

T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜŞÜK MANYETİK ALANA SAHİP NÖTRON YILDIZLARI
ÇEVRESİNDEKİ DİSKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Onur ÇATMABACAK

1109151001

Anabilim Dalı: Fizik

Programı: Fizik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. M. Hakan ERKUT

HAZİRAN 2014

T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜŞÜK MANYETİK ALANA SAHİP NÖTRON YILDIZLARI
ÇEVRESİNDEKİ DİSKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Onur ÇATMABACAK

1109151001

Anabilim Dalı: Fizik

Programı: Fizik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. M. Hakan ERKUT

HAZİRAN 2014

T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜŞÜK MANYETİK ALANA SAHİP NÖTRON YILDIZLARI
ÇEVRESİNDEKİ DİSKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Onur ÇATMABACAK

1109151001

Anabilim Dalı: Fizik

Programı: Fizik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. M. Hakan ERKUT

HAZİRAN 2014

ÖNSÖZ

4 senedir özverisi, sabrı, bilimsel ve mental rehberliği ile bir yol gösterici ve çalışma arkadaşından çok daha fazlası olan ve bugünlere gelebilmemde en büyük rolü oynayan danışmanım Doç. Dr. Mehmet Hakan ERKUT'a, değerli yorumları, tezim üzerindeki düzeltmeleri ve benim için ayırdıkları vakit için tez jürimin asıl üyeleri Yrd. Doç. Dr. Emre IŞIK ve Prof. Dr. Mehmet Ali ALPAR'a ve yedek üyesi Yrd. Doç. Dr. Gülce ÖĐRÜ YILDIZ'a, kardeşim ve yeni çalışma arkadaşım Önder ÇATMABACAK'a ve adını sayamadığım / saymayı unuttuğum sayılı insanlara ne kadar teşekkür etsem azdır.

Haziran 2014

Onur ÇATMABACAK

İçindekiler

Sembol Listesi	iii
Figür Listesi	viii
Tablo Listesi	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
1 GİRİŞ	1
2 YIĞIŞMA DİSKİNİN İNCELENMESİ	11
2.1 Tipik Disk Parametrelerini Kullanarak kHz QPO Frekanslarının Elde Edilmesi	11
2.2 Genel Disk Çözümlerinin Elde Edilmesi	14
2.3 Paralel İz Probleminin Açıklanması	23
3 SONUÇLAR VE TARTIŞMA	32
A KORUNUM EŞİTLİKLERİ	34
A.1 Kütle Korunumu	34
A.2 Momentum Korunumu	35
A.3 Enerji Korunumu	38
B KORUNUM DENKLEMLERİNİN BOYUTSUZLAŞTIRILMASI	41
B.1 Navier-Stokes Denkleminin Boyutsuzlaştırılması	42
B.2 Süreklilik Eşitliğinin Boyutsuzlaştırılması	43
B.3 Enerji Denkleminin Boyutsuzlaştırılması	44
C DİSK ÇÖZÜMLERİ	46
C.1 C Bölgesi Çözümü	50
C.2 B Bölgesi Çözümü	51

C.3 A Bölgesi Çözümü	53
C.4 Sınır Bölgesi Çözümü	55
C.5 GPD ve RPD Bölgeler İçin İç Disk Çözümlerinin Elde Edilmesi	61
Kaynakça	62

Sembol Listesi

Latin Sembolleri

\dot{M}	: Yığılma diskinin kütle aktarım hızı
\dot{m}	: Boyutsuz kütle aktarım hızı
B_*	: Nötron yıldızının manyetik alanı
C	: Açısal momentum transferi verimlilik katsayısı (boyutsuz)
c	: Işık hızı
c_s	: Ses hızı
d	: Nötron yıldızı kaynaklarının uzaklığı
F	: Işınım akısı
f	: Nötron yıldızı kaynaklarının X-ışın akısı
G	: Kütleçekimsel sabit
H	: Disk yarı kalınlığı
L_x	: X-ışın ışıınım gücü
M_*	: Nötron yıldızının kütlesi
M_\odot	: Güneş kütlesi
M_A	: Bir mol gazın kütlesi
n	: Mol
P	: Düşey yönde integre edilmiş basınç
p	: Basınç
Q_v	: Birim hacimdeki viskoz enerji kayıp oranı

R	: Genişletilmiş radyal koordinat
r	: Silindirik koordinatlarda radyal yön bileşeni
R_*	: Nötron yıldızının yarıçapı
r_A	: Alfvén yarıçapı
r_{co}	: Yığılma diskinin, nötron yıldızı ile aynı hızda döndüğü disk yarıçapı
r_{in}	: Dskın tipik en iç yarıçap değeri
S_a	: X-ışın renk-renk diyagramının konum parametresi
S_a	: X-ışın renk-renk diyagramının konum parametresi
T	: Sıcaklığı
v_r	: Radyal sürüklenme hızı
x	: Boyutsuz fit sabiti
y	: Boyutsuz fit sabiti
z	: Silindirik koordinatlarda düşey yön bileşeni

Kısaltmalar

GPD	: Gaz basıncı baskın
QPO	: Kuazi periyodik salınım
RPD	: Radyasyon basıncı baskın

Yunan Sembolleri

α	: Dış diskteki viskozite katsayısı
α_{BL}	: Sınır bölgesi boyutsuz vizkosite katsayısı
β_g	: Gaz basıncının radyasyon basıncına oranı
β_r	: Radyasyon basıncının gaz basıncına oranı
ϵ	: Disk kalınlığı parametresi
ϵ	: Disk yarı kalınlığının diskin en iç yarıçapına oranı
Γ	: Kütle çekimsel potansiyel

γ	: Adiyatik indeks
κ	: Yığışma diskinin radyal episiklik frekansı
κ_{es}	: Elektron saçılma opaklığı
κ_{ff}	: Serbest-serbest opaklık
μ	: Boyutsuz katsayı
ν	: Vizkosite
ν_1	: Alt kuazi periyodik salınım frekansı
ν_2	: Üst kuazi periyodik salınım frekansı
ν_b	: Milisaniye pulsarlarının patlama salınım frekansı
ν_*	: Milisaniye pulsarlarının dönme frekansı
ν_{QPO}	: Kuazi periyodik salınım frekansı
Ω	: Yığışma diskinin açısal dönme frekansı
ω	: En iç diskteki maddenin açısal dönme hızının Kepler dönme hızına oranı
ω_*	: Nötron yıldızının dönme hızının en iç diskteki Kepler hızına oranı
Ω_K	: Kepler açısal dönme frekansı
Φ	: Silindirik koordinatlarda açısal yön bileşeni
ρ	: Hacimsel kütle yoğunluğu
Σ	: Yüzeysel madde yoğunluğu
σ_{SB}	: Stefan-Boltzmann sabiti
τ	: Gerçek emilime göre optik derinlik

Alt İndisler

0	: Durağan durum
Φ	: Açısal yön bileşeni
<i>gas</i>	: Gaz basıncının baskın olduğu durum
<i>in</i>	: İç disk

<i>out</i>	: Dış disk
<i>r</i>	: Radyal yön bileşeni
<i>rad</i>	: Radyasyon basıncının baskın olduğu durum
<i>t</i>	: Tipik değer
<i>z</i>	: Düşey yön bileşeni

Şekil Listesi

1.1	Birincil yıldızın (nötron yıldızı) üstüne ikincil yıldızdan madde aktarımı ile disk oluşumu.	3
1.2	Kilohertz QPO gözlemlenmiş NSLMXB kaynakları için kHz QPO - parlaklık ilişkisi.	4
1.3	4U 1608-52 kaynağı için kHz QPO - X-ışın akısı grafiği.	5
1.4	4U 1608-52 kaynağı için 2-16 keV enerji aralığındaki fotonların X-ışın renk-renk diyagramı pozisyonunun izlediği yol ve frekans k.g. X-ışın renk-renk diyagramı pozisyonu ilişkisi	6
1.5	Mendez&Belloni-2007'de Tablo 1'de yer alan kaynakların fark frekanslarının dönme frekansına oranının dönme frekansıyla olan ilişkisi.	7
2.1	GPD genel durağan durum disk çözümleri örnekleri.	20
2.2	RPD genel durağan durum disk çözümleri örnekleri (1. Tip).	21
2.3	RPD genel durağan durum disk çözümleri örnekleri (2. Tip).	22
2.4	Radyal episiklik frekans çözümündeki serbest parametrelerin alt kHz QPO frekansları üzerindeki etkisi.	23
2.5	4U 1608-52, 4U 1636-54, 4U 1728-34 ve Aql X-1 nötron yıldızı kaynaklarından gözlemlenmiş kHz QPO - X-ışın akısı ilişkisi.	24
2.6	Şekil 2.5 üzerinden alınan verilerin teorik modelimiz çerçevesinde yeniden oluşturulması.	26
2.7	kHz QPO frekanslarını tekrardan üretmek için salındırılan disk kalınlık parametresinin kütle aktarım hızı ile değişimi.	28
2.8	4 kaynağın kHz QPO - S_a ilişkisi.	29
2.9	Şekil 2.8 verilerinin modelimiz çerçevesinde simülasyonu.	31

Tablo Listesi

2.1	GPD ve RPD rejimlerinde diskteki temel parametrelerin tipik değerleri.	13
2.2	$1.4M_{\odot}$, 10 km yarıçaplı örnek bir yıldız için tipik değer parametreleri üzerinden yapılan taramada kHz QPO frekanslarının elde edilebildiği frekans aralıkları. . . .	14

ÖZET

Bu çalışmanın konusu düşük manyetik alana sahip nötron yıldızlarının çevresindeki disklerin incelenmesidir. Hedef, düşük manyetik alana sahip nötron yıldızlarının çevresindeki disklerin çalışılması ile bu tip sistemlerin gözlemlerine fiziksel olarak tutarlı bir model çerçevesinde muhtemel cevaplar üretmektir. Düşük manyetik alana sahip düşük kütleli nötron yıldızı çiftlerinin çevresindeki disklerin incelenmesi, yüksek yoğunluktaki yıldız fiziğinin anlaşılması açısından önem taşımaktadır. Belirli varsayımlar ve fiziksel sınırlamalar altında, yığılma diskleri gaz basıncının veya radyasyon basıncının baskın olduğu iki farklı rejimde incelenebilir. Bu tezde 70'li yılların başında yapılan öncü çalışmalarda elde edilen durağan durum disk çözümleri en iç diskteki Kepler olmayan bir sınır tabakasının varlığı hesaba katılarak kullanılmış ve birleşik disk çözümleri elde edilmiştir. Birleşik disk çözümlerinde ele alınan iç disk sınır tabakaları uygun fiziksel koşullar altında ve Sınır Bölgesi Modeli (Boundary Region Model, BRM) [Alpar ve Psaltis, 2008, Erkut v.d., 2008] çerçevesinde nötron yıldızı kaynaklarında gözlemlenen kHz kuazi-periyodik salınım (quasi-periodic oscillation, QPO) frekanslarının X-ışın akısı ile olan korelasyonunu açıklamak için kullanılmıştır.

Çalışma nötron yıldızı düşük kütleli X-ışın çiftlerindeki (Neutron star low-mass X-ray binaries, NSLMXBs) kHz kuazi periyodik salınım (Quasi-Periodic Oscillation, QPO) frekansları ile X-ışın akısı arasındaki büyük zaman ölçeklerinde gözlemlenen paralel izlerin, Sınır Bölgesi Modeli kapsamında belirli varsayımlar ve fiziksel sınırlandırmalar altında açıklanabileceğini göstermiştir. Bu tez çalışmasında elde edilen veriler ileride incelenen kaynakların kütle, yarıçap ve manyetik alan değerlerinin tahmini hakkında yapılacak çalışmaya temel oluşturacaktır.

Anahtar kelimeler: nötron yıldızı, yığılma diski, Sınır Bölgesi Modeli.

ABSTRACT

This study deals with accretion disks around weakly magnetized neutron stars. In this work we aim to come up with possible explanations for observational phenomena within a physically plausible model by studying accretion disks around weakly magnetized neutron stars.

Investigating accretion disks around weakly magnetized neutron stars is important for studying and understanding the physics of neutron stars. Under reasonable assumptions and physical constraints, accretion disks can be examined using two different regimes: Gas pressure dominated or radiation pressure dominated. In this thesis, zeroth order disk solutions which were also obtained in the early 70's [Shakura ve Sunyaev, 1973] are employed while taking into account the existence of a non-Keplerian boundary layer in the innermost region of the disk and unified disk solutions are found. Boundary layers which define the innermost disk boundary condition for physically plausible unified disk solutions are used to explain the correlation between kHz quasi-periodic oscillation (QPO) frequencies observed in neutron star low-mass X-ray binaries and the X-ray flux in accordance with the Boundary Region Model (BRM) [Alpar ve Psaltis, 2008, Erkut v.d., 2008].

This study has revealed that the parallel tracks phenomena observed with long timescales for the correlation between kHz QPO frequencies and the X-ray flux of the neutron stars in low-mass X-ray binaries can be explained within the frame of the BRM under plausible assumptions and self-consistent physical constraints. The model data obtained in this thesis can be used in a subsequent work to determine the masses, radii and magnetic field strengths of the neutron stars in LMXB systems we studied.

Key Words: neutron stars, accretion disks, Boundary Region Model.

Bölüm 1

GİRİŞ

Anakol evresindeki yıldızlar kütleçekimsel çökmeyi dengeleyebilmek için çekirdeklerinde nükleer tepkime yolu ile hidrojen yakarak, ürettikleri toplam termal basınç sayesinde iç ve dış tabakalarını denge durumunda tutarlar. Çekirdeklerindeki hidrojenin büyük bir bölümünü tükettikleri zaman, helyum yakarak karbon üretimine başlarlar ve Hertzsprung-Russell diagramında anakol evresinden kırmızı dev evresine geçerler. Kütleleri yaklaşık olarak 8 Güneş kütlelerinden (M_{\odot}) büyük olan yıldızlar için anakoldan ayrılmak için gereken süre yaklaşık olarak $10^7 - 10^8$ sene iken daha düşük kütleli yıldızlar için 10^{10} sene civarındadır. Kısacası büyük kütleli yıldızların ömürleri kısa olur. Bu süreçte çekirdeğe yakın dış bölgelerdeki hidrojen ve helyumu da nükleer tepkimelerle yakmaya başlayan yıldızın iç ve dış tabakaları arasında basınç gradientleri büyümeye başlar ve yıldız şişer. Düşük kütleli yıldızlarda helyumun tamamı karbona dönüştürüldüğü zaman yıldız karbonu yakabilecek merkez sıcaklıklara erişemediği için nükleer tepkimeler ile yanmakta olan çekirdeğe yakın dış katmanların radyasyon basıncı etkisiyle yıldız zarfını (en dış tabakalarını) uzaya atar (gezegen nebulası). Büyük kütleli yıldızlarda ise 10^9 K civarında artık karbondan daha ağır elementler üretilmeye başlanır ve yıldız tekrar şişer. Bu süreç çekirdekte demir elementinin üretimine kadar devam eder. En son safhada çekirdeğin üzerine çöken dış tabakalar çekirdeğe çarparak büyük bir şok dalgası oluştururlar ve süpernova patlaması ile yıldız kendini uzaya dağıtır.

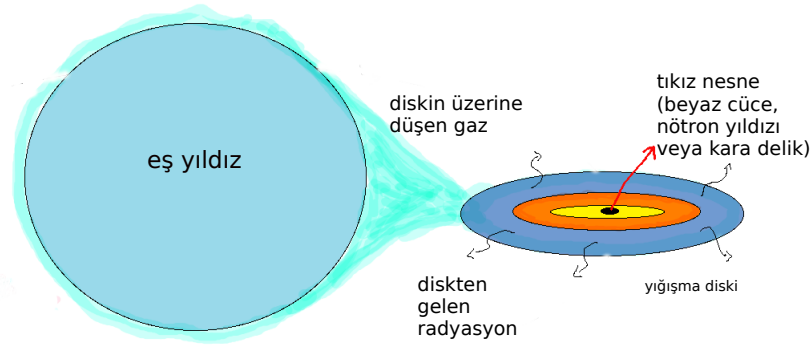
Yıldızın kalan çekirdek kısmının kütleleri $3.0 M_{\odot}$ 'nin üstünde ise kara delik evresine kadar çökmeye devam edecektir. Eğer çekirdek kütleleri $M \leq 3.0M_{\odot}$ limiti dahilinde ise; yüksek basınç altında çekirdekteki protonlar elektronlar ile tepkimeye girerek ortamı nötronca zengin hale getirirler. Çekirdek kütleçekimsel çökmeyi, Pauli dışlama ilkesine göre dejenere nötron basıncı ile dengeleyen bir nötron yıldızı olmuştur artık. Nötron yıldızı yaşamına izole bir yıldız olarak başlamış ise sahip olduğu termal enerjisi ve dönme kinetik enerjisinden sağladığı enerji ile elektromanyetik tayfin farklı dalga boylarında ışımaya yaparak soğur ve yavaşlar. Eğer nötron yıldızı bir anakol ya da geç anakol yıldızı ile ikili bir sistem oluşturmuş ve üzerine komşu yıldızdan kütle yığıştırıyor

ise, nötron yıldızı yaşamına yüksek enerjilerde (X-ışını, Gama ışını) ışımaya yapan aktif bir cisim olarak devam eder. Bir beyaz cüce ile bir geç tip normal yıldızın oluşturduğu ikili sistemde beyaz cücenin üzerine kütle aktarımı ile madde birikmesi sonucu, beyaz cüce yıldızın kütlesinin Chandrasekhar kritik kütle limitini aşması mümkündür. Kritik kütle aşılması ile gerçekleşen Tip 1 süpernova olarak da bilinen bir patlama sonucu, beyaz cüce nötron yıldızına dönüşebilir.

Bir nötron yıldızı veya karadelik içeren yıldız çiftleri kendi aralarında yoğun yıldız madde aktaran normal yıldızın kütlesine göre 3'e ayrılırlar: Yüksek kütleli X-ışın çiftleri (High Mass X-ray Binaries, HMXBs), orta kütleli X-ışın çiftleri (Intermediate Mass X-ray Binaries, IMXBs) ve düşük kütleli X-ışın çiftleri (Low Mass X-ray Binaries, LMXBs). Yüksek kütleli X-ışın çiftleri genç sistemler olup, O veya B sınıfında bir yıldızla bir yoğun yıldızdan (kara delik veya nötron yıldızı) oluşur. Kütle aktarımı ikincil yıldızdan yoğun cisme yıldız rüzgarları ile gerçekleşir. Orta kütleli X-ışın çiftlerinde ikincil yıldız bir önceki sisteme göre daha düşük kütleli bir yıldızdır ($\sim 3.0M_{\odot}$) ve kütle aktarımı Roche lobunu doldurması ve yıldız rüzgarları ile gerçekleşir. Düşük kütleli X-ışın çiftlerinde yoğun yıldız (kara delik veya nötron yıldızı) madde aktaran normal yıldız düşük kütleli ($\sim 1.0M_{\odot}$) olup çoğunlukla G, K, M tayfsal sınıftan bir yıldızdır [Ghosh, 2007].

Düşük kütleli X-ışın çiftlerinde anakol veya geç anakol evresinde olan ikincil yıldız yukarıda bahsedildiği üzere yaşamının sonraki aşamalarında anakoldan ayrılmaya başlaması ile birlikte kırmızı dev evresine geçer. Bu evrede yıldız şişerek Roche lobunu doldurur. İkincil yıldızın dış katmanlarındaki gazın bir kısmı, iki yıldız arasında kütle çekimsel kuvvetlerin dengelendiği Lagrange noktasından birincil yıldızın (nötron yıldızı veya karadelik) üstüne akmaya başlar.

Şekil 1.1'de gösterildiği üzere Roche lobunu doldurarak Lagrange noktasından birincil yıldız üzerine akan gaz yoğun yıldızın kütle çekimi altında girdiği yörüngelerde viskozite sayesinde sahip olduğu açıl momentumunu dış yörüngelere taşıması, böylece yoğun cisme doğru akması sonucu bir yığılma diski oluşturur. İkincil yıldızdan aktarılan ve Lagrange noktasından geçen maddenin disk ile temas noktasında parlak bir bölge oluşur. Dış diskteki bu bölge yüksek madde akış oranlarında disk parlaklığının yüksek olması sebebiyle göreceli belirgin olmamakla birlikte düşük madde aktarımı söz konusu olduğunda disk parlaklığı göreceli olarak daha az olacağından oldukça belirgindir.



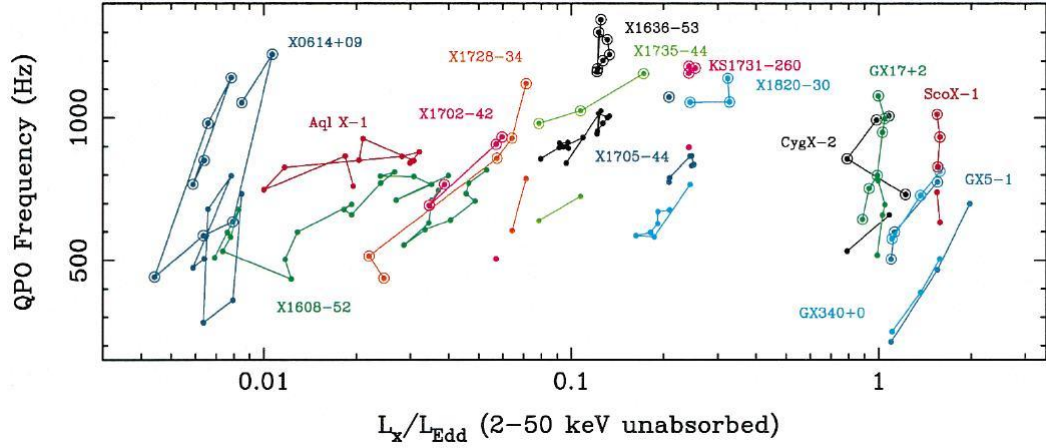
Şekil 1.1: Birincil yıldızın (nötron yıldızı) üstüne ikincil yıldızdan madde aktarımı ile disk oluşumu.

Kütle aktarım disklerinin fiziğinin açıklanmasında öncü çalışmalara 1960'ların sonları 1970'lerin başlarında rastlanmaktadır [Zel'dovich ve Shakura, 1969, Pringle ve Rees, 1972, Shakura ve Sunyaev, 1973]. Çoğu durumda kütle aktarım disk kalınlığının disk boyunca her yörüngede yoğun cisme olan radyal uzaklığa göre yeterince küçük olduğu varsayılır (İnce disk yaklaşımı). Böylece disk kalınlığı boyunca ortalama üzerinden diskin 2 boyutta çalışılması ve anlaşılması daha kolay olur [Frank v.d., 2002]. Disk fiziğinin detaylı çalışılması; nötron yıldızının yüksek kütleçekimi altında, zaman ölçeği milisaniye mertebesinde olan içdiskteki maddenin dinamiğinin yıldızın karakteristik özellikleri (kütle, yarıçap, manyetik alan vs ...) hakkında bilgi taşıması sebebiyle önemlidir.

