V, E)$ çizgesinde köşeler kümesi boştan farklı V_1 ve V_2 diyeceğimiz iki alt kümeye ayrılmış ve $V_1 \cup V_2 = V$ ve $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ olsun. Eğer her bir kenarın uçlarından biri V_1 diğeri V_2 kümesinde ise $G = (V, E)$ çizgesine *ikiye parçalanabilir çizge* denir.

Tanım 2.2.5: Bağlantılı Çizge: Bir çizgenin her köşe ikilisi arasında bir *yol* varsa bu çizgeye *bağlantılı çizge* denir.

Tanım 2.2.6: Euler Çizgeleri: Bağlantılı bir çizgede her kenarı içeren kapalı bir iz varsa bu ize "*Euler İzi*" denir. Euler izi bulunduran bir çizge "*Euler Çizgesi* " adını alır.

Teorem 2.2.1: Bağlantılı bir çizgenin Euler Çizgesi olması için gerek ve yeter koşul her köşenin derecesinin çift olmasıdır.

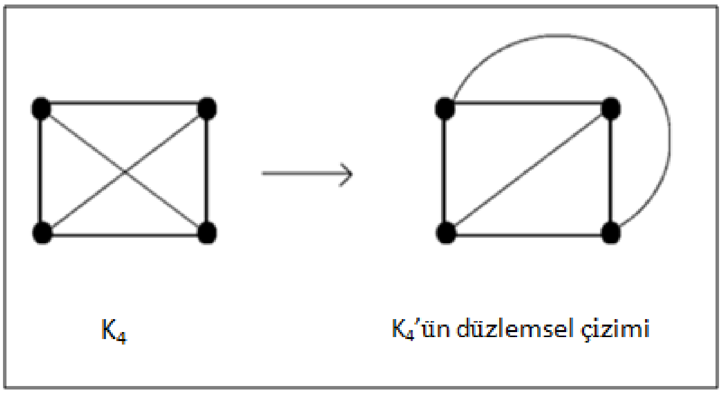
İspat 2.2.1: Önce G çizgesinin Euler Çizge'si olduğunu kabul edelim. Yani G çizgesinde tüm kenarları dolaşan kapalı bir iz'in var olduğunu kabul edelim. Söz konusu iz oluşturulurken bir köşeye varılacak ve ayrılıp yola devam edilecektir. Böylelikle her uğranılan köşede "2" derece üretilecektir. İz'in başlama noktasında da benzer durum olur, çünkü önce başlangıçtan ayrılarak, sonunda da başlangıca dönecektir. Sonuçta köşe dereceleri birer çift sayı olacaktır.

Bu kez bağlantılı G çizgesinde her köşe derecesinin çift olduğunu kabul edelim. Böyle bir G çizgesi hiç bir ikilisi *ortak kenar içermeyen çevrimlere* ayrıştırılabilir. Bir v köşesinden başlayalım aynı kenardan tekrar geçmemek koşuluyla dolaşmaya devam edelim. Her köşenin derecesi çift olduğundan, vardığımız bir köşeden ayrılma olanağımız vardır. Ayrıca köşe sayısı sonlu olduğundan mutlaka daha önce geçilen b isimli bir köşeye varılacaktır. İşte bu dolaşma sırasında daha önce karşılaşılan b köşesinde başlayıp yine b 'de biten çevrim, elde edilen ilk çevrim olacaktır. Bu çevrimi, $Ç_1$ ile gösterelim. G çizgesinin $Ç_1$ çevriminde bulunan kenarlarını silelim. Böylece yeni bir çizge elde ederiz. Bu yeni çizgede yine her köşenin derecesi çifttir. Bazı köşelerin derecesi 0 olabilir (çift sayıdır). Ayrıca elde edilen yeni çizge bağlantısız hale gelmiş olabilir. Bu yukarıda yaptığımız gibi yeni bir çevrim bulmamızı engellemez. Bu yeni çevrimin ilki ile ortak kenarı olamaz çünkü ilk çevrime ait olan kenarlar silinmişti. Bu yeni çevrim $Ç_2$ olsun. Bu kez yeni $Ç_2$ çevrimindeki kenarları da silip, geriye kenar kalmayıncaya kadar, yeni çevrimler oluşturmaya devam edelim. Bu şekilde oluşturduğumuz çevrimler yardımıyla, istenen Euler izini kurabiliriz.

Euler izini kuralım;

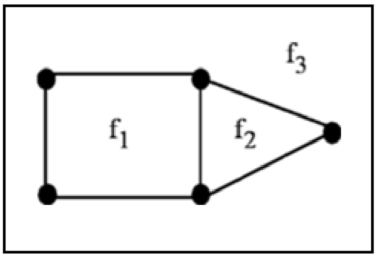
Bir çevrimin ($Ç_1$ diyelim) herhangi bir noktasından (köşesinden) itibaren çevrim üzerinde dolaşmaya başlayalım, diğer bir çevrimin ($Ç_2$ diyelim) bir köşesine rastladığımızda $Ç_2$ çevrimini tamamen dolaşalım, bittiği yerden itibaren de ilk çevrim üzerinden devam ederek çevrimi tamamlayalım. Böylelikle $Ç_1$ ve $Ç_2$ çevrimlerini içeren kapalı bir iz elde edilmiş olur. Aksi halde, yeni elde edilmiş olan, yani $Ç_1$ ve $Ç_2$ çevrimlerini içeren kapalı bir iz (I_1 diyelim) üzerindeki bir köşeden harekete başlanır, diğer bir ($Ç_3$ diyelim) çevrimin bir köşesine gelindiğinde (çizge bağlantılı olduğundan bu daima olasıdır) bu yeni çevrimi kat ettikten sonra, kaldığımız yerden I_1 üzerinde devam edilir. Bu süreç G çizgesinin tüm kenarlarını içeren kapalı iz oluşuncaya kadar sürdürülür. Bağlantılı bir çizgede her kenarı dolaşan açık bir iz varsa bu çizgeye *yarı-euler çizgesi* denir. Bu iz ise *yarı-euler izi*dir.

Tanım 2.2.7: Düzlemsel Çizgeler: Bir çizge, kenarları kesişmeden çizilebiliyorsa bu çizge *düzlemsel çizge*dir.



Şekil – 2.2.4

G düzlemsel bir çizge olsun. **G'** nin düzlemsel çiziminin düzlemdeki noktalara ayırdığı bölgelere yüz adı verilir. Bu bölgelere G çizgesinin kenarları ve köşeleri dâhil değildir. Bu bölgelerden biri sonsuz nokta içerir, buna sonsuz yüz denilebilir.



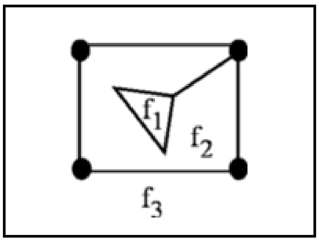
Şekil – 2.2.5

Bir bağlantılı düzlemsel çizgede f yüzünün derecesi denilince bu yüzü çevreleyen gezinin kenar sayısı anlaşılır.

Şekil – 2.2.5' de $degf_1 = 4$

$degf_2 = 3$

$degf_3 = 5$ olur.



Şekil – 2.2.6

Şekil – 2.2.6'da $degf_1 = 3$

$degf_2 = 9$

$degf_3 = 4$ olur.

Düzlemsel bir çizgenin düzlemsel çiziminde oluşan “yüz”lerin dereceler toplamı kenar sayısının iki katıdır.

Düzlemsel Çizgelerde Euler Formülü: G düzlemsel ve bağlantılı bir çizge, bu çizgeye ait köşe sayısı n, kenar sayısı m, düzlemsel çizimdeki yüz sayısı f olmak üzere

$n - m + f = 2$ dir.

Tanım 2.2.8: Subdivision: G çizgesinin kenarlarına, derecesi 2 olan köşeler yerleştirilerek elde edilen çizge G’ nin bir subdivisionu adını alır. Düzlemsel bir çizgenin her subdivisionu da düzlemseldir.

2.3 Yönlü Çizgeler

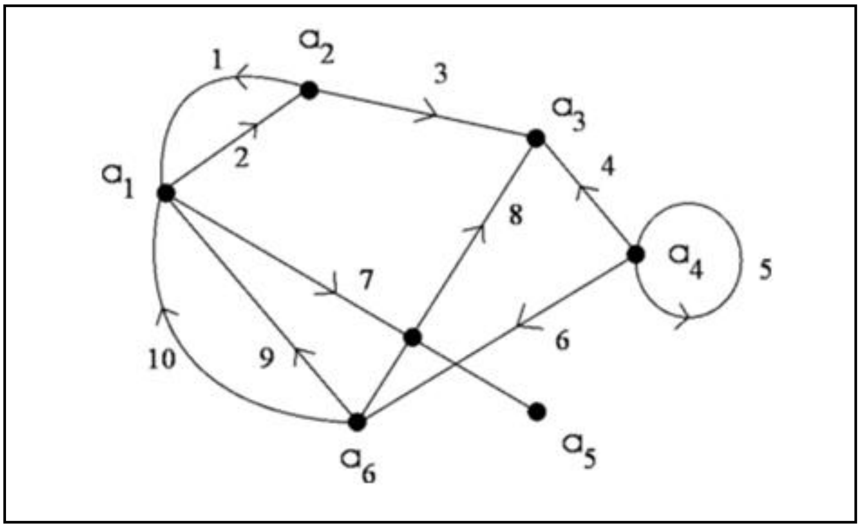
Tanım 2.3.1: Köşeler kümesi $V(G) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ olan ve köşeleri ilişkinin yönüne göre birer ok taşıyan kenarlarla birleştirilmiş bir çizge ($i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ için $a_i a_j$ başlangıcı a_i bitisi a_j olan bir yönlü kenar) yönlü bir çizge adını alır.

Tanım 2.3.2: Birbirini izleyen k adet yönlü kenardan oluşan kenarlar dizisine "*k uzunluklu bir gezi*" denir.

Tanım 2.3.3: Yönlü kenar tekrarı bulunmayan bir geziye " *yönlü iz*" denir.

Tanım 2.3.4: Kenar ve köşe tekrarı olmayan geziye ise "*yol*" denir.

Tanım 2.3.5: Yönlü bir Çizgede birbirini izleyen ve başladığı yerde biten yönlü kenarlar dizisine "*kapalı gezi*" denir. Bu durumda tüm kenarları farklı olan kapalı geziye, "*kapalı iz*" , tüm köşeleri farklı olan kapalı iz'e de "*çevrim*" denir.



Şekil – 2.3.1

Şekil – 2.3.1' deki yönlü çizge G olsun.

Burada *köşeler kümesi*; $V(G) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6\}$

yönlü kenarlar kümesi; $E(G) = \{1,2,3, \dots, 10\}$ dur.

1 ile gösterilen $\alpha_1\alpha_2$ başlangıcı α_1, bitişi α_2 olan, α_1'den α_2'ye yönlendirilmiş bir yönlü kenardır.

$\alpha_1\alpha_2$ ile $\alpha_2\alpha_1$ aynı değildir.

9 ve 10 ile gösterilen yönlü kenarlara "katlı yönlü kenar", 5 ile gösterilen yönlü kenara ise "*ilmik*" denir.

2.4 ÇİZGELERİN MATRİS GÖSTERİMLERİ

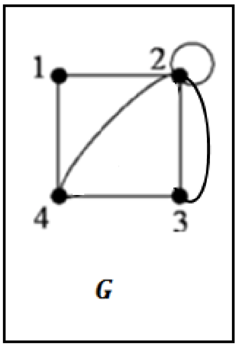
2.4.1 Komşuluk Matrisi

2.4.1.1 Yönsüz Çizgeler İçin

n köşeli bir G çizgesi verilsin. Bu çizgenin köşeleri 1, 2, ... , n olarak etiketlensin. Burada $A(G)$ ile göstereceğimiz nxn boyutlu bir matris tanımlayalım.

$$A(G) = [a_{ij}]_{nxn}$$

α_{ij} ; i ve j isimli köşeleri birleştiren kenar sayısı olsun.



