**İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# ESASLI NİLPOTENT LIE CEBİRLERİ İÇİN BERGER-WANG FORMÜLÜ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Nuri Umut ARSLANDOĞAN**

**1309251002**

**Anabilim Dalı: Matematik-Bilgisayar**

**Programı: Matematik-Bilgisayar**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. R. Tunç MISIRLIOĞLU**

**TEMMUZ 2015**

**İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# ESASLI NİLPOTENT LIE CEBİRLERİ İÇİN BERGER-WANG FORMÜLÜ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Nuri Umut ARSLANDOĞAN**

**1309251002**

| | | |
|---|---|---|
| **Tezin Enstitüye Verildiği Tarih** | : | **1 Temmuz 2015** |
| **Tezin Savunulduğu Tarih** | : | **20 Temmuz 2015** |

| | |
|---|---|
| **Tez Danışmanı:** | **Doç.Dr. R.Tunç MISIRLIOĞLU (İKÜ)** |
| **Diğer Jüri Üyeleri:** | **Doç.Dr.Mert ÇAĞLAR(İKÜ)** |
| | **Y.Doç.Dr. Mohan RAVICHANDRAN (MSGSÜ)** |

**TEMMUZ 2015**

## ÖNSÖZ

Yüksek Lisans eğitimim süresince gerek verdiği derslerde gerekse tezimin hazırlık aşamasında tüm bilgisini benimle paylaşan, sabırla her konuda desteğini esirgemeyen ve gerekli tüm kaynaklara ulaşmam için her zaman yardımcı olan danışmanım Doç.Dr. R.Tunç Mısırlıoğlu'na, kendisinden aldığım derslerde bana çok şey kattığına inandığım Doç.Dr. Mert Çağlar'a, bir çok konuda yardımlarını esirgemeyen Araş. Gör. Begüm Çalışkan'a, destek ve güvenleriyle her zaman yanımda olan eşim Sibel Arslandoğan'a ve oğlum Ersan Batu Arslandoğan'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Temmuz 2015 Nuri Umut ARSLANDOĞAN

| | | |
|---|---|---|
| **Üniversitesi** | **:** | **İstanbul Kültür Üniversitesi** |
| **Enstitüsü** | **:** | **Fen Bilimleri** |
| **Anabilim Dalı** | **:** | **Matematik-Bilgisayar** |
| **Programı** | **:** | **Matematik-Bilgisayar** |
| **Tez Danışmanı** | **:** | **Doç. Dr. R. Tunç MISIRLIOĞLU** |
| **Tez Türü ve Tarihi** | **:** | **Yüksek Lisans - Temmuz 2015** |

## ÖZET


## ESASLI NİLPOTENT LIE CEBİRLERİ İÇİN BERGER-WANG FORMÜLÜ

**Nuri Umut ARSLANDOĞAN**

**Bu tez çalışmasında, eğer $\overline{A(\mathcal{L})}$, bir Lie cebri tarafından üretilen kapalı bir Banach cebri ise, her önkompakt $M \subset \overline{A(\mathcal{L})}$ alt kümesi için $\rho(M) = r(M)$ Berger-Wang formülünün sağlandığı gösterilmiştir. Burada, $\rho(M)$ ve $r(M)$ sırasıyla, ortak spektral yarıçapı ve Berger-Wang spektral yarıçapını göstermektedir. Ayrıca, esaslı nilpotent ve çözülebilir Lie cebirleri tarafından üretilen kapalı Banach cebrinin her önkompakt alt kümeleri için de Berger-Wang formülünün sağlandığı gösterilmiştir. Son olarak, yarıçözülebilir Lie cebirleri tarafından üretilen Banach cebirlerinin her önkompakt alt kümeler için Berger-Wang formülünü sağlayıp sağlamadığı açık problem olarak ortaya konmuştur.**



| | | |
|---|---|---|
| **Anahtar Kelimeler** | **:** | **Berger-Wang formülü, Lie cebirleri,** |
| | | **ortak spektral yarıçap, topolojik radikaller.** |

| | | |
|---|---|---|
| **University** | **:** | **İstanbul Kültür University** |
| **Institute** | **:** | **Institute of Science** |
| **Science Programme** | **:** | **Mathematics and Computer Science** |
| **Programme** | **:** | **Mathematics and Computer Science** |
| **Supervisor** | **:** | **Assoc. Prof. Dr. R.Tunç MISIRLIOĞLU** |
| **Degree Awarded and Date** | **:** | **M.Sc. - July 2015** |

## ABSTRACT

## BERGER-WANG FORMULA FOR ESSENTIALLY NILPOTENT LIE ALGEBRAS

**Nuri Umut ARSLANDOĞAN**

**In this thesis, it proved that if a closed Banach algebra $\overline{A(\mathcal{L})}$ is generated by a nilpotent Lie algebra $\mathcal{L}$, then the Berger-Wang formula $\rho(M) = r(M)$ holds for every precompact subset $M \subset \overline{A(\mathcal{L})}$, where $\rho(M)$ and $r(M)$ denote the joint spectral radius and Berger-Wang spactral radius of $M$, respectively. It is also proved that Berger-Wang formula holds for a closed Banach algebra generated by both an essentially nilpotent and solvable Lie algebra for every precompact subsets of it. Finally, it is presented whether Berger-Wang formula holds for a Banach algebra generated by a quasisolvable Lie algebra or not as an open problem.**

| | | |
|---|---|---|
| **Keywords** | **:** | **Berger-Wang Formula, Lie algebras** |
| | | **joint spectral radius, topological radicals.** |

# İÇİNDEKİLER

# BÖLÜM 1

# GİRİŞ

1960 yılında Rota ve Strang [16] bir normlu cebrin sınırlı bir alt kümesi için ortak spektral yarıçapı tanımlamışlardır. Ortak spektral yarıçap kavramı dalgacık teorisi, fark denklemleri, operatör teori ve değişmez alt uzaylar teorisi gibi matematiğin bir çok alanında uygulamalarını bulmuştur. Bu ilgi ortak spektral yarıçap hesaplama formülleri üzerine çalışmak için teşvik edici olmuştur. Ortak spektral yarıçap hesaplama için önemli bir formülü 1992 yılında Berger ve Wang [4] sonlu boyutlu doğrusal uzaylar üzerinde tanımlı operatörlerin sınırlı bir ailesi için vermiştir. Bu formül sınırlı bir alt kümenin farklı bir spektral karakteristiğini içermektedir. Bu da Berger-Wang spektral yarıçapı olarak adlandırılmaktadır. Bu çalışmalarında Berger ve Wang, sonlu boyulu doğrusal uzaylar üzerinde tanımlı operatörlerin sınırlı bir alt kümesinin ortak spektral yarıçapının, tanımladıkları Berger-Wang spektral yarıçapa eşit olduğunu göstermişlerdir. Bu eşitlik Berger-Wang formülü olarak bilinir. Bu formül çok önemlidir çünkü ortak spektral yarıçap ile operatörlerin spektrumları arasındaki ilişkiyi vermektedir. 2000 yılında da Shulman ve Turovskii [17] Berger-Wang formülünün sonsuz boyutlu Banach uzayları üzerinde tanımlı kompakt operatörlerin önkompakt kümeleri ve esaslı skaler operatörlerin önkompakt kümeleri için sağlandığını göstermişlerdir. Shulman ve Turovskii'nin sonsuz boyutlu Banach uzayları üzerinde tanımlı kompakt operatörlerin önkompakt alt kümeleri için doğruluğunu gösterdikleri bu Berger-Wang formülü özellikle operatör yarı gruplarını ve Lie cebirlerini incelemek için kullanılmıştır. Bu formülün kullanışlılığını anlamak için Volterra yarıgrup problemi olarak bilinen "Volterra operatörlerin herhangi bir yarıgrubu değişmez alt uzaya sahip midir?" probleminin [21] kolayca çözülebildiğini görmek yeterlidir. Ayrıca Shulman ve Turovskii yine [17] de Genelleştirilmiş Berger-Wang Formülü olarak bilinen ve ortak spektral yarıçapın, Berger-Wang spektral yarıçapı ile esaslı spektral yarıçaptan büyük olanına eşit olduğunu ifade eden formülü ve bu formülün geçerli olduğu bazı durumları vermişlerdir. Shulman ve Turovskii 2012 yılında ki [20] deki çalışmalarında ise genelleştirilmiş Berger-Wang formülünün sonsuz boyutlu Banach uzaylarında sınırlı operatörlerin önkompakt bir alt kümesi için de gerçeklendiğini göstermişlerdir. 2010 yılında ise R.T.Mısırlıoğlu [13] daki çalışmasında Berger-Wang formülünün sınırlı operatörlerin birlikte kompakt kümeleri için gerçeklendiğini ispatlamıştır.

Bu tez çalışması iki ana bölümden oluşmaktadır. İkinci bölüm temel tanım ve kavramları içermektedir. Bu bölümde normlu uzaylar, bölüm uzayları, spektral özellikler, topolojik radikaller Lie cebirleri ve Berger-Wang formülü konuları çalışılmış, tanımlar, özellikler ve bazı önemli teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise nilpotent ve esaslı nilpotent Lie cebirleri tarafından üretilen kapalı Banach cebirlerinin her önkompakt alt kümesi için Berger-Wang formülünün sağlandığı gösterilmiştir. Ayrıca çözülebilir Lie cebirleri tarafından üretilen Banach cebirlerinin her ön kompakt alt kümesi için de Berger-Wang formülünün sağlandığı gösterilmiştir. Son olarak ise dördüncü bölümün olan son kısımda, daha geniş bir cebir olan yarıçözülebilir Lie cebirleri tarafından üretilen Banach cebirlerinin her önkompakt alt kümesi için de Berger-Wang formülünün sağlanıp sağlanmadığı açık problem olarak verilmiştir.

# BÖLÜM 2

# TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR

Bu bölümde kullanacağımız kavramların tanımlarıyla, ilgili önerme ve teoremleri vereceğiz.

## 2.1 Normlu Uzaylar

X, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzayı olsun. X üzerindeki bir *norm* aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$\| \, . \, \| : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonudur: Her $x, y \in \mathrm{X}$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için

(1) $\| x \| \geq 0$

(2) $\| x \| = 0 \iff x = 0$

(3) $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$

(4) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

**Tanım 2.1.1.** *Üzerinde* $\| \, . \, \|$ *normu tanımlanmış olan bir* X *vektör uzayına normlu vektör uzay ya da sadece normlu uzay adı verilir ve* $(\mathrm{X}, \| \, . \, \|)$ *ile gösterilir.* X *bir normlu uzay ise* $\| x \| = 1$ *eşitliğini sağlayan* $x \in \mathrm{X}$ *vektörüne birim vektör adı verilir.*

$(\mathrm{X}, \| \, . \, \|)$ bir normlu uzay olsun. $d(x,y) = \| x - y \|$ ile tanımlı $d : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde bir metrik tanımlar.

**Tanım 2.1.2.** *Bir vektör uzay, normdan indirgenen metrik ile tam ise Banach uzayı olarak adlandırılır.*

Her normlu uzay tam olmayabilir fakat daha büyük bir Banach uzayının alt kümesi olarak kabul edilebilir. Tam olmayan bir $X$ normlu uzayını içeren en küçük Banach uzayına $X$ uzayının *tamlanışı* denir. Biz tamlanışı $\tilde{X}$ ile göstereceğiz. Eğer $X$, bir normlu $Y$ uzayının bir alt uzayı ise bu durumda $\tilde{X}$, $X$ alt uzayının $\tilde{Y}$ içindeki kapanışı olarak tanımlanır. Dolayısıyla $X$ alt uzayının $Y$ uzayındaki kapanışını $\overline{X} = \tilde{X} \cap Y$ şeklinde yazabiliriz.

X ve Y aynı $\mathbb{F}$ skaler cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. Bir *T:* $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ fonksiyonu *her* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $x, y \in \mathrm{X}$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

özelliğini sağlıyorsa $T$ ye bir *lineer operatör* adı verilir. *T(x)* gösterimi yerine kolaylık olması için $Tx$ kullanılacaktır.

*T:* $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ şeklinde tanımlı tüm lineer operatörlerin kümesini $L(X,Y)$ ile göstereceğiz. Eğer $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$ ise $L(X,X)$ yerine kısaca $L(X)$ gösterimi kullanılır.

$(X, \| \, . \, \|_X)$ ve $(Y, \| \, . \, \|_Y)$ normlu vektör uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer *her* $x \in X$ için

$$\| Tx \|_Y \leq k \| x \|_X \tag{2.1}$$

olacak şekilde pozitif bir $k$ reel sayısı varsa $T$ ye *sınırlı operatör* denir. Uygulamada farklı uzaylar üzerinde tanımlı normların hepsi aynı simge ile gösterilir ve (2.1) için

$$\| Tx \| \leq k \| x \|$$

yazılır. X ve Y normlu vektör uzaylar olsun. X den Y ye tanımlı bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesini $B(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ ile göstereceğiz. Yine aynı şekilde X=Y için $B(X,Y)$ yerine kısaca $B(X)$ gösterimi kullanılır.

X ile Y normlu uzaylar ve $T : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ operatörü için *operatör normu*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Tx\|$$

şeklinde tanımlanır. Sınırlı bir $T$ operatörü için $\| T \| < \infty$ dur. Sınırlı bir operatörün normu aynı zamanda

$$\|T\| = \min\left\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\,\|x\| \;\; her\, x \in \mathrm{X} \;\; için\right\}$$

şeklinde de tanımlanır.

**Tanım 2.1.3.** *$\mathcal{A}$ bir vektör uzayı olsun. Her $x, y, z \in \mathcal{A}$ ve her $\alpha$ skaleri için*

*(1)* $x(y+z) = xy + xz$

*(2)* $(x+y)z = xz + yz$

*(3)* $(\alpha x)y = \alpha(xy)$

*özelliklerini sağlayan ve çarpım olarak adlandırılıan $(x, y) \to xy$ ikili işlemiyle donatılan $\mathcal{A}$ vektör uzayına cebir denir.*

Her $x \in \mathcal{A}$ için $xe = ex = x$ koşulunu sağlayan $e \in \mathcal{A}$ vektörü birim vektör olarak adlandırılır. Birim vektöre sahip bir cebre ise *birimli cebir* denir. Ayrıca her $x, y, z \in \mathcal{A}$ için $(xy)z = x(yz)$ koşulunu sağlayan cebir *birleşmeli cebir,* her $x, y \in \mathcal{A}$ için $xy = yx$ koşulunu sağlayan cebir de *değişmeli cebir* olarak adlandırılır.

Bir $\mathcal{A}$ cebri, her $x, y \in \mathcal{A}$ için $\|xy\| \leq \|x\| \,.\, \|y\|$ koşulunu sağlayan bir $\|.\|$ normu altında Banach uzayı ise *Banach cebri* adını alır.

## 2.2 Bölüm Uzayları

$\mathcal{V}$, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $W \subset \mathcal{V}$ alt uzay olsun. Her $v \in \mathcal{V}$ için $v + W = \{v + w : w \in W\}$ ile tanımlı $v + W$ kümesi, $\mathcal{V}$ uzayının alt kümesidir ve $W$ kümesinin elemanlarına $v$ elemanının eklenmesiyle elde edilir. $0 \in W$ ve $v = v + 0$ olduğundan $v \in v + W$ dir. $v + W$ formundaki alt kümeye $W$ kümesinin $\mathcal{V}$ uzayındaki bir *koseti* denir.

**Önerme 2.2.1.** *$v, v' \in \mathcal{V}$ olsun. Bu durumda $v + W = v' + W$ olması için gerek ve yeter koşul $v - v' \in W$ olmasıdır.*

*Kanıt.* $v + W = v' + W$ olsun. $v \in v + W$ olduğundan $v \in v' + W$ olur. Bu durumda $v = v' + w$ olacak şekilde $w \in W$ vardır. Buradan da $v - v' = w \in W$ elde edilir.
Tersine, $v - v' \in W$ olsun. Genelliği bozmaksızın $v \in v' + W$ olduğunu göstermek yeterlidir. $w := v - v' \in W$ diyelim. Bu durumda $v = v' + w$ olur. Bu ise $v \in v' + W$ olması demektir. $\square$

**Tanım 2.2.2.** *$\mathcal{V}/W = \{v + W : v \in \mathcal{V}\}$ ile tanımlanan ve "$\mathcal{V}$ mod $W$" şeklinde ifade edilen $\mathcal{V}/W$ kümesi $W$ kümesinin $\mathcal{V}$ uzayındaki kosetlerinin kolloksiyonudur.*
Önerme 2.2.1'e göre $\mathcal{V}$ nin $v, v'$ gibi iki elemanının $\mathcal{V}/W$ kümesinde aynı elemanı belirtmesi için gerek ve yeter koşul $v - v' \in \mathcal{V}$ olmasıdır.

**Tanım 2.2.3.** *$\mathcal{V}$, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $W \subset \mathcal{V}$ alt uzay olsun. $\mathcal{V}/W$ kümesi, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde aşağıda tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemi ile bir vektör uzayı olur.*
*$v + W,\ v' + W \in \mathcal{V}/W$ ve $a \in \mathbb{F}$ için;*

- $(v + W) + (v' + W) := (v + v') + W$
- $a.(v + W) := av + W$

**Önerme 2.2.4.** *$v+W = v'+W$ olduğunu varsayarsak bu durumda $v''+W \in \mathcal{V}/W$ için $(v + W) + (v'' + W) = (v' + W) + (v'' + W)$ ve $a \in \mathbb{F}$ için $a.(v + W) = a.(v' + W)$ olur. Bu nedenle $\mathcal{V}/W$ kümesinde tanımlanan toplama ve skaler ile çarpma işlemlerinin iyi tanımlı olduğunu söyleyebiliriz.*

*Kanıt.* İlk olarak toplama işleminin iyi tanımlı olduğunu gösterelin. Genelliği bozmaksızın $(v + W) + (v'' + W) \subseteq (v' + W) + (v'' + W)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaçla $u \in (v + W) + (v'' + W) = (v + v'') + W$ alalım. Bu durmda $u = (v+v'')+w$ olacal şekilde $w \in W$ vardır. $u \in (v'+W)+(v''+W) = (v'+v'')+W$ olduğunu göstermek istiyoruz. $v+W = v'+W$ olduğundan $v-v' \in W$ elde edilir. $w' := v - v'$ dersek $v = v' + w'$ olur. Bundan dolayı;

$$u = (v + v'') + w = ((v' + w') + v'') + w = (v' + v'') + (w + w')$$

yazılabilir. $w + w' \in W$ olduğundan $u \in (v' + v'') + W$ elde edilir. Buradan da $(v + v'') + W = (v' + v'') + W$ sonucuna ulaşılır.

