İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZGÜN JORDAN OPERATÖRLERİNİN DEĞİŞMEZ ALTUZAYLARININ HEMEN HEMEN-AFİN YÖRÜNGELERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe Nur ALTUNSOY

1309251006

Tez Danışmanı: **Doç. Dr. Mert ÇAĞLAR**
Jüri Üyeleri: **Doç. Dr. R.Tunç Mısırlıoğlu**
Prof. Dr. Erhan Çalışkan (İstanbul Üniv.)

AĞUSTOS 2015

ÖNSÖZ

Bu tez konusunu önerip sürekli ve düzenli bir şekilde çalışmamı sağlayan, matematikle hayata bakmanın güzelliğini fark ettiren, lisans eğitimimden beri yönlendiren ve her konuda destek olup yol gösteren değerli danışman hocam Mert ÇAĞLAR'a, yükseklisans boyunca katkısı olan tüm bölüm hocalarıma, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen dostlarıma ve aileme, tez dönemimin yoğun bir zamanında ailemize katılıp neşe ve enerji kaynağı olan biricik yeğenim Eren ALTUNSOY'a sonsuz teşekkürler.

Ağustos 2015 Ayşe Nur ALTUNSOY

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$	:	$\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerindeki sınırlı lineer operatörlerin ailesi
$P_{\mathcal{H}}$	:	$\mathcal{H}$ uzayı üzerindeki ortogonal projeksiyon
$\bigvee \mathcal{M}$	:	$\mathcal{M}$ kümesinin kapalı lineer üreteci
$\oplus$	:	ortogonal toplam
$\ominus$	:	ortogonal tümleyen
$\otimes$	:	tensör çarpımı
$S(\theta)$	:	Jordan blok
$\mathbb{1}$	:	karakteristik fonksiyon

Üniversitesi : **İstanbul Kültür Üniversitesi**
Enstitüsü : **Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı : **Matematik-Bilgisayar**
Programı : **Matematik-Bilgisayar**
Tez Danışmanı : **Doç.Dr. Mert ÇAĞLAR**
Tez Türü ve Tarihi : **Yüksek Lisans - AĞUSTOS 2015**

ÖZET

DÜZGÜN JORDAN OPERATÖRLERİNİN DEĞİŞMEZ ALTUZAYLARININ HEMEN HEMEN-AFİN YÖRÜNGELERİ

Ayşe Nur ALTUNSOY

Raphaël Clouâtre tarafından 2014 yılında elde edilen ve Bercovici ve Smotzer'in bulgularını rafine eden, düzgün Jordan operatörleri için değişmez alt-uzayların sınıflandırılması kapsamındaki sonuçlar incelenmiştir. Hilbert uzayları üzerinde tanımlı operatörler için geçerli olan sonuçlardan esas olanı, $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ bir $T = S(\theta) \oplus S(\theta) \oplus \cdots$ düzgün Jordan operatörünün verilen değişmez alt-uzayları olmak üzere, $\mathcal{M}_2$ alt-uzayının $\mathcal{M}_1$ alt-uzayının hemen hemen afin yörüngesine ait olması için gerek ve yeter koşulun $T|\mathcal{M}_1$ ve $T|\mathcal{M}_2$ kısıtlanışlarının hemen hemen benzer ve $T_{\mathcal{M}_2^{\perp}}$ sıkıştırılmasının $T_{\mathcal{M}_1^{\perp}}$ sıkıştırılması içine oturtulabilir olması gerektiğidir. Hilbert uzayları üzerinde tanımlı olması gerekmeyen operatörler için benzer durumları göz önüne almak maksadıyla, Akcoglu-Sucheston tarafından geliştirilen L_p uzayları üzerindeki genleştirme teorisi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : **C_0-Operatörleri,**
Düzgün Jordan Operatörler,
Değişmez Alt-uzaylar,
Hemen Hemen Afin Yörüngeler,
L_p-Uzayları,
Genleştirme Teorisi.

University	:	**İstanbul Kültür University**
Institute	:	**Institute of Science**
Science Programme	:	**Mathematics and Computer**
Programme	:	**Mathematics and Computer**
Supervisor	:	**Assoc. Prof. Dr. Mert ÇAĞLAR**
Degree Awarded and Date	:	**M.S. - AUGUST 2015**

ABSTRACT

QUASIAFFINE ORBITS OF INVARIANT SUBSPACES FOR UNIFORM JORDAN OPERATORS

Ayşe Nur ALTUNSOY

We consider the result obtained by Raphaël Clouâtre in 2014 in connection with the problem of classifying invariant subspaces of uniform Jordan operators, which refines the work of Bercovici and Smotzer. The principal result, which is valid for Hilbert-space-operators, states that if $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$ are invariant subspaces of a uniform Jordan operator $T = S(\theta) \oplus S(\theta) \oplus \cdots$, then a necessary and sufficient condition for $\mathcal{M}_2$ to belong to the quasiaffinity orbit of $\mathcal{M}_1$ is that the restrictions $T|\mathcal{M}_1$ and $T|\mathcal{M}_2$ be similar and the compression $T_{\mathcal{M}_2^\perp}$ be injected in the compression $T_{\mathcal{M}_1^\perp}$. To consider similar situations for operators not necessarily defined on Hilbert spaces, we analyze the L_p-dilation theory of Akcoglu and Sucheston.

Keywords : C_0-**Operators,**
Uniform Jordan Operators,
İnvariant Subspaces,
Quasiaffine Orbits,
L_p-**Spaces,**
Dilation Theory.

Bölüm 1

GİRİŞ

Genleştirme teorilerinin ele alındığı bu tez, temel olarak, R. Clouâtre'ın [9]'daki ve R. Nagel ile G. Palm'ın [16]'daki çalışmalarına dayanmakta ve beş bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, genleştirme teorisiyle ilgili temel kavram, tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde düzgün Jordan operatörleri için [9]'da elde edilen esas sonuç detaylı olarak incelenmiş; dördüncü bölümde ise, yine [9]'dan olmak üzere, bu türden operatörler üzerindeki varsayım zayıflatıldığında ilgili esas sonucun bir benzerinin geçerli olduğu koşullar sabitlenmiştir. Bunlarla birlikte, Hilbert uzayı üzerinde tanımlanmış ve belirli koşulları sağlayan düzgün Jordan operatörlerinin değişmez alt-uzaylarının hemen-hemen-afin yörüngelerinin tamamen belirlenebildiği görülmüştür. Hilbert uzayları üzerinde tanımlı olması gerekmeyen operatörler için benzer durumların karşılaştırmasını yapmak amacıyla, beşinci bölümde, M.A. Akcoglu tarafından geliştirilen ve [1, 2, 3] numaralı makalelerde detaylandırılan L_p uzayları üzerindeki genleştirme teorisi, [16]'da verilen biçimiyle çalışılmıştır.

Bölüm 2

GENLEŞTİRME TEORİSİ

2.1 Daralma ve Genleştirme

Her daralma; yani, normu ≤ 1 olan her operatör, Hilbert uzayı üzerinde bir birimsel genleştirmeye sahiptir. Bu, Sz.Nagy Genleştirme Teoremi olarak bilinir ve operatör teoride önemli bir dalın başlangıç noktasıdır. Bu bölümde, sonraki bölüme kaynaklık edecek genleştirme teorisinin temel kavramları verilecektir.

Hilbert uzayı üzerinde daralmaların iki önemli çeşiti birimsel operatörler ve hiç birimsel olmayan daralmalarıdır.

Tanım 2.1.1. *$\mathcal{H}$ ve $\mathcal{H}'$ Hilbert uzayları olsun. Her $h \in \mathcal{H}$ için $\|Th\|_{\mathcal{H}'} \leq \|h\|_{\mathcal{H}}$ (yani, $\|T\| \leq 1$) olacak şekilde bir T lineer dönüşümüne "daralma" denir.*

Tanım 2.1.2. *$\mathcal{H}$ Hilbert uzayı ve $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olsun.Eğer $TT^* = T^*T = I$ ise T operatörü "birimsel" olarak adlandırılır.*

Tanım 2.1.3. *$\mathcal{K}$ bir Hilbert uzayı, $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ bir alt uzay, $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ ve $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olsun. $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $T^n = P_{\mathcal{H}}S^n|\mathcal{H}$ ise S operatörüne T operatörünün "genleştirilmesi", T operatörüne ise S operatörünün "sıkıştırılması" denir. Ek olarak, eğer S bir izometri (birimsel operatör) ise S operatörü, T operatörünün "izometrik (birimsel) genleştirilmesi" olarak adlandırılacaktır. Eğer S operatörünün hiçbir değişmez alt-uzaya kısıtlanışı T'nin izometrik (birimsel) genleştirilmesi değilse, T operatörünün S izometrik (birimsel) genleştirmesine "minimal" denilecektir.*

Lemma 2.1.4. *T operatörünün bir izometrik (birimsel) genleştirmesi S olsun. Bu durumda S genleştirmesinin T operatörünün bir minimal izometrik (birimsel) genleştirmesi olması için gerek ve yeter koşul $\bigvee_{n=0}^{\infty} S^n\mathcal{H} = \mathcal{K}$ ($\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} S^n\mathcal{H} = \mathcal{K}$) olmasıdır.*

Teorem 2.1.5. *Her $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ daralması bir minimal izometrik genleştirmeye sahiptir. Bu genleştirme aşağıdaki anlamda tektir: $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ ve $S' \in \mathcal{B}(\mathcal{K}')$ operatörleri T için minimal izometrik genleştirmeler ise $\mathcal{K}$ uzayından $\mathcal{K}'$ uzayı üzerine bir U izometrisi $x \in \mathcal{H}$, $Ux = x$ olacak şekilde vardır ve $S'U = US$ olur.*

Tanım 2.1.6. *Bir $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ daralması, T için hiçbir $\mathcal{M}$ değişmez alt-uzayı $T|\mathcal{M}$ kısıtlanışı birimsel operatör olacak şekilde yoksa "hiç birimsel olmayan" olarak adlandırılır.*

Önerme 2.1.7. *Her $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ daralması için T için $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ indirgeyen alt-uzayları aşağıdakiler gerçeklenecek şekilde vardır:*

(i) $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$;

(ii) $T|\mathcal{H}_1$ *hiç birimsel değildir; ve*

(iii) $T|\mathcal{H}_0$ *birimsel operatördür.*

$\mathcal{H}_0$ ve $\mathcal{H}_1$ uzayları (i)-(iii) koşulları tarafından tek türlü belirlenir.

Lemma 2.1.8. *Bir $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ izometrisinin kaydırma operatörü (unilateral shift) olması için gerek ve yeter koşul her $x \in \mathcal{H}$ için $\lim_{n\to\infty} \|V^{*n}x\| = 0$ olmasıdır.*

Tanım 2.1.9. *Bir $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ daralması, eğer her $x \in \mathcal{H}$ için $\lim_{n\to\infty} \|T^{*n}x\| = 0$ ise "$C_{\cdot 0}$-sınıfındandır" denir; eğer T^* operatörü $C_{\cdot 0}$-sınıfından ise T operatörüne "$C_{0\cdot}$-sınıfındandır" denir. Eğer T hem $C_{\cdot 0}$ hem de $C_{0\cdot}$-sınıfından ise T operatörüne "C_{00}-sınıfındandır" denir.*

Şimdi, devresel katlılık ve hemen hemen afin dönüşümler üzerinde duralım:

Tanım 2.1.10. *$\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı ve $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olsun. Eğer $\mathcal{H} = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n E$ ise $E \subset \mathcal{H}$ kümesi "devresel" olarak adlandırılır. Devresel bir kümenin en küçük kardinalitesine T'nin "katlılığı/multiplicity" denir ve T operatörünün devresel katlılığı μ_T ile gösterilir. $\mu_T = 1$ ise T operatörüne "katlılığı yoktur/multiplicity-free" denir.*

Lemma 2.1.11. *$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$, $T'X = XT$ ve $\overline{(X\mathcal{H})} = \mathcal{H}'$ olacak şekilde $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ olsun. Bu durumda $\mu_{T'} \leq \mu_T$ olur.*

Tanım 2.1.12. *$\mathcal{H}$ ve $\mathcal{H}'$ Hilbert uzayları, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ olsun. Eğer $T'X = XT$ olacak şekilde $\mathcal{H}'$ içinde yoğun görüntü kümesi ile birebir bir $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ operatörü varsa T operatörüne T' operatörünün "hemen hemen afin dönüşümü" denir ve $T \prec T'$ olarak gösterilir. Eğer $T \prec T'$ ve $T' \prec T$ ise T ve T' operatörlerine "hemen hemen benzerdir" denir ve $T \sim T'$ olarak gösterilir.*

2.2 H^∞ ve C_0-Sınıfı

Bu çalışmada; açık birim disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ile, birim çember $\mathcal{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ile ve açık birim $\mathbb{D}$ diski üzerinde sınırlı analitik fonksiyonların cebri H^∞ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.1. *$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ hiç birimsel olmayan daralma olsun.*

(i) Eğer $u \not\equiv 0$ olmak üzere $u(T) = 0$ olacak şekilde $u \in H^\infty$ fonksiyonu varsa T operatörüne "C_0-sınıfındandır" denir.

(ii) Eğer her $h \in \mathcal{H}$ için $u_h(T)h = 0$ olacak şekilde $u_h \in H^\infty \setminus \{0\}$ fonskiyonu varsa T operatörüne "lokal C_0-sınıfındandır" denir.

Gözlem 2.2.2. *Yukarıda verilen tanım nedeniyle, C_0-sınıfından bir operatörünün lokal C_0-sınıfından olduğu açıktır.*

Tanım 2.2.3. *Bir $u \in H^\infty$, $\mathcal{S}^1$ üzerinde hemen her yerde $|u(e^{it})| = 1$ koşulunu sağlıyorsa "iç fonksiyon" olarak adlandırılır.*

Gözlem 2.2.4. *C_0-sınıfından bir operatör için $u \in H^\infty$ her zaman bir iç fonksiyon olarak alınabilir.*

Tanım 2.2.5. *T operatörü C_0-sınıfından olsun. $vH^\infty = \{u \in H^\infty : u(T) = 0\}$ olmak üzere v iç fonksiyonuna T operatörünün "minimal fonskiyonu" denir ve m_T ile gösterilir. Benzer şekilde, T operatörü lokal C_0-sınıfından ve $h \in H^\infty$ ise m_h iç fonksiyonu $m_h H^\infty = \{u \in H^\infty : u(T) = 0\}$ olarak tanımlanır.*

C_0-sınıfı operatörlerinin önemli bir örneğini vermek burada uygun olacaktır:

$$\|f\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}$$

normu ile donatılmış $\mathbb{D}$ içinde analitik olan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

fonksiyonlarının Hilbert uzayı H^2 ile gösterilsin. S, H^2 üzerinde kaydırma(shift) operatörü ve $\theta \in H^\infty$ bir iç fonksiyon olsun. Bu durumda $H(\theta) = H^2 \ominus \theta H^2$

ile verilen Hilbert uzayı ve $S(\theta) = P_{H(\theta)}S|H(\theta)$ ile tanımlanan $S(\theta) \in \mathcal{B}(H(\theta))$ (veya denk olarak $S(\theta)^* = S^*|H(\theta)$) operatörü göz önüne alınsın. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır:

(i) S kaydırma operatörü normaldir.

(ii) S kaydırma operatörü hiç birimsel değildir: gerçekten, eğer $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı içinde S kaydırma operatörü $\mathcal{H}_0 \neq \{0\}$ alt uzayı ile $V_0 = V|\mathcal{H}_0$ birimsel operatörüne indirgeniyorsa, her $h \in \mathcal{H}$ için $\|V^{*n}h\| = \|h\|$ olur. Ancak Lemma 2.1.8 nedeniyle $n \to \infty$ için $S^{*n}h \to 0$ olur, bu ise $h \neq 0$ için bir çelişkidir.

(iii) $H(\theta) = H^2 \ominus \theta H^2$ uzayı S^* için değişmezdir: gerçekten, $H(\theta)$ uzayının S^* operatörü için değişmez olduğunu görmek için $S^*H(\theta) \subset H(\theta)$ içermesinin sağlandığı görülmelidir. $H(\theta) = H^2 \ominus \theta H^2 = H^2 \oplus (\theta H^2)^\perp$ olduğundan $f \in H^2$ ve $g \in (\theta H^2)^\perp$ olmak üzere $f+g \in H(\theta)$ için $S^*(f+g) = S^*(f)+S^*(g)$ olur, böylece $S^*(f) \in H^2$ ve $S^*(g) \in (\theta H^2)^\perp$ elde edilir, bu ise $S^*(f+g) \in H(\theta)$ olması demektir,dolayısıyla istenen gerçeklenir.

(iv) her θ iç fonksiyonu için $S(\theta)$ operatörü C_0-sınıfındandır ve minimal fonksiyonu θ olur: gerçekten, θ iç fonksiyon olsun. S operatörünün hiç birimsel olmadığı ve $S(\theta) = P_{H(\theta)}S|H(\theta)$ eşitliği bilindiğine göre, bu durumda $\theta(S(\theta)) = P_{H(\theta)}\theta(S)|H(\theta) = 0$ olacak şekilde $\theta(S)H^2 \subset \theta H^2 = H^2 \ominus H(\theta)$ bulunur, bu ise $S(\theta)$ operatörünün C_0-sınıfından olması demektir. Eğer $u(S(\theta)) = 0$ ise $u(S)H(\theta) = uH(\theta) \subset \theta H^2$ olur. Sonuç olarak, $g \in H^2$ olmak üzere $u = \theta g$ olarak yazılabilir ve $uH^2 = uH(\theta) + u\theta H^2 \subset \theta H^2$ olur. Böylece, $u \in \theta H^\infty$ olmak üzere $g \in H^\infty$ elde edilir. Yani θ minimal fonksiyondur.

Gözlem 2.2.6. *θ bir iç fonksiyon olmak üzere kaydırma operatörünün $\{0\}$'dan farklı her değişmez alt-uzayı θH^2 formundadır.*

Kanıt. [13, Corollary 2.2.12]. □

Bu gözlem içinde verilen ve Beurling Teoremi olarak bilinen bu ifade hatırlatıldıktan sonra; aşağıdaki teorem ile, katlılığı 1 olan bir kaydırma operatörünün değişmez alt-uzaylarının Beurling açıklaması verilebilir.

Teorem 2.2.7. *T operatörü C_0-sınıfından ve $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ katlılığı 1 olan kaydırma operatörü olsun. T operatörünün sıfırdan farklı ve her $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ değişmez alt-uzayı için $\mathcal{M} = \theta(U)\mathcal{H}$ olacak şekilde bir $\theta \in H^\infty$ iç fonksiyonu vardır. θ fonksiyonu $\mathcal{M}$ tarafından tek türlü belirlenir.*

$$\mathcal{H} = H^2 = \left\{ u(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n, \quad \lambda \in \mathbb{D} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

ve $U = S$ operatörü $\lambda \in \mathbb{D}$, $u \in H^2$ olmak üzere $(Su)(\lambda) = \lambda u(\lambda)$ olarak tanımlanırsa; bu teoremin, Beurling teoreminin doğal bir sonucu olarak ortaya çıktığı görülür. Bu durumda $\theta(S)$ operatörü, $\lambda \in \mathbb{D}$, $u \in H^2$ olmak üzere $(T_\theta u)(\lambda) = \theta(\lambda)u(\lambda)$ ile tanımlanan T_θ Toeplietz operatörü ile özdeştir. Bu nedenle

$$\theta(S)H^2 = \theta H^2 = \{\theta u : u \in H^2\}$$

olur.

2.3 İç Fonksiyonların Aritmetiği

Tanım 2.3.1. *u,$v \in H^\infty$ iç fonksiyonları verilsin. Eğer $v = wu$ olacak şekilde bir $w \in H^\infty$ fonksiyonu varsa "u böler v" denir ve $u|v$ olarak gösterilir.*

Gözlem 2.3.2. *Yukarıdaki tanımda u ve v iç fonskiyonlar ise w fonksiyonu da iç fonksiyondur.*

Lemma 2.3.3. *Her u,$v \in H^\infty$ iç fonksiyonları için aşağıdakiler denktir:*

(i) $u|v$;

(ii) $vH^\infty \subset uH^\infty$;

(iii) $vH^2 \subset uH^2$;

(iv) *Her* $\lambda \in \mathbb{D}$ *için* $|v(\lambda)| \leq |u(\lambda)|$ *olur.*

Kanıt. (i) önermesinin (ii) önermesini gerektirdiği açıktır. Dolayısıyla $(i) \Rightarrow (iii)$ ve $(i) \Rightarrow (iv)$ gerektirmeleri de sağlanır. Eğer $\theta' H^2 \subset \theta H^2$ ise $\phi \in H^2$ için $\theta' = \theta\phi$ olarak yazılır. ϕ fonksiyonunun sınır değerleri hemen hemen her yerde modülce 1 olmalıdır. Sonuç olarak $\phi \in H^\infty$ ve $\theta|\theta'$ elde edilir ve $(iii) \Rightarrow (i)$ gerçeklenir. Son olarak, (iv) kabul edilsin. Bu durumda $\phi(\lambda) = \theta'(\lambda)/\theta(\lambda)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ içinde sadece kaldırılabilir tekilliğe sahiptir ve $|\phi(\lambda)| \leq 1$ olur. Böylece ϕ fonksiyonu $\mathbb{D}$ diskine analitik bir genişlemeye sahiptir, bu genişleme H^∞ cebrine aittir ve $\theta' = \theta\phi$ olduğundan $\theta|\theta'$ olur. Böylece ispat tamamlanır. □

Tanım 2.3.4. *F, H^∞ içindeki fonksiyonların bir ailesi olsun. Eğer θ, F ailesinin her elemanını böler ve F ailesinin diğer her ortak iç böleninin bir çarpanı ise θ iç fonksiyonu "en büyük ortak iç bölen" olarak adlandırılır. En büyük ortak iç bölen $\bigwedge F$ (ya da $F = \{f_i : i \in I\}$ ise $\bigwedge_{i\in I} f_i$, ya da $F = \{f_1, f_2\}$ ise $f_1 \wedge f_2$) şeklinde gösterilir.*

2.4 Minimal Fonksiyonlar ve Maksimal Vektörler

Maksimal vektörlerin her zaman var olup olmadığını ve maksimal vektörler ile minimal fonksiyonlar arasındaki ilişkinin nasıl olduğunu anlamak için aşağıdaki tanım ve teoremi vermek burada yerinde olacaktır.

Tanım 2.4.1. *$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörü lokal C_0-sınıfından olsun. Eğer her $g \in \mathcal{H}$ için $m_g | m_h$ ise $h \in \mathcal{H}$ vektörüne "T-maksimal" denir. Herhangi bir karışıklığa yol açmayacaksa $h \in \mathcal{H}$ vektörüne kısaca "maksimal" denilecektir.*

Eğer h maksimal vektör ise açıktır ki $m_h(T) = 0$ olur ve dolayısıyla T operatörü C_0-sınıfından ve $m_h \equiv m_T$ olmak zorundadır.

Aşağıdaki teorem maksimal vektörlerin her zaman var olduğunu söyler.

Teorem 2.4.2. *$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörü C_0-sınıfından olsun. Bu durumda T-maksimal vektörler vardır ve T-maksimal vektörlerin kümesi $\mathcal{H}$ içinde yoğun bir G_δ-kümesidir. Özellikle, her T-maksimal h vektörü için T operatörü C_0-sınıfındandır ve $m_T \equiv m_h$ olur.*

Kanıt. Sayılabilir yoğun G_δ kümelerinin kesişimi yine yoğun bir G_δ kümesidir. Bu nedenle, seçilen herhangi $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{D}$ dizisi için

$$M = \{h \in \mathcal{H} : |m_h(\lambda_n)| = \inf_{k \in \mathcal{H}} |m_k(\lambda_n)|, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

kümesi yoğun bir G_δ kümesidir. $\{\lambda_n\}$ dizisinin $\mathbb{D}$ içinde yoğun olduğu varsayılsın. Eğer $h \in M$ ve $k \in \mathcal{H}$ ise $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $|m_h(\lambda_n)| \leq |m_k(\lambda_n)|$ elde edilir, ve süreklilik nedeniyle $\lambda \in \mathbb{D}$ için $|m_h(\lambda)| \leq |m_k(\lambda)|$ olur. Dolayısıyla $m_k | m_h$ ve böylece M kümesinin her elemanının T-maksimal vektör olduğu sonucuna ulaşılır. □

2.5 C_0-Sınıfı Operatörlerinin Genel Özellikleri

Önerme 2.5.1. *Bir $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörünün C_0-sınıfından olması için gerek ve yeter koşul T^* operatörünün C_0-sınıfından olmasıdır.*

Kanıt. [7, 4.1. Proposition]. □

Önerme 2.5.2. *$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ hiç birimsel olmayan daralma, T için bir değişmez alt-uzay $\mathcal{H}'$ ve $\mathcal{H}'' = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}'$ olsun. $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}''$ ayrışımına göre T operatörünün matrisi*

$$T = \begin{bmatrix} T' & X \\ 0 & T'' \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda T operatörünün C_0-sınıfından olması için gerek ve yeter koşul T' ve T'' operatörlerinin C_0-sınıfından olmasıdır. Eğer T operatörü C_0-sınıfından ise bu durumda $m_{T'}|m_T$, $m_{T''}|m_T$ ve $m_T|m_{T'}m_{T''}$ olur.

Kanıt. Her $u \in H^\infty$ için

$$u(T) = \begin{bmatrix} u(T') & * \\ 0 & u(T'') \end{bmatrix}$$

elde edilir. Eğer $u(T) = 0$ ise $u(T') = 0$ ve $u(T'') = 0$ olur; yani T', T'' operatörleri C_0-sınıfındandır ve $m_{T'}|m_T$, $m_{T''}|m_T$ elde edilir. Tersine, T' ve T'' operatörleri C_0-sınıfından, $\theta' = m_{T'}$ ve $\theta'' = m_{T''}$ olduğu varsayılsın. Eğer $h'' \in \mathcal{H}''$ ise

$$0 = \theta''(T'')h'' = P_{\mathcal{H}''}\theta''(T)h''$$

elde edilir ve böylece $\theta''(T)h'' \in \mathcal{H}'$ olur. Sonuç olarak,

$$(\theta'\theta'')(T)h'' = \theta'(T')\theta''(T)h'' = 0$$

olur. $(\theta'\theta'')(T)|\mathcal{H}' = \theta''(T')\theta'(T') = 0$ olduğundan, $\ker(\theta'\theta'')(T) \supset \mathcal{H}' \cup \mathcal{H}''$ olur, bu ise $(\theta'\theta'')(T) = 0$ olması demektir. Dolayısıyla T operatörü C_0-sınıfındandır ve $m_T|\theta'\theta''$ olur, böylece istenen elde edilir. □

Önerme 2.5.3. *$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörü C_0-sınıfından ve m_T nin bir iç fonsksiyonu θ olsun. Eğer $\mathcal{H}' = \ker\theta(T)$ ile $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}''$ ayrışımına göre $\mathcal{H}$ uzayının bir matrisi*

$$T = \begin{bmatrix} T' & X \\ 0 & T'' \end{bmatrix}$$

ise, bu durumda $m_{T'} \equiv \theta$ ve $m_{T''} \equiv m_T/\theta$ olur.