1996 yılında Rossi X-ışın Zamanlama Kaşifi (Rossi X-ray Timing Explorer, RXTE) uydusunun uzaya fırlatılması ile milisaniye zaman ölçeğindeki kuazi-periyodik salınımlar (Quasi-Periodic Oscillations, QPOs) [van der Klis v.d., 1996a] ve patlama salınımları (burst oscillations) olarak bilinen X-ışın patlamaları sırasında ortaya çıkan atmaların (pulsations) keşfi [Strohmayer v.d., 1996] mümkün oldu. Patlama salınımları nötron yıldızı düşük kütleli X-ışın çiftlerindeki X-ışın patlamalarının yükselme ve kuyruk kısımlarında görülen kısa ömürlü neredeyse birebir uyumlu atmalardır [Mendez ve Belloni, 2007]. Kütle aktarımı yapan milisaniye pulsarlarının keşfi [Wijnands ve van der Klis, 1998b] ile patlama salınımlarının ölçülmesi daha da bir önem kazandı. Bu tipte keşfedilen ilk pulsar olan SAX J1808.4-3658'in patlama salınımlarının [Wijnands ve van der Klis, 2003] pulsarın ölçülen dönme frekansı ile aynı olduğunun görülmesi, nötron yıldızlarının dönme frekanslarının patlama salınımlarının frekanslarından öğrenilmesini sağladı. Düşük kütleli nötron yıldızı X-ışın çiftlerinin güç tayfında kHz frekans aralığında beliren QPO'lar zaman bağımlı ve güç tayfındaki diğer yapılara göre göreceli olarak dar ve belirgin yapılardır. Bu salınımların frekans aralığının nötron yıldızı çevresindeki yığışma diskinin iç bölgesindeki maddenin, yüksek kütleçekimsel

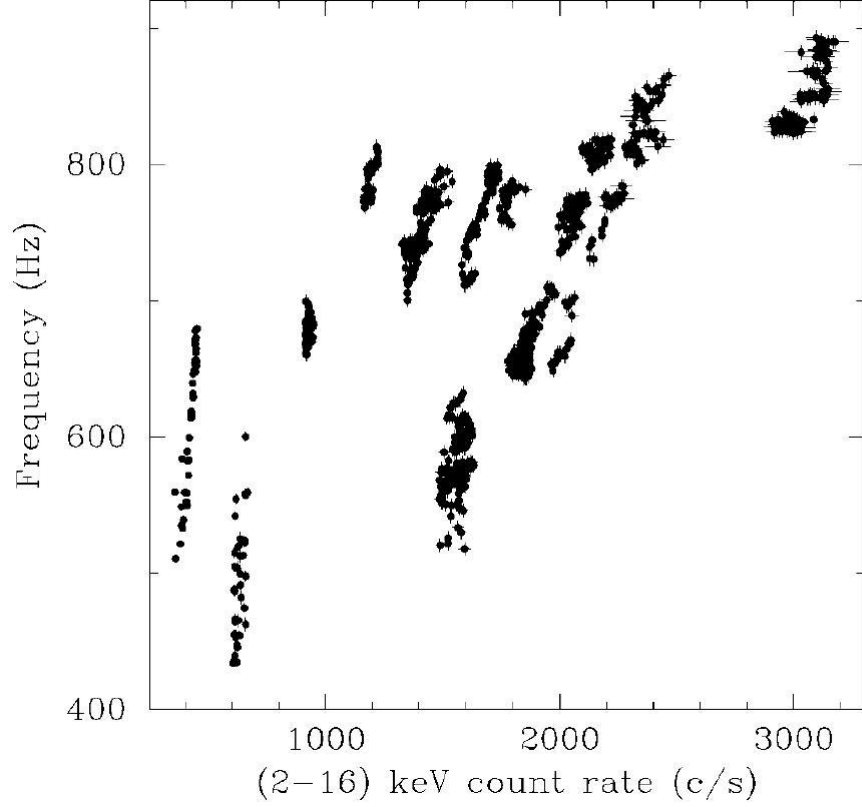
alan altında milisaniye ölçeğindeki dönme hareketi ile belirlendiği düşünülmektedir [van der Klis, 2000].

Nötron yıldızı LMXB'lerinde (NSLMXBs) 2-50 keV enerji bandında ölçülen X-ışın parlaklıklarında bir kaynaktan diğerine 100 kata kadar farklar olmasına rağmen, bugüne kadar RXTE ile kHz QPO frekansları ölçülmüş 19 kaynakta yaklaşık 200-1300 Hz aralığında yüksek frekanslı QPO'lara rastlanmıştır. Çoğunlukla çiftler halinde gözlemlenen kHz QPO frekanslarının düşük olanı ν_1 ve yüksek olanı ν_2 oldukça geniş bir frekans aralığında varlık gösterirler.



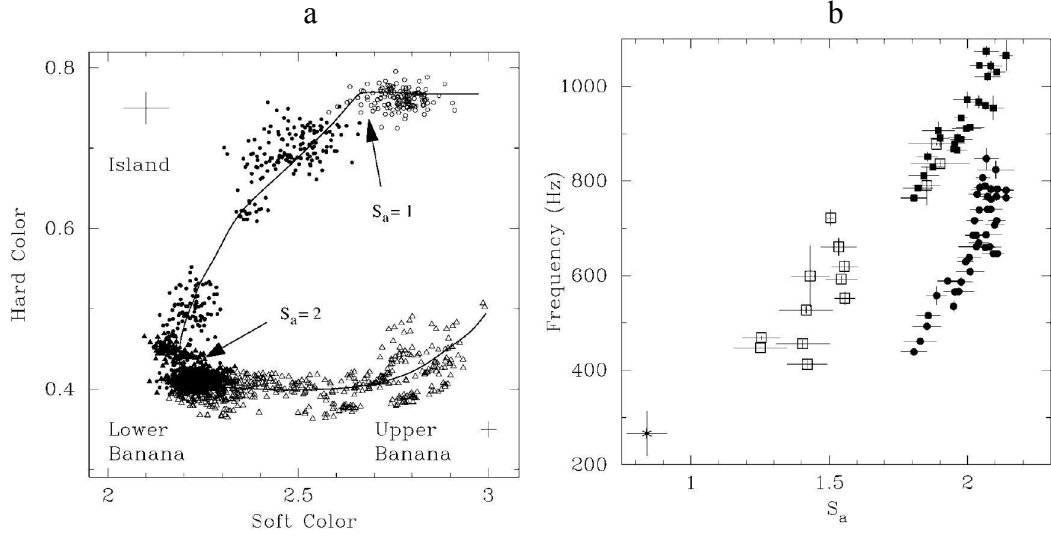
Şekil 1.2: Kiloherz QPO gözlemlenmiş NSLMXB kaynakları için kHz QPO - parlaklık ilişkisi. Kiloherz QPO-parlaklık korelasyonları küçük zaman ölçeklerinde (birkaç saat ile birkaç gün) doğrusal orantı göstermekle birlikte aynı kaynak veya kaynaklar arası gözlemler ele alındığında herhangi bir korelasyon görülememektedir [Ford v.d., 2000].

Örneğin 4U 0614+09 kaynağının yüksek QPO frekansı, ν_2 , 449 ± 20 Hz ile 1339 ± 4 Hz aralığındadır [van Straaten v.d., 2000]. Hektohertz mertebesinde salınım yapan karadelik kaynaklarında ν_1 ve ν_2 arasında görülen yaklaşık 3:2 oranının aksine NSLMXB'lerde böyle bir özel oran gözlemlenmemiştir. Bununla birlikte kHz QPO gösteren NSLMXB'ler de QPO gösteren karadelik LMXB'lerine göre sayıca fazla ve çeşitlidir. Çoğunluğu sürekli kaynaklar olmakla birlikte 4U 1608-52 [Berger v.d., 1996] [Mendez v.d., 1998], Aql X-1 [Zhang v.d., 1998a] ve XTE J2123-058 [Homan v.d., 1999] [Tomsick v.d., 1999] gibi sınır kaynaklarına da rastlanmaktadır. Z ve Atoll kaynaklar olmak üzere tayfsal özelliklerine göre iki sınıfa ayrılan NSLMXB'lerde, Z kaynaklarında kHz QPO'lar güç tayfında daha geniştir ve küçük rms (root mean square, karelerinin ortalama karekökü) kesirlerinde görülmelerine ve kütle aktarım oranlarında 100 kata varan fark olmasına (örneğin 4U 1728-34 [Strohmayer v.d., 1996], 4U 1608-52 [Mendez v.d., 1999]) rağmen bu farklı tipte kaynakların kHz QPO - parlaklık ilişkileri hemen hemen aynıdır [Ford v.d., 2000]. Bu da göstermektedir ki X-ışın parlaklığı tek başına QPO salınımlarını belirlememektedir.



Şekil 1.3: 4U 1608-52 kaynağı için kHz QPO - X-ışın akısı grafiği.
 4U 1608-52 kaynağı için düşük kHz QPO frekansı k.g. 2-16 keV enerji bandında X-ışın foton akısı arasındaki ilişki. Sadece çift olarak gözlemlenen QPO datalarının düşük frekansları kullanılmıştır. [Mendez v.d., 1999]

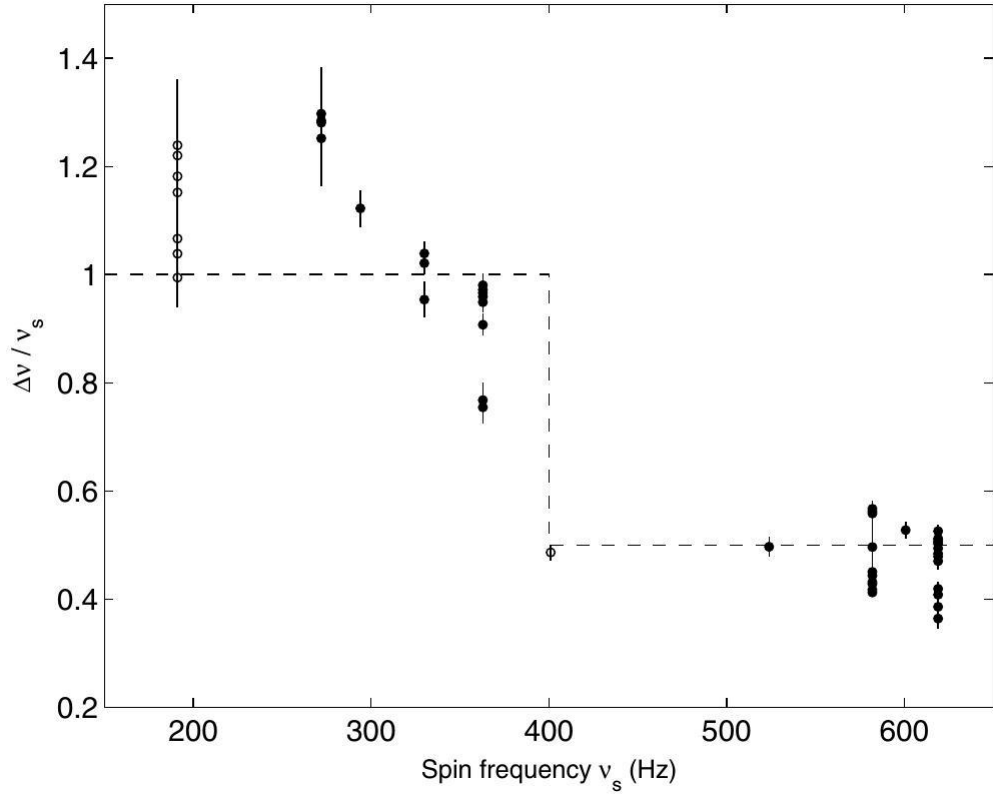
Şekil 1.2 ve Şekil 1.3’de de görüldüğü üzere kHz QPO frekans değerleri yaklaşık aynı değerlerde gezinirken, X-ışın parlaklığı çok geniş bir aralıkta değişim göstermektedir. Bütün kaynakların gözlemlenen en yüksek üst kHz QPO frekansları 1000-1300 Hz aralığında değişmektedir. Bu gözlemsel özelliğe sebep olabilecek nedenler arasında kararlı en iç yörüngedeki maddenin dönme frekanslarının kHz QPO frekanslarını sınırlayabileceği fikri ön plana çıkmaktadır [Zhang v.d., 1997]. Üst kHz QPO frekanslarına benzer bir şekilde alt frekansların da belli bir minimum değer ile sınırlandığı görülmektedir. Nötron yıldızı LMXB’lerinde yeterince küçük zaman ölçeklerinde (birkaç saat) görülen $\nu_{QPO} - L_x$ korelasyonu daha büyük zaman ölçeklerinde (günler) bozulmakta ve $\nu_{QPO} - L_x$ düzleminde paralel izler oluşturmaktadır. Böyle paralel izler hem kaynak başına hem de farklı parlaklık mertebelerindeki pek çok kaynak için gözlemlenmiştir [Ford v.d., 2000]. Kiloherz QPO’ları üreten fiziksel mekanizmanın parametreleri benzer aralıklarda frekans üretecek şekilde değişiyor olabilir. Ayrıca frekansların X-ışın parlaklığının yanısıra nötron yıldızının dönme frekansı, kütlesi, yarıçapı ve manyetik alanı gibi niceliklerin en az birine daha bağlı olması da geniş zaman ölçeklerinde gözlemlenen davranışa yol açabilir.



Şekil 1.4: 4U 1608-52 kaynağı için 2-16 keV enerji aralığındaki fotonların X-ışın renk-renk diyagramı pozisyonunun izlediği yol ve frekans k.g. X-ışın renk-renk diyagramı pozisyonu ilişkisi
a) Orta ada ve aşağı muz bölgesinden orta ada ve yukarı muz bölgesine kadar görülen içi dolu noktalarla belirtilmiş datalar kHz QPO frekanslarını göstermektedir [Mendez v.d., 1999].
b) Grafiğin sağ üst tarafında iki çizgi halinde alt ve üst kHz QPO frekanslarının (ν_1 ve ν_2) konum parametresi ile olan ilişkisi görülmektedir. [Mendez v.d., 1999]

Şekil 1.4'te, Şekil 1.3'te 2-16 keV enerji bandında gözlemlenen paralel iz verilerinde, 9-16 keV enerji bandındaki fotonların 9-6 keV enerji bandında gözlemlenen fotonlara oranına sert renk (Hard Color), 9-6 keV enerji bandındaki fotonların 6-2 keV enerji bandındaki fotonlara oranına yumuşak renk (Soft Color) tanımlaması yapılmıştır. İçi dolu olan data noktaları çift olarak gözlemlenmiş kHz QPO frekanslarından alt kHz QPO frekanslarını göstermektedir. İçi boş olan data noktalarında kHz QPO frekansı gözlemlenmemiştir. Şekil 1.4'te ada bölgesinden (Island state) üst muz bölgesine (Upper banana state) gidildikçe X-ışın akısı artmaktadır. Bu tanımlama altında Şekil 1.4 kHz QPO frekanslarının daha çok sert renkli fotonlardan yumuşak renkli fotonlara sınır sırasında gözlemlendiğini ortaya koymaktadır.

NSLMBX'lerinde kHz QPO frekansları ile X-ışın parlaklığı arasında büyük zaman ölçeklerinde belirli bir korelasyon olmamasına karşın frekans ve X-ışın renk-renk diyagramında kaynağın pozisyonu S_a arasında Şekil 1.4'de gösterildiği üzere doğrusal bir ilişki vardır. S_a konum parametresi X-ışın renk-renk diyagramında ada bölgesinden (island state) muz bölgesine (banana state) doğru ilerledikçe kHz QPO frekanslarında artış gözlemlenmektedir. Orta ada (moderate island) ve aşağı muz (lower banana) bölgelerinde ortaya çıkmaya başlayan QPO'lar uç ada (extreme island) ve yukarı muz (upper banana) bölgelerinde kaybolurlar [Hasinger ve van der Klis, 1989]. Atoll kaynaklarda kütle aktarım oranının X-ışın renk-renk diyagramı pozisyonu, S_a , ile birlikte monoton olarak arttığı düşünülmektedir [Hasinger ve van der Klis, 1989].



Şekil 1.5: Mendez&Belloni-2007’de Tablo 1’de yer alan kaynakların fark frekanslarının dönme frekansına oranının dönme frekansıyla olan ilişkisi. Daha öncelerden savunulan yavaş ve hızlı dönen kaynaklar için ortaya atılmış fark frekansı k.g. dönme frekansı korelasyonunun aksine basamak fonksiyonu yerine daha sürekli bir dağılım izlemektedir. [Mendez ve Belloni, 2007]

Aynı durumda X-ışın sayma oranı da (X-ray count rate) kütle aktarım oranını aynı iz boyunca takip eder [van der Klis v.d., 1990][van der Klis, 1994][Prins ve van der Klis, 1997]. X-ışın sayma oranının aksine kilohertz QPO’ların S_a parametresi ile korelasyon göstermesi kHz QPO frekanslarının toplam kütle aktarımı oranıyla monoton değiştiğini söyler. Z kaynaklarında da benzer sonuçlara ulaşılmıştır [Wijnands v.d., 1997]. Yukarıda bahsedilen sebeplerden ötürü Atoll kaynaklarda X-ışın akısından bağımsız X-ışın renk-renk diyagramlarının pozisyonu tayfsal değişimleri parametrize etmekte oldukça başarılıdır. Karacisim akısı (blackbody flux) [Ford v.d., 1997b], iki bileşenli tayfsal modelde üs-kanunu eğimi de (power-law slope) tayfsal pozisyonu X-ışın akısından daha iyi tanımlamaktadır [Kaaret v.d., 1998].

NSLMXB’lerin güç tayfında kHz QPO’lara ek olarak görülen patlama salınımları, ν_b , nötron yıldızı kaynaklarının dönme hızına oldukça yakındır ve aynı kaynak için her patlamada fazla değişmeden aynı kalır [Strohmayer v.d., 1998]. Kütle aktarımı yapan milisaniye pulsarlarında patlama salınımlarının, ν_b , pulsarın dönme frekansıyla, ν_* , neredeyse aynı olduğunun, $\nu_b \simeq \nu_*$, bulunması patlama salınım frekansı bilinen diğer nötron yıldızı kaynakları için de dönme frekansının kestirilmesini sağladı [van der

Klis, 2000]. Çift kHz QPO'ların fark frekansları 250-350 Hz aralığında olup frekanslar arttıkça azalır. Öncü gözlemlerde fark frekansının patlama salınımı değerlerine yakın bulunması Sonik-Nokta Atma Frekansı (Sonic-Point Beat Frequency Model, SFBFM) [Miller v.d., 1998] modelinin ortaya çıkmasını sağladı. Gözlemsel verilerin artmasıyla 400 Hz üzerinde dönme hızına sahip kaynakların fark frekanslarının patlama salınımı frekansının ve dolayısıyla yıldız dönme frekansının yarısına eşit olduğunun görülmesi varolan modellerde düzeltme yapılmasını gerektirdi [van der Klis, 2000, Wijnands ve van der Klis, 2003]. Daha sonraları gözlemsel verilerin detaylı analizi ile fark frekansının kHz QPO frekansları arttıkça azaldığı ortaya konuldu. Bu sonuç beraberinde Rölativistik Yalpalama Modeli (Relativistic Precession Model) [Stella ve Vietri, 1998][Stella ve Vietri, 1999] ve Sınır Bölgesi Modeli (Boundary Region Model) [Erkut v.d., 2008, Alpar ve Psaltis, 2008] gibi yeni modelleri getirdi. Nötron yıldızı kaynakları artık dönme hızlarına göre “yavaş dönenler” (slow rotators $\nu_b < 400\text{Hz}$) ve “hızlı dönenler” (fast rotators $\nu_b \geq 400\text{Hz}$) olarak iki sınıfa ayrıştırıldı [van der Klis, 2006]. Bu kısıtlamalara uymayan kaynakların ortaya çıkması ile nötron yıldızı dönme frekanslarında veya yarısına eşit fark frekanslarının yerine sürekli dağılıma sahip olabileceğini tartışan çalışmalar yapıldı [Mendez ve Belloni, 2007]. Bugün biliyoruz ki kHz QPO frekansları gözlemlenmiş nötron yıldızı kaynaklarının neredeyse yarısının fark frekansları nötron yıldızının dönme frekansının üzerinde veya yarı değerinin altındadır.

Nötron yıldızı LMXB'lerinde X-ışın güç tayflarında 200-1300 Hz frekans aralığında gözlemlenen kHz QPO'ların gözlemsel özellikleri, bu salınımların kaynağı olarak yığılma disklerinin en iç bölgesini işaret etmektedir [Erkut v.d., 2008]. Sınır Bölgesi Modeli [Erkut v.d., 2008, Alpar ve Psaltis, 2008] dahilinde kütle yığılma diski ile yıldız manyetosferinin etkileşimi sonucu belirlenen bu sınır (sınır) bölgesinin dışında diskin açılma hızı Kepler dönüş hızları ile oldukça iyi tasvir edilebilmektedir. Dış disk bölgelerinde hidrodinamik düzeltmelerin yörünge açılma frekansları üzerindeki etkisi gözardı edilebilecek kadar önemsizdir.

Basit olmasına rağmen QPO frekanslarının sadece test parçacığı frekansları ile ifade edilmesi bazı eksiklikleri beraberinde getirir. Öncelikle QPO frekanslarının uyarılmasının/yükseltgenmesinin beklendiği sınır bölgesinde dinamik salınım frekansları test parçacığı frekansları değildir. Sınır bölgesinde viskoz ve manyetik kuvvetler yörüngesel frekansların Kepler değerinden sapmasına yol açar [Erkut ve Alpar, 2004]. Kepler olmayan dönme frekansları disk akışkanının komşu halkaları arasında ki viskoz ve akustik etkileşimlerin bir sonucu olarak ortaya çıkmaktadır.

Nötron yıldızı LMXB'lerinin zayıf manyetik alanı nedeniyle sınır bölgesinin yıldız yüzeyine yakın olması, QPO frekanslarının diskin en iç bölgesindeki maddenin dinamiği ile belirlenen zaman ölçeklerinde X-ışın yayılımında iz bırakabilmesini olanaklı hale getirir [Erkut ve Alpar, 2004]. Nötron yıldızının dönüş hızına bağlı olarak diskin en iç bölgesinin karakteristik yapısı Kepler altı veya Kepler üstü akışkan olarak belirlenebilir

[Erkut, 2014]. Sınır bölgesinde viskoz, manyetik, basınç ve radyatif kuvvetlerin kütle çekimi ile karşılaştırılabilir büyüklüklere gelmeleriyle akışkan elementlerinin yörüngesel frekansları değişime uğrar. Büyük ölçekli manyetik alanın mevcut olmadığı nötron yıldızı LMXB'leri gibi sistemlerde dahi küçük ölçekli çalkantılı manyetik alanlar sayesinde ortaya çıkan Maxwell stresleri en iç diskteki dinamik frekansları etkileyebilir [Hawley ve Krolik, 2001]. Ek olarak iç diskte manyetik frenlemeye bağlı olarak merkezkaç desteğinin zayıflamasıyla diskteki madde radyal yönde ivmelenebilir. Radyal sürüklenme hızındaki ani artışa yüzey yoğunluğundaki azalma eşlik eder. Sonuçta düşey olarak integre edilmiş dinamik viskozite minimum değerine ulaşır [Erkut ve Alpar, 2004]. Yukarıda bahsedilen sebeplerle sınır koşulları ve manyetik alanın yapısından bağımsız olarak sınır bölgesinde belirli bir yarıçapta yüzey yoğunluğu ve radyal sürüklenme hızı gibi disk niceliklerinde büyük değişimler olması kaçınılmazdır.

İç disk sınır bölgesinde [Erkut, 2014] Kepler değerinden sapma göstermesi beklenen açısız frekansın gradyentinin pozitif olduğu durumda

$$\kappa = \left[2\Omega \left(2\Omega + r \frac{d\Omega}{dr} \right) \right]^{1/2} \quad (1.1)$$

ile ifade edilen ve diskteki maddenin radyal yöndeki hareketi sonucu meydana gelen türbülanslarla oluşan radyal episiklik frekans diskteki en büyük dinamik frekans olur. Bu sebeple diskin en iç bölgelerinde yüksek frekanslı salınım modları radyal episiklik frekans, κ , ile belirlenir [Alpar ve Psaltis, 2008]. Radyal episiklik frekansın açısız frekans, Ω , ile oluşturduğu frekans bandlarının ortaya çıktığı sınır bölgesi disk manyetosfer sınırında olduğundan, diskin yarıçapının yıldızın kütlesi, yarıçapı, manyetik alanı ve diskte birim zamanda akmakta olan kütle miktarının fonksiyonu olan Alfvén yarıçapı, bir başka deyişle,

$$r_A = (GM_*)^{-1/7} \dot{M}^{-2/7} (B_* R_*^3)^{4/7} \quad (1.2)$$

ile belirlenmesi beklenir. Diskten nötron yıldızı üzerine madde akışı, sınır bölgesinde manyetik frenleme ile karşılaşan madde Alfvén yarıçapından data öteye gidemez. Dolayısıyla sınır bölgesinde nötron yıldızının manyetik alan çizgilerini takip ederek nötron yıldızının manyetik kutuplarından yıldızın üzerine akması ile gerçekleşir. Diskin iç yarıçapı yığılma diskinin ve yıldızın fiziksel parametrelerine bağlılık gösterdiğinden, nötron yıldızı LMXB'lerinin kHz QPO gözlemleri nötron yıldızının ve etrafındaki yığılma diskinin fiziği hakkında bize önemli ipuçları verebilir.

Bu tezde 4U 1608-52, 4U 1636-54, 4U 1728-34 ve Aql X-1 nötron yıldızı LMXB'lerinden gözlemlenen QPO frekansı-parlaklık ilişkisi temel alınarak, Sınır Bölgesi Modeli kapsamında radyasyon basıncının hakim olduğu, ince sınır bölgesine sahip geometrik olarak ince optik olarak kalın yığılma disklerinin en iç bölgesinde QPO'ların gözlemsel özelliklerini verecek fiziksel koşullar incelenecektir. Diskin fiziksel özellikleri

temel alınarak çalışılan dört nötron yıldıızı kaynağının kütle, yarıçap ve manyetik alan gibi karakteristik özellikleri hakkında öngörülerde bulunulacaktır [Alpar ve Psaltis, 2008].