Şimdi $a \in \mathbb{F}$ alalım. Skaler ile çarpma işleminin iyi tanımlı olduğunu göstermek için $a.(v+W) \subseteq a.(v'+W)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $u \in a.(v+W) = av + W$ alalım. Bu durumda $u = av + w$ olacak şekilde $w \in W$ vardır. $w' := v - v'$ dersek;

$$u = av + w = a(v' + w') + w = av' + (aw' + w)$$

şeklinde yazılabilir. $(aw' + w) \in W$ olduğundan $u \in av' + W$ elde edilir. Buradan da $a.(v+w) = a.(v'+w)$ olduğu görülmüş olur. □

**Teorem 2.2.5.** *$\mathcal{V}/W$ bir $\mathbb{F}$ vektör uzayıdır.*

**Önerme 2.2.6.** *$\mathcal{V}$ sonlu boyutlu ise $\mathcal{V}/W$ uzayı da sonlu boyutludur. Bu durumda*

$$dim(\mathcal{V}/W) = dim\mathcal{V} - dimW$$

*olur.*

**Örnek 2.2.7.** *$W = \{0\}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{V}$ vektör uzayının iki $v, v'$ elemanının $\mathcal{V}/W$ uzayında aynı elemanı belirtmesi için gerek ve yeter koşul $v - v' \in \{0\}$ olması yani $v = v'$ olması demektir. Bu nedenle $\mathcal{V}/\{0\} = \mathcal{V}$ olur. Eğer $W = \mathcal{V}$ alınırsa da $\mathcal{V}/\mathcal{V} = \{0\}$ olur.*

**Örnek 2.2.8.** *$\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ ve $W$ alt uzayı da y-ekseni olsun. $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ için $(x, y) + W = (x', y') + W$ olması için gerek yeter koşul $(x, y) - (x', y') = (x - x', y - y') \in W$ olmasıdır. $W$, y-ekseni olduğundan dolayı bu $x - x' = 0$ anlamına gelir. Bu sebeple, $\mathcal{V}/W$ bölüm uzayının bir vektörü, y-koordinatının değeri önemli olmadığından x-koordinatı belirtilerek belirlenir. Özellikle, $\mathcal{V}/W$ bölüm uzayının herhangi bir elemanı tam olarak $(x, 0)$ formundaki bir eleman ile temsil edilir. Bu sebeple $\mathcal{V}/W$ vektör uzayını, $(x, 0)$ formundaki vektörlerin kümesi olarak tanımlayabiliriz. Bu da x-ekseni olduğu anlamına gelir. Yani; $\mathcal{V}/W = \{(x, o) : x \in \mathbb{R}\}$ olur.*

**Örnek 2.2.9.** *$\mathcal{V} = \mathbb{F}^\infty$ ve $W = \{(0, x_2, x_3, ...) : x_i \in \mathbb{F}\}$ olsun. $\mathcal{V}$ uzayındaki herhangi iki elemanın $\mathcal{V}/W$ bölüm uzayında aynı elemanı belirtmesi için gerek ve yeter koşul birinci koordinatlarının aynı olmasıdır. Bu sebeple $\mathcal{V}/W$ uzayının bir elemanı sadece birinci koordinat olan $x_1$ değeri ile belirlenir. Bu bize $\mathcal{V}/W$*

*uzayının $\mathbb{F}$ olduğunu verir. (Daha kesin bir ifadeyle, $\mathbb{F}^\infty$ uzayının "$x_1$-eksenidir".) Burada dikkat edilmesi gereken, $\mathcal{V}$ ile $W$ uzaylarının sonsuz boyutlu olmasına rağmen $\mathcal{V}/W$ bölüm uzayının boyutunun sonlu hatta bir olmasıdır.*

**Teorem 2.2.10.** *$T : V \to W$ lineer dönüşüm olsun. $S : V/\text{Çek}(T) \to Ran(T)$, $S(v + \text{Çek}(T)) = Tv$ ile tanımlı dönüşüm iyi tanımlıdır ve bir izomorfizmdir.*

*Kanıt.* $v + Çek(T) = v' + Çek(T) \Rightarrow v - v' \in Çek(T) \Rightarrow T(v - v') = 0 \Rightarrow Tv = Tv' \Rightarrow S(v + Çek(T)) = S(v' + Çek(T)) \Rightarrow S$ iyi tanımlıdır. Ayrıca $T$ dönüşümü lineer olduğundan, $S$ dönüşümü de lineer; $T$, görüntü kümesi üzerine örten olduğundan, $S$ dönüşümü de $Ran(T)$ üzerine örtendir. Aynı zamanda $S$, 1-1'dir. Gerçekten;
$v + Çek(T) \in Çek(S) \Rightarrow 0 = S(v + Çek(T)) = Tv \Rightarrow v \in Çek(T) \Rightarrow v + Çek(T) = Çek(T)$ olur. $Çek(T)$, $V/W$ uzayının sıfır vektörü olduğundan bu bize $Çek(S) = \{0\}$ olduğunu dolayısıyla $S$ dönüşümünün 1-1 olduğunu verir. □

**Önerme 2.2.11.** *$W \subset V$ bir alt uzay ve $T : V \to V$ olsun. Bu durumda $\widehat{T} : V/W \to V/W$, $\widehat{T}(v + W) = T(v) + W$ şeklinde tanımlı operatörün iyi tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $W$ alt uzayının $T$-değişmez olmasıdır.*

*Kanıt.* $v + W = v' + W \iff v - v' \in W dur.$ $w := v - v'$ dersek $\Rightarrow v = v' + w \Rightarrow \widehat{T}(v + W) = T(v) + W = (T(v') + T(w)) + W = T(v') + W$ (eğer $T(w) \in W$ ise) Bu durumda sonuç olarak $\widehat{T}$ dönüşümünün $V/W$ uzayında iyi tanımlı olması için herhangi $w \in W$ için $T(w) \in W$ olması gereklidir. □

**Teorem 2.2.12.** *Eğer $V$ sonlu boyutlu kompleks vektör uzayı ve $T : V \to V$ lineer ise bu durumda $V$ uzayının $\mathcal{M}(T)$ üst üçgen matrisi ile ilişkili bir tabanı mevcuttur.*

*Kanıt.* $dimV := n$ olsun. Biz $T$ nin en az bir tane sıfırdan farklı bir özvektörü olduğunu biliyoruz. Buna $v_1$ diyelim. Bu bizim tabanımızın ilk elemanı olsun. $v_1$, $T$ nin bir özvektörü olduğundan, $span(v_1)$, $T$-değişmezdir. O halde üstteki önermeden $\widehat{T} : V/span(v_1) \to V/span(v_1)$ iyi tanımlıdır. Bu bölüm uzayı da sonlu boyutludur dolayısıyla $\widehat{T}$, sıfırdan farklı bir özvektöre sahiptir.

Buna da $v_2 + span(v_1)$ diyelim. Bu durumda eğer $\lambda$ bu özvektörün özdeğeri ise $\widehat{T}(v_2+span(v_1)) = \lambda(v_2+span(v_1))$ olduğu elde edilir. Böylece $T(v_2)+span(v_1) = \lambda v_2+span(v_1)$ ve dolayısıyla $T(v_2)-\lambda v_2 \in span(v_1)$ olur. Bu $T(v_2) \in span(v_1, v_2)$ olduğu anlamına gelir. Buradan da $span(v_1, v_2)$ nin $T$-değişmez olduğu elde edilir. Burada unutulmamalıdır ki; $0 \neq v_2 + span(v_1) \in V/span(v_1)$ ve $v_2 \notin span(v_1)$ olduğundan $(v_1, v_2)$ lineer bağımsızdır. Bu şekilde elde edilen $v_2$ tabanımızın ikinci elemanı olsun. Şimdi $\widehat{\widehat{T}} : V/span(v_1, v_2) \to V/span(v_1, v_2)$ operatörü iyi tanımlı olduğundan sıfırdan farklı bir özvektör seçelim ve buna da $v_3 + span(v_1 + v_2)$ yukarıdakine benzer olarak $span(v_1, v_2, v_3)$, $T$-değişmezdir ve $(v_1, v_2, v_3)$ lineer bağımsızdır. Bu işleme devam edilirse $V$ uzayının, herhangi $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $span(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ nın $T$-değişmez olma özelliğine sahip $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tabanını inşa etmiş oluruz. $\mathcal{M}(T)$ nin karakterizasyonlarından biri üst üçgen olur. $\mathcal{M}(T)$ nin elde ettiğimiz tabanla ilgili olan üst üçgen olduğu sonucuna varırız. □

**Teorem 2.2.13.** *(Rank-Sıfırlılık)* $T : V \to W$ *lineer dönüşüm olsun. Bu durumda* $V \simeq \text{Çek}(T) + Ran(T)$ *ve* $dim\text{Çek}(T) + dimRan(T) = dimV$ *olur.*

**Sonuç 2.2.14.** $W \subset V$ *bir alt uzay ise* $V \simeq W \oplus V/W$ *ve* $dimV/W = dimV - dimW$ *olur.*

*Kanıt.* $Q : V \to V/W$, $Q(v) = v + W$ ile tanımlı lineer dönüşüme Rank-Nullity teoremi uygulanarak elde edilir. □

Burada yukarıda tanımlanan $Q$ dönüşümü lineer, örten ve $Çek(Q) = W$ dir.

**Teorem 2.2.15.** $T : V \to W$ *lineer dönüşüm ise* $T(V) \simeq V/\text{Çek}(T)$ *dir.*

*Kanıt.* $S : V/Çek(T) \to W,\ S(x + Çek(T)) = T(x)$ dönüşümünü tanımlayalım. $S$ iyi tanımlıdır çünkü $x + Çek(T) = y + Çek(T)$ ise $(x - y) \in Çek(T)$ dir. Bu ise $T(x - y) = 0$ demektir. Dolayısıyla $Tx = Ty$ elde edilir.
$Ran(S) = Ran(T)$ ve $Çek(S) = Çek(T)$ dir çünkü, $S(x + Çek(T)) = 0 \iff T(x) = 0 \iff x \in Çek(T) \iff x + Çek(T) = 0_{V/Çekt(T)}$ □

## 2.3 Spektral Özellikler

### 2.3.1 Bir Operatörün Spektrumu

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe X aşikar olmayan (yani X $\neq \{0\}$) kompleks Banach uzayı olarak alınacaktır. Eğer X reel Banach uzayı olarak veriliyorsa, X in yerine kompleksleştirilmesi olan $X_{\mathbb{C}}$ uzayı göz önüne alınabilir. X uzayının birim operatörü $I$ ile gösterilecek olup, her $\lambda$ komples sayısı $\lambda I$ şeklinde yazılabileceğinden $\lambda$ sayısı X uzayının bir operatörü olarak düşünülebilir.

**Tanım 2.3.1.** *$T \in B(X)$ operatörü için $\lambda - T$ operatörlerinin $X$ üzerinde terslenebilir olmayan tüm $\lambda$ kompleks sayılarının kümesine $T$ operatörünün spektrumu denir ve $\sigma(T)$ ile gösterilir. Yani bir $T \in B(X)$ operatörünün spektrumu*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - T) \text{ terslenebilir değildir}\}$$

*şeklindedir. Bir operatörün rezolvent kümesi de spektrumun bütünleyeni olarak tanımlanır ve Res(T) ile gösterilir. Bir başka ifadeyle $T \in B(X)$ operatörünün rezolvent kümesi*

$$Res(T) = \mathbb{C} \backslash \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - T),\ X \text{ uzayında terslenebilir bir operatördür.}\}$$

*biçimindedir.*

**Teorem 2.3.2.** *Aşikar olmayan bir Banach uzayında sınırlı bir operatörün spektrumu, karmaşık düzlemin boştan farklı kompakt bir alt kümesidir.*

*Kanıt.* [1, Theorem 6.10] □

**Teorem 2.3.3.** [1] *Eğer $T \in B(X)$ ve $|\lambda| > \| T \|$ ise bu durumda $\lambda \in Res(T)$ ve $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n$ serisi operatör normda yakınsak olduğundan*

$$(\lambda - T)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n$$

*ile verilir.*

*Kanıt.* Serinin norm yakınsaklığı $\frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$ den görülür. Biz serinin toplamının doğruluğunu göstermeliyiz. Bunu görmek için, $S = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n$ olsun.

$$
\begin{aligned}
(\lambda - T)S &= (\lambda - T)\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\lambda^{-(n+1)}T^n \\
&= \lim_{m\to\infty}\left[(\lambda - T)\sum_{n=0}^{m}\lambda^{-(n+1)}T^n\right] \\
&= \lim_{m\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{m}\lambda^{-n}T^n - \sum_{n=0}^{m}\lambda^{-(n+1)}T^{n+1}\right] \\
&= \lim_{m\to\infty}\left[I - \left(\frac{T}{\lambda}\right)^{m+1}\right] = I
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde $S(\lambda - T) = I$ olduğu görülür. Böylece $S = (\lambda - T)^{-1}$ elde edilmiş olur. □

**Tanım 2.3.4.** *Bir $T(x)$ operatörünün spektral yarıçapı, operatörün spektrumunu kapsayan $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r\}$ kapalı diskinin en küçük negatif olmayan yarıçapıdır ve $\rho(T)$ ile gösterilir. Yani;*

$$\rho(T) = sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

*şeklindedir.*

$\rho(T) \leq \| T \|$ eşitsizliği sağlanır. Daha önceden ifade edildiği gibi $T \in B(X)$ operatörünün spektrumu X uzayının herhangi bir eşdeğer normundan bağımsız olarak tanımlanmıştır. Dolayısıyla $\rho(T)$ normdan bağımsızdır. Fakat buna rağmen I.M. Gelfand'ın verdiği önemli bir formül ile spektral yarıçap $\rho(T)$, norm üzerinden de hesaplanabilmektedir.

**Teorem 2.3.5.** (Gelfand [1]) *Eğer $T \in B(X)$ ise spektral yarıçap*

$$\rho(T) = \lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \tag{2.2}$$

*Kanıt.* [1, Theorem 6.12] □

**Tanım 2.3.6.** *Bir $T \in B(X)$ operatörüne;*

*(1) Eğer $T^k = 0$ olacak şekilde en az bir pozitif $k$ tamsayısı varsa nilpotent,*

*(2) Eğer $\rho(T) = \lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$ ise yarınilpotent (quasinilpotent) denir.*

Bir operatörün nilpotent olması durumunda yarınilpotent olduğu açıktır.

**Teorem 2.3.7.** *$T \in B(X)$ olsun.*

*(1) Her pozitif $n$ tamsayısı için $\rho(T^n) = (\rho(T))^n$ dir.*

*(2) Eğer $S \in B(X)$ ve $ST = TS$ ise*

*(i) $\rho(T+S) \leq \rho(T) + \rho(S)$ ve*

*(ii) $\rho(TS) \leq \rho(T)\rho(S)$ dir.*

*Kanıt.* $T$ sınırlı bir operatör olsun.

*(1)* $n$ pozitif tamsayısı olsun. Bu durumda $\rho(T) = \lim\limits_{k\to\infty} \left\| T^{nk} \right\|^{\frac{1}{nk}}$ şeklinde yazılabilir. O halde $\rho(T^n) = \lim\limits_{k\to\infty} \left\| (T^n)^k \right\|^{\frac{1}{k}} = \left( \lim\limits_{k\to\infty} \left\| T^{nk} \right\|^{\frac{1}{nk}} \right)^n = \rho(T)^n$ olduğu görülür.

*(2)* Bu özelliğin ispatı, daha geniş bir durumu olan (operatör aileleri için) Teorem 2.3.22 den elde edilebilir.

□

### 2.3.2 Sınırlı Bir Operatörün Esaslı Spektrumu

$X$ kompleks Banach uzayında $K(X)$ ile gösterilen ve $X$ üzerindeki tüm kompakt operatörlerin oluşturduğu vektör uzay $B(X)$ içinde kapalı bir idealdir. $B(X)/K(X)$ bölüm vektör uzayı aşağıdaki cebirsel işlemler altında $[I]$ birim elemanına sahip birimli bir cebirdir.

- $[S] + [T] = [S + T]$
- $\lambda [S] = [\lambda S]$
- $[S]\,[T] = [ST]$

Dahası bu vektör uzayı

$$\|[T]\| = \inf\{\|S\| : S \in [T]\} = \inf\{\|S\| : S - T \in K(X)\}$$

şeklinde tanımlanan bölüm normu altında bir Banach uzayıdır. Bölüm normu

$$\|[S]\,[T]\| \leq \|[S]\|\,\|[T]\| \quad \text{ve} \quad \|[I]\| = 1$$

özelliklerini sağladığından dolayı $B(X)/K(X)$ birimli Banach cebri olur. Bu cebir *Calkin Cebri* olarak adlandırılır ve $\mathfrak{C}(X)$ ile gösterilir.Yani $\mathfrak{C}(X) = B(X)/K(X)$ dir. $\pi : B(X) \to \mathfrak{C}(X)$ bölüm fonksiyonu başka bir ifadeyle doğal izdüşüm

$$\pi(T) = [T] = T + K(X)$$

şeklinde tanımlanır. $\|\pi(T)\| \leq \|T\|$ eşitsizliğinden dolayı $\pi$ bir büzülme fonksiyonudur. Bu özellikler aşağıdaki teoremde özetlenmiştir.

**Teorem 2.3.8.** [1, Theorem 7.37] *Eğer $X$ sonsuz boyutlu Banach uzayı ise bu durumda $\mathfrak{C}(X)$ Calkin Cebri birimli Banach cebridir. Ayrıca $\pi : B(X) \to \mathfrak{C}(X)$ bölüm fonksiyonu bir büzülme dönüşümü ve cebirsel homomorfizmdir.*

Bir $T \in B(X)$ operatörünün *esaslı olarak* bir (P) özelliğine sahip olması, $\pi(T)$ doğal izdüşümünün $\mathfrak{C}(X)$ Calkin cebri üzerinde (P) özelliğine sahip olması anlamına gelir. Örneğin, eğer $\pi(T)$ Calkin cebri üzerinde terslenebilir ise $T \in B(X)$ operatörünün *esaslı terslenebilir* olduğunu söylenir.

$T : X \to Y$ iki vektör uzay arasında tanımlı bir operatör olsun. $N(T)$ ile gösterilen *sıfır uzayı* ve $R(T)$ ile gösterilen $T$ operatörünün *görüntüsü*

$$N(T) = \{x \in X : Tx = 0\} \text{ ve } R(T) = \{Tx : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır. $T : X \to Y$ operatörü sınırlı bir operatör olsun. $V \subseteq X$ ve $W \subseteq Y$ kapalı alt vektör uzaylarının $X = N(T) \oplus V$ ve $Y = R(T) \oplus W$ olacak şekilde bulunabildiğini varsayalım. Bu durumda $Y/R(T)$ bölüm uzayı $W$ alt uzayına izomorfiktir ve $T : V \to R(T)$ bir izomorfizmdir. $N(T)$ sıfır uzayının boyutuna *sıfırlılık* denir ve $n(T)$ ile gösterilir yani $n(T) = dimN(T)$ dir. Ayrıca $W$ alt uzayının boyutuna da (eşdeğer olarak $Y/R(T)$ bölüm uzayının boyutuna) $T$ operatörünün *etkisi* denir ve $d(T)$ ile gösterilir. $d(T) = dimY/R(T)$ şeklinde de ifade edilebilir. Eğer $n(T)$ veya $d(T)$ sonlu ise bu durumda $i(T) = n(T) - d(T)$ genişletilmiş reel sayısına $T$ operatörünün *indeksi* denir.