Şekil – 2.4.1

Şekil – 2.3.1deki G çizgesinin komşuluk matrisi

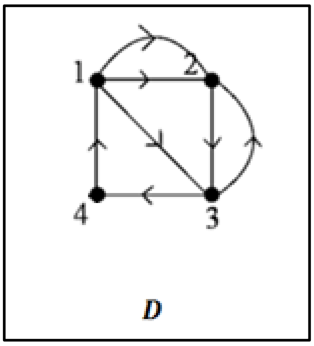
$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

2.4.1.2 Yönlü Çizgeler İçin

n köşeli bir D yönlü çizgesinde köşeler *1, 2, 3, ... ,* n ile etiketlenirse bu yönlü çizgenin komşuluk matrisi;

$$A(D) = [a_{ij}]_{nxn}$$

ise α_{ij} elemanı i etiketli köşeden j etiketli köşeye yönlendirilmiş kenar sayısı anlamına gelir.



Şekil – 2.4.2

Şekil – 2.4.2 verilen ***D*** yönlü çizgesinin komşuluk matrisi

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{D}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ şeklindedir.

Teorem 2.4.1: Köşeleri *1, 2, 3, ... , n* şeklinde etiketlenmiş D yönlü çizgesi için D'nin komşuluk matrisi A olmak üzere $B = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{n-1}$ matrisi tanımlansın. Bu durumda D yönlü çizgesinin kuvvetli bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul B'nin köşegenleri dışındaki elemanların pozitif olmasıdır.

Yani $i \neq j$ iken $B_{ij} > O$ dır.

Ek açıklamalar 2.4.1:

1. Bir D yönlü çizgesinde ayrıtlar üzerindeki oklar kaldırıldığında elde edilen çizgeye, ***D çizgesine karşılık gelen yönsüz çizge*** denir.
2. Yönlü bir çizgenin yönsüz hale getirilmesiyle elde edilen çizge bağlantılıysa bu yönlü çizge ***bağlantılıdır*** denir. Aksi halde bağlantısızdır.
3. Yönlü bir çizgede her sıralı köşe ikilisi arasında yönlü bir yol varsa çizge kuvveti bağlantılı adını almaktadır.

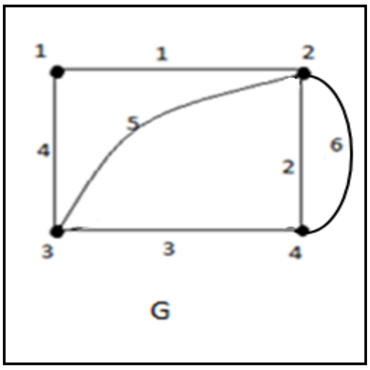
2.4.2 Çakışım Matrisi

2.4.2.1 Yönsüz Çizgeler İçin

G, n köşeli, ilmik içermeyen bir çizge olsun. Köşeler $1,2,3,\ldots,\mathrm{n}$ ile kenarlar ise $1,2,3,\ldots,\mathrm{m}$ ile etiketlensin.

Bu durumda G'nin çakışım matrisi $C(G)$, nxm' lik bir matris olup, $C = [c_{ij}]$ olmak üzere

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & i \text{ köşesi ile } j \text{ kenarı çakışım durumunda ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$



Şekil – 2.4.3

Şekil – 2.4.3'deki G çizgesine ait çakışım matrisi

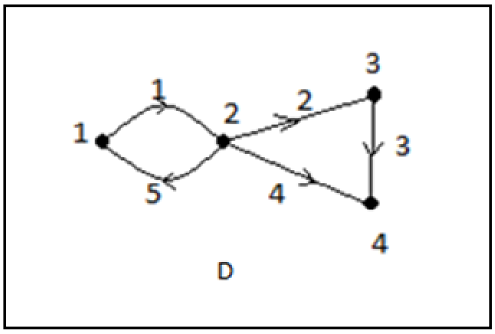
$$C(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ biçimindedir.

2.4.2.2 Yönlü Çizgeler İçin

D, n köşeli, ilmik içermeyen yönlü bir çizge olsun. Köşeler $1, 2, 3, \dots, \mathrm{n}$ ile kenarlar ise $1, 2, 3, \dots, \mathrm{m}$ ile etiketlensin.

Bu durumda ***D***' nin çakışım matrisi ***C(D),*** nxm' lik bir matris olup, $C = [c_{ij}]$ olmak üzere

$$c_{ij} = \begin{cases} 1\,; & j \quad etiketli\ kenar\ i\ köşesinden\ dışa\ doğru\ yönlenmiş\ ise \\ -1; & j \quad etiketli\ kenar\ i\ köşesinden\ içe\ doğru\ yönlenmiş\ ise \\ 0; & aksi\ halde \end{cases}$$



Şekil – 2.4.4 [7]

Şekil – 2.4.4' deki ***D*** yönlü çizgesinin çakışım matrisi

$$C(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$ biçiminde olur.

3 BAĞLANTILILIK

3.1: Bağlantılığın kenarlarla ilişkisi

Bir çizgenin her köşe ikilisi arasında bir yol varsa böyle çizgeye *“bağlantılı çizge”* dendiğini biliyoruz. Doğal olarak bağlantılı olmayan çizge *“bağlantısız çizge”* adını alır.

Tanım 3.1.1: Kaldırılmasıyla, bağlantılı bir çizgeyi bağlantısız hale getiren kenar *“köprü”* adını alır.

Tanım 3.1.2: Bağlantılı bir ***G*** çizgesinde bir *kesi kümesi* denilince aşağıdaki özelliği sağlayan bir ***K*** kümesi anlaşılır:

K’ deki tüm elemanlar silinirse ***G*** bağlantısız hale gelir fakat ***K’*** nin herhangi bir alt kümesindeki kenarların silinmesi bağlantılığı bozmaz.

Bağlantılı bir ***G*** çizgesinde herhangi iki kesi kümesinin aynı sayıda kenar içermesi gerekmez.

Bağlantılı bir ***G*** çizgesini bağlantısız hale getiren en küçük kenar sayısı $\boldsymbol{\lambda(G)}$ ile gösterilir.

3.1 Bağlantılılığın Köşelerle İlişkisi

Bağlantılılığın kenarlarla ilişkisi olduğu gibi köşelerle ilişkisinden de söz edilebilir.

Tanım 3.2.1: Bağlantılı bir ***G*** çizgesi tek bir köşenin silinmesiyle bağlantısız hale geliyorsa bu köşeye *“kesi köşesi”* denir.

Doğal olarak bir çizgeden bir köşe silinirse buna bağlı olarak bu köşe ile çakışım durumunda olan kenarlar da silinir.

Tanım 3.2.2: Aşağıdaki özelliği taşıyan bir $\boldsymbol{L} \subseteq \boldsymbol{V}$ alt kümesi $\boldsymbol{G}$' nin bir "*köşe kesi kümesi*" adını alır:

$\boldsymbol{L}$**'** deki köşeler silinirse çizge bağlantısız hale gelir ancak $\boldsymbol{L}$**'** nin herhangi bir alt kümesindeki köşeler silinirse bağlantılılık bozulmaz.

Bu tanıma göre herhangi iki *köşe kesi kümesinin* eleman sayısının eşit olması gerekmez. Buna bağlı olarak bağlantılı bir ***G*** çizgesi için ***G***'nin *en küçük köşe kesi kümesinin* eleman sayısı $\boldsymbol{\mathcal{K}}(\boldsymbol{G})$ ile gösterilir.

Bağlantılı bir ***G*** çizgesinin köşe derecelerinin en küçüğü $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{G})$ ise bu değerler arasında

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}(\boldsymbol{G}) \leq \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{G}) \leq \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{G})$$

eşitsizliği vardır. **[7]**

İkiye ayrılabilir bir $K_{r,r}$ tam çizge için $\boldsymbol{\mathcal{K}}(\boldsymbol{K_{r,r}}) = \boldsymbol{r}$ olur.

Tanım 3.2.3: ***G*** bağlantılı bir çizge olmak üzere ***G***'nin u ve v köşeleri arasındaki yol "$uv - yol$" adını alır.

Tanım 3.2.4: Ortak kenar bulundurmayan iki veya daha fazla *uv-yol* "*kenar-ayrık yol*" adını almaktadır.

Tanım 3.2.5: u ve v köşeleri hariç ortak köşe içermeyen iki veya daha fazla $uv - yol$ a "*köşe-ayrık*" yollar denmektedir.

Bağlantılı bir çizgede bazı kenarların kaldırılması ile $u - v$ arasındaki tüm yollar bozuluyorsa, yani yollar ortadan kalkıyorsa bunlar için "*bu kenarlar u' yu v' den ayırır*" deyimi kullanılmaktadır. Benzer şekilde bazı köşelerin kaldırılmasıyla $u - v$ arasındaki tüm yollar bozuluyorsa "*bu köşeler u' yu v' den ayırır*" denir.

Tanım 3.2.6: Yönlü bir ***D*** çizgesinin s ve t köşeleri arasındaki *yönlü* bir yol "$st - yol$" adını alır.

Tanım 3.2.7: Ortak kenar bulundurmayan iki veya daha fazla $st - yol$ "*kenar-ayrık yol*" dur.

Tanım 3.2.8: $s\ ve\ t$ köşeleri hariç ortak köşe içermeyen iki veya daha fazla $st - yol$ ise *"köşe-ayrık"* yollar adını almaktadır.

Yukarıda söylenenlere benzer olarak, bağlantılı bir çizgede bazı kenarların kaldırılması ile s-t arasındaki tüm yollar bozuluyorsa "*bu kenarlar s' yi t' den ayırır"* denir. Benzer şekilde bazı köşelerin kaldırılmasıyla s-t arasındaki tüm yollar bozuluyorsa "*bu köşeler s' yi t' den ayırır"* denir.

Teorem 3.1: Menger Teoremleri [7]

1. **Yönsüz Çizgeler İçin*:***

i) **Kenarlar Cinsinden:** G bağlantılı bir çizge olmak üzere G'nin iki köşesi $\boldsymbol{u\ ve\ v}$ olsun. Bu durumda k*enar*-ayrık $\boldsymbol{uv - yollar}$**ın** maksimum sayısı $\boldsymbol{u'yu\ v'den}$ ayıran kenarların minimum sayısına eşittir.

ii) **Köşeler Cinsinden:** $\boldsymbol{G}$ bağlantılı bir çizge olmak üzere G'nin iki köşesi $u\ ve\ v$ olsun. Bu durumda köşe-ayrık $uv -$ yolların maksimum sayısı *u'yu v'den* ayıran minimum köşe sayısına eşittir.

2. **Yönlü Çizgeler İçin**

Bu teorem yönlü çizgeler için de benzer şekildedir.

i) **Kenarlar Cinsinden:** ***D*** yönlü bağlantılı bir çizge olmak üzere ***D***'nin iki köşesi *s ve t* olsun. Bu durumda *kenar-ayrık* $st -$ yolların maksimum sayısı *s'yi t'den* ayıran kenarların *minimum* sayısına eşittir.

ii) **Köşeler Cinsinden:** ***D*** yönlü bağlantılı bir çizge olmak üzere ***D***'nin iki köşesi $s\ ve\ t$ olsun. Bu durumda *köşe-ayrık* $st - yol$ların maksimum sayısı *s* köşesini *t* köşesinden ayıran *minimum* köşe sayısına eşittir.