Bölüm 2

YIĞIŞMA DİSKİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde nötron yıldızı LMXB'lerinin etrafındaki yığışma diskinin en iç sınır bölgesi ele alınarak, kHz QPO frekansları ve X-ışın akısı arasında gözlemlenmiş korelasyonlar Sınır Bölgesi Modeli çerçevesinde açıklanmaya çalışılacaktır. Analizimiz yığışma diskinin fiziksel parametrelerinin çok hızlı değişim gösterdiği geometrik olarak ince sınır bölgeleri ile sınırlı olacaktır. Yığışma diski ve nötron yıldızının önemli fiziksel parametreleri için tipik değerleri tartışacağımız bu bölümde, öngörölmüş fiziksel kısıtlamalar çerçevesinde kHz QPO'lar için gözlemlenmiş frekans aralığını diskteki dinamik frekanslar olan radyal episiklik frekans ve açısız frekans ile elde edeceğiz. Daha sonra kHz QPO frekanslarını elde ettiğimiz Kepler olmayan iç disk dar sınır bölgeleri ile Kepler dönme profiline sahip dış disk bölgelerini birbirine bağlayan durağan durum birleşik (unified) disk çözümlerini vereceğiz. Son olarak ta iç disk sınır bölgesindeki serbest parametrelerin QPO frekansları üzerinde oynadığı rolü inceleyerek, kHz QPO ve X-ışın akısı arasındaki korelasyonlara olası açıklamalar getirmeye çalışacağız.

2.1 Tipik Disk Parametrelerini Kullanarak kHz QPO Frekanslarının Elde Edilmesi

Dar sınır bölgesine sahip yığışma diskleri bazı sınırlamalar altında incelenecektir. Öncelikle incelenecek yığışma disklerinin iç bölgelerinde gaz basıncının baskın (Gas pressure dominated, GPD) veya radyasyon basıncının baskın (Radiation pressure dominated, RPD) olduğu iki farklı basınç rejiminin incelenmesi mümkündür. Yığışma diski için kullanılacak fiziksel sınırlamalar aşağıdaki gibidir:

1. kHz QPO frekanslarını barındıracak olan diskin en iç bölgesinde her iki tip

basınç rejiminde de basınçların birbirlerine oranları 10'dan büyüktür (GPD için $p_{t,gpd}/p_{t,RPD} > 10$, RPD için $p_{t,RPD}/p_{t,gpd} > 10$).

2. Disk ortamı optik olarak kalındır (Gerçek emilime göre optik derinlik $\tau_t > 1$).
3. Disk yapısı geometrik olarak incedir ($H_t/r_{in} < 0.1$)
4. Diskteki dinamik frekanslar gözlemler temel alınarak 200-1300 Hz aralığı ile sınırlandırılmıştır [Ford v.d., 2000].

Yukarıda sıralanmış olan fiziksel sınırlamalar altında diskin en iç yarıçapı manyetik basınç ve maddenin çarpma basıncı arasındaki denge, bir başka deyişle yani Alfvén yarıçapı ile belirlenmektedir. Temel fiziksel tipik disk parametreleri Tablo 2.1'de verilen eşitliklerle ifade edildiğinden dolayı diskin en iç yarıçapının tayini diğer parametreleri de etkilemektedir. Tablodaki eşitliklerde r_{in} yığılma diskinin en iç yarıçapını, r_A Alfvén yarıçapını, M_* , R_* , ve B_* sırasıyla nötron yıldızının kütlesi, yarıçapı ve manyetik alanını, $\Omega(r_{in})$ diskin en iç yarıçapındaki maddenin dönme hızını, Ω_K diskteki maddenin Kepler dönme hızını, ν_b nötron yıldızının patlama salınım frekansını, parantez içindeki r_{in} değerleri parametrelerin diskin en iç yarıçapındaki değerini, k gözlemlenen kHz QPO fark frekansları ile modelin tutarlılığını sağlayan serbest ölçeklendirme parametresini ($\nu_* < 400$ Hz için $k \simeq 1$ ve $\nu_* > 400$ Hz için $k \simeq 0.5$), ω_* nötron yıldızının dönme frekansının en iç diskteki Kepler frekansına oranı olan hızlılık parametresini, ω iç disk yarıçapında maddenin dönme frekansının aynı yarıçaptaki Kepler frekansına oranını, $\kappa(r_{in})$ diskin radyal episiklik frekansını, H_t diskin tipik yarı kalınlığını, $c_{s,t}$ diskteki ses hızını, Σ_t diskin yüzey kütle yoğunluğunu, \dot{M}_t birim zamanda diskten nötron yıldızı üzerine akan madde miktarını, $v_{r,t}$ diskteki maddenin radyal yönde sürüklenme hızını, ρ_t diskin hacimsel kütle yoğunluğunu, p_t basıncı, T_t sıcaklığı, $\kappa_{ff,t}$ ve κ_{es} sırasıyla serbest-serbest ve elektron saçılma opaklığını, τ diskteki gerçek optik derinliği göstermektedir.

Dış diskteki vizkosite diskin herhangi bir yarı kalınlığında oluşabilecek en büyük türbülans ile orantılı olacak şekilde tanımlanmıştır (Bakınız “ α modeli” [Shakura ve Sunyaev, 1973]). İç diskteki vizkosite de aynı tanımlama altında sınır bölgesinde oluşabilecek türbülans ile orantılı olacak şekilde tanımlanmıştır. İç ve dış disklerdeki vizkositelerin diskteki termal difüzyon göz önünde bulundurularak birbirlerine yakın mertebelerde olacakları varsayımı yapılmıştır. Sonuç olarak dış diskteki vizkosite için α , sınır bölgesindeki vizkosite için α_{BL} boyutsuz oran katsayıları tanımlanmıştır.

Yığılma diskindeki maddenin dönme hareketine ek olarak radyal yöndeki salınımlarına karşılık gelen episiklik frekans ile maddenin açılal dönme frekansı birlikte diskin en iç bölgesinde ortaya çıkmasını beklediğimiz çift kHz QPO frekanslarını oluşturmaya adaydırlar. Olası frekans çiftleri olan $[\kappa - \Omega, \kappa]$ ve $[\kappa, \kappa + \Omega]$ bandları için Tablo 2.2'de gösterilen analiz yapılmıştır fakat $[\kappa, \kappa + \Omega]$ frekans bandı için kHz mertebesinde

gözlemlenen QPO frekanslarını üretmek için kullanılan sınır bölgesi vizkosite katsayısı α_{BL} , 1 mertebesinin üzerinde olduğundan dolayı analizlerimizde $[\kappa - \Omega, \kappa]$ frekans bandı kullanılacaktır. Ancak $[\kappa, \kappa + \Omega]$ çifti için de benzer sonuçları elde etmek mümkündür.

GPD	RPD
$r_{in} \equiv r_A = (GM_*)^{-1/7} \dot{M}_t^{-2/7} (B_* R_*)^{4/7}$	
$\Omega_K(r_{in}) = (GM_*/r_{in}^3)^{1/2}$	
$\Omega_* = 2\pi\nu_* = 2\pi\nu_{burst}$	
$\Omega(r_{in}) = k\Omega_*$	
$\omega = \Omega(r_{in})/\Omega_K(r_{in})$	
$\omega_* = \omega/k$	
$\kappa(r_{in}) = \sqrt{2\Omega(r_{in}) [2\Omega(r_{in}) + r_{in}(d\Omega(r)/dr) _{r=r_{in}}]}$	
$H_t = \varepsilon r_{in}$	
$c_{s,t} = \Omega_K(r_{in}) H_t$	
$\Sigma_t = \dot{M}_t / (2\pi H_t c_{s,t} \mu)$	
$v_{r,t} = \dot{M}_t / (2\pi \Sigma_t r_{in})$	
$\rho_t = \Sigma_t / 2H_t$	
$p_t = \rho_t c_s^2$	
$a = 4\sigma_{SB}/c$	
$p_{t,gas} = nR_G T_{t,gas} / (\gamma V) = \rho_t c_{s,t}^2$	$p_{t,rad} = aT_{t,rad}^4/3 = \rho_t c_{s,t}^2$
$T_{t,gas} = M_A c_{s,t}^2 / (\gamma R_G)$	$T_{t,rad} = [3\rho_t c_{s,t}^2 / a]^{1/4}$
$\kappa_{ff,t} = 0.11\rho_t T_{t,gas}^{-7/2} / m_p$	$\kappa_{ff,t} = 0.11\rho_t T_{t,rad}^{-7/2} / m_p$
$\kappa_{es} = 0.4$	
$\tau_t = \sqrt{\kappa_{ff,t} (\kappa_{ff,t} + \kappa_{es})} \Sigma_t$	$\tau_t = \sqrt{\kappa_{ff,t} (\kappa_{ff,t} + \kappa_{es})} \Sigma_t$

Tablo 2.1: GPD ve RPD rejimlerinde diskteki temel parametrelerin tipik değerleri. Burada $\nu_* = \nu_{burst}$ alınmıştır [Mendez ve Belloni, 2007].

Yukarıda bahsedilen fiziksel sınırlamalar altında Tablo 2.1’de verilen eşitlikler ile disk iç yarıçapındaki $\kappa(r_{in})/2\pi$ ve $(\kappa(r_{in}) - \Omega(r_{in}))/2\pi$ frekans bandlarını kullanarak kHz QPO salınımlarını 200 – 1300 Hz frekans aralığında 1.4 Güneş kütleinde 10 km yarıçaplı örnek bir yıldız için aşağıdaki parametre aralıklarında elde ettik. Benzer bir şekilde $\kappa(r_{in})/2\pi$ ve $(\kappa(r_{in}) + \Omega(r_{in}))/2\pi$ frekans bandları ile de kHz QPO frekansları elde edilebilmektedir. Hakkında kesin bir bilgiye sahip olmadığımız ama 1 mertebesinde ($0.5 \leq \alpha_{BL} \leq 5.0$) olmasını beklediğimiz sınır bölgesi viskozite katsayısının, $\kappa(r_{in})/2\pi$ ve $(\kappa(r_{in}) + \Omega(r_{in}))/2\pi$ bandları için 10 ve yukarı mertebede değerler almasından dolayı bu tezde sadece $\kappa(r_{in})/2\pi$ ve $(\kappa(r_{in}) - \Omega(r_{in}))/2\pi$ frekans bandlarına ait analizlere yer vereceğiz. Kütle aktarım oranını $10^{15} - 10^{19}$ g/s, manyetik alan değerini $10^8 - 10^9$ G, sınır bölgesi viskozite katsayısını 0.5 – 5.0, fark frekansını 200 – 400 Hz aralıklarında tarayarak Tablo 2.2’de verilen değer aralıklarında, NSLMXB’lerde gözlemlenen frekans aralığı olan 200 – 1300 Hz aralığında kHz QPO’lar elde ettik.

	Alt Değer	Üst Değer
Kütle aktarım oranı (GPD)	10^{15} g/s	10^{16} g/s
Kütle aktarım oranı (RPD)	10^{15} g/s	10^{19} g/s
Manyetik alan	10^8 G	10^9 G
α_{BL}	0.5	5.0
Fark frekansı	200 Hz	400Hz
kHz QPO frekans aralığı	200Hz	1300Hz

Tablo 2.2: $1.4M_{\odot}$, 10 km yarıçaplı örnek bir yıldız için tipik değer parametreleri üzerinden yapılan taramada kHz QPO frekanslarının elde edilebildiği frekans aralıkları.

2.2 Genel Disk Çözümlerinin Elde Edilmesi

Bölüm 2.1’de sıralanan fiziksel sınırlamalar altında ince disk yaklaşımı ile tutarlı gözlemlenmiş frekans aralığında kHz QPO frekanslarını elde ederken taranacak tipik disk parametrelerini tanıttık. Bu bölümde kHz QPO frekansları içerebilecek fiziksel olarak tutarlı geometrik olarak ince diskler için klasik durağan durum dış disk çözümlerinin [Shakura ve Sunyaev, 1973] yanı sıra Kepler olmayan iç diskin de radyal bağımlı durağan durum çözümlerini bulup, bu çözümleri iç diskte Denk Asimtotik Açılımlar (Matched Asymptotic Expansion, MAE) [Bender ve Orszag, 1978] metodunu kullanarak birleştirip Bölüm 2.1’de bahsedilen diskler için sürekli disk çözümleri olduğunu göstereceğiz. Disk çözümlerine sırasıyla diskin kütle, momentum ve enerji korunum eşitliklerini yazarak başlıyoruz. Korunum eşitliklerinin çıkarılışları ve denklemlerin çözümlerindeki ara adımlar detaylı olarak EK kısmında verilecektir. Korunum denklemleri

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\rho \vec{\nabla} \Gamma - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\tau}, \quad (2.2)$$

ve

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \epsilon = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + Q_v \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ϵ enerji yoğunluğunu, $\overleftrightarrow{\tau}$ viskoz stres tensörünü, Γ kütle çekimsel potansiyeli, \vec{F} ışınım akısını, Q_v birim hacimdeki viskoz enerji kayıp oranını ifade etmektedir. Geriye kalan terimler ise önceki bölümlerdeki tanımlarını korumaktadır. Dış disk çözümlerinin elde edilmesi için

1. Disk ortamı optik olarak kalındır ($\tau > 1$) ve radyasyon transferi için difüzyon yaklaşımı varsayılacaktır. Opaklık değeri hem Thomson opaklığına hem de

Elektron Saçılma opaklığı göz önünde bulundurularak “gerçek” opaklık olarak hesaplanacaktır [Shakura ve Sunyaev, 1973].

2. Disk eksen simetrik kabul edilecektir ($\partial/\partial\phi = 0$).
3. Disk yapısı durağan durum altında incelenecektir ($\partial/\partial t = 0$).
4. Viskozite mevcuttur fakat baskın viskoz streslerin $\nu_{r\phi}$ bileşeni hariç geri kalanları ihmal edilecektir ($\nu_{r\phi} \neq 0$).

Yukarıdaki varsayımlar altında korunum denklemlerini silindirik koordinatlara göre r , ϕ ve z bileşenlerine ayrıştırıyoruz. Bileşenlerine ayrılmış korunum denklemleri

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0, \quad (2.4)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \Omega^2 r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{GM_*}{r^2} \left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)^{-3/2}, \quad (2.5)$$

$$v_z \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{GM_* z}{r^3} \left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)^{-3/2}, \quad (2.6)$$

$$\frac{v_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega) + v_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{1}{\rho r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \nu r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \quad (2.7)$$

ve

$$\rho C_v \left[v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] = -p \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F^r) - \frac{\partial F^z}{\partial z} + \rho \nu r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilir. Burada v_r ve v_z sırasıyla r ve z yönlerindeki hız bileşenleri, Ω açısal hız, C_v sabit hacimde birim kütle başına özısı, F^r ve F^z r ve z yönlerinde ışınımsal enerji akıları, ν kinematik viskozite, a radyasyon basıncı sabiti, ρ hacimsel madde yoğunluğu, T sıcaklık, p basınç, \dot{M} diskteki kütle akış hızıdır. Geriye kalan terimler genel anlamlarında kullanılmışlardır. Disk boyunca kütle akışı sabittir. Eşitlikler 2.4-2.8 boyutlu denklemler olup çalışmamızdaki tipik değerlere göre boyutsuzlaştırılarak incelenmesi ve çalışılması daha kolay eşitlikler haline getirilecektir. Hızlar ses hızı, basınç ise $\rho_t c_s^2$ tipik basınç terimi baz alınarak boyutsuzlaştırılacaktır. Ölçek olarak radyal uzunluk $r_t = r_{in}$, z koordinatında uzunluk H_t olarak seçilmiştir. Notasyonda kolaylık olması açısından EK’te \sim ile belirtilmiş olan boyutsuz parametrelerimizden \sim işaretini kaldırarak yazıyoruz ve dış disk çözümlerine geçiyoruz. Bu noktadan sonra

durağan durum standard dış disk çözümlerini elde etmek amaçlı kullanacağımız denklem seti boyutsuzdur. Aşağıdaki iki ek varsayıma [Regev, 1983] göre boyutsuzlaştırılmış disk denklemleri 2.9-2.14 eşitlikleri ile verilmektedir.

- Disk geometrik olarak incedir, $H_t/r_{in} \ll 1$.
- Diskteki viskozite çalkantılı olup, α modeli ile verilmektedir, $\nu = \alpha c_s H$ [Shakura ve Sunyaev, 1973].

$$\epsilon^2 v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \epsilon \frac{\partial v_r}{\partial z} - \Omega^2 r = -\frac{1}{\rho} \epsilon^2 \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{3}{2} \epsilon^2 \frac{z^2}{r^2}, \quad (2.9)$$

$$\epsilon v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{z}{r^3} + \frac{3}{2} \epsilon^2 \frac{z^3}{r^5}, \quad (2.10)$$

$$\epsilon \frac{v_r}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega) + v_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \alpha \epsilon^2 \frac{1}{\rho r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \rho r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right), \quad (2.11)$$

$$\epsilon \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0, \quad (2.12)$$

$$r \Sigma v_r = -\epsilon \mu \dot{M} \quad (2.13)$$

ve

$$\begin{aligned} \beta_g \rho C_v \left(\epsilon v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= -p \left[\epsilon \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \alpha \nu \rho r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \\ &\quad - \eta \left[\epsilon^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F^r) + \frac{\partial F^z}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Diskin geometrik olarak ince olması görüldüğü üzere denklemlerimize yeni bir parametre olan ϵ parametresinin girişini sağlamıştır ($\epsilon = H_t/r_{in} \ll 1$). Boyutsuzlaştırılmış niceliklerimizden yeni katsayılar gelmektedir. Bunlardan gaz basıncı, radyasyon basıncı, ve bu basınçların tipik basınç değerlerine oranı olan β_g ve β_r ($\eta = \beta \lambda$, $\lambda = 4c/(c_s \kappa \rho H)$) sayılabilir. Durağan durum dış disk çözümlerini bulmak için temel disk parametrelerine

$$\Omega = \Omega_0 + \epsilon \Omega_1 + \epsilon^2 \Omega_2 + \dots \quad (2.15)$$

şeklinde pertürbatif açılım uyguluyoruz ve diskin dış bölgeleri için sıfırıncı mertebeden durağan durum çözümlerini elde ediyoruz (Bknz EK C). Diskin en dış bölgesi olan C bölgesinde gaz basıncı radyasyon basıncına, serbest-serbest opaklık ise elektron saçılma opaklığına baskındır ($p_{t,gpd} \gg p_{t,rpd}$, $\kappa_{ff,t} \gg \kappa_{es}$). C bölgesi durağan durum standard disk çözümleri;

$$\Omega_{out}(r) = r^{-3/2}, \quad (2.16)$$

$$T_{out}(r) = \left(\frac{\mu^2}{3\eta}\right)^{1/10} \alpha^{-1/5} \dot{M}^{3/10} r^{-3/4} (1 - Cr^{-1/2})^{3/10}, \quad (2.17)$$

$$\Sigma_{out}(r) = 2 \frac{\mu^{7/10} \eta^{1/10}}{3^{9/10}} \alpha^{-4/5} \dot{M}^{7/10} r^{-3/4} (1 - Cr^{-1/2})^{7/10}, \quad (2.18)$$

$$p_{out}(r) = 2 \frac{\mu^{9/10}}{3} \alpha^{-1} \dot{M} r^{-3/2} (1 - Cr^{-1/2}), \quad (2.19)$$

$$c_{s,out}(r) = \left(\frac{\mu^2}{3\eta}\right)^{1/20} \alpha^{-1/10} \dot{M}^{3/20} r^{-3/8} (1 - Cr^{-1/2})^{3/20}, \quad (2.20)$$

$$H_{out}(r) = \left(\frac{\mu^2}{3\eta}\right)^{1/20} \alpha^{-1/10} \dot{M}^{3/20} r^{-3/4} (1 - Cr^{-1/2})^{3/20}, \quad (2.21)$$

$$\rho_{out}(r) = \frac{\mu^{3/5} \eta^{3/20}}{3^{17/20}} \alpha^{-7/10} \dot{M}^{11/20} r^{-3/2} (1 - Cr^{-1/2})^{11/20} \quad (2.22)$$

ve

$$v_{r,out}(r) = \frac{3^{9/10} \mu^{3/10}}{2\eta^{1/10}} \alpha^{4/5} \dot{M}^{3/10} r^{-1/4} (1 - Cr^{-1/2})^{-7/10} \quad (2.23)$$

şeklindedir. Burada C katsayısı açısal momentum transferinin verimliliği katsayısı olup korunum denklemlerinin integre edilmesi ile gelen boyutsuz bir katsayıdır. B bölgesi diskin orta bölgesi olmakla beraber gaz basıncı radyasyon basıncına, elektron saçılma opaklığı ise serbest-serbest opaklığa baskındır ($p_{t,gpd} \gg p_{t,rpd}$, $\kappa_{es} \gg \kappa_{ff,t}$). B bölgesi durağan durum standard disk çözümleri;

$$\Omega_{out}(r) = r^{-3/2}, \quad (2.24)$$

$$T_{out}(r) = \left(\frac{\mu^2}{2\eta}\right)^{1/5} \alpha^{-1/5} \dot{M}^{2/5} r^{-9/10} (1 - Cr^{-1/2})^{2/5}, \quad (2.25)$$

$$\Sigma_{out}(r) = \frac{2^{6/5} \mu^{3/5} \eta^{1/5}}{3} \alpha^{-4/5} \dot{M}^{3/5} r^{-3/5} (1 - Cr^{-1/2})^{3/5}, \quad (2.26)$$

$$p_{out}(r) = \frac{2^{1/10} \mu^{4/5} \eta^{1/10}}{3} \alpha^{-9/10} \dot{M}^{4/5} r^{-51/20} (1 - Cr^{-1/2})^{4/5}, \quad (2.27)$$

$$c_{s,out}(r) = \left(\frac{\mu^2}{2\eta}\right)^{1/10} \alpha^{-1/10} \dot{M}^{1/5} r^{-9/20} (1 - Cr^{-1/2})^{1/5}, \quad (2.28)$$

$$H_{out}(r) = \left(\frac{\mu^2}{2\eta}\right)^{1/10} \alpha^{-1/10} \dot{M}^{1/5} r^{21/20} (1 - Cr^{-1/2})^{1/5}, \quad (2.29)$$

$$\rho_{out}(r) = \frac{2^{3/10} \mu^{2/5} \eta^{3/10}}{3} \alpha^{-7/10} \dot{M}^{2/5} r^{-33/20} (1 - Cr^{-1/2})^{2/5} \quad (2.30)$$

ve

$$v_{r,out}(r) = 3 \left(\frac{\mu^2}{2\eta}\right)^{1/5} \alpha^{4/5} \dot{M}^{2/5} r^{-2/5} (1 - Cr^{-1/2})^{-3/5} \quad (2.31)$$

şeklindedir. A bölgesi diskin en iç bölgesidir ve radyasyon basıncı gaz basıncına, elektron saçılma opaklığı ise serbest-serbest opaklığa göre baskındır ($p_{t, rpd} \gg p_{t, gpd}$ $\kappa_{es} \gg \kappa_{ff,t}$). A bölgesi durağan durum standard disk çözümleri;

$$\Omega_{out}(r) = r^{-3/2}, \quad (2.32)$$

$$T_{out}(r) = \left(\frac{2\eta}{9}\right)^{1/4} \alpha^{-1/4} r^{-3/8}, \quad (2.33)$$

$$\rho_{out}(r) = \frac{8\eta^3}{81\mu^2} \alpha^{-1} \dot{M}^{-2} r^{3/2} (1 - Cr^{-1/2})^{-2}, \quad (2.34)$$

$$\Sigma_{out}(r) = \frac{8\eta^2}{27\mu} \alpha^{-1} \dot{M}^{-1} r^{3/2} (1 - Cr^{-1/2})^{-1}, \quad (2.35)$$

$$H_{out}(r) = \frac{3\mu}{2\eta} \dot{M} (1 - Cr^{-1/2}), \quad (2.36)$$

$$c_{s,out}(r) = \frac{3\mu}{2\eta} \dot{M} r^{3/2} (1 - Cr^{-1/2}), \quad (2.37)$$

$$p_{out}(r) = \frac{2\mu}{3} \alpha^{-1} \dot{M} r^{-3/2} (1 - Cr^{-1/2}) \quad (2.38)$$

ve

$$v_{r,out}(r) = \frac{27\mu^2}{8\eta^2} \alpha \dot{M}^2 r^{-5/2} (1 - Cr^{-1/2}) \quad (2.39)$$

şeklindedir. En iç diskte Kepler olmayan sınır bölgesi ya da sınır tabakasındaki basınç, açılma hızı, sıcaklık ve ışınım akısı gradientlerini belirleyebilmek için eşitlikler 2.9-2.14 için perturbatif açılımlar aracılığıyla sıfırıncı mertebeden çözümler arıyoruz. Daha

sonra geometrik olarak ince disk varsayımımıza uygun olarak denklemlerimizi, düşey yönde integre ederek disk parametrelerinin z yönündeki ortalamasını alıyoruz. Düşey yönde integre edilmiş basınç ifadesi

$$P = \int_{-H}^H p dz = 2Hp \quad (2.40)$$

diferansiyel denklem setimizde görülebilir. Sınır bölgesi diskin en iç yarıçapına oranla çok daha ince bir bölge olduğundan dolayı, dış disk çözümlerinde kullanmış olduğumuz radyal koordinatı $r = 1 + \delta(\varepsilon) R$ olarak genişletiyoruz. Bu sayede sınır bölgesinde disk parametrelerindeki ani değişimleri daha rahat gözlemlene imkanı elde etmiş olacağız. Radyal momentum denklemine göre $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$ seçiyoruz. Momentum korunumunun r ve ϕ bileşenleri ve enerji korunumuna ek olarak ışınım akısının tanımı ile birlikte sınır bölgesindeki fiziksel nicelikler için çözülmesi gereken sıradan diferansiyel denklem seti aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{dP}{dR} = \Sigma (\Omega^2 - 1), \quad (2.41)$$

$$\frac{d^2\Omega}{dR^2} + \frac{1}{\alpha_{BL}} \frac{d\Omega}{dR} = 0, \quad (2.42)$$

$$\frac{d\Phi}{dR} = \frac{\mu \dot{M} \alpha_{BL}}{2\eta} \left(\frac{d\Omega}{dR} \right)^2 \quad (2.43)$$

