

T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN BAZI ÇÖZÜM  
YÖNTEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğba DAYMAZ

1202010017

Anabilim Dalı: Matematik-Bilgisayar

Programı: Matematik-Bilgisayar

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Emel YAVUZ

Mayıs 2018

**T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN BAZI ÇÖZÜM**  
**YÖNTEMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Tuğba DAYMAZ**

**1202010017**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 14 Mayıs 2018**

**Tezin Savunulduğu Tarih : 28 Mayıs 2018**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. Emel YAVUZ**

**Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mert ÇAĞLAR**

**Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN**

**Mayıs 2018**

## ÖNSÖZ

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi sırasında ilgi ve alakasını hiç eksik etmeyen, ortaya çıkan her türlü problemin çözümünde bilgi ve deneyimleri ile yardım eden ve bana büyük emekleri geçen, tüm bu süreçte manevi desteğini daima hissettiğim danışmanım Doç. Dr. Emel YAVUZ'a çok teşekkür ederim.

Bana lisans ve lisansüstü eğitim hayatım boyunca deneyimleriyle ve tüm içtenliğiyle yol gösteren, kendisinden çok şey öğrendiğim Dr. Öğr. Üyesi M.Selçuk TÜRER'e teşekkür ederim.

Hayatım boyunca bana her zaman güç ve güven veren, desteklerini esirgemeyen, bugünlere gelmem de büyük rol oynayan annem Şennur DAYMAZ, babam Turan DAYMAZ ve ablam Tuğşen DAYMAZ'a, gölgelerini hiçbir zaman üzerimden eksik etmeyen ve bana her zaman koşulsuz inanan aile büyüklerim Aynur BÖNCÜ, Mediha BÖNCÜ, Ahmet DAYMAZ ve Emine DAYMAZ'a, her koşulda ne olursa olsun her kararımı sorgusuzca destekleyen Berk Onur SARICAOĞLU'na teşekkür ederim.

MAYIS 2018

Tuğba DAYMAZ

## İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b> .....	iv
<b>ABSTRACT</b> .....	vi
<b>1 Giriş</b> .....	1
1.1 İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması .....	2
1.1.1 Fredholm İntegral Denklemleri .....	2
1.1.2 Volterra İntegral Denklemleri .....	2
1.1.3 Volterra-Fredholm İntegral Denklemleri .....	3
1.1.4 Singüler İntegral Denklemler .....	3
1.2 İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması .....	4
1.2.1 Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemleri .....	4
1.2.2 Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemler .....	5
1.3 Lineerlik ve Homojenlik Kavramları .....	5
1.3.1 Lineerlik Kavramı .....	5
1.3.2 Homojenlik Kavramı .....	6
1.4 Başlangıç Değer Problemlerinin Volterra İntegral Denklemlerine Dönüştürülmesi .....	6
1.4.1 Volterra İntegral Denklemlerinin Başlangıç Değer Problem- lerine Dönüştürülmesi .....	10
1.4.2 Sınır Değer Problemlerinin Fredholm İntegral Denklemlerine Dönüştürülmesi .....	11
1.4.3 Fredholm İntegral Denklemlerinin Sınır Değer Problemle- rine Dönüştürülmesi .....	16
1.4.4 İntegral Denklemlerin Çözümü .....	18
<b>2 Fredholm İntegral Denklemler</b> .....	20
2.1 İkinci Tip Fredholm İntegral Denklemler .....	21
2.1.1 Adomian Ayrıştırma Metodu .....	21
2.1.2 Değiştirilmiş Adomian Ayrıştırma Metodu .....	23

2.1.3	Gürültü Terimi . . . . .	24
2.1.4	Doğrudan Hesaplama Yöntemi . . . . .	25
2.1.5	Ardışık Yaklaşım Metodu . . . . .	27
2.1.6	Seri Çözümü Metodu . . . . .	28
2.2	Homojen Fredholm İntegral Denklemler . . . . .	29
2.2.1	Doğrudan Hesaplama Yöntemi . . . . .	29
2.3	Birinci Tip Fredholm İntegral Denklemler . . . . .	30
2.3.1	Düzenleme Metodu . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Volterra İntegral Denklemler</b> . . . . .	<b>32</b>
3.1	İkinci Tip Volterra İntegral Denklemler . . . . .	32
3.1.1	Adomian Ayrıştırma Metodu . . . . .	32
3.1.2	Değiştirilmiş Adomian Ayrıştırma Metodu . . . . .	34
3.1.3	Gürültü Terimi . . . . .	35
3.1.4	Ardışık Yaklaşım Metodu . . . . .	36
3.1.5	Laplace Dönüşüm Metodu . . . . .	37
3.1.6	Seri Çözümü Metodu . . . . .	39
3.2	Birinci Tip Volterra İntegral Denklemler . . . . .	40
3.2.1	Seri Çözümü Metodu . . . . .	41
3.2.2	Laplace Dönüşüm Metodu . . . . .	41
3.2.3	1. Tip Volterra İntegral Denkleminin 2. Cins Volterra İntegral Denklemi Haline Getirilmesi . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler</b> . . . . .	<b>44</b>
4.1	2. Tip Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler . . . . .	44
4.1.1	Doğrudan Hesaplama Metodu . . . . .	45
4.1.2	Adomian Ayrıştırma Metodu . . . . .	46
4.1.3	Değiştirilmiş Adomian Ayrıştırma Metodu . . . . .	46
4.1.4	Gürültü Terimi . . . . .	47
4.1.5	Seri Çözümü Metodu . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemler</b> . . . . .	<b>51</b>
5.1	2. Tip Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemler . . . . .	51
5.1.1	Adomian Ayrıştırma Metodu . . . . .	51

5.1.2	Laplace Dönüşüm Metodu . . . . .	53
5.1.3	Seri Çözümü Metodu . . . . .	54
5.1.4	Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemlerinin Başlangıç Değer Problemlerine Dönüştürülmesi . . . . .	56
5.1.5	Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemlerinin Volterra İntegral Denklemlerine Dönüştürülmesi . . . . .	57
5.2	1. Tip Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemler . . . . .	58
5.2.1	Laplace Dönüşüm Metodu . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Abel İntegral Denklemi ve Singüler İntegral Denklemler</b> . . . . .	<b>60</b>
6.1	Abel İntegral Denklemi . . . . .	60
6.1.1	Laplace Dönüşüm Metodu . . . . .	61
6.2	Genelleştirilmiş Abel İntegral Denklemi . . . . .	63
6.2.1	Laplace Dönüşüm Metodu . . . . .	63
6.3	Ana Genelleştirilmiş Abel Denklemi . . . . .	64
6.4	Zayıf Singüler Volterra İntegral Denklemleri . . . . .	66
6.4.1	Adomian Ayrıştırma Metodu . . . . .	66
6.5	Laplace Dönüşüm Metodu . . . . .	68
<b>7</b>	<b>Volterra-Fredholm İntegral Denklemler</b> . . . . .	<b>70</b>
7.0.1	Seri Çözümü Metodu . . . . .	70
7.0.2	Adomian Ayrıştırma Metodu . . . . .	72
7.1	Karışık Volterra-Fredholm İntegral Denklemler . . . . .	73
7.1.1	Seri Çözümü Metodu . . . . .	73
7.1.2	Adomian Ayrıştırma Metodu . . . . .	74
<b>8</b>	<b>Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler</b> . . . . .	<b>76</b>
8.1	Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler . . . . .	76
8.1.1	Seri Çözümü Metodu . . . . .	76
8.2	Karışık Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler . . . . .	77
8.2.1	Doğrudan Hesaplama Yöntemi . . . . .	77
<b>9</b>	<b>Volterra İntegral Denklem Sistemleri</b> . . . . .	<b>80</b>
9.1	İkinci Tip Volterra İntegral Denklem Sistemleri . . . . .	80
9.1.1	Adomian Ayrıştırma Metodu . . . . .	80

9.1.2	Laplace Dönüşüm Metodu . . . . .	81
9.2	Birinci Tip Volterra İntegral Denklem Sistemleri . . . . .	83
9.2.1	Laplace Dönüşüm Metodu . . . . .	83
9.3	Volterra İntegro-Diferansiyel Denklem Sistemleri . . . . .	84
9.3.1	Laplace Dönüşüm Metodu . . . . .	84
<b>10</b>	<b>Fredholm İntegral Denklem Sistemleri</b> . . . . .	<b>86</b>
10.1	Fredholm İntegral Denklem Sistemleri . . . . .	86
10.1.1	Adomian Ayrıştırma Metodu . . . . .	86
10.1.2	Doğrudan Hesaplama Yöntemi . . . . .	87
10.2	Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklem Sistemleri . . . . .	88
10.2.1	Doğrudan Hesaplama Metodu . . . . .	88
<b>KAYNAKLAR</b>	. . . . .	<b>90</b>

Enstitüsü : Fen Bilimleri  
Dalı : Matematik-Bilgisayar  
Programı : Matematik-Bilgisayar  
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Emel YAVUZ  
Tez Türü ve Tarihi : Yüksek lisans - Mayıs 2018

## KISA ÖZET

### LİNEER İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN BAZI ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Tuğba DAYMAZ

İntegral denklemler bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında yer aldığı lineer veya lineer olmayan denklemlerdir. Bu tip denklemler uygulamalı matematik ve fizik alanlarında sıklıkla kullanılmaktadır. Başlangıç değer veya sınır değer koşullarını sağlayan bir diferansiyel denklem tek bir integral denklem ile ifade edilebileceğinden, integral denklemler ve çözüm metotları oldukça önem taşımaktadır. İntegral denklemler esas olarak üç farklı başlık altında sınıflandırılırlar:

1. İntegrasyon limitlerine göre
  - a. Her ikisi de sabit: Fredholm integral denklemi
  - b. Bir tanesi değişken: Volterra integral denklemi
2. Bilinmeyen fonksiyonun konumuna göre
  - a. Sadece integral işareti altında: Birinci tip
  - b. İntegral işaretinin hem altında hem de dışında: İkinci tip
3. Bilinen fonksiyon  $f$ 'in değerine göre
  - a. Sıfıra denk: Homojen
  - b. Sıfırdan farklı: Homojen olmayan



Bu çalışmada, lineer formdaki Fredholm ve Volterra integral denklemleri, Fredholm ve Volterra integro-diferansiyel denklemleri, Abel integral denklemi, Singüler integral denklemler, Volterra-Fredholm integral denklemleri, Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemleri, Volterra ve Fredholm integral denklem sistemlerinin çözümlerinin Adomian Ayrıştırma, Değiştirilmiş Adomian Ayrıştırma, Gürültü Terimi, Doğrudan Hesaplama, Ardışık Yaklaşım, Seri Çözümü ve Laplace Dönüşümü metotları ile ne şekilde bulunabileceği incelenmiştir. Ayrıca başlangıç veya sınır değer koşulları ile verilen bir diferansiyel denklemi bir integral denkleme çevirme yöntemi ve sonrasında yukarıda sözü edilen metotlardan biri kullanılarak elde edilen integral denklemin çözümünün nasıl elde edileceği olgusu üzerinde durulmuştur.