3.2 Bağlantılılığın Optimallığı

Bir networkteki üyeleri (veya çalışanları) köşelerle, üyeler arasındaki ilişkileri ise kenarlarla temsil ederek bir çizge oluşturalım;

n köşe sayısı, *m* kenar sayısı olmak üzere*" Tokalaşma Lemması"* kullanılırsa tüm köşelerin dereceleri toplamı *2m*'dir.

Bu durumda köşelere ait derecelerin ortalaması $\frac{2m}{n}$ olur.

Böylece köşelere ait derecelerin minimum olanı bu ortalamadan büyük olamaz.

Buna göre

$$\mathcal{K}(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) \leq \frac{2m}{n}$$

elde edilir.

Tanım 3.2.1: (Optimal Bağlantılılık) Eğer bir çizge bu eşitsizliğin eşitlik halini sağlıyorsa bu çizge maksimum köşe bağlantılılığına sahip olur. Böyle bir çizgeye optimal bağlantılılığa sahiptir denir.

Optimal bağlantılık nasıl gösterilir? Bir çizgenin optimal bağlantılılığa sahip olduğunu göstermek için

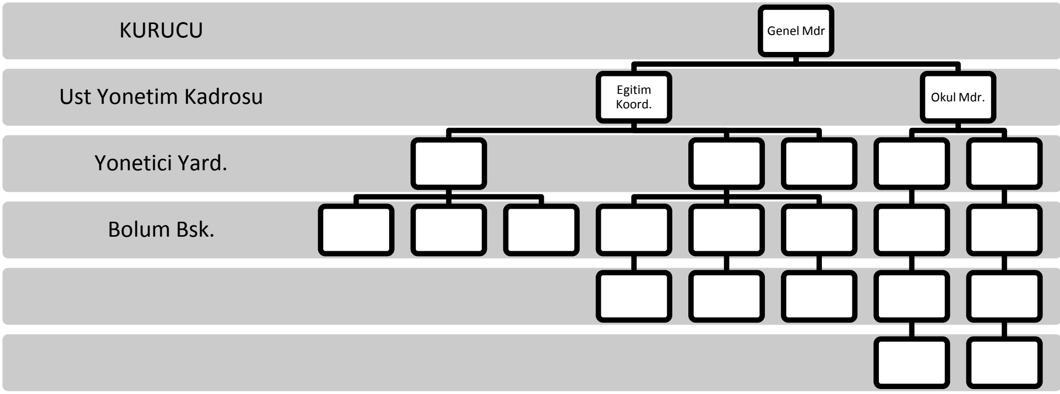
$$\mathcal{K}(G) = \frac{2m}{n}$$

olduğunu gösteririz. Böylece

$$\mathcal{K}(G) = \lambda(G) = \delta(G) = \frac{2m}{n}$$

eşitliği kanıtlanmış olur.

4 SOSYAL AĞLAR VE OKUL YAPISI

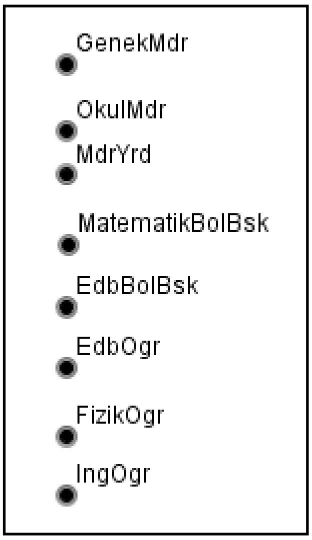


Bir özel okulu düşündüğümüzde her ne kadar yönetim işleyişinin yukarıdaki gibi hiyerarşik bir yapı ile özetlenebileceği düşünülse de aslında daha yakından baktığımızda işleyişin bu kadar da kolay açıklanabilir ve sıradan olmadığını görürüz. Okullar birbirleriyle iletişim halinde olmak zorunda olan bireylerin oluşturduğu, kimi zaman çekişmelerin, kimi zaman yardımlaşmanın yaşandığı, basit hiyerarşik yönetim görünümünden farklı ve karmaşık yapılardır. Bu karmaşa ortamı ancak birbirini iten ve destekleyen tüm unsurlarıyla dengede durabilen bir yapıya dönüştüğünde güvenlidir. Bu dengeli yapıya ise yönetimden öğretmene, veliden öğrenciye kadar bu yapının tartışılmaz parçaları olan her unsurun dengeli iletişimi ve etkileşimi sayesinde erişilebilir. Bu yapıya dâhil olan herhangi bir bireyin bu sosyal çevrede diğerleri ile olan her türlü alışverişi bu dengenin sağlanmasında etkendir.

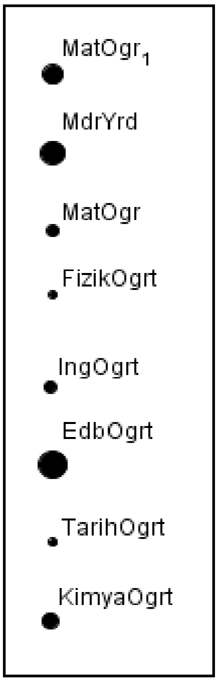
4.1 TEMEL NETWORK KAVRAMLARI

Bir networkta kişi ve/veya kurumları gösterirken kullandığımız noktalara farklı renk, boyut, şekil, vs. kullanarak farklı anlamlar yükleyebiliriz. Tablo– 4.1'de bir okul network şemasında yer alabilecek noktalara örnekler verilmiştir.

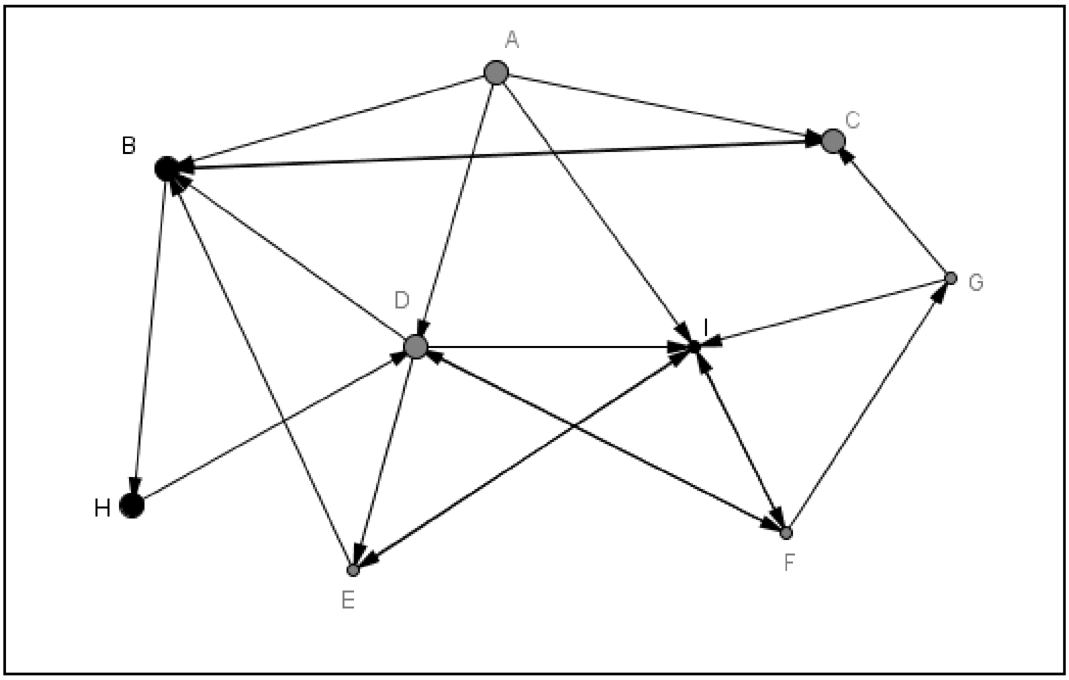
Tablo– 4.2’de ise mesleki kıdem fazlalığı olan çalışanlar daha büyük noktalarla belirtilmiştir. Farklı boyutlarda noktalar kullanmak öğretmenlerimizin farklı sıfat veya görüşlerini temsil etmek için faydalı olabilir. Örneğin öğretmenler arasında kurumda başlatılacak olan yeni bir uygulamaya destek verme oranları değişkenlik gösterebilir. Bu durumda yeni uygulamaya daha sıcak bakan öğretmenler daha büyük noktalarla, bu uygulamaya pek sıcak bakmayan öğretmenler daha küçük noktalarla gösterilebilir. Noktaları birleştiren yay ve/veya kenarlara da farklı renklendirmeler kullanarak ya da üstlerine “+” “-“ işaretleri konularak değişik anlamlar yüklenebilir. Şekil – 4.1 de bir okulun dokuz kişilik matematik bölümündeki öğretmenlerin arkadaşlık ilişkilerini gösteren network(ağ) şemasında koyu renkli noktalar okulda 5 yıldan fazla çalışan öğretmenleri, açık renkli noktalar 5 yıldan az çalışan öğretmenleri; büyük noktalar yeni uygulanacak etüt programına destek veren, küçük noktalar ise bu programı uygun bulmayan öğretmenleri göstermektedir.



Tablo– 4.1



Tablo– 4.2



Şekil – 4.1

4.2 NETWORKDA ROL KAVRAMI

Toplumda tüm bireyler birbirinden farklı özelliklere sahiptir. Kimi liderlik özelliği taşır, kiminin iletişim kabiliyeti yüksektir, bazıları içe dönüktür bazıları ise fazla düzenlidir. Tüm bu farklı özellikler okul çalışanlarında da çeşit çeşittir. İnsanlar farklı özellikleri sayesinde hayatta ve çalıştıkları kurumlarda farklı roller üstlenirler. Bu roller kişilik özellikleri sebebiyle bir süre sonra kendiliğinden oluşur ve çalışanlardan bazıları kurum adına kritik fonksiyonlar üstlenirler. Networklar belli bir organizasyon içinde kritik fonksiyonları olan bazı bireylerin konumları üzerinden yapılandırılırlar. Daha özel olarak bir Okul yönetiminde network anlayışı, bu kritik kişilere ulaşıp öğretmenlere, diğer çalışanlara hatta öğrenci ve velilere erişimde farklı bir bakış açısı getirir. Bize göre kilit noktalardaki kişiler diğerlerine erişimi kolaylaştıran unsurlardır. Sosyal ağlar üzerinde çalışan araştırmacılar bu kilit noktalardaki kişilerin rollerini belirlemek için çeşitli çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmaları anlamlandırabilmek için sosyal ağdaki önemli roller; *yıldız, köprü*, *darboğaz* ve *yalıtık* gibi kavramlarla belirlenmişlerdir.

Aşağıda bu kavramlar incelenmiştir.

4.2.1 YILDIZ

Bir networkte ilk bakışta göze çarpan şey, bazı noktalar çok az sayıda bağlantıya sahipken bazılarının pek çok bağlantısının olmasıdır. Pek çok bağlantının merkezinde yer alan bu noktaların kimi veya neyi temsil ettiğini merak ederiz. Bu noktalar bir ulaşım ağındaki belli merkezler olabileceği gibi, bir topluluktaki bazı kişi ve kimlikler olabilir.