**Tanım 2.3.9.** [1] *İki Banach uzayı arasında tanımlı sınırlı $T : X \to Y$ operatörü eğer,*

*(1) kapalı bir görüntü bölgesine sahip ve sıfırlığı veya etkisinden biri sonlu ise yarı Fredholm olarak,*

*(2) sıfırlığı ve etkisinin her ikisi birden sonlu ise Fredholm olarak adlandırılır.*

**Teorem 2.3.10.** [1, Theorem 7.38] *Bir $T \in B(X)$ operatörünün esaslı terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul Fredholm operatörü olmasıdır.*

**Tanım 2.3.11.** [1] *$T \in B(X)$operatörünün esaslı spektrumu, $\pi(T)$'nin $\mathfrak{C}(X)$ içindeki spektrumu olarak tanımlanır ve $\sigma_{ess}(T)$ ile gösterilir. Yani;*

$$\begin{aligned}\sigma_{ess}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - \pi(T) \quad \mathfrak{C}(X) \text{ üzerinde terslenebilir değildir.}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - (T) \quad \text{Fredholm operatörü değildir}\}\end{aligned}$$

*şeklindedir.*

**Lemma 2.3.12.** [1, Lemma 7.40] *Bir $T \in B(X)$ operatörünün esaslı spektrumu $\sigma(T)$ kümesinin boştan farklı kompakt bir alt kümesidir.*

**Lemma 2.3.13.** [1, Lemma 7.41] *Eğer bir $T \in B(X)$ operatörü aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahip değil ise $T$ operatörünün spektrumu ile esaslı spektrumu eşittir. ($\sigma(T) = \sigma_{ess}(T)$ )*

**Tanım 2.3.14.** [1] *$T \in B(X)$operatörünün esaslı spektral yarıçapı, $\mathfrak{C}(X)$ Calkin cebrindeki $\pi(T)$ elemanının spektral yarıçapı olarak tanımlanır ve $\rho_e(T)$ ile gösterilir. O halde $T$ operatörünün esaslı spektral yarıçapını;*

$$\begin{aligned}\rho_e(T) &= \rho(\pi(T)) \\ &= \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{ess}(T)\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \|\pi(T^n)\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \inf_n \|\pi(T^n)\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\inf_{K \in K(X)} \|T^n - K\|\right]^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

*şeklinde de ifade edebiliriz.*

$\|\pi(T)\| \leq \|T\|$ olduğundan $\rho(\pi(T)) = \rho_e(T) \leq \rho(T)$ olur.

**Tanım 2.3.15.** [1] *$T \in B(X)$operatörüne $\sigma_{ess}(T) = \{0\}$ ise vaya buna denk olarak $\rho_e(T) = 0$ ise esaslı yarınilpotent denir.*

**Tanım 2.3.16.** *$T \in B(X)$ operatörü için $\pi(T)$ nilpotent ise $T$ operatörüne esaslı nilpotent denir.*

### 2.3.3 Ortak Spektral Yarıçap

$\mathcal{A}$ bir kompleks normlu cebir olsun. Sınırlı bir $M, N \subset \mathcal{A}$ alt kümeleri için $M$ kümesinin normu $\|M\| = \sup\{\|a\| : a \in M\}$ ile $MN$ ve $M^n$ kümeleri de $MN = \{TS : T \in M,\, S \in N\}$ ve $M^n = M^{n-1}M$ şeklinde tanımlanır. Eğer $\mathcal{A}$, $X$ kompleks Banach uzayı üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer dönüşümlerin cebri olan $B(X)$ ise bu durumda $M \subset B(X)$ ve $W, V \subset X$ olmak üzere $MW = \{Tx : T \in M, x \in W\}$ ve $W + V = \{x + y : x \in W, y \in V\}$ şeklinde tanımlanır.

**Tanım 2.3.17.** [17] *M, sınırlı operatörlerin sınırlı bir kümesi olmak üzere*

$$\rho(M) = \inf_n \|M^n\|^{\frac{1}{n}} \tag{2.3}$$

*değerine M kümesinin ortak spektral yarıçapı denir.*

Ortak spektral yarıçapı ilk olarak 1960 yılında Rota ve Strang [16] aşağıdaki şekilde tanımlamıştır. Burada $M^n$ ile gösterilen $M$ kümesinin $n$ tane elemanının tüm çarpımlarıdır.

Norm altçarpımsal ($\|MN\| \leq \|M\|\,\|N\|$) olduğundan aşağıdaki limitin varlığı kesindir.

$$\rho(M) = \lim_{n\to\infty} \|M^n\|^{\frac{1}{n}} \tag{2.4}$$

Bu kavramın bulunmasıyla operatör teoriye, yarıgrupların ve Lie cebirlerinin temsil teorilerine, değişmez altuzaylara, yörünge geometrisine ve diferansiyel geometriye pek çok uygulaması olmuştur. Bundan sonra ortak spektral yarıçap yerine spektral yarıçap ifadesi kullanılacaktır. Bir operatör ailesi söz konusu olduğunda bunun ortak spektral yarıçap anlamına geldiği bilinecektir.

Aşağıda spektral yarıçap ile ilgili görmesi basit olan bazı özellikler verilmiştir.

*(1)* $\rho(M) \leq \|M\|$

*(2)* $\lambda$ bir kompleks sayı olmak üzere, $\rho(\lambda M) = |\lambda|\,\|M\|$

*(3)* $\rho(M^n) = \rho(M)^n$

*(4)* $N \subset M$ ise $\rho(N) \leq \rho(M)$

*(5)* $\bar{M}$, $M$ kümesinin kapanışı olmak üzere, $\rho(M) = \rho(\bar{M})$

*(6)* $M_1, M_2 \subset \mathcal{A}$ olmak üzere $\rho(M_1M_2) = \rho(M_2M_1)$

$M \in \mathcal{A}$ için $SG(M)$ ile $M$ tarafından üretilen çarpımsal yarı grubu $SG_1(M)$ ile de birimli çarpımsal yarı grubu gösterelim. Yani;

$$SG(M) = \bigcup_{n=1} M^n \text{ ve } SG_1(M) = SG(M) \cup \{1\}$$

olsun. $Norm(\mathcal{A})$ ile de $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı ve verilen norma denk tüm cebirsel normların kümesini gösterelim.

**Tanım 2.3.18.** [5] *Birim elemana sahip olmayan $\mathcal{A}$ normlu cebrin birimleştirmesi $\mathcal{A} + \mathbb{C}$ ile tanımlanan $\mathcal{A} \times \mathbb{C}$ kümesinden oluşan ve aşağıda tanımlanan işlemler ve norm ile birimli bir normlu cebirdir. Her $x, y \in \mathcal{A}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için;*

$$\begin{aligned} (x,\alpha) + (y,\beta) &= (x+y, \alpha+\beta) \\ \beta(x,\alpha) &= (\beta x, \beta\alpha) \\ (x,\alpha)(y,\beta) &= (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta) \\ \|(x,\alpha)\| &= \|x\| + |\alpha| \end{aligned}$$

*$(0,1)$ elemanı bu normlu cebrin birim elemanıdır. Ayrıca $x \to (x,0)$ fonksiyonu $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{A}+\mathbb{C}$ nin bir alt cebrine tanımlı bir izometrik izomorfizmdir. $\mathcal{A}$ cebrinin birimleştirmesini $\mathcal{A}^1$ ile göstereceğiz.*

**Teorem 2.3.19.** [5] *$S$, $\mathcal{A}$ normlu cebrinin sınırlı yarı grubu olsun. Bu durumda $s \in S$ için $p(s) \leq 1$ olacak şekilde bir $p \in Norm(\mathcal{A})$ vardır.*

*Kanıt.* $\mathcal{A}$ kendi birimleştirmesinin içine gömülebileceğinden, genelliği bozmaksızın $\mathcal{A}$ cebrinin birim elemana sahip olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda $S \cup \{1\}$ kümesi de sınırlı yarı grup olduğundan $1 \in S$ olarak kabul edebiliriz. Şimdi

$$q(a) = sup\{\| sa \| : s \in S\}$$

alalım ve her $s \in S$ için $\| s \| \leq M$ olacak şekilde pozitif $M$ sabiti seçelim. Buradan $q(a) \leq M \| a \|$ olur. $1 \in S$ olduğundan $\| a \| \leq q(a)$ dır. Böylece

$$q(ab) = sup\{\|sab\| : s \in S\} \leq q(a) \| b \| \leq q(a)q(b)$$

olur. Böylece $q \in Norm\mathcal{A}$ olduğu görülür. Şimdi $\mathcal{A}$ cebri üzerinde;

$$p(a) = sup\{q(ax) : x \in \mathcal{A}, q(x) \leq 1\}$$

tanımlayalım. $p(a)$ sol düzgün temsilinin (left regular representation) operatör normu olarak $(\mathcal{A}, q)$ normlu uzayı üzerinde sınırlı lineer operatördür. Böylece $p \in Norm\mathcal{A}$ olur. Ayrıca $t \in S$ için $st \in S$ olduğundan

$$q(tx) = sup\{\|stx\| : s \in S\} \leq q(x)$$

elde edilir. Böylece $t \in S$ için $p(t) \leq 1$ olduğu görülmüş olur. □

**Teorem 2.3.20.** [17] $\rho(M) = inf\{\alpha(M) : \alpha \in Norm\mathcal{A}\}$

*Kanıt.* Norm denkliğinden $M^n \leq C\ \alpha(M^n)$ olacak şekilde pozitif $C$ sabiti vardır. O halde her $n > 0$ için $M^n \leq C\ \alpha(M^n) \leq C\ \alpha(M)^n$ sağlanır. Böylece her $\alpha \in Norm\mathcal{A}$ için; $\| M^n \|^{\frac{1}{n}} \leq C^{\frac{1}{n}}\ \alpha(M)$ ve $\rho(M) \leq \alpha(M)$ elde edilir. Dolayısıyla da $\rho(M) \leq inf\{\alpha(M) : \alpha \in Norm\mathcal{A}\}$ elde edilmiş olur. Şimdi de; $\epsilon > 0$ ve $N = (\rho(M) + \epsilon)^{-1}M$ olsun. Bu durumda $\rho(N) < 1$ dir ve $SG(N)$ sınırlıdır. (Gerçekten de $\| N^n \| \geq 1$ olacak şekilde sonlu sayıda $n$ sayısı vardır.) Şimdi eğer $\alpha \in Norm\mathcal{A}$ ve $\alpha(SG(N)) \leq 1$ ise o zaman $\alpha(N) \leq 1$ ve $\alpha(M) \leq \rho(M) + \epsilon$ olur. O halde buradan da $\rho(M) \geq inf\{\alpha(M) : \alpha \in Norm\mathcal{A}\}$ olduğu görülmüş olur. Böylece istenen elde edilmiş olur. □

**Teorem 2.3.21.** [17] $\rho(M) = inf\{\lambda > 0 : SG(\lambda^{-1}M)\ \textit{sınırlı}\}$

*Kanıt.* Herhangi $\epsilon > 0$ için $SG\left((\rho(M) + \varepsilon)^{-1}M\right)$ nin sınırlı olduğunu gördük. Bu $\rho(M) \geq inf\{\lambda > 0 : SG(\lambda^{-1}M)\ \textit{sınırlı}\}$ olması anlamına geliyor. Diğer taraftan Teorem 2.3.20'nin ispatında eğer $SG(\lambda^{-1}M)$ sınırlı ise $\alpha \in Norm\mathcal{A}$ için $\alpha(M) \leq \lambda$ olduğunu görmüştük. Böylece $\rho(M) \leq \lambda$ elde edilir. □

**Teorem 2.3.22.** [17] *$M$ ve $N$, $\mathcal{A}$ normlu cebrinin sınırlı alt kümeleri ve $M$ ile $N$ kümelerinin tüm elemanları değişmeli ($MN = NM$) ise aşağıdaki önermeler doğrudur.*

*(i)* $\rho(MN) \leq \rho(M)\rho(N)$

*(ii)* $\rho(M \cup N) = max\{\rho(M), \rho(N)\}$

*(iii)* $\rho(M+N) \leq \rho(M) + \rho(N)$

*Kanıt.* $M$ ve $N$, $\mathcal{A}$ normlu cebrinin sınırlı alt kümeleri ve $M$ ile $N$ kümelerinin tüm elemanları değişmeli olsun.

*(i)* $MN = NM$ olduğundan $(MN)^n = M^n N^n$ dir. Dolayısıyla buradan elde edilen $\|M^n N^n\| \leq \|M^n\| \, \|N^n\|$ eşitsizliğinden istenen görülür.

*(ii)* $MN = NM$ olduğundan $(M \cup N)^n = \bigcup \{M^i N^{n-i} : i = 0, 1, ..., n\}$ dir. Dolayısıyla $SG(M)$ ve $SG(N)$ sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $SG(M \cup N)$ nin sınırlı olmasıdır. Burada $M$ ile $N$ yerine $\lambda > 0$ için sırasıyla $\lambda^{-1}M$ ve $\lambda^{-1}N$ konulur ve Teorem 2.3.21 kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \rho(M \cup N) &= inf \left\{\lambda > 0 : SG(\lambda^{-1}(M \cup N) \text{ sınırlı}\right\} \\ &= inf \left\{\lambda > 0 : SG(\lambda^{-1}M) \text{ ve } SG(\lambda^{-1}N) \text{ sınırlı}\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $\rho(M \cup N) = max \{\rho(M), \rho(N)\}$ olması demektir.

*(iii)* $\lambda_1 > \rho(M)$ ve $\lambda_2 > \rho(N)$ olsun. Bu durumda her $n > 0$ tam sayısı için $\|M^n\| < \mu\lambda_1^n$ ve $\|N^n\| < \mu\lambda_2^n$ olacak şekilde $\mu > 0$ sayısı vardır.

$$(M+N)^n \subset \sum_{k=0}^{n} \left( \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} \left(M^k N^{n-k}\right) \right)$$

olur. Böylece

$$\|(M+N)^n\| < \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu\lambda_1^k \, \mu\lambda_2^{n-k} = \mu^2(\lambda_1 + \lambda_2)^n$$

buradan da,

$$\lim_{n\to\infty} \|(M+N)^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \left(\mu^2(\lambda_1 + \lambda_2)^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

ve dolayısıyla

$$\rho(M+N) \leq \lim_{n\to\infty} \mu^{\frac{2}{n}}(\lambda_1 + \lambda_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak da istenen $\rho(M+N) \leq \rho(M) + \rho(N)$ görülmüş olur.

□

**Tanım 2.3.23.** *$M$ sınırlı operatörlerin sınırlı bir kümesi ve $\|T\|_e = \|\pi(T)\|$ olmak üzere, $M$ kümesinin esaslı ortak spektral yarıçapı*

$$\rho_e(M) := \lim_{n\to\infty} \left(\sup\left\{\|T\|_e : T \in M^n\right\}\right)^{1/n} = \inf_n \left(\sup\left\{\|T\|_e : T \in M^n\right\}\right)^{1/n}$$

*şeklinde tanımlanır.*

## 2.4 Berger-Wang Formülü

1960 yılında Rota ve Strang [16]'de ortak spactral yarıçapı,

$$\rho(M) = \limsup \|M^n\|^{1/n} \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlamıştır. Tek elemanlı $M = \{T\}$ kümesi için, ortak spektral yarıçap ile $T$ operatörünün spektral yarıçapı $r(T) = sup\{\|t\| : t \in \sigma(T)\}$ örtüşür.
Banach cebrinde sınırlı bir $M$ kümesi için

$$r_{sup}(M) = sup\{\rho(T) : T \in M\}$$

biçiminde ifade edilir. 1992 yılında M.A.Berger ile Y.Wang [4]'de $M$ kümesinin, sonlu boyutlu lineer uzayda operatörlerin sınırlı bir kümesi olması durumunda, (2.5)'deki $\| \,.\, \|$ ile $r_{sup}(.)$ 'un değiştirilebileceğini gösterdiler. Yani daha açık bir ifadeyle eğer

$$r(M) = \limsup r_{\text{sup}}(M^n)^{1/n}$$

ile tanımlanmak üzere sonlu boyutlu lineer uzaylarda operatörlerin sınırlı bir $M$ kümesi için

$$\rho(M) = r(M) \tag{2.6}$$

olduğunu gösterdiler. Şimdi, yukarıda verilen $r(M)$ Berger-Wang spektral yarıçapının genel tanımını verelim.

**Tanım 2.4.1.** *$\mathcal{A}$ normlu bir cebir ve $M$ sınırlı bir alt küme olsun. Bu sınırlı kümenin Berger-Wang yarıçapı*

$$r(M) := \limsup_{n\to\infty} \left(\sup\left\{\rho(T) : T \in M^n\right\}\right)^{1/n}$$

*şeklinde tanımlanır ve $r(M)$ ile gösterilir.*

(2.6)'da verilen eşitliğe *Berger-Wang Formülü* denir. Bu formül önemlidir çünkü ortak spektral yarıçap ile operatörlerin spektrumları arasında ilişkiyi vermektedir. Daha sonra [17]'de (2.6) genişletilerek sonsuz boyutlu Banach uzaylarında kompakt operatörlerin önkompakt kümeleri için de sağlandığı gösterilmiştir. Ayrıca [13]'de de R.T.Mısırlıoğlu, Berger-Wang formülünün operatörlerin birlikte kompakt bir $M$ kümesi için sağlandığını göstermiştir.
Genel olarak; operatörlerin sınırlı bir $M$ kümesi için

$$r(M) \leq \sup\left\{\rho(T)^{1/n} : T \in M^n, n = 1, 2, \ldots\right\} \leq \rho(M)$$

eşitsizliği sağlandığından Berger-Wang formülünün sağlandığını göstermek için eşitsizliğin diğer tarafının gösterilmesi yeterlidir.
Berger-Wang formülü değişmeli Banach cebirlerinin önkompakt bir $M$ kümesi için de sağlanır. Fakat bu lemmayı vermeden önce gerekli tanım ve önermeleri vermeliyiz. İlk olarak Hausdorff uzaklığını tanımlayalım.

**Tanım 2.4.2.** *(Hausdorff Uzaklığı) $(M, d)$ metrik uzay ve $X$ ile $Y$ boş olmayan iki alt küme olsun.*

$$dist_H(X, Y) = \max\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y)\}$$

*ile tanımlı uzaklığa Hausdorff uzaklık denir.*

Ayrıca $x \in X$, $y \in Y$ için bir noktanın kümeye uzaklığının,

$$dist(x, Y) = \inf\{d(x, y) | y \in Y\}$$

ile, iki kümenin birbirine uzaklığının;

$$dist(X, Y) = \sup\{d(x, Y) | x \in X\}$$

ile tanımlandığı hatırlanırsa Hausdorff uzaklığı;

$$dist_H(X, Y) = \max\{dist(X, Y), dist(Y, X)\}$$

şeklinde de tanımlanabilir.