**Anahtar Sözcükler** :Fredholm ve Volterra integral denklemleri, integro-diferansiyel denklemler, Abel integral denklemi, singüler integral denklemler, integral denklem sistemleri.

University : İstanbul Kültür University  
Institute : Institute of Science  
Department : Mathematics-Computer  
Programme : Mathematics-Computer  
Supervisor : Assoc. Prof. Emel YAVUZ  
Degree Awarded and Date : MS - May 2018

## ABSTRACT

### SOME SOLUTION METHODS OF LINEAR INTEGRAL EQUATIONS

Tuğba DAYMAZ

An integral equation is linear or nonlinear equation in which the unknown function occurs under an integral sign. This kind of equations appears widely in many areas of applied mathematics and physics. Integral equations and their solution methods are important because a differential equation given by either boundary or initial value conditions can be condensed into a single integral equation. Integral equations are classified according to three different dichotomies:

1. Limits of integration
  - a. Both fixed: Fredholm integral equation
  - b. One variable: Volterra integral equation
2. Placement of unknown function
  - a. Only inside of the integral sign: First type
  - b. Both inside and outside of the integral sign: Second type

3. The value of the known function  $f$

a. Equivalent to zero: Homogeneous

b. Different from zero: Nonhomogeneous

In this thesis, we have studied the solutions of the linear integral equations of the forms Fredholm and Volterra integral equations, Fredholm and Volterra integro-differential equations, Abel integral equation, Singular integral equations, Volterra-Fredholm integral equations, Volterra-Fredholm integro-differential equations, system of Volterra and Fredholm integral equations using the Adomian Decomposition, the Modified Decomposition, the Noise Term Phenomenon, the Direct Computation, the Successive Approximation, the Series Solution and the Laplace Transform Methods.

**Keywords** :Fredholm and Volterra integral equations, integro-differential equations, Abel integral equation, singular integral equations, system of integral equations.

# BÖLÜM 1

## Giriş

İntegral denklemler,  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonunun integral işareti altında bulunduğu denklemlerdir [1, 2, 3, 4, 5]. Bu denklemlerin en genel şekli,  $g(x)$  ve  $h(x)$  integrasyon limitleri,  $\lambda$  sabit bir parametre,  $K(x, t)$ ,  $x$  ve  $t$  değişkenlerine bağlı çekirdek adı verilen bilinen bir fonksiyon olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t)u(t)dt$$

dir. İntegral denklemlerin bir çok tipi vardır. Bu denklemleri karakterize etmek için integrasyon limitlerine bağlı iki yol kullanılabilir.

1. İntegrasyon limitlerinin her ikisi de sabit olan denklemler *Fredholm integral denklemleri* olarak adlandırılır ve bu denklemlerin genel formu  $a$  ve  $b$  sabit olmak üzere, aşağıdaki gibidir:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt.$$

$f(x) = 0$  ise denkleme *homojen Fredholm integral denklemi* adı verilir. Denklem

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt$$

formundadır.

2. İntegrasyon limitlerinin en az biri değişken olan denklemler *Volterra integral denklemleri* olarak adlandırılır ve bu denklemlerin genel formu aşağıdaki gibidir:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt.$$

$f(x) = 0$  ise denkleme *homojen Volterra integral denklemi* adı verilir. Denklem

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt$$

formundadır.

## 1.1 İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

### 1.1.1 Fredholm İntegral Denklemleri

Fredholm İntegral Denklemlerinde integrasyon limitleri sabittir.  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonu yalnızca integral işareti altında yer alıyorsa bu tip denklemlere *birinci tip Fredholm integral denklemleri* denir ve denklemin formu

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt$$

şeklindedir. Hem integral işareti altında hem de dışında yer alıyorsa bu tip denklemlere de *ikinci tip Fredholm integral denklemleri* denir ve denklemin formu

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt$$

şeklindedir. Örneğin

$$\frac{\sin x - x \cos x}{x^2} = \int_0^1 \sin(xt)u(t)dt$$

denklemini birinci tip Fredholm integral denklemi,

$$u(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x - t)u(t)dt$$

denklemini ise ikinci tip Fredholm integral denklemidir.

### 1.1.2 Volterra İntegral Denklemleri

Volterra İntegral Denklemlerinde integrasyon limitlerinin en az bir tanesi değişkendir.  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonu yalnızca integral işareti altında yer alıyorsa bu tip denklemlere *birinci tip Volterra integral denklemleri* denir ve denklemin formu

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt$$

şeklindedir. Hem integral işareti altında hem de dışında yer alıyorsa bu tip denklemlere de *ikinci tip Volterra integral denklemleri* denir ve denklemin formu

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt$$

şeklindedir. Örneğin

$$xe^{-x} = \int_0^x (5 + 3x - 3t)u(t)dt$$

denklemi birinci tip Volterra integral denklemi,

$$u(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt$$

denklemi ikinci tip Volterra integral denklemdir.

### 1.1.3 Volterra-Fredholm İntegral Denklemleri

Volterra-Fredholm İntegral Denklemleri, [6, 7] parabolik sınır değer problemleri çözümünde, çeşitli fizik ve biyoloji modellemelerinde kullanılır.

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x, t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x, t)u(t)dt$$

formunda denklemlerdir ve örnek olarak,

$$u(x) = 6x + 3^2 + 2 - \int_0^x xu(t)dt - \int_0^1 tu(t)dt$$

verilebilir.

### 1.1.4 Singüler İntegral Denklemler

Birinci [4, 7] ve ikinci tip Volterra integral denklemlerinin integrasyon limitlerinden en az biri sonsuzsa bu denklemlere *singüler integral denklemleri* denir. Dahası Volterra denklemlerinin içinde yer alan  $K(x, t)$ , integrasyon aralığında bir ya da daha fazla noktada sınırsız hale geliyorsa da denklemleri *singüler* olarak adlandırılabilir. Biz daha çok aşağıda verilen denklem formlarıyla ilgileneceğiz.

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt, \quad 0 < \alpha < 1$$

ya da ikinci tip olan

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt, \quad 0 < \alpha < 1$$

Bu son iki standart form sırasıyla *genelleştirilmiş Abel integral denklemleri* ve *zayıf singüler integral denklemleri* olarak adlandırılır.  $\alpha = \frac{1}{2}$  olarak alındığında denklem

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} u(t) dt$$

haline gelir ve *Abel singüler integral denklemi* adını alır ve  $t = x$  üst sınırında denklem sınırsız olur. Sırasıyla aşağıdaki denklemler

$$\sqrt{x} = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} u(t) dt$$

Abel singüler integral denklemi,

$$x^3 = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{3}}} u(t) dt$$

genelleştirilmiş Abel integral denklemi,

$$u(x) = 1 + \sqrt{x} + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{3}}} u(t) dt$$

zayıf singüler integral denklemi örnekleri olarak verilebilir.

## 1.2 İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

### 1.2.1 Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemleri

Diferansiyel denklemlerini, integral denklemlerine çevirmek için kullanılır. Hem integral hem de diferansiyel denklemleri bir arada içerdiği için integro-diferansiyel denklemler adını alır. Bu denklemler  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonunu integral işareti içinde ve onun bir türevi olan  $u^{(n)}(x)$ ,  $n \geq 1$ , fonksiyonunu ise integral işareti dışında barındırır [6]. Bu durumda Fredholm integral denklemlerinin genel tanımından dolayı integrasyon limitleri burada da sabittir. Denklemlerin genel formu

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t) dt$$

dir. Örnek verecek olursak

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xu(t)dt, \quad u(0) = 0,$$

$$u''(x) + u'(x) = x - \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

## 1.2.2 Volterra İntego-Diferansiyel Denklemler

Başlangıç değer problemlerini, integral denklemlerine çevirmek için kullanılır. Hem integral hem de diferansiyel denklemleri bir arada içerdiği için integro-diferansiyel denklemler adını alır. Bu denklemler  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonunu integral işareti içinde ve onun bir türevi olan  $u^{(n)}(x)$ ,  $n \geq 1$ , fonksiyonunu ise integral işareti dışında barındırır [6]. Bu durumda Volterra integral denklemlerinin genel tanımından dolayı integrasyon limitlerinin en az biri burada da değişkendir. Denklemin genel formu

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

dir. Örnek verecek olursak

$$u'(x) = 1 + \int_0^x xu(t)dt, \quad u(0) = 0.$$

## 1.3 Lineerlik ve Homojenlik Kavramları

### 1.3.1 Lineerlik Kavramı

Bir integro-diferansiyel veya integral denkleminde integral işareti altında yer alan  $u(x)$  fonksiyonunun kuvveti 1 ise yani  $u(x)$  lineerse, bu denklemlere *lineer integro diferansiyel denklem* veya *lineer integral denklem* denir [6]. Eğer  $u(x)$  fonksiyonunun kuvveti birden büyükse veya  $u(x)$  fonksiyonu lineer değilse (örnek:  $e^u$ ,  $\sinh u$ ,  $\ln(1+u)$ ) verilen denklemler *lineer olmayan integro diferansiyel denklem* veya *lineer olmayan integral denklem* adını alır. Bu kavramı aşağıdaki örneklerle daha anlaşılır hale getirelim.

$$u(x) = 1 - \int_0^1 (x-t)u(t)dt$$

lineer Fredholm integral denklemi,

$$u'(x) = 1 + \int_0^1 xte^{u(t)}dt, \quad u(0) = 1$$

lineer olmayan Fredholm integral denklemi,

$$u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u(t)dt$$



lineer Volterra integral denklemi,

$$u(x) = 1 + \int_0^x (1 + x - t)u^4(t)dt$$

lineer olmayan Volterra integral denklemi örnekleridir. Homojen olmayan denklemlerin çözümleri tek türlü belirli olmak zorunda değildir ancak birinci tip Fredholm integral denklemleri hariç, tüm lineer denklemlerin çözümleri varsa tek türlü belirlidir.