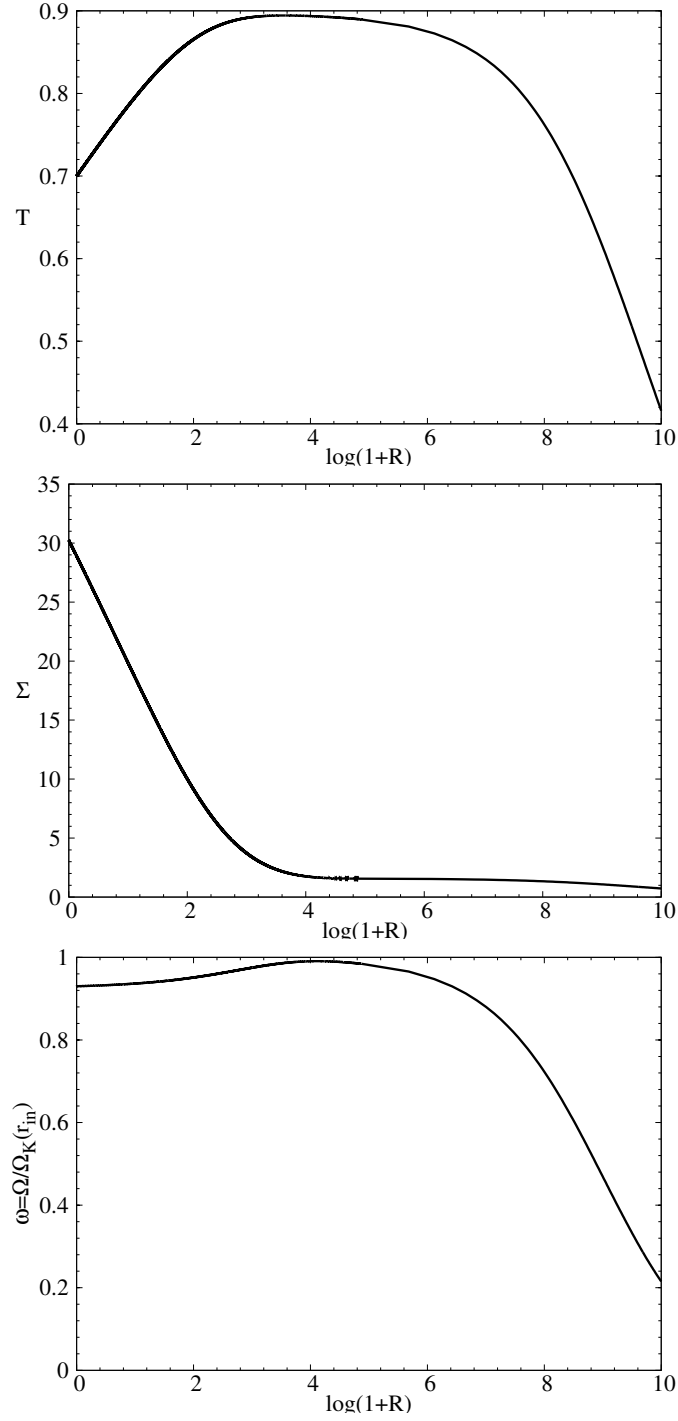
ve

$$\frac{dT}{dR} = -\frac{1}{2} \kappa \Sigma T^{-4} \Phi. \quad (2.44)$$

Yukarıdaki denklem seti kullanılarak GPD ve RPD rejimlerinde sınır koşulları dikkate alındığında kHz QPO frekans bandlarımızı oluşturacak diskin serbest salınım frekansları, denklem 2.42'nin çözümü olan

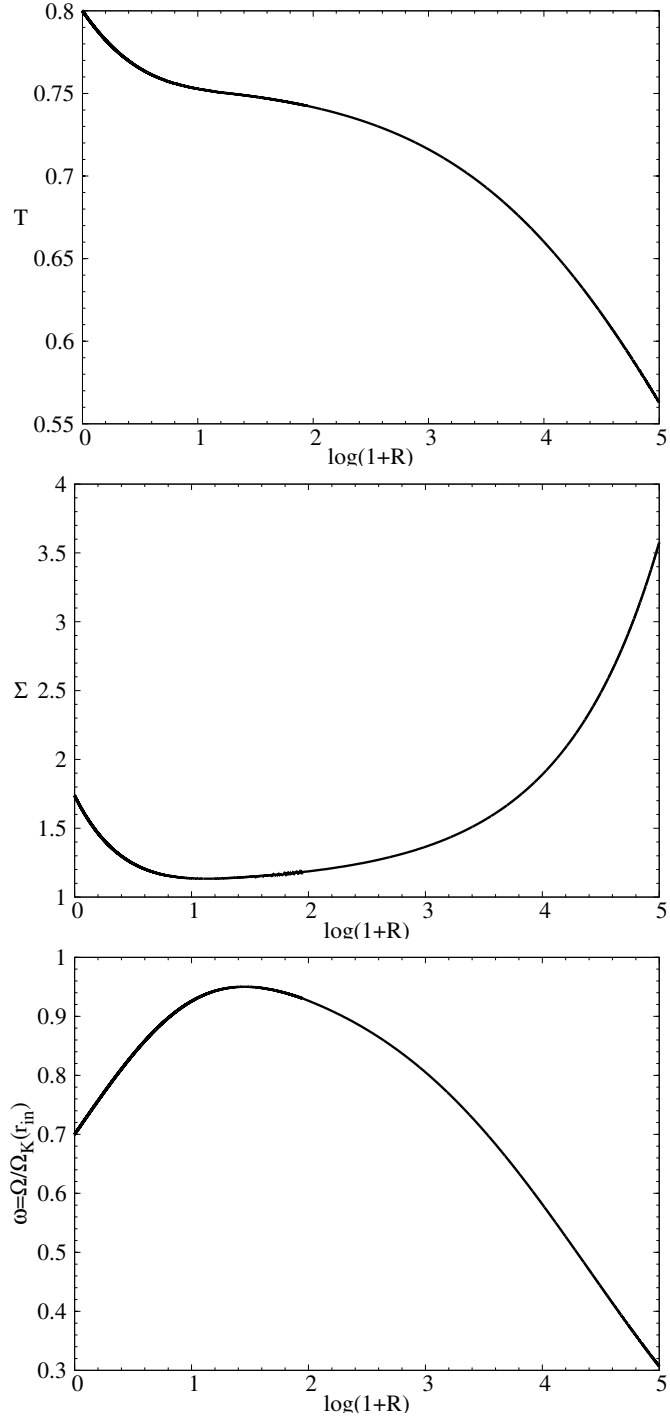
$$\Omega_{in}(R) = 1 - (1 - \omega) \exp\left(-\frac{R}{\alpha_{BL}}\right) \quad (2.45)$$

ifadesine bağlı olarak analitik, geriye kalan disk parametrelerinin çözümleri ise nümerik hesaplanacaktır. Şekil 2.1, 2.2 ve 2.3'te GPD ve RPD rejimlerinde durağan durum birleşik disk çözümlerinden örnekler görülmektedir. Sınır bölgesi diferansiyel denklem setinin RPD rejimi için olan çözümünde iki farklı sayısal çözümün var olduğu görülmüştür. RPD rejiminde sınır bölgesinden diskin iç yarıçapına doğru gidildikçe disk parametrelerinde çözümlere bağlı olarak artış veya azalma görülebilir.



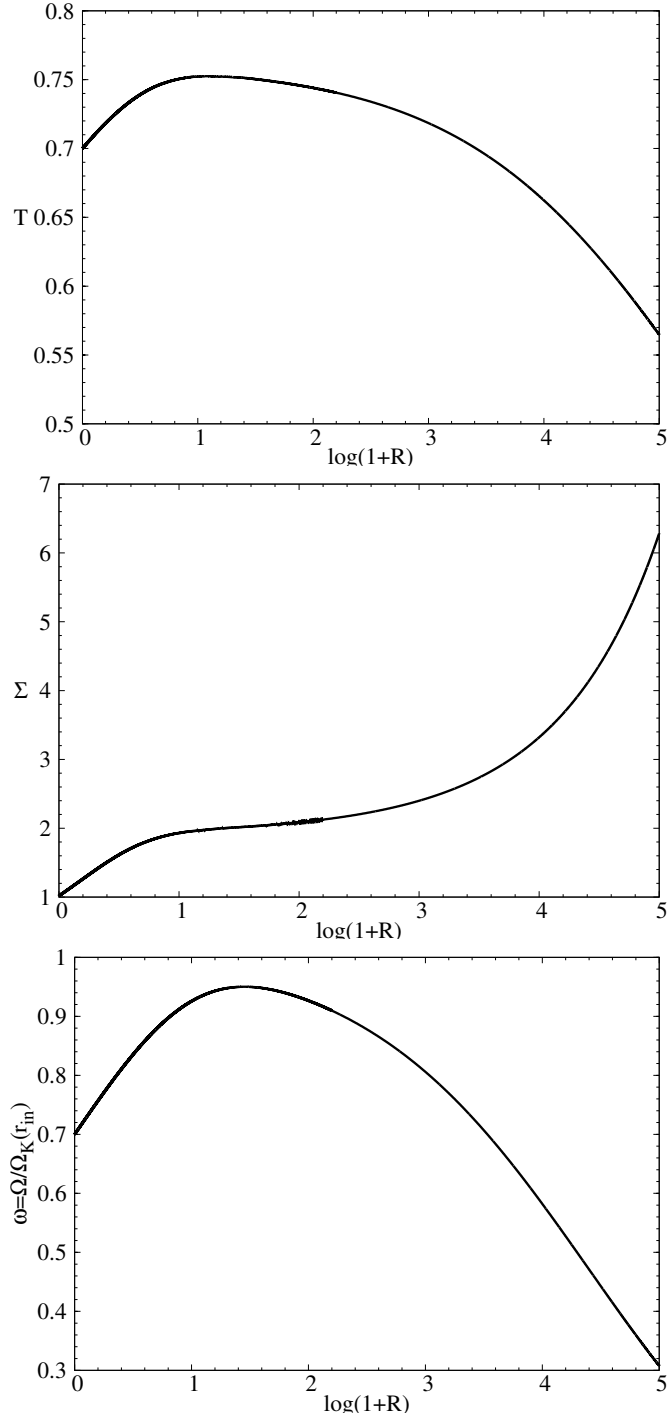
Şekil 2.1: GPD genel durağan durum disk çözümleri örnekleri.

Şekil 2.1 GPD rejiminde sırasıyla durağan durum genel sıcaklık, yüzey yoğunluğu, açısal hız çözümlerini göstermektedir. Nötron yıldızının kütlesi $1.4M_{\odot}$, yarıçapı 10 km, manyetik alanı $2.86 \times 10^8 G$, sıcaklığın tipik değeri $1.5 \times 10^7 K$, yüzey yoğunluğunun tipik değeri $5.3 \times 10^5 g/cm^2$, açısal dönme frekansının tipik değeri 322 Hz, gas basıncının radyasyon basıncına oranı 14.83, gerçek optik derinlik yaklaşık olarak 2000, dış disk viskozite katsayısı 0.0245, sınır bölgesi viskozite katsayısı 17, dış disk çözümlerinden gelen C katsayısı 0.8267 olup yıldız üzerine saniyede akan tipik kütle miktarı $2 \times 10^{17} g/s$, disk iç yarıçapı 3.57×10^6 cm, en iç diskin dönme hızının Kepler dönme hızına oranı 0.93'tür. Yıldızın dönme frekansı $\nu_* = 300$ Hz' dir.



Şekil 2.2: RPD genel durağan durum disk çözümleri örnekleri (1. Tip).

Şekil 2.1 RPD rejiminde sırasıyla durağan durum genel sıcaklık, yüzey yoğunluğu, açısal hız çözümlerini göstermektedir. Nötron yıldızının kütlesi $1.4M_{\odot}$, yarıçapı 10 km, manyetik alanı $6.5 \times 10^8 G$, sıcaklığın tipik değeri $3.87 \times 10^7 K$, yüzey yoğunluğunun tipik değeri $5.9 \times 10^3 g/cm^2$, açısal dönme frekansının tipik değeri 428 Hz, gas basıncının radyasyon basıncına oranı 80, gerçek optik derinlik yaklaşık olarak 5, dış disk viskozite katsayısı 0.097, sınır bölgesi viskozite katsayısı 1, dış disk çözümlerinden gelen C katsayısı 0.81 olup yıldız üzerine saniyede akan tipik kütle miktarı $2 \times 10^{17} g/s$, disk iç yarıçapı 2.95×10^6 cm, en iç diskin dönme hızının Kepler dönme hızına oranı 0.7'dir. Yıldızın dönme frekansı $\nu_* = 300$ Hz'dir.



Şekil 2.3: RPD genel durağan durum disk çözümleri örnekleri (2. Tip).

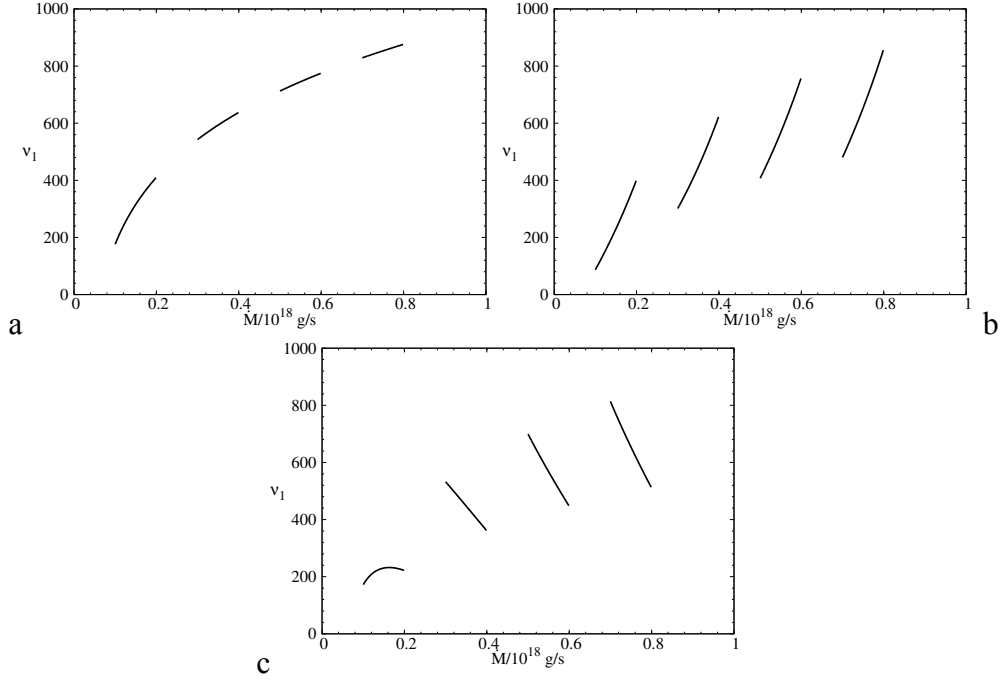
Şekil 2.1 RPD rejiminde sırasıyla durağan durum genel sıcaklık, yüzey yoğunluğu, açısal hız çözümlerini göstermektedir. Nötron yıldızının kütlesi $1.4M_{\odot}$, yarıçapı 10 km, manyetik alanı $6.5 \times 10^8 G$, sıcaklığın tipik değeri $3.87 \times 10^7 K$, yüzey yoğunluğunun tipik değeri $5.9 \times 10^3 g/cm^2$, açısal dönme frekansının tipik değeri 428 Hz, gas basıncının radyasyon basıncına oranı 80, gerçek optik derinlik yaklaşık olarak 5, dış disk viskozite katsayısı 0.096, sınır bölgesi viskozite katsayısı 1, dış disk çözümlerinden gelen C katsayısı 0.89 olup yıldız üzerine saniyede akan tipik kütle miktarı $2 \times 10^{17} g/s$, disk iç yarıçapı 2.95×10^6 cm, en iç diskin dönme hızının Kepler dönme hızına oranı 0.7'dir. Yıldızın dönme frekansı $\nu_* = 300$ Hz'dir.

2.3 Paralel İz Probleminin Açıklanması

Paralel iz probleminin açıklanmasına Bölüm 2.2’de elde ettiğimiz durağan durum standard disk çözümlerindeki Kepler olmayan sınır bölgesi dönme frekansı (eşitlik 2.45) ile belirlenen radyal episiklik frekans ifadesindeki serbest parametrelerin kHz QPO frekanslarına nasıl etki ettiğini inceleyerek başlayacağız. Eşitlik 2.45’i Eşitlik 1.1’de yerine koyup

$$\kappa(r_{in}) = \Omega_K(r_{in}) \left[2\omega \left(2\omega - \frac{3}{2} + \frac{1-\omega}{\alpha_{BL}\varepsilon^2} \right) \right]^{1/2} \quad (2.46)$$

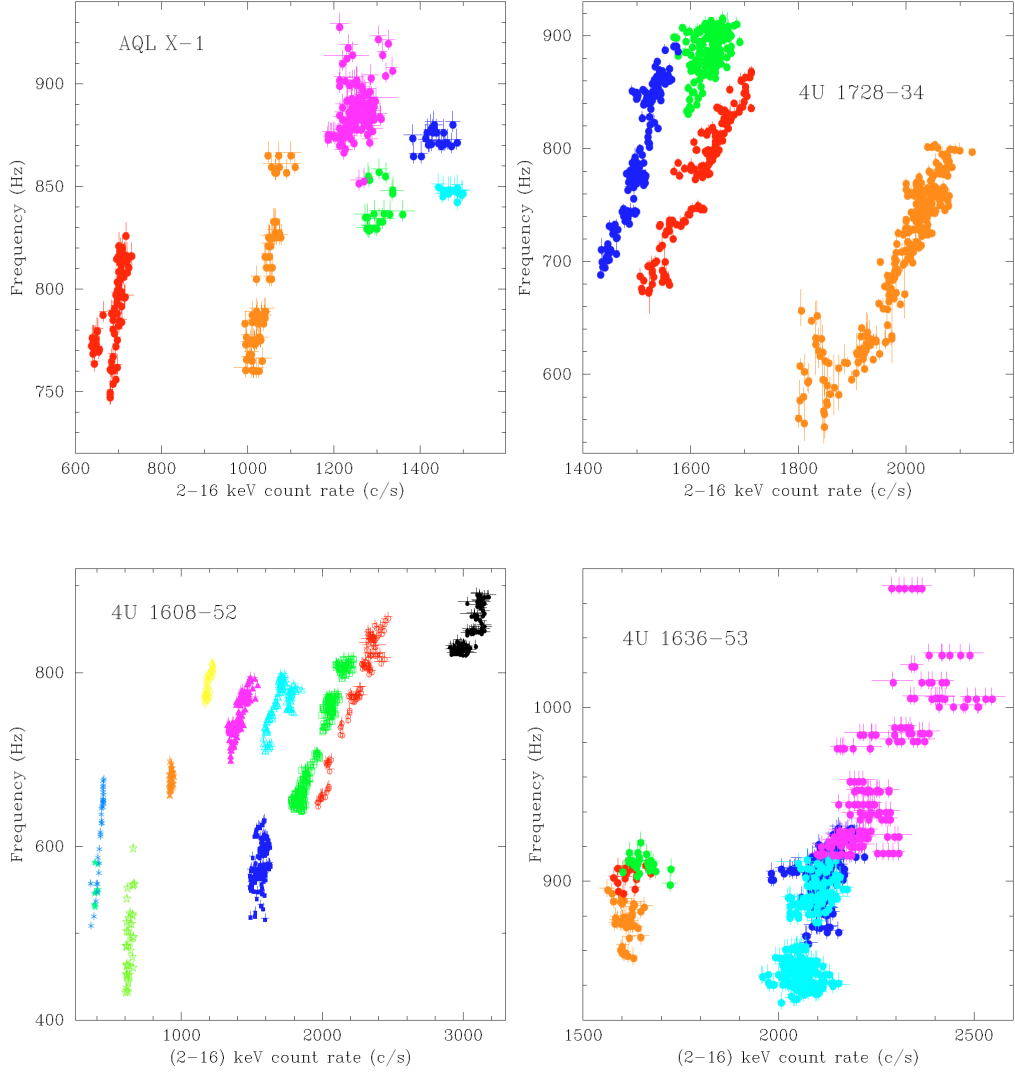
radyal episiklik frekansı için diskin en iç yarıçapındaki çözümü elde etmiş oluyoruz. Bu çözüm fark frekansı olan $\Omega(r_{in})$ ile birlikte bize kHz QPO çiftlerimizi verecektir. Eşitlik 2.46 içerisindeki ε ve α_{BL} gibi serbest parametrelerdeki değişimlerin frekanslar üzerindeki etkisini Şekil 2.4’te görmekteyiz.



Şekil 2.4: Radyal episiklik frekans çözümündeki serbest parametrelerin alt kHz QPO frekansları üzerindeki etkisi.

Serbest parametrelerin a) sabit olduğu $\alpha_{BL} = 30$, $\varepsilon = 0.08$, b) azaldığı $\alpha_{BL} = [50, 40]$, $\varepsilon = [0.08, 0.07]$ ve c) arttığı $\alpha_{BL} = [40, 50]$, $\varepsilon = [0.07, 0.08]$ durumlarda, serbest parametrelerin M arttıkça alt kHz QPO frekansları üzerindeki etkisini görmekteyiz.

Serbest parametrelerin kHz QPO frekansları üzerindeki etkisi sonucu yakaladığımız eğilim özellikle Şekil 2.5’te verilen 4U 1608-52 nötron yıldızı kaynağının gözlemlenmiş kHz QPO - X-ışın akısı korelasyonuna oldukça benzemektedir.



Şekil 2.5: 4U 1608-52, 4U 1636-54, 4U 1728-34 ve Aql X-1 nötron yıldızı kaynaklarından gözlemlenmiş kHz QPO - X-ışın akısı ilişkisi.

Ayrı renklerle gösterilen veriler ayrı gözlem zamanlarına karşılık gelmektedir. İlginç bir ayrıntı da en geniş X-ışın foton akısı aralığına sahip 4U 1608-52 kaynağının benzer X-ışın foton akısı aralıklarında diğer kaynakların davranışlarını taklit edebiliyor olmasıdır. Aql X-1 hariç diğer bütün kaynaklardaki kHz QPO frekans verileri alt kHz QPO frekanslarıdır. Aql X-1 kaynağının kHz QPO frekansları çift olarak gözlemlenmemiştir [Mendez, 2000].