**Önerme 2.4.3.** [18] *Eğer $Q$ ile $N$ bir $\mathcal{A}$ Banach cebrinin*

$$[Q, N] \equiv \{ab - ba : a \in Q,\ b \in N\} = \{0\}$$

*olacak şekilde sınırlı iki alt kümesi ise bu durumda*

$$\|\rho(Q) - \rho(N)\| \leq dist_H(Q, N)$$

*olur.*

*Kanıt.* $dist_H(Q, N) < \epsilon$ ve $\rho(N) < \alpha$ olsun. $\rho(Q) < \alpha + \epsilon$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\rho$ nun tanımından tüm $k$ lar için $\left\|N^k\right\| < C\alpha^k$ olacak şekilde bir $C$ sabiti vardır. $a_1, \ldots, a_n \in Q$ olsun. Herbir $a_i$ için $\|a_i - b_i\| < \epsilon$ olacak şekilde $b_1, \ldots, b_n \in N$ alalım. $c_i = a_i - b_i$ olsun. Bu durumda $a_1 \ldots a_n = (b_1 + c_1) \ldots (b_n + c_n)$ çarpımı $k = 0, 1, \ldots n$ olmak üzere $k$ tane $\{c_i\}$ nin elemanı ile $(n - k)$ tane $\{b_i\}$ nin elemanlarının çarpımı şeklindeki $2^n$ tane terimin toplamı şeklindedir. Ohalde $d_k$ ile $k$ tane çarpanı $\{c_i\}$ den $(n - k)$ tane çarpanı $\{b_i\}$ den gelen $\binom{n}{k}$ tane terimin toplamlarını gösterirsek $a_1 \ldots a_n = (b_1 + c_1) \ldots (b_n + c_n) = d_0 + d_1 + \cdots + d_n$ şeklinde yazılır. Dolayısıyla $\|d_k\| \leq \binom{n}{k}\epsilon^k \left\|N^{n-k}\right\| \leq \binom{n}{k}\epsilon^k C\alpha^{n-k}$ ve $\|a_1 \ldots a_n\| \leq C(\alpha + \varepsilon)^n$ olur. Böylece $\|Q^n\|^{1/n} \leq C^{1/n}(\alpha + \epsilon)$ ve $\rho(Q) \leq \alpha + \epsilon$ olur. □

**Lemma 2.4.4.** [18] *Bir Banach cebrinin değişmeli elemanlarından oluşan bir $N$ kümesi için Berger-Wang formülü sağlanır. Dahası $\rho(N) = r(N) = r_{sup}(N)$ dir.*

*Kanıt.* Eğer $N$ sonlu ise sonuç doğrudan hesaplama ile görülebilir. Genel durum için $N$ içinde bir $Q$, $\epsilon-$ağı alalım. Bu durumda $dist_H(Q, N) < \epsilon$ ve 2.4.3'den $\rho(N) \leq \rho(Q) + \epsilon \leq r_{sup}(Q) + \epsilon \leq r_{sup}(N) + \epsilon$ olur. $\epsilon$ keyfi olduğundan $\rho(N) \leq r_{sup}(N)$ elde edilir. Eşitsizliğin tersi zaten tanımlardan görülebilir. □

Berger-Wang formülü her zaman gerçeklenmemektedir. Bu formülün gerçeklenmediği bazı durumlarda ortak spektral yarıçap için genelleştirilmiş Berger-Wang formülü olarak bilinen

$$\rho(M) = \max\{\rho_e(M), r(M)\}$$

eşitlik sağlanmaktadır. Shulman ve Turovskii [17] ve [20] numaralı çalışmalarında genelleştirilmiş Berger-Wang formülünün sağlandığı bazı özel durumları göstermişlerdir.

**Tanım 2.4.5.** *$A$, bir $X$ metrik uzayın sınırlı bir alt kümesi olsun. $A$ kümesinin kompakt olmama ölçüsü, $A$ kümesini örten sonlu sayıdaki açık topların yarıçaplarının infimumudur ve $\chi(A)$ ile gösterilir. Yani*

$$\chi(A) = \inf\{r > 0 : \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ öyle ki } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)\}$$

*şeklinde ifade edilir.*

Metrik uzaydaki sınırsız bir kümenin kompakt olmama ölçüsü $\infty$ dur. $U_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ kapalı birim yuvarı göstermek üzere, Banach uzayı üzerinde tanımla bir $T$ sınırlı lineer operatörünün kompakt olmama ölçüsü de aşağıdaki şekilde verilir.

**Tanım 2.4.6.** *$X$ bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olmak üzere, $T$ operatörünün kompakt olmama ölçüsü*

$$\chi(T) = \inf\{r > 0 : \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ öyle ki } T(U_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)\}$$

*şeklinde tanımlanır. Yani $\chi(T) = \chi(T(U_X))$ dir.*

**Lemma 2.4.7.** [1] *Kompakt olmama ölçüsü için aşağıdakiler gerçeklenir.*

*(i)* *Bir metrik uzayın her $A$ alt kümesi için $\chi(A) = \chi(\overline{A})$ olur.*

*(ii)* *Bir metik uzayın bir $A$ alt kümesinin göreli kompakt olması için gerek ve yeter koşul $\chi(A) = 0$ olmasıdır.*

*(iii)* *Sınırlı bir $T$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter koşul $\chi(T) = 0$ olmasıdır.*

*(iv)* *Eğer $X, Y$ ve $Z$ birer Banach uzayı, $T \in B(X,Y)$ ve $S \in B(Y,Z)$ ise $\chi(ST) \leq \chi(S).\chi(T)$ dir.*

*Kanıt.* $(M, d)$ bir metrik uzay ve $X, Y, Z$ birer Banach uzayı olsun.

*(i)* $A \subset M$ olsun. Eğer $\chi(A) = \infty$ ise $\chi(\overline{A})$ olduğundan doğrudur. O halde $\chi(A) < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bir $r > \chi(A)$ alalım ve $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, r)$ olacak şekilde $x_1, x_2, \ldots x_n \in M$ noktalarını seçelim. $C(x_i, r) = \{y \in M :$

$d(x_i, y) \leq r\}$ kümesi bir kapalı küme olduğundan ve $B(x_i, r) \subseteq C(x_i, r)$ sağlandığından her $\epsilon > 0$ için

$$\overline{A} \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B(x_i, r)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C(x_i, r) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r + \epsilon)$$

olur. Bu her $r > \chi(A)$ ve her $\epsilon > 0$ için $\chi(\overline{A} \leq r + \epsilon$ alamına gelir. Böylece $\chi(\overline{A}) \leq \chi(A)$ elde edilir. Eşitsizliğin tersinin doğru olduğu açıktır. Böylece istene elde edilmiş olur.

*(ii)* Metrik uzayın bir $A$ alt kümesi için $\chi(A) = 0$ olma koşulu $A$ kümesinin tamamen sınırlı alt küme olmasına denktir. Bu da bir metrik uzayın $A$ alt kümesinin göreli kompakt olması için gerek ve yeter koşulun $\chi(A) = 0$ olması demektir.

*(iii)* Bu da *(ii)* den görülür.

*(vi)* $T \in B(X, Y)$ ve $S \in B(Y, Z)$ olsun. Bir $r > \chi(T)$ ve $\rho > \chi(S)$ sabitleyelim. $T(U_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (y_i + rU_Y)$ olacak şekilse $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ alalım. Benzer şekilde $T(U_Y) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (z_i + \rho U_Y)$ olacak şekilde de $z_1, z_2, \ldots, z_n \in Z$ seçelim.

$$\begin{aligned} ST(U_X) &= S\left(\bigcup_{i=1}^{n} (y_i + rU_Y)\right) = \bigcup_{i=1}^{n} S(y_i + rU_Y) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (Sy_i + rS(U_Y)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (Sy_i + rz_j + r\rho U_Z) \end{aligned}$$

olduğu dikkate alınırsa her $r > \chi(T)$ ve $\rho > \chi(S)$ için $\chi(ST) \leq r\rho$ elde edilir. Böylece $\chi(ST) \leq \chi(S).\chi(T)$ olur.

$\square$

**Lemma 2.4.8.** [1] *$X$ bir Banach uzayı ise kompakt olmama ölçüsü $\chi : B(X) \to \mathbb{R}$ bir yarı-normdur. Ancak bu yarı-norm $\mathfrak{C}(X)$ Calkin Cebrinde bir normdur.*

*Kanıt.* Her $T \in B(X)$ için $\chi(T) \geq 0$ olduğu açıktır. O halde diğer özellikleri sağladığını göstermeliyiz. İlk olarak homojenlik özelliğini gösterelim. Yani her $T \in B(X)$ ve tüm $\lambda$ skalerleri için $\chi(\lambda T) = |\lambda|\chi(T)$ olduğunu göstermeliyiz. Bu ispatı yaparken her $r > 0$ ve $\mu$ için $\mu B(0, r) = B(0, |\mu| r)$ özelliğini göz önüne alacağız. Şimdi bir $T \in B(X)$ ve $\lambda \neq 0$ skaleri alalım. Eğer $r > \chi(T)$ ise,

$T(U_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + B(0,r))$ olacak şekilde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektörleri alalım. Böylece $\lambda T(U_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \lambda B(0,r)) = \bigcup_{i=1}^{n} (\lambda x_i + B(0, |\lambda| r))$ olduğundan bu her $r > \chi(T)$ için $\chi(\lambda T) \leq |\lambda| r$ olduğu anlamına gelir. Buradan da $\chi(\lambda T) \leq |\lambda| \chi(T)$ elde edilir. Şimdi $\rho > \chi(\lambda T)$ olsun. $\lambda T(U_X) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} (y_j + B(0,\rho))$ olacak şekilde $y_1, \ldots, y_k$ seçelim. Bu $T(U_X) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} (\frac{y_j}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} B(0,\rho)) = \bigcup_{j=1}^{k} (\frac{y_j}{\lambda} + B(0, \frac{\rho}{|\lambda|}))$ olması anlamına gelir. Dolayısıyla her $\rho > \chi(\lambda T)$ için $\chi(\lambda T) \leq \frac{\rho}{|\lambda|}$ sağlanır ve böylece $\chi(T) \leq \frac{\chi(\lambda T)}{|\lambda|}$ veya $|\lambda| \chi(T) \leq \chi(\lambda T)$ elde edilir. Sonuç olarak $\chi(\lambda T) = |\lambda| \chi(T)$ olduğu görülmüş olur. $\lambda = 0$ için eşitliğin sağlandığı açıktır.

İkinci olarak üçgen eşitsizliğini yani her $S, T \in B(X)$ için $\chi(S+T) \leq \chi(T) + \chi(S)$ olduğunu görmeliyiz. $S, T \in B(X)$ olsun. $r > \chi(S)$ ve $\rho > \chi(T)$ sabitleyelim. $S(U_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + B(0,r))$ ve $T(U_X) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} (y_j + B(0,r))$ olacak şekilde $x_1, \ldots, x_n$ ve $y_1, \ldots y_k$ vektörleri alalım. Böylece $(S+T)(U_X) \subseteq S(U_X) + T(U_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{k} [x_i + y_j + B(0,r) + B(0,\rho)] = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{k} [x_i + y_j + B(0, r+\rho)]$ olduğu görülür. Bu her $r > \chi(S)$ ve her $\rho > \chi(T)$ için $\chi(S+T) \leq r + \rho$ olması anlamına gelir. Dolayısıyla $\chi(S+T) \leq \chi(T) + \chi(S)$ elde edilir. Böylece kompakt olmama ölçüsünün yarı-norm olduğu görülmüş olur. Bu yarı-norm

$$\chi(T) = \|T\|_{\chi}$$

şeklinde gösterilir.

Şimdi de eğer $S - T$ kompakt operatör ise $\chi(S) = \chi(T)$ olduğunu gösterelim. $S - T = K$ bir kompakt operatör olsun. $S = T + K$ olmasından, üçgen eşitsizliğinden ve Lemma 2.4.7 *(iii)*'den $\chi(S) = \chi(T+K) \leq \chi(T) + \chi(K) = \chi(T)$ elde edilir. Benzer şekilde $T = S + (-K)$ dan da $\chi(T) \leq \chi(S)$ elde edilir. Böylece $\chi(S) = \chi(T)$ elde edilmiş olur. Bu özellik ve yukarıda gösterilen özellikler bize $\chi : B(X) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathfrak{C}(X)$ Calkin Cebrine kısıtlanışının bir norm olduğunu verir. □

$\mathcal{A}$ bir normlu cebir olsun ve bir $a \in \mathcal{A}$ elemanı verilsin. $L_a$ ve $R_a$ ile a elemanıyla soldan ve sağdan çarpım operatörlerini gösterelim. Yani $L_a x = ax$ ve $R_a x = xa$ olsun. Ayrıca $M \subset \mathcal{A}$ için $L_M = \{L_a : a \in M\}$ ve $R_M = \{R_a : a \in M\}$ operatör ailelerini tanımlayalım. [20]'de Eğer $M$ sınırlı bir küme ise $r(M) = r(L_M) = r(R_M)$ ve $\rho(M) = \rho(L_M) = \rho(R_M)$ olduğu ve daha da önemlisi $r(M)$ ve $\rho(M)$, $L_M R_M = \{L_a R_a : a, b \in M\}$ operatör ailesinin özelliklerini yansıttığı belirtilmiştir.

**Lemma 2.4.9.** *$M$, $\mathcal{A}$ normlu cebrinin sınırlı bir kümesi olsun. Bu durumda herhangi $m \in \mathbb{N}$ için $\rho(M^m) = \rho(M)^m$, $r(M^m) = r(M)^m$ ve $\rho(M)^2 = \rho(L_M R_M)$, $r(M)^2 = r(L_M R_M)$ dir.*

*Kanıt.* [20, Lemma 2.1] □

**Lemma 2.4.10.** *Operatörlerin herhangi önkompakt $M$ kümesi için*

$$\|L_M R_M\|_\chi \leq 16\|M\|_\chi \|M\|$$

*olur.*

*Kanıt.* [20, Lemma 2.2] □

**Tanım 2.4.11.** *$X$ bir Banach uzayı ve $M$ sınırlı operatörlerin önkompakt bir kümesi olmak üzere, Hausdorff ortak spektral yarıçap,*

$$\rho_\chi(M) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\left\{\|T\|_\chi : T \in M^n\right\}\right)^{1/n} = \inf_n \left(\sup\left\{\|T\|_\chi : T \in M^n\right\}\right)^{1/n}$$

*şeklinde tanımlanır.*

I.D.Morris [14] de $\rho_\chi$ Hausdorff ortak spektral yarıçap ile sınırlı operatörlerin önkompakt kümeleri üzerinde $\rho_e$ esaslı ortak spektral yarıçapının uyuştuğunu göstermiş ve

$$\rho_\chi(M) \leq \rho_e(M) \tag{2.7}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiğini belirtmiştir.

**Teorem 2.4.12.** *$\mathcal{A}$ bir normlu cebir ve $M$, önkompakt bir alt küme olsun. $\rho^\chi(M) = \rho_\chi(L_M R_M)^{1/2}$ olmak üzere; $\rho(M) = \max\{\rho^\chi(M), r(M)\}$ formülü sağlanmaktadır.*

*Kanıt.* [20, Theorem 4.5] □

## 2.5 Topolojik Radikaller

### 2.5.1 Jacobson Radikali

**Tanım 2.5.1.** *$\mathcal{A}$ nın bir $J$ sol (sağ) ideali, $\mathcal{A}J \subset J$, $(J\mathcal{A} \subset J)$ ifadesini sağlayan bir lineer alt uzaydır. $J$ sol (sağ) ideal olsun. Eğer $\mathcal{A} \neq J$ ise $J$ idealine öz ideal, başka hiçbir sol (sağ) ideali içermiyorsa maksimal ideal denir.*

**Tanım 2.5.2.** *$\mathcal{A}$ cebrinin bir $E$ lineer alt uzayı için, $\mathcal{A}(1-u) \subset E$ kouşulunu sağlayan $u \in \mathcal{A}$ elemanına sağ modüler birim denir. Sağ modüler birime sahip sol ideale modüler sol ideal denir. Benzer şekilde $(1-u)\mathcal{A} \subset E$ koşulunu sağlayan $u \in \mathcal{A}$ elemanına sol modüler birim, sol modüler birime sahip sağ ideale de modüler sağ ideal denir.*

**Tanım 2.5.3.** *$\mathcal{A}$ bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir cebir ve $M$, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $\mathcal{A} \times M \to M$; $(a, m) \mapsto am$ şeklinde tanımlı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon varsa bu durumda $M$ ye sol $\mathcal{A}$- modül denir. Her $a, b \in \mathcal{A}$ ve $m, m_1, m_2 \in M$ için;*

*(i)* $(a+b)m = am + bm$

*(ii)* $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$

*(iii)* $a(bm) = (ab)m$

$(a, m) \to am$ ile tanımlanan bu fonksiyona *modül çarpımı* adı verilir. *Sağ $\mathcal{A}$-modül* ve *$\mathcal{A}$- bimodül* tanımları da benzer şekilde yapılır.

**Tanım 2.5.4.** *$\mathcal{A}$ bir cebir ve $M \neq 0$ bir sol(sağ) $\mathcal{A}$- modül olsun. Eğer bu modülün $\{0\}$ ve $M$ den başka alt modülü yoksa basit sol (sağ) $\mathcal{A}$- modül olarak adlandırılır.*

**Tanım 2.5.5.** *$\mathcal{A}$ bir cebir olmak üzere, Jacobson radikali, tüm maksimal sol(sağ) ideallerin arakesiti olarak tanımlanır.*

Jacobson radikalini $Rad(\mathcal{A})$ ile göstereceğiz. Jacobson Radikali sol(sağ) ideallerin arakesiti olduğundan sol(sağ) ideal olduğu açıktır. Gerçekten, $x \in \mathcal{A}$ ve $y \in Rad(\mathcal{A})$ olsun. $y$ tüm maksimal sol(sağ) ideallere ait olduğundan $xy$ tüm maksimal sol ideallerde olur. Bu da $xy \in Rad(\mathcal{A})$ olması yani $Rad(\mathcal{A})$ nın sol (sağ) ideal olması anlamına gelir.

**Lemma 2.5.6.** [12] *$\mathcal{A}$ bir cebir olmak üzere $y \in \mathcal{A}$ için aşağıdakiler eşdeğerdir.*

*(i)* $y \in Rad(\mathcal{A})$

*(ii) Herhangi $x \in \mathcal{A}$ için $1 - xy$ sol terslenebilirdir.*

*(iii) Herhangi $M$ basit sol $\mathcal{A}$- modülü için, $yM = 0$ dır.*

*Kanıt.* (i) $\Rightarrow$ (ii) $y \in Rad(\mathcal{A})$ ve $x \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda $xy$ tüm $L$ maksimal sol ideallere aittir. Fakat $1 \notin L$ olduğundan $1 - xy$ nin hiçbir $L$ maksimal sol idealine ait olmadığı elde edilir. Dolayısıyla $1 - xy$ sol terslenebilirdir.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Bir $m \in M$ için $ym \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\mathcal{A}.ym = M$ olmalı. Özellikle, bir $x \in \mathcal{A}$ için, $m = x.ym$ böylece $(1 - xy)m = 0$ olur. (ii) kullanılırsa m=0 elde edilir. Bu bir çelişkidir.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Herhangi $J$ maksimal sol ideali için $\mathcal{A}/J$, basit sol $\mathcal{A}$- modüldür. Böylece (iii)'den $y.\mathcal{A}/J = 0$ dolayısıyla $y \in J$ olur. Bu da tanımdan $y \in Rad(\mathcal{A})$ anlamına gelir. □

**Teorem 2.5.7.** *$\mathcal{A}$ bir cebir olsun. Aşağıdaki kümeler eşittir.*

*(i) $Rad(\mathcal{A})$, Jacobson Radikali*

*(ii)* $\{b \in \mathcal{A} : \rho(ab) = 0, \quad \text{her } a \in \mathcal{A} \text{ için } \}$.