### 1.3.2 Homojenlik Kavramı

İkinci tip integral denklemleri veya integro-diferansiyel denklemleri, homojen denklemler veya homojen olmayan denklemler olarak sınıflandırılır. Denklemlerde yer alan  $f(x) = 0$  ise denklem homojen,  $f(x) \neq 0$  ise denklem homojen değildir. Bu kavramı da aşağıdaki örnekler yardımıyla daha anlaşılır hale getirelim.

$$u(x) = \sin x + \int_0^1 xt u(t)dt,$$
$$u(x) = \int_0^x (1 + x - t)u^4(t)dt.$$

İlk örnek  $f(x) = \sin x$  olduğundan bir *homojen olmayan ikinci tip Fredholm integral denklemi*, ikincisi ise  $f(x) = 0$  olduğu için bir *homojen ikinci tip Volterra integral denklemi*dir.

## 1.4 Başlangıç Değer Problemlerinin Volterra İntegral Denklemlerine Dönüştürülmesi

Bu kısımda başlangıç değer problemlerinin, Volterra integral denklemlerine ya da Volterra integro-diferansiyel denklemlerine nasıl dönüştürüldüğünü inceleyeceğiz [3].

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x) \quad (1.1)$$

diferansiyel denklemi,  $\alpha$  ve  $\beta$  sabitler olmak üzere

$$y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta$$

başlangıç değer koşulları verilsin. Burada  $p(x)$  ve  $q(x)$  analitik fonksiyonlar ve  $g(x)$  sürekli olsun.  $u(x)$  sürekli olmak üzere

$$y''(x) = u(x) \quad (1.2)$$

diyelim. (1.2) ifadesinin her iki tarafını 0'dan  $x$ 'e integre edersek

$$\begin{aligned} y'(x) - y'(0) &= \int_0^x u(t)dt \\ y'(x) &= \beta + \int_0^x u(t)dt \end{aligned} \quad (1.3)$$

ifadesi elde edilir. (1.3) eşitliği yine 0'dan  $x$ 'e integre edilirse

$$\begin{aligned} y(x) - y(0) &= \beta x + \int_0^x \int_0^x u(t)dt dt, \\ y(x) - y(0) &= \beta x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \\ y(x) &= \alpha + \beta x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \end{aligned} \quad (1.4)$$

bulunur. (1.2),(1.3) ve (1.4) eşitlikleri (1.1)'de kullanılırsa

$$u(x) + p(x)[\beta + \int_0^x u(t)dt] + q(x)[\alpha + \beta x + \int_0^x (x-t)u(t)dt] = g(x),$$

$$u(x) = g(x) - (\beta p(x) + (\alpha - \beta x)q(x)) - \int_0^x (p(x) + q(x)(x-t))u(t)dt \quad (1.5)$$

elde edilir.

$$K(x, t) = p(x) + q(x)(x-t)$$

ve

$$f(x) = g(x) - (\beta p(x) + (\alpha - \beta x)q(x))$$

dersek (1.5) ifadesi

$$u(x) = f(x) - \int_0^x K(x, t)u(t)dt$$

Volterra integral denkleminin dönüşür. Eğer Volterra integral denkleminin  $x$ 'e göre Leibniz kuralı kullanılarak türevi alınırsa

$$u'(x) = f'(x) - [K(x, x)u(x) + \int_0^x \frac{\delta K(x, t)}{\delta x} u(t)dt],$$

$$u'(x) + K(x, x)u(x) = f'(x) - \int_0^x \frac{\delta K(x, t)}{\delta x} u(t)dt, \quad u(0) = f(0)$$

Volterra integro-diferansiyel denklemini elde edilir.

Şimdi, yukarıdaki dönüşümü genelleştirelim,

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \quad (1.6)$$

başlangıç koşulları altında

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x) \quad (1.7)$$

diferansiyel denklemini,  $1 \leq i \leq n$  için  $a_i(x)$  fonksiyonu sıfır noktasında analitik ve verilen aralık içerisinde  $g(x)$  fonksiyonu sürekli olacak şekilde Volterra diferansiyel denklemine dönüştürelim.

$$y^{(n)}(x) = u(x) \quad (1.8)$$

olsun. (1.8) ifadesinin iki tarafını da 0'dan  $x$ 'e integre edilir ise

$$y^{(n-1)}(x) = c_{n-1} + \int_0^x u(t)dt \quad (1.9)$$

bulunur. (1.9) ifadesinden tekrar integral alırsak,

$$\begin{aligned} y^{(n-2)}(x) &= c_{n-2} + c_{n-1}x + \int_0^x \int_0^x u(t)dt dt \\ &= c_{n-2} + c_{n-1}x + \int_0^x (x-t)u(t)dt \end{aligned} \quad (1.10)$$

elde edilir. Benzer şekilde hareket ederek

$$\begin{aligned} y^{(n-3)}(x) &= c_{n-3} + c_{n-2}x + \frac{1}{2}c_{n-1}x^2 + \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(t)dt dt dt \\ &= c_{n-3} + c_{n-2}x + \frac{1}{2}c_{n-1}x^2 + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 u(t)dt \end{aligned} \quad (1.11)$$

bulunur. Eğer bu işlem  $n$  kez tekrarlanırsa

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{k!} x^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{(n-1)} u(t)dt \quad (1.12)$$

sonucuna ulaşılır. (1.8), (1.9), (1.10), (1.11) ve (1.12) ifadeleri (1.7)'de yerine yazılırsa

$$u(x) = g(x) - \sum_{j=1}^n a_j \left( \sum_{k=1}^j \frac{c^{(n-k)}}{(j-k)!} x^{(j-k)} \right) - \int_0^x \sum_{k=1}^n \frac{a_n}{(k-1)!} (x-t)^{(k-1)} u(t)dt \quad (1.13)$$

yani

$$u(x) = f(x) - \int_0^x K(x,t)u(t)dt \quad (1.14)$$

Volterra integral denklemini elde edilir.

**Örnek 1.4.1.**

$$y'(x) - 2xy(x) = e^{x^2}, \quad y(0) = 1 \quad (1.15)$$

*başlangıç değer problemini Volterra integral denklemine dönüştürelim.*

*Çözüm.* Öncelikle

$$y'(x) = u(x) \quad (1.16)$$

olmak üzere (1.16) denkleminin her iki yanını da 0'dan  $x$ 'e integre edelim

$$y(x) - y(0) = \int_0^x u(t)dt. \quad (1.17)$$

$y(0) = 1$ , sınır değerini (1.17) denkleminde yerine yazarsak

$$y(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt \quad (1.18)$$

bulunur. (1.16) ve (1.18) denklemlerini (1.15)'da yerine yazarsak

$$u(x) = 2x + e^{x^2} + 2x \int_0^x u(t)dt \quad (1.19)$$

Volterra denklemini elde ederiz. □

**Örnek 1.4.2.**

$$y''' - y'' - y' + y = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 3 \quad (1.20)$$

*başlangıç değer problemini Volterra integral denklemine dönüştürelim.*

*Çözüm.*

$$y'''(x) = u(x) \quad (1.21)$$

olsun. (1.21) ifadesinde 0'dan  $x$ 'e integral alır ve  $y''(0) = 3$  olduğu kullanılarak

$$y''(x) = 3 + \int_0^x u(t)dt \quad (1.22)$$

bulunur.  $y'(0) = 2$  koşulu kullanılarak (1.22) ifadesinde 0'dan  $x$ 'e integral alınır

$$y'(x) = 2 + 3x + \int_0^x \int_0^x u(t)dt dt = 2 + 3x + \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (1.23)$$

bulunur.  $y(0) = 1$  olduğu kullanılarak (1.23) ifadesinden de 0'dan  $x$ 'e integral alınır

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(t)dt dt dt \\ &= 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 u(t)dt \end{aligned} \quad (1.24)$$

elde edilir. (1.21), (1.22), (1.23) ve (1.24) ifadeleri (1.20) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$u(x) = 4 + x - \frac{3}{2}x^2 + \int_0^x [1 + (x-t) - \frac{1}{2}(x-t)^2]u(t)dt \quad (1.25)$$

Volterra integral denklemi elde edilir.  $\square$

### 1.4.1 Volterra İntegral Denklemlerinin Başlangıç Değer Problemlerine Dönüştürülmesi

$$u(x) = e^x + \int_0^x u(t)dt \quad (1.26)$$

(1.26) Volterra integral denklemini, başlangıç değer problemine dönüştürmek için öncelikle denklemin her iki yanından da Leibniz kuralı ile türev alalım

$$u'(x) = e^x + u(x). \quad (1.27)$$

(1.26) denkleminde  $x = 0$  alınır

$$u(0) = e^0 + \int_0^0 u(t)dt = 1 \quad (1.28)$$

bulunur ki buradan da  $u(0) = 1$  başlangıç değer koşulu elde edilir. Dolayısıyla (1.26) Volterra denklemi

$$u'(x) - u(x) = e^x, \quad u(0) = 1 \quad (1.29)$$

şeklinde birinci mertebeden homojen olmayan lineer diferansiyel denkleme dönüşür.

#### Örnek 1.4.3.

$$u(x) = \sin x - \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 u(t)dt \quad (1.30)$$

*Volterra integral denklemini başlangıç değer koşulları ile birlikte diferansiyel denkleme dönüştürünüz.*

*Çözüm.* (1.30) denkleminde integral işareti yok olana kadar Leibniz kuralı kullanılarak türev alınır

$$u'(x) = \cos x - \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad (1.31)$$

$$u''(x) = -\sin x - \int_0^x u(t)dt, \quad (1.32)$$

$$u'''(x) = -\cos x - u(x) \quad (1.33)$$

bulunur. (1.31) ve (1.32) integro-diferansiyel ve (1.30) integral denklemlerinde  $x = 0$  alınrsa

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad u''(0) = 0 \quad (1.34)$$

yani

$$u'''(0) + u(x) = -\cos x, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad u''(0) = 0 \quad (1.35)$$

sınır değer koşullarıyla, (1.35) üçüncü mertebeden diferansiyel denklem elde edilir.