Şekil 2.5'te gösterilen paralel iz olayını detaylı açıklamak için şekil üzerinden QPO frekans verileri toplanmıştır. X-ışın foton akısı dolayısıyla X-ışın akısı parlaklığı

$$4\pi d^2 f = L_x \simeq \frac{GM_* \dot{M}}{R_*} \quad (2.47)$$

şeklinde bağlı olduğundan X-ışın akısı ve kütle aktarım hızı arasında

$$f \propto \dot{M} \quad (2.48)$$

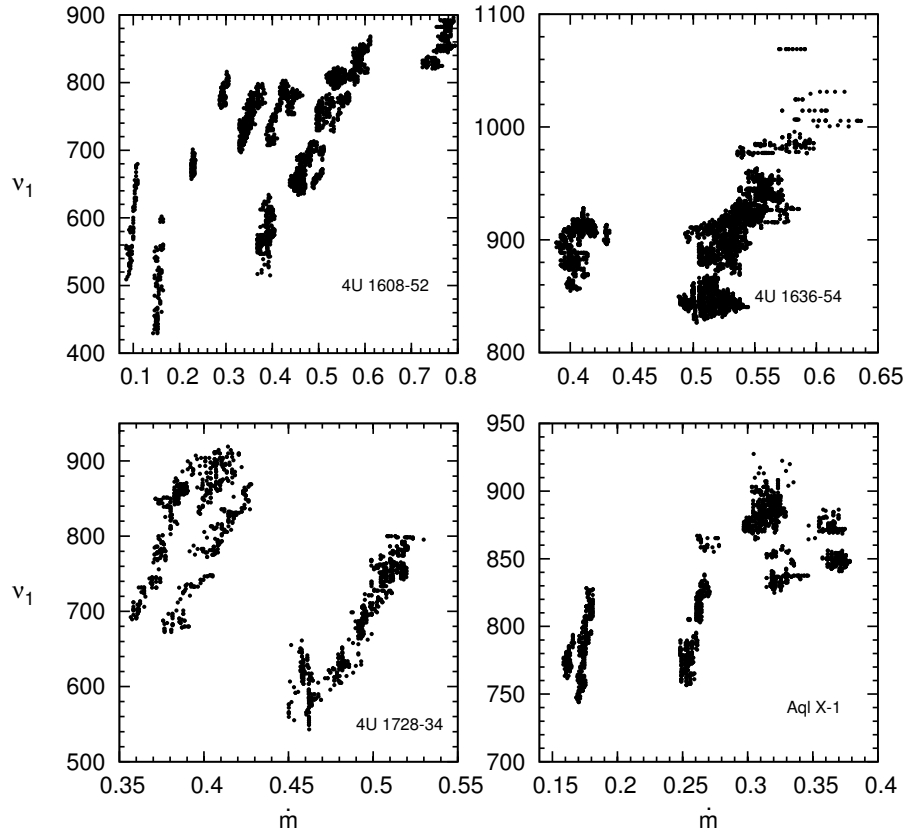
ilişkisi vardır. Bu ilişkiye dayanarak X-ışın akılarının kütle aktarım hızı ile orantılı

olması beklenir. Kaynakların uzaklık ölçümleri ortak değerler veremediğinden yapılan çalışmalar arasındaki farklılıklar X-ışın parlaklığı için önemli olabilmektedir. Bu çalışmada göstereceğimiz örneklerde her kaynak için kütleli $1.4M_{\odot}$, yarıçapı 10 km aldık. Kütle aktarım hızını ise Şekil 2.5'te en geniş X-ışın foton akısı aralığında gözlemlenen 4U 1608-52 kaynağını temel alarak, X-ışın foton akısındaki 400 değerini kütle aktarım hızında 10^{17} g/s'ye denk gelecek şekilde orantı 2.48'ye göre modelledik. Diğer kaynaklar içinde bu ilişkiyi gözönünde bulundurarak kütle aktarım hızlarını hesapladık. Burada açısal dönme hızı çözümünden gelen α_{BL} ve ε^2 çarpımına tek bir serbest gibi davranmayacak ve ayrı tutacak olmamız, α_{BL} katsayısı hakkında bilgimiz olmaması ve modelimiz çerçevesinde bu katsayı ile ilgili bir açıklama getiremeyecek olmamız fakat disk kalınlık parametresinin kütle aktarım hızı ile nasıl değiştiğini modelleyebilecek olmamızdan kaynaklanmaktadır. Eşitlik 2.46'deki iki serbest parametremizden sınır bölgesi vizkosite katsayısı hakkında herhangi bilgimiz olmamasından ötürü bu değişkeni 1 mertebesinde bir sabit olarak frekanslar üzerindeki etkisini en aza düşüreceğiz. Öte yandan disk kalınlık parametresini ince disk yaklaşımına uygun olması için 0.1'in altında salındırarak ve hızlılık parametresini Kepler altı sınır bölgesi ile tutarlı olmak amacıyla 1'in altında tutarak, Şekil 2.5 üzerinden topladığımız veriyi örnek kaynaklarımız için tekrardan elde etmeye çalışacağız.

Gözlemlenmiş frekans - X-ışın foton akısı ilişkisini teorik olarak modelleme sürecine radyal episiklik frekansı veren eşitlik 2.46'i aşağıdaki gibi hatırlayarak başlıyoruz.

$$\kappa(r_{in}) = \Omega_K(r_{in}) \left[2\omega \left(2\omega - \frac{3}{2} + \frac{1-\omega}{\alpha_{BL}\varepsilon^2} \right) \right]^{1/2}$$

Elimizde Şekil 2.5'teki her veri noktası için frekans ve kütle aktarım hızı değerleri bulunmaktadır. Örnek nötron yıldızımız için kütle ve yarıçap değerlerimiz seçilmişti. Mümkün olan en küçük sınır bölgesi vizkosite katsayısı α_{BL} ve uygun bir manyetik alan için en iç yarıçapı hesaplayabiliriz. Dolayısıyla Kepler dönme hızı ve hızlılık parametresinin ne olduğunu hesaplayabiliriz. Artık elimizde bilinmeyen olarak kalan tek parametre disk kalınlık parametresidir. Disk kalınlık parametresini modelimiz dahilinde her veri noktası için tek tek hesapladıktan sonra, disk kalınlık parametresi ve hızlılık parametresinin üst sınır koşulları $\varepsilon < 0.1$ ve $\omega < 1.0$ göz önünde bulundurularak bütün veri noktalarını tek tek kopyalayabilecek uygun parametre değerleri bulunabilmektedir. Burada örnek teşkil etmesi açısından X-ışın foton akısı oran 2.48'ye göre 10^{17} g/s ile ölçeklendirilmiştir. Aynı işlemler daha düşük ve daha yüksek kütle aktarım oranları için de tekrarlanabilir.



Şekil 2.6: Şekil 2.5 üzerinden alınan verilerin teorik modelimiz çerçevesinde yeniden oluşturulması. Paralel iz verileri X-ışın akısı yerine kütle aktarım hızının fonksiyonu olarak, alt kHz QPO frekansları için disk kalınlık parametresinin, ε , teorik modelimiz kapsamında salındırılması ile tekrardan oluşturuldu ($\dot{m} = \dot{M}/10^{18}g/s$).

Şekil 2.6'nın yeniden oluşturulması sürecinde salındırılan disk kalınlık parametresinin öngörülen kütle aktarım hızı aralığında nasıl değiştiğini Şekil 2.7'de görebilirsiniz. Düz çizgi ile gösterilen fit fonksiyonu [Shakura and Sunyaev, 1973] radyasyon basıncının baskın olduğu A bölgesinde yarı disk kalınlığı çözümü olan eşitlik 2.36 ile verilen yarı disk kalınlığının disk iç yarıçapındaki değeri ile elde edilmiştir. Ölçek parametreleri a ve H_0 kullanılarak

$$H_t = aH_{ss} \pm H_0 \quad (2.49)$$

yazılabilir. Burada $\dot{m} = \dot{M}/(10^{18}g/s)$ ve $r_{A,18} = r_A|_{\dot{M}=10^{18}g/s}$ tanımlamaları altında A bölgesi yarı disk kalınlığının boyutlu ifadesi

$$\begin{aligned}
H_{ss} &= \frac{3}{8\pi} \frac{\kappa_T}{c} \left(\frac{\dot{M}}{\dot{M}_{18}} \right) \dot{M}_{18} \left[1 - C \left(\frac{r_{in}}{r_{Sch}} \right)^{-1/2} \right] \\
&= \frac{3}{8\pi} \frac{\kappa_T}{c} \dot{m} \dot{M}_{18} \left[1 - C \left(\frac{r_{in}}{r_{Sch}} \right)^{-1/2} \right]
\end{aligned} \tag{2.50}$$

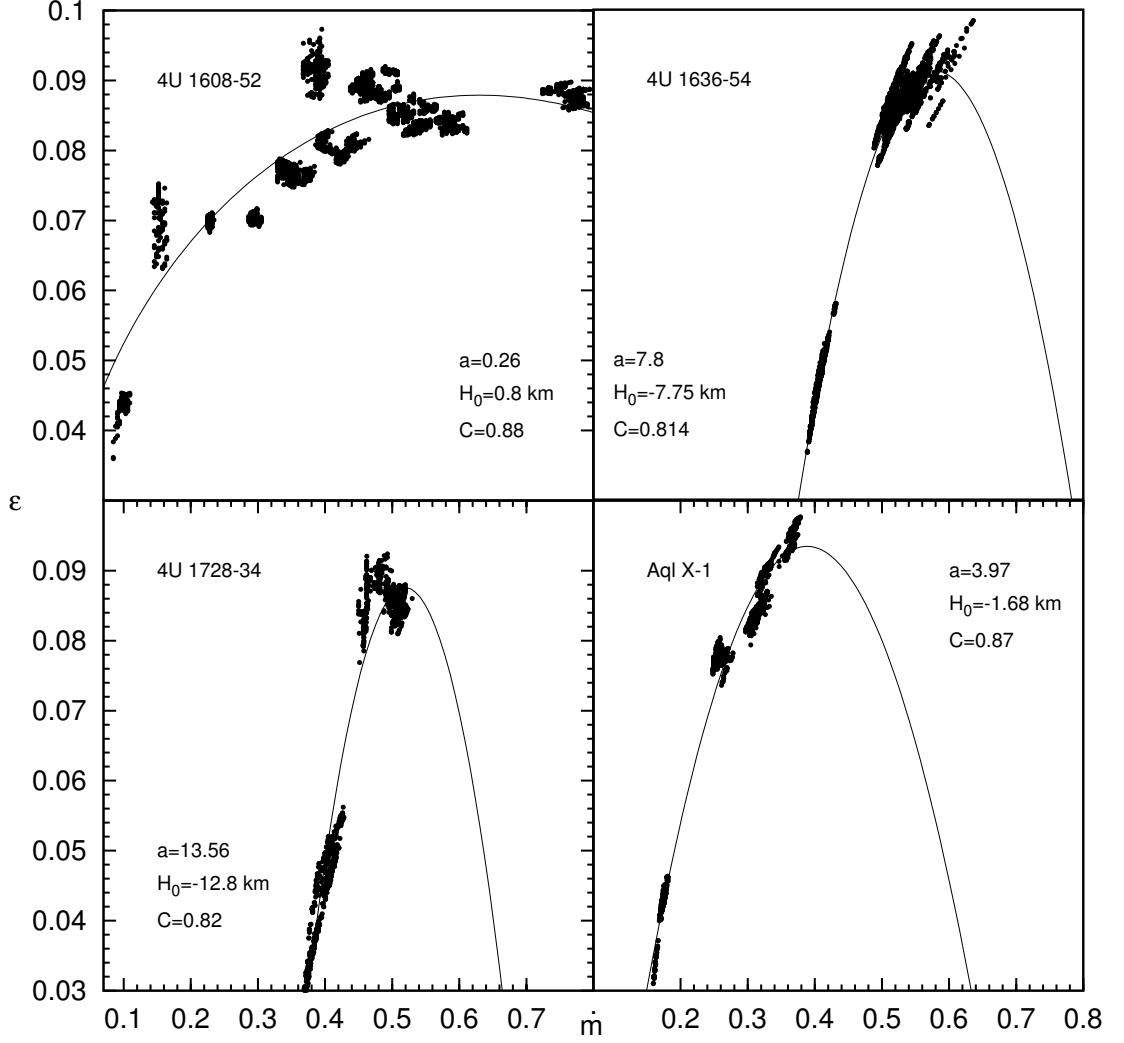
olup, diskin en iç yarıçapı

$$\begin{aligned}
r_{in} &= (GM_*)^{-1/7} \dot{M}^{-2/7} (B_* R_*)^{4/7} \\
&= (GM_*)^{-1/7} \dot{m}^{-2/7} \dot{M}_{18}^{-2/7} (B_* R_*)^{4/7} \\
&= r_{A,18} \dot{m}^{-2/7}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

şeklinde yazılarak ε için için fit fonksiyonu boyutsuz tipik kütle yığılma hızı \dot{m} cinsinden

$$\varepsilon = \frac{H_t}{r_{in}} = aA\dot{m}^{9/7} - aB\dot{m}^{10/7} \pm \frac{H_0}{r_{A,18}} \dot{m}^{2/7} \tag{2.52}$$

olarak yazılabilir. Böylece disk kalınlığının kütle aktarımı ile değişimi modellemiş oluyoruz.

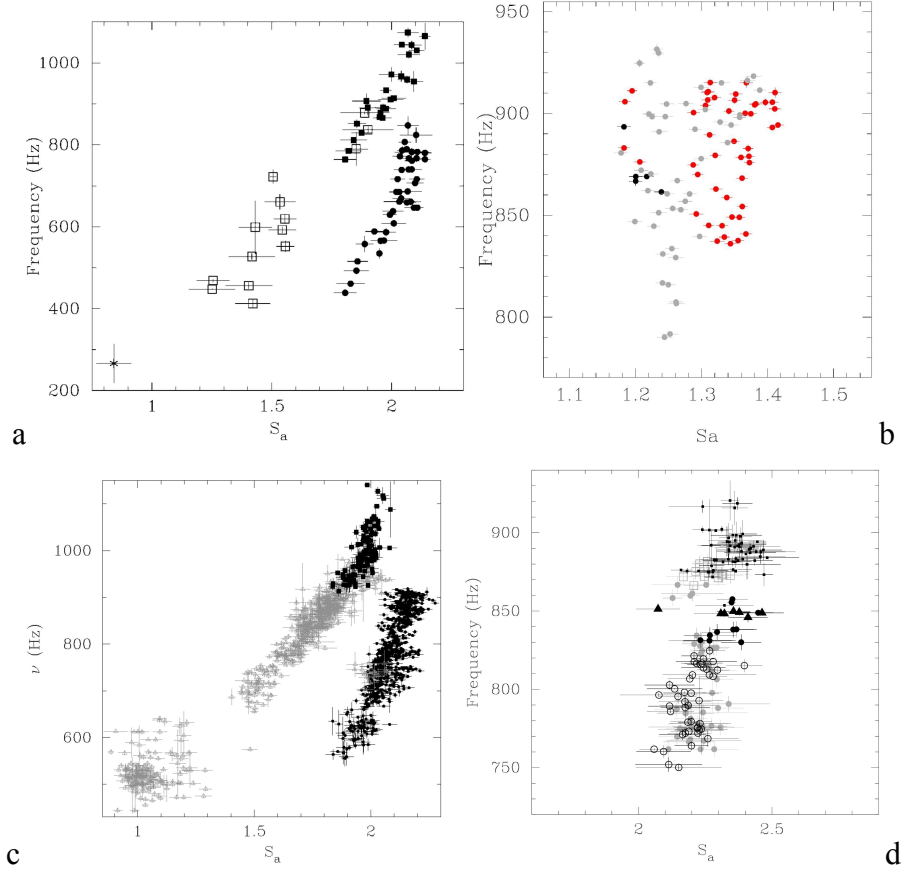


Şekil 2.7: kHz QPO frekanslarını tekrardan üretmek için salındırılan disk kalınlık parametresinin kütle aktarım hızı ile değişimi.

Şekil 2.5'te paralel iz verilerini tekrardan oluşturmak için salındırdığımız disk kalınlık parametresinin kütle aktarım hızı ile değişimine radyasyon basıncının dominant olduğu disk yarı kalınlığı çözümünü kullanarak fiziksel fit yaptık.

Şekil 2.7'de, Şekil 2.6'dan toplanan kHz QPO verilerini Şekil 2.5'te modelimiz kapsamında tekrardan elde ederken kullandığımız disk kalınlık parametresi değerlerinin, diskteki kütle aktarım hızına bağlı değişimi görülmektedir. Disk kalınlık parametresi standart disk çözümlerinden gelen eşitlik 2.52'ün tahmin ettiği eğilimde değişmektedir. Bu sonuç kHz QPO frekansları ile X-ışın akısı arasında büyük zaman ölçeklerinde belirli bir korelasyon olmamasına dair getirdiğimiz olası açıklama olan büyük zaman ölçeklerindeki gözlemlerde kHz QPO frekanslarının diskteki kütle aktarım hızının dışında ikinci bir parametreye de bağlılık gösterebileceğini desteklemektedir. Nötron yıldızı LMXB'lerinin zamanlama ve parlaklık korelasyonlarına muhtemel açıklamalar getirdikten sonra sırada bu kaynakların zamanlama özelliklerinin tayfsal özelliklerle

olan ilişkisine bakacağız.



Şekil 2.8: 4 kaynağın kHz QPO - S_a ilişkisi.

Şekil 2.8’de a) 4U 1608-52 [Mendez v.d., 1999], b) 4U 1636-54 [Di Salvo v.d., 2003], c) 4U 1728-34 [Mendez ve van der Klis, 1999], d) Aql X-1 [Reig v.d., 2000] kaynaklarının kHz QPO k.g. X-ışın renk-renk diyagramı pozisyon parametresi arasındaki lineer korelasyonunu görmekteyiz.

Şekil 1.5’te 4U 1608-52 kaynağı için belirtildiği üzere alt ve üst kHz QPO frekansları ile, X-ışın renk-renk diyagramının konum parametresi S_a arasında korelasyon vardır. Bu ilişkiye modelimiz dahilinde olası bir açıklama getirmek için kHz QPO frekanslarımızın değerlerini belirleyen eşitlik 2.46’yı aşağıda gösterildiği üzere iki kısma ayırıyoruz. Öncelikle

$$\begin{aligned}\Omega_K(r_{in}) &= \left(\frac{GM_*}{r_{in}}\right)^{1/2} \\ &= (GM_*)^{5/7} \dot{M}^{3/7} (B_* R_*)^{-6/7},\end{aligned}\quad (2.53)$$

$$\nu_* \equiv \nu_{burst} = \sqrt{\frac{GM_*}{r_{co}^3}}\quad (2.54)$$

ve

$$\begin{aligned}
\omega_* &= (GM_*)^{-5/7} (2\pi\nu_{burst}) \dot{M}^{-3/7} (B_* R_*)^{6/7} \\
&= \frac{D}{2} \dot{M}^{3/7}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

$$D = (GM_*)^{-5/7} (4\pi\nu_{burst}) (B_* R_*)^{6/7}$$

yazarak

$$\begin{aligned}
\kappa(r_{in}) &= \Omega_K(r_{in}) \left[2\omega \left(2\omega - \frac{3}{2} + \frac{1-\omega}{\alpha_{BL}\varepsilon^2} \right) \right]^{1/2} \\
&= A_1 B_1(\varepsilon, \dot{M})
\end{aligned} \tag{2.56}$$

elde edilebilir. Burada

$$A_1 = \sqrt{\frac{4\pi GM_*}{(r_{co} r_{A,18})^{3/2}}} \tag{2.57}$$

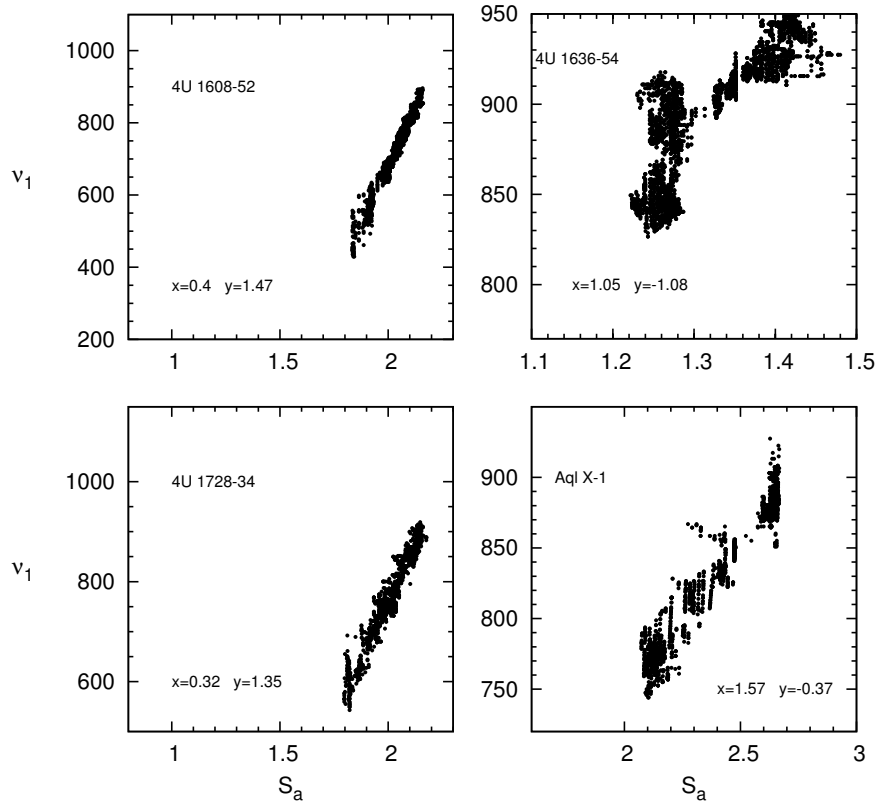
ve

$$B_1(\varepsilon, \dot{M}) = \dot{m}^{3/14} \left[D \dot{M}_{18}^{-3/7} \dot{m}^{-3/7} - \frac{3}{2} + \frac{1}{\alpha_{BL}\varepsilon^2} \left\{ 1 - \frac{D}{2} \dot{M}_{18}^{-3/7} \dot{m}^{-3/7} \right\} \right]^{1/2}. \tag{2.58}$$

Daha önce bahsedilmemiş yarıçap r_{co} yıldızın diskteki Kepler hızı ile aynı hızda döndüğü eş dönme yarıçapını temsil etmektedir. Radyal episiklik frekans ifademizi sabit ve değişken bağımlı iki kısma ayırdıktan sonra renk-renk diyagramlarındaki S_a parametresini

$$S_a = x B_1(\varepsilon, \dot{M}) + y \tag{2.59}$$

eşitliği ile modellendiriyoruz. Eşitlik 2.59'daki $B_1(\varepsilon, \dot{M})$ fonksiyonunda ε ve \dot{M} değerleri için paralel iz verilerini tekrar oluşturmakta kullanılan değerler değerler gözönünde bulundurulmuştur. Eşitlik 2.59'de x ve y parametreleri Şekil 2.8'deki veriyi modellerken kullandığımız fit parametreleridir.



Şekil 2.9: Şekil 2.8 verilerinin modelimiz çerçevesinde simülasyonu. Şekil 2.8’de verilen aralıklarda veri ile şekil 2.9’da tekrardan üretilen verinin uyumu dikkat çekicidir. Fit parametrelerinin değerleri şeklin üzerinde gösterilmiştir.

Şekil 2.8’de nötron yıldızı kaynaklarımıza ait X-ışın renk-renk diyagramı konum parametresi S_a ’ya göre kHz QPO frekanslarının değişimi görülmektedir. S_a parametresi Bölüm 2.2’de radyasyon basıncının baskın olduğu disk bölgesi için elde ettiğimiz radyal episiklik frekans çözümünü kullanarak eşitlik 2.59’e göre modellendirildi. Eşitlik 2.59’de hesaplanan S_a değer aralıklarına karşı gelen kHz QPO frekans aralıklarının Şekil 2.5’te gözlemlenmiş kHz QPO frekans aralıkları ile uyum içerisinde olması ve böylece tayfsal özellikler ve zamanlama özellikleri arasındaki korelasyonun X-ışın renk-renk diyagramı parametresi S_a ’nın bizim modelimiz çerçevesinde diskteki kütle akış hızına olan doğrudan ve dolaylı (ε üzerinden) bağımlılığı ve aynı bağımlılığın kHz QPO frekanslarını belirleyen radyal episiklik frekans içinde olması ile açıklanabileceğini ortaya koymuştur.

Bölüm 3

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tezde düşük manyetik alana sahip 4 adet düşük kütleli nötron yıldızı X-ışın çiftinin etrafındaki yığılma disklerini inceleyerek, bu kaynaklara ait kHz QPO - parlaklık ve kHz QPO - S_a korelasyonlarına muhtemel açıklamalar getirdik. Öncelikle belirli fiziksel sınırlamalar altında optik olarak kalın geometrik olarak ince yığılma disklerinde gözlemlenmiş kHz QPO frekanslarını, örnek kütle ve yarıçapta bir nötron yıldızı etrafındaki örnek kütle aktarım hızına sahip diskte serbest salınım frekans bandları $(\kappa - \Omega) / 2\pi$ ve $\kappa / 2\pi$ 'yi belirleyen radyal episiklik frekans $\kappa / 2\pi$ ve açısız frekans Ω 'yı kullanarak elde edebileceğimizi gösterdik. Daha sonrasında [200-1300] Hz frekans aralığında üretebildiğimiz frekansları barındıracak disklerde olası iki baskın basınç türü için (GPD ve RPD), kütle momentum ve enerji korunumu denklemlerini kullanarak disk parametrelerini veren durağan durum disk çözümlerini elde ettik. Elde edilen çözümlerde kHz QPO frekans ifademizin temelini oluşturan radyal episiklik frekans eşitliğindeki serbest parametrelerin kHz QPO frekansları üzerindeki rolünü inceledik. Bu inceleme sonucunda çalıştığımız nötron yıldızı kaynaklarının uzun süreli gözlemlerinde, kHz QPO frekanslarının küçük zaman ölçeklerinde X-ışın akısı ile lineer korelasyon oluşturup uzun zaman ölçeklerinde herhangi bir korelasyon göstermemesi sonucu ortaya çıkan ve “Paralel İzler” olarak adlandırılan probleme olası bir çözüm belirttik. Bu çözümde kHz QPO frekanslarının kütle aktarım hızına doğrudan bağlı olması yanında bir ikinci parametreye daha bağlılık gösterdiğini ve bu ikinci parametrenin disk kalınlığını belirleyen ε olabileceğine dair analizlerimizi ve bu analizlerin sonuçlarını sunduk. Şekil 2.5'teki verilerin tekrardan oluşturulmasında kullanılan disk kalınlık parametresinin kütle aktarım oranı ile nasıl değiştiğini ve bu değişimin radyasyon basıncının baskın olduğu durağan durum çözümleri ile uyum içerisinde olduğunu Şekil 2.7'de görsel olarak ifade ettik. Kiloherz QPO gözlemlenmiş nötron yıldızı LMXB'lerinde zamanlama ve X-ışın akısı arasındaki korelasyonlara fiziksel olarak tutarlı, muhtemel açıklamalar ve çözümler getirdikten sonra yine bu kaynakların zamanlama ve tayfsal özellikleri arasındaki bir diğer ilişki olan kHz QPO - S_a korelasyonunu açıklamak için modelimiz

çerçevesinde her kaynak için QPO frekanslarının elde edilmesinde yapılan sayısal benzetimlerin ε ve \dot{M} için sonuçlarını kullandık. Böylece X-ışın renk-renk diyagramında pozisyon parametresi olan S_a 'yı, radyal episiklik frekans cinsinden ifade ederek S_a parametresi ve kHz QPO frekansları arasındaki ilişkiye olası bir açıklama getirilebileceğini gösterdik. Model çerçevesinde renk-renk diyagramı parametresi S_a ile diskteki kütle aktarım hızı \dot{M} arasındaki ilişkiyi ortaya koyduk.