*(iii) Aşağıda verilen ve birbirine denk olan özellikleri birini (dolayısıyla tümünü) sağlayan en geniş $I$ ideali.*

*(a) $\sigma(a + b) = \sigma(a)$, her $a \in \mathcal{A}$, $b \in I$ için*

*(b) $\sigma(b) = 0$, her $b \in I$ için*

*(c) $\rho(a + b) = \rho(a)$, her $a \in \mathcal{A}$, $b \in I$ için*

*(d) $\rho(b) = 0$, her $b \in I$ için*

*Kanıt.* [15, Theorem 2.3.3] □

### 2.5.2 Yarınilpotent İdealler

$\mathcal{A}$ bir normlu cebir olsun. Eğer $N \subset \mathcal{A}$ ise $\overline{N}$ ile $N$ kümesinin kapanışını, $abs(N)$ ile $abs(N) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in N, \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1 \right\}$ şeklinde tanımlanan mutlak konveks kabuğu ve $\mathcal{M}_f(\mathcal{A})$, $\mathcal{M}_c(\mathcal{A})$, $\mathcal{M}_b(\mathcal{A})$ ile de sırasıyla $\mathcal{A}$ normlu cebrinin tüm sonlu, önkompakt ve sınırlı alt kümelerini göstereceğiz. $M \in \mathcal{M}_b(\mathcal{A})$ için

$$\rho(M) = \rho(M^n)^{1/n} \quad \text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için,} \tag{2.8}$$

$$\rho(\lambda M) = \mid \lambda \mid \rho(M) \quad \text{her } \lambda \in \mathbb{C} \text{ için,} \tag{2.9}$$

$$\rho(MN) = \rho(NM) \quad \text{her } N \in \mathcal{M}_b(\mathcal{A}) \text{ için,} \tag{2.10}$$

*eşitlikleri sağlanmaktadır.* [17]

**Lemma 2.5.8.** [19] *$\mathcal{A}$ normlu cebir ve $N, M \in \mathcal{M}_b(\mathcal{A})$ olsun.*

*(i) Herhangi $L \subset abs(M)$ için, $\rho(L) \leq \rho(M) = \rho(abs(M))$ dir.*

*(ii) Eğer $N$ kümesinin her elemanı ile $M$ kümesinin her elemanı değişmeli ise;*

*(a)* $\rho(M \cup N) = \max\{\rho(M), \rho(N)\}$

*(b)* $\rho(M + N) \leq \rho(M) + \rho(N)$

*(c)* $\rho(MN) \leq \rho(M)\rho(N)$ *dir.*

*Kanıt.* $\mathcal{A}$ normlu cebir ve $N, M \in \mathcal{M}_b(\mathcal{A})$ olsun.

*(i)* $\rho(M) = \rho(abs(M))$ olduğu Teorem 2.3.20'den görülür. Çünkü herhangi $\alpha \in Norm(\mathcal{A})$ için $\alpha(M)$ ve $\alpha(abs(M)$ değerleri denktir.

*(ii)* Teorem 2.3.22'de ispatlanmıştır.

□

**Teorem 2.5.9.** *$\mathcal{A}$ normlu cebir ve $V \subset \mathbb{C}$ açık olsun. $F$, her $\lambda \in V$ ve tüm $M(\lambda) = \{f(\lambda) : f \in F\} \in \mathcal{M}_b(\mathcal{A})$ için*

$$\lim_{\mu \to \lambda} \sup \{\|f(\mu) - f(\lambda)\| : f \in F\} = 0$$

*olacak şekilde $V$ den $\mathcal{A}$ ya tanımlı analitik fonksiyonların bir ailesi olsun. Bu durumda $\lambda \to log\rho(M(\lambda))$ ve $\lambda \to \rho(M(\lambda))$ fonksiyonları $V$ üzerinde alt harmoniktir.*

*Kanıt.* [19, Theorem 3.5.] □

Burada, alt harmoniklik ile ilgili daha fazla bilgiye [11] numaralı kaynaktan ulaşılabilir.

**Tanım 2.5.10.** *$\mathcal{A}$ normlu bir cebir olsun. Bu durumda;*

*(i) Eğer her $M \in \mathcal{M}_f(\mathcal{A})$ için $\rho(M) = 0$ ise $\mathcal{A}$ ya sonlu yarınilpotent,*

*(ii) Eğer her $M \in \mathcal{M}_c(\mathcal{A})$ için $\rho(M) = 0$ ise $\mathcal{A}$ ya kompakt yarınilpotent,*

*(ii) Eğer her $M \in \mathcal{M}_b(\mathcal{A})$ için $\rho(M) = 0$ ise $\mathcal{A}$ ya sınırlı yarınilpotent denir.*

Sonlu, kompakt ve sınırlı yarınilpotentleri kısaca sırasıyla f-yarınilpotent, c-yarınilpotent ve b-yarınilpotent olarak yazacağız.

**Lemma 2.5.11.** [19] *$\mathcal{A}$ bir normlu cebir olsun. Eğer $\mathcal{A}$ c-yarınilpotent veya b-yarınilpotent ise aynı şey $\tilde{\mathcal{A}}$ tamlanışı için de geçerlidir.*

*Kanıt.* $\tilde{\mathcal{A}}$ nın herhangi sınırlı(önkompakt) alt kümesi, $\mathcal{A}$ nın sınırlı(önkompakt) bir alt kümesinin kapanışı içinde yer alır gerçeğine dayanılarak görülür. Yani her $N \in \mathcal{M}_c(\tilde{\mathcal{A}})$ için öyle bir $M \in \mathcal{M}_c(\mathcal{A})$ vardır öyle ki $N \subseteq \bar{M}$ dir. Dolayısıyla $\rho(N) \leq \rho(\bar{M}) = \rho(M) = 0$ olur. □

**Tanım 2.5.12.** *$\mathcal{A}$ normlu bir cebir olsun. $\mathcal{R}_b(\mathcal{A}), \mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ ve $\mathcal{R}_f(\mathcal{A})$ kümeleri şu şekilde tanımlanır.*

$$\mathcal{R}_f(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} : \rho(\{a\} \cup M) = \rho(M),\ \forall M \in \mathcal{M}_f(\mathcal{A})\}$$

$$\mathcal{R}_b(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} : \rho(\{a\} \cup M) = \rho(M),\ \forall M \in \mathcal{M}_b(\mathcal{A})\}$$

$$\mathcal{R}_c(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} : \rho(\{a\} \cup M) = \rho(M),\ \forall M \in \mathcal{M}_c(\mathcal{A})\}$$

Bundan sonra $\mathcal{R}_b(\mathcal{A}), \mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ ve $\mathcal{R}_f(\mathcal{A})$ kümelerinin tümünü ifade ederken $* \in \{f, b, c\}$ için $\mathcal{R}_*(\mathcal{A})$ gösterimini kullanacağız.

**Lemma 2.5.13.** [19] *Eğer $a \in \mathcal{R}_*(\mathcal{A})$ ise $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda a \in \mathcal{R}_*(\mathcal{A})$ dır.*

*Kanıt.* $M \in \mathcal{M}_c(\mathcal{A})$ ve $a \in \mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ olsun.

$$\begin{aligned}\rho(\{\lambda a\} \cup M) &= \rho(\lambda(\{a\} \cup \lambda^{-1}M)) = \mid \lambda \mid \rho(\{a\} \cup \lambda^{-1}M) \\ &= \mid \lambda \mid \rho(\lambda^{-1}M) = \rho(M)\end{aligned}$$

olduğundan, $\lambda a \in \mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ elde edilir. □

**Lemma 2.5.14.** *$a \in \mathcal{R}_*(\mathcal{A})$ olması için gerek ve yeter koşul her $M \in \mathcal{M}_*(\mathcal{A})$ için* $\sup\{\rho(\{\lambda a\} \cup M) : \lambda \in \mathbb{C}\} < \infty$ *olmasıdır.*

*Kanıt.* [19, Lemma 4.5.] □

Sıradaki lemma $\mathcal{A}$ cebrinin birimli olarak kabul edilebileceğini veriyor.

**Lemma 2.5.15.** [19] $\mathcal{R}_*(\mathcal{A}) = \mathcal{R}_*(\mathcal{A}^1)$

*Kanıt.* Herhangi $M \in \mathcal{M}_*(\mathcal{A}^1)$ kümesi, $N \in \mathcal{M}_*(\mathcal{A})$ ve $L \in \mathcal{M}_*(\mathbb{C})$ olmak üzere $N + L$ formundaki kümenin içinde yer alır. Bu nedenle $\lambda \to \rho(\{\lambda a\} \cup (N + L))$ fonksiyonunun herhangi $a \in \mathcal{R}_*(\mathcal{A})$ için sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Genelliği bozmaksızın $0 \in L$ olduğunu farzedebiliriz. Bu nedenle

$$\{\lambda a\} \cup (N + L) \subset (\{\lambda a\} \cup N) + L$$

ve Lemma 2.5.8'den

$$\begin{aligned}\rho(\{\lambda a\} \cup (N + L)) &\leq \rho((\{\lambda a\} \cup N) + L) \\ &\leq \rho(\{\lambda a\} \cup N) + \| L \| = \rho(N) + \| L \|\end{aligned}$$

elde edilir. □

**Lemma 2.5.16.** [19, Lemma 4.7] *Eğer $N$, $\mathcal{R}_*(\mathcal{A})$ nın sonlu bir alt kümesi ise herhangi $M \in \mathcal{M}_*(\mathcal{A})$ için $\rho(N \cup M) = \rho(M)$ olur.*

**Lemma 2.5.17.** [19] *$\mathcal{R}_*(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ cebirinin lineer alt uzayıdır.*

*Kanıt.* $a, b \in \mathcal{R}_*(\mathcal{A})$ için $N = \{a, b\}$ alalım. $M \in \mathcal{M}_*(\mathcal{A})$ olmak üzere, $\{(a + b)/2\} \cup M \subset abs(N \cup M)$ olduğundan Lemma 2.5.8 ve 2.5.16'dan dolayı

$$\rho(\{(a + b)/2\} \cup M) \leq \rho(abs(N \cup M)) = \rho(N \cup M) = \rho(M)$$

elde edilir. Bu $(a + b)/2 \in \mathcal{R}_*(\mathcal{A})$ olduğunu gösterir. Geri kalanları görmek için Lemma 2.5.13'ü kullanmak yeterlidir. □

**Lemma 2.5.18.** [19] *$\mathcal{R}_*(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ nın bir idealidir.*

*Kanıt.* Lemma 2.5.15'den dolayı $\mathcal{A}$ yı birimli olarak kabul edebiliriz. $a \in \mathcal{R}_*(\mathcal{A})$, $b \in \mathcal{A}$, $M \in \mathcal{M}_*(\mathcal{A})$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. $N = \{\lambda a, b, 1\}$ alalım. $\rho(N \cup M) \leq \beta = \rho(\{b, 1\} \cup M)$ elde edilir. Dolayısıyla $\rho((N \cup M)^2) \leq \beta^2$ dir. Fakat $(N \cup M)^2$, $\{\lambda ab\} \cup M$ kümesini içerir. Böylece

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \rho\left(\{\lambda ab\} \cup M\right) \leq \beta^2 < \infty$$

olur ve Lemma 2.5.14'den dolayı $ab \in \mathcal{R}_*(\mathcal{A})$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde $ba \in \mathcal{R}_*(\mathcal{A})$ olduğuda görülür. □

**Lemma 2.5.19.** [19] *$\mathcal{R}_*(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ nın bir kapalı idealidir.*

*Kanıt.* Eğer $a \in \mathcal{R}_*(\mathcal{A})$, $M \in \mathcal{M}_*(\mathcal{A})$ ise bu durumda $b \in \mathcal{A}$ için;

$$\begin{aligned}
\rho(\{(a+b)\} \cup M) &\leq \rho(abs(\{2a, 2b\} \cup M)) \\
&= \rho(\{2a, 2b\} \cup M)) = \rho(\{2b\} \cup M)) \\
&\leq \|\{2b\} \cup M\| = \max\{2\|b\|, \|M\|\}
\end{aligned}$$

olduğu göz önüne alalım. $c \in \overline{\mathcal{R}_*(\mathcal{A})}$ için $c = a + b$, $\|b\| \leq \|M\|/2$ olacak şekilde $a \in \mathcal{R}_*(\mathcal{A})$ ve $b \in \mathcal{A}$ vardır. Bundan dolayı

$$\rho(\{c\} \cup M) \leq \max\{2\|b\|, \|M\|\} = \|M\|$$

elde edilir. $c$ ile $\lambda c$ değişikliği yapılarak Lemma 2.5.14 uygulanırsa $c \in \mathcal{R}_*(\mathcal{A})$ sonucu dolayısıyla $\mathcal{R}_*(\mathcal{A})$ nın kapalı olduğu elde edilir. □

**Lemma 2.5.20.** [19] *$\mathcal{A}$ normlu cebir olsun. Bu durumda $\mathcal{R}_c(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cap \mathcal{R}_c(\tilde{\mathcal{A}})$ dir.*

*Kanıt.* Bu özellik Lemma 2.5.11'den ve $\tilde{\mathcal{A}}$ nın herhangi önkompakt alt kümesi, $\mathcal{A}$ nın önkompakt bir alt kümesinin kapanışı içinde yer alır gerçeğine dayanılarak görülür. □

**Lemma 2.5.21.** *$\mathcal{A}$ normlu bir cebir olsun. Eğer $N$, $\mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ nın önkompakt alt kümesi ise bu durumda $M \in \mathcal{M}_c(\mathcal{A})$ için $\rho(N \cup M) = \rho(M)$ dir.*

*Kanıt.* [19, Lemma 4.12] □

**Önerme 2.5.22.** [19] *$\mathcal{A}$ normlu cebir olsun. Bu durumda;*

*(i) $\mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ c-yarınilpotenttir.*

*(ii) $\mathcal{R}_f(\mathcal{A})$ f-yarınilpotenttir.*

*Kanıt.* (i) $N, \mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ nın önkompakt bir alt kümesi olsun. $M = \{0\}$ alalım. $M \in \mathcal{M}_c(\mathcal{A})$ olduğundan Lemma 2.5.21'den dolayı $\rho(N) < \rho(\{M \cup N\}) = \rho(M) = 0$ elde edilir.

(ii) $N, \mathcal{R}_f(\mathcal{A})$ nın sonlu bir alt kümesi olsun. $M = \{0\}$ alalım. $M \in \mathcal{M}_f(\mathcal{A})$ olduğundan Lemma 2.5.16'dan dolayı $\rho(N) < \rho(\{M \cup N\}) = \rho(M) = 0$ elde edilir.

□

Bölüm 2.3.3'de tanımlandığı gibi $SG_1$ ile $M$ tarafından üretilen birimli yarı grubu göstereceğiz.

**Teorem 2.5.23.** [19] *$\mathcal{A}$ birimli normlu cebir ve $N, M \in \mathcal{M}_b(\mathcal{A})$ olsun. Eğer $NSG_1(M)$ sınırlı ve $\rho(NSG_1(M)) = 0$ ise $\rho(N \cup M) = \rho(M)$ olur.*

*Kanıt.* $G = SG_1(M)$ ve $\gamma = \max\{\|M\|, 1\}$ olsun. Varsayımdan tüm $n$ ler için; $\|(NG)^n\| \leq \beta\epsilon^n$ olacak şekilde $\epsilon > 0$ için $\beta = \beta(\epsilon)$ vardır. $\lambda \in \mathbb{C}$ alalım. $E_\lambda = \lambda N \cup M$ olsun. $\epsilon < |\lambda|^{-1}$ seçelim. $x = x_1x_2x_3 \ldots x_n \in (E_\lambda)^n$ alalım ve $x_j$ elemanlarının tam $k$ tanesi $\lambda N$ kümesine ait olsun. Bu durumda $y_i \in NG$, $z \in G$ ve $\|z\| < \gamma^n$ olmak üzere $x = \lambda^k z y_1 y_2 \ldots y_k$ olur. Buradan $\|x\| \leq |\lambda|^k \beta\epsilon^k\gamma^n \leq \beta\gamma^n$ olduğu görülür. Bu tüm $n$ ler için $\|(E_\lambda)^n\| \leq \beta\gamma^n$ olduğunu dolayısıyla her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\rho(E_\lambda) \leq \gamma$ olduğunu verir. $\mathbb{C}$ üzerinde alt harmonik olan $\lambda \mapsto \rho(E_\lambda)$ fonksiyonu sabittir. Buradan da $\rho(E_1) = \rho(E_2)$ yani $\rho(N \cup M) = \rho(M)$ elde edilir. □

**Lemma 2.5.24.** [19] *$J$, $\mathcal{A}$ normlu cebrinin tek taraflı c-yarınilpotent bir ideali olsun. Eğer $N \in \mathcal{M}_c(J)$ ise herhangi $M \in \mathcal{M}_c(\mathcal{A})$ için $\rho(N \cup M) = \rho(M)$ dir.*

*Kanıt.* $J$, $\mathcal{A}$ nın sağ ideali olsun. $\mathcal{A}$ yı birimli olarak kabul edebiliriz. İlk olarak eğer $\|M\| < 1$ ise bu durumda $NSG_1(M) \in \mathcal{M}_c(J)$, böylece $\rho(NSG_1(M)) = 0$ olur. Teorem 2.5.23'den

$$\rho(N \cup M) = \rho(M)$$

olduğu elde edilir. Şimdi eğer $\|M\| \geq 1$ ise $t > \|M\|$ alalım. Bu durumda;

$$\rho(N \cup M) = t\rho(t^{-1}N \cup t^{-1}M) = t\rho(t^{-1}M) = \rho(M)$$

olur. Eğer $J$ sol ideal ise (2.10) kullanılarak benzer argümanla yapılır. □

Bu lemma, $J$ tek taraflı b-yarınilpotent bir ideal olması durumunda da geçerlidir. Lemma, c yerine b yazılarak da ifade edilebilir ve aynı argümanlarla ispatı yapılabilir.

**Lemma 2.5.25.** [19] $* \in \{f, c, b\}$ *ve* $\mathcal{A}$ *bir normlu cebir olsun.*

*(i)* $J = \mathcal{R}_c(\mathcal{A})$

*(ii)* $J = \mathcal{R}_f(\mathcal{A})$

*(iii)* $J$*,* $\mathcal{A}$ *nın tek taraflı b-yarınilpotent bir ideali*

*Yukarıdaki üç durum için de eğer* $N, M \in \mathcal{M}_*(\mathcal{A})$ *ve* $M \subset N + J$ *ise bu durumda* $\rho(M) \leq \rho(N)$ *dir.*

*Kanıt.* Herhangi $a \in M$ için $a'$ ile $a - a' \in N$ olacak şekildeki $a' \in J$ elemanını gösterelim. $K := \{a' : a \in M\}$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $N(\lambda) := \{a - \lambda a' : a \in M\}$ kümelerini tanımlayalım. Bu durumda $K, N(\lambda) \in \mathcal{M}_c(\mathcal{A})$ , $K \subset J$ ve $N(1) \subset N$ olur. $f(\lambda) = \rho(N(\lambda))$ fonksiyonu Teorem 2.5.9'dan alt harmoniktir. $N(\lambda) \subset 2abs(\lambda K \cup M)$ olduğundan dolayı Lemma 2.5.8 ile $(i)$ için Lemma 2.5.21, $(ii)$ için Lemma 2.5.16 ve $(iii)$ içinde Lemma 2.5.24'den dolayı;

$$\rho(N(\lambda)) \leq 2\rho(abs(\lambda K \cup M)) = 2\rho(\lambda K \cup M) = 2\rho(M)$$

yazılır. Böylece $f(\lambda)$ sabittir ve

$$\rho(M) = f(0) = f(1) = \rho(N(1)) \leq \rho(M)$$

elde edilir. □

$I$, bir $\mathcal{A}$ cebrinin ideali olsun. $q_I$ ile $\mathcal{A}$ nın $\mathcal{A}/I$ üzerine kanonik epimorfizmini (örten homomorfizma) göstereceğiz. Şimdi $J$, $\mathcal{A}$ cebrinin kapalı bir ideali olsun. $M \subset \mathcal{A}$ için $M/J$, $M$ kümesinin $q_j : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/J$ kanonik epimorfizmi altındaki görüntüsüdür.

