

**T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BENZER ELEKTRİK VE MEKANİK SİSTEMLERDE KAOTİK
DAVRANIŞ:**

KUPLAJ LC-DEVRELERİ – KUPLAJ ÇİFT SARKAÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Selen ŞAHİN
1209151002**

**Anabilim Dalı: Fizik
Programı: Fizik**

Tez Danışmanı: Prof.Dr. Mehmet ÖZER

Ağustos 2014

TEŐEKKÖR

Danışmanım Prof.Dr. Mehmet ÖZER'E tez boyunca yaptığı katkılardan dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Ağustos 2014

Selen ŞAHİN

İÇİNDEKİLER

Şekil Listesi	iv
Tablo Listesi.....	v
Özet.....	viii
1 Giriş	1
2 “Kütle – Yay – Sönümleyici Sistemi” ile “Direnç – İndüktör –Kondansatör (RLC) Devresinin” Karşılaştırılması	6
2.1 Kütle – Yay – Sönümleyici Sistemi.....	6
2.2 Seri RLC Devresi.....	7
2.2.1 Seri RLC devresinde Rezonans	11
2.2.2 Seri RLC Devresinin Multisim programı ile İncelenmesi	12
3 “Kuplaj Çift Sarkaç” ile “Kuplaj LC-Devresinin” Karşılaştırılması.....	20
3.1 Kuplaj Çift Sarkaç.....	20
3.1.1 Çift Sarkacın Kinematiği:	20
3.1.2 Çift Sarkacın Dinamiği	22
3.1.3 Çift Sarkaç Simülasyonu	24
3.2 Kuplaj LC-Devreleri.....	30
3.2.1 LC-Devresinin Multisim ile İncelenmesi	33
4 Sonuç.....	38
Kaynakça	39

Şekil Listesi

Şekil 1.1 Elektrik ve mekanikte kullanılan üç temel elemanın şematik gösterimleri.	4
Şekil 2.1 Kütle-yay-sönümleyici sistemi.	7
Şekil 2.2 RLC seri devresi.	7
Şekil 2.3 RLC seri devre elemanlarının faz diyagramları.	8
Şekil 2.4 RLC seri devresi faz diyagramı.	9
Şekil 2.5 Z empedansı fazör diyagramı.	10
Şekil 2.6 RLC seri devresi.	12
Şekil 2.7 RLC devresi fazör diyagramı.	12
Şekil 2.8 Fazör diyagramı.	13
Şekil 2.9 Multisim programında RCL seri devresi.	14
Şekil 2.10 Frekansı 800 Hz ve direnç 200Ω değerlerinde RLC devresi.	15
Şekil 2.11 Frekansı 600 Hz ve direnç 200Ω değerlerinde RLC devresi.	15
Şekil 2.12 Frekansı 600 Hz ve direnç 300Ω değerlerinde RLC devresi.	16
Şekil 2.13 Frekansı 800 Hz ve direnç 300Ω değerlerinde RLC devresi.	16
Şekil 2.14 RLC devresinde kondansatör üzerinde osiloskop görüntüsü.	17
Şekil 2.15 RLC devresinde direnç üzerinde osiloskop görüntüsü.	17
Şekil 2.16 RLC devresinde indüktör üzerinde osiloskop görüntüsü.	18
Şekil 3.1 Kuplaj Çift Sarkaç.	20
Şekil 3.2 Kuplaj Çift Sarkaçta üst kütleli serbest cisim diyagramı.	22
Şekil 3.3 Kuplaj Çift Sarkaçta alt kütleli serbest cisim diyagramı.	23
Şekil 3.4 Sol tarafta periyodik ve sağ tarafta ise kaotik salınımda olan sarkaçların başlangıç değerleri verilmektedir.	26
Şekil 3.5 Çift sarkaç simülasyonunda kütlelerin hareketleri (Wetherden 2009).	27
Şekil 3.6 Her iki sarkaçta periyodik salım içindedir (Wolfram Alpha 2014).	28
Şekil 3.7 Üstteki kütle periyodik salım içinde iken alttakinin hareketi rastsaldır (Wolfram Alpha 2014).	29
Şekil 3.8 Kuplaj LC-devresi (Pain 2005).	31
Şekil 3.9 Rezonans frekansına yakın bölgede akım genliğinin kuplaj sabiti ile değişimi (Pain 2005).	33
Şekil 3.10 Kuplaj LC devresinin Multisim programında gösterimi (Yıldırım 2010).	34
Şekil 3.11 Devre elemanlarının parametreleri Tablo 3.1’de verilmiştir.	35
Şekil 3.12 Devre elemanlarının parametreleri Tablo 3.2’de verilmiştir.	36
Şekil 3.13 Devre elemanlarının parametreleri Tablo 3.3’de verilmiştir.	36
Şekil 3.14 Devre elemanlarının parametreleri Tablo 3.4’te verilmiştir.	37

Tablo Listesi

Tablo 1.1 Elektrik, doğrusal ve rotasyonel mekanikteki üç temel nicelikler.....	5
Tablo 2.1 RLC devresi deneyi veri tablosu.	18
Tablo 2.2 RLC devre elemanları üzerindeki voltaj değerlerinin hesaplanması.	19
Tablo 3.1 Periyodik salınımda olan sarkaçların başlangıç değerleri verilmektedir.	28
Tablo 3.2 Periyodik olmayan salınımda olan çift sarkacın başlangıç değerleri verilmektedir.....	29
Tablo 3.3 Şekil 3.11 parametreleri.....	34
Tablo 3.4 Şekil 3.12 parametreleri.....	36
Tablo 3.5 Şekil 3.13 parametreleri.....	36
Tablo 3.6 Şekil 3.14 parametreleri.....	37

Enstitüsü	:	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	:	Fizik
Programı	:	Fizik
Tez Danışmanı	:	Prof.Dr. Mehmet ÖZER
Tez Türü ve Tarihi	:	Yüksek Lisans – Ağustos 2014

ÖZET

BENZER ELEKTRİK VE MEKANİK SİSTEMLERDE KAOTİK DAVRANIŞ:

KUPLAJ LC-DEVRELERİ – KUPLAJ ÇİFT SARKAÇ

Selen ŞAHİN

Bu çalışmada, mekanik sistemler ile bu sistemlere eş değer olan bazı elektrik devreleri karşılaştırılarak incelenmiştir. Bir elektrik devresi, tek boyutlu – bir yol boyunca hareket eden ve zamana göre değişen bir fiziksel bir varlık gibi tanımlanabilir. Titreşimli sistemlerin hareketlerinin belirlenmesinde gerekli olan bağımsız değişkenlerin sayısı, sistemin serbestlik derecesinin ölçüsüdür. Sadece tek bir değişken gerekiyorsa sistemin tek serbestlik derecesine sahip olduğu görülür. Elektrik devrelerinde serbestlik derece sayısı, bağımsız kapalı çevrimlerin veya devrelerin sayısına eşittir. Bu metot elektrik devreleri için yoğun kullanılmış olsa da analitik olarak benzer mekanik sistemlerde de uygulanabilir. Mekanik sistemler D’alembert prensibine göre kurulurken, elektrik devrelerinde ise Kirchoff’s elektromotor kuvvet yasası aynı rolü oynar.

Bu tezin temel amacı, elektriksel ve mekaniksel sistemlerin aralarındaki benzerlikleri göstermek ve böylece titreşimsel sistemlerin hareketini elektrik devreleri ile analiz ederek herhangi benzer bir mekanik sistemde de kullanabileceğimizi göstermektedir. Tezin ilk kısmında literatürde çok iyi bilinen iki sistem olan “Kütle – Yay – Sönümleyici Sistemi” ile “Direnc – İndüktör – Kondansatör (RLC) Devresinin” karşılaştırılmıştır. İkinci bölümde ise “Kuplaj çift sarkaç” ile “Kuplaj LC-devresi” karşılaştırılarak benzerlikler incelenmiş ve kaotik yapı gözlenmiştir.

Anahtar sözcükler: Benzer mekanik ve elektrik sistemler, çift sarkaç, LC-devreleri, kaotik devreler.

University : Istanbul Kültür University
Institute : Institute of Sciences
Department : Physics
Programme : Physics
Supervisor : Prof.Dr. Mehmet ÖZER
DegreeAwarded and Date : M.Sc.– August2014

ABSTRACT

CHAOTIC BEHAVIOUR IN ANALOGOUS ELECTRICAL AND MECHANICAL SYSTEMS:

THE COUPLED LC-CIRCUITS – THE COUPLED PENDULA

Selen ŞAHİN

In this study, the analogous electrical and mechanical systems are compared. An electrical circuit may be defined as a physical entity in which may be specified in terms of time and a single dimension. The number of independent variables necessary to the motion of a vibrating system is a measure of the number of degrees of freedom of the system. If only a single variable is needed the system is found to have a single degree of freedom. Number of degrees of freedom in electrical circuits independently of closed loop or circuit is equal to the number. This method has been used extensively for electrical circuits can be applied to any analytically similar mechanical system. Kirchhoff's electromotive force law plays the same role in setting up the electrical circuits as D'Alembert's principle does in setting up the mechanical systems.

The main objective of this thesis is that some electrical and mechanical systems show similarities between them. Thus, the motion of a vibration system by analyzing electric circuits could also use any mechanical system similar shows. In the first part of the thesis that the two systems well known in the literature "Mass - Spring - Damper System" and "Resistance - inductor-capacitor (RLC) Circuit" were compared. In the second part "Coupling double pendulum" and "Coupling LC-circuit" has been examined to comparing the similarities and chaotic structure was observed.

Keywords: Analogues electrical and mechanical systems, double pendulum, LC-circuits, chaotic circuits.

Özet

Bu çalışmada, mekanik sistemler ile bu sistemlere eş değer olan bazı elektrik devreleri karşılaştırılarak incelenmiştir. Özellikleri bilinmeyen bir sistemin incelenmesinde iyi bilinen benzer sistemlerin karşılaştırılarak kullanılması sistemi anlamak için bize kolaylık sağlar. Mühendislik problemlerinin büyük bir kısmı titreşen sistemler ile ilgilidir ve bu problemlerin analizinde basit harmonik osilatör çözümleri kullanılır. Genellikle çok bilinmemesine rağmen, titreşimli sistemlerin en geniş kullanım alanı elektrik devreleridir. Elektrik devrelerinin diferansiyel denklemlerinin tanımlanmasından çok uzun zaman önce mekaniksel sistemlerin hareket denklemleri incelenmiş ve geliştirilmiştir. Elektrik devre teorisinin geliştirildiği ilk günlerde, o zamanlarda daha iyi bilinen mekanik olaylar kullanılarak elektrik devrelerinin davranışları açıklanmaya çalışılmıştır. Ancak günümüzde, elektrik devre teorisi, mekanik sistem teorisinden daha yüksek araştırma ve inceleme sonucu daha çok gelişmiştir. Mekaniksel sistemleri kapsayan hemen hemen her durum, elektriksel sistemler ve elektrik devre teorisi ile incelenebilir. Elektrik devre teorisi, doğrusal elektrik sistemlerde elektriksel salınımlar ile ilişkili olan elektromanyetik teorisinin bir dalıdır. Elektrik sistemler, farklı devre kümelerinin bir araya gelmesiyle oluşan şebeke – ağ yapısındadırlar.

Bir elektrik devresi, tek boyutlu – bir yol boyunca hareket eden ve zamana göre değişen bir fiziksel bir varlık gibi tanımlanabilir. Devre elemanları, devrenin kurucu parçalarıdır ve bunların en temel olanları direnç, indüktör ve kapasitandır. Mekaniksel sistemlerin tek boyutta titreşimleri ise kütle ve yay sistemlerinden meydana gelir. Titreşimli sistemlerin hareketlerinin belirlenmesinde gerekli olan bağımsız değişkenlerin sayısı, sistemin serbestlik derecesinin ölçüsüdür. Sadece tek bir değişken gerekiyorsa sistemin tek serbestlik derecesine sahip olduğu görülür. Elektrik devrelerinde serbestlik derece sayısı, bağımsız kapalı çevrimlerin veya devrelerin sayısına eşittir. Bu metod elektrik devreleri için yoğun kullanılmış olsa da analitik olarak benzer mekanik sistemlerde de uygulanabilir. Mekanik sistemler D’Alembert prensibine göre kurulurken, elektrik devrelerinde ise Kirchoff’s elektromotor kuvvet yasası aynı rolü oynar.

Bu tezin temel amacı, elektriksel ve mekaniksel sistemlerin aralarındaki benzerlikleri göstermek ve böylece titreşimsel sistemlerin hareketini elektrik devreleri ile analiz ederek herhangi benzer bir mekanik sistemde de kullanabileceğimizi göstermektedir. Tezin ilk kısmında literatürde çok iyi bilinen iki sistem olan “Kütle – Yay – Sönümleyici Sistemi” ile “Direnç – İndüktör – Kondansatör (RLC) Devresinin” karşılaştırılmıştır. İkinci bölümde ise “Kuplaj çift sarkaç” ile “Kuplaj LC-devresi” karşılaştırılarak benzerlikler incelenmiş ve kaotik yapı gözlenmiştir.

1 Giriş

Bir elektriksel sistemde bir devre elemanı veya parametresi devrede bulunduğu bölgedeki belirgin bir aktiviteyi tanımlar. Bir elektriksel sistemde bu devre elemanları direnç (R), indüktans (L) ve kapasitans (C)'dir. Bunlar elektrik devre elemanları olan direnç, indüktör ve kapasitörlere ait fiziksel özelliklerdir. Bir direnç, indüktör ve kapasitör sırasıyla sadece direnç, indüktans ve kapasitans özelliklerini gösterdikleri kabul edilen idealize edilmiş devre elemanlarıdır. Mekanik sistemlerin incelenmesinde benzer elektrik devrelerinin kullanılması çalışmaları kolaylaştırır. Bu prosedürde ilk adım bu titreşimli sistemlerdeki elemanları açıklamaktır. Bu bölümünün amacı elektriksel, doğrusal ve rotasyonel (dönme) mekanik elemanları tanımlamak ve açıklamaktır (Olson 1943).

- DİRENÇ

- ELEKTRİKSEL DİRENÇ: Elektrik enerjisi, direnç üzerinden geçen elektrik akımı nedeniyle ısı enerjisine dönüşür. Uygulanan voltaj (V) ile bir dirençten " q " yükünün geçmesi ile enerji kaybedilir. Direnç, enerji kaybına neden olan bir devre elemanıdır. Ohm yasası ile tanımlanır:

$$R = \frac{V}{I} \quad (1.1)$$

Burada " I " devreden geçen akımdır.