□

## 1.4.2 Sınır Değer Problemlerinin Fredholm İntegral Denklemlerine Dönüştürülmesi

**1.Tip:**

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta \quad (1.36)$$

sınır değer koşulları ile verilen

$$y''(x) + g(x)y(x) = h(x), \quad 0 < x < 1 \quad (1.37)$$

diferansiyel denklemini inceleyelim. Bu denklem üzerinde

$$y''(x) = u(x) \quad (1.38)$$

alınrsa ve (1.38) ifadesi 0'dan  $x$ 'e integre edilirse

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(t)dt \quad (1.39)$$

elde edilir. Başlangıç değer problemlerinden farklı olarak, sınır değer problemlerinde  $y'(0)$  değeri bilinmediği için bu değer  $x = 1$  noktasındaki sınır değer koşulu yardımıyla belirlenebilir. (1.39) ifadesinin her iki yanını da 0'dan  $x$ 'e integre edersek

$$y(x) = \alpha + xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (1.40)$$

bulunur.  $y'(0)$  değerini bulmak için, (1.40) ifadesinde  $x = 1$  yazılır ve  $y(1) = \beta$  olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} y(1) &= \alpha + y'(0) + \int_0^1 (1-t)u(t)dt, \\ y'(0) &= (\beta - \alpha) - \int_0^1 (1-t)u(t)dt \end{aligned} \quad (1.41)$$

elde edilir. (1.38), (1.40) ve (1.41) eşitliği, (1.37) ifadesinde yerine yazılırsa

$$u(x) + \alpha g(x) + (\beta - \alpha)xg(x) - xg(x) \int_0^1 (1-t)u(t)dt + g(x) \int_0^x (x-t)u(t)dt = h(x),$$

$$\begin{aligned} u(x) &= h(x) - \alpha g(x) - (\beta - \alpha)xg(x) - g(x) \int_0^x (x-t)u(t)dt \\ &\quad + xg(x) \left[ \int_0^x (1-t)u(t)dt + \int_x^1 (1-t)u(t)dt \right] \end{aligned}$$

ve son denklemi düzenlersek

$$u(x) = f(x) + \int_0^x t(1-x)g(x)u(t)dt + \int_x^1 x(1-t)g(x)u(t)dt$$

elde edilir. Burada da

$$f(x) = h(x) - \alpha g(x) - x(\beta - \alpha)g(x)$$

dir ve

$$K(x, t) = \begin{cases} t(1-x)g(x), & 0 \leq t \leq x, \\ x(1-t)g(x), & x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x, t)u(t)dt$$

Fredholm integral denklemi elde edilir. Eğer  $\alpha = \beta = 0$  yani  $y(0) = y(1) = 0$  ise  $f(x) = h(x)$  eşitliği sağlanır.

**Örnek 1.4.4.**  $y(0) = y(1) = 0$  olmak üzere

$$y''(x) + 9y(x) = \cos x, \quad 0 < x < 1$$

*sınır değer koşulları ile verilen diferansiyel denklemi Fredholm integral denklemine dönüştürünüz.*

*Çözüm.*  $\alpha = \beta = 0$  yani  $y(0) = y(1) = 0$  olduğundan,

$$f(x) = h(x) = \cos x$$

sağlanır.  $g(x) = 9$  olmak üzere istenen Fredholm integral denklemi

$$u(x) = \cos x + \int_0^1 K(x, t)u(t)dt$$

şekindedir. Burada  $K(x, t)$  çekirdek fonksiyonu

$$K(x, t) = \begin{cases} t(1-x)9, & 0 \leq t \leq x, \\ x(1-t)9, & x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanır. □

**Örnek 1.4.5.**  $y(0) = 0, y(1) = 2$  olmak üzere

$$y''(x) + xy(x) = 0, \quad 0 < x < 1$$

*sınır değer koşulları ile verilen diferansiyel denklemi Fredholm integral denklemine dönüştürünüz.*

*Çözüm.*  $g(x) = x, h(x) = 0$  olmak üzere  $\alpha = 0$  ve  $\beta = 2$  için

$$f(x) = h(x) - \alpha g(x) - x(\beta - \alpha)g(x)$$

denkleminde bilinenler yerine konulduğunda

$$f(x) = -2x^2$$

elde edilir.

$$K(x, t) = \begin{cases} t(1-x)(-2x^2), & 0 \leq t \leq x, \\ x(1-t)(-2x^2), & x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

olmak üzere istenen Fredholm integral denklemi

$$u(x) = -2x^2 + \int_0^1 K(x, t)u(t)dt$$

şeklinde bulunur. □



## 2.Tip:

$$y(0) = \alpha_1, \quad y'(1) = \beta_1 \quad (1.42)$$

sınır değer koşulları ile verilen

$$y''(x) + g(x)y(x) = h(x), \quad 0 < x < 1 \quad (1.43)$$

diferansiyel denklemini inceleyelim. Bu denklem üzerinde

$$y''(x) = u(x) \quad (1.44)$$

alınırsa ve (1.44) ifadesi 0'dan  $x$ 'e integre edilirse

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(t)dt \quad (1.45)$$

elde edilir. Burada  $y'(0)$  değerini,  $y'(1) = \beta_1$  eşitliğiyle yardımıyla bulacağız.

(1.45) ifadesinin de her iki tarafını 0'dan  $x$ 'e integre ettiğimizde

$$y(x) = \alpha_1 + xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (1.46)$$

denklemini elde edilir. (1.45) ifadesinde  $x = 1$  için  $y'(1) = \beta_1$  olduğu kullanılırsa

$$y'(1) = \beta_1 = y'(0) + \int_0^1 u(t)dt,$$

$$y'(0) = \beta_1 - \int_0^1 u(t)dt \quad (1.47)$$

bulunur. (1.47) eşitliği (1.46) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$y(x) = \alpha_1 + x\beta_1 - \int_0^1 xu(t)dt + \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (1.48)$$

elde edilir. (1.48) ve (1.44) ifadeleri (1.43) ifadesinde yerine yazılırsa

$$h(x) = u(x) + g(x) \left[ \alpha_1 + x\beta_1 - \int_0^1 xu(t)dt + \int_0^x (x-t)u(t)dt \right],$$

$$u(x) = h(x) - (\alpha_1 + x\beta_1)g(x) + \int_0^x tg(x)u(t)dt + \int_x^1 xg(x)u(t)dt$$

sonucuna ulaşılır. Buna göre

$$f(x) = h(x) - (\alpha_1 + x\beta_1)g(x)$$

ve

$$K(x, t) = \begin{cases} tg(x), & 0 \leq t \leq x, \\ xg(x), & x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

olmak üzere verilen sınır değerleriyle birlikte

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt$$

Fredholm integral denklemi elde edilir. Eğer  $y(0) = y'(1) = 0$  yani  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$  ise  $h(x) = f(x)$ 'dir.

**Örnek 1.4.6.**  $y(0) = y'(1) = 0$  olmak üzere

$$y''(0) + y'(x) = 0$$

*sınır değer problemini Fredholm integral denklemine dönüştürünüz.*

*Çözüm.*  $g(x) = 1$  ve  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$  olduğundan  $f(x) = h(x) = 0$  dir. Buna göre

$$K(x,t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq x, \\ x, & x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

olmak üzere istenilen Fredholm integral denklemi

$$u(x) = \int_0^1 K(x,t)u(t)dt$$

şeklinde bulunur. □

**Örnek 1.4.7.**  $y(0) = 0, y'(1) = 1$  olmak üzere

$$y''(0) + 2y(x) = 4$$

*sınır değer problemini Fredholm integral denklemine dönüştürünüz.*

*Çözüm.*

$$f(x) = h(x) - (\alpha_1 + x\beta_1)g(x),$$

$$f(x) = 4 - 2x$$

ve

$$K(x,t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq x, \\ 2x, & x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

olmak üzere istenilen Fredholm integral denklemi

$$u(x) = \int_0^1 K(x,t)u(t)dt$$

şeklinde bulunur. □

### 1.4.3 Fredholm İntegral Denklemlerinin Sınır Değer Problemlerine Dönüştürülmesi

#### 1.Tip:

$f(x)$  bilinen bir fonksiyon ve  $K(x, t)$  çekirdek fonksiyonu

$$K(x, t) = \begin{cases} t(1-x)g(x), & 0 \leq t \leq x, \\ x(1-t)g(x), & x \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.49)$$

olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x, t)u(t)dt, \quad (1.50)$$

denklemi göz önüne alınsın. Kolaylık olması için  $g(x) = \lambda$  alıp ve buna göre (1.50) Fredholm integral denklemini yeniden düzenlersek

$$u(x) = f(x) + \lambda(1-x) \int_0^x tu(t)dt + \lambda x \int_x^1 (1-t)u(t)dt \quad (1.51)$$

bulunur. (1.51) eşitliğinin her iki yanından da Leibniz ve çarpımın türevi kuralları kullanılarak türev alınırsa

$$u'(x) = f'(x) - \lambda \int_0^x tu(t)dt - \lambda \int_1^x (1-t)u(t)dt,$$

$$u''(x) = f''(x) - \lambda xu(x) - \lambda(1-x)u(x),$$

$$u''(x) + \lambda u(x) = f''(x) \quad (1.52)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. (1.51) ifadesinde,  $x = 0$  ve  $x = 1$  yazılırsa  $u(0) = f(0)$  ve  $u(1) = f(1)$  sınır değer koşulları elde edilir.

#### Örnek 1.4.8.

$$K(x, t) = \begin{cases} 9t(1-x), & 0 \leq t \leq x, \\ 9x(1-t), & x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

çekirdek fonksiyonu olmak üzere

$$u(x) = e^x + \int_0^1 K(x, t)u(t)dt$$

*Fredholm integral denklemini sınır değer problemine dönüştürünüz.*

*Çözüm.*

$$u(x) = e^x + 9(1-x) \int_0^x tu(t)dt + 9x \int_x^1 (1-t)u(t)dt \quad (1.53)$$

ifadesinden iki kere türev alırsak

$$\begin{aligned} u'(x) &= e^x - 9 \int_0^x tu(t)dt + 9 \int_x^1 (1-t)u(t)dt, \\ u''(x) + 9u(x) &= e^x \end{aligned}$$

diferansiyel denklemi bulunur. (1.53) denkleminde  $x = 0$  ve  $x = 1$  yazılırsa sırasıyla,  $u(0) = e^0 = 1$ ,  $u(1) = e^1 = e$  bulunur. Yani (1.53) Fredholm integral denklemi

$$\begin{aligned} u''(x) + 9u(x) &= e^x, \\ u(0) &= 1, \quad u(1) = e \end{aligned}$$

sınır değer problemine dönüştürülür. □

**2.Tip:**  $f(x)$  bilinen bir fonksiyon ve  $K(x, t)$  çekirdek fonksiyonu olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x, t)u(t)dt, \quad (1.54)$$

$$K(x, t) = \begin{cases} tg(x), & 0 \leq t \leq x, \\ xg(x), & x \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.55)$$

denklemleri göz önüne alınsın. Kolaylık olması için  $g(x) = \lambda$  alırsak ve buna göre (1.54) Fredholm integral denklemini yeniden düzenlersek

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x tu(t)dt + \lambda x \int_x^1 u(t)dt \quad (1.56)$$

bulunur. (1.56) eşitliğinin her iki yanından da Leibniz kuralı ve çarpımın türevi kuralı göz önüne alınarak türev alınırsa

$$\begin{aligned} u'(x) &= f'(x) + \lambda \int_x^1 u(t)dt, \\ u''(x) + \lambda u(x) &= f''(x) \end{aligned} \quad (1.57)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. (1.56) ifadesinde  $x = 0$  ve (1.57) ifadesinde  $x = 1$  yazılırsa,

$$u(0) = f(0), \quad u'(1) = f'(1)$$

sınır değer koşulları elde edilir.