Kanıt. $m_{T'}|\theta$ olacak şekilde $\theta'(T) = \theta(T)|\ker\theta(T) = 0$ elde edilir. Aynı zamanda,

$$(m_T/\theta)(T)\mathcal{H}'' \subset (m_T/\theta)(T)\mathcal{H} \subset \ker\theta(T) = \mathcal{H}''$$

olmak üzere

$$\{0\} = m_T(T)\mathcal{H} = \theta(T)(m_T/\theta)(T)\mathcal{H}$$

olduğu açıktır ve sonuç olarak,

$$(m_T/\theta)(T'') = P_{\mathcal{H}''}(m_T/\theta)(T)|\mathcal{H}'' = 0$$

olur. Böylece $m_{T'}|\theta$, $m_{T''}|(m_T/\theta)$ elde edilir ve Önerme 2.5.2 nedeniyle $\theta(m_T/\theta) = m_T|m_{T'}m_{T''}$ bulunur. Dolayısıyla $m_{T'} \equiv \theta$ ve $m_{T''} \equiv m_T/\theta$ olur. □

Hiç birimsel olmayan her T daralması için K_T^∞ sınıfı, $u(T)$ hemen hemen afinite (yani, $\ker u(T) = \ker(u(T))^* = \{0\}$) olmak üzere $u \in H^\infty$ fonksiyonlarından oluşur. K_T^∞ sınıfı rasyonel fonksiyonlar ile fonksiyonel kalkülüsü anlamak manasında önemlidir:

$$(v/u)(T) = u(T)^{-1}v(T)\ ,\ u \in K_T^\infty\ ,\ v \in H^\infty.$$

Genelde $(v/u)(T)$ sürekli olmayan, kapalı ve yoğun tanımlanan bir operatördür.

Önerme 2.5.4. *C_0-sınıfının her T operatörü için $K_T^\infty = \{u \in H^\infty : u \wedge m_T \equiv 1\}$ olur. Ayrıca, her $u \in H^\infty$ için $\ker u(T) = \{0\}$ olması için gerek ve yeter koşul $\ker u(T)^* = \{0\}$ olmasıdır.*

Kanıt. $u \wedge m_T \equiv 1$ olsun. Eğer $h \in \ker u(T)$ ise $m_h \equiv 1$ olmak üzere $m_h|u$ ve $m_h|m_T$ olur. Yani $h = 0$ ve böylece $\ker u(T) = \{0\}$ olur. Benzer şekilde, $u \wedge m_T \equiv 1$ ise $\ker u(T)^* = \ker u^\sim(T^*) = \{0\}$ olmak üzere $u^\sim \wedge m_{T^*} = 1$ olması demektir. Tersine, eğer $u \wedge m_T \equiv \theta \neq 1$ ise Önerme 2.5.3 nedeniyle $\ker u(T) \supset \ker\theta(T)$ ve $\ker\theta(T) \neq \{0\}$ olur. □

Gözlem 2.5.5. *Bir önceki ispat, her $u \in H^\infty$ için $\ker u(T) = \ker(u \wedge m_T)(T)$ olduğunu gösterir.*

2.6 Fonksiyonel Hesap

Bir " $\mathbb{C}$-cebri", $\cdot : A \times A \to A$ çarpma işlemi ile tanımlanan her $a,b \in A$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ sağlanacak şekilde e birim elemanı ile $(A, +, \cdot)$ kümesi bir halka olmak üzere bir $\mathbb{C}$-vektör uzayıdır.

Tanım 2.6.1. *Bir "norm cebri", A kümesi $\|\cdot\|$ normu ile donatılmış aşağıdaki özelliklere sahip bir $\mathbb{C}$-cebridir:*

(i) her $a,b \in A$ için $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$;

(ii) $\|e\| = 1$.

Bir "Banach cebri" tam olan bir norm cebridir.

A ve B, $\mathbb{C}$-cebirleri olsun. Eğer her $a,b \in A$ için $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ ve $\varphi(e_A) = e_B$ oluyorsa, $\varphi : A \to B$ lineer dönüşümü bir "cebir homomorfizmi" olarak adlandırılır.

Her norm cebrinde çarpma işlemi süreklidir: gerçekten, her (a, b), $(c, d) \in A \times A$ için

$$\|ab - cd\| = \|a(b - d) + (a - c)d\| \leq \|a\| \|b - d\| + \|a - c\| \|d\|$$

olur.

Tanım 2.6.2. *Bir " $\mathbb{C}^*$-cebri", A kümesinin kendi içine $* : a \mapsto a^*$ fonksiyonu ile aşağıdaki özelliklere sahip bir Banach cebridir:*

(i) $*$ bir "involüsyon" dur, yani her $a,b \in A$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$(a + b)^* = a^* + b^* \ , \ (\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^* \ , \ (ab)^* = b^* a^* \ , \ (a^*)^* = a.$$

(ii) her $a \in A$ için $\|a^* a\| = \|a\|^2$ olur.

Tanım 2.6.3. *Eğer her $a \in A$ için $\Phi(a^*) = \Phi(a)^*$ ise A ve B $\mathbb{C}^*$-cebirleri arasındaki bir $\Phi : A \to B$ cebir homomorfizmi bir "$*$-homomorfizm" olarak adlandırılır.*

Önerme 2.6.4. *A ve B $\mathbb{C}^*$-cebirleri ve $\Phi : A \to B$ $*$-homomorfizmi olsun. Eğer A komutatif ise Φ süreklidir ve $\|\Phi\| = 1$ olur.*

Önerme 2.6.5. *A bir $\mathbb{C}^*$-cebri ve A içinde normal bir eleman a olsun. Bu durumda tek bir $\Phi : C(\sigma(a)) \to A$ $*$-homomorfizmi vardır ve $\Phi(z) = a$ sağlanır. Φ bir izometridir.*

Teorem 2.6.6. ***(Spektral Dönüşüm Teoremi):*** *A bir $\mathbb{C}^*$-cebri ve $a \in A$ normal olsun. Bu durumda Önerme 2.6.5 de verilen $\Phi : C(\sigma(a)) \to A$ $*$-homomorfizmi için aşağıda verilen eşitlik geçerlidir:*

$$her f \in C(\sigma(a)) \text{ için } \sigma(\Phi(f)) = f(\sigma(a)).$$

$H \neq \{0\}$ bir kompleks Hilbert uzayı olmak üzere $\mathcal{B}(H)$ bir $\mathbb{C}^*$-cebridir. Ayrıca Teorem 2.6.5 nedeniyle her $A \in \mathcal{B}(H)$ normal operatörüne karşılık bir $\Phi : C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(H)$ $*$-homomorfizmi $\Phi(z) = A$ olacak şekilde vardır. Şimdi, Φ $*$-homomorfizmini $\sigma(A)$ üzerindeki fonksiyonların bir $\mathbb{C}^*$-cebrine genişletmek için aşağıdaki tanım verilecektir.

Tanım 2.6.7. *X lokal kompakt, σ-kompakt bir topolojik uzay olsun.*

$$\mathcal{M}_\infty(X) := \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ Borel ölçülebilir ve sınırlı}\}$$

ve her $f \in \mathcal{M}_\infty(X)$ için $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ tanımlansın. Ayrıca, $* : \mathcal{M}_\infty(X) \to \mathcal{M}_\infty(X)$ fonksiyonu $* : f \mapsto \bar{f}$ ile tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{M}_\infty(X)$ komutatif bir $\mathbb{C}^*$-cebridir.

Tanım 2.6.8. *X bir küme ve C^X içinde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir dizi olsun. Eğer $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $f \in C^X$'e noktasal yakınsıyor ve $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in X} |f_n(x)| < \infty$ ise C^X içindeki $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $f \in C^X$'e "sınırlı noktasal yakınsak olduğu" söylenir.*

Lemma 2.6.9. *X kompakt metrik uzayı için; $\mathcal{M}_\infty(X)$, C^X uzayının en küçük M alt kümesidir ve aşağdaki özellikleri sağlar:*

(i) $C(X) \subset M$;

(ii) M, sınırlı noktasal yakınsaklık altında kapalıdır.

Tanım 2.6.10. *X bir kompakt metrik uzay olsun. Eğer her $x,y \in H$ ve $\mathcal{M}_\infty(X)$ içindeki her $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi f fonksiyonuna sınırlı noktasal yakınsak ise*

$$\Psi : \mathcal{M}_\infty(X) \to \mathcal{B}(H)$$

fonksiyonu "w-sürekli" olarak adlandırılır ve

$$\lim_{n\to\infty} \langle \Psi(f_n)x, y\rangle = \langle \Psi(f)x, y\rangle$$

olur.

$\mathcal{B}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ olduğundan $\mathcal{M}_\infty(X) \to \mathbb{C}$ olan fonskiyonların w-sürekliliği de böylece açıklanmış olur.

Sonuç 2.6.11. *X bir kompakt metrik uzay olsun. Bu durumda her $\Psi : \mathcal{M}_\infty(X) \to \mathcal{B}(H)$ w-sürekli fonksiyonu $\Psi|C(X)$ tarafından tek türlü belirlenir.*

Kanıt. $\Phi|C(X) = \Psi|C(X)$ ile $\Phi : \mathcal{M}_\infty(X) \to \mathcal{B}(H)$ w-sürekli olsun. Bu durumda,

$$M := \{f \in \mathcal{M}_\infty(X) : \text{her } x{,}y \in H \text{ için, } \langle \Phi(f)x, y\rangle = \langle \Psi(f)x, y\rangle\}$$

Lemma 2.6.9 ile verilen (i) ve (ii) koşullarını sağlar. Dolayısıyla $M = \mathcal{M}_\infty(X)$, yani $\Phi = \Psi$ olur. □

Önerme 2.6.12. *$A \in \mathcal{B}(H)$ normal ise, tek türlü w-sürekli bir*

$$\Psi : \mathcal{M}_\infty(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(H)$$

$*$-homomorfizmi vardır ve $\Psi(z) = A$ olur. Ayrıca, Ψ sürekli ve $\|\Psi\| = 1$ olur.

Tanım 2.6.13. *Önerme 2.6.12 ile verilen $\Psi : \mathcal{M}_\infty(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(H)$ cebir homomorfizmi $A \in \mathcal{B}(H)$ normal operatörünün "fonksiyonel kalkülüsü" olarak adlandırılır.*

Bu kısıma kadar H^∞, C_0-sınıfı ve fonksiyonel kalkülüs kavramları ve özellikleri hakkında gerekli bilgiler edinildi. Bu kavramları anlamak, genel teoriyi anlamak adına önemli bir adım oluşturuyordu. Şimdi, bunların birbirleriyle olan ilişkisi ve buraya kadar yapılanlar genel olarak şöyle özetlenecektir:

H^∞, açık birim $\mathbb{D}$ diski üzerindeki sınırlı holomorfik fonksiyonların cebri olsun. $\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı ve $\mathcal{H}$ üzerinde sınırlı lineer bir operatör T (yani, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$) olsun. Eğer aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$\Phi : H^\infty \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

cebir homomorfizmi varsa T operatörüne "C_0-sınıfındandır" denir.

(i) Her $u \in H^\infty$ için $\|\Phi(u)\| \leq \|u\|$;

(ii) Her p polinomu için $\Phi(p) = p(T)$;

(iii) H^∞ ve $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ kendi zayıf-yıldız topolojileri verildiğinde Φ süreklidir;

(iv) Φ aşikar olmayan çekirdeğe sahiptir.

Bu durumda, Sz.-Nagy-Foias H^∞ olarak bilinen $\Phi(u) = u(T)$ gösterimi kullanılır. T operatörünün minimal fonksiyonu m_T olmak üzere $\ker \Phi = m_T H^\infty$ eşitliği gerçeklenir.

2.7 Jordan Blokları

Her $\theta \in H^\infty$ iç fonksiyonu için $H(\theta) = H^2 \ominus \theta H^2$ üzerinde $S(\theta) = P_{H(\theta)}S|H(\theta)$ (veya denk olarak, $S(\theta)^* = S^*|H(\theta)$) ile tanımlanan operatöre "Jordan blok" denir. Genleştirme ve sıkıştırma tanımları göz önüne alınırsa; S operatörü $S(\theta)$ operatörünün "genleştirilmesi" ve $S(\theta)$, S operatörünün "sıkıştırılması" olur. $S(\theta)$ Jordan bloklarının direkt toplamlarından elde edilen

$$T = S(\theta) \oplus S(\theta) \oplus \cdots$$

operatörüne "düzgün Jordan operatör" adı verilir. Bu operatörler; her C_0 daralması, minimal fonskiyonu θ olan bir T düzgün Jordan operatörünün sıkıştırılması olduğundan ilginçtirler ve bu çalışmada önemli bir yere sahiptirler.

Önerme 2.7.1. *θ sabit olmayan bir iç fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir:*

(i) Her $h \in H(\theta)$ için $m_h \equiv \theta/h \wedge \theta$ olur.

(ii) θ fonksiyonunun ϕ iç böleni için, $S(\theta)$ operatörünün her $\mathcal{M}$ değişmez alt-uzayı $\phi H^2 \ominus \theta H^2$ formundadır. Gerçekten,

$$\phi H^2 \ominus \theta H^2 = \ker(\theta/\phi)(S(\theta)) = ran\phi(S(\theta))$$

olur.

(iii) Eğer $\mathcal{M} = \phi H^2 \ominus \theta H^2$ uzayı, $S(\theta)$ için değişmez bir alt-uzay ise bu durumda, $S(\theta)|\mathcal{M}$ kısıtlanışı $S(\theta/\phi)$ operatörüyle birimsel denktir ve $S(\theta)$ operatörünün $H(\theta) \ominus \mathcal{M} = H(\phi)$ uzayına sıkıştırılması $S(\phi)$ ile aynıdır.

(iv) Bir $h \in H(\theta)$ vektörünün devresel olması için gerek ve yeter koşul $\theta \wedge h \equiv 1$ olmasıdır.

Kanıt. (i) $u = m_h$ ve $v = \theta/h \wedge \theta$ olsun.

$$v(S(\theta))h = P_{H(\theta)}v(S)h = P_{H(\theta)}vh = P_{H(\theta)}\theta(h/h \wedge \theta) = 0$$

olur ve dolayısıyla $u|v$ bulunur. Tersine, $g \in H^2$ için $uh = \theta g$ olacak şekilde $u(S(\theta))h = 0$ sağlanır. $u|\theta$ olduğundan $h = (\theta/u)g$ ve böylece $(\theta/u)|h$ olur.

$(\theta/u)|\theta$ olduğundan $(\theta/u)|h \wedge \theta$ ya da denk olarak $v = (\theta/h \wedge \theta)|u$ elde edilir, bu ise $v \equiv u$ olması demektir.

(ii) Eğer $\mathcal{M}$ alt-uzayı $S(\theta)$ için değişmez ise $\mathcal{M} \oplus \theta H^2$ uzayı S için değişmezdir: gerçekten, $x \in \mathcal{M}$ ise $Sx = S(\theta x) + P_{\theta H^2} Sx$ olur. Beurling Teoremi nedeniyle bir ϕ iç fonksiyonu $\mathcal{M} \oplus \theta H^2 = \phi H^2$ olacak şekilde vardır ve $\mathcal{M} = \phi H^2 \ominus \theta H^2$ olur. $\phi H^2 \supset \theta H^2$ olduğundan $\phi|\theta$ olur. Şimdi, eğer $h \in H^2 \ominus \phi H^2$ ise, (i) nedeniyle $\theta/h \wedge \theta|\theta/\phi$ ve $(\theta/\phi)(S(\theta)h) = 0$ olmak üzere $\theta|h$ olur.

Tersine, eğer $(\theta/\phi)(S(\theta)h) = 0$ ise $\theta/h \wedge \theta|\theta/\phi$ olur- yani $\phi|h \wedge \theta$ ve dolayısıyla $\phi|h$ demektir. Böylece $h \in \phi H^2 \cap H(\theta) = \phi H^2 \ominus \theta H^2$ olur ve $\phi H^2 \ominus \theta H^2 = \ker(\theta/\phi)(S(\theta))$ eşitliği ispatlanmış olur. İkinci eşitlik için, eğer $\phi|\theta$ ise

$$\phi(S(\theta))H(\theta) = P_{H(\theta)}\phi(S)H(\theta) = P_{H(\theta)}\phi(S)H^2 = P_{H(\theta)}\phi H^2 = \phi H^2 \ominus \theta H^2$$

olur.

(iv) Eğer h devresel ise (i)'den dolayı $m_h \equiv m_{S(\theta)}$ olmalıdır ve $h \wedge \theta \equiv 1$ elde edilir. Tersine, eğer $h \wedge \theta \equiv 1$ ise (ii) nedeniyle h vektörü $S(\theta)$ operatörünün herhangi bir değişmez alt-uzayına ait değildir ve dolayısıyla h bir devresel vektördür.

□

Sonuç 2.7.2. *$\theta \in H^\infty$ bir iç fonksiyon olsun. Aşağıdakiler geçerlidir:*

(i) $S(\theta)$ operatörünün katlılığı yoktur.

(ii) Eğer θ fonksiyonunun bir iç böleni $\phi \in H^\infty$ ise bu durumda $\phi H^2 \ominus \theta H^2$, $S(\theta)$ için bir değişmez alt-uzay olur. Gerçekten,

$$\phi H^2 \ominus \theta H^2 = ran\phi(S(\theta)) = \ker(\theta/\phi)(S(\theta)) \tag{2.1}$$

olur. Tersine, $S(\theta)$ için herhangi bir değişmez alt-uzay (2.1) *formundadır.*

Kanıt. Önerme 2.7.1 nedeniyle açıktır. □

Sonuç 2.7.3. *θ bir iç fonksiyon olsun. $S(\theta)$ için devresel vektörlerin kümesi $H(\theta)$ içinde yoğun bir G_δ kümesidir.*

Kanıt. Önerme 2.7.1 nedeniyle bir $h \in H(\theta)$ vektörünün devresel olması için gerek ve yeter koşul $m_h \equiv \theta$ olmasıdır. Bununla birlikte Teorem 2.4.2 düşünüldüğünde ispat tamamlanır. □

Şimdi bir kümenin komutantının tanımı verilecektir:

Bir $E \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ alt kümesinin "komutantı",

$$\mathrm{E}' = \{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \text{her } T \in E \text{ için } XT = TX\}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımın daha genel ve kullanışlı hali aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.7.4. *Eğer $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ ise, $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ içindeki T ve T' operatörlerini karşılıklı değiştiren(intertwining) tüm operatörlerin kümesi $\mathcal{J}(T', T)$ olarak gösterilsin. Bu durumda,*

$$\mathcal{J}(T', T) = \{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}') : T'X = XT\}$$

olur. Eğer $T = T'$ ise bu durumda $\mathcal{J}(T', T)$ kümesi $\{T\}'$ komutantı ile aynı olur.

Aşağıdaki teorem ve sonuç $S(\theta)$ Jordan bloğunun komutantı hakkında bilgi verir.

Teorem 2.7.5. *θ ve θ' iç fonksiyonlar olsun. Her $X \in \mathcal{J}(S(\theta), S(\theta)')$ operatörü için bir $u \in H^\infty$ fonksiyonu $\theta' | u\theta$, $\|u\| = \|X\|$ ve*

$$X = P_{H(\theta')} u(S) | H(\theta) \tag{2.2}$$

sağlanacak şekilde vardır. Tersine, $\theta' | u\theta$ olmak üzere her $u \in H^\infty$ fonksiyonu (2.2) ile tanımlanan bir $X \in \mathcal{J}(S(\theta), S(\theta)')$ operatörü belirler. Yani, $X = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\theta' | u$ olmasıdır.

Kanıt. [7, 1.16 Theorem]. □

Sonuç 2.7.6. *θ bir iç fonksiyon olsun. Her $X \in \{S(\theta)\}'$ için $X = u(S(\theta))$ olacak şekilde $u \in H^\infty$ fonksiyonu vardır ve $\|u\| = \|X\|$ olur. Özellikle, $\{S(\theta)\}'$ komutantı $H^\infty / \theta H^\infty$ bölüm cebrine izometrik izomorfiktir.*

2.8 Lat(T) ve AlgLat(T)

Bir T operatörü için değişmez alt-uzayların ailesi Lat(T) ile, ve her $\mathcal{M} \in$ Lat(T) için $X\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ olacak şekilde X operatörlerinin cebri AlgLat(T) ile ifade edilecektir.

Teorem 2.8.1. *C_0-sınıfının bir T operatörü için AlgLat(T)$\cap\{T\}' = \{T\}''$ olur.*

Kanıt. $S \in$ (AlgLat(T)$\cap\{T\}'$) olsun. $\{T\}'$ tanımı gereği her $Y \in \{T\}'$ için $TY = YT$ olur. Bu eşitliğe S operatörü uygulanır ve $S \in$ AlgLat(T) olduğu kullanılırsa

$$TYS = YTS \Rightarrow YST = SYT \Rightarrow YS = SY$$

elde edilir, yani $S \in \{T\}''$ olur ve AlgLat(T)$\cap\{T\}' \subseteq \{T\}''$ bulunur. Tersine, $S \in \{T\}''$ olsun. O halde her $Y \in \{T\}'$ için $SY = YS$ olur. Yukarıdakine benzer şekilde bu eşitliğe T operatörü uygulandığında

$$SYT = YST \Rightarrow TSY = STY \Rightarrow TS = ST$$

eşitliği elde edilir, bu ise $S \in \{T\}'$ olması demektir. T operatörü C_0-sınıfından olduğundan, Önerme 2.11.19 nedeniyle bir $Y \in \{T\}'$ için T operatörünün değişmez her $\mathcal{M}$ alt-uzayı $\mathcal{M} = \ker Y$ şeklindedir. $S \in \{T\}''$ ise S ve Y operatörleri değişmeli olduğundan $S\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ elde edilir, bu ise $\{T\}'' \subseteq$ AlgLat(T) olması demektir. Böylece $\{T\}'' \subseteq$ AlgLat(T)$\cap\{T\}'$ olur ve istenen elde edilir. $\square$

2.9 Katlılığı Olmayan Operatörler

Eğer $\mu_T = 1$ ise, yani T devresel bir vektöre sahip ise T operatörüne "katlılığı yoktur" denilmişti. Katlılığı olmayan bir T operatörünün eşleniği genelde T ile aynı özelliğe sahip değildir. Buradaki ilk amaç; eğer T operatörü C_0-sınıfından ve $\mu_T = 1$ ise T^* operatörünün katlılığı olmayan bir operatör olduğunu göstermektir.

Lemma 2.9.1. *$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$, $T \prec T'$ olacak şekilde hiç birimsel olmayan iki daralma olsun. Bu durumda T operatörünün C_0-sınıfından olması için gerek ve yeter koşul T' operatörünün C_0-sınıfından olmasıdır. Dahası, T ve T' operatörleri C_0-sınıfından ise $m_T \equiv m_{T'}$ olur.*

Kanıt. $X \in \mathcal{J}(T, T')$ ise her $u \in H^\infty$ için $u(T')X = Xu(T)$ olur. Eğer buna ek olarak X hemen hemen afinite ise $u(T) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $u(T') = 0$ olmasıdır. Dolayısıyla istenen gerçeklenir. □

Önerme 2.9.2. *T operatörü C_0-sınıfından olsun. Eğer T katlılığı olmayan bir operatör ise $S(m_T) \prec T$ olur ve eğer T^* katlılığı olmayan bir operatör ise $T \prec S(m_T)$ olur.*

Kanıt. [7, 2.2 Proposition]. □

Teorem 2.9.3. *C_0-sınıfından her T operatörü için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) T operatörünün katlılığı yoktur;

(ii) T^* operatörünün katlılığı yoktur; ve

(iii) T operatörü $S(m_T)$ ile hemen hemen benzerdir.