- DOĞRUSAL MEKANİK DİRENÇ: Doğrusal mekanik enerji, sürtünme nedeniyle ısı enerjisine dönüşür. Uygulanan mekanik kuvvet (F) ile kuvvetin uygulandığı noktadaki cismin hızı (v) arasındaki ilişkiden doğrusal mekanik direnç tanımlanır:

$$R_{Doğrusal} = \frac{F_{Doğrusal}}{v} \quad (1.2)$$

- ROTASYONEL MEKANİK DİRENÇ: Rotasyonel mekanik enerji, rotasyonel sürtünme nedeniyle ısı enerjisine dönüşür. Sistem, Bir moment (Tork) ile cismin " ϕ " açısı kadar açısal yer değiştirmesi ile enerji kaybeder. Uygulanan moment (τ) ile dönme eksenine göre bulunduğu noktadaki cismin açısal hızı (ω) arasındaki ilişkiden rotasyonel mekanik direnç tanımlanır:

$$R_{Rotasyonel} = \frac{\tau_{Rotasyonel}}{\omega} \quad (1.3)$$

- ÖZ İNDÜKSİYON, KÜTLE, EYLEMSİZLİK MOMENTİ

- ÖZ İNDÜKSİYON: Elektromanyetik enerji öz indüktans ile ilişkilidir. İndüktanstaki akım artarsa elektromanyetik enerjide artar. Akım azaldığında ise azalır. İndüktanstaki akım sabit olunca enerjide sabit kalır. İndüktans, akımdaki değişime karşı çalışan bir elektrik devre elemanıdır ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\varepsilon = L \frac{di}{dt} \quad (1.4)$$

Burada “ ε ” elektro motor kuvveti (emk) ve $\frac{di}{dt}$ ise akımın zamanla değişim oranıdır.

- KÜTLE: Doğrusal mekanik sistemlerde, doğrusal mekanik eylemsizlik enerjisi, cismin kütlesi (m) ile ilişkilidir. Cismin enerjisi kütlenin doğrusal hızı arttıkça artar. Kütlenin doğrusal hızının artması, $\frac{dv}{dt}$, doğrusal ivmenin var olmasından kaynaklanır. Hız azaldığında ise enerji azalır. Hız sabit olunca enerjide sabit kalır. Kütle, cismin hızındaki değişime karşı koyan bir mekanik elemanıdır ve Newton’un ikinci hareket yasası ile tanımlanır:

$$F_{Doğrusal} = m \frac{dv}{dt} \quad (1.5)$$

- EYLEMSİZLİK MOMENTİ: Rotasyonel mekanik eylemsizlik enerjisi, cismin eylemsizlik momenti (I) ilişkilidir. Cismin dönme enerjisi cismin açısal hızı arttıkça artar. Kütlenin açısal hızının artması, $\frac{d\omega}{dt}$, açısal ivmenin var olmasından kaynaklanır. Açısal hız azaldığında dönme enerjisi azalır. Açısal hız sabit kaldığında ise enerjide sabit kalır. Eylemsizlik momenti, açısal hız ve tork arasındaki ilişki aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tau_{Rotasyonel} = I \frac{d\omega}{dt} \quad (1.6)$$

- KAPASİTANS, DOĞRUSAL ESNEKLİK (COMPLIANCE), ROTASYONEL ESNEKLİK

- KAPASİTANS: Elektrostatik enerji, iki levha üzerindeki negatif ve pozitif yüklerin ayrılmasıyla ilişkilidir. Zıt polaritedeki yüklerin ayrılmasıyla elektrostatik enerji artar. Yükler değişmeden kaldığında enerji sabit kalır ve depolanır. Yükler bir araya geldiğinde elektrostatik enerji azalır ve serbest kalır. Elektriksel

kapasitans, voltaj değişimine karşı koyan bir elektrik devre elemanıdır. Bir kapasitanstaki yük, kapasitans ve uygulanan elektromotor kuvvetinin (ϵ) oranıdır:

$$I = C_E \frac{d\epsilon}{dt} \quad (1.7)$$

Denklem (1.7)'i tekrar düzenlenirse;

$$\epsilon = \frac{1}{C_E} \int I dt = \frac{q}{C_E} \quad (1.8)$$

- DOĞRUSAL ESNEKLİK (COMPLIANCE): Doğrusal mekanik potansiyel enerji, bir yayın sıkışması ya da bir esneklik elemanı ile ilişkilidir. Yay sıkıştırıldığında mekanik enerji artar. Enerji, yayın açılmasına izin verildiğinde ise azalır. Enerji, yay sıkıştırılmış hareket etmeyecek şekilde kalırsa enerji sabit kalır ve depolanır. Doğrusal esneklik, uygulanan kuvvetteki değişimine karşı koyan bir mekanik elemanıdır. Kuvvet başına uzunluk boyutunda olan doğrusal esneklik aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F_{Doğrusal} = \frac{x}{C_D} \quad (1.9)$$

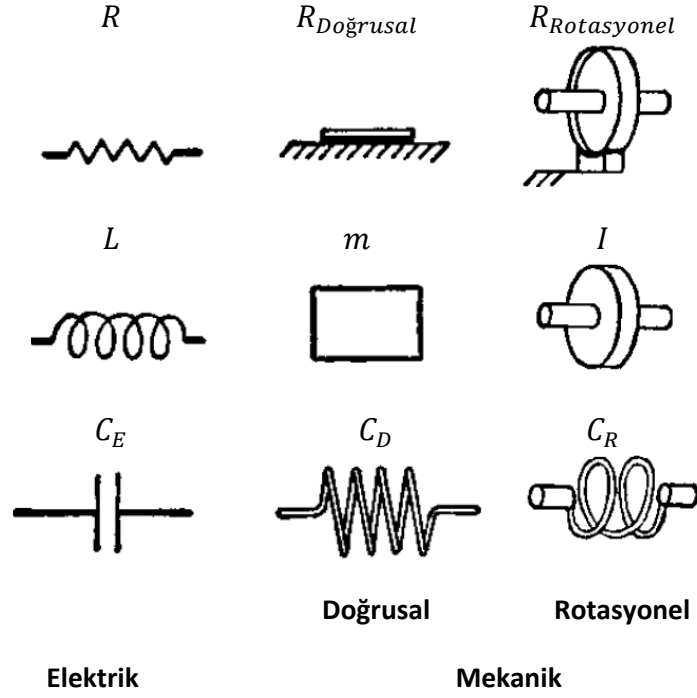
Burada “ x ” yerdeğiştirme ve “ C_D ” doğrusal esneklik terimidir. Esneklik, sertliğinin (stiffness) tersidir.

- ROTASYONEL ESNEKLİK (COMPLIANCE): Rotasyonel mekanik potansiyel enerji, bir yayın ya da bir esneklik elemanın burulması ile ilişkilidir. Yay burulduğunda mekanik enerji artar. Yayın burulması serbest bırakıldığında ise mekanik enerji azalır. Yay burulmuş olarak hareket etmeyecek şekilde kalırsa enerji sabit kalır ve depolanır. Rotasyonel esneklik, uygulanan momentteki değişimine karşı koyan bir mekanik elemanıdır. Moment başına açisal yerdeğiştirme (radian) boyutunda olan rotasyonel esneklik aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tau_{Rotasyonel} = \frac{\theta}{C_R} \quad (1.10)$$

Burada “ θ ” açisal yer deęiştirme ve “ C_R ” rotasyonel esneklik terimidir.

Elektriksel, doğrusal ve rotasyonel mekanik elemanlar önceki paragrafta anlatılmıştır. Şekil.1.1’de her üç sistemde üç eleman şematik olarak gösterilmiştir.



Şekil 1.1 Elektrik ve mekanikte kullanılan üç temel elemanın şematik gösterimleri.

Doğrusal mekanik direnç, enerji kaybına neden olan sürtünme ile temsil edilir. Rotasyonel mekanik direnç, dönen bir tekerlekte enerji kaybına neden olan fren sürtünmesi ile temsil edilir. Bu elemanlar elektriksel sistemlerde elektriksel dirence benzerdir.

Doğrusal mekanik sistemlerde bir eylemsizlik kütlesi ile temsil edilir. Rotasyonel mekanik sistemlerde eylemsizlik momenti bir çark (Volan) ile temsil edilir. Bu elemanlar elektriksel sistemlerde indüktansın benzeridir.

Doğrusal mekanik sistemlerde doğrusal esneklik bir yay (Sıkıştırılmış) ile temsil edilir. Rotasyonel mekanik sistemlerde rotasyonel esneklik yine bir yay (Burulmuş) ile temsil edilir. Bu elemanlar elektriksel sistemlerde kapasitansın benzeridir.

Elektrik devrelerinde temel yasalarla akan akım için kullanılan dinamik kavramlar, hareket eden bir cismin dinamiğini yöneten yasalar ile aynı doğaya sahiptir. Genel olarak üç temel nicelik vardır; kütle, uzunluk ve zaman. Bu nicelikler doğrusal mekanik sistemlerde doğrudan bağımlıdır. Doğrusal mekanik sistemdeki diğer nicelikler bu üç temel nicelikler cinsinden türetilir. Doğrusal mekanik sistemlerdeki uzunluk, kütle ve zaman niceliklerine elektriksel sistemde yük, indüktans ve zaman karşılık gelir. Rotasyonel mekanik sistemlerde ise açısız

yerdeğiştirme, eylemsizlik momenti ve zaman karşılık gelmektedir. Yukarıda belirtilen üç sistemdeki temel büyüklüklerin her biri Tablo.1'de gösterilmiştir.

Tablo 1.1 Elektrik, doğrusal ve rotasyonel mekanikteki üç temel nicelikler.

Elektrik		Doğrusal Mekanik		Rotasyonel Mekanik	
Nicelik	Sembol	Nicelik	Sembol	Nicelik	Sembol
Öz indüksiyon	L	Kütle	m	Eylemsizlik momenti	I
Yük	q	Doğrusal yerdeğiştirme	x	Açısal yerdeğiştirme	ϕ
Zaman	t	Zaman	t	Zaman	t

2 “Kütle – Yay – Sönümleyici Sistemi” ile “Direnç – İndüktör –Kondansatör (RLC) Devresinin” Karşılaştırılması

Bu bölümde fizikte çok sık karşılaşılan benzer iki sistem örnek olarak incelenmiştir. Bu sistemlerin titreşim durumları çok karmaşık yapıda olup burada en basit doğrusal modeller kullanılarak hareket denklemleri karşılaştırılmıştır.

2.1 Kütle – Yay – Sönümleyici Sistemi

Titreşimsel olaylar karmaşık olsa da, bazı temel ilkeleri bir kütle-yay-sönümleyici sisteminin çok basit bir doğrusal modelinden tanımlanabilir. Böyle bir sistem, cismi denge konumuna getirmeye çalışan bir m kütlesi (kg), yay sabiti k (N/m) olan bir yay ve titreşim hareketine zıt yönde olan bir sönüm elemanından oluşur (Şekil 2.1). Sönüm elemanının uyguladığı kuvvet hız ile orantılı olup orantı sabiti “sönüm katsayısı c (Ns/m)” olarak adlandırılır. İdeal bir kütle-yay-sönümleyici sisteminin hareket denklemleri sırasıyla aşağıdaki gibi yazılır:

$$F_s = -kx \quad (2.1)$$

$$F_d = -cv = -c\dot{x} = -c \frac{dx}{dt} \quad (2.2)$$

Denklem Newton’un hareket yasasına göre düzenlenirse

$$\sum F = ma = m\ddot{x} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.3)$$

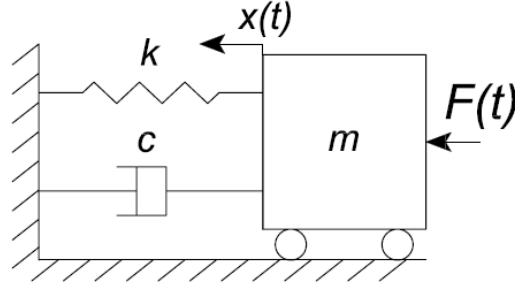
Burada a kütleinin ivmesi (m/s^2) ve denge konumuna göre x (m) yer deđiřtirmesidir. Yukarda ki denklemler ikinci derece diferansiyel denklem olan hareket denklemini oluşturmak üzere bir araya getirilirse:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (2.4)$$

Denklemini elde edilir. Denklem (2.4) tekrar düzenlenirse

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m} \quad (2.5)$$

Denklemini elde edilir.



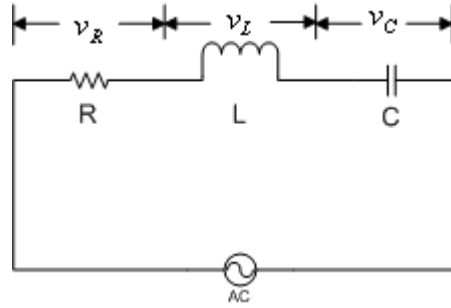
Şekil 2.1 Kütle-yay-sönümleyici sistemi.

Denklem (2.5)'de $B = \frac{c}{m}$, $K = \frac{k}{m}$ ve $f(t) = \frac{F(t)}{m}$ değişken dönüşümleri yapılırsa ikinci dereceden sistem elde edilir:

$$\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = f(t) \quad (2.6)$$

2.2 Seri RLC Devresi

Bir direnç, bir indüktör ve bir kondansatörün, bir alternatif voltaj (AC) kaynağının uçları arasında seri olarak bağlandığı RLC devresi şekil 2.2'de gösterilmektedir.



Şekil 2.2 RLC seri devresi.

Devreye uygulanan voltaj, sinüzoidal ve zamanın fonksiyonudur:

$$v = V_m \sin \omega t \quad (2.7)$$

Şekil 2.2'deki devrede Kirchhoff'un ikinci yasası uygulandığında aşağıdaki denklem elde edilir:

$$L \frac{di}{dt} + IR + \frac{q}{C} = V_m \sin \omega t \quad (2.8)$$

Denklem (2.8)'de $i = \frac{dq}{dt}$, $B = \frac{R}{L}$, $K = \frac{1}{LC}$ ve $V(t) = \frac{V_m \sin \omega t}{L}$ değişken dönüşümleri yapılırsa ikinci dereceden sistem elde edilir:

$$\ddot{q} + B\dot{q} + Kq = V(t) \quad (2.9)$$

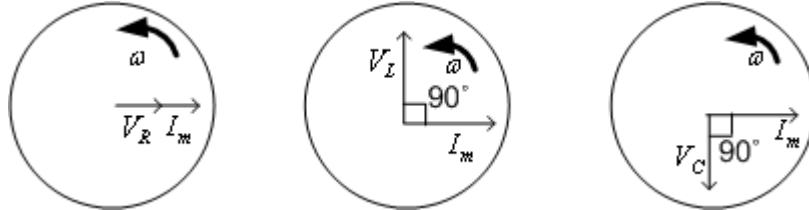
Bölüm 2.1'de Kütle-yay-sönümleyici sisteminin hareket denklemi olarak bulunan (2.6) eşitliği ile (2.9) eşitliğinin aynı formda ikinci dereceden diferansiyel denklemlerdir. Böylece "Kütle-Yay-Sönümleyici Sistemi" ile "Direnc-İndüktör-Kondansatör Devresinin" benzer sistemler olduğu gösterilmiştir.