Gelecekte yapılması planlanan çalışmalarda, bu çalışmada olası açıklamalar sunduğumuz korelasyonları aynı örnek çözümlerimizde olduğu gibi tekrar edebilen kaç tane farklı kütle, yarıçap ve manyetik alanda nötron yıldızı olabileceğini araştırılması düşünülmektedir. Bu da bize gözlemlenmiş korelasyonlar üzerinden 4U 1608-52, 4U 1636-54, 4U 1728-34 ve Aql X-1 kaynakları için kütle, yarıçap ve manyetik alan tahmini yapabilmemizi sağlayabilir. Bu tahminle birlikte nötron yıldızı hal denklemlerinin hangisi veya hangilerinin elde ettiğimiz sonuçlar ile uyduğu tartışılabilir. Bütün analizler farklı kütle aktarım oranları ve dolayısıyla parlaklık değerleri için tekrarlanıp sonuçları incelenebilir. Bu çalışmalar sırasında X-ışın akısından parlaklık dönüşümü yapılırken nötron yıldızının kütle, yarıçap ve uzaklığının etkisi göz önünde bulundurulmalıdır. Yine temeli bu çalışmaya dayanan bir başka analiz de modelimiz çerçevesinde incelediğimiz ince sınır bölgeleri yerine kalın sınır bölgelerinin bu tip sistemlerde oynayacağı rol ve kalın sınır bölgeleri ile gözlemlerin açıklanmaya çalışılması ile olabilir. Ayrıca kütle aktarım diskinden kaynaklanan fotonların enerjilerinin gözlemlenen kHz QPO frekanslarının enerjilerinden düşük olması, burada kullanılan modelin içermediği diskin üzerinde ters Compton saçılmasının etkili olabileceği optik olarak ince bir korona varlığının gözönünde bulundurulması ve modelimizin geliştirilmesi konusunda bize motivasyon kaynağı olacaktır.

Ek A

KORUNUM EŞİTLİKLERİ

A.1 Kütle Korunumu

Standard durağan durum disk çözümü için [Shakura ve Sunyaev, 1973]'de öngörülen temel varsayımlar

$$1-\partial/\partial t = 0$$

$$2-\partial/\partial\phi = 0$$

$$3-\nu_{r\phi} \neq 0$$

$$4-\nu_{r\phi} = \rho\nu D_{r\phi} = \rho\nu (\partial v_\phi/\partial r + 1/r (\partial v_r/\partial\phi) - v_\phi/r)$$

altında m kütle, ρ yoğunluk, V hacim ve t zaman olmak üzere kütledeki değişimin genel ifadesi

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (\text{A.1})$$

olur. V hacminde bir akışkanı ele aldığımızda kütlede zamanla oluşan değişim, birim yüzeyden geçen madde akış oranının $(\rho\vec{v})$ eksi işaretlisine eşittir.

$$\frac{\partial m}{\partial t} = - \oint (\rho\vec{v}) \cdot \vec{n} dA \quad (\text{A.2})$$

Eşitlik A.2'e diverjans teoremi uygulanırsa;

$$- \oint (\rho\vec{v}) \cdot \vec{n} dA = - \int (\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v})) dV$$

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) dV$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \rho \cdot \vec{v} + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0 \quad (\text{A.3})$$

ve denklem A.3 bileşenlerine ayrılır ve temel varsayımlar gözönüne alınırsa;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (v_r \hat{r} + v_\phi \hat{\phi} + v_z \hat{z}) + \rho \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0 \\ v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ifadesi elde edilir.

A.2 Momentum Korunumu

V hacmindeki akışkanın momentumunda zamana bağlı değişim; A yüzeyinden akan akışkanın momentum akısının yüzey integralinin eksi işaretlisi, A yüzeyinden geçen akışkanın üzerine etkiyen iç gerilimlerin etkisi (birim alan başına kuvvet), V hacminin her noktasında etkiyen hacimsel kuvvetlerin katkısının (kütleçekim kuvveti gibi) toplamıdır.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = - \oint_A (\rho v_i) v_k n_k dA + \oint_A p_{ik} n_k dA - \int_V \rho \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} dV \quad (\text{A.5})$$

Diverjans teoremi uygulandıktan sonra denklem A.5 aşağıdaki halini alır.

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\rho \vec{\nabla} \Gamma - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} \quad (\text{A.6})$$

Navier-Stokes denklemi temel varsayımlarımız altında bileşenlerine ayrılması sonucu momentum korunumunun radyal bileşeni;

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} \right) = -\rho \frac{\partial \Gamma}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \nu_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \nu_{zr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \nu_{\phi\phi} \quad (\text{A.7})$$

şeklinde ifade edilir. Temel varsayımlarımız altında denklem A.7

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} \right) = -\rho \frac{\partial \Gamma}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r}$$

halini alır. Burada $v_\phi = \Omega r$ 'dir ve hacimsel kuvvetlerden gelen katkı

$$\Gamma = -\frac{GM_*}{(r^2 + z^2)^{1/2}}$$

olarak ifade edilir. Momentum korunumunun son şekli

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \Omega^2 r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{GM_*}{r^2} \left(1 + \frac{z^2}{r^2} \right)^{-3/2}$$

olur. Momentum korunumunun z bileşeni

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\rho \frac{\partial \Gamma}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \nu_{zr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial \nu_{zz}}{\partial z} \right)$$

ifadesiyle verilir. Temel varsayımlarımız altında denklem

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\rho \frac{\partial \Gamma}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}$$

şeklinde yazılabilir. Hacimsel kuvvetlerden gelen katkılar yerine yazılır ve bu ifadenin en son terimi seriye açılırsa momentum eşitliğinin z bileşeni son olarak

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{GM_* z}{r^3} \left(1 + \frac{z^2}{r^2} \right)^{-3/2}$$

halinde yazılabilir. Momentum korunumunun ϕ bileşeni

$$\rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} v_r v_\phi \right) = -\frac{\rho}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \nu_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \nu_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r} \nu_{r\phi} \quad (\text{A.8})$$

olarak ifade edilebilir. Denklem A.8’de momentum eşitliğinin diğer iki bileşeninden farklı olarak momentum korunumunun baskın stres tensörlerine olan bağımlılığı da ortaya çıkmaktadır. Temel varsayımlarımız altında sadeleştirmeler yapıldıktan sonra denklem A.8

$$v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} v_r v_\phi = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r \nu_{r\phi}) + \frac{1}{\rho r} \nu_{r\phi} \quad (\text{A.9})$$

şeklini alır. Stres tensörümüzün genel ifadesi

$$\nu_{r\phi} = \nu \rho D_{r\phi} = \nu \rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \right) = \nu \rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right)$$

şeklinde olup

$$\nu \rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right) = \nu \rho \left(\frac{\partial}{\partial r} (r\Omega) - \Omega \right) = \nu \rho r \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

$$\nu_{r\phi} = \nu \rho r \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

olarak yazılır. Stress tensörünün yukarıdaki formu denklem A.9 içinde yerine konduğu zaman oluşacak şekli aşağıdaki gibi yazılır.

$$v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} v_r v_\phi = \frac{1}{\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \nu r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \quad (\text{A.10})$$

Denklem A.10’in her iki yanını r ile bölünür, sol taraftaki kısmi türevler açık olarak yazılır ve denklem düzenlenirse

$$\frac{v_r}{r} \frac{\partial (r\Omega)}{\partial r} + \frac{v_z}{r} \frac{\partial (r\Omega)}{\partial z} + \frac{1}{r^2} v_r \Omega r = \frac{1}{\rho r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \nu r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)$$

$$v_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\Omega}{r} v_r + v_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{\Omega}{r} v_r = \frac{1}{\rho r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \nu r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)$$

$$v_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + v_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{2\Omega}{r} v_r = \frac{1}{\rho r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \nu r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)$$

denklem A.9 en son olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{v_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega) + v_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{1}{\rho r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \nu r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \quad (\text{A.11})$$

Sonuç olarak Navier-Stokes denkleminin bileşenlerine ayrılmış hali;

$$\begin{aligned} & \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \Omega^2 r \right) \hat{r} + \left(\rho \left(v \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right) \hat{\phi} \\ & + \left(\frac{v_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega) + v_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) \hat{z} = \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{GM_*}{r^2} \left(1 + \frac{z^2}{r^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right) \hat{r} \\ & + \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{GM_* z}{r^3} \left(1 + \frac{z^2}{r^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right) \hat{\phi} + \left(\frac{1}{\rho r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \nu r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \right) \hat{z} \end{aligned}$$

olarak yazılır.

A.3 Enerji Korunumu

V hacmindeki akışkanın toplam enerjisinin zamana bağlı olarak değişimi (akışkan hareketinin kinetik enerjisi + iç enerji); enerji akısının yüzey integralinin eksi işaretlisi (kinetik + potansiyel), iç gerilimlerce yapılan işin yüzey integrali, yerel kuvvetlerce (kütleçekimsel kuvvet vb.) yapılan işin hacim üzerinden integrali, A yüzeyinde vizkosite kaynaklı ısı kaybının eksi işaretlisi, yerel kaynaklar ve kayıplar nedeniyle enerjideki hacimsel kazanımlar ve kayıplar arasındaki farkların toplamıdır.

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \varepsilon = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + Q_v$$

Enerjideki hacimsel kazanımlar ve kayıplar arasındaki fark simetrik deformasyon tensörü D_{ik} cinsinden

$$Q_v = \sum_{i,k} \nu_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad \nu_{ik} = \nu \rho D_{ik}$$

$$Q_v = \sum_{ik} \rho \nu D_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \sum_{ki} \rho \nu D_{ki} \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

şeklinde ifade edilebildiğinden ve

$$D_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \delta_{ik}$$

$$D_{ik} = D_{ki}$$

olduğundan dolayı enerjideki hacimsel kazanımlar ve kayıplar arasındaki fark

$$Q_v = \frac{1}{2} \rho \nu \sum_{ik} \left(D_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + D_{ki} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

$$Q_v = \frac{1}{2} \rho \nu \sum_{ik} D_{ik} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \rho \nu \sum_{ik} D_{ik} \left(D_{ik} + \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \delta_{ik} \right) \quad (\text{A.12})$$

şeklinde yazılır.

$$\sum_{ik}^n D_{ii} = 0$$

koşulu altında denklem A.12

$$Q_v = \frac{1}{2} \rho \nu \sum_{ik} D_{ik} D_{ik} + \frac{1}{3} \rho \nu (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \left(\sum_i D_{ii} \right)$$

$$Q_v = \frac{1}{2} \rho \nu (D_{r\phi}^2 + D_{\phi r}^2) = \rho \nu D_{r\phi}^2 \quad (\text{A.13})$$

halini alır. Simetrik deformasyon hızı tensörümüz r ve ϕ yönlerindeki hızlar cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$D_{r\phi} = \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} = \frac{\partial (r\Omega)}{\partial r} - \Omega = r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \quad (\text{A.14})$$

Denklem A.14 denklem A.13'de yerine konulursa

$$Q_v = \rho \nu r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2$$

elde edilir ve enerji korunumu denklemimiz aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \rho C_v \left[\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] &= -p \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \\ &\quad - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rF^r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F^\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F^z}{\partial z} \right) \\ &\quad + \rho \nu r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \end{aligned}$$

Sonuç olarak enerji denklemimiz bileşenlerine ayrılıp temel varsayımlar altında basitleştirildiğinde ışınlım akısının bileşenleri

$$\begin{aligned} F^r &= -\frac{4ac T^3}{3 \kappa \rho} \frac{\partial T}{\partial r} \\ F^z &= -\frac{4ac T^3}{3 \kappa \rho} \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}$$

olmak üzere ortaya aşağıdaki denklem çıkar.

$$\begin{aligned} \rho C_v \left[v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] &= -p \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \\ &\quad - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rF^r) - \frac{\partial F^z}{\partial z} + \rho \nu r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \end{aligned}$$

Ek B

KORUNUM DENKLEMLERİNİN BOYUTSUZLAŞTIRILMASI

alt indisinde t olan terimler nötron yıldızımız için tipik değerler, “~” lı değerler ise nötron yıldızımızdaki parametrelerin alt indisinde t olan değerlere bölünmesi ile elde edilmiş boyutsuz katsayılardır.

$$v_r = c_s \tilde{v}_r$$

$$v_z = c_s \tilde{v}_z$$

$$\Omega = \Omega_K(r_{in}) \tilde{\Omega} = \tilde{\Omega} \left(\frac{GM_*}{r_{in}^3} \right)^{1/2}$$

$$\rho = \rho_t \tilde{\rho}$$

$$r = r_{in} \tilde{r}$$

$$H = H_t \tilde{H}$$

$$p = p_t \tilde{p} = \tilde{p} \rho_t c_s^2$$

$$\epsilon = \frac{H_t}{r_{in}} = \frac{c_s}{\Omega_K(r_{in}) r_{in}} = c_s \left(\frac{r_{in}}{GM_*} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$T = T_t \tilde{T}$$

$$F^r = F_t^r \tilde{F}^r = -\frac{4ac \tilde{T}^3}{3} \frac{\partial \tilde{T}}{\tilde{\kappa} \tilde{\rho} \partial \tilde{r}} \frac{T_t^3}{\kappa_t \rho_t} = \tilde{F}^r \frac{T_t^4}{\kappa_t \rho_t r_t}$$

$$F^z = \tilde{F}^z \frac{T_t^4}{\kappa_t \rho_t H_t}$$

B.1 Navier-Stokes Denklemine Boyutsuzlaştırılması

Momentum denkleminin r bileşeni

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \Omega^2 r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{GM_*}{r^2} \left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)^{-3/2} \quad (\text{B.1})$$

olarak yazılır. Denklem B.1 parametrelerimiz boyutsuz parametreler ve tipik değerler cinsinden

$$\tilde{v}_r \frac{c_s^2}{r_{in}} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} + \tilde{v}_z \frac{c_s}{H_t} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{z}} - \tilde{\Omega}^2 \tilde{r} \Omega_K^2(r_{in}) r_{in} = -\frac{p_t}{\tilde{\rho} \rho_t r_{in}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} - \frac{GM_*}{r_{in}^2 \tilde{r}^2} \left(1 + \left(\frac{H_t^2}{r_{in}^2}\right) \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{r}^2}\right)^{-3/2} \quad (\text{B.2})$$

şeklinde yazılabilir. Denklem B.2 r_{in}^2/GM_* ile çarpılırsa

$$c_s^2 \frac{r_{in}}{GM_*} \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} + \frac{r_{in}}{GM_*} \frac{c_s}{H_t} \left(\frac{GM_*}{r_{in}}\right)^{1/2} \frac{H_t}{r_{in}} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} - \tilde{\Omega}^2 \tilde{r} \Omega_K^2(r_{in}) \frac{r_{in}^3}{GM_*} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{r_{in}}{GM_*} c_s^2 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}^2} \left(1 - \epsilon^2 \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{r}^2}\right)^{-3/2} \quad (\text{B.3})$$

gibi yazılabilir ve denklem B.3'deki son ifadenin seriye açılımı

$$\left(1 - \epsilon^2 \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{r}^2}\right)^{-3/2} = 1 - \epsilon^2 \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{r}^2} + \dots$$

olur. Son olarak momentum korunumu denkleminin radyal bileşeni

$$\epsilon^2 \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} + \epsilon \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{z}} - \tilde{\Omega}^2 \tilde{r} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \epsilon^2 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{3}{2} \epsilon^2 \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{r}^2}$$

halini alır. Momentum denkleminin \hat{z} bileşeni

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{GM_* z}{r^3} \left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)^{-3/2}$$

şeklinde ifade edilmekte olup, denklemin parametreleri boyutsuzlaştırıldığında

$$\begin{aligned} \tilde{v}_r c_s \frac{c_s}{r_{in}} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{r}} + \tilde{v}_z \frac{c_s^2}{H_t} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} &= -\frac{1}{\rho_t \tilde{\rho}} \frac{p_t}{H_t} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \\ &\quad - \frac{GM_* \tilde{z}}{\tilde{r}^3} \frac{H_t}{r_{in}^3} \left(1 + \left(\frac{H_t^2}{r_{in}^2} \right) \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{r}^2} \right)^{-3/2} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

ortaya çıkar. Denklem B.4 $r_{in}^3 / (GM_* H_t)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \frac{r_{in}^3}{GM_* H_t} \frac{c_s^2}{r_{in}} \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{r}} + \frac{r_{in}^3}{GM_* H_t} \frac{c_s^2}{H_t} \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} &= -\frac{r_{in}^3}{GM_* H_t} \frac{c_s^2}{H_t} \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \\ &\quad - \frac{\tilde{z}}{\tilde{r}^3} \left(1 + \epsilon^2 \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{r}^2} \right)^{-3/2} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Sadeleştirmeler sonrası momentum denkleminin z bileşeni

$$\epsilon \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} - \frac{\tilde{z}}{\tilde{r}^3} + \frac{3}{2} \epsilon^2 \frac{\tilde{z}^3}{\tilde{r}^5}$$

halini alır. Momentum denkleminin $\hat{\phi}$ bileşeni

$$\frac{v_r}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega) + v_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{1}{\rho r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \rho r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \quad (\text{B.5})$$

yazılmakla beraber parametrelerimiz boyutsuzlaştırıldığında denklem B.5

$$\frac{c_s}{r_{in}} \Omega_K(r_{in}) \frac{\tilde{v}_r}{\tilde{r}^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r}^2 \tilde{\Omega} \right) + \frac{c_s}{H_t} \Omega_K(r_{in}) \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}} = \frac{\nu_t \rho_t r_{in}^3 \Omega_K(r_{in})}{\rho_t r_{in}^5} \frac{1}{\tilde{\rho} \tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{v} \tilde{\rho} \tilde{r}^3 \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{r}} \right) \quad (\text{B.6})$$

şeklinde yazılır. Denklem B.6 $H_t / c_s \Omega_K(r_{in})$ ile çarpılırsa

$$\frac{\tilde{v}_r}{\tilde{r}^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r}^2 \tilde{\Omega} \right) + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}} = \alpha \epsilon^2 \frac{1}{\tilde{\rho} \tilde{r}^3} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{v} \tilde{\rho} \tilde{r}^2 \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{r}} \right)$$

olarak yazılır.

B.2 Süreklilik Eşitliğinin Boyutsuzlaştırılması

Süreklilik eşitliğinin genel ifadesi

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

şeklinde olup boyutsuzlaştırılması ile

$$\frac{\rho_t c_s}{r_{in}} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{\rho} \tilde{v}_r) + \frac{\rho_t c_s}{H_t} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\tilde{\rho} \tilde{v}_z) = 0 \quad (\text{B.7})$$

elde edilir. Denklem B.7 $H_t/\rho_t c_s$ ile çarpılırsa süreklilik eşitliğinin boyutsuzlaştırılmış şekli

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{\rho} \tilde{v}_r) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\tilde{\rho} \tilde{v}_z) = 0 \quad (\text{B.8})$$

olarak bulunur.

B.3 Enerji Denkleminin Boyutsuzlaştırılması

Enerji denkleminin genel ifadesi

$$\rho C_v \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -\chi p \left(1 \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \nu \rho r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F^r) - \frac{\partial F^z}{\partial z}$$

olup boyutsuzlaştırıldığında

$$\begin{aligned} \rho_t \tilde{\rho} C_v \left(\tilde{v}_r \frac{c_s}{r_{in}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (T_t \tilde{T}) + \tilde{v}_z \frac{c_s}{H_t} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (T_t \tilde{T}) \right) &= -p_t \tilde{p} \left[\frac{1}{\tilde{r} r_{in}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} r_{in} \tilde{v}_r c_s) + \frac{c_s}{H_t} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} \right] \\ &+ \nu_t \tilde{\nu} \rho_t \tilde{\rho} \tilde{r}^2 r_{in}^2 \frac{\Omega_K(r_{in})}{r_{in}^2} \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{r}} \right)^2 \\ &- \frac{1}{r_{in} \tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[r_{in} \tilde{r} \left(\tilde{F}^r \frac{T_t^4}{\kappa_t \rho_t r_{in}} \right) \right] \\ &- \frac{1}{H_t} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\tilde{F}^z \frac{T_t^4}{\kappa_t \rho_t H_t} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

ifadesi elde edilir. Denklem B.9 sadeleştirildiğinde enerji denklemi

$$\begin{aligned} \frac{\rho_t c_s T_t}{H_t} \tilde{\rho} C_v \left(\frac{H_t}{r_{in}} \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \right) &= -\frac{\rho_t c_s^3}{H_t} \tilde{p} \left(\frac{H_t}{r_{in}} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{v}_r) + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} \right) \\ &+ c_s H_t \rho_t \Omega_K^2(r_{in}) \alpha \tilde{\nu} \tilde{\rho} \tilde{r}^2 \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{r}} \right)^2 \\ &+ \frac{4ac}{3} \frac{T_t^4}{\kappa_t \rho_t H_t^2} \left[\frac{H_t^2}{r_{in}} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{F}^r) + \frac{\partial \tilde{F}^z}{\partial \tilde{z}} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

şeklinde yazılabilir. Denklem B.10 $H_t/\rho_t c_s^2$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_t T_t}{\rho_t c_S^2} \tilde{\rho} C_v \left(\epsilon \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \right) &= -\tilde{p} \left[\epsilon \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{v}_r) + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} \right] \\
&+ \alpha \tilde{\nu} \tilde{\rho} \tilde{r}^2 \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{r}} \right)^2 \\
&- \frac{4ac}{3} \frac{T_t^4}{\kappa_t \rho_t H_t^2} \frac{H_t}{\rho_t c_s^3} \left(\epsilon^2 \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{F}^r) + \frac{\partial \tilde{F}^z}{\partial \tilde{z}} \right) \quad \text{(B)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Enerji denklemi son haliyle

$$\begin{aligned}
\beta_g \tilde{\rho} C_v \left(\epsilon \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \right) &= -\tilde{p} \left[\epsilon \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{v}_r) + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} \right] + \alpha \tilde{\nu} \tilde{\rho} \tilde{r}^2 \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{r}} \right)^2 \\
&- \eta \left[\epsilon^2 \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{F}^r) + \frac{\partial \tilde{F}^z}{\partial \tilde{z}} \right]
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

Ek C

DİSK ÇÖZÜMLERİ

EK B’de elde edilen boyutsuzlaştırılmış korunum denklemleri

$$\varepsilon \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{\rho} \tilde{v}_r) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\tilde{\rho} \tilde{v}_z) = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\varepsilon^2 \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{z}} - \tilde{\Omega}^2 \tilde{r} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{r}^2} \quad (\text{C.2})$$

$$\varepsilon \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{r}} + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} - \frac{\tilde{z}}{\tilde{r}^3} + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \frac{\tilde{z}^3}{\tilde{r}^5} \quad (\text{C.3})$$

$$\varepsilon \frac{\tilde{v}_r}{\tilde{r}^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r}^2 \tilde{\Omega}) + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}} = \alpha \varepsilon^2 \frac{1}{\tilde{\rho} \tilde{r}^3} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{v} \tilde{\rho} \tilde{r}^2 \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{r}} \right) \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} \beta_g \tilde{\rho} C_v \left(\varepsilon \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \right) &= -\tilde{p} \left[\varepsilon \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{v}_r) + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} \right] \\ &\quad + \alpha \tilde{v} \tilde{\rho} \tilde{r}^2 \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{r}} \right)^2 \\ &\quad - \eta \left[\varepsilon^2 \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{F}^r) + \frac{\partial \tilde{F}^z}{\partial \tilde{z}} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\tilde{r} \tilde{\Sigma} \tilde{v}_r = -\varepsilon \mu \tilde{M} \quad (\text{C.6})$$