İnsan ilişkileri de benzer şekilde modellenebilir. Kurum içinde resmi olarak, müdür yardımcılığı, bölüm başkanlığı gibi görevlerde bulunan çalışanlar görevleri gereği çok fazla çalışan ile bağlantılıdır. Resmi görevlere sahip olan çalışanlar dışında da birçok bağlantıya sahip olan öğretmen veya çalışanlar olabilir. Bu kişiler görev yetkisi dışında sahip oldukları kişisel özellikler sebebiyle pek çok kişiyle iletişim halindedirler. Kurumsal networklarda 'yıldız' olarak adlandırılan noktalar dünya üzerindeki popüler şehirlere benzetilebilir. Bu noktalarla temsil edilen kişiler pek çok çalışanla iletişimi olanlardır. Bir okul sisteminde kuruma yeni katılan çalışanlar öncelikle bu roldeki öğretmenlerle iletişime geçer, onlarla arkadaşlık etmeye başlar ve kuruma ait işleyişi de onlardan öğrenirler. Bu öğretmenlerin yeni alınan bir değişim kararına olan inancı ve adaptasyonu tüm kurumun adaptasyonunu doğrudan etkiler. Barabasi'ye göre networktaki yıldızlar tarafından benimsenmeyen bir fikrin başarıya ulaşma şansı yoktur.[(*)] Resmi olarak bu pozisyonda olan çalışanlar pozisyonları gereği, resmi olmayan yıldızlar ise kişisel özellikleri gereği kurumdaki bilgi akışının önemli bir parçasıdırlar ve hemen hepsi bunun farkındadırlar. Yapılan araştırmalara göre burada karşımıza çıkabilecek iki farklı sakıncalı durum söz konusu olabilir. Birincisi sosyal ağların merkezleri niteliğindeki bu kişiler, sorumlulukları kapsamındaki işleri dışında pozisyon ve karakterlerinin doğal bir sonucu olarak gelişen, diğer çalışanlarla iletişim halinde olup onlara iş konusunda destek verme görevini de üstlenirler. Her konuda herkese destek olmak, kişinin iş yükünü arttıracağından performans düşüklükleri yaşanabilir. İş yoğunluğu yüzünden yorulan kişinin adaptasyonunu kaybetmesi de mümkündür.

Bir diğer durum ise bilgi akışının önemli bir parçası olduğunu belirttiğimiz bu kişilerin, bilgi akışını kontrol etmeye başlamasıdır. Resmi görevlendirmesi olmayan bir 'yıldız' okul yönetiminin gizli bir parçası haline gelebilir. Okul yöneticileri için beraber çalıştıkları öğretmen networkunda bu pozisyondaki kişilerin belirlenmesinin ve iyi gözlemlenmesinin sonucunda, kurum adına çok olumlu sonuçlar elde edilebilir. Sosyal iletişim becerileri yüksek olan bu çalışanlarımız doğru görevlendirmeler ile yöneticilerin en büyük destekçileri olabilecekleri gibi yönetimi zorlaştıracak kişiler de olabilir. Yöneticiler açısından bu öğretmenlerin fikirlerini dinlemek aslında tüm öğretmenlerin fikirlerini dinlemekle eşdeğer sayılabilir.

[(*)]Barabasi 2003, pp.129-130

4.2.2 KÖPRÜ

Okul networkları alt gruplar veya kliklerin birleşiminden oluşur. Örneğin matematik bölümü ve sosyal bilimler bölümleri farklı alt gruplardır. Farklı gruplardan iki kişi arasındaki ilişki bu kişilerin mensup oldukları gruplar arasında köprü vazifesi görür, bilgi akışı sağlar. İlk bakışta networktaki en etkili kişilerin "yıldızlar" olduğu düşünülse de köprü konumuna sahip kişilerin de önemi oldukça fazladır. Bu konumdaki kişiler yıldız konumuna göre daha az sayıda çalışanla iletişimdedirler ve farklı birimler arasında köprü vaziyeti görürler böylece farklı iki birimin birbirinden haberdar olmasını sağlarlar. Bu kişiler de resmi görevlendirmesi olanlar ve olmayanlar olarak ikiye ayrılabilirler.

4.2.3 DARBOĞAZ

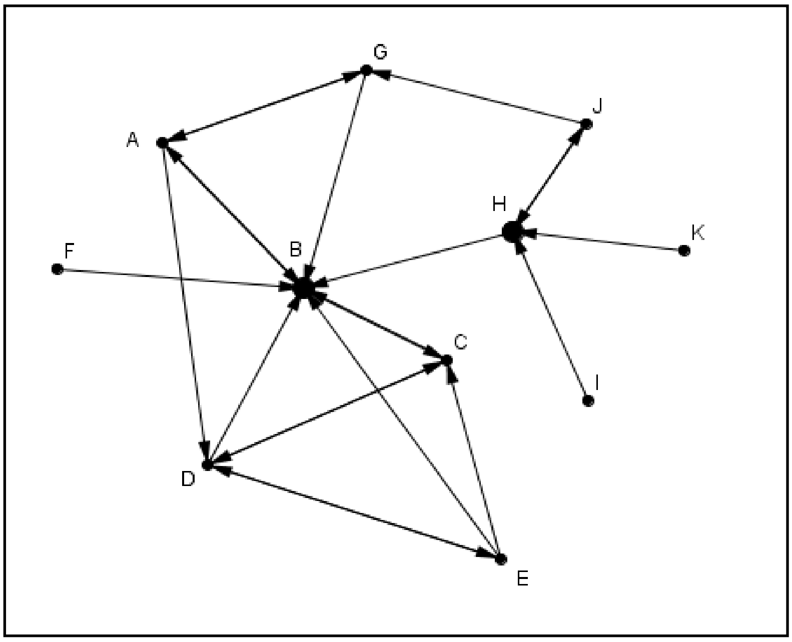
Bir networkta *darboğaz* konumundaki elemanlar, *yıldız* veya *köprü*lerden oluşabilir. *Köprü* konumundaki çalışan, farklı iki birim arasında tüm detayları aktarırken *darboğaz* yapısı birimler arasında bilgi akışını seçici bir şekilde sağlar. İstediği bilgileri iletir, istemediklerini iletmez. Okullarda yönetim, genellikle öğretmenlerden çok bölüm başkanlarıyla iletişim halindedir. Bölüm ile ilgili bir konu önce bölüm başkanıyla görüşülür. Bölüm başkanları network içerisinde *yıldız* konumundadırlar. Bölümdeki öğretmenlerden en küçük bir kararın bile kendisine bilgilendirme yapılmadan uygulanmamasını isteyen bir bölüm başkanı, bölüm içindeki işleri yavaşlatabilir. Ayrıca bölüm ile ilgili yönetimin tek iletişime geçtiği kişi olarak bir *darboğaz* oluşturabilir. İstediği bilgileri yönetimle paylaşır, istemediklerini paylaşmaz.

4.2.4 YALITIKLIK

Network yapısındaki yalıtık(izole) bireyler ya kimseyle ilişki kurmayan ya da diğer izole bireylerle çok az ilişki kuranlardır. İzole bireyler networkta farklı bir problemdir. Networkun geri kalanıyla iletişim kurmayan bu bireylerle, networkun geri kalan üyeleri de iletişim kurma çabası içinde değildirler. İzolasyon yani yalıtıklık karşılıklı oluşur.

Bir network ağında bulunabilen, yıldız, köprü, darboğaz ve yalıtık köşe terimlerini daha iyi anlamak için Şekil – 4.2'yi inceleyelim.

Şekil – 4.2'de bir özel okulun iki farklı yerleşkesindeki Türkçe Bölümü öğretmenleri temsil edilmiştir. Sağ taraftaki öğretmenler (H, I, K, J) yeni açılan yerleşkenin öğretmenleri, sol taraftakiler ise ana yerleşkenin öğretmenleridir. Ana yerleşkenin bölüm başkanı B, yeni yerleşkenin bölüm başkanı ise H harfleriyle isimlendirilip yönetim tarafından görevlendirilen bu başkanlar büyük puntolu noktalarla temsil edilmiştir. Görüldüğü üzere her iki başkan da resmi görevleri gereği, yıldız konumundadırlar. Ana yerleşkenin öğretmenlerinden C noktası ile temsil edilen öğretmen de resmi görevlendirmesi olmadığı halde yıldız konumundadır. Öğretmenler arasında oldukça güçlüdür.



Şekil – 4.2

Yeni yerleşkeye baktığımızda H ile temsil edilen bölüm başkanın hem köprü hem de bir darboğaz olduğunu görürüz. Bu yerleşkeyle ilgili tüm bilgiler kendisinde toplanır, istediği bilgileri karşı tarafa iletir, istemediklerini iletmez. Ancak burada köprü vazifesi gören bir başka öğretmen de J noktası ile temsil edilendir. Ana yerleşkedeki G ile olan arkadaşlığı onu da bilgi akışının resmi olmayan bir parçası yapar. Eğer buradaki bilgi akışının yalnızca resmi olarak görevlendirilmiş kişiler üzerinden olması istenirse bu durumda J ve G noktaları arasındaki bağı kırmak gerekmektedir. Bunun için farklı bir görevlendirme düşünülebilir veya bu öğretmenlerden biri görevden uzaklaştırılabilir. Yeni yerleşkedeki öğretmenler fazla iletişim halinde olmasa da ana yerleşkenin öğretmenleri arasında çok çeşitli ilişkiler vardır. Bu ilişkiler yumağı içerisinde F noktası ile temsil edilen öğretmen görev gereği bölüm başkanı dışında kimseyle iletişim kurmaması sebebiyle izole olmuş bir çalışandır, yalıtık köşe konumundadır.

Pek çok farklı özellikteki çalışanın tamamından oluşan networkları daha iyi anlayabilmek için networkun bütününe bakmak gerekir. Yıldız konumunda olan bir bireye birkaç kişi daha eklendiğinde networkumuz daha merkezil bir hale gelir. Farklı iki departmanın arasında oluşan bir köprü sayesinde iki bölümün ortaklaşa yapabileceği çalışmalar artabilir. Yeni katılan çalışanlar sayesinde izoleler ortadan kalkabilir.

Networklar oldukça hareketli değişken yapılardır. Dengelerin sağlanması için bütün olarak ele alınmalıdırlar. Bir networkta elemanlar konumları ve bağlantıları gereği farklı öneme ve üne sahiptir.

Çizge kuramının sosyal ağ analizindeki önemli kullanım alanlarından biri sosyal ağdaki "en önemli elemanın" belirlenmesidir. Gruptaki "en önemli" veya "en önemsiz" eleman belirlenirken, pek çok farklı ölçüm aracı kullanılabilir. Eğer bir networktaki bir eleman bağlantıları sayesinde; diğer tüm elemanlar tarafından tanınıyorsa bu elemanı 'prominent' (ünlü) olarak nitelendirebiliriz. Yıldız tanımını da hatırlarsak, networktaki en ünlü bireylerin yıldız konumunda olanlar olduğunu söyleyebiliriz.

Bir yönlü networkta 'prominent' eleman belirlenirken; diğer elemanlardan bu elemana yönlendirilmiş okların yanı sıra bu elemandan diğer elemanlara doğru yönlendirilmiş okların sayısına da bakılır. Ayrıca farklı elemanlar üzerinden dolaylı olarak bu elemana ulaşan bağlantılar da göz önüne alınmalıdır.

Prominans (ün) tanımında göz önünde bulundurulması gereken pek çok etken vardır. Bunun için Knoke ve Burt iki tip prominans tanımlamıştır. Bunlardan biri merkezilik diğeri ise prestijdir. Bu ikili aralarındaki farklara rağmen bir arada tanımlanabilir. **[4]**

4.2.5 MERKEZİLİK VE PRESTİJ

Merkezil olmayan networkların genellikle birkaç tane yıldız çalışanı vardır. Bu yıldızlar, tam yetkili yöneticiler veya cana yakın çalışma arkadaşlarından oluşabilir. Bir networkun merkezil olup olmaması, çalışma ortamında bürokrasinin varlığıyla ilişkilidir. Merkezil networklarda bir yıldız bulunur ve çalışanların pek çoğu kaynak sağlama, akıl danışma, onay alma gibi durumlarda ona başvurur ya da bunun tam tersi olarak o, görev verme, bilgilendirme yapma, tavsiye isteme gibi durumlar için diğer elemanlarla bağlantıya geçmek durumunda kalır. Bu durum networkta bulunanları bu merkeze bağımlı hale getirir, bürokrasiyi arttırır.