Kanıt. Teoremi ispatlamak için (ii) ömermesinin (i) önermesini gerektirdiğini görmek yeterlidir. Gerçekten, simetri nedeniyle $(i) \Rightarrow (ii)$ elde edilecektir. Ayrıca, (i) ve (ii) kabul edildiğinde Önerme 2.9.2 nedeniyle $T \sim S(m_T)$ olacaktır. Tersine, eğer $S(m_T) \prec T$ ise $\mu_T \leq \mu_{S(m_T)} = 1$ ve dolayısıyla (i) gerçeklenecektir. Şimdi $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve T^* operatörünün katlılığı olmadığı varsayılsın. Önerme 2.9.2 nedeniyle

$$S(m_T)X = XT \tag{2.3}$$

olacak şekilde bir X hemen hemen afin dönüşümü seçilebilir. $h \in \mathcal{H}$ vektörü T operatörü için T-maksimal olsun, yani $m_h \equiv m_T$ olsun. Böyle vektörler Teorem 2.4.2 nedeniyle vardır. h tarafından oluşturulan $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n h$ devresel uzay $\mathcal{K}$ ile ifade edilirse, bu durumda $T\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ ve $m_{T|\mathcal{K}} \equiv m_T$ olur. Böylece $T|\mathcal{K}$ operatörünün katlılığı yoktur ve Önerme 2.9.2 tekrar kullanılırsa

$$TY = YS(m_T) \tag{2.4}$$

ve $YH(\theta)$, $\mathcal{K}$ içinde yoğun olacak şekilde bire-bir bir $Y : H(m_T) \to \mathcal{H}$ operatörü elde edilir. (2.3) ve (2.4) eşitlikleri $XY \in \{S(m_T)\}'$ olduğunu gösterir ve şüphesiz ki XY bire-bir olur. $u \wedge m_T \equiv 1$ ve

$$XY = u(S(m_T)) \tag{2.5}$$

olacak şekilde bir $u \in H^\infty$ fonksiyonunun varlığını anlamak için Sonuç 2.7.6 ve Önerme 2.5.4 uygulanır. Ayrıca (2.3) ve(2.5) eşitlikleri kullanılarak

$$X(YX-u(T)) = XYX-Xu(T) = XYX-u(S(m_T))X = (XY-u(S(m_T)))X = 0$$

elde edilir ve X bire-bir olduğundan $YX = u((T)$ olur. Önerme 2.5.4'ün ikinci kez uygulanması $u(T)$'nin hemen hemen afinite olduğunu gösterir; gerçekten, $u \wedge m_T \equiv 1$ olur. Özellikle $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ olacak şekilde

$$\mathcal{H} = \overline{u(T)\mathcal{H}} \subset \overline{YH(m_T)} \subset \mathcal{K}$$

olur ve sonuç olarak h vektörü T operatörü için devreseldir. Böylece ispat tamamlanır. □

Önerme 2.9.4. *$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ katlılığı olmayan C_0-sınıfından bir operatör olsun. Bu durumda, bir $h \in \mathcal{H}$ vektörünün devresel olması için gerek ve yeter koşul h vektörünün T-maksimal olmasıdır. Özellikle, T için devresel vektörlerin kümesi H içinde yoğun bir G_δ-kümesidir.*

Kanıt. [7, 2.7 Corollary]. □

Önerme 2.9.5. *C_0-sınıfının katlılığı olmayan bir operatörünün değişmez bir altuzaya her kısıtlanışının katlılığı yoktur.*

Kanıt. T katlılığı olmayan bir operatör ve T için değişmez bir alt-uzay $\mathcal{K}$ olsun. Eğer h vektörü T^* için devresel ise $P_{\mathcal{K}}h$, T için devreseldir. Böylece,$(T|\mathcal{K})^*$, ve dolayısıyla $T|\mathcal{K}$ kısıtlanışlarının katlılığı yoktur. □

Jordan bloklar için değişmez alt-uzayların formu, Sonuç 2.7.2 ile görülmüştü. Buna benzer şekilde, C_0-sınıfının katlılığı olmayan bir operatörünün değişmez alt uzayları da belli bir sınıflandırmaya sahiptir. Bunu görmek için, C_0-sınıfının katlılığı olmayan operatörleri ve karşılıklı değişme/intertwining arasındaki önemli bir ilişkiyi gösteren aşağıdaki önerme verilsin.

Önerme 2.9.6. *$m_T \equiv m_{T'}$ olmak üzere T ve T', C_0-sınıfının katlılığı olmayan iki operatörü olsun. Bu durumda $\mathcal{J}(T, T')$ içindeki bir operatörün bire-bir olması için gerek ve yeter koşul yoğun görüntü kümesine sahip olmasıdır.*

Kanıt. Eğer $\theta \equiv m_T$ ise Teorem 2.9.3 nedeniyle $X \in \mathcal{J}(T', S(\theta))$ ve $Y \in \mathcal{J}(S(\theta), T)$ hemen hemen afin dönüşümleri bulunabilir. Eğer $\mathcal{J}(T, T')$ içinde A herhangi bir operatör ise XAY ile $S(\theta)$ değişmelidir ve dolayısıyla Sonuç 2.7.6 nedeniyle $XAY = u(S(\theta))$ olacak şekilde bir $u \in H^\infty$ fonksiyonu vardır. Eğer A operatörü bire-bir veya yoğun görüntü kümesine sahipse, $u(S(\theta))$ operatörü de aynı özelliğe sahiptir ve dolayısıyla Önerme 2.5.4 nedeniyle $u \wedge \theta \equiv 1$ olur.

$$AYX = u(T')\ ,\ \ YXA = u(T) \tag{2.6}$$

eşitlikleri Teorem 2.9.3'ün ispatında ki gibi kanıtlanır. Örneğin,

$$X(AYX - u(T')) = XAYX - Xu(T') = XAYX - u(S(\theta))X = (XAY - u(S(\theta)))X = 0$$

olur ve X bire-bir olduğundan (2.6)'deki ilk eşitlik sağlanır. Son olarak, (2.6) eşitliklerinden $ranA \supset ranu(T')$ ve $\ker A \subset \ker u(T)$ olduğu çıkarılır. Önerme 2.5.4 nedeniyle $u \wedge \theta \equiv 1$ şartı $u(T)$ ve $u(T')$ operatörlerinin hemen hemen afin dönüşüm olmaları demektir ve dolayısıyla A bir hemen hemen afin dönüşüm olmak zorundadır. Böylece istenen elde edilmiş olur. □

Önerme 2.9.6 için $T = T'$ olduğu zaman ilginç bir durum ortaya çıkar. Hiç birimsel olmayan keyfi bir T daralması için $u \in H^\infty$ ve $v \in K_T^\infty$ olduğunda

$$(u/v)(T) = v(T)^{-1}u(T)$$

kapalı operatörünün tanımlandığı hatırlansın ve $(u/v)(T)$ formundaki sınırlı operatörlerin kümesi $\mathscr{F}_T$ ile ifade edilsin.

Önerme 2.9.7. *C_0-sınıfının katlılığı olmayan bir operatörü T olsun. Bu durumda $\{T\}' = \mathscr{F}_T$ olur.*

Kanıt. $T' = T$ olmak üzere; θ, X ve Y Önerme 2.9.6'nın ispatındaki gibi olsun. Eğer $A = I$ ise, aynı önermenin ispatı göz önüne alındığında $v \wedge \theta \equiv 1$ ve $YX \equiv v(T)$ olacak şekilde $v \in H^\infty$ fonksiyonunun varlığı görülür; gerçekten, (2.6) eşitliklerine $A = I$ için bakıldığında durum açıktır. Şimdi, eğer A keyfi ise $YXA = u(T)$ veya $v(T)A = u(T)$ olacak şekilde $u \in H^\infty$ fonksiyonunun varlığı sonucu çıkarılır. Bu ilişkiler ise $A = (u/v)(T)$ olması demektir ve önerme ispatlanmış olur. $\square$

Gözlem 2.9.8. *Bir önceki ispat, $\{T\}' = \mathscr{F}_T$ eşitliğinin yanı sıra, $u \wedge m_T \equiv 1$ olacak şekilde bir $v \in H^\infty$ fonksiyonunun var olduğunu ve $u \in H^\infty$ için her $A \in \{T\}'$ operatörünün $A = (u/v)(T)$ olarak yazılabileceğini gösterir.*

Şimdi, katlılığı olmayan operatörlerin değişmez alt-uzaylarının hangi formda olduğu aşağıdaki teorem ile görülebilir.

Teorem 2.9.9. *C_0-sınıfının her operatörü için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) T operatörünün katlılığı yoktur;

(ii) T operatörünün minimal fonksiyonunun her θ iç böleni için, $m_{T|\mathcal{K}} \equiv \theta$ olacak şekilde T için tek bir $\mathcal{K}$ değişmez alt-uzayı vardır;

(iii) $T|\mathcal{K} \prec T|\mathcal{K}'$ olacak şekilde T için ayrık $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{K}'$ değişmez alt-uzayları yoktur; ve

(iv) $m_{T|\mathcal{K}} \equiv m_T$ olacak şekilde T için uygun $\mathcal{K}$ değişmez alt-uzayları yoktur.

Eğer T katlılığı olmayan bir operatör ise, (ii)'deki tek değişmez alt-uzay

$$\mathcal{K} = \ker \theta(T) = \overline{ran(m_T/\theta)(T)}$$

olarak verilir.

Kanıt. $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ katlılığı olmayan bir operatör, T için değişmez bir alt-uzay $\mathcal{K}$ ve $\theta \equiv m_{T|\mathcal{K}}$ olsun. Önerme 2.9.5 nedeniyle $T' = T|\mathcal{K}$ ve $T'' = T|\ker\theta(T)$ operatörlerinin katlılığı yoktur ve $J : \mathcal{K} \to \ker\theta(T)$ olduğunda $T''J = JT'$ sağlanır. Önerme 2.9.6 nedeniyle $\mathcal{K} = J\mathcal{K} = \ker\theta(T)$ olacak şekilde J operatörü yoğun görüntü kümesine sahiptir. Böylece $(i) \Rightarrow (ii)$ ispatlanmış olur. $(ii) \Rightarrow (iv)$ içermesinin gerçeklendiği açıktır. Şimdi (iv) kabul edilsin ve h bir T-maksimal vektör olsun. Eğer $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n h$ ise $m_{T|\mathcal{K}} \equiv m_T$ ve (iv) nedeniyle $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ olur. Bu ise h vektörünün devresel olması demektir- yani, $(iv) \Rightarrow (i)$ gerçeklenir. $(iii) \Rightarrow (i)$ içermesi de benzer şekilde ispatlanır: gerçekten, h ve h' vektörleri T-maksimal $\mathcal{K} = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n h$ ve $\mathcal{K}' = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n h'$ ise bu durumda $T|\mathcal{K}$ ve $T|\mathcal{K}'$ operatörlerinin katlılığı yoktur ve aynı minimal fonksiyona sahiptirler. Teorem 2.9.3 nedeniyle, hemen hemen benzerliğin denklik bağıntısı olduğu kullanılarak geçişme özelliğinden $T|\mathcal{K} \prec T|\mathcal{K}'$ olduğu elde edilir. Eğer (iii) kabul edilirse, $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$ elde edilir ve özellikle $h' \in \mathcal{K}$ olur. T-maksimal vektörlerin kümesi yoğun olduğundan $\mathcal{K}$ uzayı her T-maksimal vektörü içerir ve dolayısıyla $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ sonucuna ulaşılır. Böylece (iii) varsayıldığında h vektörü devresel olur. Son olarak; $(ii) \Rightarrow (iii)$ önermesi, $T|\mathcal{K} \prec T|\mathcal{K}'$ olduğundan $m_{T|\mathcal{K}} \equiv m_{T|\mathcal{K}'}$ olması nedeniyle açıktır. Ayrıca, $T|\ker\theta(T)$ ve $T|\overline{ran(m_T/\theta)(T)}$ operatörleri θ minimal fonksiyonuna sahip olduğundan teoremin son ifadesi de gerçeklenir ve ispat tamamlanır. $\square$

2.10 Ayrıştırma İlkesi

Bu bölümde keyfi katlılık ile C_0-sınıfı operatörlerinin üzerinde çalışılacaktır. Aşağıdaki Splitting Teoremi, C_0-sınıfının genel operatörlerinin sınıflandırılmasının nasıl görüneceğini belirtir.

Teorem 2.10.1. *C_0-sınıfının bir operatörü $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $h \in \mathcal{H}$ bir T-maksimal vektör ve $\mathcal{K} = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n h$ olsun. Bu durumda $\mathcal{K} \vee \mathcal{M} = \mathcal{H}$ ve $\mathcal{K} \cap \mathcal{M} = \{0\}$ olacak şekilde T için bir $\mathcal{M}$ değişmez alt-uzayı vardır.*

Kanıt. $T_1 = T|\mathcal{K}$ operatörünün katlılığı yoktur ve Teorem 2.9.3 nedeniyle $T_1{}^*$ operatörü için bir $k \in \mathcal{K}$ devresel vektörü vardır.

$$\mathcal{K}' = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^{*n} k \ , \ \ \mathcal{M} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{K}'$$

olsun ve $T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{K}')$ operatörü $T_2{}^* = T^*|\mathcal{K}'$ olarak tanımlansın. T^* operatörü için $\mathcal{K}'$ değişmez olduğundan, $T_2 P_{\mathcal{K}'} = P_{\mathcal{K}'} T$ elde edilir ve dolayısıyla $X = P_{\mathcal{K}'}|\mathcal{K}$ tarafından tanımlanan $X \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{K}')$ operatörü

$$T_2 X = X T_1$$

eşitliğini sağlar. Bu fikir, katlılığı olmayan T_1 operatörüne Önerme 2.9.6'u uygulamak içindir ve bu nedenle $m_{T_1} \equiv m_{T_2}$ olduğunu bilmek önemlidir.

$$\overline{(ranX^*)} = \bigvee_{n=0}^{\infty} X^* T_2{}^{*n} k = \bigvee_{n=0}^{\infty} T_1{}^{*n} X^* k = \bigvee_{n=0}^{\infty} T_1{}^{*n} k = \mathcal{K}$$

olduğundan X^* yoğun görüntü kümesine sahiptir. Böylece, eğer $\theta \equiv m_{T_2}$ ise,

$$(\theta(T_1))^* X^* = X^* (\theta(T_2))^* = 0$$

elde edilir, bu ise $\theta(T_1) = 0$ demektir. Böylece $m_T = m_{T_1}|\theta$ ve $\theta|m_T$ olduğundan Önerme 2.5.2 nedeniyle $\theta \equiv m_{T_1}$ olduğu görülür. Bu durumda Önerme 2.9.6 kullanılırsa, X hemen hemen afin dönüşüm olmak zorundadır ve

$$\mathcal{K} \cap \mathcal{M} = \mathcal{K} \cap \ker P_{\mathcal{K}'} = \ker X,$$

ve

$$\mathcal{H} \ominus (\mathcal{K} \vee \mathcal{M}) = (\mathcal{H} \ominus \mathcal{K}) \cap \mathcal{K}' = \mathcal{K}' \cap \ker P_{\mathcal{K}} = \ker X^*$$

eşitlikleri sağlanır. □

Önerme 2.9.7'nin tersini kanıtlamak için Splitting ilkesinin ilk kullanımı verilsin.

Teorem 2.10.2. *C_0-sınıfının her operatörü için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) T operatörünün katlılığı yoktur;

(ii) $\{T\}'$ komutatiftir; ve

(iii) $\{T\}' = \mathscr{F}_T$ olur.

Kanıt. Önerme 2.9.7 nedeniyle $(i) \Rightarrow (iii)$ ve $(iii) \Rightarrow (ii)$ gerektirmeleri sağlanır. $\mu_T \geq 2$ olmak üzere C_0-sınıfının bir T operatörünün komutantının komutatif olmadığını göstermek, ispatın tamamlanması için yeterli olacaktır. T, $\mathcal{K}$, ve $\mathcal{M}$ Teorem 2.10.1 de verildiği gibi olsun; eğer $\mu_T \geq 2$ ise $\mathcal{K} \neq \mathcal{H}$ elde edilir ve dolayısıyla $\mathcal{M} \neq 0$ olur.

$$\mathcal{K}' = H \ominus \mathcal{M} \ , \ \ T_1 = T|\mathcal{K} \ , \ \ {T_2}^* = T^*|\mathcal{K}'$$

olmak üzere $\mathcal{K}'$, T_1 ve T_2 tanımlansın. $X = P_{\mathcal{K}'}|\mathcal{K}$ operatörü hemen hemen afin dönüşümdür ve $X \in \mathcal{J}(T_1, T_2)$ olur. T_1 ve T_2 katlılığı olmayan operatörler olduğundan Teorem 2.9.3(iii) nedeniyle ikisi de $S(m_T)$ ile hemen hemen benzer olur ve dolayısıyla T_1 ve T_2 operatörleri hemen hemen benzer olur.
Diğer taraftan, $Y \in \mathcal{J}(T_2, T_1)$ bir hemen hemen afinite olsun ve $A \in \{T\}'$ operatörü $A = YP_{\mathcal{K}'}$ olarak tanımlansın. Açıktır ki,

$$\ker A = \ker P_{\mathcal{K}'} = \mathcal{M} \ , \ \ \overline{A\mathcal{H}} = \mathcal{K}$$

eşitlikleri elde edilir.
Sıfırdan farklı bir $Z \in \mathcal{J}(T_2, T|\mathcal{M})$ operatörünün bulunabildiği varsayılsın. Bu durumda, $B = ZP_{\mathcal{K}'}$ tarafından tanımlanan $B \in \{T\}'$ operatörü $AB = 0$ ve $\overline{(BA)\mathcal{H}} = \overline{ZP_{\mathcal{K}'}Y\mathcal{K}'} = \overline{ZP_{\mathcal{K}'}\mathcal{K}} = \overline{Z\mathcal{K}'} \neq \{0\}$ olacak şekildedir. Böylece A ve B değişmeli değildir. Bu durumda, $\{T\}'$ kümesinin komutatif olmadığını göstermek için, böyle bir Z operatörünün var olduğunu göstermek yeterlidir. $\mathcal{M} \neq \{0\}$ olduğundan, $T|\mathcal{M}$ operatörü sıfırdan farklı devresel bir $\mathcal{M}_1$ alt-uzayına sahiptir ve $Z \neq 0$ olmak üzere $Z \in \mathcal{J}(T_2, T|\mathcal{M}_1)$ operatörü bulmak yeterli olacaktır. Son olarak, eğer $\theta \equiv m_T \equiv m_{T_2}$ ve $\theta' \equiv m_{T|\mathcal{M}_1}$ ise, $T|\mathcal{M}_1 \sim S(\theta') \sim T_2 \sim S(\theta)$ ve

$\theta'|\theta$ olur ve bu nedenle $\theta'|\theta$ ve θ' sabit olmadığında $\mathcal{J}(S(\theta), S(\theta'))$ içinde sıfırdan farklı operatörler olduğu kanıtlanır. Böyle operatörlerin varlığı ise, Teorem 2.7.5 nedeniyledir ve istenen elde edilmiş olur. □

Önerme 2.10.3. *C_0-sınıfının bir operatörü $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) T operatörünün katlılığı yoktur;

(ii) $\{T\}'$ komutatiftir;

(iii) T operatörünün minimal fonksiyonunun her θ iç böleni için, $m_{T|\mathcal{K}} \equiv \theta$ olacak şekilde T için tek bir $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ değişmez alt-uzayı vardır. Gerçekten, $\mathcal{K} = \ker\theta(T) = \overline{ran(m_T/\theta)(T)}$ olur.

Kanıt. Teorem 2.9.9 ve Teorem 2.10.2 nedeniyle açıktır. □

2.11 Jordan Operatörleri

Bu bölümde, operatörlerin daha genel bir ailesi olan ve Jordan operatörler olarak adlandırılan nesneler göz önüne alınacak, üzerinde tanımlı oldukları Hilbert uzayının ayrılabilir olduğu durumlar için onların tanımı verilecek ve Jordan operatörlerin sahip olduğu önemli bir özellik olan teklik özelliğinden bahsedilecektir. Ayrıca, Jordan operatörler ile ilgili olan bazı önemli teoremler ve sonuçlar verilecektir.

Tanım 2.11.1. *Her $j \geq 0$ için $\theta_{j+1}|\theta j$ olacak şekilde iç fonksiyonların bir dizisi $\Phi = \{\theta_j : j \geq 0\}$ olsun. Φ model fonksiyon olmak üzere aşağıda tanımlanan*

$$S(\Phi) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} S(\theta_j)$$

operatörü "Jordan operatör" olarak adlandırılır. Her $j \geq 0$ için, sabit bir $\theta \in H^\infty$ iç fonksiyonu için $\theta_j = \theta$ olduğu durumda $T = \bigoplus_{j=0}^{\infty} S(\theta)$ operatörü "düzgün Jordan operatör" olarak adlandırılır. Ayrıca $S(\Phi)$ operatörünün uzayı $H(\Phi)$ ile ifade edilecektir.

Gözlem 2.11.2. *Açıktır ki Jordan operatör, minimal fonksiyonu θ_0 olan C_0-sınıfından bir operatördür.*

Bilindiği üzere sonlu kümelerin kardinalitesi, kümenin eleman sayısını gösteren bir doğal sayıdır. Sonsuz kümelerin eleman sayısını tanımlamak için sonlu ötesi kardinal sayılar vardır. Bütün sonsuz kümeler aynı kardinaliteye sahip değildir. Sonsuz kümelerin kardinaliteleri $\aleph$ harfi ile tanımlanır.
Bir "ordinal sayı", "$\in$" özelliğine göre geçişmeli bir α kümesidir. Yani, $\beta \in \gamma \in \alpha$, "$\in$" özelliği tarafından tam sıralı ve $\beta \in \alpha$ demektir. Böylece, $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\ldots$ ve genel olarak $\alpha = \{\beta : \beta \in \alpha\}$ demektir. Eğer α, β ordinaller ve $\alpha \in \beta$ ise alışıldığı gibi $\alpha < \beta$ yazılacaktır. Bir α ordinal sayısı, daha küçük bir ordinal sayı ile eş kuvvetli değilse "kardinal sayı" olarak adlandırılır. Böylece 0,1,2, ... kardinal sayıları ve ilk sonsuz kardinal sayı olan ω aynı zamanda bir kardinal sayıdır ve genellikle $\aleph_0$ olarak gösterilir. Ordinaller iyi sıralıdır ve dolayısıyla

"$\beta \leq \alpha$ ve β ile α eş kuvvetli olacak şekilde $card(\alpha)$, ilk β sayısına eşit olur."

tanımı anlamlıdır. Böylece her ordinal, bir kardinal sayı ile ilişkilendirilir. Seçme aksiyomu nedeniyle her M kümesi bir α kardinal sayısı ile eş kuvvetlidir ve bu durumda $\alpha = card(M)$ yazılır.

Tanım 2.11.3. *T operatörü C_0-sınıfından olsun. ν_T olarak gösterilecek olan "katlılık fonksiyonu" her θ iç fonksiyonu için $\nu_T(\theta) = \mu_{T|\overline{ran(\theta(T))}}$ kardinal sayısı ile ilişkilendirilir.*

Lemma 2.11.4. *T ve T' operatörleri C_0-sınıfından olsun. Eğer $T \prec T'$ ise her θ iç fonskiyonu için $\nu_{T'}(\theta) \leq \nu_T(\theta)$ olur. Özellikle, ν_T katlılık fonksiyonu T operatörünün hemen hemen benzerlik değişmezi olur.*

Kanıt. Eğer $X \in \mathcal{J}(T, T')$ herhangi bir operatör ise her θ iç fonksiyonu için $\theta(T')X = X\theta(T)$ elde edilir. Eğer, buna ek olarak X bir hemen hemen afin dönüşüm ise $X|\overline{ran\theta(T)}$ hemen hemen afinitesi nedeniyle $T|\overline{ran\theta(T)} \prec T'|\overline{ran\theta(T')}$ olduğu anlaşılır. Dolayısıyla bir önceki tanım ve bir operatörün katlılığının bilinen özellikleri ile $\nu_{T'}(\theta) \leq \nu_T(\theta)$ elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Teorem 2.11.5. *Φ ve Φ' model fonksiyonlar ve $S(\Phi) \prec S(\Phi')$ ise $\Phi \equiv \Phi'$ ve dolayısıyla $S(\Phi) = S(\Phi')$ olur.*

Kanıt. $\Phi = \{\theta_\alpha\}$ ve $\Phi' = \{\theta'_\alpha\}$ olduğu varsayılsın. Eğer $S(\Phi) \prec S(\Phi')$ ise, her θ iç fonksiyonu için $\nu_{S(\Phi')}(\theta) \leq \nu_{S(\Phi)}(\theta)$ eşitsizliği Lemma 2.11.4 nedeniyle sağlanır. Böylece her α ordinali için,

$$\{\theta : \nu_{S(\Phi)}(\theta) \leq card(\alpha)\} \subset \{\theta : \nu_{S(\Phi')}(\theta) \leq card(\alpha)\}$$

olur ve $\theta'_\alpha = \bigwedge\{\theta : \nu_{S(\Phi')}(\theta) \leq card(\alpha)\}$ böler $\theta_\alpha = \bigwedge\{\theta : \nu_{S(\Phi)}(\theta) \leq card(\alpha)\}$ olur. Son olarak, $S(\Phi')^* \prec S(\Phi)^*$ elde edilir ve bu iki operatör sırasıyla $\{\theta'^{\sim}_\alpha\}$ ve $\{\theta^{\sim}_\alpha\}$ model fonksiyonları ile belirlenen Jordan operatörlere birimsel denktir. İspatın ilk kısmı nedeniyle $\theta^{\sim}_\alpha | \theta'^{\sim}_\alpha$ ve böylece $\theta_\alpha | \theta'_\alpha$ elde edilir. Böylece $\theta_\alpha \equiv \theta'_\alpha$ sonucuna ulaşılır. □

Jordan operatörler, C_0-sınıfı operatörlerinin çalışmasında temel öneme sahiptirler. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 2.11.6. *Ayrılabilir bir Hilbert uzayı üzerinde etki eden C_0-sınıfının her T operatörü için, T operatörüne hemen hemen benzer olan bir $S(\Phi)$ Jordan operatörü vardır. Dahası, $S(\Phi)$ operatörü $S(\Phi) \prec T$ ve $T \prec S(\Phi)$ ilişkilerine göre tek türlü belirlidir.*

Kanıt. $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve $\mathcal{H}$ ayrılabilir olsun. $\mathcal{H}$ içinde yoğun bir dizi $\{h_n : n \geq 0\}$ ve her h_n dizisinin sonsuz kez tekrar edildiği bir dizi $\{k_n : n \geq 0\}$ olsun. Aşağıdaki özellikler ile T operatörü için $\mathcal{M}_{-1}$,$\mathcal{M}_0$,$\mathcal{M}_1$,... değişmez alt-uzayları ve $\mathcal{H}$ içinde f_0,f_1,f_2,... vektörleri tümevarımsal olarak inşa edilebilir:

(1) $\mathcal{M}_{-1} = \mathcal{H}$;

(2) $f_j = \mathcal{M}_{j-1}$, $m_{f_j} = m_{T|\mathcal{M}_{j-1}}$;

(3) $\mathcal{K}_j = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n f_j$ olduğunda $\mathcal{K}_j \vee \mathcal{M}_j = \mathcal{M}_{j-1}$, $\mathcal{K}_j \cap \mathcal{M}_j = \{0\}$;

(4) $\left\| k_j - P_{\mathcal{K}_0 \vee \mathcal{K}_1 \vee \cdots \mathcal{K}_j} k_j \right\| \leq 2^{-j}$

$j = 0,1,2,\ldots$ için sağlanır. $j < n$ için f_j ve $\mathcal{M}_j$ tanımlı olsun ve f_n ve $\mathcal{M}_n$ inşa edilmeye çalışılsın. (3) özelliğinin tekrarlanmasıyla

$$\mathcal{H} = \mathcal{M}_{-1} = \mathcal{K}_0 \vee \mathcal{M}_0 = \mathcal{K}_0 \vee \mathcal{K}_1 \vee \mathcal{M}_1 = \cdots = \mathcal{K}_0 \vee \mathcal{K}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{K}_{n-1} \vee \mathcal{M}_{n-1}$$

bulunur ve böylece

$$\|k_n - u_n - v_n\| \leq 2^{-n-1} \tag{2.7}$$

olacak şekilde $u_n \in \mathcal{K}_0 \vee \mathcal{K}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{K}_{n-1}$ ve $v_n \in \mathcal{M}_{n-1}$ vektörleri bulunabilir. Sonra, $m_{f_n} = m_{T|\mathcal{M}_{n-1}}$ ve

$$\|v_n - f_n\| \leq 2^{-n-1} \tag{2.8}$$

olacak şekilde bir $f_n \in \mathcal{M}_{n-1}$ vektörü bulunabilir (f_n bir $(T|\mathcal{M}_{n-1})$-maksimal vektördür).