Devreden geçen akım da zamanın fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$i = I_m \sin(\omega t - \phi) \quad (2.10)$$

Burada ϕ , akım ile uygulanan voltaj arasındaki faz açısıdır.

Bu problemin çözümünü anlayabilmek için bu devrenin faz diyagramını oluşturmak gerekir. Devre elemanları seri olduklarından, herhangi bir anda devrenin her noktasındaki akım aynıdır. Yani, bir AC seri devresinin her noktasındaki akım, aynı genlik ve faza sahiptir. Bu nedenle her elemanın uçları arasındaki voltaj, farklı genliğe ve faza sahip olacaklardır. Özel olarak, direncin uçları arasındaki voltaj, akımla aynı fazdadır. İndüktörün uçları arasındaki voltaj 90° akımın önündedir ve kondansatörün uçları arasındaki voltaj akımın 90° gerisindedir (Şekil 2.3).



Şekil 2.3 RLC seri devre elemanlarının faz diyagramları.

Bu faz ilişkilerini kullanarak her üç elemanın uçları arasındaki ani voltaj düşmeleri aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$v_R = I_m R \sin \omega t = V_R \sin \omega t \quad (2.11)$$

$$v_L = I_m X_L \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = V_L \cos \omega t \quad (2.12)$$

$$v_C = I_m X_C \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -V_C \cos \omega t \quad (2.13)$$

Burada V_R , V_L ve V_C her devre elemanının uçları arasındaki maksimum voltajlardır ve ohm yasasından yazılabilirler:

$$V_R = I_m R \quad (2.14)$$

$$V_L = I_m X_L \quad (2.15)$$

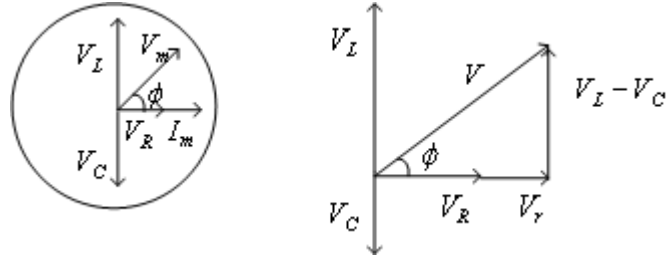
$$V_C = I_m X_C \quad (2.16)$$

Üç devre elemanın uçları arasındaki toplam ani voltaj her birinin üzerindeki voltaj düşmelerinin toplamına eşittir:

$$v = v_R + v_L + v_C \quad (2.17)$$

Bu analitik yaklaşım doğru olmakla birlikte, faz diyagramını inceleyerek bu toplamı elde etmek daha kolaydır.

Herhangi bir anda bütün devre elemanlarındaki akım aynı fazda olduğundan, şekil 2.3'deki üç faz diyagramını birleştirerek bir bileşke faz diyagramı elde edebilir (Şekil 2.4).



Şekil 2.4 RLC seri devresi faz diyagramı.

Burada her elemandaki akımı temsil etmek üzere bir tane I_m fazörü kullanılır. Bu diyagramdan V_R , V_L ve V_C voltaj genliklerinin vektör toplamının (Uzunluğu, şiddeti), uygulanan voltajın V_m pik değeri olan bir fazöre eşit olduğunu görüyoruz. Burada V_m fazörü, I_m akım fazörü ile bir ϕ açısı yapmaktadır. V_L ve V_C voltaj fazörleri aynı doğrultuda fakat zıt yönde olduklarından bunların toplamı $V_L - V_C$ fark fazörünü verir ki bu da V_R fazörüne diktir. Şekil 2.4'deki üçgenden

$$V_m = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = \sqrt{(I_m R)^2 + (I_m X_L - I_m X_C)^2}$$

$$V_m = I_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (2.18)$$

olduğunu görürüz. Burada $X_L = \omega L$ ve $X_C = 1/\omega C$ 'dir. Buradan maksimum akımı

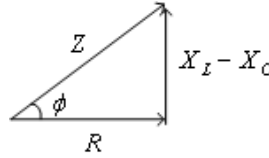
$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (V_L - V_C)^2}} \quad (2.19)$$

olarak ifade edebiliriz. Devrenin Z empedansı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (2.20)$$

Böylece (2.18) eşitliği şöyle yazabiliriz:

$$V_m = I_m Z. \quad (2.21)$$



Şekil 2.5 Z empedansı fazör diyagramı.

Şekil 2,4'deki fazörlerin hepsinden I_m ortak çarpanını çıkarırsak Şekil 2,5'deki gibi bir empedans üçgeni oluşturabiliriz. Bu fazör diyagramından, akımla voltaj arasındaki ϕ faz açısının

$$\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (2.22)$$

olacağını görürüz. Burada,

- $X_L > X_C$ olduğu zaman (yüksek frekanslarda) faz açısı pozitif olur. Bu durumda akım Şekil 2.4' deki gibi uygulanan voltajın gerisinde kalır.
- $X_L < X_C$ olduğunda ise faz açısı negatif olur. Bu durumda akım voltajdan öndedir.
- $X_L = X_C$ olduğu zaman faz açısı sıfır olur. Bu durumda AC empedansı dirence eşit olur ve akım V_m / R ile verilen pik değerini alır. Bu durumun oluşturduğu frekans değerine *rezonans frekansı* denir.

2.2.1 Seri RLC devresinde Rezonans

Bir seri RLC devresi, akım pik değerini aldığı zaman rezonansa olduğu söylenir. Genel olarak etkin akım

$$I_{et} = \frac{V_{et}}{Z} \quad (2.23)$$

şeklinde yazılabilir. Empedans, kaynağın frekansına bağlı olduğundan, RLC devresindeki akımın da frekansa bağlı olacağını görmekteyiz. Akım, $X_L = X_C$ olduğunda pik değerine ulaştığında $Z = R'$ ye denk gelmektedir. Bu durumun meydana geldiği ω_0 frekansına devrenin rezonans frekansı denir. ω_0 'u bulmak için $X_L = X_C$ koşulunu kullanarak

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

veya

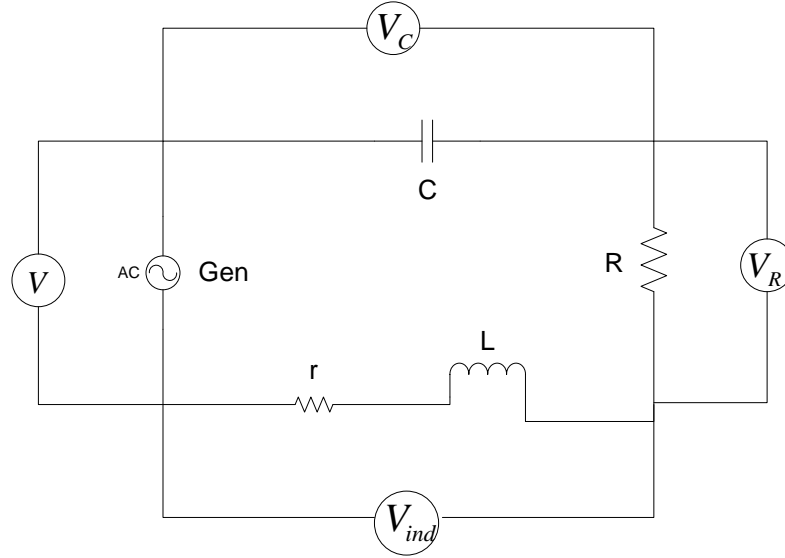
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.24)$$

bulunur.

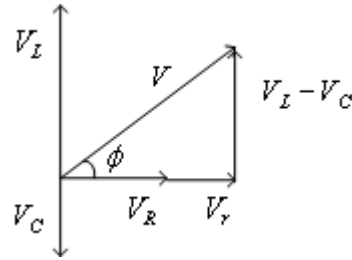
Bu bölümde RLC devresi detaylı olarak incelenmektedir. Amaç bir sonraki bölümde de kullanılacak olan Multisim programının temel özelliklerini göstermektir.

2.2.2 Seri RLC Devresinin Multisim programı ile İncelenmesi

Şekil 2.6 bir fonksiyon jeneratörü, bir direnç, bir kondansatör ve iç dirence sahip bir indüktörden oluşan seri RLC devresini göstermektedir. Bu devrenin fazör diyagramını Şekil 2.7’de gösterilmektedir (Eyidoğan 2008).



Şekil 2.6 RLC seri devresi.

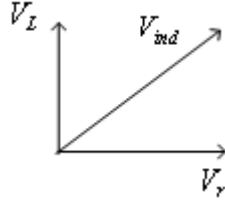


Şekil 2.7 RLC devresi fazör diyagramı.

Şekil 2.7’deki fazör diyagramından

$$V_m = \sqrt{(V_L - V_C)^2 + (V_R + V_r)^2} \quad (2.25)$$

eşitliği elde edilir. V_L ve V_r voltajları direkt olarak ölçmek mümkün değildir. Şekil 2.6’da gösterilen V_{ind} voltajı , V_L ve V_r voltajlarının vektör toplamlarıdır (Şekil 2.8).



Şekil 2.8 Fazör diyagramı.

Şekil 2.8'deki fazör diyagramından

$$V_{ind}^2 = V_L^2 + V_r^2 \quad (2.26)$$

eşitliğini elde ederiz. Devredeki her elemanın üstünden geçen akım aynı olduğuna göre:

$$V_L = I(\omega L) \quad (2.27)$$

$$V_r = Ir \quad (2.28)$$

eşitliklerini yazabiliriz. ωL niceliğine "indüktör empedans" denir ve birimi ohm'dur. Elde ettiğimiz eşitlikler kullanarak V_L voltajını aşağıdaki eşitlikler yardımıyla hesaplayabiliriz:

$$V_L = \frac{V_{ind}\omega L}{\sqrt{(\omega L)^2 + r^2}}$$

yada

$$V_L = \frac{V_{ind}r}{\sqrt{(\omega L)^2 + r^2}} \quad (2.29)$$

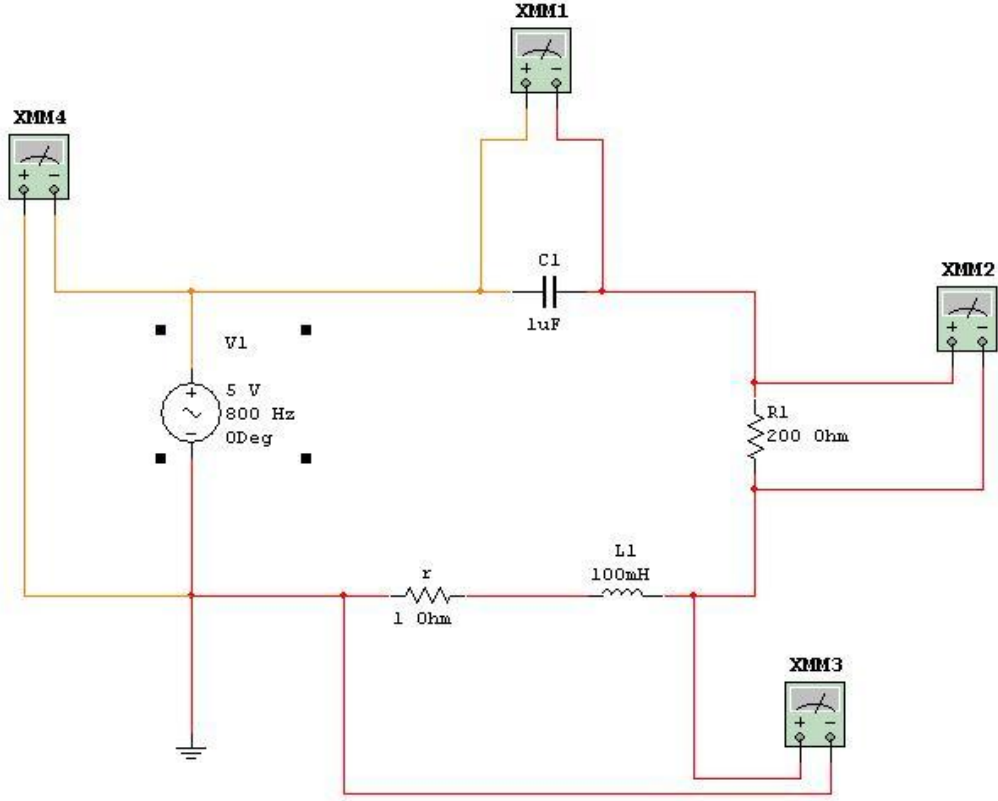
RLC DEVRESİ DENEYİ

Devre eleman listesi:

- Sinüs dalga üretici (değişken frekans, 5V)
- Direnç
- İndüktör (100mH ve $r = 1\text{ohm}$)
- Kondansatör (1 μ F)
- Voltmetre

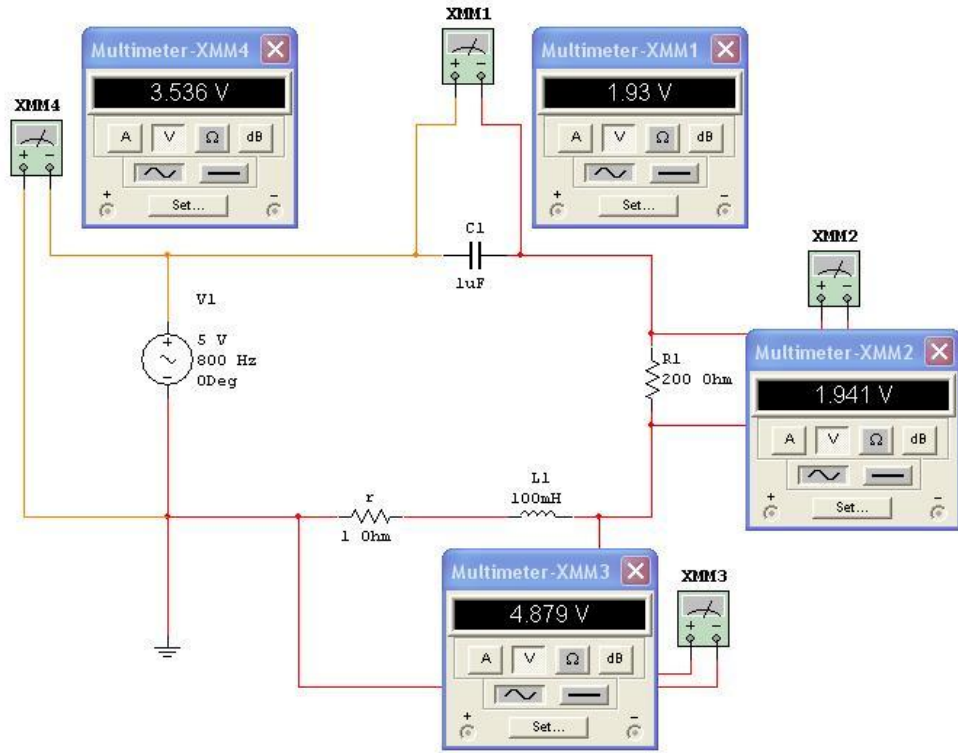
Deney prosedürü:

- 1- Multisim programında, Şekil 2.9'da gösterilen seri RLC devresini kurulum.