Bir elemanın *merkeziliği* o elemanın ünü ile ilişkilidir. Networktaki *prominent* (ünlü) elemanlar diğer elemanlarla sıkı bağlantılar içerisindedir. Bu sıkı bağlantılar *prominent* elemanı diğer elemanlar tarafından daha görünür bir hale getirir. Bu da elemanın networkun merkezi haline gelmesi ile sonuçlanır. Prominans ölçüsünde önemli olan, eleman ile bağlantısı olan okların yönünden çok sayısıdır. Özel olarak *prestijli* eleman ise kendisine doğru yönlendirilmiş okların sayısı fazla olan elemandır. Prestij kavramı merkezliğe göre daha açıkça tanımlanabilir. Bir elemana doğru yönlendirilmiş okların sayısına **iç derece**; bu elemandan dışa doğru yönlenmiş okların sayısına ise **dış derece** denirse; networktaki bir elemanın, iç derecesi arttıkça, prestiji de artar. Merkezilik ise içe ve dışa doğru derecelerin tamamıyla ölçülür. Ancak prestijli eleman da network içinde bir yıldız, aynı zamanda merkez konumundadır.

Özellikle eğitimde, okul yönetimindeki merkezileştirme ve merkezden uzaklaştırma arasındaki münakaşanın devam ettiği bir yerde, bir taraf seçmek ve bunu yılmadan savunmak çok kolaydır. Her iki tarafın da destekçileri vardır. Networksal bakış açısı içerisinde böyle bir münakaşa anlamsızdır. Bir networkun merkezinin olması, elbette bu kişi gerekli birikim ve zamana sahip ise olumludur. Ancak network çerçevesinde merkezileşmenin olumlu mu olumsuz mu olmasından çok grubumuzu etkisi altına alan kaynağın neresi olduğunu tespit etmek esastır. Merkezil networklarda çalışanlar genellikle networkun merkezinden etkilenir. Yeni fikirlerin bu tip networklarda yer bulması ancak merkezin bu fikre ulaşıp, onu benimsemesine bağlıdır. Ancak merkezil olmayan networklarda bunun tersi gözlenir. Tüm çalışanların etkilendiği farklı kişiler/birimler mevcuttur. Dolayısıyla farklı fikirler network içinde düzensiz bir şekilde yayılır ve bu fikirlerin kontrolü ve takibi merkezi networklarla kıyaslandığında daha güçtür. İşte bu noktada Çizgelere başvurulmak zorunluluğu ortaya çıkar. Bu yol sistemin analizini kolaylaştırır.

Sistemdeki üyeler birer aktör olarak ele alındığında bir köşenin dış derecesi bu köşe ile temsil edilen aktörün tercihlerinin eğiliminin bir ölçüsü olarak yorumlanabilir. İç derece ise bu aktörün tercih edilirliğinin ölçüsü olur.

Bir networkta n_i köşesinin dış derecesini $d_O(n_i)$ iç derecesini ise $d_I(n_i)$ ile göstereceğiz.

İç ve dış dereceler sosyal ağ uygulamalarında çok kullanışlı ölçüm araçlarıdır. Bu derecelerin irdelenmesiyle, ağdaki aktörlerin bireysel rolleri (yıldız, ün, köprü, darboğaz, vs.) ve ağın genel yapısı hakkında (yoğunluk, merkezilik, yayılım, vs.) pek çok bilgi elde etmek mümkündür. Pek çok durumda yönettiğimiz ağda bulunan köşelerin, iç ve dış derecelerini kontrol etmek isteyebiliriz.

Bir çizgede tüm köşelere ait iç ve dış derecelerini aritmetik ortalamasını aldığımızda bu iki değerin birbirine eşit çıktığını görürüz. Çünkü bu dereceler hesaplanırken aynı kenarlar kümesi kullanılmıştır. Ancak bu kenarların yönleri farklıdır. “g” networktaki köşe sayısı olmak üzere içe doğru derecelerin aritmetik ortalamasını $\overline{d_I}$ ile; dışa doğru derece aritmetik ortalamasını $\overline{d_O}$ ile gösterirsek;

$$\overline{d_I} = \frac{\sum_{i=1}^{g} d_I(n_i)}{g}$$

$$\overline{d_O} = \frac{\sum_{i=1}^{g} d_O(n_i)}{g}$$

olarak hesaplanır. **[4]**

Ağdaki bütün kenarların sayısını L ile gösterecek olursak, burada iç derecelerin toplamı denildiğinde köşelere doğru yönlenmiş kenarların tümünün sayısı, dış derecelerin toplamı denildiğinde ise köşelerden yönlenmiş kenarların tümünün sayısı anlaşıldığına göre

$\sum_{i=1}^{g} d_I(n_i) = \sum_{i=1}^{g} d_O(n_i) = L$ olduğu aşikârdır.

Bu durumda en basit ifadeyle

$$\overline{d_I} = \overline{d_O} = \frac{L}{g}$$

elde edilir.

Bir okuldaki öğretmenlere "*çalışma arkadaşları arasında kendilerine en yakin buldukları üç kişinin isimlerini*" yazmalarını istediğimizde bütün dış derecelerin 3 çıkacağı aşikârdır. $d_O(n_i) = 3$ olurken her öğretmenin tercih edilme sayısı farklı olabileceğinden $d_I(n_i)$ değerleri birbirinden farklı olacaktır. İç derecelerin varyansını $S_{D_I}^2$ ile gösterirsek

$$S_{D_I}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{g}(d_I(n_i) - \overline{d_I})^2}{g}$$ formülü ile hesaplanır.

Benzer şekilde dış derecelerin varyansını $S_{D_O}^2$ ile gösterirsek

$$S_{D_O}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{g}(d_O(n_i) - \overline{d_O})^2}{g}$$ formülü ile hesaplanır.

Bu ölçümler üzerinde çalışılan sosyal ağın bireylerin konumlarının birbirlerinden ne kadar farklı olduklarını görmemizi sağlar. Networkumuzun ne ölçüde merkezil olduğunu ölçen istatistikî verilerdir.

Bir sosyal ağda bir noktanın iç ve dış derecelerinin sayılarına göre farklı tipte köşeler oluşur. Çizge kuramcıları bu noktaları sınıflandırmışlardır. Bu sınıflandırmaya göre network içindeki bir $a(n)$ noktası için dört farklı durum söz konusudur.(*)

$d_I(n_i) = d_O(n_i) = 0$ ise $a(n)$ yalıtıktır (isolate)

$d_I(n_i) = 0$ ve $d_O(n_i) > 0$ ise $a(n)$ vericidir (transmitter)

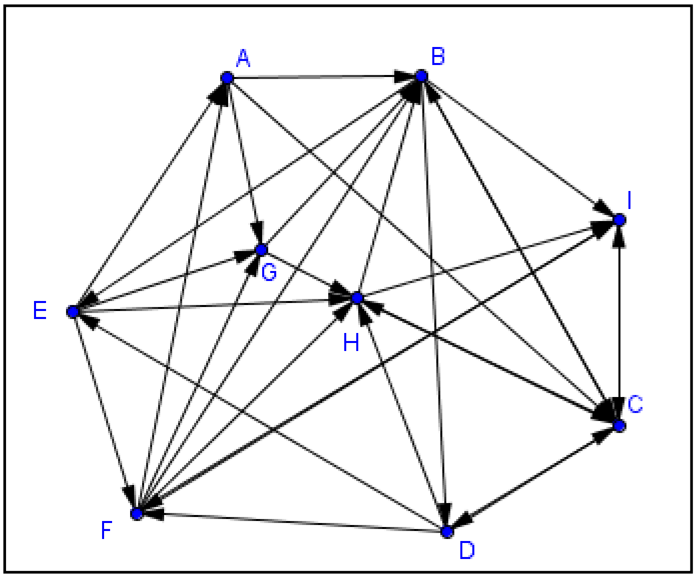
$d_I(n_i) > 0$ ve $d_O(n_i) = 0$ ise $a(n)$ alıcıdır (receiver)

$d_I(n_i) > 0$ ve $d_O(n_i) > 0$ ise $a(n)$ tasiyicidir veya siradandir denir. (carrier or ordinary)

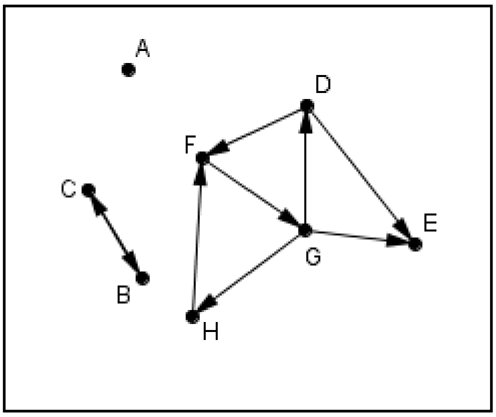
4.2.6 YOĞUNLUK

Networklarda bağlantı sayısının fazlalığı yoğunluk yaratır. Matematiksel olarak yoğunluk, networktaki bağlantı sayısının, olası bütün bağlantıların sayısına oranı olarak tanımlanır. Çok yoğun networklarda noktaların pek çoğu diğerleriyle çeşitli sekilerde bağlantılıdır. Bu bağlantılar, birlikte proje yürütme, evlilik, eski okul arkadaşı, akrabalık, aynı departmanda olma gibi profesyonel ya da profesyonel olmayan bağlantılar olabilir. Yoğun networklarda izoleler ve klikler oluşmaz. Böyle networkların bir parçasını bu networktan ayırmak oldukça zordur. Şekil – 4.3' de yoğun network örneği Şekil – 4.4'de ise yoğun olmayan bir network örneği görülmektedir. Şekil – 4.4' deki networkta bir izole (A noktası) bir de gruptan tamamen kopmuş iki nokta (B ve C'nin birbirlerinden başka kimseyle ilişkisi yok) söz konusudur. Farklı alanlarda uzmanlardan oluşan Şekil – 4.3' ile gösterilen networkun Şekil – 4.4' deki networka göre daha üretken olacağı açıktır.

(*) *Harary, Norman ve Cartwright 1965, Hage and Harary 1983*



Şekil – 4.3



Şekil – 4.4

Yoğun networklarda ilişkiler çok kuvvetli olduğundan tüm çalışanlar birbirini kollar, birinin eksik kaldığı bir noktada ona yardımcı olmak ve bu açığı gidermek için işbirliği halinde çalışır. Küçük ve yoğun networklarda etik ve güven ön plandadır. Bu tip bir network, birbirine bağlı ve uyumlu çalışma kültürü oluşturur. Herkes birbirinin ne yaptığından haberdardır dolayısıyla networka dâhil kişilerde yanlış yapmama baskısı oluşur. Van Wegberg yoğun sosyal ağları küçük yerleşim birimlerine benzetmiştir(*). O'na göre buralarda yaşayanların sınırlarını çevre

(*) *Van Wegberg 2003*

baskısı çizer. Özellikle okul ortamında böyle bir öğretmen ve yönetici grubunun olması öğrenciler tarafından bir kısıtlama gibi görülse de zaman içinde okulda oluşan uyum ve güven ortamına onların da dâhil olmasını sağlayacak, pozitif bir öğrenme alanı oluşacaktır. Networkun çok yoğun olmasının yol açtığı problemler de vardır. Güçlü bağlar, sağlıksız bağımlılıklara dönüşebilir. Pek çok okulda yeni fikirler networkta bulunan negatif döngüler yüzünden yer bulamaz. Yoğun networklarda birinin ayrılması veya yeni birinin katılması da oldukça zordur. Bu hem çalışanların bireysel gelişimi açısından hem de çalışma ortamının yeni fikirlerle tanışması açısından engel teşkil eder. Grup zaman içinde alanındaki gelişmelerin gerisinde kalıp izole olabilir. Bu ikisi arasında bir denge olmalıdır. Bize göre çalışanların güven ve uyum içinde çalışacağı kadar yoğun, izole bir çalışan grubuna dönüşmeyecek kadar gevsek bir network ideal olandır. Kuvvetli bağlar güçlü bir dayanışma ortamı oluştursa da kendini geliştirmeyen ve yenilenmeyen bir öğretim kadrosu hızlı değişen günümüz koşullarında istenmeyen bir durumdur.