Teorem 2.10.1 Splitting Principle 'ın $T|\mathcal{M}_{n-1}$ operatörüne uygulanması, $j = n$ için (3) özelliğini sağlayan bir $\mathcal{M}_n$ değişmez alt-uzayının varlığını ispatlar.

f_n fonksiyonunun seçimiyle $j = n$ için (2) sağlandığından geriye (4) özelliğini kanıtlamak kalır. (2.7) ve (2.8) eşitsizlikleri nedeniyle de

$$\|k_n - P_{\mathcal{K}_0 \vee \mathcal{K}_1 \vee \cdots \mathcal{K}_n} k_n\| \leq \|k_n - u_n - f_n\| \leq \|k_n - u_n - v_n\| + \|v_n - f_n\| \leq 2^{-n}$$

olduğu açıktır. Böylece $\{f_j : j \geq 0\}$ ve $\{\mathcal{M}_j : j \geq 0\}$ varlıkları indüksiyon ile ispatlanmış olur.

(4) özelliğinin önemli bir sonucu

$$\mathcal{H} = \bigvee_{j=0}^{\infty} \mathcal{K}_j$$

olmasıdır. Gerçekten,

$$\lim_{n\to\infty} dist(k_n, \bigvee_{j=0}^{\infty} \mathcal{K}_j) = 0$$

ve her bir h_i vektörü, k_n içinde sonsuz kez tekrarlandığından her i için $h_i \in \bigvee_{j=0}^{\infty} \mathcal{K}_j$ olur.

Şimdi, $\theta_j = m_{f_j}$ olmak üzere $\Phi = \{\theta_j : j \geq 0\}$ model fonksiyonu tanımlansın. (2) ilişkisi ve $\mathcal{M}_{j+1} \subset \mathcal{M}_j$ olduğundan her j için $\theta_{j+1}|\theta_j$ olur ve dolayısıyla $S(\Phi)$ bir Jordan operatördür. θ_j minimal fonksiyonu ile $T|\mathcal{K}_j$ operatörünün katlılığı yoktur. Dolayısıyla Önerme 2.9.2 nedeniyle $XS(\theta_j) = (T|\mathcal{K}_j)X_j$ olacak şekilde bir X_j hemen hemen afin dönüşümü vardır. Şimdi,

$$\bigoplus_{j=0}^{\infty} g_j \in H(\Phi) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} H(\theta_j) \quad \text{için} \qquad X(\bigoplus_{j=1}^{\infty} g_j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-j}}{\|X_j\|} X_j g_j$$

formülü ile $XS(\Phi) = TX$ eşitliği sağlanacak şekilde bir X operatörü tanımlanabilir. Açıktır ki, X operatörü sınırlıdır. X_j nin görüntüsü $\mathcal{K}_j$ içinde yoğundur ve $\mathcal{K}_j$ uzayları $\mathcal{H}$ uzayını üretir. Böylece X operatörü yoğun görüntü kümesine sahiptir. X operatörünün bire-bir olduğunu ispatlamak için, $g \neq 0$, $g = \bigoplus_{j=0}^{\infty} g_j \in \ker X$ olduğu varsayılsın ve $g_n \neq 0$ olacak şekilde n ilk tam sayı olsun. X operatörünün tanımı nedeniyle

$$\frac{X_n}{\|X_n\|} g_n = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j}}{\|X_{n+j}\|} X_{n+j} g_{n+j}$$

elde edilir. Böylece $X_n g_n$, $\bigvee_{j=1}^{\infty} \mathcal{K}_{n+j} \subset \mathcal{M}_n$' ye ait olan $\mathcal{K}_j$ uzayının sıfırdan farklı bir elemanıdır. (3) nedeniyle $\mathcal{K}_n \cap \mathcal{M}_n = \{0\}$ elde edilir. Bu nedenle $X_n g_n = 0$ ve $g_n = 0$ olur. Böylece bu çelişki nedeniyle X operatörü bire-bir olur. Dolayısıyla $TX = XS(\Phi)$ olacak şekilde bir X hemen hemen afin dönüşümü belirlenmiş olur.

Şimdiye kadar $S(\Phi) \prec T$ olacak şekilde bir $S(\Phi)$ Jordan operatörünün varlığı ispatlandı. Aynı argümanlar T^* operatörü için uygulanırsa, Jordan operatörlerin eşleniklerinin de Jordan operatörleri olması gerçeğinden $T \prec S(\Phi')$ olacak şekilde bir $S(\Phi')$ Jordan operatörünün varlığı sonucuna ulaşılır. Son olarak, $S(\Phi) \prec T \prec S(\Phi')$ olacak şekilde Φ ve Φ' herhangi model fonksiyonlar ise geçişme özelliğinden $S(\Phi) \prec S(\Phi')$ ve dolayısıyla Teorem 2.11.5 nedeniyle $S(\Phi) = S(\Phi')$ olur. Sonuç olarak, $S(\Phi) \sim T$ olur ve $S(\Phi)$ operatörü tek türlü belirlidir. □

Bir önceki teoremdeki $S(\Phi)$ operatörü, T operatörünün “Jordan modeli” olarak adlandırılır.

Tanım 2.11.7. *T operatörü C_0-sınıfından olsun. $M_T = M_T(\alpha)$ “model fonksiyonu”,*

$$M_T(\alpha) = \bigvee\{\theta : \nu_T(\theta) \leq card(\alpha)\}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 2.11.8. *C_0-sınıfının her T operatörü, $S(M_T)$ Jordan operatörüne hemen hemen benzerdir.*

Kanıt. [7, 5.25 Corollary]. □

Önerme 2.11.9. *C_0-sınıfının her T operatörü için $\mu_T = \mu_{T^*}$ olur.*

Kanıt. [7, 5.26 Corollary]. □

Önerme 2.11.10. *C_0-sınıfının bir operatörü T, T için değişmez bir alt-uzay $\mathcal{M}$ olsun. Bu durumda $\mu_{T|\mathcal{M}} \leq \mu_T$ olur.*

Kanıt. $(T|\mathcal{M})^* P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}} T^*$ elde edilir ve Lemma 2.1.11 nedeniyle $\mu_{(T|\mathcal{M})^*} \leq \mu_{T^*}$ olur. $T|\mathcal{M}$ operatörü C_0-sınıfından olduğundan bir önceki önerme nedeniyle $\mu_{T|\mathcal{M}} \leq \mu_T$ elde edilir. □

Şimdi, hemen hemen benzerlikten daha zayıf bir ilişki tanımlanacaktır.

Tanım 2.11.11. *$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ operatörleri verilsin. Eğer $XT = T'X$ olacak şekilde $X : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ bire-bir bir operatör varsa (veya denk olarak, bire-bir bir $X \in \mathcal{J}(T, T')$ varsa) “ T operatörü T' operatörünün içine oturtulabilir” denir ve $T \prec^i T'$ olarak gösterilir. Buna ek olarak, eğer X yoğun görüntü kümesine sahip ise “T operatörü T' operatörünün hemen hemen afin dönüşümüdür” denir ve $T \prec T'$ olarak gösterilir.*

Buna göre aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 2.11.12. *T ve T' operatörleri C_0-sınıfından ve $T \prec^i T'$ ise $\mu_T \leq \mu_{T'}$ olur.*

Kanıt. $X \in \mathcal{J}(T', T)$ bire-bir olsun. Bu durumda $X^* \in \mathcal{J}(T^*, T'^*)$ yoğun görüntü kümesine sahiptir ve Lemma 2.1.11 nedeniyle $\mu_{T^*} \leq \mu_{T'^*}$ eşitsizliği gerçeklenir. Son olarak Önerme 2.11.9 uygulanırsa istenen eşitsizlik elde edilir. □

Tanım 2.11.13. *$\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı olsun. Bir $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dönüşümü, eğer toplamsal ise ve $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathcal{H}$ için $A(\lambda x) = \overline{\lambda} A(x)$ oluyorsa "anti-lineer" olarak adlandırılır. Buna ek olarak, A izometrik ve üzerine ise "anti-birimsel operatör" olarak adlandırılır.*

Önerme 2.11.14. *Her $\theta \in H^\infty$ iç fonksiyonu için $S(\theta)^* J = JS(\theta)$ olacak şekilde $H(\theta)$ üzerinde bir J anti-birimsel operatörü vardır.*

Önerme 2.11.15. *$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörü C_0-sınıfından olsun. Sınırlı, bire-bir, yoğun görüntü kümesi ile eşlenik lineer bir $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operatörü $T^* J = JT$ olacak şekilde vardır.*

Kanıt. $\Phi = \{\theta_\alpha\}$ model fonksiyon olmak üzere, T operatörünün Jordan modeli $S(\Phi)$ olsun. Önerme 2.11.14 nedeniyle $S(\theta_\alpha)^* J_\alpha = J_\alpha S(\theta_\alpha)$ olacak şekilde $H(\theta)$ üzerinde J_α anti-birimsel operatörleri bulunabilir. Şimdi bir $X \in \mathcal{J}(T, S(\Phi))$ hemen hemen afin dönüşümü seçilsin ve

$$J = X^* (\bigoplus_\alpha J_\alpha) X$$

tanımlansın. Açıktır ki, J operatörü antilineer, bire-bir ve yoğun görüntü kümesine sahiptir. Ayrıca, $X^* \in \mathcal{J}(S(\Phi)^*, T^*)$ olduğundan $T^* J = JT$ eşitliği açıktır. □

Önerme 2.11.16. *T ve T' operatörleri C_0-sınıfından olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) $T \prec^i T'$;

(ii) $T^* \prec^i T'^*$;

(iii) Her θ iç fonksiyonu için $\nu_T(\theta) \leq \nu_{T'}(\theta)$ olur; ve

(iv) Her α ordinali için $M_T(\alpha) | M_{T'}(\alpha)$ olur.

Kanıt. J ve J' operatörleri Önerme 2.11.15 içindeki gibi $TJ = JT^*$ ve $T'^*J' = J'T'$ olacak şekilde antilineer olsunlar. Eğer $X \in \mathcal{J}(T,T')$ bire-bir ise $J'XJ \in \mathcal{J}(T^*,T'^*)$ bire-bir olur ve $(i) \Rightarrow (ii)$ gerçeklenir. Simetri nedeniyle (i) ve (ii) denktir. $T \prec^i T'$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, $\mathcal{J}(T,T')$ içinde X bir injeksiyon olduğunda, karşılıklı değişme işlemi $X|\overline{ran(\theta(T))}$ tarafından gerçekleşmektedir ve

$$T|\overline{ran(\theta(T))} \prec^i T'|\overline{ran(\theta(T'))}$$

olur. Dolayısıyla Önerme 2.11.12 nedeniyle $(i) \Rightarrow (iii)$ içermesi gerçeklenir. Şimdi (iii) kabul edilsin. Bu durumda açıktır ki,

$$\{\theta : \nu_T(\theta) \leq card(\alpha) \supset \{\theta : \nu_{T'}(\theta) \leq card(\alpha)\}$$

elde edilir. Böylece her α ordinali için $M_T(\alpha) = \bigwedge\{\theta : \nu_T(\theta) \leq card(\alpha)\}$ böler $M_{T'}(\alpha)$ olur. Son olarak, (iv) kabul edilirse, Önerme 2.7.2 nedeniyle $S(M_T)$ operatörü $S(M_{T'}(\alpha))$ operatörünün değişmez bir alt-uzaya kısıtlanışına denk olur ve açıkça görülebileceği gibi $S(M_T) \prec^i S(M_{T'})$ sağlannır. "$\prec^i$ " bağıntısının geçişme özelliğinden $T \prec^i T'$ gerçeklenir ve dolayısıyla $(iv) \Rightarrow (i)$ içermesi de gerçklenir, böylece ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 2.11.17. *T ve T' operatörleri C_0-sınıfından olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) $T \prec T'$;

(ii) $T \prec^i T'$ ve $T' \prec^i T$;

(iii) Her θ iç fonksiyonu için $\nu_T(\theta) = \nu_{T'}(\theta)$ olur; ve

(iv) $T \sim T'$ olur.

Kanıt. T operatörünün Jordan modeli $S(\Phi)$ ve $T \prec T'$ olduğu varsayılsın. Geçişme özelliği nedeniyle $S(\Phi) \prec T'$ elde edilir ve dolayısıyla T' operatörünün Jordan modeli $S(\Phi)$ olur. Sonuç olaraki T ve T' operatörleri hemen hemen benzerdir, yani $(i) \Rightarrow (iv)$ içermesi sağlanır. $(iv) \Rightarrow (ii)$ içermesinin gerçeklendiği açıktır. Önerme 2.11.16 nedeniyle $(ii) \Rightarrow (iii)$ gerektirmesi de gerçeklenir. Eğer (iii) kabul edilirse, aynı önerme nedeniyle her α ordinali için $M_T(\alpha) \equiv M_{T'}(\alpha)$ olur. Böylece T ve T' operatörleri aynı Jordan modele sahiptirler ve $T \prec T'$ olur. □

Önerme 2.11.16 ve önerme 2.11.17 birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.11.18. *T ve T' operatörleri C_0-sınıfından olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) $T \prec T'$;

(ii) $T \prec^i T'$ *ve* $T' \prec^i T$;

(iii) $T \sim T'$.

Dahası, $T \prec^i T'$ olması için gerek ve yeter koşul $T^* \prec^i T'^*$ olmasıdır. Eğer $\bigoplus_{j=0}^{\infty} S(\theta_j^{(1)})$ ve $\bigoplus_{j=0}^{\infty} S(\theta_j^{(2)})$ sırasıyla T ve T' operatörlerinin Jordan modelleri ise bu durumda $T \prec^i T'$ olması için gerek ve yeter koşul her $j \geq 0$ için $\theta_j^{(1)}$ böler $\theta_j^{(2)}$ olmasıdır.

Kanıt. Önerme 2.11.16 ve Önerme 2.11.17 kullanılarak elde edilir. □

Önerme 2.11.19. *C_0-sınıfının bir operatörü T, T için değişmez bir alt-uzay $\mathcal{M}$ olsun. $\{T\}'$ içinde X ve Y operatörleri*

$$\mathcal{M} = \overline{ranX} = \ker Y$$

olacak şekilde vardır.

Kanıt. $T|\mathcal{M} \prec^i T$ olduğu açıktır ve dolayısıyla $(T|\mathcal{M})^* \prec^i T^*$ olur. $X^* : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ operatörü $T^*X^* = (T|\mathcal{M})^*X^*$ özelliği ile bire-bir olsun. Bu durumda, $X : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ operatörü yoğun görüntü kümesine sahiptir ve $\mathcal{H}$ üzerinde bir operatör olarak kabul edildiğinde, $X \in \{T\}'$ olur. Aynı argüman T^* operatörü ve $\mathcal{H} \ominus \mathcal{M}$ için uygulanırsa $\overline{ranY^*} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{M}$ olacak şekilde $Y \in \{T\}'$ operatörünün varlığı görülür. Kolayca görülebileceği gibi $\mathcal{M} = \ker Y^*$ eşitliği sağlanır ve ispat tamamlanır. □

2.12 Çift-dikey Sistem ve Hemen Hemen Benzerlik Yörüngeleri

Bir T operatörü için değişmez bir $\mathcal{M}$ alt-uzayı verilsin. $P_{\mathcal{M}^\perp}T|\mathcal{M}^\perp$ sıkıştırılması, $T_{\mathcal{M}^\perp}$ olarak ifade edilecektir. Düzgün Jordan operatörler ile ilgili aşağıdaki iki sonuç [8] içinde bulunabilir.

Önerme 2.12.1. *$T = \bigoplus_{j=0}^{\infty} S(\theta)$ operatörü için değişmez bir alt-uzay $\mathcal{M}$ ve $\bigoplus_{j=0}^{\infty} S(\theta_j)$, $\bigoplus_{j=0}^{\infty} S(\psi_j)$ sırasıyla $T|\mathcal{M}$ ve $T_{\mathcal{M}^\perp}$ operatörlerinin Jordan modelleri olsun.Bu durumda θ_0, $\psi_0|\theta$ ve her i, $j \geq 0$ için $\theta|\theta_i\psi_j$ olur.*

Bu önermenin ispatı verilmeden önce aşağıdaki gözlemi vermek faydalı olacaktır.

Gözlem 2.12.2. *C_0-sınıfının bir operatörü $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, T için değişmez bir alt-uzay $\mathcal{H}'$ ve $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \oplus (\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}')$ ayrışımına göre T operatörünün üçgenleştirilmesi*

$$T = \begin{bmatrix} T' & X \\ 0 & T'' \end{bmatrix}$$

olsun. Ayrıca $\mathcal{H}$ uzayının ayrılabilir olduğu ve T, T' ve T'' operatörlerinin Jordan modellerinin sırasıyla $\bigoplus_{j=0}^{\infty} S(\theta_j)$, $\bigoplus_{j=0}^{\infty} S(\phi_j)$ ve $\bigoplus_{j=0}^{\infty} S(\psi_j)$ olduğu varsayılsın. Bu durumda her $n \geq 0$ için

$$\theta_0\theta_1 \dots \theta_n|\phi_0\phi_1 \dots \phi_n\psi_0\psi_1 \dots \psi_n$$

elde edilir.

Şimdi Önerme 2.12.1 için ispat verilebilir.

Kanıt. Gözlem 2.12.2 nedeniyle her $n \geq 0$ için $\theta^n| \prod_{j=0}^{n-1} \phi_j\psi_j$ olur. Ayrıca Lemma 2.3.3 nedeniyle $|\theta(\lambda)|^n \leq \prod_{j=0}^{n-1} |\phi_j(\lambda)\psi_j(\lambda)|$ elde edilir ve dolayısıyla $\lambda \in \mathbb{D}$ için $|\theta(\lambda)| \leq \prod_{j=0}^{n-1} |\phi_j(\lambda)|^{1/n} |\psi_j(\lambda)|^{1/n}$ olur. $\lambda \in \mathbb{D}$ için $|\phi_j(\lambda)|$ ve $|\psi_j(\lambda)|$ dizileri artandır ve böylece $\lambda \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{n-1} |\phi_j(\lambda)|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |\phi_n(\lambda)|,$$
$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{n-1} |\psi_j(\lambda)|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |\psi_n(\lambda)|$$

olur. Ayrıca, $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerinin en büyük ortak iç bölenleri sırasıyla ϕ ve ψ ise, bu durumda

$$|\phi(\lambda)| = \lim_{n\to\infty} |\phi_n(\lambda)| \text{ ve } |\psi(\lambda)| = \lim_{n\to\infty} |\psi_n(\lambda)|$$

eşitlikleri sağlanır. Sonuç olarak $|\theta(\lambda)| \leq |\phi(\lambda)|\,|\psi(\lambda)|$, ve böylece θ böler $\phi\psi$ elde edilir. $i,\, j \geq 0$ için $\phi\psi|\phi_i\psi_j$ olduğundan ilk iddia da gerçeklenir. $\square$

$T = \bigoplus_{j=1}^{\infty} S(\theta)$ operatörü için bir $\mathcal{M}$ değişmez alt-uzayı sabitlensin. Ayrıca, $T|\mathcal{M}$ ve $T_{\mathcal{M}^\perp}$ operatörlerinin Jordan modelleri sırasıyla $\bigoplus_{j=0}^{\infty} S(\phi_j)$ ve $\bigoplus_{j=0}^{\infty} S(\psi_j)$ olsun ve

$$j \text{ çift iken }, \quad \gamma_j = \theta/\phi_{j/2}$$

$$j \text{ tek iken }, \quad \gamma_j = \psi_{(j-1)/2}$$

olmak üzere

$$\mathcal{N} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} (\gamma_j H^2 \ominus \theta H^2)$$

olarak ifade edilsin. T operatörü için değişmez alt-uzayların kümesinin Lat(T) ile ifade edildiği hatırlansın. Bundan sonraki amaç, $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ uzaylarının hemen hemen benzerlik yörüngelerinin aynı olduğunu göstermektir. Bunun için öncelikle aşağıdaki tanım verilmelidir.

Tanım 2.12.3. *$n \geq 0$ doğal sayısı verilsin. $\mathcal{M}$ uzayı için sıralı n'li bir "çift-dikey sistem" aşağıdaki özellikleri sağlayan $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$ ve $\mathcal{H}_0', \mathcal{H}_1', \ldots, \mathcal{H}_n'$ uzaylarının bir ailesidir:*

(i) $j = 0, 1, \ldots, n$ *için* $\mathcal{H}_j \in Lat(T)$ *ve* $\mathcal{H}_j' \in Lat(T^*)$*;*

(ii) $j = 0, 1, \ldots, n$ *için* $T|\mathcal{H}_j \sim T_{\mathcal{H}_j'} \sim S(\theta)$*;*

(iii) $j \neq k$ *ve* $0 \leq j, k \leq n$ *için* $\mathcal{H}_j \perp \mathcal{H}_k'$*;*

(iv) $j = 0, 1, \ldots, n$ *için* $P_{\mathcal{H}_j'}|\mathcal{H}_j$ *hemen hemen afin bir dönüşümdür;*

(v) $j = 0, 1, \ldots, n$ *için* $\mathcal{M}_j = \mathcal{M} \cap \mathcal{H}_j$, $\mathcal{M}_j' = \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{H}_j{}^\perp$, $\mathcal{K}_{-1} = \mathcal{M}$, $\mathcal{K}_{-1}' = \mathcal{M}^\perp$ *olmak üzere* $\mathcal{K}_j = \mathcal{M} \cap (\mathcal{H}_0' \vee \cdots \vee \mathcal{H}_j')$ *ve* $\mathcal{K}_j' = \mathcal{M}^\perp \cap (\mathcal{H}_0 \vee \cdots \vee \mathcal{H}_j)^\perp$ *olur.*

Bu durumda aşağıdakiler elde edilir:

(a) $0 \leq j \leq n$ *için* $\mathcal{K}_{j-1} = \mathcal{M}_j \vee \mathcal{K}_j$*;*

(b) $0 \leq j \leq n$ *için* $\mathcal{M}_j \cap \mathcal{K}_j = \{0\}$*;*

(c) j *çift ise* $T|\mathcal{M}_j \sim S(\phi_{j/2})$*;*

(d) j *tek ise* $T|\mathcal{M}_j \sim S(\theta/\psi_{(j-1)/2})$*;*

(e) $0 \leq j \leq n$ *için* $\mathcal{K}_{j-1}{}' = \mathcal{M}_j{}' \vee \mathcal{K}_j{}'$*;*

(f) $0 \leq j \leq n$ *için* $\mathcal{M}_j{}' \cap \mathcal{K}_j{}' = \{0\}$*;*

(g) j *çift ise* $T_{\mathcal{M}_j{}'} \sim S(\theta/\phi_{j/2})$*;*

(h) j *tek ise* $T_{\mathcal{M}_j{}'} \sim S(\psi_{(j-1)/2})$*.*

Lemma 2.12.4. *$\mathcal{M}$ uzayı için sıralı n'li bir çift-dikey sistem $\{\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_j{}'\}_{j=0}^{n}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{M}$ uzayı için sıralı $(n+1)$'li bir çift-dikey sistem $\{\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_j{}'\}_{j=0}^{n+1}$ olacak şekilde $\mathcal{H}_{n+1} \in Lat(T)$ ve $\mathcal{H}_{n+1}{}' \in Lat(T^*)$ uzayları vardır. Ayrıca, bu $\mathcal{H}_{n+1}$ ve $\mathcal{H}_{n+1}{}'$ uzayları aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde seçilebilir:*

(i) Eğer n çift, $\epsilon > 0$, $\mathcal{K}_n$ içinde verilen bir vektör x ve $(\mathcal{H}_0 \vee \cdots \vee \mathcal{H}_n)^{\perp}$ içinde verilen bir vektör y ise $dist(x, \mathcal{M}_{n+1}) < \epsilon$ ve $dist(y, \mathcal{H}_{n+1}{}') < \epsilon$ olur.

(ii) Eğer n tek, $\epsilon > 0$, $\mathcal{K}_n{}'$ içinde verilen bir vektör x' ve $(\mathcal{H}_0{}' \vee \cdots \vee \mathcal{H}_n{}')^{\perp}$ içinde verilen bir vektör y' ise $dist(x', \mathcal{M}_{n+1}{}') < \epsilon$ ve $dist(y', \mathcal{H}_{n+1}) < \epsilon$ olur.

Kanıt. [8, Lemma 2.4]. □

Tanım 2.12.5. *Bir $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörünün tüm değişmez alt-uzaylarının örgüsü üzerinde bir denklik bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır:*
$\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ değişmez iki alt-uzay olsun. $\overline{X\mathcal{M}} = \mathcal{N}$ ve $\overline{Y\mathcal{N}} = \mathcal{M}$ olacak şekilde T operatörü ile değişmeli olan X ve Y hemen hemen afin dönüşümleri varsa (yani, X, $Y \in \{T\}'$ ise) "$\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ değişmez alt-uzayları denktir" denir. Bir alt-uzayın denklik sınıfı o alt-uzayın "hemen hemen benzerlik yörüngesi" olarak adlandırılır.