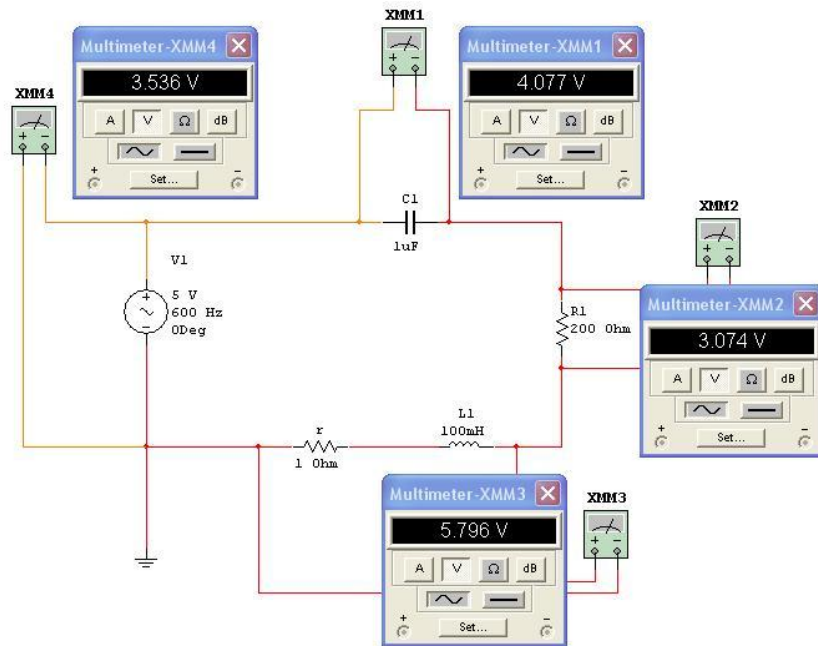
Şekil 2.9 Multisim programında RCL seri devresi.

- 2- Frekansı 800 Hz ve direnci de 200Ω değerlerine ayarlanır (Şekil 2.9).
- 3- Voltmetre kullanarak V , V_R , V_{ind} ve V_C değerleri ölçülerek (Şekil 2.10), veri tablosuna kaydedilir (Tablo 2.1).



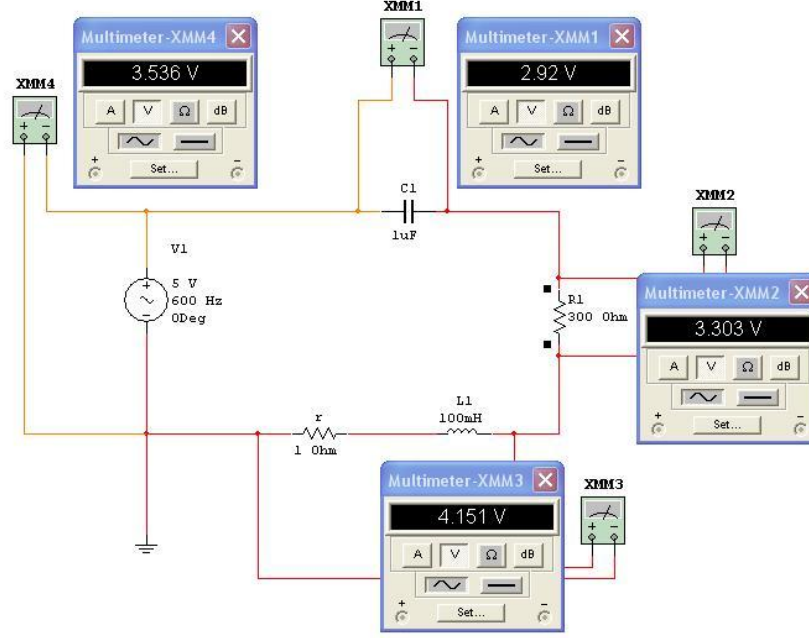
Şekil 2.10 Frekansı 800 Hz ve direnç 200Ω değerlerinde RLC devresi.

- 4- Frekansı 600 Hz ve direnci de 200Ω değerlerine ayarlanır ve voltmetre kullanarak V , V_R , V_{ind} ve V_C değerler ölçülerek (Şekil 2.11), veri tablosuna kaydedilir (Tablo 2.1).



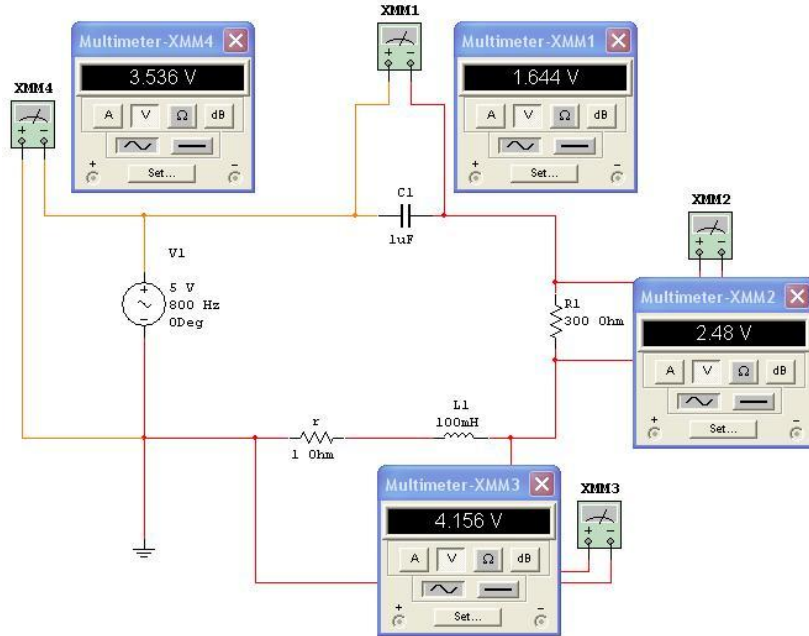
Şekil 2.11 Frekansı 600 Hz ve direnç 200Ω değerlerinde RLC devresi.

- 5- Frekansı 600 Hz ve direnci de 300Ω değerlerine ayarlanır ve voltmetre kullanarak V , V_R , V_{ind} ve V_C değerleri ölçülerek (Şekil 2.12), veri tablosuna kaydedilir (Tablo 2.1).

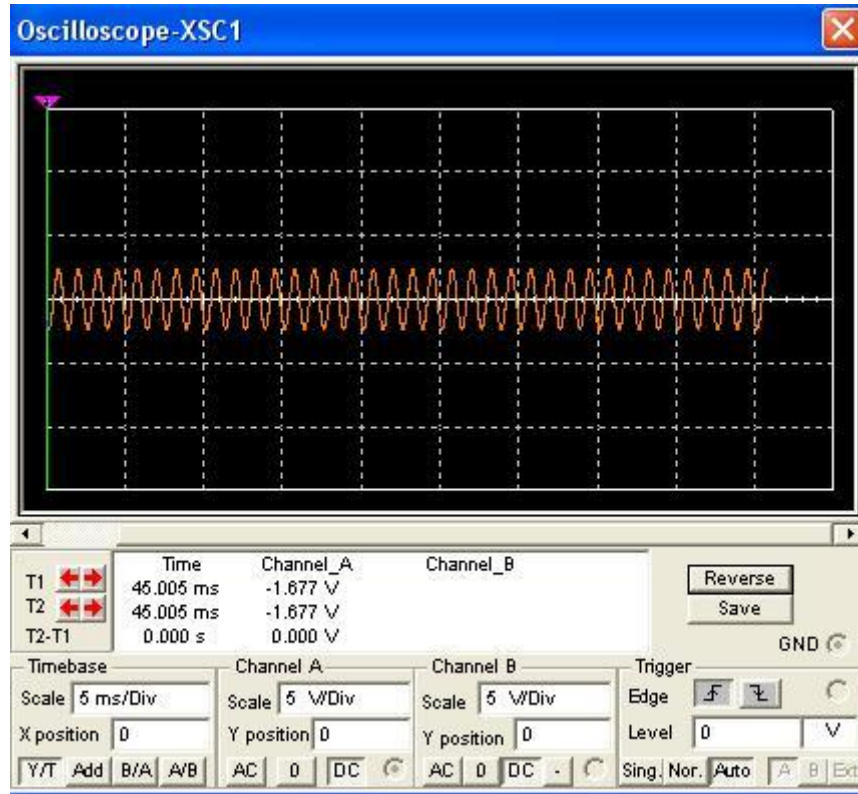


Şekil 2.12 Frekansı 600 Hz ve direnç 300Ω değerlerinde RLC devresi.

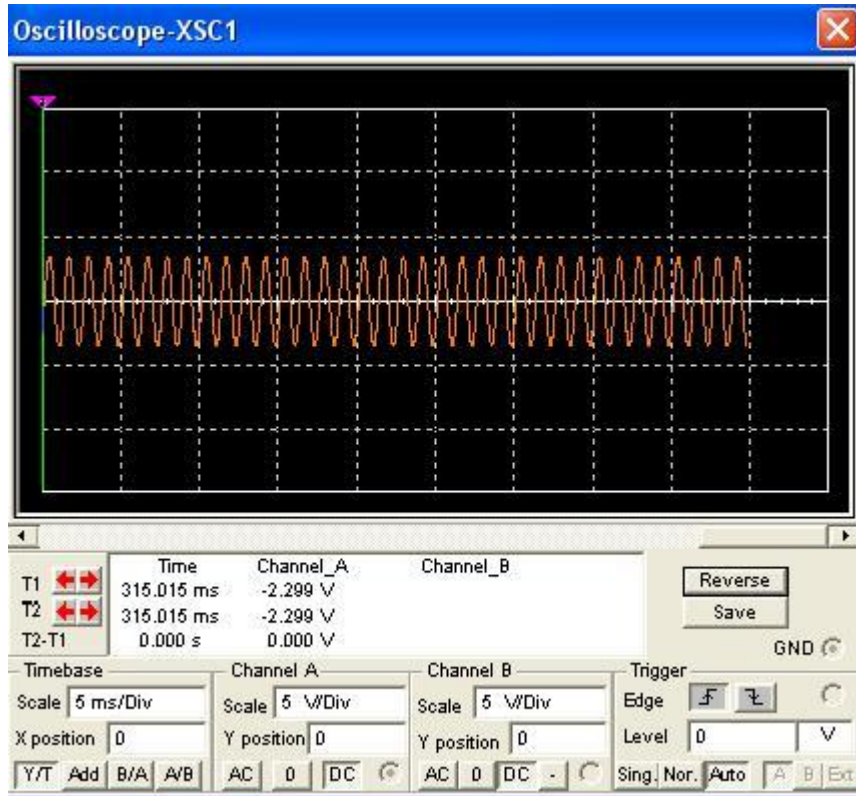
- 6- Frekansı 800 Hz ve direnci de 300Ω değerlerine ayarlanır ve voltmetre kullanarak V , V_R , V_{ind} ve V_C değerleri ölçülerek (Şekil 2.13), veri tablosuna kaydedilir (Tablo 2.1). Ayrıca devre elemanları üzerinde osiloskop görüntülerini alınır (Şekil 14-16).



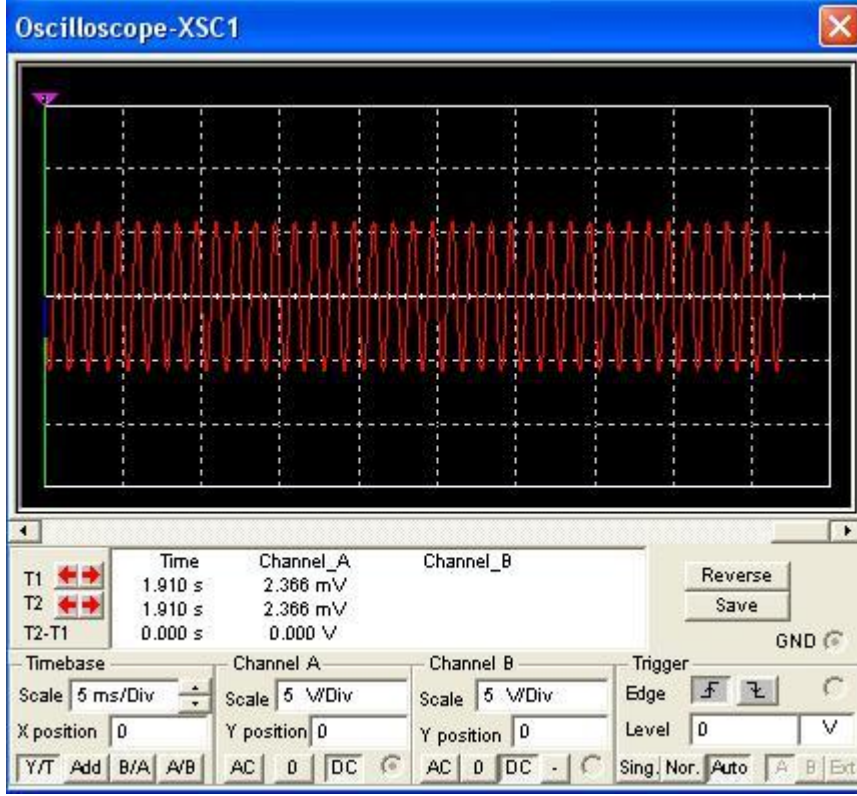
Şekil 2.13 Frekansı 800 Hz ve direnç 300Ω değerlerinde RLC devresi.