Bir yönlü çizgenin yoğunluğu bu yönlü çizgede temsil edilen kenar sayılarının bir orantısı ile hesaplanır. Tüm kenarların sayısı L ile gösterilirse yoğunluk Δ aşağıdaki şekilde hesaplanır. **[4]**

$$\Delta = \frac{L}{g(g-1)}$$

Burada $g(g-1)$ bir noktada oluşabilecek tüm kenarların sayısıdır.

Δ değerinin $0 \; ile \; 1$ arasında olduğu aşikardır.

5 UYGULAMALAR

5.1 Yönlü İşaretli Çizgeler, Sosyal Ağ Kavramı ve Eğitim Sistemine Bazı Uygulamaları(*)

Ele alınacak sistemin elemanları veya sistemdeki olgular birer nokta ile temsil edilerek *"noktalar kümesi"* veya *" köşeler kümesi"* denen V ile gösterdiğimiz sonlu bir küme oluşturulur. Örneğin $v_1, v_2, \ldots, v_n$ noktaları temsil etmek üzere n noktalı bir *köşeler kümesi* $V=\{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ ile gösterilebilir.

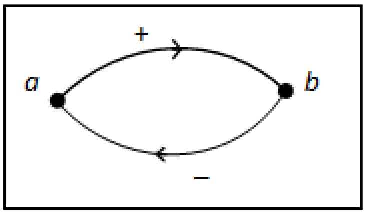
Bu kümedeki $v_1, v_2, \ldots, v_n$ noktaları, inceleme konusu çevredeki öğretmen sayısı, eğitime ayrılan bütçe, çevre kalitesi, üniversite sayısı, kullanılan enerji miktarı, çevre baskısı gibi etkenleri temsil etmek için kullanılabilir. Aralarında ilişki veya bağlantı olan nokta ikilileri birer çizgi ile birleştirilir. Noktalar arasındaki bu çizgiler *kenar* adını alır.

Örneğin; iyi yetiştirilmiş öğretmen sayısıyla kaliteli mezun sayısı arasında bir bağıntı olduğundan, bu iki olguyu temsil eden iki nokta, bir çizgi ile birleştirilmelidir. Benzer şekilde bölgedeki fabrika sayısıyla işsizlik oranı arasında bir ilişki olduğundan bunları temsil eden noktalar birleştirilerek bir kenar elde edilebilir. Veya iki kurumdan biri diğerine hizmet götürüyor olabilir. Bu iki kurumu temsil eden köşeler arasına çizilen kenar hizmet götürenden hizmet alana doğru yönlendirilmelidir. Bu yolla sosyal yapının elemanlarından oluşan V noktalar kümesinin bazı sıralı ikililerinin oluşturduğu, E ile göstereceğimiz, *Kenarlar Kümesi* elde edilecektir.

İncelenmekte olan yapı hakkında edinilen ayrıntılı bilgiler sonucunda daha önce oluşturulan kenarlara pozitif (+) veya negatif (-) birer işaret atanabilir. Örneğin söz konusu kenar, bir bölgedeki fabrika sayısını temsil eden noktadan işsizlik oranını gösteren noktaya doğru yönlendirilmişse fabrika sayısının artması işsizlik oranını azaltacağından aralarındaki bu zıt değişimi göstermek için kenar üzerine negatif (-) işareti konur.

(*) *Bu bölüm "Yaşadıkça Eğitim" dergisinin 118. Sayısındaki "Yönlü İşaretli Çizgeler Eğitim Sistemine Nasıl Uygulanabilir?" başlıklı makalemize dayanmaktadır.*

Benzer tarzda kaliteli öğretmen sayısını gösteren noktadan kaliteli mezun sayısını gösteren noktaya yönlendirilmiş bir kenara (+) işareti atanabilir, çünkü kaliteli öğretmen sayısındaki artışın, kaliteli mezun sayısını arttırdığı varsayılabilir. Başka bir bakış açısıyla, kişiler, kurumlar hatta devletlerarasındaki ilişkilerin iyi veya kötü oluşuna göre aradaki kenarlar (+) veya (-) olarak isimlendirilebilir. Basit bir örnek ile açıklarsak, bir sınıftaki öğrencilerden Ali ve Beyza birbirini tanıyor; Ali, Beyza'yı beğeniyor fakat Beyza, Ali'yi beğenmiyor olabilir. O zaman Ali'yi temsil eden nokta *a* ile Beyza'yı temsil eden nokta *b* ile gösterilmek üzere, çizgenin ilgili parçası aşağıdaki gibi olacaktır.

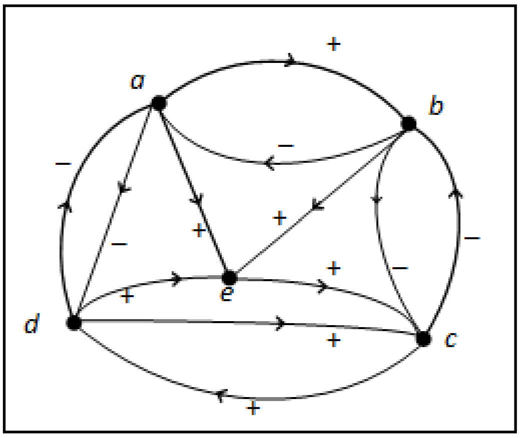


Şekil – 5.1.1

Daha ayrıntılı anlatımla, köşeler kümesi

V={ Ali, Beyza, Can, Dilek, Ekin}

olmak üzere aralarındaki; sevgi, dostluk, işbirliği, yardım etme gibi iyi ilişkilerin (+), nefret, kıskançlık, düşmanlık, çekememezlik gibi olumsuz ilişkilerin (–) ile gösterildiği aşağıdaki gibi bir çizge (Şekil – 5.1.2) oluşturulabilir.



şekil – 5.1.2

Eğer Ali=*a*, Beyza=*b*, Can=*c*, Dilek=*d*, Ekin=e ile gösterilirse kenarlar kümesi

E={(a,b), (b,a), (a,d), (d,a), (a,e), (b,e), (b,c), (c,b) (c,d), (d,c), (d,e), (e,c)}

ve kenarların, yukarıdaki yazılış sırasında alınmak koşuluyla, işaretler dizisi

(+,–,–,–,+,+,–,–,+,+,+,+)

olacaktır. Sonuç olarak *"Yönlü İşaretli bir çizge"* *V* ile gösterdiğimiz köşeler kümesi, *E* ile gösterdiğimiz ve yönlü kenarlardan oluşan *kenarlar kümesi* ve kenarlara atanmış *işaretler dizisinden* oluşmaktadır.

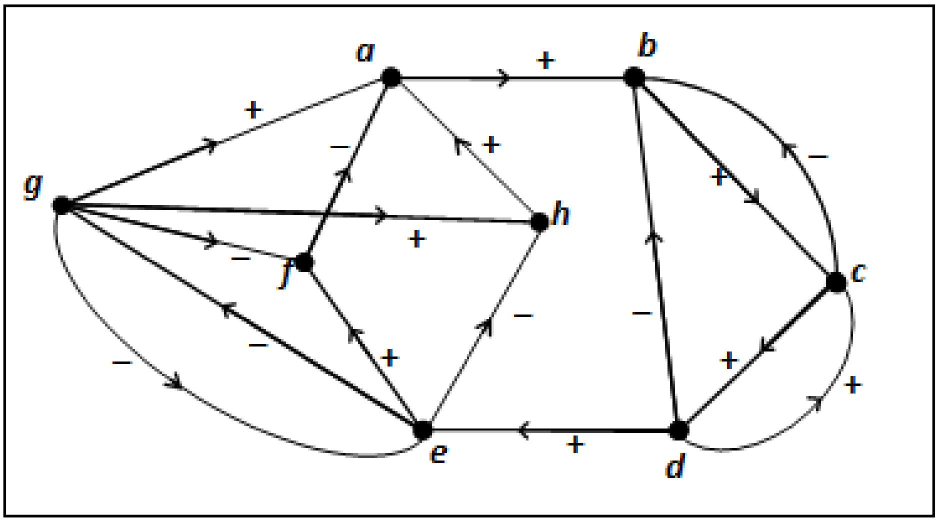
E kümesinde örneğin *(b,c)≠ (c,b)* olup birincisinin başlangıcı *b,* bitişi *c*; diğerinin ise başlangıcı *c*, bitişi *b'* dir. Bu çizgede, *a* ile *d* arasında ve c ile *d* arasında kenar bulunmaması Ali ile Can'ın, Beyza ile de Dilek'in tanışmadıkları veya birbirleri hakkında ne düşündükleri konusunda bilgi olmadığı anlamına gelir. Benzer şekilde *(b,c)* ve *(c,b)* kenarları üzerindeki – işareti Beyza ve Can'ın birbiri hakkında olumlu duygular beslemediğini göstermektedir. *(b,e)* kenarı üzerinde + işareti vardır. Bu durumda Beyza, Ekin hakkında iyi düşüncelere sahiptir, fakat *e'* den *b'* ye yönlendirilmiş herhangi bir kenar bulunmadığından Ekin'in Beyza hakkındaki düşüncesi bilinmemektedir veya Ekin, Beyza ile ilgili iyi ya da kötü bir düşünceye sahip değildir.

Yönlü işaretli çizgelerin asıl önemi, toplumun belli kesitlerinin incelenmesi ve analiz edilmesi sürecini kolaylaştırmalarıdır. Toplum karmaşık ilişkiler yumağı halindedir ve birçok değişkenin etkisi altındaki bireyler, kurumlar ve benzer topluluklar sürekli etkileşim içindedirler. Özellikle yönetim kademesinde olanlar, sorumlu oldukları yapının geleceği hakkında önceden bilgi sahibi olmak veya uygulamaya geçirecekleri politikanın gelecekteki olası sonuçlarını kestirmek isterler. Üstelik bu gibi durumlarda *çok az bir bilgi ile en doğru kestirimde bulunulması* amaçlanır. Yönlü işaretli çizgeleri bu anlamda nasıl kullanacağımızı küçük bir örnek üzerinde açıklayalım. Örneğimizin, bazı varsayımlara dayandırılarak kurgulanmış, soyut bir örnek olduğu unutulmamalıdır.

Çizgemizin *V* köşeler kümesi, toplumun belli bir kesimindeki

- *a=Halkın eğitimin yararına olan inancı*
- *b=Eğitime ayrılan bütçenin artması yönündeki kamuoyu baskısı*
- *c=Eğitime ayrılan bütçe*
- *d=İstihdam edilen öğretmen sayısı*
- *e=Kalitesiz öğretmen sayısı*
- *f= Kalitesiz mezun sayısı*
- *g=Kaliteli öğretmen sayısı*
- *h=Kaliteli mezun sayısı*

olmak üzere, $V= \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ olsun. Köşeler birer nokta ile gösterilir, aralarına gerekli olan kenarlar çizilir, yönlendirilir ve aradaki bağlantının yani etkileşimin pozitif veya negatif oluşuna göre işaretler atanırsa aşağıdaki çizge (Şekil – 5.1.3) elde edilir.