şeklindedir. Farklı disk bölgelerinin standard durağan durum çözümüne başlamadan önce yukarıdaki C.1 - C.6 numaralı boyutsuz disk denklemlerini içerdikleri boyutsuz değişkenler için “~” olmadan tekrar yazarsak. Boyutsuzlaştırılmış korunum denklemleri

$$\varepsilon^2 v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial v_r}{\partial z} - \Omega^2 r = -\frac{1}{\rho} \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \frac{z^2}{r^2} \quad (\text{C.7})$$

$$\varepsilon v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{z}{r^3} + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \frac{z^3}{r^5} \quad (\text{C.8})$$

$$\varepsilon \frac{v_r}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega) + v_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \alpha \varepsilon^2 \frac{1}{\rho r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \rho r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \quad (\text{C.9})$$

$$\varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (\text{C.10})$$

$$r \Sigma v_r = -\varepsilon \mu \dot{M} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned} \beta_g \rho C_v \left(\varepsilon v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= -p \left[\varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \\ &\quad + \alpha \nu \rho r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \\ &\quad - \eta \left[\varepsilon^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F^r) + \frac{\partial F^z}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

olarak yazılıp bu denklemler C, B, A ve sınır bölgelerinin çözümlerinde kullanılacaktır. Bundan sonraki analizimiz için boyutsuz disk denklemlerinin en son şeklini denklemler C.7 - C.12'deki gibi elde etmiş oluruz. Asimptotik eşleştirme yöntemiyle yapılacak standard durağan durum disk çözümlerinde kullanacağımız pertürbatif açılımlar aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} v_r &= v_{r0} + \varepsilon v_{r1} + \varepsilon^2 v_{r2} + \dots \\ v_z &= v_{z0} + \varepsilon v_{z1} + \varepsilon^2 v_{z2} + \dots \\ p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \\ \Omega &= \Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \varepsilon^2 \Omega_2 + \dots \\ \rho &= \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \dots \\ F^r &= F_0^r + \varepsilon F_1^r + \varepsilon^2 F_2^r + \dots \\ F^z &= F_0^z + \varepsilon F_1^z + \varepsilon^2 F_2^z + \dots \\ \nu &= \nu_0 + \varepsilon \nu_1 + \varepsilon^2 \nu_2 + \dots \\ (\dots) \end{aligned}$$

Sıfırıncı dereceden çözümleri bulmak için, $\varepsilon \rightarrow 0$ durumunda eşitlik C.7

$$\Omega_0 = r^{-3/2}$$

açısal hız için Kepler ifadesini verir. Diğer eşitlikler sıfırıncı mertebede denklem C.10'dan

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 v_{z0}) = 0$$

denklem C.8'ten

$$v_{z0} \frac{\partial v_{z0}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} - \frac{z}{r^3} \quad (\text{C.13})$$

elde edilir fakat $v_{z0} = 0$ olduğundan (düşey denge) denklem C.13

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = \frac{z}{r^3} \rho_0 \quad (\text{C.14})$$

şeklinde yazılır. Denklem C.9

$$v_{z0} \frac{\partial \Omega_0}{\partial z} = 0$$

halini alırken denklem C.12

$$\alpha \nu_0 \rho_0 r^3 \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial r} \right)^2 = \eta \frac{\partial F_0^z}{\partial z} \quad (\text{C.15})$$

olur. Birinci dereceden yani önünde ε katsayısı bulunduran terimler dikkate alındığında denklem C.10;

$$\varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_0 v_{r0}) + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon v_{z1} \rho_0) = 0$$

verir. Düşey yöndeki integrasyon ve simetriden dolayı $v_{z1} = 0$ bulunur. Denklem C.9 $v_{z1} = 0$ olduğundan dolayı

$$\varepsilon \frac{v_{r0}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega_0) = 0$$

verir ve $v_{r0} = 0$ elde edilir. İkinci dereceden yani önünde katsayı olarak ε^2 terimini barındıran ifadeler dikkate alındığında eşitlik C.9

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{v_{r1}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega_0) &= \varepsilon^2 \alpha \frac{1}{\rho_0 r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu_0 \rho_0 r^3 \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial r} \right) \right) \\ \rho_0 r v_{r1} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega_0) &= \alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu_0 \rho_0 r^3 \frac{\partial \Omega_0}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

sonucunu verir. Diskin dış bölgesi için aşağıda yapacağımız tanımlamalarla yukarıdaki denklemlerden yararlanarak, disk üzerinde yüzeysel madde yoğunluğu, sıcaklık, hacimsel yoğunluk gibi parametreler için boyutsuz çözümler yapılacaktır. Yüzeysel madde yoğunluğu

$$\Sigma_0 = \int_{-H_0}^{H_0} \rho(r, z) dz = 2\rho_0 H_0 \quad (\text{C.17})$$

ifadesiyle gösterilir. Ses hızı düşey denge integrasyonundan

$$\int_{-H_0}^{H_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} dz = \int_{-H_0}^{H_0} \frac{z}{r^3} \rho_0 dz$$

$$p_0 = \rho_0 c_{s0}^2$$

$$p_0(H_0) - p_0(-H_0) = \rho_0 H_0^2 r^{-3}$$

$$\rho_0 c_{s0}^2 = \rho_0 H_0^2 \Omega_0^2$$

$$c_{s0}^2 = H_0^2 \Omega_0^2 \quad (\text{C.18})$$

$$c_{s0} \simeq T_0^{1/2} \quad (\text{C.19})$$

şeklinde bulunur. Diskin kalınlığı ses hızına bağlı olarak

$$H_0 \simeq \frac{c_{s0}}{\Omega_0} \simeq T_0^{1/2} r^{3/2} \quad (\text{C.20})$$

şeklinde yazılabilir. Viskozite

$$\nu_0 = c_{s0} H_0 = T_0 r^{3/2} \quad (\text{C.21})$$

tanımlamaları altında denklem C.15 ve denklem C.16'nin integralleri alınırsa denklem C.15'den

$$\int_{-H_0}^{H_0} \alpha \nu_0 \rho_0 r^3 \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial r} \right)^2 dz = \eta \int_{-H_0}^{H_0} \frac{\partial F_0^z}{\partial z} dz$$

$$\alpha \nu_0 \Sigma_0 r^3 \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial r} \right)^2 = 2\eta F_0^z \quad (\text{C.22})$$

ve denklem C.16'den

$$\int_{-H_0}^{H_0} r v_{r1} \rho_0 \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega_0) dz = \int_{-H_0}^{H_0} \alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu_0 \rho_0 r^3 \frac{\partial \Omega_0}{\partial r} \right) dz$$

$$-\mu \dot{M} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega_0) = \alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu_0 \Sigma_0 r^3 \frac{\partial \Omega_0}{\partial r} \right) \quad (\text{C.23})$$

elde edilir.

C.1 C Bölgesi Çözümü

Diskin en dış bölgesi olan C bölgesinde gaz basıncı radyasyon basıncına, ısısal opaklık ise Thomson opaklığına baskındır ($p_g \gg p_r$, $\kappa_{ff} \gg \kappa_T$). Işınım akısı C bölgesinde

$$F_0^z = \frac{1}{2} T_0^4 \frac{1}{\kappa_0 \Sigma_0}$$

olup, opaklık

$$\kappa_0 = \bar{\rho}_0 T_0^{-7/2}$$

yerine konursa

$$F_0^z = \frac{T_0^8}{\Sigma_0^2} r^{3/2} \quad (\text{C.24})$$

elde edilir. Denklem C.24 denklem C.22'de yerine konursa

$$\alpha T_0 r^{3/2} \Sigma_0 r^2 \left(\frac{\partial r^{-3/2}}{\partial r} \right)^2 = 2\eta \frac{T_0^8}{\Sigma_0^2} r^{3/2}$$

Σ_0 ve T_0 arasındaki ilk bağıntı

$$\frac{9\alpha}{8\eta} \Sigma_0^3 r^{-3} = T_0^7 \quad (\text{C.25})$$

şeklinde bulunur ve artık sıcaklık yüzeysel madde yoğunluğu cinsinden ifade edilebilir hale gelecektir. Denklem C.23'un radyal uzunluk boyunca integrali alınırsa

$$\int -\mu \dot{M} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega_0) dr = \int \alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu_0 \Sigma_0 r^3 \frac{\partial \Omega_0}{\partial r} \right) dr$$

$$r^2 \Omega_0 - C = \left(-\frac{\alpha}{\mu \dot{M}} \right) T_0 r^{3/2} \Sigma_0 r^3 \frac{\partial \Omega_0}{\partial r}$$

$$r^{1/2} - C = \left(-\frac{\alpha}{\mu \dot{M}} \right) T_0 r^{3/2} \Sigma_0 r^3 \left(-\frac{3}{2} r^{-5/2} \right)$$

sıcaklık ile yüzeysel madde yoğunluğu arasındaki ikinci bağlantı

$$1 - C r^{-1/2} = \left(\frac{3\alpha}{2\mu \dot{M}} \right) T_0 \Sigma_0 r^{3/2} \quad (\text{C.26})$$

şeklinde yazılır. Buradan sıcaklık

$$T_0 = \left(\frac{\mu^2}{3\eta} \right)^{1/10} \alpha^{-1/5} \dot{M}^{3/10} r^{-3/4} (1 - C r^{-1/2})^{3/10}$$

bulunur. Yüzeysel madde yoğunluğu

$$\Sigma_0 = 2 \frac{\mu^{7/10} \eta^{1/10}}{3^{9/10}} \alpha^{-4/5} \dot{M}^{7/10} r^{-3/4} (1 - Cr^{-1/2})^{7/10}$$

bulunur. Radyal hız bileşeni

$$v_{r1} = -\frac{3^{9/10} \mu^{3/10}}{2\eta^{1/10}} \alpha^{4/5} \dot{M}^{3/10} r^{-1/4} (1 - Cr^{-1/2})^{-7/10}$$

yarı disk kalınlığı

$$H_0 = \left(\frac{\mu^2}{3\eta} \right)^{1/20} \alpha^{-1/10} \dot{M}^{3/20} r^{-3/4} (1 - Cr^{-1/2})^{3/20}$$

hacimsel madde yoğunluğu

$$\rho_0 = \frac{\mu^{3/5} \eta^{3/20}}{3^{17/20}} \alpha^{-7/10} \dot{M}^{11/20} r^{-3/2} (1 - Cr^{-1/2})^{11/20}$$

ortamdaki ses hızı

$$c_{s0} = \left(\frac{\mu^2}{3\eta} \right)^{1/20} \alpha^{-1/10} \dot{M}^{3/20} r^{-3/8} (1 - Cr^{-1/2})^{3/20}$$

ve basınç

$$p_0 = 2 \frac{\mu^{9/10}}{3} \alpha^{-1} \dot{M} r^{-3/2} (1 - Cr^{-1/2})$$

yukarıdaki formatta yazılabilir. Diskin B ve C bölgelerindeki boyutsuz fiziksel parametreler için çözümler aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

C.2 B Bölgesi Çözümü

B bölgesi diskin orta bölgesi olmakla beraber gaz basıncı radyasyon basıncına, Thomson opaklığı ise ısısal opaklığa baskındır ($p_g \gg p_r$, $\kappa_T \gg \kappa_{ff}$). Işınım akısı C.15, C.16, C.17, C.18, C.20 numaralı eşitlikler gözönünde bulundurularak tanım gereği

$$F_0^z = \frac{1}{2} T_0^4 \frac{1}{\kappa_0 \Sigma_0} = \frac{T_0^4}{\Sigma_0} \quad (C.27)$$

şeklindedir. Denklem C.22’te yerine konulduğunda

$$\alpha T_0 r^{3/2} \Sigma_0 r^2 \frac{9}{4} r^{-5} = 2\eta \frac{T_0^4}{\Sigma_0}$$

$$T_0^3 = \frac{9\alpha}{8\eta} \Sigma_0^2 r^{-3/2} \quad (C.28)$$

elde edilir. Denklem C.23’un radyal eksen boyunca integralinin alınmasıyla

$$\int -\mu \dot{M} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega_0) dr = \int \alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu_0 \Sigma_0 r^3 \frac{\partial \Omega_0}{\partial r} \right) dr$$

$$r^2 \Omega_0 - C = - \left(\frac{\alpha}{\mu \dot{M}} \right) T_0 \Sigma_0 r^{9/2} \frac{\partial \Omega_0}{\partial r}$$

bulunur. Burada C integral sabiti olup, $\Omega_0 = r^{-3/2}$ kullanılarak Σ_0 T_0 cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\Sigma_0 = \frac{2\mu \dot{M} r^{-3/2}}{3\alpha T_0} (1 - Cr^{-1/2}) \quad (\text{C.29})$$

Yukarıdaki eşitlik denklem C.28'de yerine konulursa

$$T_0^3 = \frac{9\alpha}{8\eta} \frac{4\mu^2 \dot{M}^2 r^{-3}}{9\alpha^2 T_0^2} r^{-3/2} (1 - Cr^{-1/2})^2$$

$$T_0^5 = \frac{\mu^2 \dot{M}^2}{2\eta \alpha} r^{-9/2} (1 - Cr^{-1/2})^2 \quad (\text{C.30})$$

sonuç olarak sıcaklık

$$T_0 = \left(\frac{\mu^2}{2\eta} \right)^{1/5} \alpha^{-1/5} \dot{M}^{2/5} r^{-9/10} (1 - Cr^{-1/2})^{2/5}$$

bulunur. Yüzeysel madde yoğunluğu

$$\Sigma_0 = \frac{2^{6/5} \mu^{3/5} \eta^{1/5}}{3} \alpha^{-4/5} \dot{M}^{3/5} r^{-3/5} (1 - Cr^{-1/2})^{3/5}$$

olarak elde edilir. Denklem C.11'den radyal hız bileşeni

$$v_{r1} = 3 \left(\frac{\mu^2}{2\eta} \right)^{1/5} \alpha^{4/5} \dot{M}^{2/5} r^{-2/5} (1 - Cr^{-1/2})^{-3/5}$$

olarak bulunur. Denklem C.20 aracılığıyla disk kalınlığı

$$H_0 = \left(\frac{\mu^2}{2\eta} \right)^{1/10} \alpha^{-1/10} \dot{M}^{1/5} r^{21/20} (1 - Cr^{-1/2})^{1/5}.$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca hacimsel madde yoğunluğu

$$\rho_0 = \frac{2^{3/10} \mu^{2/5} \eta^{3/10}}{3} \alpha^{-7/10} \dot{M}^{2/5} r^{-33/20} (1 - Cr^{-1/2})^{2/5}$$

ortamdaki ses hızı

$$c_{s0} = \left(\frac{\mu^2}{2\eta} \right)^{1/10} \alpha^{-1/10} \dot{M}^{1/5} r^{-9/20} (1 - Cr^{-1/2})^{1/5}$$

ve basınç

$$p_0 = \frac{2^{1/10} \mu^{4/5} \eta^{1/10}}{3} \alpha^{-9/10} \dot{M}^{4/5} r^{-51/20} (1 - C r^{-1/2})^{4/5}$$

parametreleri boyutsuz olarak yukarıdaki gibi yazılabilir.

C.3 A Bölgesi Çözümü

A bölgesi için çözümler yukarıdaki tabloda bulunan tipik değerlere göre yapılacaktır. A bölgesi diskin en iç bölgesidir ve radyasyon basıncı gaz basıncına, Thomson opaklığı ise ısısal opaklığa göre baskındır ($p_r \gg p_g$ $\kappa_T \gg \kappa_{ff}$). A bölgesinde bulunan çözümler daha sonraki zamanlar yapılması planlanan Kepler olmayan bölge çözümü için temel oluşturacaktır. Diskin A bölgesinde radyasyon basıncının ifadesi

$$p_0 = T_0^4 = \epsilon_0 \quad (\text{C.31})$$

şeklinde olup, radyasyon basıncına bağlı ses hızı sıcaklık cinsinden

$$c_{s0}^2 = \frac{\epsilon_0}{\rho_0} = \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{T_0^4}{\rho_0} \quad (\text{C.32})$$

olarak yazılabilir. A bölgesi dış bölge çözümlerinde olduğu gibi Kepler bir bölge olup açısal hız ifadesi

$$\Omega_0 = r^{-\frac{3}{2}}$$

gibidir. Eşitlik C.14 düşey ekseninde integre edildiğinde

$$\int_{-H_0}^{H_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} dz = \int_{-H_0}^{H_0} \rho_0 \frac{z}{r^3} dz$$

$$p_0 = \rho_0 H_0^2 \Omega_0^2$$

$$T^4 = \rho_0 c_{s0}^2$$

$$c_{s0} \simeq T_0^2 \rho_0^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{C.33})$$

ses hızının sıcaklığa bağlı olarak C.33 şeklinde yazabiliriz. Bu ifadeden yola çıkarak disk kalınlığı

$$H_0 = \frac{c_{s0}}{\Omega_0} = T_0^2 \rho_0^{-\frac{1}{2}} r^{\frac{3}{2}} \quad (\text{C.34})$$

viskozite

$$\nu_0 = c_{s0}H_0 = T_0^4 \rho_0^{-1} r^{\frac{3}{2}} \quad (\text{C.35})$$

ve ışınım akısı

$$F_0^z = \frac{1}{2} T_0^4 \frac{1}{\kappa_0 \Sigma_0}$$

Thomson opaklığının ortamdaki sabit değeri göz önünde bulundurularak ($\kappa_0 = 0.4$)

$$F_0^z = T_0^4 \Sigma_0^{-1} \quad (\text{C.36})$$

elde edilir. Denklem C.36 denklem C.22’de yerine konulduğunda ,

$$\alpha T_0^4 \rho_0^{-1} r^{3/2} \Sigma_0 r^2 \frac{9}{4} r^{-5} = 2\eta T_0^4 \Sigma_0^{-1}$$

$$\Sigma_0 = \left(\frac{8\eta}{9} \right)^{1/2} \alpha^{-1/2} \rho_0^{1/2} r^{3/4} \quad (\text{C.37})$$

yüzeysel madde yoğunluğunun ifadesi bulunur. Denklem C.35 , denklem C.23 içinde yerleştirilirse

$$r^{1/2} - C = - \left(\frac{\alpha}{\mu \dot{M}} \right) T_0^4 \rho_0^{-1} r^{3/2} \Sigma_0 r^3 \left(-\frac{3}{2} \right) r^{-5/2} \quad (\text{C.38})$$

elde edilir. Denklem C.37 , denklem C.38’de yerine konup denklem düzenlendiğinde

$$T_0 = \left(\frac{\mu^2}{2\eta} \right)^{1/8} \alpha^{-1/8} \dot{M}^{1/4} r^{-9/16} \rho_0^{1/8} (1 - Cr^{-1/2})^{1/4} \quad (\text{C.39})$$

sonucu bulunur. Denklem C.34 ’te denklem C.39 ’un yerleştirilmesiyle

$$H_0 = \left(\frac{\mu^2}{2\eta} \right)^{1/4} \alpha^{-1/4} \dot{M}^{1/2} r^{3/8} \rho_0^{-1/4} (1 - Cr^{-1/2})^{1/2} \quad (\text{C.40})$$

sonucuna ulaşılır. Şu ana kadar bulduğumuz tüm parametreler hacimsel madde yoğunluğu ρ_0 ’ın fonksiyonu olup, hacimsel madde yoğunluğu eşitlik C.37 ve C.40 yardımıyla

$$\rho_0 = \frac{\Sigma_0}{2H_0} = \left(\frac{8\eta^3}{81\mu^2} \right) \alpha^{-1} \dot{M}^{-2} r^{3/2} (1 - Cr^{-1/2})^{-2} \quad (\text{C.41})$$

olarak bulunur. Daha önce ρ_0 parametresine bağlı olarak bulduğumuz eşitlik C.37 , C.39 , C.40 ise sırasıyla

$$\Sigma_0 = \frac{8\eta^2}{27\mu} \alpha^{-1} \dot{M}^{-1} r^{3/2} (1 - Cr^{-1/2})^{-1}$$

$$T_0 = \left(\frac{2\eta}{9}\right)^{1/4} \alpha^{-1/4} r^{-3/8}$$

$$H_0 = \frac{3\mu}{2\eta} \dot{M} (1 - Cr^{-1/2})$$

olarak ifade edilir. Radyal hız bileşeni denklem C.11 aracılığıyla

$$v_{r1} = \frac{27\mu^2}{8\eta^2} \alpha \dot{M}^2 r^{-5/2} (1 - Cr^{-1/2})$$

bulunurken, ses hızı ise denklem C.33 ile

$$c_{s0} = \frac{3\mu}{2\eta} \dot{M} r^{3/2} (1 - Cr^{-1/2})$$

yukarıdaki gibi yazılabilir. Basınç ifadesi ise

$$p_0 = \left(\frac{2\mu}{3}\right) \alpha^{-1} \dot{M} r^{-3/2} (1 - Cr^{-1/2})$$

olarak yazılmaktadır.

C.4 Sınır Bölgesi Çözümü

Diskin A bölgesi ile nötron yıldızının yüzeyi arasında Kepler olmayan sınır bölgesi ya da sınır tabakasındaki basınç, açılma hızı, sıcaklık ve ışınım akısı gradientlerini belirleyebilmek için öncelikle boyutsuzlaştırılmış korunum denklemlerini yazıyoruz.

$$\epsilon^2 v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \epsilon \frac{\partial v_r}{\partial z} - \Omega^2 r = -\frac{1}{\rho} \epsilon^2 \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{3}{2} \epsilon^2 \frac{z^2}{r^2} \quad (\text{C.42})$$

$$\epsilon v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{z}{r^3} + \frac{3}{2} \epsilon^2 \frac{z^3}{r^5} \quad (\text{C.43})$$

$$\epsilon \frac{v_r}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega) + v_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \alpha \epsilon^2 \frac{1}{\rho r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \rho r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \quad (\text{C.44})$$

$$\epsilon \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (\text{C.45})$$

$$r \Sigma v_r = -\epsilon \mu \dot{M} \quad (\text{C.46})$$

$$\beta_g \rho C_v \left(\epsilon v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -p \left[\epsilon \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \alpha \nu \rho r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \eta \left[\epsilon^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F^r) + \frac{\partial F^z}{\partial z} \right] \quad (\text{C.47})$$

Boyutsuz korunum denklemlerini iç disk çözümlerinde kullanabilmemiz için öncelikle denklemleri düşey yönde integre ederek z yönündeki bağımlılıktan kurtarmamız gerekir. Bölüm 2.2'deki temel varsayımlar altında denklem C.42-C.47'yi düzenleyip düşey yönde integre ediyoruz. Düşey yönde integre edilmiş boyutsuz korunum denklemlerine pertürbatif açılım uygulandıktan sonra r koordinatı ince sınır bölgemizin daha rahat incelenebilmesi için $r = 1 + \delta(\epsilon) R$ ifadesi ile genişletiliyor. Koordinat genişletilmiş boyutsuz korunum denklemlerinde $\delta(\epsilon) = \epsilon^2$ seçilirse momentum korunumunun z bileşeninden ve süreklilik eşitliğinden herhangi bir katkı gelmeyecektir. Dolayısıyla bu bilgiyi önceden verip işlemlerimize başlamadan önce momentum korunumunun z bileşeni ve süreklilik eşitliğini işlemlerimize katmıyoruz.

$$\epsilon^2 \left(\rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \rho r \left(\Omega^2 - \frac{1}{r^3} \right) \quad (\text{C.48})$$

$$\rho r v_r \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega) = \epsilon \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu_{BL} \rho r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \quad (\text{C.49})$$

$$\epsilon \left[\beta_g C_v \rho v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \chi p \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right] = \nu_{BL} \rho r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \eta \left[\frac{\epsilon^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F^r) + \frac{\partial F^z}{\partial z} \right] \quad (\text{C.50})$$

Denklem C.48-C.50'i düşey yönde integre ediyoruz.