### Örnek 1.4.9.

$$K(x, t) = \begin{cases} 4t, & 0 \leq t \leq x, \\ 4x, & x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

çekirdek fonksiyonu olmak üzere

$$u(x) = e^x + \int_0^1 K(x, t)u(t)dt$$

Fredholm integral denklemini sınır değer problemine dönüştürünüz.

Çözüm.

$$u(x) = e^x + \int_0^x 4tu(t)dt + 4x \int_x^1 u(t)dt \quad (1.58)$$

ifadesinden iki kere türev alırsak

$$u'(x) = e^x + 4 \int_x^1 u(t)dt, \quad (1.59)$$

$$u''(x) + 4u(x) = e^x \quad (1.60)$$

diferansiyel denklemi bulunur. (1.58) denkleminde  $x = 0$ , (1.59) denkleminde  $x = 1$  yazılırsa sırasıyla  $u(0) = f(0) = e^0 = 1$ ,  $u'(1) = f'(1) = e^1 = e$  bulunur. Yani (1.58) Fredholm integral denklemi

$$u''(x) + 4u(x) = e^x,$$

$$u(0) = 1,$$

$$u'(1) = e$$

sınır değer problemine dönüştürülür. □

## 1.4.4 İntegral Denklemlerin Çözümü

Bir diferansiyel ya da integral denklemin iki türlü çözümü vardır.

### Tam Çözüm.

Verilen bir denklemin çözümü polinom, üstel fonksiyon, trigonometrik fonksiyon ya da bu temel fonksiyonların kombinasyonları şeklinde kapalı formda bulunuyor ise bu çözüme *tam çözüm* denir.

$$u(x) = \sin x + e^{2x},$$

$$u(x) = 1 + \cosh x + \tan x$$

şeklindeki çözümler bu çözümlere örnektir.

### Seri Çözüm.

Verilen bir denkleme daima tam çözümü bulunamayabilir. Bu durumda, eğer varsa, tam çözüme yakınsayan bir seri formunda çözüm aranabilir.

$u(x)$  fonksiyonu eğer bir integral veya integro-diferansiyel denklemin çözümü ise bu denklemi sağlar.

### Örnek 1.4.10.

$$u(x) = \cos x - x + \int_0^x \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t) dt dt$$

Volterra-Fredholm integral denkleminin bir çözümünün  $u(x) = \cos x$  olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} & \cos x - x + \int_0^x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt dt. \\ &= \cos x - x + \int_0^x \left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) dt \\ &= \cos x - x + \int_0^x dt = \cos x - x + (x - 0) = \cos x. \end{aligned}$$

□

### Örnek 1.4.11.

$$u'(x) = 1 - \int_0^x u(t) dt$$

Volterra integro diferansiyel denkleminin bir çözümünün  $u(x) = \sin x$  olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$u'(x) = 1 - \int_0^x \sin t dt = 1 + (\cos x - \cos 0) = 1 + \cos x - 1 = \cos x.$$

□

## BÖLÜM 2

### Fredholm İntegral Denklemler

Bu bölümde integrasyon limitleri  $a, b$  gibi sabitlerden oluşan

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt$$

formundaki Fredholm integral denklemlerinin çözümlerini nasıl bulabileceğimize bakıp çözümlere ulaşacağız.

**Teorem 2.0.12.** (*Fredholm Alternatif Teoremi*)

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt$$

*homojen Fredholm integral denkleminin sadece  $u(x) = 0$  aşikar çözümü var ise buna karşılık gelen, homojen olmayan*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt$$

*Fredholm integral denkleminin her zaman tek türlü belirli tek bir çözümü vardır. Bu teorem Fredholm Alternatif Teoremi olarak bilinir [20].*

**Teorem 2.0.13.** (*Tek Çözüm*)

*Eğer Fredholm integral denkleminde  $K(x, t)$  çekirdeği sürekli, reel değişkenli,  $a \leq x \leq b, a \leq t \leq b$  kare bölgesi üzerinde sınırlı ve  $f(x)$  reel değerli sürekli bir fonksiyon ise verilen integral denklemin tek türlü bir çözümünün olması için gerek koşul*

$$|K(x, t)| \leq M \in \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$|\lambda| M(a - b) < 1$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. [20]

Yukarıdaki teoremin tek türlü belirli bir çözümün varlığı için yeter şart olmadığını göstermek için

$$u(x) = -2 - 3x + \int_0^1 (3x + t)u(t)dt$$

Fredholm integral denklemini göz önüne alalım.  $\lambda = 1$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$  olmak üzere  $|K(x, t)| = |3x + t| \leq |3 \cdot 1 + 1| = 4 = M$ ,  $(b - a) = 1$  için

$$|\lambda| M(b - a) = 1 \cdot 4 \cdot 1 = 4 > 1$$

dir ama verilen integral denklemin tam çözümü  $u(x) = 6x$  dir.

## 2.1 İkinci Tip Fredholm İntegral Denklemler

Bu tip denklemler

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt$$

formunda  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyon,  $K(x, t)$  çekirdek fonksiyonu, gerçel değerli bir  $f(x)$  fonksiyonu ve parametresinden  $\lambda$  oluşur. Bu denklemlerde integrasyon limitleri  $a$  ve  $b$  sabittir. İlk bölümde tanıttığımız bu denklemlerin şimdi yeni ve geleneksel bazı metodlarla nasıl çözüldüğünü inceleyeceğiz.

### 2.1.1 Adomian Ayrıştırma Metodu

Adomian ayrıştırma metodu, George Adomian tarafından bulunmuş ve geliştirilmiştir [6, 13, 15, 21].  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonu

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \dots$$

şeklinde yazılsın. Buna göre

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt$$



ya da

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) [u_0(t) + u_1(t) + \cdots] dt$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x), \\ u_1(x) &= \lambda \int_a^b K(x, t) u_0(t) dt, \\ u_2(x) &= \lambda \int_a^b K(x, t) u_1(t) dt, \\ &\vdots \\ u_{n+1}(x) &= \lambda \int_a^b K(x, t) u_n(t) dt, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

şeklinde  $u(x)$  fonksiyonunun bileşenleri tespit edilir.

### Örnek 2.1.1.

$$u(x) = e^x - x + x \int_0^1 tu(t) dt$$

*Fredholm integral denklemini Adomian ayrıştırma metodu ile çözünüz.*

*Çözüm.*  $u(x)$  fonksiyonunun seri formlarını yerine yazarsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = e^x - x + x \int_0^1 t \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) dt$$

bulunur ve bu serileri açarsak

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots = e^x - x + x \int_0^1 t [u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \cdots] dt$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi sıfıncı bileşeni yani  $u_0(x)$  terimini integral işareti dışındaki tüm terimler olarak tanımlayalım. Buna göre aşağıdaki tekrarlı ilişkiyi buluruz

$$\begin{aligned} u_0(x) &= e^x - x, \\ u_{k+1}(x) &= x \int_0^1 tu_k(t) dt, k \geq 0. \end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= e^x - x, \\ u_1(x) &= x \int_0^1 tu_0(t) dt = x \int_0^1 t(e^t - t) dt = \frac{2}{3}x, \\ u_2(x) &= x \int_0^1 tu_1(t) dt = x \int_0^1 \frac{2}{3}t^2 dt = \frac{2}{9}x, \\ u_3(x) &= x \int_0^1 tu_2(t) dt = x \int_0^1 \frac{2}{9}t^2 dt = \frac{2}{27}x, \end{aligned}$$

elde edilir.

Tüm bu terimleri sırasıyla devam ederek elde eder ve yerine yazarsak

$$u(x) = e^x - x + \frac{2}{3}x \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots \right)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada  $a = 1$  ve ortak çarpanı,  $r = \frac{1}{3}$  olan bir geometrik seri elde etmiş oluruz. Sonsuz geometrik serilerin toplamı

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}, \quad \left( |r| = \left| \frac{1}{3} \right| < 1 \right)$$

bulunur. O halde şimdi tüm bildiklerimizi ana denklemde yerine koyarsak

$$u(x) = e^x - x + \frac{2}{3}x \left( \frac{3}{2} \right),$$

$$u(x) = e^x$$

şeklinde çözüm bulunur. □

## 2.1.2 Değiştirilmiş Adomian Ayrıştırma Metodu

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt$$

Fredholm integral denkleminde

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

ve

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

olsun. Buna göre

$$u_0(x) = f_1(x),$$

$$u_1(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u_0(t)dt,$$

$$u_2(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)u_1(t)dt,$$

$$u_3(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)u_2(t)dt,$$

⋮

$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)u_n(t)dt, \quad n \geq 1$$

şeklinde  $u(x)$  fonksiyonunun bileşenleri tespit edilmesi yoluyla çözüme ulaşılır.

### Örnek 2.1.2.

$$u(x) = 3x + e^{4x} - \frac{1}{16}(17 + 3e^{4x}) + \int_0^1 tu(t)dt$$

Fredholm integral denklemini, değiştirilmiş Adomian ayrıştırma metodu ile çözüünüz.

Çözüm.

$$f(x) = 3x + e^{4x} - \frac{1}{16}(17 + 3e^{4x})$$

denklemini

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3x + e^{4x}, \\ f_2(x) &= -\frac{1}{16}(17 + 3e^{4x}) \end{aligned}$$

olarak ayrıştıralım. Değiştirilmiş yineleme formülünü kullanılarak

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f_1(x) = 3x + e^{4x}, \\ u_1(x) &= f_2(x) + \int_0^1 tu_0(t)dt = -\frac{1}{16}(17 + 3e^{4x}) + \int_0^1 t(3t + e^{4t})dt = 0, \\ u_{k+1}(x) &= \int_0^1 tu_k(t)dt = 0, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = (3x + e^{4x}).$$

□

### 2.1.3 Gürültü Terimi

Adomian ayrıştırma metodunda gürültü terimi olgusu kullanılarak yakınsamayı hızlandıracak bir yöntem geliştirmek mümkündür. Buna göre eğer  $u_0(x)$  ve  $u_1(x)$  bileşenleri gürültü terimleri içeriyorsa, tam sonuç sadece ilk iki integrasyona bakılarak bulunabilir. Gürültü terimleri, eğer varsa  $u_0(x)$  ve  $u_1(x)$  bileşenlerinde yer alan zıt işaretli identik terimlerdir.  $u(x)$  'in diğer bileşenleri de farklı gürültü terimlerine sahip olabilirler.  $u_0(x)$  ve  $u_1(x)$  'in gürültü terimlerinin sadeleşmesi sonucunda kalan  $u_0(x)$  'in diğer terimleri verilen integral denklemin tam sonucu olabilir, bunu kontrol etmek gerekir. Gürültü terimleri homojen olmayan integral denklemlerde karşımıza çıkar, homojen integral denklemlerde bulunmaz.