Şekil 2.14 RLC devresinde kondansatör üzerinde osiloskop görüntüsü.



Şekil 2.15 RLC devresinde direnç üzerinde osiloskop görüntüsü.



Şekil 2.16 RLC devresinde indüktör üzerinde osiloskop görüntüsü.

Tablo 2.1 RLC devresi deneyi veri tablosu.

f(Hz)	R(ohm)	V(V)	V_C (V)	V_R (V)	V_{ind} (V)
800	200	3,536	1,93	1,941	4,879
800	300	3,536	1,644	2,48	4,156
600	200	3,536	4,077	3,074	5,769
600	300	3,536	2,92	3,303	4,151

Hesaplamalar:

- 1- Ayarladığımız her frekans değeri için $\omega = 2\pi f$ eşitliğinden yararlanarak hesaplanan ω değerleri Hesap Tablosuna kaydedilir (Tablo 2.2).
- 2- Veri Tablosundaki değerleri kullanarak $V_L = \frac{V_{ind} r}{\sqrt{(\omega L)^2 + r^2}}$ eşitliğinin yardımıyla V_L değerini ve $V_{ind}^2 = V_L^2 + V_r^2$ eşitliğinin yardımıyla da V_r değerini hesaplayarak Hesap Tablosuna kaydedilir (Tablo 2.2).
- 3- Veri Tablosundaki ve 2. basamaktaki hesaplamalar sonucu bulunan değerleri kullanarak $V_L - V_C$ ve $V_R + V_r$ değerleri hesaplanır ve Hesap Tablosuna kaydedilir (Tablo 2.2).
- 4- 3.basamakta hesaplanan değerleri kullanarak V_M değeri hesaplanır ve Hesap Tablosunu kaydedilir (Tablo 2.2).

Tablo 2.2 RLC devre elemanları üzerindeki voltaj değerlerinin hesaplanması.

ω	V_L (V)	V_r (V)	$V_L - V_C$ (V)	$V_R + V_r$ (V)	$V_m = \sqrt{(V_L - V_C)^2 + (V_R + V_r)^2}$
5024	0,009711366	4,879	-1,92999	6,82	7,087825
5024	0,008272277	4,156	-1,64399	6,636	6,836608
3768	0,015310456	5,769	-4,07698	8,843	9,737579
3768	0,011016416	4,151	-2,91999	7,454	8,005526

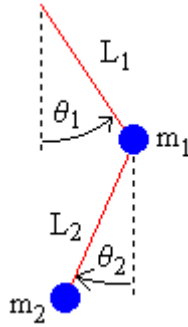
Sonuç olarak seri RLC devre elemanları üzerindeki voltajın değerleri farklı frekans değerleri için ölçülerek bilinmeyen değerler hesaplanmış ve her bir devre elemanı üzerinde sinüzoidal dalga olduğu gözlenmiştir.

3 “Kuplaj Çift Sarkaç” ile “Kuplaj LC-Devresinin” Karşılaştırılması

Bu bölümde fizikte çok sık karşılaşılan bir başka benzer iki sistem (Kuplaj Çift Sarkaç ile Kuplaj LC-Devresi) örnek olarak incelenmiştir. Bu sistemlerin titreşim durumları çok karmaşık yapıda olup uygun başlangıç koşullarında kaotik durum göstermektedirler.

3.1 Kuplaj Çift Sarkaç

Uzunluğu L_1 ve kütlesi m_1 olan basit sarkaca, uzunluğu L_2 ve kütlesi m_2 olan bir diğer sarkaç şekil 3.1 de gösterildiği gibi bağlandığında “kuplaj çift sarkaç” sistemi elde edilir. Sistemdeki her iki kütle, zaman içinde bir birine enerjisini aktararak hareketine devam etmek eğilimindedir. Bu sistemin titreşim durumları çok karmaşık yapıda olup burada en basit doğrusal modeller kullanılarak hareket denklemleri gösterilecektir.



Şekil 3.1 Kuplaj Çift Sarkaç.

3.1.1 Çift Sarkacın Kinematığı:

Kinematik, kuvvetleri hesaba katmaksızın mekanizmanın bölümleri arasındaki ilişkileri anlamamıza yardımcı olur. Kinematikte, mekanizmanın hareket denklemlerini belirlemek için konum, hız ve ivme gibi değişkenlerin bilinmesi gerekir. Sözü edilen değişkenler aşağıda tanımlanmıştır:

x = sarkaç kütlesinin yatay konumu

y = sarkaç kütlesinin dikey konumu

θ = açısal yerdeğiştirme

L = sarkacın uzunluğu

Üst sarkaç “1” indisi ile ve alt sarkaç ise “2” indisi ile gösterilir. Buna göre üst sarkacın kütlesi m_1 , uzunluğu L_1 ve düşey ile yaptığı açı θ_1 iken diğer sarkaçta ise m_2 , L_2 ve θ_2 parametreleri kullanılır. Üst sarkacın harekete başladığı nokta orijin kabul edilir. Böylece üst ve alt sarkacın x_1 , x_2 , y_1 ve y_2 konumları basit trigonometrik ifadeler kullanarak aşağıdaki gibi yazılırlar:

$$x_1 = L_1 \sin \theta_1 \quad (3.1)$$

$$y_1 = -L_1 \cos \theta_1 \quad (3.2)$$

$$x_2 = x_1 + L_2 \sin \theta_2 \quad (3.3)$$

$$y_2 = y_1 - L_2 \cos \theta_2 \quad (3.4)$$

Hız, konumun zamana göre türevidir. Eşitlik (3.1-4) türevleri alınırsa sırasıyla üst ve alt sarkacın x ve y hız bileşenleri bulunur:

$$v_{1x} = x_1' = \theta_1' L_1 \cos \theta_1 \quad (3.5)$$

$$v_{1y} = y_1' = -\theta_1' L_1 \sin \theta_1 \quad (3.6)$$

$$v_{2x} = x_2' = x_1' + \theta_2' L_2 \cos \theta_2 \quad (3.7)$$

$$v_{2y} = y_2' = y_1' - \theta_2' L_2 \sin \theta_2 \quad (3.8)$$

İvme, konumun zamana göre ikinci türevi (hızın zamana göre türevi) dir. Eşitlik (3.5-8) türevleri alınırsa sırasıyla üst ve alt sarkacın x ve y ivme bileşenleri bulunur:

$$a_{1x} = x_1'' = -\theta_1'^2 L_1 \sin \theta_1 + \theta_1'' L_1 \cos \theta_1 \quad (3.9)$$

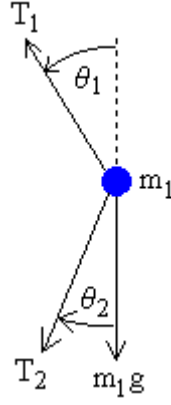
$$a_{1y} = y_1'' = \theta_1'^2 L_1 \cos \theta_1 + \theta_1'' L_1 \sin \theta_1 \quad (3.10)$$

$$a_{2x} = x_2'' = x_1'' - \theta_2'^2 L_2 \sin \theta_2 + \theta_2'' L_2 \cos \theta_2 \quad (3.11)$$

$$a_{2y} = y_2'' = y_1'' - \theta_2'^2 L_2 \cos \theta_2 + \theta_2'' L_2 \sin \theta_2 \quad (3.12)$$

3.1.2 Çift Sarkacın Dinamiği

Dinamik, bir cismin hareketini kuvvetler göz önünde bulundurularak incelenmesidir. Dinamikte, mekanizmanın diferansiyel denklemlerini belirlemek için konum, hız ve ivme gibi değişkenler yanında parçacık üzerine etki eden net kuvvetinde bilinmesi gerekir. İki sarkaç kütlesi, noktasal parçacıklar gibi davranır. Üstteki kütle için serbest cisim diyagramı şekil 3.2’de gösterilmiştir. Şekilde ipteki gerilme kuvveti “ T ” ile gösterilmiştir. Burada “ m_1g ” üst cismin ağırlığıdır (Neumann 2004).



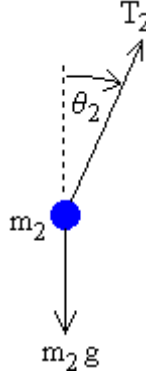
Şekil 3.2 Kuplaj Çift Sarkaçta üst kütlenin serbest cisim diyagramı.

Üstteki sarkacın kütlesine etki eden kuvvetler, sırasıyla, T_1 üstteki ipteki gerilme, T_2 alttaki ipteki gerilme ve “ m_1g ” ağırlığıdır. Bu kütle üzerindeki net kuvvet bunların vektörel toplamıdır. Newton’un ikinci hareket yasası kullanarak cismin x ve y hareket denklemleri aşağıdaki iki diferansiyel denklem ile yazılabilir:

$$m_1x_1'' = -T_1\sin\theta_1 + T_2\sin\theta_2 \quad (3.13)$$

$$m_1y_1'' = T_1\cos\theta_1 - T_2\cos\theta_2 - m_1g \quad (3.14)$$

Alttaki sarkaç için kuvvetler ise; T_2 alttaki ipteki gerilime ve “ m_2g ” ağırlığıdır (Alttaki kütle için serbest cisim diyagramı şekil 3.3’de gösterilmiştir). Newton’un ikinci hareket yasası kullanarak cismin x ve y hareket denklemleri aşağıdaki iki diferansiyel denklem ile yazılabilir:



Şekil 3.3 Kuplaj Çift Sarkaçta alt kütle için serbest cisim diyagramı.

$$m_2 x_2'' = -T_2 \sin \theta_2 \quad (3.15)$$

$$m_2 y_2'' = T_2 \cos \theta_2 - m_2 g \quad (3.16)$$

Diyagramların denklemlerinde dikkat edilmesi gereken bazı noktalar vardır. Buradaki diyagramlarda θ_1 pozitif ve θ_2 negatiftir (Saat yönünün tersi kural gereği pozitiftir).

θ_1'' ve θ_2'' açısal ivmeleri, θ_1 , θ_1' , θ_2 ve θ_2' açısal yerdeğiştirme ve hız terimleri cinsinden bulunabilir. $T_2 \cos \theta_2$ ve $T_2 \sin \theta_2$ ifadeleri 3.15 ve 3.16 da tanımlıdır. Bunlar eşitlik 3.13 ve 3.14 de yerine konulursa:

$$m_1 x_1'' = -T_1 \sin \theta_1 - m_2 x_2'' \quad (3.17)$$

$$m_1 y_1'' = T_1 \cos \theta_1 + -m_2 y_2'' - m_2 g - m_1 g \quad (3.18)$$

elde edilir.

Denklem 3.17 " $\cos \theta_1$ " ile denklem 3.18 " $\sin \theta_1$ " ile çarpılıp ve yeniden düzenlenirse:

$$T_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 = -\cos \theta_1 (m_1 x_1'' + m_2 x_2'') \quad (3.19)$$

$$T_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 = \sin \theta_1 (m_1 y_1'' + m_2 y_2'' + m_2 g + m_1 g) \quad (3.20)$$

bulunur. En son elde edilen iki denklem eşit olduğundan aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sin \theta_1 (m_1 y_1'' + m_2 y_2'' + m_2 g + m_1 g) = -\cos \theta_1 (m_1 x_1'' + m_2 x_2'') \quad (3.21)$$

Denklem 3.15 " $\cos\theta_2$ " ile denklem 3.16 " $\sin\theta_2$ " ile çarpılıp tekrar düzenlenirse:

$$T_2 \sin\theta_2 \cos\theta_2 = -\cos\theta_2 (m_2 x_2'') \quad (3.22)$$

$$T_2 \sin\theta_2 \cos\theta_2 = \sin\theta_2 (m_2 y_2'' + m_2 g) \quad (3.23)$$

bulunur. En son elde edilen iki denklem eşit olduğundan aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sin\theta_2 (m_2 y_2'' + m_2 g) = -\cos\theta_2 (m_2 x_2'') \quad (3.24)$$

Böylece θ_1'' ve θ_2'' açısal ivmeleri, θ_1 , θ_1' , θ_2 ve θ_2' açısal yerdeğiştirme ve hız terimleri cinsinden bulunabilir. (3.9-12) denklemleri eşitlik (3.21) ve (3.24) de kullanılırsa θ_1'' ve θ_2'' açısal ivmeleri için iki bilinmeyenli iki denklem elde etmiş oluruz:

$$\theta_1'' = \frac{-g(2m_1+m_2)\sin\theta_1 - m_2 g \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2\sin(\theta_1 - \theta_2)m_2(\theta_2'^2 L_2 + \theta_1'^2 L_1 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{L_1(2m_1+m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))} \quad (3.25)$$

$$\theta_2'' = \frac{2\sin(\theta_1 - \theta_2)(\theta_1'^2 L_1(m_1+m_2) + g(m_1+m_2)\cos\theta_1 + \theta_1'^2 L_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{L_2(2m_1+m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))} \quad (3.26)$$

Sonuç olarak bu denklem sistemi çift sarkacın hareket denklemleridir.

3.1.3 Çift Sarkaç Simülasyonu

Bir sarkaca asılı başka bir sarkaçtan oluşan "Çift sarkaç" potansiyel kaotik bir sistemdir. Bu demektir ki; başlangıç koşullarında belirli parametrelerde ki çok çok küçük bir değişim, sarkacın hareketi üzerinde dramatik bir etkiye sahip olur.

Edward Lorenz'in 1963 yılında yaptığı atmosfer modelleme çalışmalarında bulunduğu başlangıç koşullarını hassasiyet günümüzde kaos teorisi olarak bilinen bilim dalının gelişmesine katkıda bulunmuştur. Bir dinamik sistemin başlangıç değerlerindeki çok küçük değişikliklerin, büyük ve öngörülemez sonuçlar doğurabileceğini öngörmüş ve bunu örneklemek için 1972'de sunduğu bir çalışmada, bir kelebeğin Amerika'da kanat çırpması sırasında kanatlarının uçunda meydana gelen küçük bir girdabın bir yıl sonra Himalayalarda bir tornadoya sebep olabileceği ifadesini kullanmıştı (Gleick 1995).