**Teorem 2.5.26.** [19] $* \in \{c, f, b\}$ *ve* $\mathcal{A}$ *normlu cebir olsun.* $* \in \{c, f\}$ *için* $J = \mathcal{R}_*(\mathcal{A})$ *veya* $* = b$ *için* $J$ *nin kapalı b-yarınilpotent bir ideal olduğunu kabul edelim. Her iki durumda da her* $M \in \mathcal{M}_*(\mathcal{A})$ *için* $\rho(M) = \rho(M/J)$ *dir.*

*Kanıt.* $M \in \mathcal{M}_*(\mathcal{A})$ olsun. Herhangi $\epsilon > 0$ için $\|M^n/J\|^{1/n} \leq \rho(M/J) + \epsilon$ olacak şekilde $n = n(\epsilon)$ alalım. Keyfi bir $\delta > 0$ için, $M^n \subset N + Q$, $Q \subset J$ ve $\|N\| \leq \|M^n/J\| + \delta$ olacak şekilde $N, Q \in \mathcal{M}_*(\mathcal{A})$ kümeleri vardır. (Bu bir geometrik gerçektir. $* = b$ ve $* = f$ için bu açıktır ancak $* = c$ için ispatı [17] numaralı kaynakta Lemma 6.9 da bulunabilir.) Böylece Lemma 2.5.25'den

$$\rho(M^n) \leq \rho(N + Q) \leq \rho(N) \leq \|N\| \leq \|M^n/J\| + \delta$$

dır. $\delta$ keyfi olduğundan

$$\rho(M)^n = \rho(M^n) \leq \|M^n/J\| \leq (\rho(M/J) + \epsilon)^n$$

olur ve buradan $\rho(M) \leq \rho(M/J) + \epsilon$ elde edilir. Dolayısıyla $\rho(M) \leq \rho(M/J)$ elde edilir. Ters eşitsizlik her zaman doğru olduğundan istenen görülmüş olur. $\square$

**Lemma 2.5.27.** [19] $\mathcal{A}$ *normlu cebir ve* $J = \mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ *olsun. Eğer* $N \in \mathcal{M}_c(J)$ *ve* $M \in \mathcal{M}_c(\mathcal{A})$ *ise* $\rho(NM) = 0$ *ve* $\rho(N + M) = \rho(M)$ *dir.*

*Kanıt.* $N \in \mathcal{M}_c(J)$ ise $N + M \in \mathcal{M}_c(\mathcal{A})$ dır. Teorem 2.5.26'dan

$$\rho(N + M) = \rho((N + M)/J) = \rho(M/J) = \rho(M)$$

elde edilir. Ayrıca $NM \subset (N \cup M)^2$ olduğundan Lemma 2.5.21'den

$$\rho(NM) \leq \rho((N \cup M)^2) = \rho(N \cup M)^2 = \rho(M)^2$$

olur. $N$, $\lambda N$ ile değiştirilirse $\rho(NM) = 0$ bulunur. $\square$

**Teorem 2.5.28.** [19] $\mathcal{A}$ *normlu cebir olsun. Bir* $a \in \mathcal{A}$ *elemanının* $\mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ *ya ait olması için gerek ve yeter koşul herhangi* $M \subset \mathcal{M}_c(\mathcal{A})$ *için* $\rho(aM) = 0$ *olmasıdır.*

*Kanıt.* Eğer $a \in \mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ ise o zaman her $M \in \mathcal{M}_c(\mathcal{A})$ için Lemma 2.5.27'den $\rho(aM) = 0$ dır. Tersini görmek için ilk olarak $\|M\| < 1$ olduğunu farz edelim.

Bu durumda $SG_1(M) \in \mathcal{M}_c(\mathcal{A}^1)$ ve dahası $SG_1(M)aSG_1(M) \in \mathcal{M}_c(\mathcal{A})$ dır. Dolayısıyla $\rho(aSG_1(M)) = 0$ olmasından dolayı

$$\rho(aSG_1(M))^2 = \rho((aSG_1(M))^2) = \rho(aSG_1(M)aSG_1(M)) = 0$$

olur. Teorem 2.5.23'den

$$\rho(\{a\} \cup M) = \rho(M)$$

elde edilir. Şimdi de $\|M\| \geq 1$ olduğunu kabul edelim. $t > \|M\|$ olacak şekilde bir $t$ alalım. Bu durumda da

$$\rho(\{a\} \cup M) = t\rho(\{a/t\} \cup (1/t)M) = t\rho((1/t)M) = \rho(M)$$

elde edilir. □

**Lemma 2.5.29.** [19] *$\mathcal{A}$ normlu bir cebir olsun. Bu durumda $\mathcal{R}_c(\mathcal{A}/\mathcal{R}_c(\mathcal{A})) = 0$ dır.*

*Kanıt.* $\hat{a} = a/\mathcal{R}_c(\mathcal{A}) \in \mathcal{R}_c(\mathcal{A}/\mathcal{R}_c(\mathcal{A}))$ olsun. Her $M \in \mathcal{M}_c(\mathcal{A})$ için $\hat{M} = M/\mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ alırsak, Teorem 2.5.26'dan

$$\rho(\{a\} \cup M) = \rho((\{a\} \cup M)/\mathcal{R}_c(\mathcal{A})) = \rho(\{\hat{a}\} \cup \hat{M}) = \rho(\hat{M}) = \rho(M)$$

olur. Bu bize $a \in \mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\hat{a} = 0$ olmalıdır. □

## 2.6 Lie Cebirleri

**Tanım 2.6.1.** *$\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir $\mathcal{L}$ Lie cebri, Lie parantezi olarak adlandırılan ve aşağıdaki aksiyomları sağlayan $[\cdot,\cdot] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ ikili işlemi ile bir vektör uzayıdır.*

*(i) Bilineerlik: Her $a, b \in \mathbb{F}$ ve her $x, y, z \in \mathcal{L}$ için;*
$[ax + by, z] = a\,[x, z] + b\,[y, z]$ , $[z, ax + by] = a\,[z, x] + b\,[z, y]$

*(ii) Alterne Özelliği: Her $x \in \mathcal{L}$ için;*
$[x, x] = 0$

*(iii) Jacobi Özdeşliği: Her $x, y, z \in \mathcal{L}$ için;*
$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

$[x, y]$ için Lie parantezi yerine $x$ ile $y$ nin komütatörü ifadesi de kullanılaktadır. Lie parantezi bilineer olduğundan

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$$

olur. Dolayısıyla $[x, y] = -[y, x]$ elde edilir. Bu, alterne özelliğine denk bir özelliktir. Lie cebrinin değişmeli olması $[x, y] = [y, x]$ demektir. $[x, y] = -[y, x]$ olduğundan dolayı da bir $\mathcal{L}$ Lie cebrinin değişmeli olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in \mathcal{L}$ için $[x, y] = 0$ olmasıdır.

**Tanım 2.6.2.** *$\mathcal{L}$ bir Lie cebir ve $K, I \subset \mathcal{L}$ alt uzaylar olsunlar.*

*(i) Her $x, y \in K$ için $[x, y] \in K$ oluyorsa $K$ alt uzayına Lie alt cebri denir.*

*(ii) Her $x \in \mathcal{L}, y \in I$ için $[x, y] \in I$ oluyorsa $I$ alt uzayına $\mathcal{L}$ nin bir ideali denir.*

$[x, y] = -[y, x]$ olduğundan burada ideal için sağ ve sol ideal ayrımı yapmaya gerek yoktur. Bir ideal daima bir alt cebirdir ama tersi her zaman doğru değildir. $\{0\}$ her cebrin bir ideali, her cebir de kendisinin bir idealidir. Bu iki ideale *aşikar idealler* denir. $Z(\mathcal{L}) := \{x \in \mathcal{L} : [x, y] = 0, \ \textit{her } y \in \mathcal{L} \textit{ için}\}$ şeklinde tanımlanan ve $\mathcal{L}$ cebrinin merkezi olarak adlandırılan $Z(\mathcal{L})$, aşikar olmayan bir idealdir. $I$ ve $J$, $\mathcal{L}$ Lie cebrinin iki ideali olsun. $I$ ve $J$ ideallerinden yeni idealler inşa etmenin bir kaç yolu vardır. İlk olarak $I \cap J$ alt uzayının bir ideal olduğunu söyleyebiliriz. Gerçekten, $x \in I \cap J$ ve $y \in \mathcal{L}$ için $x \in I, \ x \in J, \ y \in \mathcal{L}$ olur. $I$ ve $J$ ideal olduklarından $xy \in I, \ xy \in J$ elde edilir. Buradan da $xy \in I \cap J$ olur ki istenen görülmüş olur. İkinci olarak da $I + J := \{x + y : \ x \in I, \ y \in J\}$ şeklinde tanımlanan alt uzay da bir idealdir.
Şimdi de ideallerin çarpımını tanımlayalım. $[I, J] := Span\{[x, y] : x \in I, \ y \in J\}$ Bu şekilde tanımlanan ideallerin çarpımı da $\mathcal{L}$ Lie cebrinin bir idealidir. Bu tanımdan dolayı bir alt uzaydır. Şimdi eğer $x \in I, \ y \in J$ ve $u \in \mathcal{L}$ ise Jacobi özdeşliğinden $[u, [x, y]] = [x, [u, y]] + [[u, x], y]$ yazabiliriz. $J$ ideal olduğundan $[u, y] \in J$ dir. Böylece $[x, [u, y]] \in [I, J]$ elde edilir. Benzer şekilde $[[u, x], y] \in [I, J]$ olduğu görülür. Dolayısıyla bunların toplamı da $[I, J]$ kümesine aittir. Genel olarak $[I, J]$ ye ait bir $t$ elemanı, $x \in I, \ y \in J$ olmak üzere $[x, y]$ parantezlerinin bir lineer

kombinasyonudur. Dolayısıyla $i = 1, 2, ...$ için $x_i \in I,\ y_i \in J$ ve $c_i$ skaler olmak üzere $t = \sum c_i [x_i, y_i]$ şeklindedir. Bu durumda $u \in \mathcal{L}$ için

$$[u, t] = \left[u, \sum c_i [x_i, y_i]\right] = \sum c_i [u, [x_i, y_i]]$$

yazılabilir. Yukarıda $[u, [x_i, y_i]] \in [I, J]$ olduğu gösterildiğinden $[u, t] \in [I, J]$ elde edilir. Böylece $[I, J]$ bir ideal olur. Burada $I = J = \mathcal{L}$ alınırsa $[\mathcal{L}, \mathcal{L}]$ cebrine *türetilmiş cebir* denir ve $\mathcal{L}'$ ile gösterilir.

**Tanım 2.6.3.** *$\mathcal{L}_1$ ve $\mathcal{L}_2$, $\mathbb{F}$ üzerinde iki Lie cebri olsun. $\varphi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ fonksiyonu lineer ve her $x, y \in \mathcal{L}_1$ için $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ koşulunu sağlıyorsa bir homomorfizmadır. $\varphi$, (1-1) ve örten ise izomorfizma olur.*

**Tanım 2.6.4.** *$\mathcal{L}$ bir Lie cebri ve $x \in \mathcal{L}$ olsun. $adx : a \to [a, x]$ dönüşümüne $x$ elemanının eşleniği denir.*

**Örnek 2.6.5.** *$\mathcal{L}$ bir Lie cebri olsun. $gl(\mathcal{L})$, $\mathcal{L}$ den $\mathcal{L}$ ye tanımlı tüm lineer dönüşümleri göstermek üzere $x, y \in \mathcal{L}$ için $ad : \mathcal{L} \to gl(\mathcal{L})$, $(adx)y := [x, y]$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir homomorfizma olur. Gerçekten, Lie parantezinin bilineerliğinden her $x \in \mathcal{L}$ için $adx$ in lineer olduğu görülür. Aynı nedenle $x \mapsto adx$ dönüşümü de lineerdir. $\circ$ ile fonksiyon bileşkesi ifade edilmek üzere her $x, y \in \mathcal{L}$ için $ad([x, y]) = adx \circ ady - ady \circ adx$ olduğu Jacobi özdeşliğinden görülebilir. Burada $Çek(ad) = Z(\mathcal{L})$ olduğunu açıktır.*

$\varphi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ bir homomorfizma ise *Çek* $\varphi$, $\mathcal{L}_1$ için bir ideal, $Im\ \varphi$ ise $\mathcal{L}_2$ nin bir alt uzayıdır.

Birleşmeli her cebre bir Lie cebri yapısı kazandırılabilir. Daha güzel bir ifadeyle $\mathcal{A}$, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde birleşmeli bir cebir olsun. Bu durumda $\mathcal{A}$ üzerinde *her* $a, b \in \mathcal{A}$ için $[a, b] := ab - ba$ şeklinde bilineer $[\cdot, \cdot]$ işlemi tanımlarsak $\mathcal{A}$, bu işlemle bir *Lie cebri* olur.[9]

**Tanım 2.6.6.** $\mathcal{A}$, $\mathbb{F}$ *cismi üzerinde bir cebir olsun. $\mathcal{A}$ cebrinin türevi, $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, her $a, b \in \mathcal{A}$* için *$D(ab) = D(a)b + aD(b)$ şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşümdür.*

$\mathcal{A}$ nın tüm türevlerinin kümesi $Der\mathcal{A}$ ile gösterilir. Bu küme toplama ve skaler ile çarpma işlemleri altında kapalı olduğundan ve sıfır dönüşümünü içerdiğinden dolayı $gl(\mathcal{A})$ nın bir vektör alt uzayıdır. Dahası $Der\mathcal{A}$, $gl(\mathcal{A})$ nın bir Lie alt cebridir.

**Örnek 2.6.7.** *$\mathcal{L}$ bir Lie cebri ve $x \in \mathcal{L}$ olsun. $adx : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ dönüşümü, Jacobi özdeşliğinden dolayı bir türevdir. Gerçekten her $y, z \in \mathcal{L}$ için;*

$$(adx)[y, z] = [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] = [(adx)y, z] + [y, (adx)z]$$

*olduğundan istenen görülür.*

**Tanım 2.6.8.** *$\mathcal{L}$ bir Lie cebri ve $I$ bir ideal olsun. Bu durumda $I$ alt uzay olduğundan bölüm vektör uzayını $\mathcal{L}/I = \{z + I : z \in \mathcal{L}\}$ şeklinde ve kosetleri de $z+I = \{z + x : x \in I\}$ biçiminde tanımlanır. Bu bölüm vektör uzayı $[x+I, y+I] = [x, y] + I$ şeklinde tanımlanan Lie parantezi ile bir Lie cebri olur.*

Bunu görmek için ilk olarak Lie parantezinin $\mathcal{L}/I$ üzerinde iyi tanımlı olduğunu görmeliyiz. Kabul edelim ki $w + I = w' + I$ ve $z + I = z' + I$ olsun. Bu durumda $w - w' \in I$ ve $z - z' \in I$ olur. $\mathcal{L}$ üzerindeki Lie parantezinin bilineerliğinden;

$$\begin{aligned}[w', z'] &= [w' + (w - w'), z' + (z - z')] \\ &= [w, z] + [w - w', z'] + [w', z - z'] + [w - w', z - z']\end{aligned}$$

yazılır. Burada $[w - w', z'], [w', z - z'], [w - w', z - z'] \in I$ olduğundan $[w' + I, z' + I] = [w, z] + I$ elde edilir. Böylece istenilen elde edilmiş olur. Şimdi alterne ve Jacobi özdeşliğinin sağlandığını da gösterelim.

(i) Her $x \in \mathcal{L}$ için $[x + I, x + I] = [x, x] + I = I$ olduğundan alterne özelliği sağlanmış olur.

(ii) Her $x, y, z \in \mathcal{L}$ için;
$[x + I, [y + I, z + I]] + [y + I, [z + I, x + I]] + [z + I, [x + I, y + I]] =$
$[x + I, [y, z] + I] + [y + I, [z, x] + I] + [z + I, [x, y] + I] =$
$[x, [y, z]] + I + [y, [z, x]] + I + [z, [x, y]] + I =$
$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] + I = I$ olduğundan Jacobi özdeşliğinin de sağlandığı görülmüş olur.

Dolayısıyla tanımlanan bu işlem bir Lie parantezidir. Bu da bize $\mathcal{L}/I$ bölüm vektör uzayının Lie cebri olduğunu verir.

**Örnek 2.6.9.** *$I$, bir $\mathcal{L}$ Lie cebrinin ideali olsun. $x \in \mathcal{L}$ için $\pi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}/I$, $\pi(x) := x+I$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir homomorfizmadır. Gerçekten $x, y \in \mathcal{L}$ için $\pi([x,y]) = [x,y] + I = [x+I, y+I] = [\pi(x), \pi(y)]$ olduğu görülür.*

**Teorem 2.6.10.** *(İzomorfizm Teoremleri)*

*(i) $\varphi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ Lie cebirlerinin bir homomorfizması olsun. Bu durumda Çek$\varphi$, $\mathcal{L}_1$ cebrinin bir ideali, $Im\varphi$ ise $\mathcal{L}_2$ cebrinin alt cebri ve*

$$\mathcal{L}_1/\text{Çek}\varphi \cong Im\varphi \quad dir.$$

*(ii) $I$ ve $J$, Lie cebrinin iki ideali ise $(I+J)/J \cong I/(I \cap J)$ dir.*

*(iii) $I$ ve $J$, $\mathcal{L}$ Lie cebrinin $I \subseteq J$ olacak şekilde iki ideali ise $J/I$, $\mathcal{L}/I$ bölüm cebrinin bir idealidir ve $(\mathcal{L}/I)/(J/I) \cong \mathcal{L}/J$ dir.*

*Kanıt.* [9, Theorem 2.2.] □

$\mathcal{L}$ bir Lie cebri ve $I$'da bir ideali olsun. Bu durumda $\mathcal{L}/I$ bölüm cebirinin idealleri ile $\mathcal{L}$ cebrinin $I$ idealini içeren idealleri arasında 1-1 ve örten bir eşleme vardır. Bu eşleşme şu şekildedir. $J$, $\mathcal{L}$ cebrinin $I$ idealini içeren bir ideali olsun. Bu durumda $J/I$, $\mathcal{L}/I$ nın bir ideali olur. Tersine $K$, $\mathcal{L}/I$ nın bir ideali ise bu durumda $J = \{z \in \mathcal{L} : z + I \in K\}$ kümesi de $\mathcal{L}$ nin $I$ idealini içeren bir ideali olur. Bu iki eşleme birbirinin tersidir. [9]

### 2.6.1 Nilpotent Lie Cebirleri

$\mathcal{L}$ bir Lie cebri olsun. $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}$ ve $k > 1$ için $\mathcal{L}^k = [\mathcal{L}, \mathcal{L}^{k-1}]$ şeklinde tanımlanır. İdealleri çarpımı da ideal olduğundan her $\mathcal{L}^k$ da bir idealdir. Ayrıca bu idealler arasında $\mathcal{L} = \mathcal{L}^1 \supseteq \mathcal{L}^2 \supseteq \mathcal{L}^3 \supseteq \dots$ şeklinde bir sıralama vardır. Bunu tümevarım ile görmek kolaydır. $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] = Span\{[x,y] : x, y\}$ şeklinde tanımlandığından $\mathcal{L}^2 = [\mathcal{L}, \mathcal{L}] \subseteq \mathcal{L}$ olduğu açıktır. Şimdi $k \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{L}^k \subseteq \mathcal{L}^{k-1}$ olduğunu kabul edelim. O halde $\mathcal{L}^{k+1} = [\mathcal{L}, \mathcal{L}^k] \subseteq [\mathcal{L}, \mathcal{L}^{k-1}] = \mathcal{L}^k$ elde edilir. Ayrıca $\mathcal{L}^k/\mathcal{L}^{k+1}$ bölümü $\mathcal{L}/\mathcal{L}^{k+1}$ bölümünün merkezi içindedir. Yani $\mathcal{L}^k/\mathcal{L}^{k+1} \subset Z(\mathcal{L}/\mathcal{L}^{k+1})$ olur.