### Örnek 2.1.3.

$$u(x) = x \sin x - x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x u(t) dt$$

Fredholm integral denkleminin gürültü terimlerini bulunuz.

Çözüm. Standart Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak

$$\begin{aligned} u_0(x) &= x \sin x - x, \\ u_{k+1}(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x u_k(t) dt \end{aligned}$$

Buna göre,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= x \sin x - x, \\ u_1(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x u_0(t) dt = x - \frac{\pi^2}{8} x \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da  $u_0(x)$  ve  $u_1(x)$  bileşenleri arasında zıt işaretli identik terim yani denklemin gürültü terimi,  $\mp x$  olarak bulunur. İşlemler diğer bileşenler içinde yapıldığında ve bulunan gürültü terimleri göz ardı edildiğinde tam çözüm

$$u(x) = x \sin x$$

olarak bulunur. □

### 2.1.4 Doğrudan Hesaplama Yöntemi

İki değişkenli  $K(x, t)$  fonksiyonu tek değişkenli iki fonksiyonun çarpımlarının toplamı yani

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^n g_k(x) h_k(t)$$

şeklinde ise *dejenere* ya da *ayrıştırılabilir çekirdek* adını alır.

Bu metod ile verilen integral denklemin direkt çözümü aranır ve çözüm tam formda bulunur. Bu metod sadece

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^n g_k(x) h_k(t) \quad (2.1)$$

şeklinde ayrılabilir çekirdeğe sahip Fredholm integral denklemlerinin çözümlerinde kullanılır. Çözüm algoritması aşağıdaki gibidir:

1. (2.1) ifadesi,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt$$

Fredholm integral denkleminde yazılır.

2. Yukarıdaki adımdan

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{k=1}^n g_k(x) h_k(t) u(t) dt, \\ &= f(x) + g_1(x) \lambda \int_a^b h_1(t) u(t) dt + \cdots + g_n(x) \lambda \int_a^b h_n(t) u(t) dt \end{aligned} \quad (2.2)$$

elde edilir.

3.

$$\alpha_i = \int_a^b h_i(t) u(t) dt, \quad 1 \leq i \leq n,$$

denir ise

$$u(x) = f(x) + \lambda \alpha_1 g_1(x) + \lambda \alpha_2 g_2(x) + \cdots + \lambda \alpha_n g_n(x)$$

elde edilir.

4.  $\alpha_i$  değerleri tespit edilip, (2.2) denkleminde yerine yazılırsa istenilen çözüm bulunur.

**Örnek 2.1.4.**

$$u(x) = \frac{1}{3}x + \sec x \tan x - \frac{1}{3}x \int_0^{\frac{\pi}{3}} u(t) dt$$

*Fredholm integral denklemini doğrudan hesaplama metodu ile çözüünüz.*

*Çözüm.*

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{3}} u(t) dt$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{3}x + \sec x \tan x - \frac{1}{3}\alpha x, \\ \alpha &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{1}{3}t + \sec t \tan t - \frac{1}{3}\alpha t \right) dt \end{aligned}$$

integrali çözüürsek

$$\alpha = 1 + \frac{1}{54}\pi^2 - \frac{1}{54}\alpha\pi^2,$$

dolayısıyla  $\alpha = 1$  bulunur. Buna göre

$$u(x) = \sec x \tan x.$$

□

## 2.1.5 Ardışık Yaklaşım Metodu

Bu metotta integral işareti altında yer alan  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonuna *sıfıncı yaklaşım* adı verilen ve  $u_0(x)$  ile gösterilen bir sürekli fonksiyon ile yaklaşımda bulunulur ve ortaya çıkan yaklaşım  $u_1(x)$  *ilk yaklaşım* olarak adlandırılır. Bu şekilde devam ederek

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u_0(t)dt,$$

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u_1(t)dt,$$

⋮

$$u_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u_n(t)dt, \quad n \geq 0$$

elde edilir.  $u_0(x)$  genelde 0, 1 veya  $x$  olarak alınır.  $u(x)$  fonksiyonu

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x)$$

limiti olarak belirlendiğinden,  $u_0(x)$ ' ten bağımsızdır.

### Örnek 2.1.5.

$$u(x) = x + e^x - \int_0^1 xtu(t)dt$$

*Fredholm integral denklemini ardışık yaklaşım metodu ile çözünüz.*

*Çözüm.*

$$u_0(x) = 0$$

gerçek değerli fonksiyonumuz olsun.

$$u_{n+1}(x) = x + e^x - \int_0^1 xtu_n(t)dt, \quad n \geq 0$$

olduğuna göre

$$u_1(x) = x + e^x - \int_0^1 xtu_0(t)dt = e^x + x,$$

$$u_2(x) = x + e^x - \int_0^1 xtu_1(t)dt = e^x - \frac{1}{3}x,$$

⋮

$$u_{n+1}(x) = x + e^x - \int_0^1 xtu_n(t)dt = e^x + \frac{(-1)^n}{3^n}x$$

bulunur. Buna göre  $u(x)$  çözümü aşağıdaki gibidir:

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x) = e^x.$$

□

## 2.1.6 Seri Çözümü Metodu

Reel  $u(x)$  fonksiyonu, her mertebeden türevlere sahip olmak üzere tanım bölgesindeki herhangi bir  $x_0$  noktası için

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

şeklinde  $x_0$  civarında  $f(x)$ ' e yakınsayan bir Taylor serisi açılımına sahip ise *analitik* olarak adlandırılır.  $x_0 = 0$  olması durumunda

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

olmak üzere

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

şeklinde bir açılım elde edilir. Bu metod analitik  $u(x)$  fonksiyonunun  $x_0 = 0$  civarındaki Taylor serisinde yerine yazılması olgusuna dayanır.  $T(f(x))$ ,  $f(x)$  fonksiyonunun  $x_0 = 0$  civarındaki Taylor serisi olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt$$

Fredholm integral denklemi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_a^b K(x, t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt$$

şeklinde yazılabilir. Önce denklemin sağ tarafındaki integral hesaplanır ve  $x$ ' in kuvvetleri parantezine alınır, sonrada eşit kuvvetli  $x$ ' ler sol taraf ile karşılaştırılır ise  $a_j (j \geq 0)$  katsayıları elde edilir.

**Örnek 2.1.6.**

$$u(x) = (x + 1)^2 + \int_{-1}^1 (xt + x^2 t^2) u(t) dt$$

*Fredholm integral denklemini seri çözümü metodu ile çözünüz.*

*Çözüm.*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= (x + 1)^2 + \int_{-1}^1 \left( (xt + x^2 t^2) \sum_{n=0}^{\infty} (a_n t^n) \right) dt \\ a_0 + a_1 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots &= 1 + \left( 2 + \frac{2}{3} a_1 + \frac{2}{5} a_3 + \frac{2}{7} a_5 + \frac{2}{9} a_7 \right) x \\ &\quad + \left( 1 + \frac{2}{3} a_0 + \frac{2}{5} a_2 + \frac{2}{7} a_4 + \frac{2}{9} a_6 + \frac{2}{11} a_8 \right) x^2 \end{aligned}$$

denklemin her iki yanında da aynı kuvvetli terimlerin katsayılarının eşitliğinden yararlanarak

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 6, \quad a_2 = \frac{25}{9}, \quad a_n = 0, \quad n \geq 3$$

bulunur. Buna göre  $u(x)$  tam çözümü aşağıdaki gibidir:

$$u(x) = 1 + 6x + \frac{25}{9}x^2.$$

□

## 2.2 Homojen Fredholm İntegral Denklemler

Bu bölümde özellikle ayrıştırılabilir çekirdek fonksiyonuna sahip homojen Fredholm integral denklemleri ve çözümleriyle ilgileneceğiz. Bu yüzden bu denklemlere uygun olarak doğrudan hesaplama metodunu kullanacağız.

### 2.2.1 Doğrudan Hesaplama Yöntemi

**Örnek 2.2.1.**

$$u(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin tu(t)dt$$

*homojen Fredholm integral denklemini, doğrudan hesaplama metodu ile çözünüz.*

*Çözüm.*

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin tu(t)dt$$

olmak üzere denklemini

$$u(x) = \alpha \lambda \cos x$$

olarak yeniden yazalım, o halde

$$\alpha = \alpha \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt$$

elde edilir ve buradan da

$$\alpha = \frac{1}{2} \alpha \lambda$$

bulunur.  $\alpha = 0$  ise aşıkâr çözüme ulaşılır, ancak  $\alpha \neq 0$  ise  $\lambda = 2$  'dir. Buna göre  $A = 2\alpha$  alınır ise çözüm

$$u(x) = A \cos x$$

elde edilir.

□



## 2.3 Birinci Tip Fredholm İntegral Denklemler

$D$  reel sayıların sınırlı kapalı bir kümesi olmak üzere

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt, \quad x \in D$$

birinci tip Fredholm integral denklemini göz önüne alalım.  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonunun sadece integral işareti altında yer alması bazı zorluklara neden olmaktadır.  $K(x, t)$  ve  $f(x)$  verilen reel fonksiyonlar ve  $\lambda$  parametresi bu tip integral denklemlerin çözümünde önemli rol oynamaktadır.

### 2.3.1 Düzenleme Metodu

Bu metod Philips [25] ve Tikhonov [26] tarafından bağımsız olarak kurulmuştur. Metodun amacı problemleri daha çözülebilir bir problem haline dönüştürmektir.  $\mu > 0$  küçük bir pozitif parametre olmak üzere, bu metod kullanılarak verilen

$$f(x) = \int_a^b K(x, t)u(t)dt, \quad x \in D$$

birinci cins Fredholm integral denklemi

$$\mu u_\mu(x) = f(x) - \int_a^b K(x, t)u_\mu(t)dt, \quad x \in D$$

yaklaşımına dönüştürülür. Bu ise

$$u_\mu(x) = \frac{1}{\mu}f(x) - \frac{1}{\mu} \int_a^b K(x, t)u_\mu(t)dt, \quad x \in D$$

şeklinde yazılabilir.  $\mu \rightarrow 0$  için  $u_\mu(x)$  denkleminin çözümü  $u(x)$ ' e yakınsar. Düzenleme metodu uygulandıktan sonra ikinci cins Fredholm integral denklemini çözen her metod kullanılarak çözüm aranır.