Şekil – 5.1.3

Örneğin *a* köşesini *b* köşesine birleştiren ve *a dan b ye* yönlendirilmiş kenarın (+) işareti taşıması *b* olgusunun *a* ile aynı yönde değişmesinden kaynaklanır. Yani halkın, eğitimin yararına olan inancının artması eğitime ayrılan bütçenin artması yönündeki kamuoyu baskısını arttıracak; halkın, eğitime olan inancının azalması da bütçenin artması yönündeki baskıları azaltacaktır. Hemen anlaşılacağı gibi birincideki artış ikincide de artışa, azalma ise yine azalmaya neden olmaktadır. *f* köşesinden *a* köşesine giden kenar üzerinde (-) işaretinin bulunma nedeni ise *a* olgusunun *f* olgusuyla ters yönde etkileşmesidir. Yani kalitesiz mezun sayısının artması, halkın, eğitimin yararına olan inancını azaltacak, kalitesiz mezun sayısındaki azalma ise halkın, eğitimin yararına olan inancının artmasına neden olacaktır. Görüldüğü gibi burada birincideki artış diğerinde azalmaya, azalma ise diğerinde artmaya neden olmaktadır.

Genel olarak anlatılırsa; farklı iki olguyu temsil eden v_i, v_j gibi iki köşe ele alınsın, eğer

v_i artarken v_j artıyorsa $\quad v_i \xrightarrow{+} v_j$

v_i artarken v_j azalıyorsa $\quad v_i \xrightarrow{-} v_j$

v_i azalırken v_j azalıyorsa $\quad v_i \xrightarrow{+} v_j$

v_i azalırken v_j artıyorsa $\quad v_i \xrightarrow{-} v_j$ olur.

Hemen belirtelim ki çizgede bir *çevrim* denince başladığı yerde biten aradaki köşe ve kenarları farklı olan birbirine ulanmış *kenar*lar dizisi anlaşılır. Başlangıç noktası *a* bitim noktası *b* olan bir *(a,b) kenarını ab* ile göstermek üzere "*ab, bc, cd, de, ef, fa*" bir *çevrim*dir. Böyle bir çevrim sadece bulundurduğu ardışık köşeler kullanılarak "*a → b → c → d → e → f → a*" ile de gösterilebilir, hatta bu gösteriliş tarzı daha kullanışlıdır. Hemen belirtelim ki yukarıdaki gibi bir çevrimden; aradaki bir köşeden başlamak üzere, örneğin *e* köşesinden başlamak üzere, "*e→f→a→b→c→d→e*" *çevrimi* elde edilebilir. İlk önce yukarıdaki örnek çizge üzerinde "*a→b→c→d→e→f→a*" çevrimini yorumlayalım: Halkın eğitimin yararına inancının artması → eğitime ayrılan bütçenin artması yönünde kamu baskısını arttıracaktır. Eğitime ayrılan bütçenin artması yönünde baskı artınca → eğitim bütçesinin artması beklenen sonuçtur. Eğitime ayrılan bütçe artarsa → öğretmen istihdamı artacaktır. Öğretmen istihdamı artınca → deneyimsiz ve başarısız öğretmen sayısı artacaktır. Başarısız öğretmenlerin sayısı artınca → kalitesiz mezun sayısının artması doğal bir sonuçtur. Kalitesiz mezun sayısının artması → halkın eğitime olan inancını azaltacaktır. Görülüyor ki Halkın eğitimin yararına olan inancının artması belli bir döngü sonunda, her aşama titizlikle incelenip gerekli önlemler alınmadığı takdirde, halkın eğitime olan inancının azalmasıyla sonuçlanabilecektir. Eğer kalitesiz öğretmen sayısıyla ilgiliysek, yukarıdaki çevrim yerine; başlangıç ve doğal olarak bitim noktası *e* olan “*e→f→a→b→c→d→e”* çevrimini ele alabiliriz. Buna göre, kalitesiz öğretmen sayısı artmışsa *(e),* kalitesiz mezun sayısında artma olacaktır (*f*), kalitesiz mezun sayısındaki artış halkın eğitimin yararına olan inancını azaltacaktır (*a)* bu nedenle *fa* kenarı negatif işaret taşımaktadır. Halkın eğitime olan inancının azalması eğitime ayrılan bütçenin artması yönündeki kamuoyu baskısını azaltacaktır (*b*), bunun azalması eğitim bütçesinin azalmasına neden olacaktır *(c)*, bunun sonucunda öğretmen istihdamı azalacaktır (*d),* öğretmen istihdamının azalması öğretmen alımlarında daha seçici davranılacağından ve kalitesizler ayıklanacağından, kalitesiz öğretmen sayısının azalmasına neden olacaktır *(e).* Görülüyor ki, gerekli önlemler alınmazsa benzer (aynı değil) sonuçlar, aralık uzunluğu değişebilen çeşitli dönemlerde, tekrar ortaya çıkabilmektedir. Bu kez ilk ele aldığımız çevrime “*e→g→f”* parçası eklenerek oluşan “*a→b→c→d→e→g→f→a” çevrimi* ele alınsın. Bu *çevrim* için işaret dizisi *(+,+,+,+,–,–,–)* olur. *B*una göre yine halkın eğitimin yararına olan inancının artması ile başlayan döngü bu inancın azalması sonucunu doğuruyor. Eğer halkın uygulanmakta olan eğitimin yararına olan inancının artması isteniyorsa, çevrim sürecinde (–) işaret taşıyan bir kenarın başlangıç veya bitim noktasının temsil ettiği faktöre (hangisi uygunsa, hiçbiri uygun olmayabilir) müdahale edilir. Örneğin *eg* kenarı (–) işaret taşımaktadır, yani normal olarak kalitesiz öğretmen sayısı artarsa kaliteli öğretmen sayısı azalır, bunun önüne geçmek için, çevrimin bir önceki *de* kenarı (+) işaretli olduğundan normal koşullarda öğretmen istihdamının artması kalitesiz öğretmenlerin artmasına neden olur. İşte bu aşamada istihdam arttı diye kalitesizlere izin verilmemeli öğretmen kalitesinden vazgeçilmemelidir. Bu da iyi öğretmen yetiştirilmesi sorununun önemini ve vazgeçilmezliğini ortaya koyar. Benzer tarzda “*b→c→d→b” ve “b→c→b“* çevrimleri de yorumlanabilir.

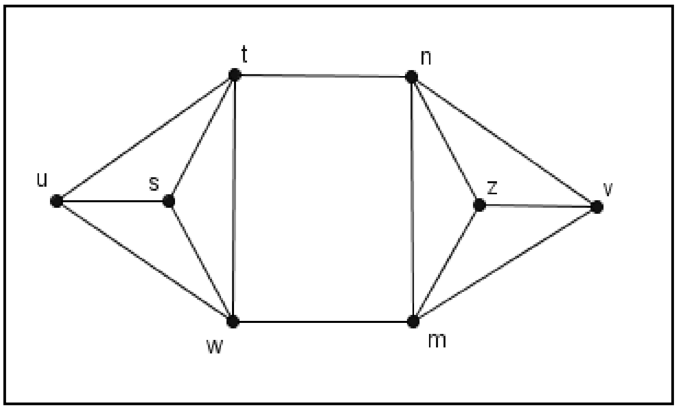
Kenarlar + veya – birer işaret taşıdığına göre, bir çevrimi oluşturan kenarlara ait işaretler

$$(+)(+)=(+),\ (+)(-)=(-)(+)=(-),\ (-)(-)=(+)$$

olmak üzere, çarpılırsa çevrim için (+ veya –) bir işaret elde edilir. Buna göre çevrim *pozitif* veya *negatif* olur. Diğer bir deyişle bir çevrimde tek sayıda negatif işaret varsa çevrim negatif, çift sayıda negatif kenar varsa çevrim pozitiftir. Çevrimin pozitif veya negatif olması ne anlama gelir, nasıl yorumlanabilir? Eğer bir çevrimde belli bir değişkenin artması sonucunda aynı değişken daha da artıyorsa, bu çevrim bir *Pozitif Geribildirim Çevrimi* adını alır ve işareti pozitiftir. Çevrimdeki bir değişkenin artımı aynı değişkenin azalmasına neden oluyorsa bu çevrim bir *Negatif Geribildirim Çevrimi* adını alır ve işareti negatiftir. Yukarıdaki örneğimizde incelenen "$e \to f \to a \to b \to c \to d \to e$" , "$b \to c \to d \to b$" ve "$b \to c \to b$" çevrimleri negatif, "$e \to g \to e$" ve "$d \to c \to d$" çevrimleri ise pozitif geri bildirim çevrimleridir. Şu halde çevrimleri uzun uzadıya incelemek yerine işaretine bakarak inceleme altındaki değişkenin veya olgunun nasıl davranış sergileyeceğini hemen belirleyebiliriz. Dahası çevrimdeki işaretler için önceden önlem alarak çevrimin pozitif veya negatif olmasını sağlayabiliriz.

5.2 Bağlantılılık

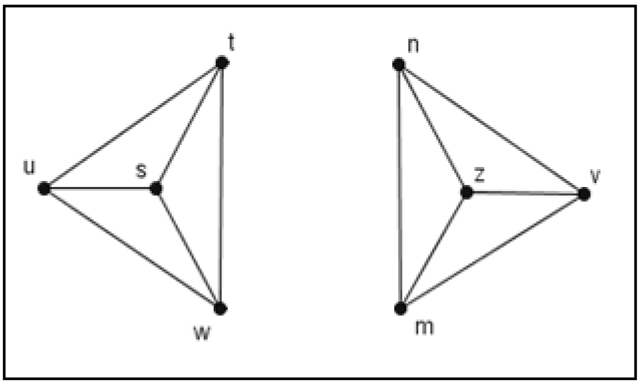
5.2.1 *uv*-yol İle İlgili Bir Uygulama



Şekil – 5.2.1
u, s, w, t noktaları bir okuldaki müdür yardımcıları
n, m, z, v aynı okuldaki rehberlik birimi öğretmenlerini temsil etsin. **[7]**

Yukarıdaki çizgede tn ve wm kenarları u*'yu* v*'den* ayırır. Burada en fazla iki $kenar\ ayrık\ \ uv - yol$ vardır.

Çünkü her $uv - yol,\ tn$ veya wm yollarından birini mutlaka içerir. Yani üçüncü bir kenar ayrık yol yoktur. Burada u ve v arasındaki bağlantıyı kesmek istersek tn ve wm kenarlarını koparmamız gerekmektedir. Bu kenarları koparmak, görev değişikliği, isten çıkarma gibi farklı yöntemlerle yapılabilir. Bu kenarlar koparıldığında çizge Şekil – 5.2.2'teki gibi olur.