**Tanım 2.6.11.** *$\mathcal{L}$ bir Lie cebri olsun. Eğer herhangi bir $m \geq 1$ için $\mathcal{L}^m = 0$ oluyorsa $\mathcal{L}$ Lie cebrine nilpotent adı verilir. Yani $\mathcal{L} = \mathcal{L}^1 \supseteq \mathcal{L}^2 \cdots \supseteq \mathcal{L}^m = 0$ olur.*

**Teorem 2.6.12.** *Bir $\mathcal{L}$ Lie cebri için aşağıdakiler denktir.*

*(i) $\mathcal{L}$ nilpotenttir.*

*(ii) Herhangi $x \in \mathcal{L}$ için, $adx$ bir nilpotent lineer dönüşümdür.*

*(iii) $\mathcal{L}$ cebrinin $i = 0, \ldots, n-1$ için $dim(\mathcal{L}_i/\mathcal{L}_{i+1}) = 1$ ve $[\mathcal{L}, \mathcal{L}_i] \subset \mathcal{L}_{i+1}$ olacak şekilde ideallerin azalan bir*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{L}_n = 0$$

*dizisi vardır.*

*Kanıt.* [10, Theorem 1.1.28] □

**Lemma 2.6.13.** [9] *$\mathcal{L}$ bir Lie cebri olsun*

*(i) Eğer $\mathcal{L}$ nilpotent ise $\mathcal{L}$ nin her alt cebri de nilpotent olur.*

*(ii) Eğer $\mathcal{L}$ nin nilpotent olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{L}/Z(\mathcal{L})$ nin de nilpotent olmasıdır.*

*Kanıt.* *(i)* tanımdan açıktır.
*(ii)* $\mathcal{L}$ nilpotent olsun. $\mathcal{L}/Z(\mathcal{L})$, $\mathcal{L}$ nin $\pi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}/Z(\mathcal{L})$ projeksiyonu altındaki homomorfik görüntüsüdür. Böylece $\mathcal{L}/Z(\mathcal{L})$ nilpotenttir.
Tersine $\mathcal{L}/Z(\mathcal{L})$ nilpotent olsun. $(\mathcal{L}/Z(\mathcal{L}))^k = (\mathcal{L}^k + Z(\mathcal{L}))/Z(\mathcal{L})$ olduğu indüksiyon ile görülebilir. Buradan $(\mathcal{L}/Z(\mathcal{L}))^k = (\mathcal{L}^k + Z(\mathcal{L}))/Z(\mathcal{L}) = 0$ elde edilir. Bu ise $\mathcal{L}^k \subset Z(\mathcal{L})$ olması demektir. Dolayısıyla $\mathcal{L}^{k+1} = [\mathcal{L}, \mathcal{L}^k] \subset [\mathcal{L}, Z(\mathcal{L})] = 0$ olur ki bu da $\mathcal{L}$ nin nilpotent olması anlamına gelir. □

**Tanım 2.6.14.** *$X$ Banach uzayı, $\pi : B(X) \to B(X)/K(X)$ doğal homomorfizma ve $\mathcal{L} \subset B(X)$ bir Lie cebri olsun. Eğer $\pi(\mathcal{L})$ nilpotent ise $\mathcal{L}$ cebrine esaslı nilpotent Lie cebri denir.*

### 2.6.2 Çözülebilir Lie Cebirleri

**Lemma 2.6.15.** [9] *$I$ bir $\mathcal{L}$ Lie cebrinin bir ideali olsun. Bu durumda $\mathcal{L}/I$ bölüm cebrinin değişmeli olması için yeter ve gerek koşul $I$ idealinin $\mathcal{L}' = [\mathcal{L}, \mathcal{L}]$ türetilmiş cebrini içermesidir. Yani $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] \subset I$ olmasıdır.*

*Kanıt.* $\mathcal{L}$ bir Lie cebri ve $I$ ideal olsun. $\mathcal{L}/I$ bölüm cebrinin değişmeli olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in \mathcal{L}$ için $[x+I, y+I] = [x, y]+I = I$ olması veya denk olarak $[x, y] \in I$ olmasıdır. $I, \mathcal{L}$ nin alt uzayı olduğundan bunun olması için gerek ve yeter koşul $[x, y]$ parantezi ile üretilen uzayın $I$ içinde yer almasıdır. Böylece $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] \subset I$ elde edilir. □

Bu lemma bize, $\mathcal{L}/I$ bölüm cebrinin değişmeli olduğu en küçük $I$ idealinin $\mathcal{L}'$ türetilmiş cebri olduğunu söyler. Benzer argümanla $\mathcal{L}'$ türetilmiş cebri de kendi içinde bölümü değişmeli olan en küçük ideale sahiptir. Bu ideal $\mathcal{L}'$ cebrinin türetilmiş cebridir. Bunu da $\mathcal{L}^{(2)}$ ile gösterelim. Böylece $\mathcal{L}$ cebrinin aşağıda açık olarak ifade edilen türetilmiş serisini elde ederiz.

$$[\mathcal{L}, \mathcal{L}] = \mathcal{L}' = \mathcal{L}^{(1)} \text{ ve k} \geq 2 \text{ için } \mathcal{L}^{(k)} = [\mathcal{L}^{(k-1)}, \mathcal{L}^{(k-1)}]$$

*olarak tanımlanırsa bu durumda $\mathcal{L} \supseteq \mathcal{L}^{(1)} \supseteq \mathcal{L}^{(2)} \supseteq \dots$ serisine türetilmiş seri denir.*

**Tanım 2.6.16.** *$\mathcal{L}$ Lie cebri için $\mathcal{L}^{(m)} = 0$ olacak şekilde $m$ pozitif tam sayısı varsa $\mathcal{L}$ cebrine çözülebilir Lie cebri denir.*

**Lemma 2.6.17.** *$\mathcal{L}$ bir Lie cebri olsun. Eğer $\mathcal{L}$ cebrinin $1 \leq k \leq m$ için $I_{k-1}/I_k$ değişmeli olacak biçimde ideallerinin $\mathcal{L} = I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots I_{m-1} \supseteq I_m = 0$ şeklinde sonlu bir dizisi varsa, $\mathcal{L}$ cebri çözülebilirdir.*

*Kanıt.* [9, Lemma 4.3] □

Bu lemmanın tersinin her zaman doğru olduğu $I_k = \mathcal{L}^{(k)}$ alınarak görülür.

**Lemma 2.6.18.** *Nilpotent Lie cebirleri çözülebilirdir.*

*Kanıt.* $\mathcal{L}$ nilpotent Lie cebri olsun. O halde $\mathcal{L}^n = 0$ olacak biçimde bir n pozitif tam sayısı vardır. Eğer her $k \leq n$ için $\mathcal{L}^{(k)} \subseteq \mathcal{L}^k$ olduğunu gösterirsek $\mathcal{L}^{(n)} \subseteq$

$\mathcal{L}^n = 0$ dan istenen elde edilir. İddiamızı kanıtlamak için tümevarım uygulamak yeterlidir. $\mathcal{L}^{(1)} = [\mathcal{L}, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L} = \mathcal{L}^1$ olduğu açıktır. O halde $\mathcal{L}^{(k-1)} \subseteq \mathcal{L}^{k-1}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\mathcal{L}^{(k)} = [\mathcal{L}^{(k-1)}, \mathcal{L}^{(k-1)}] \subseteq [\mathcal{L}, \mathcal{L}^{(k-1)}] \subseteq [\mathcal{L}, \mathcal{L}^{k-1}] \subseteq \mathcal{L}^k$$

olur. Dolayısıyla istenen gösterilmiş olur. □

Bu lemmanın tersinin doğru olmadığını aşağıdaki örnekle gösterelim

**Örnek 2.6.19.** *$\mathbb{R}$ üzerinde tüm $n \times n$ tipindeki matrislerin vektör uzayı olan $gl(n, \mathbb{R})$, $[x, y] = xy - yx$ ile tanımlı Lie parantezi ile bir Lie cebridir. $n \times n$ tipindeki bir matrise her $1 \leq j < i \leq n$ için $a_{ij} = 0$ ise üst üçgen matris, $1 \leq j \leq i \leq n$ için $a_{ij} = 0$ ise kesinlikle üst üçgen matris denir. $b(n, \mathbb{R})$ ile $n \times n$ tipindeki tüm üst üçgen matrisleri ve $n(n, \mathbb{R})$ ile de tüm kesinlikle üst üçgen matrisleri gösterelim. Bunların her ikisi de $gl(n, \mathbb{R})$ nin alt cebirleridir. $n = 2$ alalım ve $\mathcal{L} = b(2, \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{L}^2 = [b(2, \mathbb{R}), b(2, \mathbb{R})] = n(2, \mathbb{R})$ ve $\mathcal{L}^3 = [\mathcal{L}, \mathcal{L}^2] = [b(2, \mathbb{R}), n(2, \mathbb{R})] = n(2, \mathbb{R})$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{L}^n = 0$ olacak bir $n$ doğal sayısı yoktur. Yani $\mathcal{L}$ cebri nilpotent değildir. Ancak $\mathcal{L}^{(1)} = [b(2, \mathbb{R}), b(2, \mathbb{R})] = n(2, \mathbb{R})$ ve buradan da $\mathcal{L}^{(2)} = [\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}^{(1)}] = [n(2, \mathbb{R}), n(2, \mathbb{R})] = 0$ olur dolayısıyla $\mathcal{L}$ cebri çözülebilirdir.*

**Lemma 2.6.20.** [3, Önerme 2.1.] *Aşağıdakilerin herbiri geçerlidir.*

*(i) Her değişmeli Lie cebri nilpotent dolayısıyla çözülebilirdir.*

*(ii) Nilpotent (çözülebilir) Lie cebrinin her alt cebri de nilpotenttir (çözülebilirdir).*

*(iii) Nilpotent (çözülebilir) Lie cebrinin her Lie morfizm altındaki görüntüsü de nilpotenttir (çözülebilirdir).*

*(vi) Eğer $I$, $\mathcal{L}$ Lie cebrinin çözülebilir bir ideali ve $\mathcal{L}/I$ da çözülebilir ise bu durumda $\mathcal{L}$ cebri de çözülebilirdir.*

*(v) Her Lie cebrinde herhangi nilpotent (çözülebilir) iki idealin toplamı da nilpotenttir (çözülebilirdir).*

### 2.6.3 Yarıçözülebilir Lie Cebirleri

**Tanım 2.6.21.** *$\mathcal{L}$ bir Lie cebri olsun.*

*(i) Eğer $\mathcal{L}$, vektör uzayı gibi, sonlu boyutlu alt cebirlerin yönlendirilmiş $\{\mathcal{L}_i\}_{i\in I}$ ailesi tarafından geriliyor ise (yani, her $i, j \in I$ için $\mathcal{L}_i + \mathcal{L}_j \subseteq \mathcal{L}_k$ olacak şekilde $k \in I$ varsa), $\mathcal{L}$ cebrine yerel olarak sonlu Lie cebri denir.*

*(ii) $\mathcal{L}$ yerel olarak sonlu Lie cebri olsun. Eğer $\{\mathcal{L}_i\}_{i\in I}$ sadece çözülebilir (nilpotent) Lie cebirlerinden oluşuyor ise, $\mathcal{L}$ cebrine yerel olarak çözülebilir (nilpotent) Lie cebri denir.*

*(iii) Eğer $\mathcal{L}$, vektör uzayı gibi, sonlu boyutlu ideallerin bir ailesi tarafından geriliyor ise ideal olarak sonlu Lie cebri denir.*

*(vi) Eğer $\mathcal{L}$ cebri, ideal olarak sonlu ve yerel olarak çözülebilir (nilpotent) ise $\mathcal{L}$ cebrine yarıçözülebilir (yarınilpotent) Lie cebri denir.*

**Lemma 2.6.22.** [3, Sonuç 2.2] *$\mathcal{L}$ bir Lie cebri olsun. Aşağıdakiler denktir.*

*(i) $\mathcal{L}$ yarıçözülebilirdir.*

*(ii) $\mathcal{L}$ cebrinin sonlu boyutlu çözülebilir ideallerinden oluşan belli bir $\{\mathcal{L}_i\}_{i\in I}$ ailesi için $\mathcal{L} = \sum_{i\in I} \mathcal{L}_i$ dir.*

*(iii) $\mathcal{L}$ ideal olarak sonludur ve $\mathcal{L}$ cebrinin sonlu boyutlu her ideali çözülebilirdir.*

**Lemma 2.6.23.** [3, Remark 2.3] *$\mathcal{L}$ bir Lie cebri olsun. Aşağıdakiler denktir.*

*(i) $\mathcal{L}$ yarınilpotenttir.*

*(ii) $\mathcal{L}$ cebrinin sonlu boyutlu nilpotent ideallerinden oluşan belli bir $\{\mathcal{L}_i\}_{i\in I}$ ailesi için $\mathcal{L} = \sum_{i\in I} \mathcal{L}_i$ dir.*

*(iii) $\mathcal{L}$ ideal olarak sonludur ve $\mathcal{L}$ cebrinin sonlu boyutlu her ideali nilpotenttir.*

**Sonuç 2.6.24.** *Nilpotent Lie cebirleri yarıçözülebilirdir.*

*Kanıt.* Gerçekten, $\mathcal{L}$ bir nilpotent lie cebri olsun. Dolayısıyla yarınilpotenttir. Lemma 2.6.23'den, $\mathcal{L}$ cebrinin sonlu boyutlu nilpotent ideallerinden oluşan belli bir $\{\mathcal{L}_i\}_{i\in I}$ ailesi için $\mathcal{L} = \sum_{i\in I} \mathcal{L}_i$ dir. Dolayısıyla bu ailenin elemanları aynı zamanda çözülebilirdir. O halde Lemma 2.6.22'den $\mathcal{L}$ yarıçözülebilirdir. □

**Tanım 2.6.25.** *Bir $\mathcal{L}$ cebrinin en geniş çözülebilir idealine radikal denir ve $Rad(\mathcal{L})$ ile gösterilir.*

**Tanım 2.6.26.** *Sıfırdan farklı bir $\mathcal{L}$ Lie cebri, sıfırdan farklı çözülebilir ideallere sahip değilse buna denk olarak $Rad(\mathcal{L}) = 0$ ise $\mathcal{L}$ cebrine yarıbasit Lie cebri denir.*

**Lemma 2.6.27.** [9, Lemma 4.7] *Eğer $\mathcal{L}$ bir Lie cebri ise $\mathcal{L}/Rad(\mathcal{L})$ yarıbasittir.*

*Kanıt.* $\overline{J}$, $\mathcal{L}/Rad(\mathcal{L})$ nin çözülebilir bir ideali olsun. İdeal eşlemesinden $\mathcal{L}$ nin $Rad(\mathcal{L})$ yi içeren bir $J$ ideali vardır ve $\overline{J} = J/Rad(\mathcal{L})$ dir. Tanımdan $Rad(\mathcal{L})$ çözülebilirdir. Hipotezden de $\overline{J} = J/Rad(\mathcal{L})$ çözülebilirdir. Dolayısıyla 2.6.20 den $J$ çözülebilirdir. Fakat $J$, $Rad(\mathcal{L})$ nin içinde olduğundan $\overline{J} = 0$ olur. □

Bir $\mathcal{L}$ Lie cebri tarafından üretilen kapalı birleşmeli Banach cebrini $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}$ ile göstereceğiz.

**Önerme 2.6.28.** [3, Proposition 24.1] *$\mathcal{A}$ kompleks birimli bir Banach cebri ve $\mathcal{L}$ de bir Lie altcebri olsun ve bir $I$ idealinin nilpotent elemanları*

$$\mathcal{N}_I := \{a \in I : \ a, \ nilpotent\}$$

*ile gösterilsin. Eğer $I$, $\mathcal{L}$ cebrinin sonlu boyutlu çözülebilir bir ideali ise $\mathcal{N}_I$, $\mathcal{L}$ nin bir idealidir ve $\mathcal{N}_I \subset Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ olur.*

**Lemma 2.6.29.** [3, Lemma 24.1] *$\mathcal{B}$ yarıbasit kompleks birimli bir Banach cebri ve $\mathcal{L}$, $\mathcal{B}$ 'nin bir altcebri öyleki $\mathcal{L}$ tarafından üretilen kapalı, birleşmeli cebir $\mathcal{B}$ ye eşit olsun. Eğer $I$, $\mathcal{L}$ nin, her $b \in \mathcal{L}$ için $ad\, b|_I$ nilpotent bir dönüşüm olacak şekilde sonlu boyutlu ideali ise $[I, \mathcal{L}] = 0$ olur.*

**Teorem 2.6.30.** [3, Theorem 24.1] *$\mathcal{L}$, birimli kompleks $\mathcal{A}$ Banach cebrinin bir alt cebri ve $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ cebri tarafından üretilen birleşmeli ve birimli bir alt cebir olsun. Eğer $I$, $\mathcal{L}$ cebrinin sonlu boyutlu çözülebilir bir ideali ise $[I, \mathcal{L}] \subseteq Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ olur.*

**Lemma 2.6.31.** [3, Remark 24.1] *$\mathcal{A}$ kompleks, birimli bir Banach cebri olsun. Eğer $\mathcal{A}$ cebrinin bir alt cebri olan $\mathcal{L}$ cebri yarıçözülebilir ve $\overline{\mathcal{A}(L)}$ de $\mathcal{L}$ cebri tarafından üretilen kapalı birleşmeli ve birimli bir alt cebir ise $[\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}, \overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}] \subset Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ yani $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}/Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ değişmelidir.*

*Kanıt.* $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\mathcal{L}$ cebrinin sonlu boyutlu çözülebilir ideallerinin bir ailesi olsun. $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}/Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ olmak üzere $\pi : \overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})} \to \mathcal{B}$ doğal projeksiyonunu alalım. Bu durumda Teorem 2.6.30'den her $\alpha \in \Lambda$ için $[\pi(I_\alpha), \mathcal{B}] = \{0\}$ olur. Fakat $\mathcal{B}$, $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} \pi(I_\alpha) = \pi(\mathcal{L})$ tarafından üretilen kapalı birleşmeli birimli alt cebre eşittir. Böylece $[\mathcal{B}, \mathcal{B}] = \{0\}$ sonucunu elde ederiz. □

# BÖLÜM 3

# LIE CEBİRLERİ İÇİN BERGER-WANG FORMÜLÜ

Bu bölümde, 2. bölümde verdiğimiz bilgiler ile Berger-Wang formülünün bir $X$ Banach uzayı üzerinde tanımlı lineer ve sınırlı operatörlerin nilpotent, eseslı nilpotent ve çözülebilir Lie cebirleri tarafından üretilen Banach cebirlerinin önkompakt alt kümeleri için sağlandığını göstereceğiz.