#### Örnek 2.3.1.

$$\frac{1}{4}e^x = \int_0^{\frac{1}{4}} e^{x-t}u(t)dt$$

*Fredholm integral denklemini düzenleme ve doğrudan hesaplama metodlarını kullanarak çözüünüz.*

*Çözüm.*

$$u_\mu(x) = \frac{1}{4\mu}e^x - \frac{1}{\mu} \int_0^{\frac{1}{4}} e^{x-t}u_\mu(t)dt$$

düzenleme metodu ile denklemini yukarıdaki gibi bir ikinci tip Fredholm integral denklemine dönüştürebiliriz. Şimdi bu denklemin doğrudan hesaplama metoduyla çözelim

$$\alpha = \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-t} u_\mu(t) dt$$

olmak üzere

$$u_\mu(x) = \left( \frac{1}{4\mu} - \frac{\alpha}{\mu} \right) e^x$$

bulunur ve burada integralin çözümü yapıldığında

$$\alpha = \frac{1}{4(1 + 4\mu)},$$

$$u_\mu(x) = \frac{e^x}{1 + 4\mu}$$

elde edilir. Buradan tam çözümde aşağıdaki gibi bulunur

$$u(x) = \lim_{\mu \rightarrow 0} u_\mu(x) = e^x.$$

□

## BÖLÜM 3

### Volterra İntegral Denklemler

Bu bölümde, integrasyon limitlerinden en az bir tanesi değişken olan

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

formundaki Volterra integral denklemlerinin çözümlerini nasıl bulabileceğimize bakıp çözümlere ulaşacağız.

#### 3.1 İkinci Tip Volterra İntegral Denklemler

Bu tip denklemler

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

şeklinde bilinmeyen  $u(x)$  fonksiyonu,  $K(x,t)$  çekirdek fonksiyonu gerçel değerli bir  $f(x)$  fonksiyonu ve  $\lambda$  parametresinden oluşur ve integrasyon limitlerinden en az bir tanesi değişkendir. İlk bölümde tanıdığımız bu denklemlerin şimdi yeni ve geleneksel bu metodlarla nasıl çözüldüğünü inceleyeceğiz.

##### 3.1.1 Adomian Ayrıştırma Metodu

Adomian Ayrıştırma Metodu, George Adomian tarafından bulunmuş ve geliştirilmiştir [13, 15, 14].  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonu

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \dots$$

şeklinde yazılsın. Buna göre

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt,$$

ya da

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) [u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \cdots] dt$$

elde edilir. Buradan da

$$u_0(x) = f(x),$$

$$u_1(x) = \lambda \int_0^x K(x, t) u_0(t) dt,$$

$$u_2(x) = \lambda \int_0^x K(x, t) u_1(t) dt,$$

⋮

$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_0^x K(x, t) u_n(t) dt$$

şeklinde  $u(x)$  fonksiyonunun bileşenleri tespit edilir.

### Örnek 3.1.1.

$$u(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x (t - x)u(t) dt$$

*Volterra integral denklemini Adomian ayrıştırma metodu ile çözünüz.*

*Çözüm.*

$$u_0(x) + u_1(x) + \cdots = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x (t - x)[u_0(t) + u_1(t) + \cdots] dt$$

Bu denklemde

$$f(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2, \quad \lambda = -1, \quad K(x, t) = t - x$$

dir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (t - x)u_n(t) dt, \quad n \geq 0$$

olduğundan

$$u_0(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2,$$

$$u_1(x) = - \int_0^x (t - x)u_0(t) dt = - \int_0^x (t - x) \left( 1 - t - \frac{1}{2}t^2 \right) dt = \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4,$$

$$u_2(x) = - \int_0^x (t - x)u_1(t) dt = \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6,$$

şeklinde devam eder. Buradan

$$u(x) = 1 - \left( x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots \right)$$

bulunur. Bu ise

$$\left( x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots \right) = \sinh x$$

olduğundan tam çözüm

$$u(x) = 1 - \sinh x$$

olarak elde edilir. □

### 3.1.2 Değiştirilmiş Adomian Ayrıştırma Metodu

Değiştirilmiş Adomian ayrıştırma metodu,  $f(x)$  fonksiyonun; iki ya da daha fazla polinomun birleşimi, trigonometrik fonksiyonlar, hiperbolik fonksiyonlar gibi olması durumunda kullanılması için Wazwaz tarafından geliştirilmiştir. [6, 15, 16]

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

Volterra integral denkleminde

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

ve

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f_1(x), \\ u_1(x) &= f_2(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_0(t)dt, \\ u_2(x) &= \lambda \int_0^x K(x,t)u_1(t)dt, \\ &\vdots \\ u_{n+1}(x) &= \lambda \int_0^x K(x,t)u_n(t)dt, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

şeklinde  $u(x)$  fonksiyonunun bileşenleri tespit edilmesi yoluyla çözüme ulaşılır.

### Örnek 3.1.2.

$$u(x) = 2x + \sin x + x^2 - \cos x + 1 - \int_0^x u(t)dt$$

Volterra integral denklemini değiştirilmiş Adomian ayrıştırma metoduyla çözünüz.

Çözüm.

$$f_1(x) = 2x + \sin x \quad \text{ve} \quad f_2(x) = x^2 - \cos x + 1$$

olsun. Buna göre

$$u_0(x) = f_1(x) = 2x + \sin x,$$

$$u_1(x) = x^2 - \cos x + 1 - \int_0^x (2t + \sin t)dt$$

$$= x^2 - \cos x + 1 - x^2 + \cos x + 0 - \cos 0 = 0,$$

$$u_{n+1}(x) = - \int_0^x u_n(t)dt = 0,$$

yani,  $j \geq 1$  için  $u_j = 0$  bulunur. Buna göre

$$u(x) = 2x + \sin x$$

tam çözümü elde edilir. □

### 3.1.3 Gürültü Terimi

Daha önce de tanımlandığı gibi gürültü terimleri  $u_0(x)$  ve  $u_1(x)$  bileşenlerinde yer alan zıt işaretli identik terimlerdir.  $u(x)$ ' in diğer bileşenleri de farklı gürültü terimlerine sahip olabilir. Gürültü terimleri homojen olmayan integral denklemler de karşımıza çıkarken, homojen integral denklemlerde bulunmaz. [6, 15, 16, 17]

### Örnek 3.1.3.

$$u(x) = 8x + x^3 - \frac{3}{8} \int_0^x tu(t)dt$$

Volterra integral denkleminin gürültü terimlerini ve tam çözümünü bulunuz.

Çözüm. Adomian ayrıştırma metodu kullanılarak

$$u_0(x) = 8x + x^3,$$

$$u_{k+1}(x) = -\frac{3}{8} \int_0^x tu_k(t)dt$$

Buna göre,

$$\begin{aligned}u_0(x) &= 8x + x^3, \\u_1(x) &= -\frac{3}{8} \int_0^x tu_0(t)dt, \\&= -\frac{3}{8} \int_0^x t(8t + t^3)dt, \\&= -\frac{3}{40}x^5 - x^3\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da  $u_0(x)$  ve  $u_1(x)$  bileşenleri arasında zıt işaretli identik terim yani denklemin gürültü terimi,  $\pm x^3$  olarak bulunur. İşlemler diğer bileşenler içinde yapıldığında ve bulunan gürültü terimleri göz ardı edildiğinde tam çözüm

$$u(x) = 8x$$

olarak bulunur. □

### 3.1.4 Ardaşık Yaklaşım Metodu

Herhangi bir reel değerli  $u_0(x)$  fonksiyonu  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonuna bir yaklaşım olsun. Bu durumda

$$u_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x u_n(t)dt, \quad n \geq 0$$

fonksiyonu  $u(x)$ ' e daha iyi bir yaklaşımdır ve

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x)$$

sağlanır.  $u_0(x)$  genelde 0, 1 veya  $x$  olarak alınır.

#### Örnek 3.1.4.

$$u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

*Volterra integral denklemini ardaşık yaklaşım metoduyla çözünüz.*

*Çözüm.*

$$u_0(x) = 1$$

olarak seçilsin.

$$u_{n+1}(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u_n(t)dt, \quad n \geq 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned}u_1(x) &= 1 - \int_0^x (x-t)u_0(t)dt = 1 - \int_0^x (x-t)dt = 1 - \frac{1}{2!}x^2, \\u_2(x) &= 1 - \int_0^x (x-t)u_1(t)dt = 1 - \int_0^x (x-t)\left(1 - \frac{1}{2!}x^2\right)dt = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4, \\u_3(x) &= 1 - \int_0^x (x-t)u_2(t)dt = 1 - \int_0^x (x-t)\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\right)dt \\&= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6, \\&\vdots\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Buradan

$$u_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

olur. Buna göre çözüm

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x) = \cos x$$

bulunur. □

### 3.1.5 Laplace Dönüşüm Metodu

**Teorem 3.1.5.** (Konvolüsyon Teoremi)

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt$$

integral denkleminin  $K(x,t)$  çekirdeği  $(x-t)$  farkına bağlı olarak veriliyorsa, bu durumda fark çekirdeği olarak adlandırılır. Örneğin,  $e^{x-t} \sin(x-t)$  ve  $\cos(x-t)$  ifadeleri fark çekirdeğidir. Buna göre verilen integral denklem

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x-t)u(t)dt$$

şeklinde yazılabilir.

$f_1(x)$  ve  $f_2(x)$  Laplace dönüşümünün varlığı koşullarını sağlayan iki fonksiyon ve

$$\mathcal{L}\{f_1(x)\} = F_1(s), \quad \mathcal{L}\{f_2(x)\} = F_2(s)$$

olsun. Buna göre yukarıdaki şekilde verilen iki fonksiyonun konvolüsyon çarpımı,

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt$$



veya

$$(f_2 * f_1)(x) = \int_0^x f_2(x-t)f_1(t)dt$$

olarak tanımlanır. Burada

$$(f_1 * f_2)(x) = (f_2 * f_1)(x)$$

dir ve

$$\mathcal{L}\{(f_1 * f_2)(x)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt\right\} = F_1(s)F_2(s)$$

sağlanır.

Bu teorem eşliğinde Laplace dönüşüm metodunu inceleyelim.