Teorem 2.12.6. *θ bir iç fonksiyon, n bir doğal sayı ve $T = S(\theta)^{(n)}$ olsun. Eğer $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ uzayları T operatörü için değişmez alt-uzaylar ve $T|\mathcal{M} \sim T|\mathcal{N}$ ise bu durumda $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ uzaylarının hemen hemen benzerlik yörüngeleri aynıdır.*

Teorem 2.12.7. *T operatörü için değişmez bir alt-uzay $\mathcal{M}$, $T|\mathcal{M}$ ve $T_{\mathcal{M}^\perp}$ operatörlerinin Jordan modelleri sırasıyla $\bigoplus_{j=0}^{\infty} S(\phi_j)$ ve $\bigoplus_{j=0}^{\infty} S(\psi_j)$ olsun.*

$$j \text{ çift iken }, \quad \gamma_j = \theta/\phi_{j/2}$$

$$j \text{ tek iken }, \quad \gamma_j = \psi_{(j-1)/2}$$

olmak üzere

$$\mathcal{N} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} (\gamma_j H^2 \ominus \theta H^2)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ uzaylarının hemen hemen benzerlik yörüngeleri aynı olur.

Kanıt. Bir önceki tanım nedeniyle, $\overline{X\mathcal{M}} = \mathcal{N}$ ve $\overline{Y\mathcal{N}} = \mathcal{M}$ olacak şekilde X, $Y \in \{T\}'$ hemen hemen afin dönüşümleri inşa edilmelidir. $\mathcal{M}$ içinde yoğun bir dizi $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ ve $\mathcal{M}^\perp$ içinde yoğun bir dizi $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$ olsun. Bu dizilerin içindeki her vektörün sonsuz kez tekrarlandığı varsayılsın. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots \in$ Lat(T) ve $\mathcal{H}_0', \mathcal{H}_1', \ldots \in Lat(T^*)$ uzayları tümevarımsal olarak inşa edilsin:

(1) Her $n \geq 0$ için $\mathcal{M}$ uzayı için sıralı n'li bir çift-dikey sistem $\{\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_i'\}_{i=0}^{n}$ olur ;

(2) n tek ise, $dist(x_{(n+1)/2}, \mathcal{M}_{n+1}) \leq 2^{-(n+1)}$ ve $dist(y_{(n+1)/2}, \mathcal{H}_0 \vee \cdots \vee \mathcal{H}_{n+1}) \leq 2^{-n}$;

(3) n çift ise, $dist(y_{n/2}, \mathcal{M}_{n+1}') \leq 2^{-(n+1)}$ ve $dist(x_{n/2}, \mathcal{H}_0' \vee \cdots \vee \mathcal{H}_{n+1}') \leq 2^{-n}$ olur.

$n = -1$ için Lemma 2.12.4 uygulandığında $\mathcal{H}_0$ ve $\mathcal{H}_0'$ uzaylarının varlığı görülür. $\{\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_i'\}_{i=0}^{n}$ çift-dikey sisteminin olduğu varsayılsın ve n tek olsun.
Şimdi, $\left\| y_{(n+1)/2} - u_{n+1} - v_{n+1} \right\| \leq 2^{(-n+1)}$ olacak şekilde $u_{n+1} \in \mathcal{H}_0' \vee \cdots \vee \mathcal{H}_n'$ ve $v_{n+1} \in (\mathcal{H}_0 \vee \cdots \vee \mathcal{H}_n)^\perp$ seçilebilir. Lemma 2.12.4 nedeniyle, sıralı $(n+1)$'li bir $\{\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_i'\}_{i=0}^{n+1}$ çift-dikey sistem olacak şekilde $\mathcal{H}_{n+1}$ ve $\mathcal{H}_{n+1}'$ uzayları bulunabilir ve $dist(x_{(n+1)/2}, \mathcal{M}_{n+1}) < 2^{-(n+1)}$, $dist(v_{n+1}, \mathcal{H}_{n+1}') < 2^{-(n+1)}$ olur. $\|f_{n+1} - v_{n+1}\| < 2^{-(n+1)}$ olacak şekilde $f_{n+1} \in \mathcal{H}_{n+1}$ seçilsin. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
&dist(y_{(n+1)/2}, \mathcal{H}_0 \vee \cdots \vee \mathcal{H}_{n+1}) \\
&\quad \leq \left\| y_{(n+1)/2} - u_{n+1} - f_{n+1} \right\| \\
&\quad \leq \left\| y_{(n+1)/2} - u_{n+1} - v_{n+1} \right\| + \| v_{n+1} - f_{n+1} \| \\
&\quad \leq 2^{(-n+1)} + 2^{(-n+1)} = 2^{-n}
\end{aligned}
$$

olur ve dolayısıyla (2) sağlanır.

Benzer şekilde, n çift ise $\left\| x_{n/2} - u_{n+1} - v_{n+1} \right\| \leq 2^{(-n+1)}$ olacak şekilde $u_{n+1} \in \mathcal{H}_0 \vee \cdots \vee \mathcal{H}_n$ ve $v_{n+1} \in ({\mathcal{H}_0}' \vee \cdots \vee {\mathcal{H}_n}')^{\perp}$ seçilebilir. Lemma 2.12.4 nedeniyle, sıralı $(n+1)$'li bir $\{\mathcal{H}_i, {\mathcal{H}_i}'\}_{i=0}^{n+1}$ çift-dikey sistem olacak şekilde $\mathcal{H}_{n+1}$ ve ${\mathcal{H}_{n+1}}'$ uzayları bulunabilir ve $dist(v_{n+1}, \mathcal{H}_{n+1}) < 2^{-(n+1)}$, $dist(y_{n/2}, {\mathcal{M}_{n+1}}') < 2^{-(n+1)}$ sağlanır. Yine $\| g_{n+1} - v_{n+1} \| < 2^{-(n+1)}$ olacak şekilde $g_{n+1} \in {\mathcal{H}_{n+1}}'$ seçilirse

$$
\begin{aligned}
&dist(x_{n/2}, {\mathcal{H}_0}' \vee \cdots \vee {\mathcal{H}_{n+1}}') \\
&\quad \leq \left\| x_{n/2} - u_{n+1} - g_{n+1} \right\| \\
&\quad \leq \left\| x_{n/2} - u_{n+1} - v_{n+1} \right\| + \| v_{n+1} - g_{n+1} \| \\
&\quad \leq 2^{(-n+1)} + 2^{(-n+1)} = 2^{-n}
\end{aligned}
$$

olur ve dolayısıyla (3) sağlanır. Bu ise $\mathcal{H}_i$ ve ${\mathcal{H}_i}'$ uzaylarının tümevarımsal inşasını tamamlar.

x_j ve y_j sonsuz kez tekrarlandığından x_j, $y_j \in \bigvee_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_i$ olur. Bu ise $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^{\perp} \subset \bigvee_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_i$ olması demektir. Benzer şekilde, $\mathcal{H} = \bigvee_{i=0}^{\infty} {\mathcal{H}_i}'$ eşitliği elde edilir.

$(T|\mathcal{H}_j)Y = Y_j S(\theta)$ olacak şekilde $Y_j : H(\theta) \to \mathcal{H}_j$ hemen hemen afin bir dönüşüm olsun. $\|Y_j\| \leq 2^{-j}$ olduğu varsayılsın. $h = \bigoplus_{i=0}^{\infty} h_i \in \mathcal{H}$ olduğunda $Y \in \{T\}'$ operatörü

$$
Y(\bigoplus_{i=0}^{\infty} h_i) = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i h_i
$$

olarak tanımlansın. Y_i hemen hemen afin bir dönüşüm olduğundan her $\mathcal{H}_i$ uzayı $\overline{Y\mathcal{H}}$ tarafından içerilir ve dolayısıyla Y operatörü yoğun görüntü kümesine sahiptir. Ayrıca $P_{{\mathcal{H}_n}'} Y(\bigoplus_{i=0}^{\infty} h_i) = P_{{\mathcal{H}_n}'} Y_n h_n$ elde edilir ve böylece $Y(\bigoplus_{i=0}^{\infty} h_i) = \{0\}$ olması $P_{{\mathcal{H}_n}'} Y_n h_n = \{0\}$ demektir. Dolayısıyla $P_{{\mathcal{H}_n}'} Y_n h_n = (P_{{\mathcal{H}_n}'}|\mathcal{H}_n) Y_n$ hemen hemen bir afin dönüşüm olduğundan her n için $h_n = \{0\}$ olur ve Y hemen hemen afin bir dönüşümdür. Şimdi,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_i &= \theta/\phi_{i/2}H^2 \ominus \theta H^2 \quad i \ \text{ tek },\\ &= \psi/_{(i-1)/2}H^2 \ominus \theta H^2 \quad i \ \text{ çift },\end{aligned}$$

olsun. Önerme 2.10.3 nedeniyle $\overline{Y_i\mathcal{N}_i} = \mathcal{M}_i$ elde edilir ve böylece $\overline{Y\mathcal{N}} = \mathcal{M}$ olur. Son olarak, $\overline{X\mathcal{M}} = \mathcal{N}$ olacak şekilde X hemen hemen afin dönüşümü kurulacaktır. $X_i(T_i|\mathcal{H}_i{}') = S(\theta)X_i$ ve $\|X_i\| \leq 2^{-i}$ olacak şekilde $X_i : \mathcal{H}_n{}' \to H(\theta)$ hemen hemen afin dönüşümleri sabitlensin. $X \in \{T\}'$ operatörü $Xh = \bigoplus_{i=0}^{\infty} X_i P_{\mathcal{H}_i{}'} h$ olarak tanımlansın.

$$\begin{aligned}\ker X &= \bigcap\{\ker(X_n P_{\mathcal{H}_n{}'} : n \geq 0\}\\ &= \bigcap\{\ker P_{\mathcal{H}_n{}'} : n \geq 0\}\\ &= \bigcap\{\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_n{}' : n \geq 0\}\\ &= \mathcal{H} \ominus [\bigvee\{\mathcal{H}_n{}' : n \geq 0]\}\\ &= \{0\}\end{aligned}$$

olduğundan X bire-bir olur. Ayrıca, $h \in \mathcal{H}_n$ ise $i \neq n$ ve $k_n = X_n P_{\mathcal{H}_n{}'} h$ iken $k_i = 0$ olduğunda $Xh = \bigoplus_{i=0}^{\infty} k_i$ olur. $X_n P_{\mathcal{H}_n{}'}|\mathcal{H}_n$ hemen hemen afin bir dönüşüm olduğundan Önerme 2.10.3 nedeniyle de

$$\overline{X\mathcal{M}} = \bigvee_{i=0}^{\infty} X\mathcal{M}_i = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \overline{X_i P_{\mathcal{H}_i{}'} \mathcal{M}_i} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{N}_i = \mathcal{N}$$

eşitliği gerçeklenir. □

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.12.8. *T operatörü için değişmez alt-uzaylar $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ olsun. $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ uzaylarının hemen hemen benzerlik yörüngelerinin aynı olması için gerek ve yeter koşul $T|\mathcal{M}_1 \sim T|\mathcal{M}_2$ ve $T_{\mathcal{M}_1{}^\perp} \sim T_{\mathcal{M}_2{}^\perp}$ olmasıdır.*

Önerme 2.12.9. *$T_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ ve $T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ operatörleri C_0-sınıfından, $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{H}_1$, $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{H}_2$ sırasıyla T_1 ve T_2 için değişmez alt-uzaylar olsun. $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, $T_1|\mathcal{M}_1 \sim T_2|\mathcal{M}_2$ ve $T_{2\mathcal{M}_2{}^\perp} \prec^i T_{1\mathcal{M}_1{}^\perp}$ olur.*

Kanıt. Varsayımdan, $XT_1 = T_2X$ ve $\overline{X\mathcal{M}_1} = \mathcal{M}_2$ olacak şekilde $X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ hemen hemen afin dönüşümü vardır. $X|\mathcal{M}_1$, $T_1|\mathcal{M}_1$ ve $T_2|\mathcal{M}_2$ arasında hemen

hemen afin bir dönüşüm olur ve Teorem 2.11.18 nedeniyle $T_1|\mathcal{M}_1 \sim T_2|\mathcal{M}_2$ olur. Şimdi,$A = P_{\mathcal{M}_2{}^\perp} X|\mathcal{M}_1$ olarak alınırsa $\ker A^* = \{h \in \mathcal{M}_2{}^\perp : X^* h \in \mathcal{M}_1\} = 0$ olur ve $X^* \mathcal{M}_2{}^\perp \subset \mathcal{M}_1{}^\perp$ elde edilir. Buna ek olarak,

$$P_{\mathcal{M}_2{}^\perp} X P_{\mathcal{M}_1{}^\perp} = P_{\mathcal{M}_2{}^\perp} X$$

ve

$$P_{\mathcal{M}_2{}^\perp} T_2 P_{\mathcal{M}_2{}^\perp} = P_{\mathcal{M}_2{}^\perp} T_2$$

olur. Bu ise,

$$\begin{aligned} A(P_{\mathcal{M}_1{}^\perp} T_1|\mathcal{M}_1{}^\perp) &= P_{\mathcal{M}_2{}^\perp} X T_1|\mathcal{M}_1{}^\perp \\ &= P_{\mathcal{M}_2{}^\perp} T_2 X|\mathcal{M}_1{}^\perp \\ &= (P_{\mathcal{M}_2{}^\perp} T_2|\mathcal{M}_2{}^\perp) A, \end{aligned}$$

olması demektir ve böylece

$$(P_{\mathcal{M}_2{}^\perp} T_2|\mathcal{M}_2{}^\perp)^* \prec^i (P_{\mathcal{M}_1{}^\perp} T_1|\mathcal{M}_1{}^\perp)^*$$

olur. Teorem 2.11.18 nedeniyle

$$P_{\mathcal{M}_2{}^\perp} T_2|\mathcal{M}_2{}^\perp \prec^i P_{\mathcal{M}_1{}^\perp} T_1|\mathcal{M}_1{}^\perp$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. $\square$

$T_1 = T_2$ düzgün Jordan operatörler olduğunda önceki önermemin tersinin de doğru olduğu, bir sonraki bölümde verilecek olan ana sonuç ile görülecektir.

Bölüm 3

DÜZGÜN JORDAN OPERATÖRLERİ

Lemma 3.0.10. *$\theta \in H^\infty$ iç fonksiyonunun iç bölenleri ϕ, $\psi \in H^\infty$ olsun. θ/ϕ böler ψ olduğu kabul edilsin ve $w = \psi/(\theta/\phi)$ olsun. Bu durumda her $g \in \psi H^2 \ominus \theta H^2$ için $w(S(\theta))f = g$ ve $\|f\| = \|g\|$ olacak şekilde $f \in (\theta/\phi)H^2 \ominus \theta H^2$ bulunabilir.*

Kanıt. $g \in \psi H^2 \ominus \theta H^2$ sabitlensin. Önerme 2.7.2 göz önüne alındığında

$$w(S(\theta))((\theta/\phi)H^2 \ominus \theta H^2) = (w\theta/\phi)(S(\theta))(H^2 \ominus \theta H^2) = \psi H^2 \ominus \theta H^2$$

elde edilir. Böylece $w(S(\theta))f_0 = g$ olacak şekilde $f_0 \in (\theta/\phi)H^2 \ominus \theta H^2$ bulunabilir. $f = P_{H(\theta/w)}f_0$ olsun. Bu durumda $f = f_0 + (\theta/w)h$ olacak şekilde bir $h \in H^2$ fonksiyonu vardır, bu nedenle $f = f_0 + (\theta/\phi)(\theta/\psi)h \in (\theta/\phi)H^2$ ve böylece $f \in H(\theta/w) \subset H(\theta)$ olduğundan $f \in +(\theta/\phi)H^2 \ominus \theta H^2$ olur. Dahası, $wf \in H(\theta)$ ve

$$g = w(S(\theta))f = P_{H(\theta)}wf = wf$$

ve w bir iç fonksiyon olduğundan, $\|g\| = \|f\|$ elde edilir. □

Aşağıdaki iki lemma, ana sonucun ispatı için önemli araçlardır.

Lemma 3.0.11. *$\theta \in H^\infty$ bir iç fonksiyon olsun. $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^\infty H(\theta)$ ve $T = \bigoplus_{n=0}^\infty S(\theta)$ olsun. θ fonksiyonunun iç bölenlerinin bir dizisi $(w_n)_{n=0}^\infty \in H^\infty$ ve pozitif sayıların sınırlı bir dizisi $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ olsun.*

$$X : H(\theta) \oplus \mathcal{H} \to H(\theta) \oplus \mathcal{H},$$

$$X(g \oplus (f_n)_n) = \left(g + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1} w_n(S(\theta))f_n\right) \oplus (c_n f_n)_n$$

olarak tanımlansın. Bu durumda X, $S(\theta) \oplus T$ ile değişmeli bir hemen hemen afinitedir.

Kanıt. X operatörünün birebir ve sınırlı olduğu görülmektedir. $G \oplus (F_n)_n \in H(\theta) \oplus \mathcal{H}$ alınsın. $m \geq 0$ için,

$$g_m = G - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(n+1)c_n} w_n(S(\theta))F_n \in H(\theta)$$

ve

$$u_m = (\frac{1}{c_0}F_0, \frac{1}{c_1}F_1, \ldots, \frac{1}{c_m}, 0, \ldots) \in \mathcal{H}$$

tanımlansın. Bu durumda,

$$X(g_m \oplus u_m) = G \oplus (F_1, \ldots, F_m, 0, \ldots)$$

elde edilir ve böylece

$$\lim_{m\to\infty} X(g_m \oplus u_m) = G \oplus (F_n)_n$$

olur. Bu ise, X operatörünün yoğun görüntü kümesine sahip olduğunu gösterir. Son olarak,

$$\begin{aligned} S(\theta \oplus T)X(g \oplus (f_n)_n) &= \left(S(\theta)g + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} S(\theta)w_n(S(\theta))f_n \right) \oplus (c_n S(\theta)f_n)_n \\ &= \left(S(\theta)g + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} w_n(S(\theta))S(\theta)f_n \right) \oplus \oplus(c_n S(\theta)f_n)_n \\ &= X(S(\theta) \oplus T)(g \oplus (f_n)_n)_n \end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır. □

Lemma 3.0.12. *$\psi_1, \psi_2 \in H^\infty$ iç fonksiyonlar ve $(\phi_n)_{n=0}^{\infty} \in H^\infty$ iç fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdaki bölünebilme ilişkileri varsayılsın:*

(i) ψ_2 böler ψ_1;

(ii) her $n \geq 0$ için ϕ_n böler θ ve ψ_1 böler θ;

(iii) her $n \geq 0$ için ϕ_{n+1} böler ϕ_n;

(iv) her $n \geq 0$ için θ/ϕ_n böler ψ_2.

$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H(\theta)$ ve her $n \geq 0$ için $w_n = \psi_2/(\theta/\phi_n)$ olsun.

$$X : H(\theta) \oplus \mathcal{H} \to H(\theta) \oplus \mathcal{H},$$

$$X(g \oplus (f_n)_n) = \left(g + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} w_n(S(\theta)) f_n\right) \oplus (c_n f_n)_n$$

olarak tanımlansın, $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif sayıların bir dizisidir ve

$$\lim_{m\to\infty} (m+1)c_m \left(\sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{|(n+1)c_n|^2}\right)^{1/2} = \lim_{m\to\infty} (m+1)c_m = 0 \tag{3.1}$$

olur. Bu durumda,

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} ((\theta/\phi_n)H^2 \ominus \theta H^2) \subset \mathcal{H},$$

$$\mathcal{N}_{\psi_1} = \psi_1 H^2 \ominus \theta H^2 \subset H(\theta),$$

$$\mathcal{N}_{\psi_2} = \psi_2 H^2 \ominus \theta H^2 \subset H(\theta)$$

olduğunda, $\overline{X(\mathcal{N}_{\psi_1} \oplus \mathcal{M})} = \mathcal{N}_{\psi_2} \oplus \mathcal{M}$ elde edilir.

Kanıt. ψ_2 böler ψ_1 olduğundan $\mathcal{N}_{\psi_1} \subset \mathcal{N}_{\psi_2}$ olur. Ayrıca Önerme 2.7.2 nedeniyle her $n \geq 0$ için

$$w_n(S(\theta))((\theta/\phi_n)H^2 \ominus \theta H^2) = \psi_2 H^2 \ominus \theta H^2 \tag{3.2}$$

olur. Bundan dolayı, $X(\mathcal{N}_{\psi_1} \oplus \mathcal{M}) \subset \mathcal{N}_{\psi_2} \oplus \mathcal{M}$ elde edilir. Şimdi $G \oplus (F_n)_n \in \mathcal{N}_{\psi_2} \oplus \mathcal{M}$, başka bir deyişle $G \in \psi_2 H^2 \ominus \theta H^2$ ve her $n \geq 0$ için $F_n \in (\theta/\phi_n)H^2 \ominus \theta H^2$ olsun. (3.2) eşitliğinden her $m \geq 0$ için

$$G - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(n+1)c_n} w_n(S(\theta)) F_n \in \psi_2 H^2 \ominus \theta H^2$$

olur. Dolayısıyla, her $m \geq 1$ için Lemma 3.0.10 kullanılarak

$$\frac{1}{m+1} w_n(S(\theta)) h_m = G - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{(n+1)c_n} w_n(S(\theta)) F_n \tag{3.3}$$

ve

$$\|h_m\| = (m+1) \left\| G - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{(n+1)c_n} w_n(S(\theta)) F_n \right\| \tag{3.4}$$

olacak şekilde bir $h_m \in (\theta/\phi_m)H^2 \ominus \theta H^2$ fonksiyonu bulunabilir. (3.3) eşitliği ve X operatörünün tanımı kullanılırsa,

$$X(0 \oplus (\frac{1}{c_0} F_0, \ldots, \frac{1}{c_{m-1}} F_{m-1}, h_m, 0, \ldots)) = G \oplus (F_0, \ldots, F_{m-1}, c_m h_m, 0, \ldots)$$

olur. Bu nedenle,

$$\left\| G \oplus (F_n)_n - X(0 \oplus (\frac{1}{c_0} F_0, \ldots, \frac{1}{c_{m-1}} F_{m-1}, h_m, 0, \ldots)) \right\|^2$$

$$= \|F_m - c_m h_m\|^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} \|F_n\|^2 \tag{3.5}$$

olur. Şimdi $m \to \infty$ iken bu son çokluğun 0'a yaklaştığı gösterilerek devam edilecektir. $w_n \in H^\infty$ bir iç fonksiyon olduğundan her $n \geq 0$ için $w_n(S(\theta))$ bir daralmadır. (4) eşitliği ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin standart uygulaması kullanılarak, her $m \geq 1$ için

$$\|h_m\| \leq (m+1)(\|G\| + \|(F_n)_n\| \, (\sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{|(n+1)c_n|^2})^{1/2})$$

elde edilir. Dolayısıyla $m \to \infty$ iken $c_m \|h_m\| \to 0$ olur. Gerçekten,

$$c_m \|h_m\| \leq (m+1)c_m \|G\| + (m+1)c_m \|(F_n)_n\| \, (\sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{|(n+1)c_n|^2})^{1/2}$$

ve (1)'den dolayı $m \to \infty$ iken sağ taraf 0'a gider, bu ise $m \to \infty$ iken (5) eşitliğinin 0'a gittiğini gösterir. Bu durumda, $\overline{X(\mathcal{N}_{\psi_1} \oplus \mathcal{M})} = \mathcal{N}_{\psi_2} \oplus \mathcal{M}$ olacak şekilde

$$\lim_{n\to\infty} X(0 \oplus (\frac{1}{c_0} F_0, \cdots, \frac{1}{c_{m-1}} F_{m-1}, h_m, 0, \cdots)) = G \oplus (F_n)_n$$

olur. □

(3.1) eşitliğini sağlayan bir $\{c_n\}_n$ dizisi indüksiyon ile kolayca inşa edilebilir. Şimdi ana sonuç verilebilir.

Teorem 3.0.13. *$T = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S(\theta)$, T için değişmez alt-uzaylar $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$ olması için gerek ve yeter koşul $T|\mathcal{M}_1 \sim T|\mathcal{M}_2$ ve $T_{\mathcal{M}_2^\perp} \prec^i T_{\mathcal{M}_1^\perp}$ olmasıdır.*

Kanıt. Gereklilik kısmı Önerme 2.12.9 nedeniyle sağlanır. Şimdi, $T|\mathcal{M}_1 \sim T|\mathcal{M}_2$ ve $T_{\mathcal{M}_2^\perp} \prec^i T_{\mathcal{M}_1^\perp}$ olduğu varsayılsın. $T|\mathcal{M}_1$ ve $T|\mathcal{M}_2$ operatörlerinin ortak Jordan modelleri $\bigoplus_{n=0}^{\infty} S(\phi_j)$, $T_{\mathcal{M}_1^\perp}$ ve $T_{\mathcal{M}_2^\perp}$ sıkıştırılmalarının Jordan modelleri sırasıyla $\bigoplus_{n=0}^{\infty} S(\psi_j)$ ve $\bigoplus_{n=0}^{\infty} S(\tau_j)$ olsun.

$$n \text{ tek ise,} \quad \gamma_n = \psi_{(n-1)/2} \quad \text{ve} \quad \delta_n = \tau_{(n-1)/2},$$

$$n \text{ çift ise, } \quad \gamma_n = \theta/\phi_{n/2} \quad \text{ve} \quad \delta_n = \theta/\phi_{n/2}$$

olmak üzere

$$\mathcal{M}_1{}' = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \gamma_n H^2 \ominus \theta H^2,$$

$$\mathcal{M}_2{}' = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \delta_n H^2 \ominus \theta H^2$$

tanımlansın. Teorem 2.12.7 nedeniyle $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_1{}'$ ve $\mathcal{M}_2 \sim \mathcal{M}_2{}'$ elde edilir, bu yüzden $\mathcal{M}_1{}' \prec \mathcal{M}_2{}'$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H(\theta)$ olsun ve $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ olmak üzere $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$(n, m) \mapsto \frac{1}{2}(n+m)(n+m+1) + n,$$

klasik bijektif fonksiyonu olsun.

$$V : \mathcal{H} \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} (H(\theta) \oplus \mathcal{H})$$

$$V(f_0, g_0, f_1, g_1, \ldots) \bigoplus_{n=0}^{\infty} (g_n \oplus (f_{F(n,m)})_{m=0}^{\infty})$$

olarak tanımlansın. İzometrik tersi

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} (g_n \oplus (f_{n,m})_{m=0}^{\infty}) \mapsto (f_{F^{-1}(0)}, g_0, f_{F^{-1}(1)}, g_1, \ldots)$$

ile verilen V operatörünün izometri olduğu açıktır. Dolayısıyla V operatörü birimseldir ve

$$VT = (\bigoplus_{n=0}^{\infty} (S(\theta) \oplus T))V$$

eşitliği sağlanır. Buna ek olarak,

$$V\mathcal{M}_1{}' = \bigoplus_{n=0}^{\infty} ((\psi_n H^2 \ominus \theta H^2) \oplus \bigoplus_{m=0}^{\infty} (\frac{\theta}{\phi_{F_{(n,m)}}} H^2 \ominus \theta H^2))$$

$$V\mathcal{M}_2{}' = \bigoplus_{n=0}^{\infty} ((\tau_n H^2 \ominus \theta H^2) \oplus \bigoplus_{m=0}^{\infty} (\frac{\theta}{\phi_{F_{(n,m)}}} H^2 \ominus \theta H^2))$$

olur. Şimdi, her n,$m \geq 0$ için $F(n, m+1) \geq F(n, m)$ olduğu kolayca doğrulandı. Özellikle, her n,$m \geq 0$ için $\phi_{F(n,m+1)}$ böler $\phi_{F(n,m)}$ elde edilir. Ayrıca Önerme 2.12.1 kullanılırsa, her n,m,$p \geq 0$ için $\theta/\phi_{F(n,m)}$ böler τ_p olduğu görülür. Son olarak, $T_{\mathcal{M}_2^{\perp}} \prec^i T_{\mathcal{M}_1^{\perp}}$ olduğundan Teorem 2.11.18 nedeniyle her $n \geq 0$ için τ_n

böler ψ_n olur. Her $n \geq 0$ için bir X_n hemen hemen afin dönüşümünü $S(\theta) \oplus T$ ile değiştirmek için bu durumda Lemma 3.0.11 ve Lemma 3.0.12 uygulanırsa

$$\overline{X_n((\psi_n H^2 \ominus \theta H^2) \oplus \bigoplus_{m=0}^{\infty} (\frac{\theta}{\phi_{F_{(n,m)}}} H^2 \ominus \theta H^2))}$$

$$= (\tau_n H^2 \ominus \theta H^2) \oplus \bigoplus_{m=0}^{\infty} (\frac{\theta}{\phi_{F_{(n,m)}}} H^2 \ominus \theta H^2)$$

sağlanır. Eğer

$$Y = V^* (\bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{X_n}{\|X_n\|}) V$$

olarak alınırsa, $\overline{Y\mathcal{M}_1{}'} = \mathcal{M}_2{}'$ eşitliği sağlanır ve Y, T ile değişmeli bir hemen hemen afin dönüşüm olur. Dolayısıyla $\mathcal{M}_1{}' \prec \mathcal{M}_2{}'$ olur ve ispat tamamlanır. $\square$

Bölüm 4

DÜZGÜN JORDAN MODELLERİ

Bu bölümün amacı, düzgün bir Jordan operatör olan T üzerindeki varsayımı zayıflatmaktır. Yani, T operatörünün bir düzgün Jordan operatöre sadece hemen hemen benzer olduğu durumda Teorem 3.0.13'e benzer bir sonuç elde etmeyi hedefliyoruz. Bunun için öncelikle aşağıdaki lemma verilecektir.