$$\begin{aligned} \int_{-H}^H \epsilon^2 \left(\rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} \right) dz &= \int_{-H}^H \rho r \left(\Omega^2 - \frac{1}{r^3} \right) dz \\ \epsilon^2 \left(2\rho H v_r \frac{dv_r}{dr} + \frac{d(2Hp)}{dr} \right) &= 2\rho H r \left(\Omega^2 - \frac{1}{r^3} \right) \\ \epsilon^2 \left(\Sigma v_r \frac{dv_r}{dr} + \frac{d(P)}{dr} \right) &= \Sigma r \left(\Omega^2 - \frac{1}{r^3} \right) \\ \epsilon^2 \left(v_r \frac{dv_r}{dr} + \frac{1}{\Sigma} \frac{d(P)}{dr} \right) &= r \left(\Omega^2 - \frac{1}{r^3} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.51})$$

$$\int_{-H}^H \rho r v_r \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega) dz = \int_{-H}^H \varepsilon \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu_{BL} \rho r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) dz$$

$$2\rho H r v_r \frac{d}{dr} (r^2 \Omega) = \varepsilon \frac{d}{dr} \left(\nu_{BL} 2\rho H r^3 \frac{d\Omega}{dr} \right)$$

$$\Sigma r v_r \frac{d}{dr} (r^2 \Omega) = \varepsilon \frac{d}{dr} \left(\nu_{BL} \Sigma r^3 \frac{d\Omega}{dr} \right) \quad (\text{C.52})$$

$$\int_{-H}^H \varepsilon \left[\beta_g C_v \rho v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \chi p \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right] dz =$$

$$\int_{-H}^H \left(\nu_{BL} \rho r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \eta \left[\frac{\varepsilon^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F^r) + \frac{\partial F^z}{\partial z} \right] \right) dz$$

$$\varepsilon \left[\beta_g C_v 2\rho H v_r \frac{dT}{dr} + \chi 2pH \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r v_r) \right] = 2\rho H \nu_{BL} r^2 \left(\frac{d\Omega}{dr} \right)^2 - \eta \left[\frac{\varepsilon^2}{r} \frac{d}{dr} (r 2H F^r) + 2F^z \right]$$

$$\varepsilon \left[\beta_g C_v \Sigma v_r \frac{dT}{dr} + \chi \frac{P}{r} \frac{d}{dr} (r v_r) \right] = \Sigma \nu_{BL} r^2 \left(\frac{d\Omega}{dr} \right)^2 - 2\eta \left[\frac{\varepsilon^2}{r} \frac{d}{dr} (r H F^r) + F^z \right]$$

Son eşitliğin sol tarafının ikinci teriminde $d(r v_r)/dr$ terimini denklem C.46'nin türevini alarak türetiyoruz

$$\frac{d}{dr} (r v_r \Sigma) = 0$$

$$v_r \Sigma + \Sigma r \frac{dv_r}{dr} + r v_r \frac{d\Sigma}{dr} = 0$$

$$v_r + r \frac{dv_r}{dr} = -\frac{1}{\Sigma} r v_r \frac{d\Sigma}{dr}$$

ve işlemimize kaldığımız yerden devam ediyoruz.

$$\varepsilon \left[\beta_g C_v \Sigma v_r \frac{dT}{dr} + \chi \frac{P}{r} \frac{d}{dr} \left(-\frac{1}{\Sigma} r v_r \frac{d\Sigma}{dr} \right) \right] = \Sigma \nu_{BL} r^2 \left(\frac{d\Omega}{dr} \right)^2 - 2\eta \left[\frac{\varepsilon^2}{r} \frac{d}{dr} (r H F^r) + F^z \right] \quad (\text{C.53})$$

Işınım aksının r ve z bileşenlerinden gelen katkıları

$$F^z = -\frac{T^3}{\kappa \rho} \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\int_{-H}^H F^z dz = - \int_{-H}^H \frac{T^3}{\kappa\rho} \frac{\partial T}{\partial z} dz$$

$$\int_{-H}^H F^z dz = - \frac{2}{\kappa\rho} \int_T^0 T^3 dT$$

$$2HF^z = \frac{4HT^4}{4\kappa\Sigma}$$

$$F^z = \frac{T^4}{2\kappa\Sigma}$$

$$F^r = - \frac{T^3}{\kappa\rho} \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\int_{-H}^H F^r dz = - \int_{-H}^H \frac{T^3}{\kappa\rho} \frac{dT}{dr} dz$$

$$F^r = - \frac{2HT^3}{\kappa\Sigma} \frac{dT}{dr}$$

hesaba katıldığında denklem C.53

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[\beta_g C_v \Sigma v_r \frac{dT}{dr} + \chi \frac{P}{r} \frac{d}{dr} \left(- \frac{1}{\Sigma} r v_r \frac{d\Sigma}{dr} \right) \right] &= \Sigma \nu_{BL} r^2 \left(\frac{d\Omega}{dr} \right)^2 \\ + 2\eta \left[\frac{\varepsilon^2}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{2H^2 r T^3}{\kappa\Sigma} \frac{dT}{dr} \right) - \frac{T^4}{2\kappa\Sigma} \right] & \end{aligned} \quad (C.54)$$

halini alır. Boyutsuz korunum denklemlerimizden C.48, C.49, C.50 düşey yönde integre edilip z bağımlılığından kurtularak denklem C.51, C.52, C.54 şeklini aldılar. Basınç değeri p düşey yönde integre edildikten sonra GPD rejiminde $P = \Sigma T$, RPD rejiminde $P = 2HT^4$, düşey yönde integre edilmiş radyal ışıınım akısı

$$\Phi^r \equiv HF^r = - \frac{2H^2 T^3}{\kappa\Sigma} \frac{dT}{dr}$$

oldu. Şimdi düşey yönde integre edilmiş boyutsuz korunum denklemlerimiz C.51, C.52, C.54'in radyal koordinatlarını genişleterek incelenmesi daha kolay hale getireceğiz.

$$\varepsilon^2 \left(v_r \frac{dv_r}{dr} + \frac{1}{\Sigma} \frac{d(P)}{dr} \right) = r \left(\Omega^2 - \frac{1}{r^3} \right)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \left(\frac{v_R}{\delta} \frac{dv_R}{dR} + \frac{1}{\delta \Sigma} \frac{dP}{dR} \right) &= (1 + \delta R) \left(\Omega^2 - \frac{1}{(1 + \delta R)^3} \right) \\ \frac{\varepsilon^2}{\delta} \left(v_R \frac{dv_R}{dR} + \frac{1}{\Sigma} \frac{dP}{dR} \right) &= (\Omega^2 - 1)\end{aligned}\tag{C.55}$$

$$\Sigma r v_r \frac{d}{dr} (r^2 \Omega) = \varepsilon \frac{d}{dr} \left(\nu_{BL} \Sigma r^3 \frac{d\Omega}{dr} \right)$$

$$\Sigma (1 + \delta R) \frac{v_R}{\delta} \frac{d}{dR} ((1 + \delta R)^2 \Omega) = \frac{\varepsilon}{\delta} \frac{d}{dR} \left(-\alpha_{BL} v_R \frac{\delta \Sigma}{\varepsilon \delta} (1 + \delta R)^3 \frac{d\Omega}{dR} \right)$$

$$\Sigma \frac{v_R}{\delta} \frac{d\Omega}{dR} = -\frac{\alpha_{BL}}{\delta} \frac{d}{dR} \left(v_R \Sigma \frac{d\Omega}{dR} \right)$$

$$-\frac{\varepsilon \mu \dot{M}}{\delta} \frac{d\Omega}{dR} = -\frac{\alpha_{BL}}{\delta} \frac{d}{dR} \left(-\varepsilon \mu \dot{M} \frac{d\Omega}{dR} \right)$$

$$\frac{d^2 \Omega}{dR^2} + \frac{1}{\alpha_{BL}} \frac{d\Omega}{dR} = 0\tag{C.56}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon \left[\beta_g C_v \Sigma v_r \frac{dT}{dr} + \frac{P}{r} \frac{d}{dr} \left(-\frac{1}{\Sigma} r v_r \frac{d\Sigma}{dr} \right) \right] &= \Sigma \nu_{BL} r^2 \left(\frac{d\Omega}{dr} \right)^2 \\ -2\eta \left[\frac{\varepsilon^2}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{2H^2 r T^3}{\kappa \Sigma} \frac{dT}{dr} \right) - \frac{T^4}{2\kappa \Sigma} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon \left[\beta_g C_v \Sigma \frac{v_R}{\delta} \frac{dT}{dR} + \frac{P}{\delta (1 + \delta R)} \frac{d}{dR} \left(-\frac{1}{\Sigma} (1 + \delta R) \frac{v_R}{\delta} \frac{d\Sigma}{dR} \right) \right] &= \\ \Sigma \left(-\alpha_{BL} v_R \frac{\delta}{\varepsilon} \right) \left(\frac{1 + \delta R}{\delta} \right)^2 \left(\frac{d\Omega}{dR} \right)^2 & \\ +2\eta \left[\frac{\varepsilon^2}{\delta (1 + \delta R)^2} \frac{d}{dR} \left(\frac{2H^2 (1 + \delta R) T^3}{\kappa \Sigma \delta} \frac{dT}{dR} \right) - \frac{T^4}{2\kappa \Sigma} \right]\end{aligned}$$

$$F^R = -\frac{2HT^3}{\delta \kappa \Sigma} \frac{dT}{dR}$$

$$\Phi^R = H F^R$$

$$F^z = \frac{T^4}{2\kappa \Sigma}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{v_R}{\delta} \left[\beta_g C_v \Sigma \frac{dT}{dR} - \frac{P}{\Sigma} \frac{d\Sigma}{dR} \right] &= \varepsilon \mu \dot{M} \alpha_{BL} \frac{\delta}{\varepsilon} \left(\frac{d\Omega}{dR} \right)^2 \\ -2\eta \left[\frac{\varepsilon^2}{\delta} \frac{d}{dR} \left(-\frac{2H^2 T^3}{\kappa \Sigma \delta} \frac{dT}{dR} \right) + \frac{T^4}{2\kappa \Sigma} \right] & \end{aligned}$$

$$\varepsilon \frac{v_R}{\delta} \left[\beta_g C_v \Sigma \frac{dT}{dR} - \frac{d\Sigma}{dR} \frac{P}{\Sigma} \right] = \frac{\mu \dot{M} \alpha_{BL}}{\delta} \left(\frac{d\Omega}{dR} \right)^2 - 2\eta \left[\frac{\varepsilon^2}{\delta^2} \frac{d\Phi}{dR} + F^z \right] \quad (C.57)$$

Koordinatları genişletilmiş boyutsuz korunum denklemlerinde $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$ seçilirse momentum korunumunun z bileşeninden ve süreklilik eşitliğinden herhangi bir katkı gelmeyeceğinden denklem setimizin çözümü kolaylaşacaktır. Denklem C.55, C.56 ve C.57 bu yaklaşım altında durağan durum çözümlerinin bulunması için pertürbatif açılım uygulanırsa

$$v_{R0} \frac{dv_{R0}}{dR} + \frac{1}{\Sigma_0} \frac{dP_0}{dR} = (\Omega_0^2 - 1)$$

$v_{R0} = 0$ olacağından

$$\frac{dP_0}{dR} = \Sigma_0 (\Omega_0^2 - 1) \quad (C.58)$$

$$\frac{d^2 \Omega_0}{dR^2} + \frac{1}{\alpha_{BL}} \frac{d\Omega_0}{dR} = 0 \quad (C.59)$$

$$\frac{v_{R0}}{\varepsilon} \left[\beta_g C_v \Sigma_0 \frac{dT_0}{dR} - \frac{d\Sigma_0}{dR} \frac{P_0}{\Sigma} \right] = \frac{\mu \dot{M} \alpha_{BL}}{\varepsilon^2} \left(\frac{d\Omega_0}{dR} \right)^2 - 2\eta \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\Phi_0}{dR} + F_0^z \right]$$

olarak yazılır. Koordinatları genişletilip düşey yönde integre edilmiş boyutsuz enerji korunumu denkleminde $v_{R0} = 0$ olduğundan kalan terimlerin eşitliğinden radyal ışınım akısı

$$\frac{d\Phi_0}{dR} = \frac{\mu \dot{M} \alpha_{BL}}{2\eta} \left(\frac{d\Omega_0}{dR} \right)^2 \quad (C.60)$$

ifadesine ek olarak ışınım akısının tanımından gelen

$$\Phi_0 = -\frac{2H_0^2 T_0^3}{\kappa \Sigma_0} \frac{dT_0}{dR} \quad (C.61)$$

ile birlikte denklem C.58, C.59, C.60 ve C.61 sınır bölgesi diferansiyel denklem setimizi

$$\frac{dP_0}{dR} = \Sigma_0 (\Omega_0^2 - 1) \quad (\text{C.62})$$

$$\frac{d^2\Omega_0}{dR^2} + \frac{1}{\alpha_{BL}} \frac{d\Omega_0}{dR} = 0 \quad (\text{C.63})$$

$$\frac{d\Phi_0}{dR} = \frac{\mu \dot{M} \alpha_{BL}}{2\eta} \left(\frac{d\Omega_0}{dR} \right)^2 \quad (\text{C.64})$$

$$\frac{dT_0}{dR} = -\frac{\kappa \Sigma_0}{2H_0^2 T_0^3} \Phi_0 \quad (\text{C.65})$$

oluşturmaktadır. Bu denklem seti GRP veya RPD rejimine göre yorumlanarak gaz veya radyasyon basıncının hakim olduğu ince sınır bölgeleri için durağan durum iç disk çözümleri elde edilebilir.

C.5 GPD ve RPD Bölgeler İçin İç Disk Çözümlerinin Elde Edilmesi

GPD sınır bölgesi için durağan durum iç disk çözümlerini elde etmek için gaz basıncının baskın olduğu durumda düşey yönde integre edilmiş disk parametrelerini tekrardan hatırlayalım.

$$\int_{-H_0}^{H_0} p_0 dz = \int_{-H_0}^{H_0} \rho_0 T_0 dz$$

$$P_0 = \Sigma_0 T_0$$

$$H_0 = c_{s0} = T_0^{1/2}$$

ifadeleri ile birlikte sınır bölgesi diferansiyel denklem setimiz

$$\frac{dP_0}{dR} = \frac{P_0}{T_0} (\Omega_0^2 - 1) \quad (\text{C.66})$$

$$\frac{d^2\Omega_0}{dR^2} + \frac{1}{\alpha_{BL}} \frac{d\Omega_0}{dR} = 0 \quad (\text{C.67})$$

$$\frac{d\Phi_0}{dR} = \frac{\mu \dot{M} \alpha_{BL}}{2\eta} \left(\frac{d\Omega_0}{dR} \right)^2 \quad (\text{C.68})$$

$$\frac{dT_0}{dR} = -\frac{\kappa P_0}{2T_0^5} \Phi_0 \quad (\text{C.69})$$

olarak yazılır. RPD sınır bölgesi için durağan durum iç disk çözümlerini elde etmek için denklem C.62, C.63, C.64 ve C.65'i radyasyon basıncının baskın olduğu duruma göre revize edelim.

$$H_0 = c_{s0} = \frac{T_0^2}{\rho_0^{1/2}}$$

$$\int_{-H_0}^{H_0} p_0 dz = \int_{-H_0}^{H_0} T_0^4 dz$$

$$P_0 = 2H_0 T_0^4 = 2 \frac{T_0^6}{\rho_0^{1/2}}$$

$$\Sigma_0 = 2\rho_0^{1/2} T_0^2$$

ifadeleri ile birlikte sınır bölgesi diferansiyel denklem setimiz

$$\frac{d}{dR} \left(\frac{2T_0^6}{\rho_0^{1/2}} \right) = 2\rho_0^{1/2} T_0^2 (\Omega_0^2 - 1) \quad (\text{C.70})$$

$$\frac{d^2 \Omega_0}{dR^2} + \frac{1}{\alpha_{BL}} \frac{d\Omega_0}{dR} = 0 \quad (\text{C.71})$$

$$\frac{d\Phi_0}{dR} = \frac{\mu \dot{M} \alpha_{BL}}{2\eta} \left(\frac{d\Omega_0}{dR} \right)^2 \quad (\text{C.72})$$

$$\frac{dT_0}{dR} = -\frac{\rho_0^{3/2} \kappa}{4T_0^5} \Phi_0 \quad (\text{C.73})$$

olarak yazılır. Dikkat edilmesi gereken bir husus durağan durum iç disk basınç çözümlerimiz düşey olarak integre edildiklerinden dolayı, dış çözümlerde $P_{0 \text{ out}} = 2H_{0 \text{ out}} p_{0 \text{ out}}$ ile birleştirilerek birleşik çözümlerin elde edilmesi gerekmektedir.

Kaynakça

- M. A. Alpar ve D. Psaltis. The highest dynamical frequency in the inner region of an accretion disc. *Monthly Notices of Royal Astronomical Society*, 391:1472–1476, 2008.
- C. M. Bender ve S. A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, 1978.
- M. Berger, M. van der Klis, J. van Paradijs, W. H. G. Lewin, F. K. Lamb, B. Vaughan, E. Kuulkers, T. Augusteijn, W. Zhang, F. E. Marshall, J. H. Swank, I. Lapidus, J. C. Lochner, ve T. E. Strohmayer. Discovery of 800 hz quasi periodic oscillations in 4u 1608-52. *Astrophysical Journal Letters*, 469:L13–L16, 1996.
- T. Di Salvo, M. Mendez, ve M. van der Klis. On the correlated spectral and timing properties of 4u 1636-54: an atoll source at high accretion rates. *Astronomy & Astrophysics*, 406:177–192, 2003.
- M. H. Erkut. A possible link between khz quasi-periodic oscillations and the magnetospheric boundary. *The European Physical Journal Web of Conferences*, 64(01005):1–5, 2014.
- M. H. Erkut ve M. A. Alpar. On the rotational dynamics of magnetically threaded disks around neutron stars. *The Astrophysical Journal*, 617:461–470, 2004.
- M. H. Erkut, D. Psaltis, ve M. A. Alpar. Quasi-periodic oscillations as global hydrodynamic modes in the boundary layers of viscous accretion disks. *The Astrophysical Journal*, 687:1220–1229, 2008.
- E. C. Ford, P. Kaaret, K. Chen, M. Tavani, Barret D., P. Bloser, J. Grindlay, B. A. Harmon, W. S. Paciesas, ve S. N. Zhang. Energy spectra and high-frequency oscillations in 4u 0614+091. *Astrophysical Journal Letters*, 486:L47–L50, 1997b.
- E. C. Ford, M. van der Klis, R. Wijnands, M. Mendez, J. Homan, Jonker P. G., ve J. van Paradijs. Simultaneous measurements of x-ray luminosity and kilohertz quasi-periodic oscillations in low-mass x-ray binaries. *The Astrophysical Journal*, 537:368–373, 2000.

- J. Frank, A. King, ve D. Raine. *Accretion Power in Astrophysics*. Cambridge University Press, 2002.
- P. Ghosh. *Rotation and Accretion Powered Pulsars*. World Scientific Publishing, 2007.
- G. Hasinger ve M. van der Klis. Two patterns of correlated x-ray timing and spectral behaviour in low-mass x-ray binaries. *Astronomy & Astrophysics*, 225:79–96, 1989.
- J. F. Hawley ve J. H. Krolik. Global mhd simulation of the inner accretion disk in a pseudo-newtonian potential. *The Astrophysical Journal*, 548:348–367, 2001.
- J. Homan, M. Mendez, R. Wijnands, M. van der Klis, ve J. van Paradijs. Discovery of twin kilohertz quasi-periodic oscillations in the high galactic latitude x-ray transient xte j2123-058. *Astrophysical Journal Letters*, 513:L119–L122, 1999.
- P. Kaaret, W. Yu, E. C. Ford, ve S. N. Zhang. Correlation between fast quasi-periodic oscillations and x-ray spectral shape in atoll sources. *Astrophysical Journal Letters*, 497:L93–L96, 1998.
- M. Mendez. Relation between kilohertz qpos and inferred mass accretion rate in 4 lmxbs. *Nuclear Physics B Proceedings Supplements*, 80:15–16, 2000.
- M. Mendez ve T. Belloni. Is there a link between the neutron-star spin and the frequency of the kilohertz quasi-periodic oscillations? *Monthly Notices of Royal Astronomical Society*, 381:790–796, 2007.
- M. Mendez ve M. van der Klis. Precise measurements of the kilohertz quasi-periodic oscillations in 4u 1728-34. *Astrophysical Journal Letters*, 517:L51–L54, 1999.
- M. Mendez, M. van der Klis, J. van Paradijs, W. H. G. Lewin, B. Vaughan, E. Kuulkers, W. Zhang, F. K. Lamb, ve D. Psaltis. Discovery of second kilohertz quasi periodic oscillations peak in 4u 1608-52. *Astrophysical Journal Letters*, 494:L65–L69, 1998.
- M. Mendez, M. van der Klis, E. C. Ford, R. Wijnands, ve J. van Paradijs. Dependence of the frequency of the kilohertz quasi-periodic oscillations on x-ray count rate and colors in 4u 1608-52. *Astrophysical Journal Letters*, 511:L49–L52, 1999.
- M. C. Miller, F. K. Lamb, ve D. Psaltis. Sonic-point model of kilohertz quasi-periodic brightness oscillations in low-mass x-ray binaries. *The Astrophysical Journal*, 508: 791–830, 1998.
- J. E. Pringle ve M. J. Rees. Accretion disc model for compact x-ray sources. *Astronomy & Astrophysics*, 21:1–9, 1972.

- S. Prins ve M. van der Klis. Correlated x-ray spectral and fast-timing behaviour of 4u 1636-53. *Astronomy & Astrophysics*, 319:498–506, 1997.
- O. Regev. The disk-star boundary layer and its effect on the accretion disk structure. *Astronomy & Astrophysics*, 126:146–151, 1983.
- P. Reig, M. Mendez, M. van der Klis, ve E. C. Ford. Correlated timing and spectral variations of the soft x-ray transient aquila x-1 :evidence for an atoll classification. *The Astrophysical Journal*, 530:916–922, 2000.
- N. I. Shakura ve R. A. Sunyaev. Black holes in binary systems. observational appearance. *Astronomy & Astrophysics*, 24:337–355, 1973.
- L. Stella ve M. Vietri. Lense-thirring precession and quasi-periodic oscillations in low-mass x-ray binaries. *Astrophysical Journal Letters*, 492:L59–L62, 1998.
- L. Stella ve M. Vietri. khz quasiperiodic oscillations in low-mass x-ray binaries as probes of general relativity in the strong-field regime. *The Astrophysical Journal*, 82: 17–20, 1999.
- T. E. Strohmayer, W. Zhang, J. H. Swank, A. Smale, L. Titarchuk, ve C. Day. Millisecond x-ray variability from an accreting neutron star system. *Astrophysical Journal Letters*, 469:L9–L12, 1996.
- T. E. Strohmayer, W. Zhang, J. H. Swank, ve I. Lapidus. The long-term stability of oscillations during thermonuclear x-ray bursts: Constraining the binary x-ray mass function. *Astrophysical Journal Letters*, 503:L147–L150, 1998.
- J. A. Tomsick, J. P. Halpern, J. Kemp, ve P. Kaaret. Xte j2123-058: A new neutron star x-ray transient. *The Astrophysical Journal*, 521:341–350, 1999.
- M. van der Klis. Similarities in neutron star and black hole accretion. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 92:511–519, 1994.
- M. van der Klis. Millisecond oscillations in x-ray binaries. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 38:717–760, 2000.
- M. van der Klis. Overview of qpos in neutron-star low-mass x-ray binaries. *Advances in Space Research*, 12:2675–2679, 2006.
- M. van der Klis, G. Hasinger, E. Damen, W. Penninx, J. van Paradijs, ve W. H. G. Lewin. Correlation of x-ray burst properties with source state in the 'atoll' source 4u/mxb 1636 - 53. *Astronomy & Astrophysics*, 360:L19–L22, 1990.

- M. van der Klis, J. H. Swank, W. Zhang, K. Jahoda, E. H. Morgan, W. H. G. Lewin, B. Vaughan, ve J. van Paradijs. Discovery of submillisecond quasi-periodic oscillations in the x-ray flux of scorpius x-1. *Astrophysical Journal Letters*, 469:L1–L4, 1996a.
- S. van Straaten, E. C. Ford, M. van der Klis, M. Mendez, ve P. Kaaret. Relation between timing features and colors in the x-ray binary 4u 0614+09. *The Astrophysical Journal*, 540:1049–1061, 2000.
- R. Wijnands ve M. van der Klis. Discovery of the first accretion-powered millisecond x-ray pulsar. *Nature*, 394:344–346, 1998b.
- R. Wijnands ve M. van der Klis. Quasi-periodic x-ray brightness fluctuations in an accreting millisecond pulsar. *Nature*, 424:444–447, 2003.
- R. Wijnands, J. Homan, M. van der Klis, M. Mendez, E. Kuulkers, J. van Paradijs, W. H. G. Lewin, F. K. Lamb, D. Psaltis, ve B. Vaughan. Discovery of kilohertz quasi-periodic oscillations in gx 17+2. *Astrophysical Journal Letters*, 490:L157–L160, 1997.
- Y. B. Zel'dovich ve N. I. Shakura. X-ray emission accompanying the accretion of gas by a neutron star. *Soviet Astronomy - AJ*, 13(2), 1969.
- W. Zhang, T. E. Strohmayer, ve J. H. Swank. Neutron star masses and radii as inferred from kilohertz quasi-periodic oscillations. *Astrophysical Journal Letters*, 482:L167–L170, 1997.
- W. Zhang, K. Jahoda, R. L. Kelley, T. E. Strohmayer, ve J. H. Swank. Millisecond oscillations in the persistent and bursting flux of aquila x-1 during an outburst. *Astrophysical Journal Letters*, 495:L9–L12, 1998a.