En basit sistemlerin bile karmaşık yapı içinde olabileceği Newton ve Poincare gibi bilim adamları tarafından gözlemlenmiştir. Örneğin Newton iki güneş ve bir gezegenden oluşan üç cisim problemini çözmeye çalışmış ama başarılı olamamıştır. Hayatı boyunca problemi düşünmüş ve çözüm bulabilecek olana para ödülü koymuştur. Bilgisayarların bulunması ile nümerik çözümler kullanılarak üç cisim problemi çözülmüştür. Diğer yandan Poincare aynı problem üzerinde çalışırken, günümüzde matematikte anabilim dalı olarak bilinen, topolojiyi keşfetmesine rağmen analitik çözümün mümkün olmadığını söylemiştir. Bilimsel anlamda kaos teorisinin ilk sinyallerini veren bilim adamı Poincare' dir.

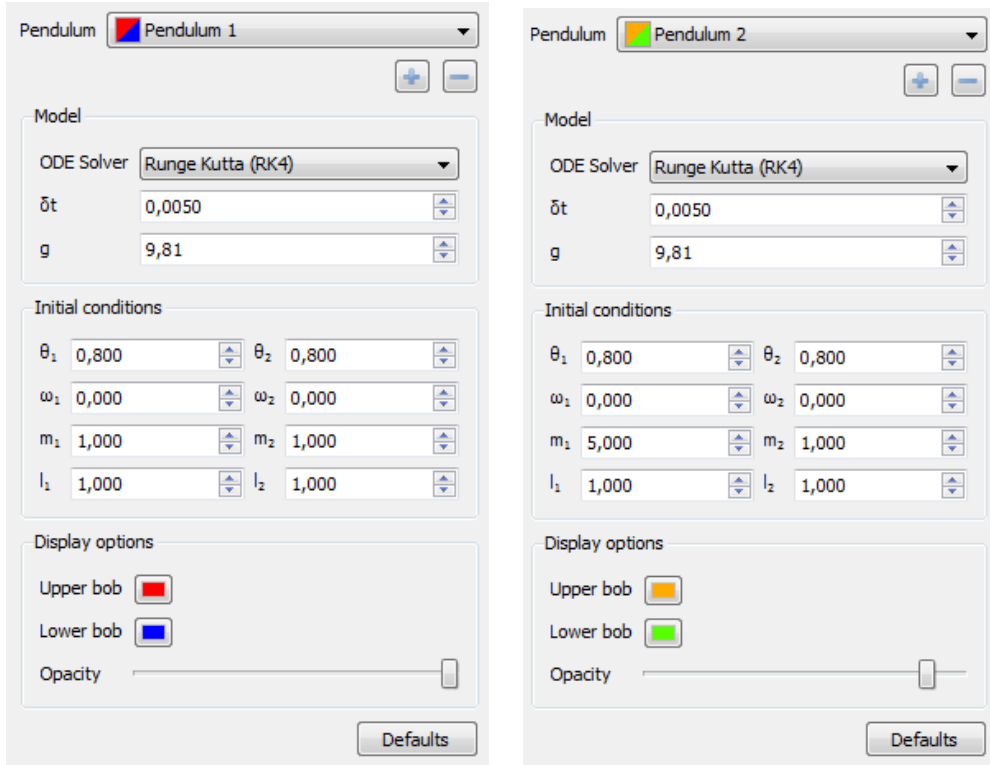
Bir sistemin kaotik davranışını tanımlamak için bir çok yöntem kullanılabilir. Örneğin yukarıda bahsedilen başlangıç koşullarına hassasiyet ve hareketin kendini tekrarlamaması sistemin kaotik davranış içerisinde olduğu sinyali vermektedir. Bunların yanında standart araçlar kullanılarak sistemin periyodik, yarı (quasi) – periyodik veya kaotik davranış içinde olup olmadığı bulunabilir. Bu araçlar bazıları aşağıda verilmiştir.

- o Dallenma (Bifurcation)
- o Schwarzian Türevi
- o Güç Spektrum Analizi (Power Spectrum)
- o Lyapunov Üstelleri Belirlemesi (Lyapunov Exponents)
- o Poincare Bölgesi (Poincare Section)
- o Kesirsel Boyut (Fractal Dimensions) Belirlemesi
- o Entropi

Sonuç olarak çift sarkaç hareketi incelendiğinde başlangıç parametre değerlerine bağlı olarak hareketini önceden belirlemenin oldukça zor olduğu yani görünüşe göre rastsal veya kaotik davranış içinde olduğu söylenebilir.

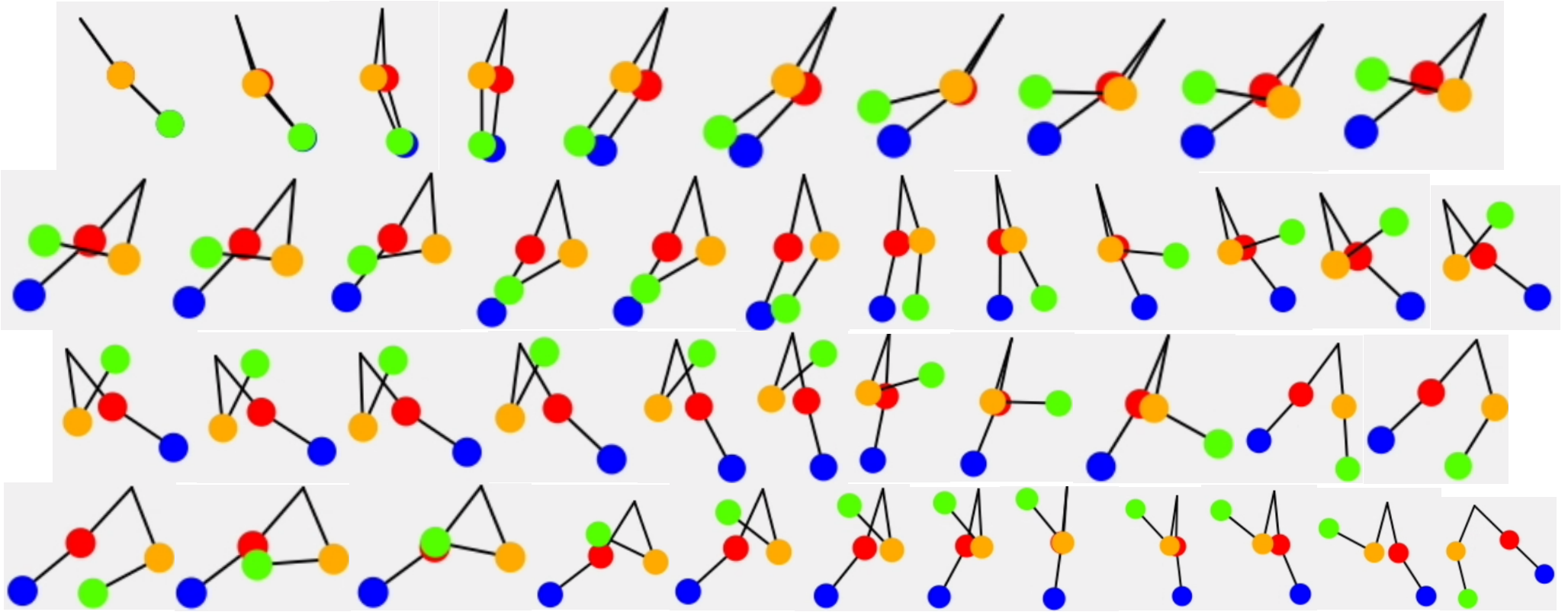
Bir önceki bölümde gösterildiği gibi bir çift sarkaç sisteminin hareketi, adi diferansiyel denklem sistemi ile modellenir. Ancak bu denklemlerin analitik çözümü olmadığından sayısal yöntemler kullanılarak yaklaşık çözümler bulunur. Bu, uygun bir şekilde yazılmış bir bilgisayar programı ile yapılabilir.

Bu bölümde çift sarkaç hareketini gözlemlemek için “Çift Sarkaç Simülatörleri” kullanılmıştır (Witherden 2009). Birinci simülatörde diferansiyel denklem sistemini çözmek için Runge-Kutta (RK4) metodu kullanılmıştır. Şekil 3.4'te simülasyonda kullanılan sarkaçların başlangıç parametreleri gösterilmektedir.



Şekil 3.4 Sol tarafta periyodik ve sağ tarafta ise kaotik salınımda olan sarkaçların başlangıç değerleri verilmektedir.

Çift sarkaç simülasyonunda kütlelerin hareketleri şekil 3.5’de gösterilmektedir. Bu şekilde kırmızı ve mavi toplardan oluşan birinci çift sarkaçta her iki sarkacında kütleleri ve uzunlukları aynıdır. Şekil 3.5’de açık olarak görüldüğü üzere “bu başlangıç koşullarında” çift sarkaç periyodik salınım içindedir. Diğer yandan ikinci çift sarkaç için bu sonuç söylenemez (Şekil 3.5). İkinci çift sarkaçta yukarıda bulunan kütle aşağıdaki kütlelerin 5 katıdır. Şekil 3.5’de açık olarak görüldüğü üzere “bu başlangıç koşullarında” çift sarkaç rastsal veya kaotik davranış içinde olduğu söylenebilir (Bak yeşil kütle).

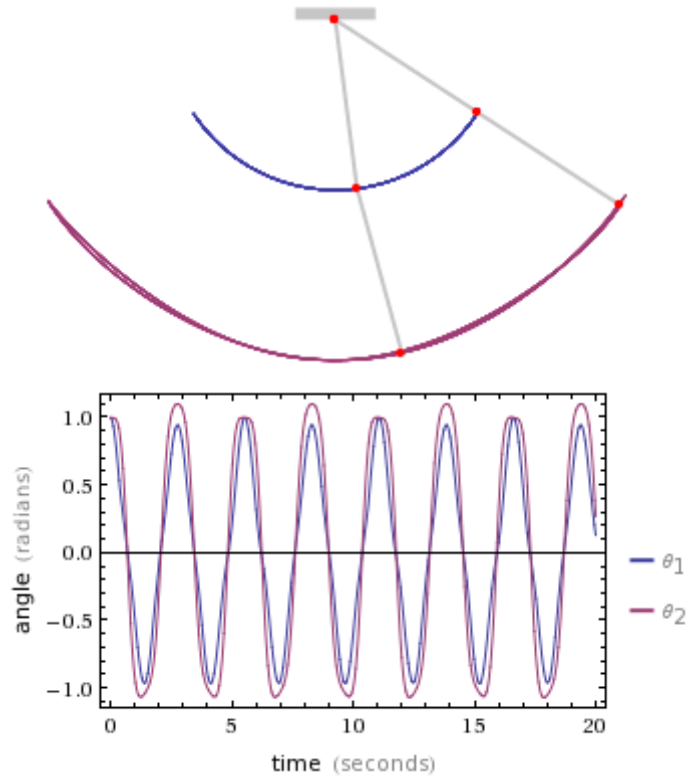


Şekil 3.5 Çift sarkaç simülasyonunda kütlelerin hareketleri (Witherden 2009).

İkinci simülatörde simülasyonda kullanılan sarkaçların başlangıç parametreleri Tablo 3.1’de verilmektedir (Wolfram Alpha 2014). Çift sarkaç simülasyonunda kütlelerin hareketleri şekil 3.6’da gösterilmektedir. Bu şekilde üstteki ve alttaki cisimlerden oluşan çift sarkaçta her iki sarkacında kütleleri ve uzunlukları aynıdır. Şekil 3.6’de açık olarak görüldüğü üzere “bu başlangıç koşullarında” çift sarkaç periyodik salınım içindedir.

Tablo 3.1 Periyodik salınımda olan sarkaçların başlangıç değerleri verilmektedir.

double pendulum	
initial angle from vertical 1	57° (degrees)
length 1	1 meter
mass 1	1 kg (kilogram)
initial angle from vertical 2	57° (degrees)
length 2	1 meter
mass 2	1 kg (kilogram)
time	20 seconds

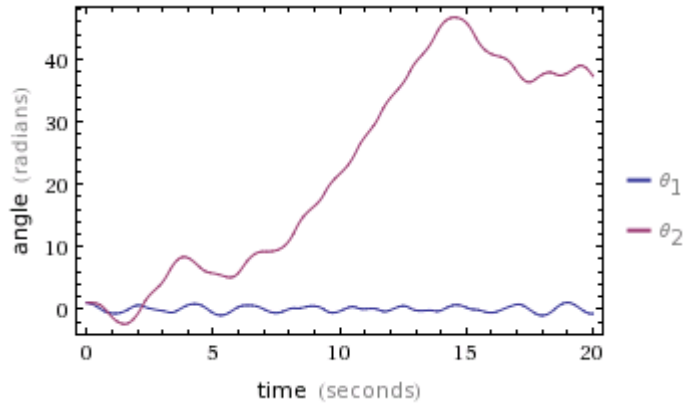
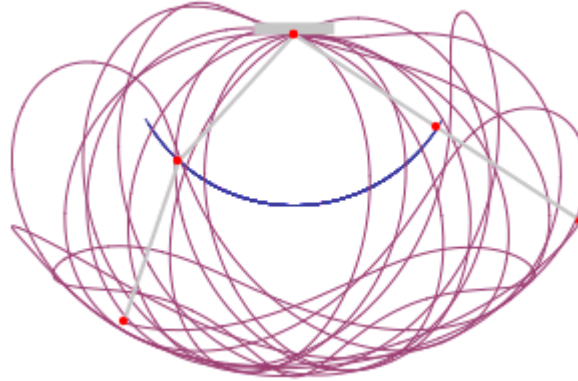


Şekil 3.6 Her iki sarkaçta periyodik salım içindedir (Wolfram Alpha 2014).

Bu çift sarkaçta üstteki kütle beş katına çıkarılırsa kütlelerin periyodik hareket içinde olmadığı gözlemlenir (Şekil 3.7). Şekil 3.7’de açık olarak görüldüğü üzere “bu başlangıç koşullarında” çift sarkaç rastsal veya doğrusal olmayan davranış içinde olduğu söylenebilir (Bak kırmızı iz).

Tablo 3.2 Periyodik olmayan salınımda olan çift sarkacın başlangıç değerleri verilmektedir.

double pendulum	
initial angle from vertical 1	57° (degrees)
length 1	1 meter
mass 1	5 kg (kilograms)
initial angle from vertical 2	57° (degrees)
length 2	1 meter
mass 2	1 kg (kilogram)
time	20 seconds



Şekil 3.7 Üstteki kütle periyodik salım içinde iken alttakinin hareketi rastsaldır (Wolfram Alpha 2014).