$X$ bir Banach uzayı olsun. $B(X)$ tüm sınırlı lineer operatörlerden oluşan Banach cebri olmak üzere, $X$ uzayı üzerinde tanımlı tüm kompakt operatörlerin kümesi olan $K(X)$, $B(X)$ cebrinin bir idealdir. Lie çarpımı, $T_1, T_2 \in B(X)$ için $[,] : [T_1, T_2] = T_1T_2 - T_2T_1$ ile tanımlanır. Bu durumda, $B(X)$ bu işlem altında bir Lie cebiri olur.

$M \subset B(X)$ olsun. $\mathcal{A}(M)$ ile $M$ tarafından üretilen birleşmeli cebri, $\overline{\mathcal{A}(M)}$ ile de $M$ tarafından üretilen kapalı Banach cebrini göstereceğiz. Burada $M$ tarafından üretilen cebir, $M$ kümesini içeren en küçük cebir anlamına gelmektedir.

## 3.1 Nilpotent Lie Cebirleri İçin Berger-Wang Formülü

**Lemma 3.1.1.** [22] *Eğer $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$ nilpotent Lie cebri tarafından üretilen bir Banach cebri ise $\mathcal{A}/Rad(\mathcal{A})$ değişmelidir.*

Bu lemmanın orjinal ispatı Turovskii tarafından yapılmıştır [22]. Ancak nilpotent Lie cebri yarıçözülebilir olduğundan, Lemma 2.6.31'den doğruluğu görülebilir.

**Lemma 3.1.2.** *Bir $\mathcal{A}$ Banach cebri için $Z(\mathcal{A}) \cap Rad(\mathcal{A}) \subset \mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ dır.*

*Kanıt.* $M \subset \mathcal{A}$ bir önkompakt alt küme olsun. $a \in Z(\mathcal{A}) \cap Rad(\mathcal{A})$ alalım. $a \in Z(\mathcal{A})$ olduğundan $M$ kümesinin her elemanı ile değişmelidir. O halde Teorem 2.3.22 (ii)' den $\rho(\{a\} \cup M) = \max\{\rho(a), \rho(M)\}$ yazılır. $a \in Rad(\mathcal{A})$ olduğından da Teorem 2.5.7'den $\rho(a) = 0$ dır. Böylece $\rho(\{a\} \cup M) = \max\{\rho(a), \rho(M)\} = \rho(M)$ elde edilir. Bu da $a \in \mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ olması demektir. □

**Lemma 3.1.3.** *Eğer $\mathcal{A}$ Banach cebri değişmeli ise bu durumda her $M \subset \mathcal{A}$ önkompakt alt kümesi için $\rho(M) = r(M)$ dir.*

*Kanıt.* $\mathcal{A}$ cebri değişmeli olduğundan her alt kümesinin tüm elemanları değişmeli olacağından Lemma 2.4.4'den açıktır. □

**Lemma 3.1.4.** *Bir $\mathcal{A}$ Banach cebrinin her önkompakt $M$ alt kümesi için $\rho(M) = \rho(M/\mathcal{R}_c(\mathcal{A}))$ dır.*

*Kanıt.* Teorem 2.5.26'dan $* = c$ durumu için görülür. □

**Lemma 3.1.5.** [7] *$\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}$, bir $\mathcal{L}$ Lie cebri tarafından üretilen bir Banach cebri, $I$, $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}$ cebrinin kapalı bir ideali ve $q : \overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})} \to \overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}/I$ bölüm tasviri olsun. Bu durumda $\overline{\mathcal{A}(q(\mathcal{L}))} = q(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ dir.*

*Kanıt.* $\mathcal{A}(q(\mathcal{L})) = q(\mathcal{A}(\mathcal{L}))$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\overline{\mathcal{A}(q(\mathcal{L}))} = \overline{q(\mathcal{A}(\mathcal{L}))} \supset q(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$. Burada $q(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ nin kapalı olduğu ve $q(\mathcal{A}(\mathcal{L}))$ yi içerdiği göz önüne alınırsa $\overline{q(\mathcal{A}(\mathcal{L}))} \subset q(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ olduğu görülür. Böylece $\overline{\mathcal{A}(q(\mathcal{L}))} = \overline{q(\mathcal{A}(\mathcal{L}))} = q(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ olur. □

**Önerme 3.1.6.** *Eğer bir $\mathcal{A}$ Banach cebri, nilpotent $\mathcal{L}$ Lie cebri tarafından üretilen bir cebir ise bu durumda her önkompakt $M \subset \mathcal{A}$ alt kümesi için $\rho(M) = r(M)$ olur.*

*Kanıt.* $\mathcal{L}$ nilpotent olduğundan $\mathcal{L}^{n+1} = [\mathcal{L}, \mathcal{L}^n] = 0$ olacak şekilde bir $n$ pozitif tamsayısı vardır. O halde $\mathcal{L}^n$, $\mathcal{L}$ ile değişmeli olur. Dolayısıyla,

$$\mathcal{L}^n \subset Z(\mathcal{L}) \subset Z(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}) \tag{3.1}$$

elde edilir. Şimdi Lemma 3.1.1'den $\overline{(\mathcal{A}(\mathcal{L}))}/Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ değişmelidir. Dolayısıyla her $a, b \in \overline{(\mathcal{A}(\mathcal{L}))}$ için $\left[a + Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}), b + Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})\right] = Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ buradan da $[a, b] \in Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ elde edilir. Bu bize $\mathcal{L}^2 \subset (\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})^2 \subset Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ olduğunu verir. Buradan da, $\mathcal{L}^n \subset \mathcal{L}^2$ olduğundan,

$$\mathcal{L}^n \subset Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}) \tag{3.2}$$

olur. Şu halde (3.1) ve (3.2) den $\mathcal{L}^n \subset Z(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}) \cap Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ olur. Böylece Lemma 3.1.2'den de $\mathcal{L}^n \subset \mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ olduğu görülür.

Eğer $n > 2$ ise; $q : \overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})} \to \overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}/\mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ ve $\mathcal{L}_1 = q(\mathcal{L})$ olsun. O halde $\mathcal{L}^n \subset \mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ olduğundan $(q(\mathcal{L}))^n = q(\mathcal{L}^n) = \mathcal{L}^n + \mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}) = 0$ olur. Dolayısıyla $q(\mathcal{L})$ yani $\mathcal{L}_1$ nilpotent olur. Ayrıca Lemma 3.1.5'den $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L}_1)} = \overline{\mathcal{A}(q(\mathcal{L}))} = q(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ olduğu göz önünde bulundurularak üstte olduğu gibi $(q(\mathcal{L}))^{n-1} \subset \mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L}_1)})$ elde edilir. Buradan da Lemma 2.5.29'da kullanılarak $(q(\mathcal{L}))^{n-1} \subset \mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(q(\mathcal{L}))}) = \mathcal{R}_c(q(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})) = \mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}/\mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})) = 0$ elde edilir. Böylece $(q(\mathcal{L}))^{n-1} = 0$ olmuş olur. Buradan da aynı şekilde gidilerek $(q(\mathcal{L}))^2 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $q(\mathcal{L})$ ve hatta $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L}_1)}$ değişmelidir. Son olarak her $M \subset \overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}$ önkompakt alt kümesi için Lemma 3.1.3 ve Lemma 3.1.4 kullanılarak

$$\rho(M) = \rho(M/\mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})) = r(M/\mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})) \leq r(M)$$

elde edilmiş olur. Eşitsizliğin diğer tarafı açık olduğundan $\rho(M) = r(M)$ olur. □

## 3.2 Esaslı Nilpotent Lie Cebirleri İçin Berger-Wang Formülü

Aşağıda verilen lemma ile Shulman ve Turovskii [20]'da $X$ Banach uzayında genelleştirilmiş Berger-Wang formülünün $B(X)$ uzayının her $M$ önkompakt alt kümesi için sağlandığını göstermişlerdir.

**Lemma 3.2.1.** [20] *$X$ bir Banach uzayı ve $M \subset B(X)$ önkompakt bir alt kümesi için $\rho(M) = \max\{\rho_e(M), r(M)\}$ genelleştirilmiş Berger-Wang formülü sağlanır.*

*Kanıt.* Lemma 2.4.10'dan $\|L_M R_M\|_\chi \leq 16\|M\|_\chi\|M\|$ olur. $M$, $M^n$ ile değiştirilir, n. dereceden kökü alınır ve $n \to \infty$ için limite geçilirse

$$\rho^\chi(M)^2 = \rho_\chi(L_M R_M) \leq \rho_\chi(M)\rho(M)$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 2.4.12 $\rho(M)^2 \leq \max\{\rho_\chi(M)\rho(M), r(M)^2\}$ demek olur. $r(M) \leq \rho(M)$ eşitsizliği ile (2.7) den

$$\rho(M) \leq \max\{\rho_\chi(M), r(M)\} \leq \max\{\rho_e(M), r(M)\}$$

elde edilir. Eşitsizliğin diğer tarafı açıkça görülebildiğinden istenen gösterilmiş olur. □

**Sonuç 3.2.2.** *Eğer $\mathcal{A}$, bir $\mathcal{L}$ nilpotent Lie cebri tarafından üretilen Banach cebri ise o zaman $\mathcal{R}_c(\mathcal{A}) = Rad(\mathcal{A})$ ve $\mathcal{A}/\mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ değişmelidir.*

*Kanıt.* $\mathcal{R}_c(\mathcal{A}) \subset Rad(\mathcal{A})$ olduğunu görmek kolaydır. Gerçekten, $a \in \mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ alalım. Herhangi $b \in \mathcal{A}$ için $\mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ ideal olduğundan $ab \in \mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ olur. $\{ab\} \in \mathcal{M}_c(\mathcal{A})$ için $\mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ c-yarınilpotent olduğundan $\rho(ab) = 0$ elde edilir. Bu $a \in Rad(\mathcal{A})$ demektir. Tersine $a \in Rad(\mathcal{A})$ alalım ve $M \in \mathcal{M}_c(\mathcal{A})$ olsun. Önerme 3.1.6'dan $\rho(aM) = r(aM) = 0$ olur. Teorem 2.5.28 den de $a \in \mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ elde edilir. Sonuç olarak $\mathcal{R}_c(\mathcal{A}) = Rad(\mathcal{A})$ olur. $\mathcal{A}/\mathcal{R}_c(\mathcal{A})$ nın değişmeli olması Lemma 3.1.1'den dolayıdır. □

**Teorem 3.2.3.** *Eğer $\mathcal{A}$, bir $\mathcal{L}$ esaslı nilpotent Lie cebri tarafından üretilen Banach cebri ise, her önkompakt $M \subset \mathcal{A}$ için $\rho(M) = r(M)$ dir.*

*Kanıt.* Her önkompakt $M \subset \mathcal{A}$ için Lemma 3.2.1'den dolayı $\rho(M) = \max\{\rho_e(M), r(M)\}$ olur. Önerme 3.1.6 dan $\rho_e(M) = r_e(M)$ dir Dolayısıyla

$$\rho_e(M) = r_e(M) \leq r(M)$$

elde edilir. Böylelikle $\rho(M) = r(M)$ olduğu görülür. □

## 3.3 Çözülebilir Lie Cebirleri İçin Berger-Wang Formülü

**Lemma 3.3.1.** *Eğer $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$ çözülebilir Lie cebri tarafından üretilen bir Banach cebri ise $\mathcal{A}/Rad(\mathcal{A})$ değişmelidir.*

*Kanıt.* Çözülebilir Lie cebri, yarıçözülebilir olduğundan Lemma 2.6.31'den açıktır. □

**Teorem 3.3.2.** *Eğer bir $\mathcal{A}$ Banach cebri, çözülebilir $\mathcal{L}$ Lie cebri tarafından üretilen bir cebir ise bu durumda her önkompakt $M \subset \mathcal{A}$ alt kümesi için $\rho(M) = r(M)$ olur.*

*Kanıt.* $\mathcal{L}$ çözülebilir olduğundan $\mathcal{L}^{(n+1)} = [\mathcal{L}^{(n)}, \mathcal{L}^{(n)}] = 0$ olacak şekilde bir $n$ pozitif tamsayısı vardır. O halde $\mathcal{L}^{(n)}$ değişmeli olur. Yani $\mathcal{L}^{(n)} = Z(\mathcal{L}^{(n)})$ olur. Dolayısıyla;

$$\mathcal{L}^{(n)} = Z(\mathcal{L}^{(n)}) \subset Z(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}) \tag{3.3}$$

elde edilir. Şimdi Lemma 3.3.1'den $\overline{(\mathcal{A}(\mathcal{L}))}/Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ değişmelidir. Dolayısıyla her $a, b \in \overline{(\mathcal{A}(\mathcal{L}))}$ için $\left[a + Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}), b + Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})\right] = Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ buradan da $[a, b] \in Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ elde edilir. Bu bize $\mathcal{L}^{(2)} \subset \mathcal{L}^2$ olduğundan $\mathcal{L}^{(2)} \subset \mathcal{L}^2 \subset (\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})^2 \subset Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ olduğunu verir. Buradan da, $\mathcal{L}^{(n)} \subset \mathcal{L}^n \subset \mathcal{L}^2$ olduğundan,

$$\mathcal{L}^{(n)} \subset Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}) \tag{3.4}$$

olur. Şu halde (3.3) ve (3.4) den $\mathcal{L}^{(n)} \subset Z(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}) \cap Rad(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ olur. Böylece Lemma 3.1.2'den de $\mathcal{L}^{(n)} \subset \mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ olduğu görülür.
Eğer $n > 1$ ise; $q : \overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})} \to \overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}/\mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ ve $\mathcal{L}_1 = q(\mathcal{L})$ olsun. O halde $\mathcal{L}^{(n)} \subset \mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ olduğundan $(q(\mathcal{L}))^{(n)} = q(\mathcal{L}^{(n)}) = \mathcal{L}^{(n)} + \mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}) = 0$ olur. Dolayısıyla $q(\mathcal{L})$ yani $\mathcal{L}_1$ çözülebilir olur. Ayrıca Lemma 3.1.5'den $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L}_1)} = \overline{\mathcal{A}(q(\mathcal{L}))} = q(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})$ olduğu göz önünde bulundurularak üstte olduğu gibi $(q(\mathcal{L}))^{(n-1)} \subset \mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L}_1)})$ elde edilir. Buradan da lemma 2.5.29'da kullanılarak $(q(\mathcal{L}))^{(n-1)} \subset \mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(q(\mathcal{L}))}) = \mathcal{R}_c(q(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})) = \mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}/\mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})) = 0$ elde edilir. Böylece $(q(\mathcal{L}))^{(n-1)} = 0$ olmuş olur. Buradan da aynı şekilde gidilerek

$(q(\mathcal{L}))^{(1)} = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $q(\mathcal{L})$ ve hatta $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L}_1)}$ değişmelidir. Son olarak her $M \subset \overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})}$ önkompakt alt kümesi için Lemma 3.1.3 ve Lemma 3.1.4 kullanılarak

$$\rho(M) = \rho(M/\mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})) = r(M/\mathcal{R}_c(\overline{\mathcal{A}(\mathcal{L})})) \leq r(M)$$

elde edilmiş olur. Eşitsizliğin diğer tarafı açık olduğundan $\rho(M) = r(M)$ olur. $\square$

# BÖLÜM 4

# SONUÇ

Bu tez çalışması iki ana bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Bu bölümde normlu uzaylar, bölüm uzayları, spektral özellikler, topolojik radikaller Berger-Wang formülü ve Lie cebirleri konuları çalışılmış, tanımlar, özellikler ve bazı önemli teoremler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde ise nilpotent ve esaslı nilpotent Lie cebirleri tarafından üretilen kapalı Banach cebirlerinin her önkompakt alt kümesi için Berger-Wang formülünün sağlandığı gösterilmiştir. Buna ek olarak çözülebilir Lie cebirleri tarafından üretilen Banach cebirlerinin her ön kompakt alt kümesi için de Berger-Wang formülünün sağlandığı görülmüştür.

Ayrıca daha geniş bir cebir olan yarıçözülebilir Lie cebirleri için aşağıdaki problem üzerinde çalışılabilir.

***Açık Problem:*** Yarıçözülebilir Lie cebirleri tarafından üretilen kapalı Banah cebirlerinin her önkompakt alt kümesi için Berger-Wang formülü gerçeklenir mi?

# KAYNAKÇA


[1] Y.A. Abramovich, C.D.Aliprantis, *Problems in Operator Theory*, Amer. Math. Society, Providence, RI, 2002.

[2] Y.A. Abramovich, C.D.Aliprantis, *An Invitation to Operator Theory*, Amer. Math. Society, Providence, RI, 2002.

[3] D. Beltita, M.Sabac, *Lie Algebras of Bounded Operators*, Springer, Basel, 2001.

[4] M.A.Berger, Y.Wang, *Bounded Semigroups of Matrices*, Linear Algebra Appl., **166** (1992), 21-27.

[5] F.F.Bonsall, J.Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[6] P.Cao, S.Sun, *Quasinilpotent Operators in Operator Lie Algebras*, İntegral Equations and Operator Theory, **58** (2007), 34-41.

[7] P.Cao, *Quasinilpotent Operators in Operator Lie Algebras II*, Studia Mathematica, **195 (2)** (2009), 193-200.

[8] P.Cao, *Quasinilpotent Operators in Operator Lie Algebras III*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **386** (2012), 709-717.

[9] K.Erdmann, M.J.Wildon, *Introduction to Lie Algebras*, Springer-Verlag, Berlin, London, 2006.

[10] H.Fujiware, J.Ludwing, *Harmonic Analysis on Exponential Solvable Lie Groups*, Springer, Japan, 2015.

[11] W.K. Hayman, P.B. Kennedy, *Subharmonic functions Volume 1,* Academic press, London-New York-San Francisko, 1976.

[12] T.Y.Lam, *A First Course in Noncommutative Rings,* Springer-Verlag, New York-Berlin-London, 1991.

[13] R.T.Mısırlıoğlu, *Invariant Subspace Theorems for Families of Operators on Banach Spaces and Banach Lattices*, Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, 2010.

[14] I.D.Morris, *The generalized Berger-Wang formula and the spectral radius of linear cocycles*, J.Funct.Anal., **262:3** (2012), 811-824.

[15] T.W.Palmer, *Banach Algebras and The General Theory of *-Algebras Volume 1: Algebras and Banach Algebras,* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[16] G.C. Rota, W.G.Strang, *A Note on The Joint Spectral Radius*, Indag. Math., **22** (1960), 379-381.

[17] V.S. Shulman, Y.V. Turovskii, *Joint Spectral Radius, Operator Semigroups and a Problem of W.Wojtynski*, J.Funct. Anal., **177** (2000), 383-441.

[18] V.S. Shulman, Y.V. Turovskii, *Formulae for Joint Spectral Radii of Sets of Operators*, Studia Mathematica, **149 (1)** (2002), 23-37.

[19] V.S. Shulman, Y.V. Turovskii, *Topological radicals, I. Basic properties, Tensor Products and Joint Quasinilpotence*, Banach Center Publ., **67** (2005), 293-333.

[20] V.S. Shulman, Y.V. Turovskii, *Topological Radicals and Joint Spectral Radius*, Functional Analysis and Its Applications, **46** (2012), 287-304.

[21] Y.V. Turovskii, *Volterra semigroups have invariant subspaces*, J. Func. Anal., **162:2** (1999), 313-323.

[22] Y.V. Turovskii, *Spectral properties of certain Lie subalgebras and the spectral radius of subsets of a Banach algebra* , Spectral Theory of Operators and Its Applications Elm, Baku, **Vol 6** (1985), 144-181 (in Russian).