Lemma 4.0.14. *C_0-sınıfının bir operatörü T ve $X \in$ AlgLat(T)$\cap\{T\}'$ bire-bir bir operatör olsun. Bu durumda, her $\mathcal{M} \in$ Lat(T) için $\overline{X\mathcal{M}} = \mathcal{M}$ olur.*

Kanıt. $\mathcal{M} \in \mathrm{Lat(T)}$ olsun. $T|\mathcal{K}_j$ katlılığı olmayan bir operatör ve $\mathcal{K}_j \in \mathrm{Lat(T)}$ iken $\mathcal{M}$ uzayını devresel alt-uzaylarına ayrıştırırız; yani, $\mathcal{M} = \bigvee_{j=0}^{\infty} \mathcal{K}_j$ olur. $X \in \mathrm{AlgLat(T)}$ olduğundan, her $j \geq 0$ için $\overline{X\mathcal{K}_j} \subset \mathcal{K}_j$ elde edilir. Diğer taraftan, X operatörünün T operatörü ile değişmeli bir birim operatörü olduğu gerçeği her $j \geq 0$ için $T|\mathcal{K}_j \sim T|X\mathcal{K}_j$ olması anlamına gelir. Önerme 2.10.3 nedeniyle $j \geq 0$ için $\overline{X\mathcal{K}_j} = \mathcal{K}_j$ olur, bu da

$$\overline{XM} = \bigvee_{j=0}^{\infty} \overline{X\mathcal{K}_j} = \bigvee_{j=0}^{\infty} \mathcal{K}_j = \mathcal{M}$$

olması demektir. □

Şimdi, ilave varsayım altında istenilen sonuç elde edilecektir.

Teorem 4.0.15. *$J = \bigoplus_{j=0}^{\infty} S(\theta)$ düzgün Jordan modeli ile $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörü C_0-sınıfından olsun. $XT = JX$, $YJ = TY$ ve $YX \in$ AlgLat(T) özellikleri ile*

$$X : \mathcal{H} \to \bigoplus_{j=0}^{\infty} H(\theta),\ Y : \bigoplus_{j=0}^{\infty} H(\theta) \to \mathcal{H}$$

hemen hemen afin dönüşümlerinin bulunabildiği varsayılsın. $\mathcal{M}_1$ *ve* $\mathcal{M}_2$*,* T *için değişmez alt-uzaylar olsun. Bu durumda,* $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$ *olması için gerek ve yeter koşul* $T|\mathcal{M}_1 \sim T|\mathcal{M}_2$ *ve* $T_{\mathcal{M}_2^\perp} \prec^i T_{\mathcal{M}_1^\perp}$ *olmasıdır.*

Kanıt. Gereklilik kısmı, Önerme 2.12.9 nedeniyle açıktır. Yeterlilik kısmı için, $T|\mathcal{M}_1 \sim T|\mathcal{M}_2$ ve $T_{\mathcal{M}_2^\perp} \prec^i T_{\mathcal{M}_1^\perp}$ olduğu varsayılsın. $E_1 = \overline{X\mathcal{M}_1}$ ve $E_2 = \overline{X\mathcal{M}_2}$ olsun. YX operatörü T operatörü ile değişmeli bir hemen hemen afin dönüşüm olduğundan, Lemma 4.0.14 nedeniyle $k = 1{,}2$ için $\overline{YX\mathcal{M}_k} = \mathcal{M}_k$ elde edilir ve $k = 1{,}2$ için $\overline{YE_k} = \mathcal{M}_k$ olur. Bu ise, $J|E_1 \sim T|\mathcal{M}_1 \sim T|\mathcal{M}_2 \sim J|E_2$ olması demektir. Dahası, $k = 1{,}2$ için $X^*E_k^\perp \subset \mathcal{M}_k^\perp$ ve $Y^*\mathcal{M}_k^\perp \subset E_k^\perp$ yazılabilir. $T_{\mathcal{M}_2^\perp} \prec^i T_{\mathcal{M}_1^\perp}$ olduğundan, Teorem 2.11.18 nedeniyle $T^*|\mathcal{M}_2^\perp = (T_{\mathcal{M}_2^\perp})^* \prec^i (T_{\mathcal{M}_1^\perp})^* = T^*|\mathcal{M}_1^\perp$ olur, bu yüzden $Z(T^*|\mathcal{M}_2^\perp) = (T^*|\mathcal{M}_1^\perp)Z$ olacak şekilde $Z : \mathcal{M}_2^\perp \to \mathcal{M}_1^\perp$ bire-bir bir operatör bulunabilir. $W = Y^*ZX^*|E_2^\perp : E_2^\perp \to E_1^\perp$ kümesinin bire-bir olduğu açıktır. $k = 1{,}2$ için

$$(X^*|E_k^\perp)(J^*|E_k^\perp) = X^*J^*|E_k^\perp = T^*X^*|E_k^\perp = (T^*|\mathcal{M}_k^\perp)(X^*|E_k^\perp)$$
$$(Y^*|\mathcal{M}_k^\perp)(T^*|\mathcal{M}_k^\perp) = Y^*T^*|\mathcal{M}_k^\perp = J^*Y^*|\mathcal{M}_k^\perp = (J^*|E_k^\perp)(Y^*|\mathcal{M}_k^\perp)$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} W(J^*|E_2^\perp) &= Y^*ZX^*J^*|E_2^\perp \\ &= Y^*ZT^*X^*|E_2^\perp \\ &= Y^*Z(T^*|\mathcal{M}_2^\perp)X^*|E_2^\perp \\ &= Y^*(T^*|\mathcal{M}_1^\perp)ZX^*|E_2^\perp \\ &= (J^*Y^*|\mathcal{M}_1^\perp)ZX^*|E_2^\perp \\ &= (J^*|E_1^\perp)Y^*ZX^*|E_2^\perp \\ &= (J^*|E_1^\perp)W \end{aligned}$$

olur. Böylece, $J^*|E_2^\perp \prec^i J^*|E_1^\perp$ ve bu nedenle Teorem 2.11.18 kullanılırsa $J_{E_2^\perp} \prec^i J_{E_1^\perp}$ olur. Teorem 3.0.13'e göre $\overline{AE_1} = E_2$ olacak şekilde bir $A \in \{J\}'$ hemen hemen afin dönüşümü bulunabilir. Son olarak, $B = YAX$ tanımlansın. B operatörünün hemen hemen afin bir dönüşüm olduğu açıktır. O zaman,

$$BT = YAXT = YAJX = YJAX = TYAX = TB$$

elde edilir ve

$$\overline{B\mathcal{M}_1} = \overline{YAX\mathcal{M}_1} = \overline{YAE_1} = \overline{YE_2} = \mathcal{M}_2$$

olur ve ispat tamamlanır. $\square$

Kapanışta, Teorem 4.0.15 içinde bulunan $YX \in \text{AlgLat(T)}$ ekstra varsayımının sağlandığı bir örnekten bahsedelim.

Sonuç 4.0.16. *C_0-sınıfının katlılığı olmayan bir operatörü $T_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve $T = \bigoplus_{j=0}^{\infty} T_0$ olsun. $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$, T için verilen değişmez alt-uzaylar ise $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$ olması için gerek ve yeter koşul $T|\mathcal{M}_1 \sim T|\mathcal{M}_2$ ve $T_{\mathcal{M}_2^{\perp}} \prec^i T_{\mathcal{M}_1^{\perp}}$ olmasıdır.*

Kanıt. T_0 operatörünün minimal fonksiyonu θ ile gösterilsin. Varsayımdan, $XT_0 = S(\theta)X$, $YS(\theta) = T_0Y$ özellikleri ile $X : \mathcal{H} \to H(\theta)$ ve $Y : H(\theta) \to \mathcal{H}$ hemen hemen afin dönüşümleri bulunabilir. T operatörünün Jordan modeli $\bigoplus_{j=0}^{\infty} S(\theta)$ olmak üzere, T operatörü ile karşılıklı değişen $A = \bigoplus_{j=0}^{\infty} X$ ve $B = \bigoplus_{j=0}^{\infty} Y$ hemen hemen afin dönüşümleri tanımlansın. Teorem 4.0.15 göz önüne alınırsa $BA \in \text{AlgLat(T)}$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. T_0 katlılığı olmayan bir operatör olduğundan, Önerme 2.10.3 nedeniyle $\{T_0\}'$ komutatif olur ve böylece $\{T_0\}'' = \{T_0\}'$ bulunur. Bu nedenle,

$$\{T\}' = \{(C_{nm})_{n,m=0}^{\infty} : C_{nm} \in \{T_0\}'\}$$

olduğundan, $YX \in \{T_0\}'$ ve $BA = \bigoplus_{j=0}^{\infty} YX$ operatörleri $\{T\}''$ kümesine ait olur. Böylece Teorem 2.8.1 kullanıldığında $BA \in \text{AlgLat(T)}$ bulunur ve ispat tamamlanır. $\square$

Bölüm 5

L_p UZAYLARINDA GENLEŞTİRME TEORİSİ

5.1 Temel Bilgiler

Bir E vektör uzayı üzerinde bir $\geq$ kısmi sıralama bağıntısı var ve bu kısmi sıralama bağıntısı E uzayı üzerindeki cebirsel işlemler ile uyumlu ise, yani

(i) $x \geq y$ iken her $z \in E$ için $x + z \geq y + z$,

(ii) $x \geq y$ iken her $\alpha \geq 0$ için $\alpha x \geq \alpha y$

sağlanıyorsa E uzayına "sıralı vektör uzayı" denir.

E sıralı vektör uzayında $x \geq 0$ olan $x \in E$ elemanlarına "pozitif" eleman denir. E uzayındaki tüm pozitif vektörlerin kümesi E uzayının "pozitif konisi" olarak adlandırılır ve E^+ ile gösterilir, yani $E^+ := \{x \in E : x \geq 0\}$ olur.

E sıralı vektör uzayında, her iki elemanlı alt kümenin supremumu ve infimumu varsa E uzayına "Riesz uzayı" veya "vektör örgüsü" denir. Genel olarak her $x, y \in E$ için supremum ve infimum

$$x \vee y := \sup\{x, y\} \qquad \text{ve} \qquad x \wedge y := \inf\{x, y\}$$

ile gösterilir. Riesz uzaylarının tipik örnekleri fonksiyon uzaylarıdır, örneğin $\mathbb{R}^\Omega$: Ω kümesinde tanımlı tüm reel-değerli fonksiyonların kümesi, fonksiyonlar üzerindeki noktasal sıralamaya göre Riesz uzayıdır. Ayrıca diğer klasik fonksiyonel analiz uzayları da Riesz uzayı yapısına sahiptir.

$x \in X$ olmak üzere

$$x^+ := x \vee 0, \quad x^- := (-x) \vee 0 \;\text{ ve }\; |x| := x \vee (-x)$$

elemanları sırasıyla x elemanının "pozitif kısmı", "negatif kısmı" ve "mutlak değeri(veya modülü)" olarak adlandırılır.

Bir Riesz uzayında x ve y elemanları için $|x| \wedge |y| = 0$ oluyorsa bu iki elemana "ayrık" veya "dik" denir ve $x \perp y$ ile gösterilir. Bir E Riesz uzayının boştan farklı bir alt kümesinin "dik tümleyeni"

$$A^d := \{x \in E : x \perp y, \text{ her } y \in A\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir E Riesz uzayının bir G alt vektör uzayı E üzerindeki örgü işlemleri altında kapalı ise G uzayına bir "Riesz alt uzayı" denir.

Bir Riesz uzayının bir A alt kümesi $y \in A$ ve $|x| \leq |y|$ iken $x \in A$ özelliğine sahipse A kümesine "katı" denir. Bir Riesz uzayının katı bir vektör uzayına "ideal" denir.

Bir Riesz uzayında bir $\{x_\alpha\}$ ağı ve x elemanı için, her α için $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ sağlayacak şekilde bir başka aynı indeks kümesine sahip $\{y_\alpha\}$ ağı varsa $\{x_\alpha\}$ ağı x elemanına "sıra yakınsar" denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olarak gösterilir. Bir Riesz uzayının bir A kümesinin sıra yakınsak her ağının limiti A kümesine ait ise A kümesine "sıra kapalı" denir.

Sıra kapalı idealler "bant" olarak adlandırılır. Bir E Riesz uzayı içindeki B bandı için $E = B \oplus B^d$ yazılabiliyorsa B bandına "projeksiyon bandı" denir. Bir Riesz uzayındaki her bant bir projeksiyon bandı ise Riesz uzayına "projeksiyon özelliğine sahiptir" denir.

E Riesz uzayı ve B, E uzayı içinde projeksiyon bandı olsun. O halde $E = B \oplus B^d$ olur, yani her $x \in E$ için $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in B$ ve $x_2 \in B^d$ olacak şekilde tek türlü belirli bir parçalanış vardır. Buradaki parçalanışa göre bir $P_B : E \to E$

$$P_B(x) := x_1$$

projeksiyonu tanımlanabilir. P_B pozitif bir projeksiyondur. Bu formdaki projeksiyonlar "sıra projeksiyon" veya "bant projeksiyon" olarak adlandırılır.

E bir Riesz uzayı ve $A \subset E$ boştan farklı bir alt küme olsun. A tarafından üretilen ideal A kümesini içeren en küçük (içerme bağıntısına göre) idealdir ve bu ideal

$$E_A = \left\{ x \in E : \exists\, x_1, \ldots, x_n \in A \text{ ve } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ vardır ki } |x| \le \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i| \right\}$$

şeklindedir. Bir $x \in E$ elemanı tarafından üretilen ideal E_x ile gösterilirse

$$E_x = \{ y \in E : \exists\, \lambda > 0 \text{ vardır ki } |y| \le \lambda\, |x| \}$$

bulunur. E_x formundaki idealler “esas ideal” olarak adlandırılır.

Benzer şekilde, bir A kümesi tarafından üretilen bant A kümesini içeren en küçük banttır. Bir $x \in E$ elemanı tarafından üretilen bant “esas bant” olarak adlandırılır ve B_x ile gösterilir. Bir $x \in E$ elemanı tarafından üretilen esas bant B_x projeksiyon bandı ise x elemanına “projeksiyon eleman” denir.

E bir Riesz uzayı olmak üzere bir $e > 0$ elemanı tarafından üretilen B_e bandı bütün uzaya eşit ise (yani $B_e = E$ ise) , e elemanına “zayıf sıra birim” denir. Benzer şekilde bir E Riesz uzayında bir $e > 0$ elemanı tarafından üretilen ideal E_e bütün uzaya eşit ise (yani $E_e = E$ ise), e elemanına “kuvvetli sıra birim” ya da sadece “sıra birim” denir.

Tanım 5.1.1. *X ve Y sıralı vektör uzayları olmak üzere bir $T : X \to Y$ operatörü her $x \ge 0$ için $Tx \ge 0$ oluyorsa T operatörüne “pozitif” denir ve $T \ge 0$ veya $0 \le T$ ile gösterilir.*

Tanım 5.1.2. *E ve F iki Riesz uzayı ve $T : E \to F$ bir pozitif operatör olsun. Eğer her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ ise T operatörüne “örgü (veya Riesz) homomorfizmi” denir. Bire-bir olan bir örgü homomorfizmine “örgü (veya Riesz) izomorfizmi” denir. T, bir örgü izomorfizmi ve her $x \in E$ için $\|Tx\| = \|x\|$ ise T operatörüne “örgü izometrisi” denir. Eğer T operatörü üzerine ise Banach örgülerine “örgü izometrik” denir.*

Bir Riesz uzayı üzerindeki bir $\|\cdot\|$ normu için $|x| \le |y|$ iken $\|x\| \le \|y\|$ oluyorsa bu norma “örgü normu” veya “Riesz normu” denir ve bu Riesz uzayı “normlu Riesz uzayı” olarak adlandırılır. Eğer bir normlu Riesz uzayı üzerindeki norma göre tam ise “Banach örgüsü” olarak adlandırılır.

Şimdi Banach örgüleri içinde önemli iki sınıf olan AL ve AM uzaylarından bahsedeceğiz.

Tanım 5.1.3. *Bir E Banach örgüsüne,*

(i) $1 \leq p < \infty$ *olmak üzere her* $x, y \in E^+$ *ve* $x \wedge y = 0$ *için*

$$\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$$

oluyorsa AL_p*-uzayı,*

(ii) her $x, y \in E^+$ *ve* $x \wedge y = 0$ *için*

$$\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

oluyorsa AM*-uzayı denir.*

Ayrıca AL_1 *uzayı* AL*-uzayı olarak adlandırılır.*

AL- ve AM-uzayları arasında önemli bir dualite özelliği vardır.

Teorem 5.1.4. *E bir Banach örgüsü olmak üzere*

(i) E bir AL-uzayı ise $E^{'}$ sıra birime sahip bir AM-uzayıdır.

(ii) E bir AM-uzayı ise $E^{'}$ bir AL-uzayıdır.

Kanıt. [15, Theorem 1.4.7]. □

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere AL_p uzaylarının en belirgin örneği $L_p(\mu)$ uzayıdır. Aslında bu uzaylar AL_p uzaylarının tek formudur.

Teorem 5.1.5. *(Kakutani-Bohnenblust-Nakano) Her AL_p-uzayı bir $L_p(X, \Sigma, \mu)$ uzayına örgü izometriktir.*

Kanıt. [4, Theorem 3.34]. □

5.2 Pozitif Daralmaların Genleştirmeleri

Fonksiyonel analizde önemli bir yere sahip olan L_p uzayları Banach uzaylarının bir sınıfıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:
(X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere f fonksiyonu X kümesi üzerinde ölçülebilir ise

$$\|f\|_p = (\int |f|^p \, d\mu)^{1/p}$$

ve

$$L_p(X, \Sigma, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ölçülebilir ve } \|f\|_p < \infty\}$$

olur.

L_p uzayları üzerindeki pozitif daralmalar, pozitif terslenebilir izometriler ile pozitif genleştirmeye sahiptirler. Bu ifade daha açık olarak Teorem 5.2.1 ile verilip gösterilecektir. Bunun için gerekli tanımlar kısaca şöyle hatırlanabilir:

L_p uzayları arasında tanımlanan bir operatör, sıfırdan farklı fonksiyonları sıfırdan farklı fonksiyonlara götürüyorsa "pozitif" olarak adlandırılır. Normu 1'den küçük eşit olan bir operatöre "daralma" denir ve bir P "projeksiyonu" kendine eş (yani $\int Pfg = \int fPg$) ve idempotent daralmadır. Buradaki tüm fonksiyonlar, dönüşümler veya kümeler ölçülebilir ve her operatör lineerdir.

L_p uzayı üzerindeki bir pozitif T daralmasının, bir Q izometrisi ve bir P projeksiyonu daha geniş bir L_p uzayı üzerinde tanımlı olduğunda $n = 0{,}1{,}\ldots$ için $T^n = PQ^n$ eşitliğini sağlıyor ise "bir izometri ile pozitif bir genleştirmeye sahip olduğu" söylenir.

Teorem 5.2.1. *L bir L_p uzayı ve $T : L \to L$ pozitif bir daralma olsun. Bu durumda L uzayından B uzayı içine bir $D : L \to B$ pozitif izometrik gömme ve $P : B \to B$ bir pozitif projeksiyon olmak üzere $n = 0{,}1{,}2{,}\ldots$ için $DT^n = PQ^nD$ sağlanacak şekilde bir B uzayı (L_p uzayı) ve bir $Q : B \to B$ pozitif terslenebilir izometrisi vardır.*

Bu teoremin ispatı ilk olarak, L uzayı sonlu boyutlu bir L_p uzayı olduğu durumda verilecektir. Daha sonra bir gözlem yapılacak ve genel durum elde edilecektir.

1. Sonlu Boyutlu Durum: (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı ve $L_p = L_p(X, \Sigma, \mu)$ olsun. L_p içindeki negatif-olmayan fonksiyonların sınıfı L_p^+ ve L_p uzayının eşleniği, alışılmış olduğu gibi $p > 1$ iken $q = p(p-1)^{-1}$ ve $p = 1$ iken $q = \infty$ olduğunda $L_q = L_q(X, \Sigma, \mu)$ ile belirlensin; dolayısıyla $g \in L_q$, $f \in L_p$ içine olan $(f, g) = \int fgd\mu$ fonksiyonel temsil eder. Hölder eşitsizliği nedeniyle, eğer $f \in {L_p}^+$ ve $g \in {L_q}^+$ ise $p > 1$ ve $\|f\|_p > 0$ olmak üzere f^{p-1} in bir çarpanı g olduğunda eşitlik ile $\int fg \leq \|f\|_p \|g\|_p$ yazılabilir. Ayrıca eğer $f \in L_p^+$ ise $f^{p-1} \in L_q^+$ ve $\|f^{p-1}\|_q = \|f\|_p^{p/q} = \|f\|_p^{p-1}$ olur.

Şimdi $T : L_p \to L_p$ pozitif bir daralma ve eşleniğinin $T^* : L_q \to L_q$ olduğu düşünülsün. Buna göre lineer-olmayan bir $M : L_p^+ \to L_q^+$ operatörü $f \in L_p^+$, $Mf = T^*(Tf)^{p-1}$ olarak tanımlansın. Bu operatör çalışmamızda önemli bir rol oynayacaktır. Ayrıca $(f, Mf) = (Tf, (Tf)^{p-1}) = \|Tf\|_p^p$ eşitliği sağlanır.

Lemma 5.2.2. *Eğer* $\lambda = \sup\{Tf : f \in L_p^+, \|f\|_p = 1\}$ *ise* $\lambda = \|T\|$ *olur.*

Kanıt. [3, (2.1) Lemma]. □

Lemma 5.2.3. $p > 1$ *ve* $f \in L_p^+$ *olmak üzere* $\|Tf\|_p = \|T\| \|f\|_p > 0$ *olsun. Bu durumda* $Mf = \|T\|^p f^{p-1}$ *olur.*

Kanıt. [3, (2.2) Lemma]. □

Eğer $E \in \Sigma$ ölçülebilir bir küme ise, E içindeki dayanak ile L_p fonksiyonlarının sınıfı $L_p(E)$ olsun.

Lemma 5.2.4. $p > 1$ *ve* $\lambda_E = \sup\{\|Tf\| : u \in L_p^+(E), \|f\|_p = 1\}$ *olsun. Eğer* $\|Tu\|_p = \lambda_E \|u\|_p > 0$ *ile* $u \in L_p^+(E)$ *ise bu durumda* $\chi_E Mu = \lambda_E^p u^{p-1}$ *olur. (χ_E : E kümesinin karakteristik fonksiyonudur.)*

Kanıt. [3, (2.3) Lemma]. □

Lemma 5.2.5. f,$g \in L_p^+(E)$, $f \cdot g = 0$ *ve* $Mf \leq f^{p-1}$ *olsun. Bu durumda* $fMg = 0$ *ve* $M(f+g) = Mf + Mg$ *olur.*

Kanıt. [3, (2.4) Lemma]. □

Şimdi sonlu boyutlu durum için bakış açımızı kısıtlayacağız. Dolayısıyla $m_i > 0$ kümeleri(masses) ile $X = \{1, \ldots, n\}$ kümesinin n noktadan oluştuğu varsayılabilir. X üzerindeki fonksiyonlar, n-boyutlu $r = (r_i)$ vektörleri olarak ifade edilir ve $T : L_p \to L_p$ operatörü $(Tr)_j = \sum_i T_{ij} r_i$ olacak şekilde $n \times n$ lik $T = (t_{ij})$ matrisi ile gösterilir. Aynı zamanda $(T^* s)_i = \sum_j m_j m_i^{-1} T_{ij} s_j$ eşitliği sağlanır.