3.2 Kuplaj LC-Devreleri

Bu problemde gerilim ve akım dalgalarının bir iletim hattı boyunca yayılması, seri bağlanmış tamamen özdeş indüktans ve kapasitans içeren bir kuplaj osilatör kullanılarak incelenir. İndüktif kuplaj olan iki elektrik devresi arasında enerji transferini inceleyeceğiz (Pain 2005).

Karşılıklı etkilenme indüktansı, iki elektrik devresi arasında birinci devre üzerinde akan akımdan meydana gelen manyetik akının ikinci devreye geçmesi ile meydana gelir. Akıdaki her hangi bir değişim her iki devrede gerilim oluşmasına sebep olur.

Bir transformatörün çalışma prensibi bu karşılıklı etkileşim indüktansına bağlıdır. Güç kaynağı, transformatörün " n_p " sarım sayılı primer (Birincil) bobininin üzerine bağlıdır. Bu primer bobinde aynı anda " n_s " sarım sayılı sekonder (İkincil) bobinine bağlantılıdır. Birincil bobindeki her bir sarımdan bir akım geçirildiğinde " ϕ " ile gösterilen bir manyetik akı üretirler. O zaman primer sarımın ürettiği toplam manyetik akı " $n_p\phi$ " olur. Primer bobinin öz indüktans katsayısı ile üretilen manyetik akı arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:

$$L_p = n_p^2\phi \quad (3.27)$$

Burada " L_p " primer bobinin öz indüktansıdır.

Karşılıklı etkileşimden dolayı sekonder bobinin tek sarımındaki manyetik akı " ϕ " aynıdır. O zaman sekonder sarımında üretilen toplam manyetik akı " $n_s\phi$ " olur. Yukarıdakine benzer sekonder bobinin öz indüktans katsayısı ile üretilen manyetik akı arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:

$$L_s = n_s^2\phi \quad (3.28)$$

Burada " L_s " sekonder bobinin öz indüktansıdır.

Eğer primer sarımın oluşturduğu manyetik akının tamamı kayıp olmadan sekonder bobin tarafından kullanılıyorsa "karşılıklı etkilenme sabiti" tanımlanabilir:

$$M = n_s(n_p\phi) = \sqrt{L_p L_s} \quad (3.29)$$

Uygulama da, bobinlerin dışında akı sızıntısı nedeniyle, $M < \sqrt{L_p L_s}$ olur ve "k" kuplaj sabiti aşağıdaki oran ile tanımlanır:

$$\frac{M}{\sqrt{L_p L_s}} = k \quad (3.30)$$

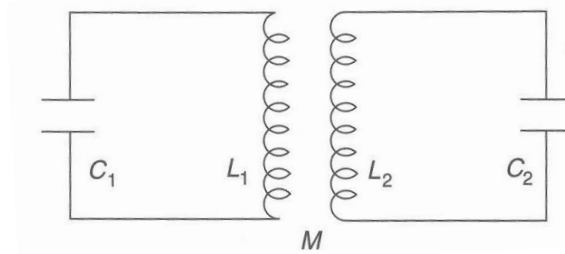
Eğer primer akım değeri I_p , $e^{i\omega t}$ ile değişirse, I_p 'nin değişimi primer bobinde $-L_p dI_p/dt = -i\omega L_p I_p$ ile tanımlanan indüklenen gerilim oluştururken sekonder bobindeki indüklenen gerilimde $-M dI_p/dt = -i\omega M I_p$ olur.

Eğer Şekil 3.6'daki gibi birbirine manyetik akı ile kuplaj olmuş ve aynı " ω " frekansında salınım yapan L_1 ve L_2 bobinlerinden (direnci olmayan) oluşan bir devre göz önüne alınırsa, Kirchhoff'un ikinci yasası kullanılarak her bir devredeki gerilim denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$i\omega L_1 I_1 - i\frac{1}{\omega C_1} I_1 + i\omega M I_2 = 0 \quad (3.31)$$

ve

$$i\omega L_2 I_2 - i\frac{1}{\omega C_2} I_2 + i\omega M I_1 = 0 \quad (3.32)$$



Şekil 3.8 Kuplaj LC-devresi (Pain 2005).

Denklem (3.31) ve (3.32) sırasıyla ω/iL_1 ve ω/iL_2 ile çarpıldığında

$$\omega^2 I_1 - \frac{I_1}{L_1 C_1} + \frac{M}{L_1} \omega^2 I_2 = 0 \quad (3.33)$$

$$\omega^2 I_2 - \frac{I_2}{L_2 C_2} + \frac{M}{L_2} \omega^2 I_1 = 0 \quad (3.34)$$

denklemleri elde edilir.

Burada $\omega_1^2 = 1/L_1 C_1$ ve $\omega_2^2 = 1/L_2 C_2$ devrenin doğal frekanslarıdır. Denklemler tekrar düzenlenirse

$$(\omega_1^2 - \omega^2)I_1 = \frac{M}{L_1} \omega^2 I_2 \quad (3.35)$$

ve

$$(\omega_2^2 - \omega^2)I_2 = \frac{M}{L_2} \omega^2 I_1 \quad (3.36)$$

elde edilir. Denklem (3.35) ve (3.36) taraf tarafa çarpıldığında

$$(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) = \frac{M^2}{L_1 L_2} \omega^4 = k^2 \omega^4 \quad (3.37)$$

denklemini bulunur. Burada “k” kuplaj sabitidir.

Bu denklemin “ ω ” için çözümlerine bakıldığında devreler arasında hangi frekanslarda enerji değişimi olacağı, rezonansa gireceği bulunur. Eğer devreler eşit doğal frekansa sahipse $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, o zaman denklem (3.37),

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = k^2 \omega^4$$

veya

$$(\omega_0^2 - \omega^2) = \pm k \omega^2$$

şeklinde yazılır. Böylece

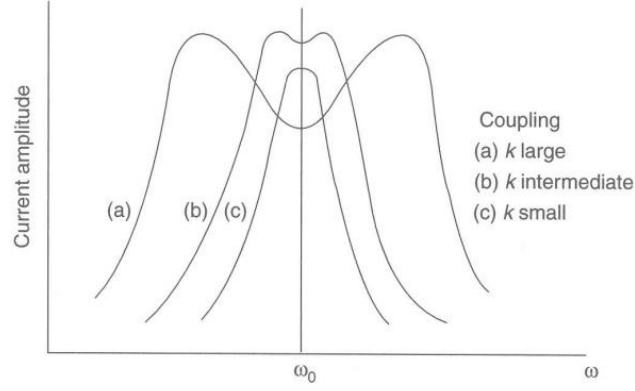
$$\omega = \pm \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm k}}$$

bulunur.

“ ω ” frekansının pozitif olduğu durum için iki frekans vardır:

$$\omega' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} \text{ ve } \omega'' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}$$

Akım değerinin frekanla değişimi çizilirse, iki maksimum değerinin ortaya çıktığı görülür (Şekil 3.9).



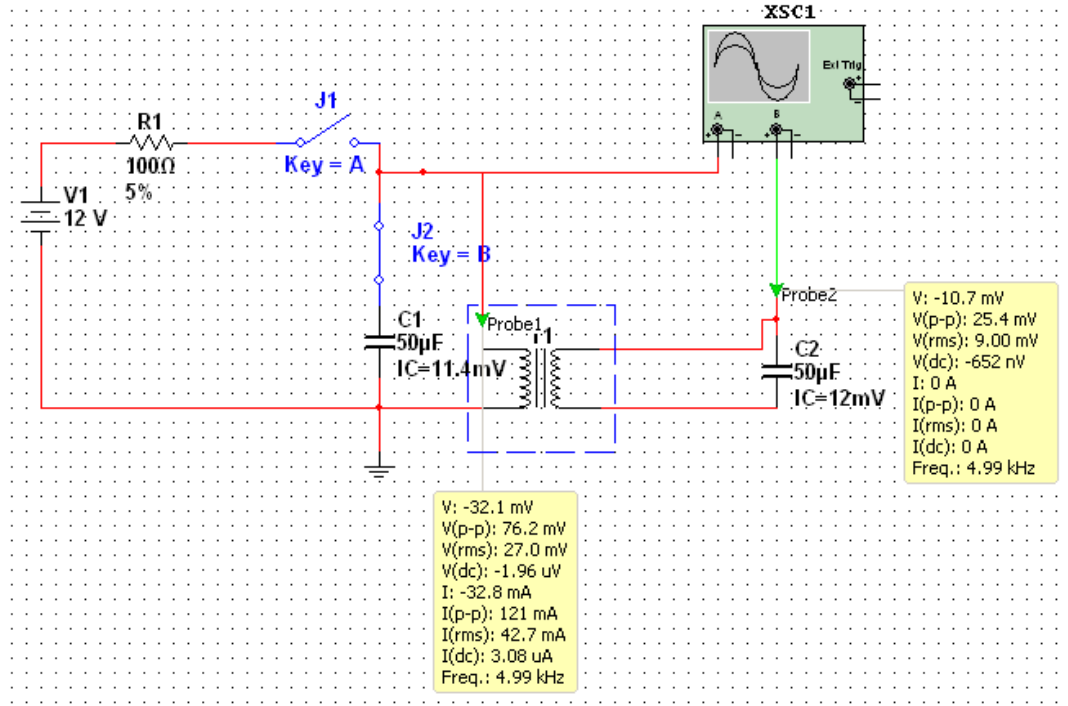
Şekil 3.9 Rezonans frekansına yakın bölgede akım genliğinin kuplaj sabiti ile değişimi (Pain 2005).

Kuplaj sabiti k (veya M) küçük ve $\omega' \approx \omega'' \approx \omega_0$ olduğu durumda her iki sistemde hemen hemen bağımsız davranır. Kuplaj sabiti büyüdüğünde (Sıkı bağlantı) $\omega'' - \omega'$ frekans farkı artar. Böylece akımın pik değerleri yer değiştirir ve iki çukur arasındaki pikler daha belirgin olur. Sarımlardaki direncin etkisi burada yapılan basit analizde kullanılmamıştır. Uygulamada direnç etkisi genlik maksimumunu sınırlamaktadır.

3.2.1 LC-Devresinin Multisim ile İncelenmesi

Mekanik ve elektrik sistemleri arasındaki benzerlikler son yıllarda oldukça ilgi çekmiştir. Sinüs dalga salınımına sahip mekaniksel sistemler basit harmonik hareket yaparlar. Bir sarkacın hareketini ve bir kapasitör-indüktör devresinin davranışını yani salınımları da aynı ilkeler yönetir. Bir sarkaç için ilginç bir özellik periyot'un kütlelenin kendi ağırlığı ile değil kütleli tutan sarkaç uzunluğu ile değiştiğidir. Bu yüzden salınımlarda genlikler azaldığı halde sarkaç aynı frekansta salınma devam eder. Salınım oranı depolanan enerji miktarından bağımsızdır. Aynıısı kapasitör-indüktör devresi için de geçerlidir. Salınım oranı kapasitör ve indüktörün büyüklüklerine sıkıca bağlı iken uygulanan voltaj (ya da akım) genliğine çok bağlı değildir. Çok iyi bilindiği üzere iki basit sarkaçtan oluşturulan kuplaj sarkaç kaotik davranış sergileyebilir (Alessandro de Rinaldis 2005). L-C kuplaj devresi de kaotik gerilim salınımları üretebilir (M.P.Hanias 2008) (M.P. Hanias 2009). Bu devreyi incelemek için gerçek uygulama ortamına yakın bir ara yüz sağlamasından dolayı Multisim programı kullanılmıştır (Multisim 2014).

Bu bölümde mekanik kuplaj çift sarkaca eşdeğer elektrik devresi olan kuplaj LC devresinin Multisim programı yardımıyla periyodik ve kaotik davranışı incelenmiştir. Şekil 3.10'da simülasyonu yapılan devrenin şematik gösterimi verilmektedir. Devrede DC voltaj kaynağı, 100 ohm'luk bir direnç ve birbirine paralel iki tane LC devresi bulunmaktadır. Kuplaj LC- devresi, devrede bulunan elektronik malzemelerin değerlerine bağlı olarak periyodik ve kaotik arasında geçişler yapar.



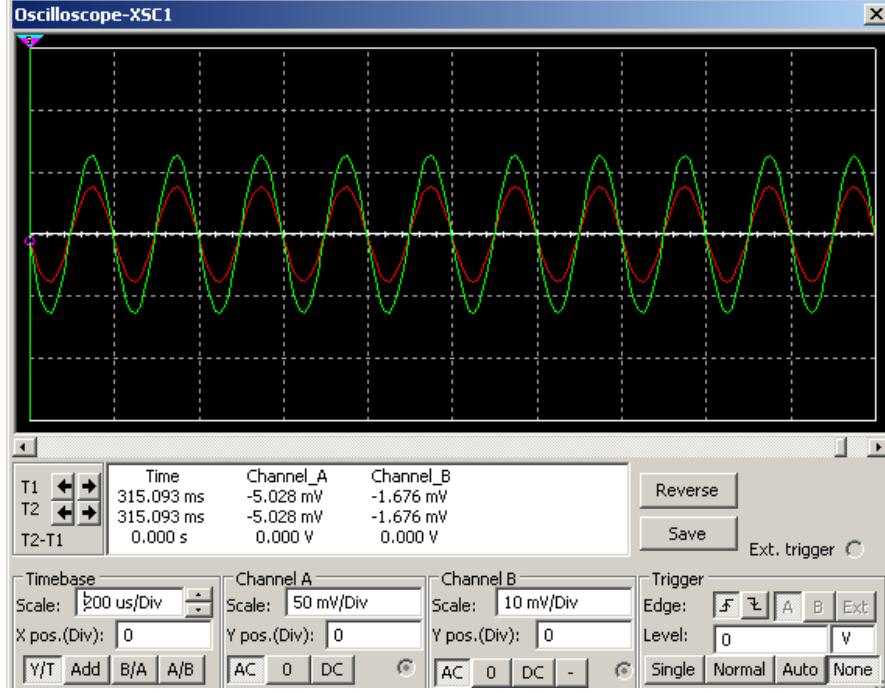
Şekil 3.10 Kuplaj LC devresinin Multisim programında gösterimi (Yıldırım 2010).

Eğer sürtünmesiz ortamda salınan mekanik bir kuplaj sarkacın kütleleri ($m_1 = m_2$) ve sarkaç boyları ($l_1 = l_2$) eşit ise her iki sarkaçta periyodik salınım içindedir (Bak Şekil 3.6). Mekanik olarak gözlemlenen bu durumu Şekil 3.10 da ki elektrik devresinde gözlemlenmek için kullanılan devre elemanlarının değerleri Tablo 3.3 te verilmiştir.