Şekil – 5.2.2

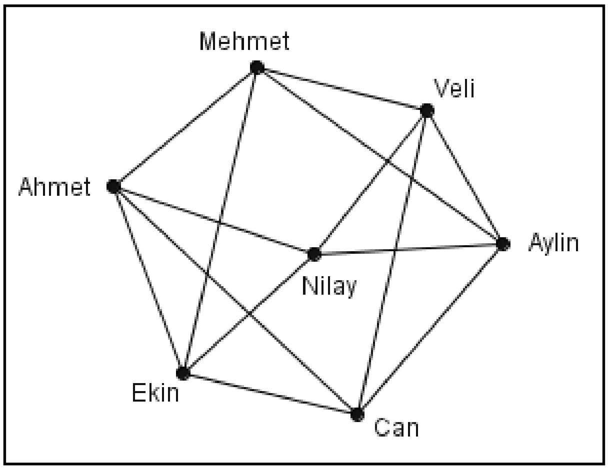
5.2.2 Bağlantılılığın Optimallığı ile İlgili İki Uygulama

Uygulama 1:

Bir okuldaki Türk Dili Ve Edebiyat bölümündeki öğretmenler kümesi $\boldsymbol{E}$ ile gösterilmek üzere

$E = \{Mehmet, Veli, Aylin, Can, Ekin, Ahmet, Nilay\}$ olsun.

Köşeleri E kümesinin elemanları olmak üzere aralarında samimiyet olanlar birer kenar ile birleştirilerek Şekil – 5.2.1'deki çizge oluşturulsun.



Şekil – 5.2.1

7 köşe ve 14 kenardan oluşan bu ilişki sistemi optimal değildir.

Çünkü

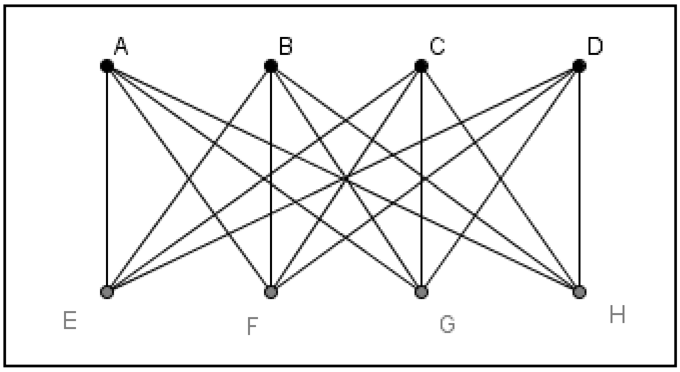
$\boldsymbol{\mathcal{K}(G) = 3} \quad \boldsymbol{\lambda(G) = 4}$ **dir.**

Mehmet, Nilay ve Can sistemden çıkarıldığında sistem bağlantısız hale gelir.

Uygulama 2:

Bir lisede dokuzuncu, onuncu, on birinci ve on ikinci sınıflar öğrenci temsilcileri sırasıyla E, F, G, H noktalarıyla, mudur, rehberlik birimi koordinatörü, disiplin kurulu başkanı ve onur kurulu başkanı sırasıyla A, B, C, D noktalarıyla temsil edilsin.

$V_1 = \{A, B, C, D\}$ ve $V_2 = \{E, F, G, H\}$ iki küme oluşturulsun. Bu kümelerin elemanları çizgenin köşeleri olsun. Bu köşelerden V_1kümesinin elemanlarından V_2 kümesinin elemanları ile düzenli olarak her ay görüşme yapması gerekenler birer kenar ile birleştirilsin. Bu durumda Şekil – 6 elde edilir.



Şekil – 5.2.2 $(K_{4,4})$

Burada $V_1 \cup V_2 = V$ alırsak, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ olup her alt grubunda dörder eleman olan ikiye ayrılabilir bir tam çizgedir. Bu çizge $K_{4,4}$ ile gösterilir.

$r \geq 2$ için $K_{r,r}$ tam İkiye ayrılabilir çizge optimal bağlantılılığa sahiptir. Çünkü

$$\mathcal{K}(K_{r,r}) = r$$

ve

$$\frac{2m}{n} = \frac{2r^2}{(r+r)} = r \text{ dir.}$$

Böylece $\boldsymbol{\mathcal{K}(K_{r,r}) = \frac{2m}{n}}$ eşitliği sağlanmış olur. Bu ispata göre Şekil – 5.2.2 ile verilen $K_{4,4}$ çizgesi optimaldır.

Böyle bir ilişkinin optimal olmasının okul yapısı içinde bir hayli önemli olduğu kanısındayız. Bu ilişki sisteminin optimal bağlantılığı sınıf temsilcileriyle okul yönetimi, disiplin ve onur kurulu arasındaki ilişkinin kopma olmadan ilerlemesi mümkündür. Bu örnekte ele aldığımız bu ilişki sisteminin okul networkunun küçük bir parçası olduğu aşikârdır. $K_{4,4}$ çizgesine ait tüm köşelerin okulun genel networkunda baksa bağlantıları da vardır. Bu köşeler özel rollere sahip olan bireyleri temsil ettiğinden bilgi akışının aktif ve önemli birer parçasıdırlar. Genel network bakış açısıyla düşündüğümüzde bu bireylerin bulundukları networkun yıldız pozisyonlarında olduğunu söyleyebiliriz. Bu yıldızlar görevlendirme gereği oluşan resmi yıldızlardır.

6 SONUÇ VE ÖNERİLER

Çalışmamıza *Eğitim ve Eğitim Sisteminin*, dolayısıyla *Eğitim Yönetiminin* önemini değerlendirerek başladık. Eğitim yönetiminde klasik yöntemler dışında çizge kuramı ve network analizinin ne gibi uygulamalarının yapılabileceğini düşündük.

Bununla ilgili öncelikle çizge kuramı ve network analizinde daha önceden yapılmış çalışmaları araştırdık. Araştırmalarımızın sonucunda sosyologlar tarafından on yıllardır kullanılan network kavramının günümüzde çok farklı iş kollarında uygulama alanları edinmiş olduğunu fark ettik.

Bu çalışmaya göre çizge kuramı ve çizge kuramının bir dalı olan network analizi eğitim sisteminde iki türlü yer bulabilir. Bunlardan birincisi alınacak kararların "yönlü işaretli çizgeler" kullanılarak değerlendirilmesidir. İkincisi ise okula ait networkunu oluşturularak ilişkileri yorumlayarak yönetime katkıda bulunmaktır.

Tezimizin 5.1 numaralı bölümünde Şekil – 5.1.3 yönlü işaretli çizgesi ile varsayımlara dayandırarak oluşturduğumuz örneğimizin analizinde bazı kararların beklenmedik sonuçlara sebep olabileceğini gördük. Tek bir okul ele alınarak, yakın çevrenin ekonomik düzeyi, öğrenci sayısı, öğrenim ücreti, öğretmen kalitesi, mezunlar cemiyetinin etkinliği, marka öğretmen yaratımı, okulun fiziksel yapısı, teknik donanımı, reklam anlayışı, öğretmen sirkülâsyonu, sanatsal üretkenliği, yabancı dil eğitim kalitesi, matematik ve fen bilimleri eğitim düzeyi, sosyal bilimlere verilen önem, spor etkinlik düzeyi, sosyal sorumluluk projeleri, uluslararası etkileşim ve bu gibi olguları çizgenin köşeleri olarak seçilip yönlü işaretli çizgelerle analiz edilirse çok ilginç ve şaşırtıcı sonuçlar elde edileceği kanısındayız.[*]Çalışmamızın 4 numaralı bölümünde küçük boyutlu networklardan örneklere yer verilmiştir. Ancak bu networklar genişletilerek, okul networku çıkarılırsa yöneticiler için, pek çok karar aşamasında yardımcı bir araç olacaktır. Bir yöneticinin çok iyi bir lider olduğunu düşündüğü bir bölüm başkanı network haritasında bambaşka bir konumda bulunabilir. Benzer şekilde pasif görünen bir öğretmenin aslında bilgi akışının önemli bir parçası olduğu ortaya çıkabilir. İzole olmuş bir çalışana ulaşma yolları bulunabilir.

[*] *"Yönlü İşaretli Çizgeler Eğitim Sistemine Nasıl Uygulanabilir?" Yaşadıkça Eğitim 118. Sayı*

Böylelikle okullarda yönetimin hangi öğretmen ile hangi görevlerde çalışması ve/veya çalışmaması gerektiği konusunda fikir sağlayacaktır.

Okulun networku oluşturularak öğretmenlerin bireysel durumlarının dışında bütünün merkezlik, yoğunluk, bağlantılılık gibi yapısal durumları da analiz edilebilir. Networkun merkezil olup olmadığı, eğer merkezilse bu merkezin neresi olduğu ve bu merkezden yayılan fikirlerin kuruma ve/veya gelişmelere uygun olup olmadığı gibi konuların bilinmesinin yönetime ışık tutacağı kanısındayız.

Bir okulun çalışanlar networkunu oluşturmak için küçük bir anket uygulaması yapılabilir. Bu ankette verilen cevaplar ve insan kaynakları biriminin çalışanlar hakkında sahip olduğu, okuldaki kıdemi, meslekteki tecrübesi, alanındaki eğitim durumu gibi bilgiler (bu bilgiler köşelere boyut, renk gibi özellikler atanarak network haritasında temsil edilebilinir) birlikte değerlendirilerek oluşturulacak bir network haritası sağlıklı veriler içerecektir.

Çizgelerin temel oluşturduğu Sosyal Ağ Analizi aslında sosyal yapıları araştırıp tanımanın bir yoludur ve gün geçtikçe önemi artmaktadır. Özetlemek gerekirse, bu tip incelemelerin özünde, incelenen sistemdeki bireylerin özelliklerinin yanı sıra, üyeler arasındaki ilişki ve etkileşimler, veriler arasındaki bağıntılar ön plana çıkmaktadır. Böylelikle sistemin gözle görülür bir modeli elde edilmektedir. Bu modellerin analizinin matematiksel dayanağı olduğundan elde ettiğimiz sonuçlar, gerçekçi ve somut sonuçlar olacaktır.

7 KAYNAKÇA

[1]. Ian Anderson, A First Course in Discrete Mathematics, Springer 2nd printing 2002

[2]. Jonathan Gros, Jay Yellen, Graph Theory and Its Applications, CRC Press, 1999

[3]. Terrence E. Deal, Daria Cook Waetjen, Making Sense of Social Networks in Schools, Corwinn Press and American Association of School Adminstrators, A Joint Publication, 2009

[4]. Stanley Wasserman, Katherine Faust, Social Network Analysis Methods and Applications, Cambridge University Press, 19th printing, 2009

[5]. W.D. Wallis, A beginner's Guide to Discrete Mathematics, Birkhauser-Boston, 2003

[6]. Matthew O. Jackson, Social and Economic Networks, Princeton University Press, February 2008

[7]. Joan M. Aldous, Robin J. Wilson, Graphs and Applications, An Introductory Approach, Springer, 7th printing, 2008

[8]. Nicholas Christakis, BIGTHINK, http://www.youtube.com/watch?v=wadBvDPeE4E

[9]. N.A. Christakis and J.H. Fowler, "The Spread of Obesity in a Large Social Network Over 32 Years," New England Journal of Medicine 357(4): 370-379 (July 2007)

[10]. K.I. Goh, M. E. Cusick, D. Valle, B. Childs, M. Vidal, A.L. Barabasi, The Human Disease Network, http://www.barabasilab.com/

[11]. Albert-László Barabási, Ph.D.,Network Medicine — From Obesity to the "Diseasome", http://www.barabasilab.com/

[12]. J.H. Fowler and N.A. Christakis, "The Dynamic Spread of Happiness in a Large Social Network: Longitudinal Analysis Over 20 Years in the Framingham Heart Study," *British Medical Journal* 337: a2338 (December 2008), http://christakis.med.harvard.edu/

[13]. Prof. Dr. Erol Balkanay, Özlem Şenol, Yönlü İşaretli Çizgeler Eğitim Sistemine Nasıl Uygulanabilir?, Yaşadıkça Eğitim 118. Sayı, sf:10-14

[14]. Douglas B. West, Introduction To Graph Theory, Prentice Hall, 2001