Teorem 5.2.6. *Kesin pozitif koordinatlarıyla bir $u = (u_i) \in L_p^+$ vektörü $Mu \leq u^{p-1}$ sağlanacak şekilde vardır.*

Kanıt. Eğer $p = 1$ ise bu durumda her $i = 1, \ldots, n$ için $u_i = 1$ alınabilir. Eğer $p > 1$ ise, bu durumda aşağıdaki lemmmanın sonlu sayıda uygulanması isteneni gerçekler. $\square$

Teorem 5.2.7. *$\alpha \in L_p^+$ olmak üzere $M\alpha \leq \alpha^{p-1}$ olsun ve α fonksiyonunun bazı koordinatlarının sıfır olduğu varsayılsın. Bu durumda, dayanağının α fonksiyonunun dayanağından kesin daha büyük olduğu bir $\widetilde{\alpha} \in L_p^+$ fonksiyonu $M\widetilde{\alpha} \leq \widetilde{\alpha}^{p-1}$ olacak şekilde vardır.*

Kanıt. $E = \{i : i \in X, \alpha_i = 0\}$ ve $B = \{r : r \in L_p^+, \|r\|_p = 1\}$ olsun. Sonlu boyutlu uzay üzerinde çalışıldığından, B kümesi kompakttır. Dolayısıyla eğer $\lambda_E = \sup\{\|Tr\|_p : r \in B\}$ (aynı zamanda Lemma 5.2.4 içinde tanımlandığı gibi) ise bu durumda $\|T\beta\|_p = \lambda_E \|\beta\|_p = \lambda_E$ olacak şekilde bir $\beta \in B$ vardır. Dolayısıyla Lemma 5.2.4 nedeniyle

$$\chi_E M\beta = \lambda_E^p \beta^{p-1} \leq \beta^{p-1}$$

olur. Fakat $f = \alpha$ ve $g = \beta$ ile Lemma 5.2.5 uygulandığında $\alpha M\beta = 0$ olur, yani $\chi_E M\beta = M\beta$ elde edilir. Ayrıca $\alpha\beta = 0$ olduğundan

$$M(\alpha + \beta) = M\alpha + M\beta \leq \alpha^{p-1} + \beta^{p-1} = (\alpha + \beta)^{p-1}$$

bulunur. Dolayısıyla, $\widetilde{\alpha} = \alpha + \beta$ gereken vektörü verir. $\square$

Şimdi sonlu boyutlu durumda Teorem 5.2.1 ispatlanacaktır. Dolayısıyla $L = L_p(X, \Sigma, \mu)$ olduğu varsayılsın ve daha önce tanımlandığı gibi $X = \{1, \ldots, n\}$ kümesi n-noktadan oluşsun. B, Q, D ve P operatörleri kurulup Teorem 5.2.1

ifadesindeki özellikleri sağladığı gösterilecektir. Teorem 5.2.6 de verildiği gibi bir $u \in L^+$ vektörü sabitlensin ve $v = Tu$ olsun.

İlk olarak bir $(Z, \mathcal{G}, \nu)$ ölçü uzayı kurulacak ve B uzayı $B = L_p(Z, \mathcal{G}, \nu)$ olarak tanımlancaktır. Z kümesi iki-boyutlu Oxy kartezyen düzleminin bir alt-kümesi, $\mathcal{G}$ bir σ-cebri ve ν ölçüsü Z kümesine göre olağan iki-boyutlu Lebesgue ölçüsünün kısıtlanışı olacaktır. Bir ve iki boyutlu Lebesgue ölçüleri ℓ ve ℓ^2 ile gösterilecek ve sırasıyla dx $dxdy$ diferansiyelleri ile ifade edilecektir.

I_i'ler x-ekseni üzerinde n tane ayrık aralık ve $\ell(I_i) = m_i$, J_i'ler y-ekseni üzerinde n tane ayrık aralık ve $\ell(J_i) = 1$ olsun. $E_i = I_i \times J_i$, $Z_0 = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ olsun. $k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$ ve $\ell(Z_k) > 0$ olmak üzere bu Z_0 kümesi, Z_k kümelerinin ikişer ikişer ayrık sonsuz dizileri ile tamamlansın ve $Z = \bigcup_{-\infty<k<\infty} Z_k$ olsun.

Böylece $(Z, \mathcal{G}, \nu)$ ölçü uzayı ve ayrıca B uzayı tanımlanmış olur. $Q : B \to B$ tanımlamak için öncelikle $\tau : Z \to Z$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$v = Tu$ olduğunda $X_0 = \{j : j \in X, \nu_j > 0\}$ ve $P = X \times X_0$ olsun. Her $(i, j) \in P$ için $\xi_{ij} = T_{ij}u_i/v_j$, $\eta_{ij} = T_{ij}(v_j^{p-1}/u_i^{p-1})m_j/m_i$ olsun ve $v = Tu$ olduğundan her $j \in X_0$ için $\sum_i \xi_{ij} = 1$ olduğu, ayrıca $Mu \leq u^{p-1}$ olduğundan her $i \in X$ için $\sum_{j \in X_0} \eta_{ij} \leq 1$ gerçeklendiği göz önünde bulundurulsun. Dolayısıyla her I_j, $j \in X_0$, $\ell(I_{ij}) = \xi_{ij}m_j$ ile n tane ayrık I_{ij} alt-aralıklarına bölünebilir ve her $i \in X$ için $\ell(J_{ij}) = \eta_{ij}$ olacak şekilde J_i içinde J_{ij}, $j \in X_0$, alt-aralıkları bulunabilir. Bu durumda, $(i, j) \in P$ olmak üzere $S_{ij} = I_{ij} \times J_i$, $R_{ij} = I_i \times J_{ij}$ ve her iki birleşimde $(i, j) \in P$ üzerinden alınması koşuluyla $E_j = \bigcup S_{ij}$, $E_i = \bigcup R_{ij}$ olsun. Her $(i, j) \in P$ için R_{ij} ve S_{ij}, ℓ^2-ölçüleri sıfır-olmayan iki dikdörtgendir. Dolayısıyla a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} ve d_{ij} sabitler olmak üzere,

$$\tau_{ij}(x, y) = (a_{ij}x + b_{ij}, c_{ij}y + d_{ij})$$

formunda bir $\tau_{ij} : R_{ij} \to S_{ij}$ afin dönüşümü $\tau_{ij}R_{ij} = S_{ij}$ olacak şekilde tanımlanabilir. Böylece; R üzerinde τ dönüşümü, her R_{ij} üzerinde τ_{ij} olarak tanımlanabilir. Dolayısıyla τ dönüşümleri R'den S üzerinde olur. Eğer $\ell^2(Z_0 - R) = 0$ ise bu durumda τ, $\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$ üzerinde birim dönüşüm olarak tanımlanır. Eğer $\ell^2(Z_0 - R) > 0$ ise bu durumda τ, $Z_0 - R$'den Z_1 üzerine ve $k \geq 1$ olmak üzere Z_k'dan Z_{k+1} üzerine tanımlanır. Benzer şekilde, eğer $\ell^2(Z_0 - S) = 0$ ise τ, $\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_{-k}$ üzerinde birim dönüşüm olarak tanımlanır; $\ell^2(Z_0 - S) > 0$ olduğunda ise τ, Z_{-1}'den $Z_0 - S$

üzerine ve $k \geq 2$ olmak üzere Z_{-k}'dan Z_{-k+1} üzerine tanımlanır. Dolayısıyla $\tau : Z \to Z$ dönüşümü tanımlanmış olur. Böylece her iki yönde de τ terslenebilir, ölçülebilir ve non-singüler olur.

τ dönüşümü ν ölçüsünü $G \in \mathcal{G}$ olmak üzere $\sigma(G) = \nu(\tau^{-1}G)$ olarak tanımlanan σ ölçüsüne taşısın. $\rho = d\sigma/d\nu$ olsun ve $Q : B \to B$, $(x, y) \in Z$ ve $f \in B$ olmak üzere

$$(Qf)(x, y) = (\rho(x, y))^{1/p} f(\tau^{-1}(x, y))$$

olarak tanımlansın. Bu durumda Q operatörü B uzayının pozitif terslenebilir izometrisi olur (Dominated Ergodic Estimate).

$D : L \to B$ tanımı basittir. Eğer; χ_{E_i}, $E_i = I_i \times J_i$'nin karakteristik fonksiyonu ve $r = (r_i)_i \in L$ ise $Dr = \sum_{i=1}^{n} r_i \chi_{E_i}$ olur. Ayrıca; E, Z_0'ın $\{E_1, \ldots, E_n\}$ parçalanışına göre koşullu beklenen değer operatörü olduğunda $P : B \to B$, $Pf = E(\chi_{Z_0} f)$ olarak tanımlanır. Daha açık olarak, $Pf = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i} \frac{1}{m_i} \int_{E_i} f d\nu$ olur.

Son olarak her $n = 0, 1, \ldots$ için $DT^n = PQ^n D$ eşitliğinin gerçeklendiği görülmelidir. Bunun için aşağıdaki gibi bir yol izlenmelidir.

Lemma 5.2.8. *Bir $(x, y) \in Z$ noktasının sadece x-koordinatına bağlı Z üzerindeki iki fonksiyon f, $g \in L_p$ olsun. Eğer $Pf = Pg$ ise $PQf = PQg$ olur.*

Kanıt. $F : I \to \mathbb{R}$, $(x, y) \in Z$ ve $f(x, y) = F(x)$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. PQf aşağıdaki gibi hesaplanacaktır:

$$(Qf)(x, y) = \sum_{i,j} \frac{v_j}{u_i} f(\tau_{ij}^{-1}(x, y)) \chi_{S_{ij}}(x, y)$$

$$\begin{aligned}
\int_{E_j} Qf d\nu &= \sum_i \frac{v_j}{u_i} \int_{S_{ij}} f(\tau_{ij}^{-1}(x, y)) dx dy \\
&= \sum_i \frac{v_j}{u_i} \frac{\nu(S_{ij})}{\nu(R_{ij})} \int_{R_{ij}} f(x, y) dx dy \\
&= \sum_i (\frac{v_j}{u_i})^{1-p} \eta_{ij} \int_{I_i} F(x) dx \\
&= \sum_i T_{ij} (\frac{m_j}{m_i}) \int_{E_i} f d\nu
\end{aligned}$$

olur. Bu ise,

$$PQf = \sum_j \chi_{E_j} \sum_i T_{ij} \frac{1}{m_i} \int_{E_i} f d\nu \tag{5.1}$$

olması demektir. Eğer $Pf = Pg$ ise bu durumda

$$\int_{E_i} f d\nu = \int_{E_i} g d\nu$$

olur, yani $PQf = PQg$ elde edilir. □

Lemma 5.2.9. *Eğer $r \in l_p$ ise bu durumda*

$$PQ(\sum_i r_i \chi_{E_i}) = \sum_j (Tr)_j \chi_{E_j}$$

olur.

Kanıt. Yukarıdaki (5.1) eşitliğinden elde edilir. □

Teorem 5.2.10. *Her $r \in l_p$ ve her $n \geq 0$ tamsayısı için*

$$PQ^n \sum_i r_i \chi_{E_i} = \sum_j (T^n r)_j \chi_{E_j}$$

olur.

Kanıt. n üzerinden indüksiyon uygulanırsa, $n = 0$ için teorem açıktır. Bir n tamsayısı için teoremin doğru olduğu varsayılsın. Eğer $f \in L_p$ fonksiyonu sadece x-koordinatına bağlı ise Q'nun tanımından aşağıdaki gibi Qf için de aynı durum doğrudur. Dolayısıyla $Q^n \sum_i r_i \chi_{E_i}$ sadece x-koordinatına bağlı olur. Dolayısıyla; Lemma 5.2.8, Lemma 5.2.9 ve indüksiyon hipotezi nedeni ile

$$\begin{aligned} PQ^{n+1} \sum_i r_i \chi_{E_i} &= PQPQ^n \sum_i r_i \chi_{E_i} \\ &= PQ \sum_i (T^n r)_i \chi_{E_i} \\ &= \sum_j (T^{n+1} r)_j \chi_{E_j} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Lemma 5.2.8, Lemma 5.2.9 ve Teorem 5.2.10 birlikte düşünüldüğünde son elde edilmek istenen eşitlik sağlanır.

Şimdi bir takım argümanlar ile sonlu boyutlu durumdan sonsuz boyuta geçilebildiği görülecektir.

5.3 Banach Uzaylarının Ultra Çarpımları

X bir topolojik uzay olsun. X üzerinde herhangi bir sınırlı, sürekli ve gerçel değerli bir fonksiyonun sürekli genişlemesi problemi; X^* şeklinde gösterilecek olan X uzayının Stone Cêch kompaktlaştırmasıdır. Genel topolojiden bilinen bu konu hakkında daha detaylı bilgi için [19] kullanılabilir.

Üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan bir "$\leq$" bağıntısı konan bir A kümesi, "yönlendirilmiş/directed" olarak adlandırılır.

(i) Her $\lambda \in A$ için $\lambda \leq \lambda$;

(ii) Eğer $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ve $\lambda_2 \leq \lambda_3$ ise $\lambda_1 \leq \lambda_3$;

(iii) Eğer $\lambda_1, \lambda_2 \in A$ ise $\lambda_1 \leq \lambda_3$ ve $\lambda_2 \leq \lambda_3$ olacak şekilde bir $\lambda_3 \in A$ vardır.

Bu durumda "$\leq$" bağıntısının A kümesini "yönlendirdiği" söylenir.

A yönlendirilmiş bir küme ve $z : A \to \mathbb{R}$ tüm sınırlı reel değerli fonksiyonların sınıfı ζ olsun. Bu fonksiyonlar "sınırlı ağlar" olarak adlandırılır ve $z = \{z_\alpha\}$ veya $\{z_\alpha\}_{\alpha \in A}$ olarak kendi değerlerinin ailesi tarafından belirlenir. Lineer işlemler ve çarpma işleminin olağan noktasal tanımları ile ζ bir cebir olur. Ayrıca,

$$\liminf_\alpha z_\alpha = \sup_{\alpha_1 \in A} [\inf_{\alpha_2 \geq \alpha_1} z_{\alpha_2}] \quad \text{ve} \quad \limsup_\alpha z_\alpha = -\liminf_\alpha (-z_\alpha)$$

olsun. Eğer $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli ve $z \in \zeta$ ise bu durumda, $(u \circ z)_\alpha = u(z_\alpha)$ sınırlı bir ağ tanımlar.

Lemma 5.3.1. *Eğer $z \in \zeta$ ise $\liminf_\alpha z_\alpha \leq LIMz \leq \limsup_\alpha z_\alpha$ ve eğer $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli ise $LIM : \zeta \to \mathbb{R}$ homeomorfizmi (yani, lineer ve çarpımsal fonksiyon) vardır.*

Kanıt. Ayrık topolojisi[1] ile birlikte A bir topolojik uzay olarak düşünülsün. Bu durumda A uzayı lokal kompakt bir Hausdorff uzayı olur. A uzayının Stone Cêch kompaktlaştırması A^* olsun. Bu durumda tanım nedeniyle, A^* kompakt bir Hausdorff uzaydır ve A uzayı homeomorfik olarak, her sınırlı (sürekli) $z : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $z^* : A^* \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon genişlemesine sahip olacak şekilde

[1] A topolojik uzayının ayrık topolojisi denildiğinde A'nın her alt kümesinin açık olduğu hatırlansın.

A^* uzayının yoğun açık bir alt kümesi olarak gömülüdür. Her $\alpha \in A$ için, A^* içinde $\{\beta : \beta \in A, \beta \geq \alpha\}$ kümesinin kapanışı C_α olsun. A kümesi yönlendirilmiş olduğundan, $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ailesi sonlu kesişim özelliğine sahiptir. Dolayısıyla $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha$ kesişimi bir α^* noktası içerir. $LIMz = z^*(\alpha^*)$ olsun. Bu durumda, lemmanın koşullarının gerçeklendiğini görmek kolaydır. □

Bu lemma içinde elde edilen fonksiyon "limit fonksiyonel" olarak adlandırılacak ve bu fonksiyonelin değeri $LIM_\alpha z_\alpha$ olarak gösterilecektir. Eğer $\{z_\alpha\}$ yakınsak bir ağ ise $LIM_\alpha z_\alpha = \lim_\alpha z_\alpha$ olur. Her $\alpha \geq \alpha_0$ için $z_\alpha = z'_\alpha$ olacak şekilde bir α_0 olduğunda z, $z' \in \zeta$ ise bu durumda $LIM_\alpha z_\alpha = LIM_\alpha z'_\alpha$ olur.

Bu ön hazırlıktan sonra Banach uzaylarının ultra çarpımları aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

A yönlendirilmiş bir küme ve her $\alpha \in A$ için $\mathcal{W}_\alpha$ bir Banach uzayı olsun. Bu Banach uzaylarının $\{\mathcal{W}_\alpha\}$ ailelerinden yeni bir $\mathcal{W}$ Banach uzayı tanımlanacak ve $\mathcal{W}_\alpha$ uzaylarının "ultra çarpımı" olarak adlandırılacaktır. $\mathcal{W}$ içindeki noktalar $\alpha \in A$ indisleriyle $w = \{w_\alpha\}$ formundaki ailelerdir ve her $\alpha \in A$ için $w_\alpha \in \mathcal{W}_\alpha$ olur, ayrıca $\{\|w_\alpha\|\}$ sınırlı bir ağ olur. v, $w \in \mathcal{W}$ ve a, $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $\mathcal{W}$ içindeki lineer bileşimler $av + bw = \{av_\alpha + bw_\alpha\}$ ve norm $\|w\| = LIM_\alpha \|w_\alpha\|$ olarak tanımlanır. $\|w\| = 0$ iken $w = 0$, yani her $\alpha \in A$ için $w_\alpha = 0$, olmasını gerektirmediğinden bu norm, sadece sözde norm belirtir. $\mathcal{W}$ üzerinde bir denklik bağıntısı,

$$w \sim w' \text{ ancak ve yalnız } \|w - w'\| = 0$$

olarak tanımlanır. Norm elde etmek için; $\mathcal{W}$ uzayının, denklik sınıflarının kümesi tarafından her zamanki gibi değiştirilmesi gerekir. Bununla birlikte, $\mathcal{W}$ uzayının elemanları ile doğrudan çalışma ve B içindeki denklikleri ve eşitlikleri farketmek daha kullanışlıdır.

Teorem 5.3.2. *$\mathcal{W}$ bir Banach uzayıdır.*

Kanıt. $\mathcal{W}$ uzayının (sözde) normlu bir vektör uzayı olduğu açıktır. Tamlık ise aşağıdaki Lemma 5.3.4 ile eşdeğer olarak görülür. Lemma 5.3.4 verilmeden önce bir teknik gerçek gösterilecektir. □

Lemma 5.3.3. *Her $w \in \mathcal{W}$ için bir $v \in \mathcal{V}$ elemanı, $v \sim w$ ve her $\alpha \in A$ için $\|v_\alpha\| = \|w\|$ $(= \|v\|)$ olacak şekilde vardır.*

Kanıt. $\|w\| = 0$ ise $v_\alpha = 0$ olsun. $\|w\| > 0$ ise, $\lambda_\alpha = (\|w\| / \|w\| \vee \|w_\alpha\|)$ tanımlansın ve $v_\alpha = \lambda_\alpha w_\alpha$ olsun. Bu durumda, $LIM_\alpha \lambda_\alpha = 1$ olduğundan $\|v_\alpha\| \leq \|w\|$ ve $v \sim w$ olur. Sonuç olarak,

$$\|v - w\| = LIM_\alpha |1 - \lambda| \, \|w_\alpha\| = 0$$

elde edilir. □

Lemma 5.3.4. *$\sum_{n=1}^{\infty} \|w^n\| < \infty$ olacak şekilde $\mathcal{W}$ içinde bir dizi $\{w^n\}_{n=1}^{\infty}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{W}$ içinde $\sum_{n=1}^{\infty} w^n = w$ olacak şekilde bir $w \in \mathcal{W}$ elemanı vardır, yani $\lim_n \|\sum_{i=1}^{n} w^i - w\| = 0$ olur.*

Kanıt. Bir önceki lemma nedeniyle, her n için $\|v_\alpha^n\| \leq \|w^n\|$ olacak şekilde bir $v^n \sim w^n$ bulunur. Dolayısıyla her $\alpha \in A$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \|v^n\| < \infty$ olur ve $\mathcal{W}_\alpha$ bir Banach uzayı olduğundan $\mathcal{W}_\alpha$ içinde $\sum_{n=1}^{\infty} v_\alpha^n = w_\alpha$ olacak şekilde bir w_α vardır. Bu durumda her $\alpha \in A$ için

$$\|w_\alpha\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|v_\alpha^n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|w^n\|$$

olduğundan $\{w_\alpha\} \in \mathcal{W}$ olur. Ayrıca $n \to \infty$ için

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n} w^i - w \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} v^i - w \right\| = LIM_\alpha \left\| \sum_{i=1}^{n} {v_\alpha}^i - w_\alpha \right\| \leq LIM_\alpha \sum_{i=n+1}^{\infty} \left\| v_\alpha^i \right\| \\ \leq LIM_\alpha \sum_{i=n+1}^{\infty} \left\| w^i \right\| = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left\| w^i \right\| \end{aligned}$$

0'a yakınsar. □

Şimdi, eğer her $\mathcal{W}_\alpha$ uzayı bir L_p uzayı ise $\mathcal{W}$ uzayının da bir L_p uzayına izomorfik olduğu gözlemlenecektir. Gerçekten, $\mathcal{W}$ uzayı içinde bir $v \leq w$ kısmi sıralaması her $\alpha \in A$ için $v_\alpha \leq w_\alpha$ olarak düşünülsün. Buna karşılık gelen maksimum ve minimum işlemleri sırasıyla

$$v \vee w = \{v_\alpha \vee w_\alpha\}, \;\; v \wedge w = \{v_\alpha \wedge w_\alpha\}$$

ve $\mathcal{W}$ uzayının pozitif konisi $w^+ = \{w : w \in \mathcal{W}, w \geq 0\}$ olur. Aşağıda verilecek olan lemma; bu işlemlerin, $\mathcal{W}$ uzayının denklik sınıfları üzerinde tanımlanabileceğini ve norm topolojisine göre sürekli olduklarını gösterir. Dolayısıyla, bu tanımlarla $\mathcal{W}$ uzayının bir Banach örgüsü olduğu görülür.

Lemma 5.3.5. *Eğer $v \sim v'$ ve $w \sim w'$ ise bu durumda, $v \vee w \sim v' \vee w'$ ve $v \wedge w \sim v' \wedge w'$ olur. Eğer v^n ve w^n sırasıyla, $\mathcal{W}$ içindeki v ve w elemanlarına yakınsıyorsa, bu durumda $v^n \vee w^n$ ve $v^n \wedge w^n$ sırasıyla $\mathcal{W}$ içindeki $v \vee w$ ve $v \wedge w$ elemanlarına yakınsar.*

Kanıt. [3, (3.5) Lemma]. □

Lemma 5.3.6. *Eğer $v,\ w \in \mathcal{W}^+$ ve $v \wedge w = 0$ ise $\|v + w\|^p = \|v\|^p + \|w\|^p$ olur.*

Kanıt. [3, (3.6) Lemma]. □

Kakutani Teoremi'nin bir genelleştirmesi, Lemma 5.3.6 içinde belirtilen özelliğe sahip bir Banach örgüsünün bir L_p uzayına sıra izomorfik olduğunu gösterir. Dolayısıyla her $\mathcal{W}_\alpha$ bir L_p uzayı ise bu durumda başka bir B uzayı (L_p uzayı), bir $\Psi : \mathcal{W} \to B$ pozitif izometrik izomorfizmi aracılığıyla $\mathcal{W}$ uzayı B uzayı ile belirlenebilecek şekilde vardır.

2. Genel Durumda Ana İspat : Keyfi bir $(X, \mathcal{F}, \mu)$ ölçü uzayı ile ilişkili bir L_p uzayı olan L olsun. X uzayının bir yarı-parçalanışı denildiğinde, sonlu ölçüler ile ölçülebilir kümelerin sonlu ayrık bir ailesi anlaşılacaktır. X uzayının tüm yarı-parçalanışlarının kümesi A olsun. A içindeki bir kısmi sıralama $\alpha \leq \alpha'$ olarak gösterilsin, yani α içindeki her küme α' içindeki kümelerin birleşimi olarak yazılsın. Bu durumda A kümesinin yönlendirilmiş bir küme olduğu açıktır. α yarı-parçalanışına göre her $\alpha \in A$ için $E_\alpha : L \to L$ koşullu beklenen değer operatörü olsun, bu fonksiyonlar α nın kümeleri üzerinde ortalama değerlerini ve bu kümelerin dışında 0 değerini alsın. Sabit her $f \in L$ için $\{E_\alpha f\}$ ağı f fonksiyonuna yakınsar, yani $\lim_\alpha \|f - E_\alpha f\| = 0$ olur. Son olarak, $L_\alpha = E_\alpha L$ sonlu boyutlu bir L_p uzayı olan E_α'nın görüntüsü olsun.