Tablo 3.3 Şekil 3.11 parametreleri.

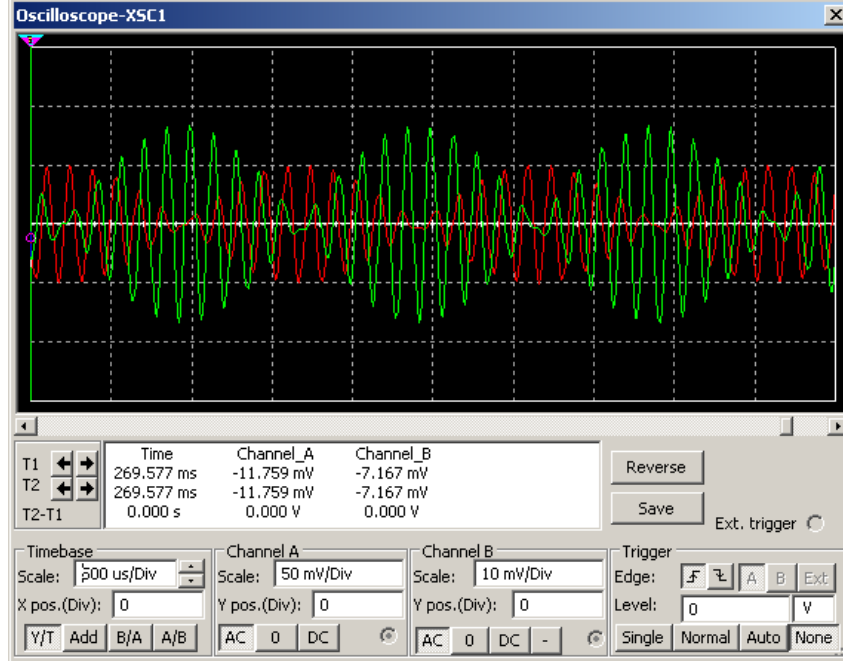
L_1 (μH)	L_2 (μH)	C_1 (μF)	C_2 (μF)	U_1 (mV)	U_2 (mV)	k
10	10	50	50	11.4	12	1

Kuplaj LC-devresinin her iki tarafındaki gerilim değerlerini gözlemleyebilmek için Şekil 3.10'da kullanılan osiloskoptan yararlanılmıştır. Şekil 3.11, osiloskop ekranını göstermektedir. Verilen bu değerler için kuplaj sabiti $k = 1$ olduğu durumda primer sarım tarafından üretilen akının hepsi sekondere aktarılır ve bu böyle devam eder. Şekil 3.11'de görüldüğü gibi her iki devrede periyodik salınım içindedir.



Şekil 3.11 Devre elemanlarının parametreleri Tablo 3.1'de verilmiştir.

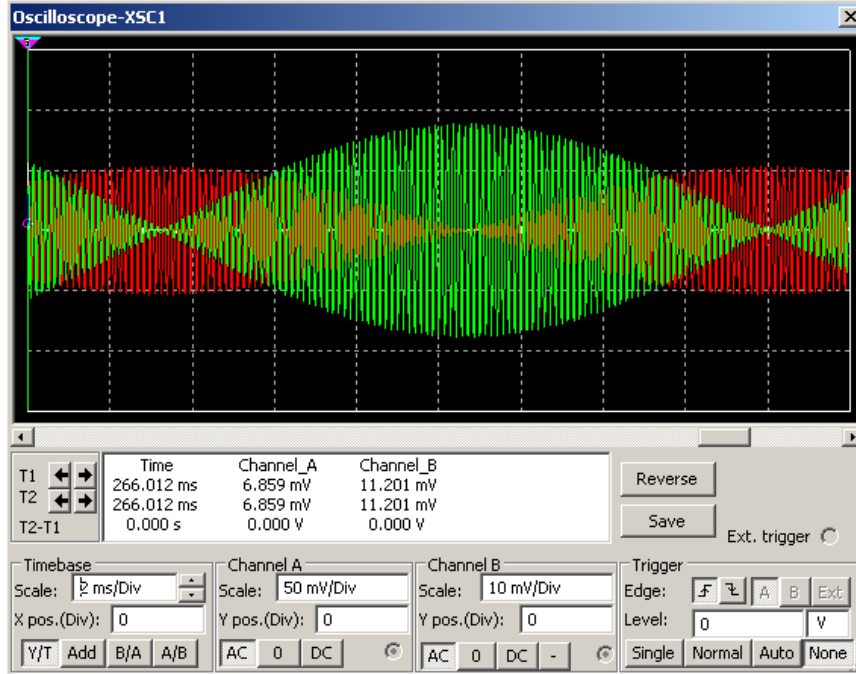
Kuplaj sabiti değiştikçe primer sarım tarafından üretilen akının hepsi sekondere aktarılamaz ve bunun sonucu olarak primer ile sekonder arasında kontrollü bir enerji transferi olur. Bu durum mekanik sistemde bir sarkaçtaki enerjinin zaman içinde karşılıklı olarak diğer sarkaca aktarılmasına karşılık gelir. Kuplaj sabiti $k = 0.1$ alındığında her iki devreninde periyodik salınım yaparken (kuplaj sabitinden dolayı) aynı zamanda sistemde ikinci bir dalga paketinin oluştuğu gözlenmektedir (Şekil 3.12). Her iki devrenin salınım frekansı $200 \mu s$ iken oluşan dalga paketinin frekansı ise yaklaşık $2750 \mu s$ ölçülmüştür. Kuplaj sabiti $k = 0.1$ 'den $k = 0.01$ 'e düşürüldüğünde Şekil 3.12 ve 3.13'te açık olarak görüldüğü gibi oluşan dalga paketinin frekansı beklendiği üzere artığı gözlemlenmiştir.



Şekil 3.12 Devre elemanlarının parametreleri Tablo 3.2’de verilmiştir.

Tablo 3.4 Şekil 3.12 parametreleri.

$L_1(\mu\text{H})$	$L_2(\mu\text{H})$	$C_1(\mu\text{F})$	$C_2(\mu\text{F})$	$U_1(\text{mV})$	$U_2(\text{mV})$	k
10	10	50	50	11.4	12	0.1



Şekil 3.13 Devre elemanlarının parametreleri Tablo 3.3’de verilmiştir.

Tablo 3.5 Şekil 3.13 parametreleri.

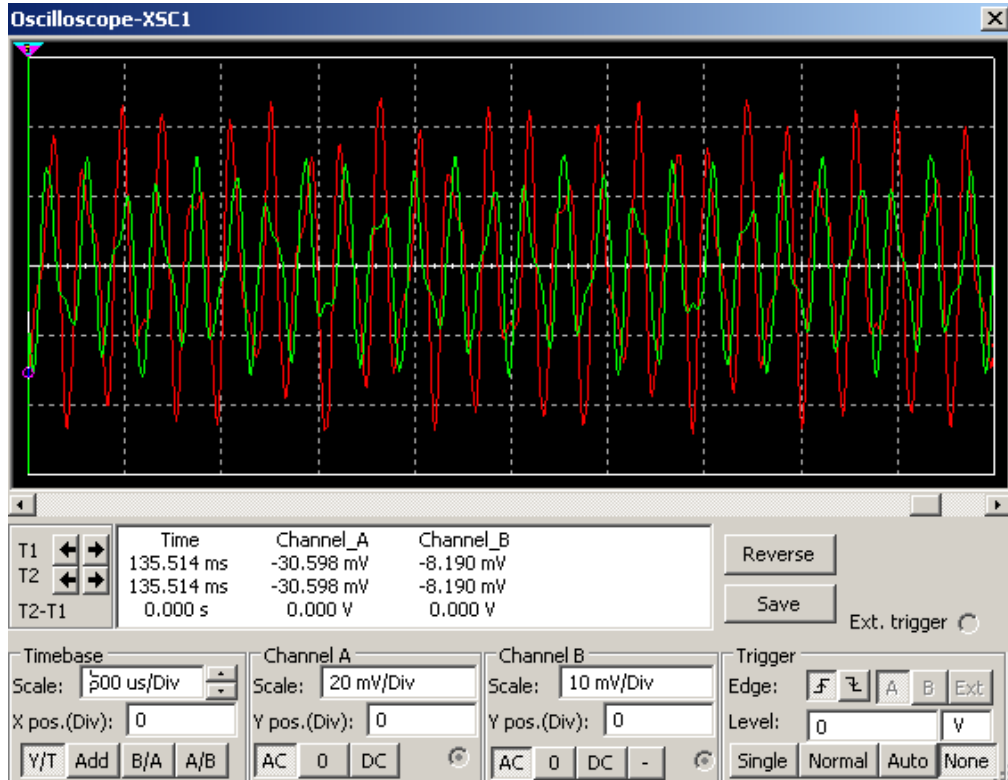
$L_1(\mu\text{H})$	$L_2(\mu\text{H})$	$C_1(\mu\text{F})$	$C_2(\mu\text{F})$	$U_1(\text{mV})$	$U_2(\text{mV})$	k
10	10	50	50	11.4	12	0.01

Eğer sürtünmesiz ortamda salınan mekanik bir kuplaj sarkacın kütleleri çok çok farklı ($m_1 \gg m_2$) ve sarkaç boyları ($l_1 = l_2$) eşit ise kütlesi büyük olan üstteki sarkaç periyodik salınım yaparken diğeri ise kaotik salınım içindedir (Bak Şekil 3.7). Mekanik olarak gözlemlenen bu durumu Şekil 3.10 da ki elektrik devresinde gözlemlemek için kullanılan devre elemanlarının değerleri Tablo 3.6'da verilmiştir.

Tablo 3.6 Şekil 3.14 parametreleri.

$L_1(\mu\text{H})$	$L_2(\mu\text{H})$	$C_1(\mu\text{F})$	$C_2(\mu\text{F})$	$U_1(\text{mV})$	$U_2(\text{mV})$	μ
10	10	60	60	31.3	10.4	0.5

Şekil 3.11-13'te gösterilen periyodik salınım değerlerinde U_1 ve U_2 gerilim değerleri aynı olup bunlar mekanik sistemde eşit sarkaç kütlelerine karşılık gelmektedir. Tablo 3.6'da görüldüğü üzere bu durumda U_1 değeri yaklaşık U_2 değerinin 3 katıdır. Bu durum mekanik sistemde m_1 kütesinin m_2 kütesinden 3 katı büyük olduğu kaotik salınıma karşılık gelmektedir. Şekil 3.14'te açık olarak görüldüğü üzere bu şartlar altında her iki devrede kaotik salınım içindedir.



Şekil 3.14 Devre elemanlarının parametreleri Tablo 3.4'te verilmiştir.

4 Sonuç

Bu çalışmada, mekanik sistemler ile bu sistemlere eş değer olan bazı elektrik devreleri karşılaştırılarak incelenmiştir. Elektriksel ve mekanik sistemlerin aralarındaki benzerlikler titreşim özellikleri kullanılarak bazı mekanik sistemlerin hareketinin elektrik devreleri ile analiz edilebileceği gösterilmiştir.

Bu çalışmanın ilk kısmında literatürde çok iyi bilinen iki sistem olan “Kütle – Yay – Sönümleyici Sistemi” ile “Direnç – İndüktör –Kondansatör (RLC) Devresinin” karşılaştırılmıştır. İkinci bölümde ise “Kuplaj çift sarkaç” ile “Kuplaj LC-devresi” karşılaştırılarak benzerlikler incelenmiştir.

Sürtünmesiz ortamda salınan mekanik bir kuplaj sarkacın kütleleri ($m_1 = m_2$) ve sarkaç boylarının ($l_1 = l_2$) aynı olduğu durumda her iki sarkacında periyodik salınım içinde olduğu gözlemlenmiştir. Buna eşdeğer olan LC-kuplaj devresinde de aynı sonuç şekil 3.11’de gösterildiği gibi bulunmuştur. Sürtünmesiz ortamda salınan mekanik bir kuplaj sarkacın kütleleri çok çok farklı ($m_1 \gg m_2$) ve sarkaç boylarının ($l_1 = l_2$) aynı olduğu durumda ise kütlesi büyük olan üstteki sarkacın periyodik salınım yaparken diğerinin kaotik salınım içinde olduğu gözlemlenmiştir. Buna eşdeğer olan LC-kuplaj devresinde de aynı sonuç şekil 3.14’de gösterildiği gibi bulunmuştur.

Kaynakça

- Alessandro de Rinaldis, Jacqueliën M.A. Scherpen. «An Electrical Interpretation of Mechanical Systems via the Pseudo-inductor in the Brayton-Moser Equations.» *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*. Seville, Spain, 2005. 5983-5988.
- Eyidoğan, Yusuf. *Multisim Programı Kullanılarak RL-Varaktör Seri Devresinin Kaotik Davranışlarının İncelenmesi*. İstanbul: İstanbul Kültür Üniversitesi, Lisans Bitirme Tezi , 2008.
- Gleick, James. *Kaos*. Ankara: Tübitak Popüler Bilim Kitapları, 1995.
- M.P. Hantias, D.A. Karras, M. Mobarak. «Non-Linear Analysis and Time Series Prediction of an Electrical Analogue of the Mechanical Double Pendulum.» *IEEE / 978-1-4244-4530-1*, 2009: 1-5.
- M.P.Hantias. «Chaotic behaviour of an electrical analogue to the mechanical double pendulum.» *Journal of Engineering Science and Technology Review*, 2008: 33-37.
- Multisim. *National Instruments*. 2014. <http://www.ni.com/multisim/>.
- Neumann, Erik. *MyPhysicsLab – Double Pendulum*. 2004. http://www.mypysicslab.com/dbl_pendulum.html (July 02, 2014 tarihinde erişilmiştir).
- Olson, Harry F. *Dynamical Analogies*. New York : D. Van Nostrand Company, INC., 1943.
- Pain, H.J. *The Physics of Vibrations and Waves*. West Sussex : John Wiley & Sons, Ltd, 2005.
- Witherden, Freddie. *Double Pendulum*. 10 February 2009. <https://freddie.witherden.org/tools/doublependulum/report.pdf> (July 02, 2014 tarihinde erişilmiştir).
- Wolfram Alpha. 2014. <http://www.wolframalpha.com/input/?i=double+pendulum> (2014 tarihinde erişilmiştir).
- Yıldırım, Serkan. *Mekanik Çift Sarkaç Eşdeğer Elektronik Devresinin İncelenmesi: Kuplaj LC-Devresi*. İstanbul: İstanbul Kültür Üniversitesi, Lisans Bitirme Tezi, 2010.