Şimdi $T : L \to L$ pozitif bir daralma olsun. $T_\alpha : L \to L_\alpha$ operatörü $T_\alpha = E_\alpha T E_\alpha$ olarak tanımlansın. Her $n = 1, 2, \ldots$ tamsayısı ve her $f \in L$ için

$$\lim_\alpha \|T_\alpha^n f - T^n f\| = 0$$

olur. Ayrıca T_α operatörünün L_α üzerinde etki ettiği düşünülebilir. Dolayısıyla sonlu boyutlu bir L_p uzayı üzerinde bir $T_\alpha : L_\alpha \to L_\alpha$ pozitif daralması elde edilir. Dolayısıyla sonlu boyutlu uzaylar için Genleştirme Teoremi; $Q_\alpha : \mathcal{W}_\alpha \to \mathcal{W}_\alpha$

pozitif terslenebilir bir izometri, P_α pozitif bir projeksiyon ve $D_\alpha : L_\alpha \to \mathcal{W}_\alpha$ bir pozitif izometri olmak üzere $D_\alpha T_\alpha^n = P_\alpha Q_\alpha^n D_\alpha$ eşitliği sağlanacak şekilde her $\alpha \in A$ için bir $\mathcal{W}_\alpha$ L_p uzayının olduğunu gösterir. Bu durumda, $\mathcal{W}_\alpha$ uzaylarının ultra çarpımı olan $\mathcal{W}$ uzayı elde edilir ve $Q : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$, $P : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ ve $D : L \to \mathcal{W}$ $w = \{w_\alpha\} \in \mathcal{W}$ ve $f \in L$ olmak üzere $Q\{w_\alpha\} = \{Q_\alpha w_\alpha\}$, $P\{w_\alpha\} = \{P_\alpha w_\alpha\}$ ve $Df = \{D_\alpha E_\alpha f\}$ olarak tanımlanır. $PQ^n D = DT^n$ eşitliğini görmek için her iki tarafa $f \in L$ fonskiyonu uygulanırsa,

$$PQ^n Df = \{P_\alpha Q_\alpha^n D_\alpha E_\alpha f\}, \;\; DT^n f = \{D_\alpha E_\alpha T^n f\}$$

olur ve

$$P_\alpha Q_\alpha^n D_\alpha E_\alpha f = D_\alpha T_\alpha^n E_\alpha f = D_\alpha T_\alpha^n f$$

elde edilir. Ayrıca D_α bir izometri olduğundan

$$\|D_\alpha T_\alpha^n f - D_\alpha E_\alpha T^n f\| = \|T_\alpha^n f - ET^n f\|$$

bulunur. Fakat $\lim_\alpha \|T_\alpha^n f - E_\alpha T^n f\| = 0$ olması, $\{D_\alpha T_\alpha^n f\} \sim \{D_\alpha E_\alpha T^n f\}$ veya $PQ^n Df \sim DT^n f$ olduğunu gösterir. Dolayısyla $PQ^n D = DT^n$ olur.

Şimdi açıktır ki, bir önceki bölümde verilen $\mathcal{W}$ uzayının kısmi sıralamasında $Q : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ operatörü pozitif terslenebilir bir izometri, $D : L \to \mathcal{W}$ operatörü pozitif bir izometri ve $P : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ operatörü pozitif bir projeksiyondur. $\mathcal{W}$ genel bir Banach örgüsü olarak elde edilmesine rağmen, bir önceki bölümde bahsedilen Kakutani Teoremi bir $\Psi : \mathcal{W} \to B$ pozitif izometrik izomorfizminin ve bir B uzayının (L_p uzayının) var olduğunu gösterir. Bu Ψ; Q, D, P operatörlerini

$$Q' = \Psi Q \Psi^{-1} : B \to B, \;\; D' = \Psi D : L \to B, \;\; P' = \Psi P \Psi^{-1} : B \to B$$

olarak B ile ilişkili Q', D', P' operatörlerine taşımak için kullanılabilir. Böylece Teorem 5.2.1 in tüm koşulları gerçeklenir.

Son olarak aşağıda, teoremde kullanılan pozitif projeksiyon ile ilgili bir gerçekten bahsedilecektir. Eğer L ile B, L_p uzayları ve $D : L \to B$ pozitif bir izometri ise bu durumda DL aşağıdaki gibi karakterize edilebilir. Eğer $B = L_p(Z, \mathcal{G}, \nu)$ ise bir $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ alt σ-cebri ve $Z_0 \in \mathcal{G}_0$ kümesi; ν_0 ölçüsü, ν ölçüsünün $Z_0 \cap \mathcal{G}_0$ kümesine kısıtlanışı olduğunda $DL = L_p(Z_0, Z_0 \cap \mathcal{G}_0, \nu_0)$ olacak şekilde vardır. Dolayısıyla bir $\Pi : B \to B$ pozitif projeksiyonu $\Pi B = DL$ olacak şekilde vardır. Bu projeksiyon; $\mathcal{G}_0$ cebrine göre koşullu beklenen değer operatörü E ve $f \in B$ olduğunda $\Pi f = E(\chi_{Z_0} f)$ olarak tanımlanır. Teorem 5.2.1 içinde $D : L \to B$ pozitif izometri olduğu halde yukarıdaki kanıtta elde edilen $P : B \to B$ pozitif projeksiyonu doğal Π projeksiyonu değildir. Ancak bir L_p uzayı olarak $\mathcal{W}$ uzayının gösteriminin daha dikkatli bir analizi $\Pi Q^n D = PQ^n D$ olduğunu gösterir, yani Π aynı zamanda Teorem 5.2.1 içinde gerekli olan pozitif projeksiyon olarak kullanılabilir. Ancak bu ihmal edilecektir.

5.4 Dinamik Sistem ve Örgü Genleştirmeleri

E bir normlu vektör uzayı olsun. $x \in E$ ise $\hat{x} : E' \to \mathbb{C}$, $\hat{x}(f) = f(x)$ olarak tanımlanır. Bu durumda $x \mapsto \hat{x}$ dönüşümü E den E'' içine lineer bir izometri olur. $\hat{E} = \{\hat{x} : x \in E\}$ olsun. E'' her zaman tam olduğundan, $\hat{E}$ nın E'' içindeki $\overline{\hat{E}}$ kapanışı bir Bancah uzayı olur ve $x \mapsto \hat{x}$ dönüşümü E uzayını $\overline{\hat{E}}$ uzayı içine yoğun bir alt uzay olarak gömer. $\overline{\hat{E}}$, E uzayının "tamlanışı" olarak adlandırılır. Eğer E sonlu boyutlu ise $\hat{E} = E''$ eşitliği gerçeklenir. Sonsuz boyutlu Banach uzayları için $\hat{E} = E''$ eşitliği her zaman gerçeklenmeyebilir, eğer gerçekleniyorsa E uzayı "refleksif/yansıyan" olarak adlandırılır. Yani; eğer bir E Banach uzayı için, $J : E \to E''$ kanonik gömme operatörü örtense, yani kanonik gömme ile $E = E''$ oluyorsa, o zaman E uzayı "refleksif/yansıyan" olarak adlandırılır.

Tanım 5.4.1. *E bir (reel ya da kompleks) Banach örgüsü ve $T \in \mathcal{B}(E)$ olmak üzere (E, T) ikilisi bir "dinamik sistem" olarak adlandırılır. Eğer bir $\Phi : E_1 \to E_2$ Banach örgü izomorfizmi (yani izometrik vektör örgü izomorfizmi) $T_2 \circ \Phi = \Phi \circ T_1$ olacak şekilde varsa (E_1, T_1) ve (E_2, T_2) dinamik sistemlerinin "izometrik" olduğu söylenir.*

Tanım 5.4.2. *Eğer $\hat{T}$ bir Banach örgü izomorfizmi ise ve bir $\hat{I} : E \to \hat{E}$ izometrik örgü injeksiyonu ile $\hat{Q} : \hat{E} \to E$ pozitif daralması her $n = 0, 1, 2, \ldots$ için*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T^n} & E \\ {\scriptstyle \hat{I}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \hat{Q}} \\ \hat{E} & \xrightarrow[\hat{T}^n]{} & \hat{E} \end{array}$$

değişmeli olacak şekilde var ise $(\hat{E}, \hat{T})$ dinamik sistemi, (E, T) dinamik sisteminin bir "örgü genleştirmesi" olarak adlandırılır. Eğer yukarıdaki diyagram; $\hat{T}$ sadece pozitif bir operatör olarak kabul edildiğinde verilen $\hat{I}$ ve $\hat{Q}$ için değişmeli ise $(\hat{E}, \hat{T})$ dinamik sistemi, (E, T) dinamik sisteminin bir "pozitif genleştirmesi" olarak adlandırılır.

Örgü genleştirmeleri için bir sonraki bölümde verilecek olan teoremler için de kullanılacak olan aşağıdaki gözlem, oldukça kullanışlıdır.

Gözlem 5.4.3. *İki pozitif genleştirmenin bileşimi yine bir pozitif genleştirme olur. Daha açık olarak;* (E,T) *dinamik sisteminin bir pozitif genleştirmesi* $(\tilde{E},\tilde{T})$ *ve* $(\tilde{E},\tilde{T})$ *dinamik sisteminin bir pozitif genleştirmesi* $(\hat{E},\hat{T})$ *ise bu durumda;* $(\hat{E},\hat{T})$ *dinamik sistemi,* (E,T) *dinamik sisteminin bir pozitif genleştirmesi olur. Yani pozitif genleştirme, geçişme özelliğine sahiptir.*

AM**-Uzayları Üzerinde Örgü Genleştirmeleri:**

Keyfi bir E Banach örgüsü üzerinde bir pozitif T operatörü için bir örgü genleştirmesi inşa etme problemi zordur. Bu nedenle u birimi ile E nin bir AM-uzayı olduğu durumdaki yapı incelensin. Kakutani Gösterim Teoremi nedeni ile; X kompakt ve X üzerindeki birim fonksiyon $u = \mathbb{1}_X$ olarak gösterilmek üzere[2] buradaki E, her zaman bir $C(X)$ Bancah örgüsü olarak temsil edilecektir. Ayrıca, $T \in \mathcal{B}(E)$ pozitif operatörünün $T\mathbb{1} = \mathbb{1}$ eşitliğini sağladığı varsayılacaktır. (E,T) dinamik sisteminin bir örgü genleştirmesinin inşası için aşağıdaki gibi devam edilecektir:

(i) $\hat{X} = X^{\mathbb{Z}}$ ve $\hat{E} := C(\hat{X})$ olarak tanımlansın. $\hat{E}$ içinde, $f_j \in C(X)$ olmak üzere

$$\bigotimes_{-n}^{n} f_j : (x_j)_j \mapsto \prod_{-n}^{n} f_j(x_j)$$

fonskiyonlarının tüm sonlu toplamlarının $\bigotimes_{-\infty}^{\infty} C(X)$ alt-uzayı yoğun bir alt-cebir olur.

(ii) $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, k. koordinat üzerine olan $(x_j)_j \mapsto x_k$ projeksiyonu $i_k : \hat{X} \to X$ ile gösterilsin. Her $k \in \mathbb{Z}$ için $I_k f = f \circ i_k$ sağlanacak şekilde bir $I_k : C(X) \to C(\hat{X})$ izometrik örgü injeksiyonu bulunur (bu notasyon kullanılarak $\bigotimes_{-n}^{n} f_j = \prod_{-n}^{n} I_j f_j$ elde edilir). $\hat{I} := I_0$ olarak seçilsin.

(iii) $C(\hat{X})$ üzerinde; $\hat{X}$ üzerindeki $(x_j)_j \mapsto (x_{j-1})_j$ sağa öteleme dönüşümü -yani, her $\hat{f} \in C(X)$ için $\hat{T}\hat{f}((x_j)_j) = \hat{f}((x_{j-1})_j)$ - ile oluşturulan $\hat{T}$ örgü izomorfizmi düşünülsün. Bu durumda her $k \in \mathbb{Z}$ için $\hat{T}^k I = I_{-k}$ eşitliği sağlanır.

(iv) Bu inşadaki kritik nokta uygun bir $\hat{Q} : C(\hat{X}) \to C(X)$ seçimidir. $(C(\hat{X}),\hat{T})$ dinamik sisteminin, $(C(X),T)$ dinamik sisteminin örgü genleştirmesi olması

[2] $A \subset X$ kümesinin karakteristik fonksiyonu $\mathbb{1}_A$ ve $\mathbb{1}_X$ için bazen $\mathbb{1}$ yazılacaktır.

için $0 \leq k$ için $\hat{Q}I_{-k}f = T^k f$ eşitliğinin sağlanması ve $f \in C(X)$ olması gerekir. Aşağıdaki lemma nedeniyle böyle bir $\hat{Q}$ dönüşümünün var olduğu sonucuna ulaşılır.

Lemma 5.4.4. $\hat{Q}_0 : \bigotimes_{-\infty}^{\infty} C(X)$, $\hat{Q}_0 \mathbb{1}_{\hat{X}} = \mathbb{1}_X$ *ve* $0 \leq f_j \in C(X)$ *ise* $\hat{Q}_0(\bigotimes_{-n}^{n} f_j) \geq 0$ *sağlanacak şekilde bir lineer operatör olsun. Bu durumda* $\hat{Q}_0$ *operatörü bir* $\hat{Q} : C(\hat{X}) \to C(X)$ *pozitif daralmasına sürekli olarak genişler.*

Kanıt. [11, Lemma 2.1]. □

Önerme 5.4.5. $T\mathbb{1} = \mathbb{1}$ *olmak üzere her* $(C(X), T)$ *dinamik sistemi bir örgü genleştirmesine sahiptir.*

Kanıt. [11, Proposition 2.2]. □

AL-Uzayları Üzerinde Örgü Genleştirmeleri:

Burada, AL-uzayları üzerindeki pozitif daralmalar için örgü genleştirmelerinin varlığı hakkında konuşulacaktır. Bir önceki kısımda anlatılan AM-uzayları üzerindeki örgü genleştirmelerinin yapısına benzer şekilde bir yapı burada da kurulabilir.

Buradaki motivasyon; $T \in \mathcal{B}(E)$ pozitif bir daralma ve u zayıf sıra birimi ile E bir AL-uzayı olarak kabul edildiğinde, yine Kakutani Gösterim Teoremi'nin kullanılması, E uzayının $L_1(X, \Sigma, \mu)$, $\mu(X) < \infty$, dualinin ise $E' = L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ olarak temsil edilmesi ve $T'\mathbb{1} \leq \mathbb{1}$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu açıklanan durum ile ilgili daha detaylı bilgi [11] içinde bulunabilir.

5.5 Pozitif Daralmaların Örgü Genleştirmeleri

Daha önceden de bahsedildiği gibi L_1 uzayları için genleştirme kavramı üzerinde [11] içinde durulmuştu. Buradaki amaç, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere tüm L_p uzayları için benzer fikri vermektir. Bunun için, M. A.Akçaoğlu tarafından geliştirilen ve, "Refleksif bir L_p uzayı üzerindeki her pozitif daralma, örgü genleştirmesine sahiptir. " olarak bilinen sonucun fonksiyonel analitik bir ispatı verilecektir.

Teorem 5.5.1. *E refleksif bir L_p uzayı olsun. Her $T \in \mathcal{B}(E)$ pozitif daralması zayıf sıra birim ile bir $\hat{E}$ L_p uzayı üzerinde bir $\hat{T}$ örgü genleştirmesine sahiptir. Daha açık olarak; her $n = 0, 1, 2, \ldots$ için*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T^n} & E \\ {\scriptstyle \hat{I}}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \hat{Q}} \\ \hat{E} & \xrightarrow[\hat{T}^n]{} & \hat{E} \end{array}$$

değişmeli olacak şekilde sonlu bir $(\hat{X}, \hat{\mu})$ ölçü uzayı, bir $\hat{T} \in \mathcal{B}(\hat{E})$ Banach örgü izomorfizm, $\hat{E} = L_p(\hat{X}, \hat{\mu})$, bir $\hat{I} : E \to \hat{E}$ izometrik örgü injeksiyonu ve bir $\hat{Q} : \hat{E} \to E$ pozitif daralması vardır.

Kanıt. [3] içinde geliştirilen ultra çarpım tekniği nedeni ile bu teoremin ispatını sonlu boyutlu E uzayı için vermek yeterlidir. Ancak, sonlu boyutlu bir E L_p uzayı için $Tu \leq v^{q-1}$ ve $T'v \leq u^{p-1}$ olacak şekilde $0 << u \in E$ ve $0 << v \in E'$ zayıf sıra birimlerinin varlığı bilinmektedir ($v_2 \perp v_1$ olduğunda $v_1 := (Tu)^{p-1}$ ve $v := v_1 + v_2 >> 0$ alınırsa, Teorem 5.2.6 nedeni ile bir $u >> 0$, $T'(Tu)^{p-1} \leq u^{p-1}$ olacak şekilde vardır.) Dolayısıyla buradaki örgü genleştirmesi (bkz. Gözlem 5.4.3) Lemma 5.5.2 içindeki pozitif genleştirme ve Lemma 5.5.3 içindeki örgü genleştirmesinin birlikte düşünülmesiyle elde edilebilir. □

Lemma 5.5.2. *$1 < p < \infty$ ve $\mu(X) < \infty$ için $E = L_p(X, \mu)$ üzerinde bir daralma T olsun. $Tu \leq v^{q-1}$ ve $T'v \leq u^{p-1}$ olacak şekilde $0 << u \in E$ ve $0 << v \in E'$ zayıf sıra birimlerinin olduğu varsayılsın. Bu durumda (E, T), $0 << \hat{u} \in L_p(\hat{X}, \hat{\mu})$ ve $0 << \hat{v} \in L_q(\hat{X}, \hat{\mu})$ zayıf sıra birimleri için $T'\hat{v} = \hat{u}^{p-1}$ ve $\hat{T}'\hat{\imath} = \hat{v}^{p-1}$ sağlanacak şekilde bir $(L_p(\hat{X}, \hat{\mu}), \hat{T})$ pozitif genleştirmeye sahip olur.*

Kanıt. $\hat{X} := X \cup \{y, z\}$,

$$\alpha :=< u, u^{p-1} - T'v > \text{ ve } \beta :=< v^{q-1} - Tu, v >$$

olduğunda, $\hat{\mu} := \mu + \alpha\delta_y + \beta\delta_z$ olarak seçilsin. $\hat{E} = L_p(\hat{X}, \hat{\mu})$ içinde uygun şekilde bir projeksiyon bandı ile $E = L_p(X, \mu)$ belirlenir; $\hat{I}$ ve $\hat{Q}$ sırasıyla karşılık gelen injeksiyon ve projeksiyon olarak alınır. Son olarak,

$$\hat{T} := T + (2^{1/p}\beta)^{-1}\mathbb{1}_z \otimes (v^{q-1} - Tu + \mathbb{1}_z) + (2^{1/q}\alpha)^{-1}(u^{p-1} - T'v + \mathbb{1}_y) \otimes \mathbb{1}_y$$

olarak tanımlanırsa

$$\hat{u} := u + \mathbb{1}_y + 2^{1/p}\mathbb{1}_z \text{ ve } \hat{v} := v + 2^{1/q}\mathbb{1}_y + \mathbb{1}_z$$

için gerekli koşulları sağlayan T daralmasının pozitif genşleştirmesi elde edilmiş olur. □

Lemma 5.5.3. *$0 << u \in E$ ve $0 << v \in E'$ zayıf sıra birimleri için $Tu = v^{q-1}$ ve $T'v = u^{p-1}$ eşitliklerini sağlayan $E = L_p(X, \mu)$ üzerindeki bir daralma T olsun. Bu durumda (E, T) bir $(L_p(\hat{X}, \hat{\mu}), \hat{T})$ örgü genleştirmesine sahip olur.*

Kanıt. $u = \mathbb{1}$ olduğu varsayılsın ve

$$S_+, S_- : L_\infty(\mu) \to L_\infty(\mu)$$

operatörleri

$$S_+f := (T\mathbb{1})^{-1} \cdot Tf \text{ ve } S_- := T'(vf)$$

olarak tanımlansın. [11] içinde olduğu gibi ve özellikle de Lemma 5.4.4 nedeniyle $f_j \in C(X)$ için

$$\bigotimes_{-n}^{n} f_j \longmapsto S_-(f_{-1}S_-(f_{-2}\cdots S_-f_{-n})\cdots))f_0S_+(f_1S_+(f_2\cdots S_+f_n)\cdots))$$

sürekli genişleme ile bir

$$\hat{Q}_0 : C(X^{\mathbb{Z}}) \to L_\infty(X, \mu)$$

pozitif lineer operatörü elde edilir. Eğer

$$\hat{\mu} := \mu \circ \hat{Q}_0$$

olarak tanımlanırsa $\hat{X} := X^{\mathbb{Z}}$ üzerinde bir Radon ölçüsü elde edilir ve $\hat{Q}_0$ pozitif daralması $L_1(\hat{X},\hat{\mu})$ uzayından $L_1(\hat{X},\hat{\mu})$ uzayı içine genişletilebilir. Riesz Convexity Teoremi nedeniyle, kısıtlanışı olan

$$\hat{Q} : L_p(\hat{X},\hat{\mu}) \to L_p(X,\mu)$$

operatörü de pozitif daralma olur. Benzer argümanlar kabul edilen injeksiyonun 0. koordinatı için uygulanırsa (bkz. 5.4(ii))

$$\hat{I}_0 : C(X) \to C(\hat{X})$$

olur ve bir

$$\hat{I} : L_p(X,\mu) \to L_p(\hat{X},\hat{\mu})$$

izometrik örgü injeksiyonu elde edilir. Ayrıca $\hat{Q}' = \hat{I}$ sağlanır. Şimdi, $\hat{X}$ üzerinde τ sağ öteleme operatörüne indirgenen $C(\hat{X})$ üzerindeki örgü izomorfizmi göz önüne alınsın (bkz. 5.4(iii)). Bu operatör ve $\hat{f} := \bigotimes_{-n}^{n} f_j \in C(\hat{X})$ için

$$\begin{aligned}\int \hat{f}\circ\tau d\hat{\mu} &= \int S_-(f_0S_-(f_{-1}\cdots))f_1S_+(f_2S_+(f_3\cdots))d\mu\\ &= \int vf_0S_-(f_{-1}\cdots)T(f_1S_+(f_2\cdots))d\mu\\ &= \int S_-(f_{-1}\cdots)f_0S_+(f_1S_+(f_2\cdots))v^q d\mu\\ &= \int \hat{Q}\hat{f}\cdot v^q d\mu = \int \hat{f}\hat{I}\cdot v^q d\hat{\mu}\end{aligned}$$

elde edilir, dolayısıyla τ, bir

$$\hat{T} : L_p(\hat{X},\hat{\mu}) \to L_p(\hat{X},\hat{\mu})$$

Banach örgü izomorfizmi tanımlamak için kullanılabilir, yani

$$\hat{T}\hat{f} := \hat{I}v^{q-1}\cdot f\circ\tau^{-1}$$

olur. Böylece,

$$\int \left|\hat{T}\hat{f}\right| d\hat{\mu} = \int \left|\hat{I}v^{q-1}\cdot f\circ\tau^{-1}\right|^p d\hat{\mu} = \int \hat{I}v^q\,|f|^p\circ\tau^{-1}d\hat{\mu} = \int \left|\hat{f}\right|^p d\hat{\mu}$$

elde edilir. Son olarak $\hat{T}$ operatörünün T operatörünün bir genleştirmesi olduğu, yani $n = 0,1,2,\ldots$ için $\hat{Q}\hat{T}^n\hat{I} = T^n$ olduğu gösterilmelidir. Bu amaçla, ilk olarak $f \in L_p(X,\mu)$ için

$$\hat{T}^n\hat{I}f = v_0^{q-1}\otimes\cdots\otimes v_{n-1}^{q-1}\otimes f_n$$

eşitliğinin gerçeklenir ve dolayısıyla $n \geq 0$ ve $f, g \in L_p(X, \mu)$ için

$$\begin{aligned} < \hat{Q}\hat{T}^n \hat{I} f, g > &=< \hat{T}^n \hat{I} f, \hat{Q}' g > \\ &= \int v_0^{q-1} \otimes \cdots \otimes v_{n-1}^{q-1} \otimes f_n \cdot \hat{I} g d\mu \\ &= \int \hat{Q}(v_0^{q-1} \otimes \cdots \otimes v_{n-1}^{q-1} \otimes f_n) g d\mu \\ &=< T^n f, g > \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. $\square$

KAYNAKLAR

[1] M.A. Akcoglu, "A pointwise ergodic theorem in L_p spaces," *Canad. J. Math.* **27** (1975), no. 5, 1075–1082.

[2] M.A. Akcoglu & P. Ekkehard Kopp, "Construction of dilations of positive L_p-contractions," *Math. Z.* **155** (1977), no. 2, 119-127.

[3] M.A. Akcoglu & L. Sucheston, "Dilations of positive contractions on L_p spaces," *Canad. Math. Bull.* **20** (1977), no. 3, 285–292.

[4] C.D. Aliprantis & O. Burkinshaw, *Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics*, Second edition, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 105, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[5] C.D. Aliprantis & O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Reprint of the 1985 original, Springer, Dordrecht, 2006.

[6] A. Bellow, "A problem in L^p-spaces," in: *Measure Theory (Proc. Conf., Oberwolfach, 1975)*, A. Bellow & D. Kölzow (eds.), pp. 381–388. Lecture Notes in Math., Vol. 541, Springer, Berlin, 1976.

[7] H. Bercovici, *Operator Theory and Arithmetic in H^∞*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 26, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[8] H. Bercovici & T. Smotzer, "Quasisimilarity of invariant subspaces for uniform Jordan operators of infinite multiplicity," *J. Funct. Anal.* **140** (1996), no. 1, 87–99.

[9] R. Clouâtre, "Quasiaffine orbits of invariant subspaces for uniform Jordan operators," *J. Funct. Anal.* **266** (2014), no. 7, 4101–4114.

[10] G.B. Folland, *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*, Second edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[11] M. Kern, R. Nagel & G. Palm, "Dilations of positive operators: construction and ergodic theory," *Math. Z.* **156** (1977), no. 3, 265–277.

[12] W.A.J. Luxemburg & A.C. Zaanen, *Riesz Spaces, I*, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[13] Rubén A. Martinez-Avendaño & P. Rosenthal, *An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 237, Springer, New York, 2007.

[14] R. Meise & D. Vogt, *Introduction to Functional Analysis*, Translated by M.S. Ramanujan, Clarendon Press, Oxford-New York, 1997.

[15] P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[16] R. Nagel & G. Palm, "Lattice dilations of positive contractions on L_p spaces," *Canad. Math. Bull.* **25** (1982), no. 3, 371–374.

[17] H. Radjavi & P. Rosenthal, *Invariant Subspaces*, Second edition, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003.

[18] B. Sz.-Nagy, C. Foias, H. Bercovici & L. Kérchy, *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*, Second ed., Revised and enlarged edition, Universitext, Springer, New York, 2010.

[19] S. Willard, *General Topology*, Reprint of the 1970 original, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004.

ÖZGEÇMİŞ

Ayşenur Altunsoy, 10 Ağustos 1991 tarihinde İstanbul'da doğdu. İlköğrenimini 2005, ortaöğrenimini 2009 yıllarında İstanbul'da tamamladıktan sonra, 2009 yılında İstanbul Kültür Üniversitesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü'nde lisans öğrenimine başladı. 2013 yılında bu bölümün lisans programını tamamladı; İstanbul Kültür Üniversitesi, Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı'nda aynı yıl başladığı yüksek lisans eğitimine hâlen devam etmektedir.