Fark çekirdeği formunda  $K(x, t)$  fonksiyonuna sahip

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x-t)u(t)dt$$

Volterra integral denkleminin çözümü Laplace dönüşümü ile elde edilebilir.

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(x)\},$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\},$$

$$K(s) = \mathcal{L}\{K(x)\}$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\} + \lambda \mathcal{L}\left\{\int_0^x K(x-t)u(t)dt\right\},$$

$$U(s) = F(s) + \lambda K(s)U(s)$$

yazılırsa

$$U(s) = \frac{F(s)}{1 - \lambda K(s)}, \quad \lambda K(s) \neq 1$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafına da ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{1 - \lambda K(s)}\right\}$$

çözümü elde edilir.

**Örnek 3.1.6.**

$$u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

Volterra integral denklemini Laplace dönüşüm metoduyla çözüünüz.

*Çözüm.*  $K(x-t) = x-t$ ,  $\lambda = -1$  olmak üzere denklemin her iki yanına da Laplace dönüşümü uygularsak

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{(x-t) * u(x)\},$$

$$U(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}U(s),$$

$$U(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

bulunur. Burada da  $U(s)$ ' ye ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$u(x) = \cos x$$

tam çözümü bulunur. □

### 3.1.6 Seri Çözümü Metodu

Reel  $u(x)$  fonksiyonu, her mertebeden türevlere sahip olmak üzere tanım kümesindeki herhangi bir  $b$  noktası için

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (x-b)^k$$

şeklinde  $b$  civarında  $f(x)$ ' e yakınsayan bir Taylor serisi açılımına sahip ise *analitik* olarak adlandırılır.  $x = 0$  olması durumunda

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

şeklinde bir açılım elde edilir. Bu metod analitik  $u(x)$  fonksiyonunun Taylor serisinde yerine yazılması olgusuna dayanır.  $T(f(x))$ ,  $f(x)$  fonksiyonunun Taylor serisi olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

Volterra integral denklemi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_0^x K(x,t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt$$

şeklinde yazılabilir. Önce denklemin sağ tarafındaki integral hesaplanır ve  $x'$  in kuvvetleri parantezine alınır, sonrada eşit kuvvetli  $x'$  ler sol taraf ile karşılaştırılır ise  $a_j, j \geq 0$  katsayıları elde edilir.

### Örnek 3.1.7.

$$u(x) = 2e^x - 2 - x + \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

Volterra integral denklemini seri çözümü metoduyla çözüünüz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} a_0(x) + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \\ &= 2 \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) - 2 - x + \int_0^x (x-t)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)dt, \\ &= x + 2\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^3}{3!} + \dots + a_0x^2 + \frac{a_1}{2}x^3 + \frac{a_2}{3}x^4 - \frac{a_0}{2}x^2 - \frac{a_1}{3}x^3 - \frac{a_2}{4}x^4 - \dots, \\ &= x + \left(1 + \frac{a_0}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{a_1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{12} + \frac{a_2}{12}\right)x^4 + \dots \end{aligned}$$

bu eşitlikten

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2!}, a_4 = \frac{1}{3!}, \dots$$

katsayıları bulunur. Yani

$$a_0 = 0, \quad a_n = \frac{1}{n!}, \quad n \geq 1$$

dır. Buradan denklemin seri çözümü

$$u(x) = x \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right)$$

bulunur ve böylece

$$u(x) = xe^x$$

tam çözümüne ulaşılır. □

## 3.2 Birinci Tip Volterra İntegral Denklemler

Bu kısımda

$$f(x) = \int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

formundaki birinci cins Volterra integral denklemlerinin çözümlerini farklı metodlar kullanarak bulmaya çalışacağız.

### 3.2.1 Seri Çözümü Metodu

Bir önceki bölümde olduğu gibi analitik  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonunun  $x = 0$  civarındaki

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Taylor açılımı ve  $T(f(x))$  ile gösterilen  $f(x)$  fonksiyonunun Taylor açılımı verilen integral denklemde yerine yazılır ve integral alındıktan sonra her iki taraftaki  $x$ ' in aynı kuvvetleri eşitlenirse  $a_i$ , ( $i = 1, 2, \dots$ ) katlıları, dolayısıyla  $u(x)$  fonksiyonu tespit edilmiş olur.

#### Örnek 3.2.1.

$$\sin x - x \cos x = \int_0^x t u(t) dt$$

*Volterra integral denklemini seri çözümü metoduyla çözüünüz.*

*Çözüm.*  $(\sin x - x \cos x)$  Taylor serisi açılımından,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{840}x^7 + \dots &= \int_0^x t(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt, \\ &= \frac{1}{2}a_0 x^2 + \frac{1}{3}a_1 x^3 + \frac{1}{4}a_2 x^4 + \dots \end{aligned}$$

olarak bulunan eşitlikte aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitlenirse

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -\frac{1}{3!}, a_4 = 0 \dots$$

katsayıları bulunur. Buradan denklemin seri çözümü,

$$u(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

olmak üzere, tam çözümü

$$u(x) = \sin x$$

olarak bulunur.

□

### 3.2.2 Laplace Dönüşüm Metodu

$$f(x) = \int_0^x K(x, t)u(t) dt$$

integral denkleminde çekirdek fark çekirdeği formunda ise bu metod kullanılabilir. Buna göre

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^x K(x,t)u(t)dt\right\},$$

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{K(s)}\right\}$$

ile çözüm elde edilebilir.

### Örnek 3.2.2.

$$e^x - \sin x - \cos x = \int_0^x 2e^{x-t}u(t)dt$$

*Volterra integral denklemini Laplace dönüşüm metoduyla çözümlü.*

*Çözüm.*

$$\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{2}{s-1}U(s),$$

$$\frac{s(s-1) + s - 1 - s^2}{s^2(s-1)} = -\frac{1}{s^2}U(s)$$

ve

$$U(s) = \frac{1}{s-1}$$

dir. Burada ters Laplace dönüşümü uygularsak

$$u(x) = \sin x$$

tam çözümünü buluruz. □

### 3.2.3 1. Tip Volterra İntegral Denkleminin 2. Cins Volterra İntegral Denklemi Haline Getirilmesi

$K(x,x) \neq 0$  olmak üzere

$$f(x) = \int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

birinci tip Volterra integral denkleminin Leibniz kuralı kullanılarak türevi alınırsa

$$f'(x) = K(x,x)u(x) + \int_0^x K_x(x,t)u(t)dt$$

elde edilir. Bu ise

$$u(x) = \frac{f'(x)}{K(x,x)} - \int_0^x \frac{1}{K(x,x)}K_x(x,t)u(t)dt$$

şeklinde yazılabilir. Homojen olmayan terim

$$g(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)}$$

ve çekirdek fonksiyonu

$$G(x, t) = -\frac{K_x(x, t)}{K(x, x)}$$

olmak üzere  $\lambda = 1$  için

$$u(x) = g(x) + \lambda \int_0^x G(x, t)u(t)dt$$

ikinci cins Volterra integral denklemi elde edilir.

### Örnek 3.2.3.

$$\sinh x = \int_0^x e^{x-t}u(t)dt$$

*birinci tip Volterra integral denklemini ikinci tip Volterra integral denklemine çevirerek çözüünüz.*

*Çözüm.* Öncelikle Leibniz kuralına göre denklemin her iki tarafının da türevini alalım.

$$\cosh x = u(x) + \int_0^x e^{x-t}u(t)dt,$$

Buna göre

$$u(x) = \cosh x - \int_0^x e^{x-t}u(t)dt$$

ikinci tip Volterra integral denklemini elde ederiz. Şimdi Laplace dönüşüm metodunu kullanarak bu denklemi çözelim.

$$U(s) = \frac{s}{s^2 - 1} - \frac{1}{s - 1}U(s)$$

yani

$$U(s) = \frac{1}{s + 1}$$

bulunur. Burada ters Laplace dönüşümü uygularsak

$$u(x) = e^{-x}$$

tam çözümünü elde ederiz. □

## BÖLÜM 4

### Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler

Bu denklemler hem integral hem de diferansiyel denklemleri bir arada içerdiği için integro-diferansiyel denklemler adını alır. Bu denklemler  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonunu integral işareti içinde ve onun bir türevi olan  $u^{(n)}(x)$ ,  $n \geq 1$ , fonksiyonunu ise integral işareti dışında barındırır [6]. Fredholm integrasyon denklemlerinin genel tanımından dolayı integrasyon limitleri burada da sabittir. Denklemlerin genel formu

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t)dt, \quad u^{(k)}(0) = b_k, \quad 0 \leq k \leq n - 1$$

dir.

#### 4.1 2. Tip Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde ayrıştırılabilir çekirdek içeren denklemler üzerinde çalışacağız. Ayrıştırılabilir çekirdekler aşağıdaki gibi sonlu seri toplamı olarak yazılabilir.

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^n g_k(x)h_k(t)$$

Genel olarak biz

$$K(x, t) = g(x)h(t)$$

formunda çekirdekleri içeren denklemlere odaklanacağız.

### 4.1.1 Doğrudan Hesaplama Metodu

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g(x) \int_a^b K(x, t)u(t)dt, \quad u^{(k)}(0) = b_k, \quad 0 \leq k \leq n - 1$$

denkleminde

$$\alpha = \int_a^b h(t)u(t)dt$$

olacak şekilde  $\alpha$  tanımlarsak, denklem

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \alpha g(x)$$

halini alır. Denklemin her iki yanını da  $n$  kez 0' dan  $x$ 'e integre ederek ve başlangıç koşullarını kullanarak çözümü elde edebiliriz.

#### Örnek 4.1.1.

$$u'(x) = 3 + 6x + x \int_0^1 tu(t)dt, \quad u(0) = 0$$

*Fredholm integro-diferansiyel denklemini doğrudan hesaplama metodunu kullanarak çözünüz.*

*Çözüm.*

$$u'(x) = 3 + 6x + x \int_0^1 tu(t)dt, \quad u(0) = 0$$

denkleminde

$$\alpha = \int_0^1 tu(t)dt$$

olarak tanımlanırsa

$$u'(x) = 3 + 6x + \alpha x, \quad u(0) = 0$$

olur. Denklemin her iki yanını da 0' dan  $x$ ' e integre edersek

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2$$

buradan

$$\alpha = \int_0^1 tu(t)dt = \int_0^1 t \left( 3t + 3t^2 + \frac{1}{2}\alpha t^2 \right) dt = \frac{7}{4} + \frac{1}{8}\alpha$$
$$\alpha = 2$$

elde edilir. Buna göre tam çözüm

$$u(x) = 3x + 4x^2$$

olarak bulunur. □



### 4.1.2 Adomian Ayrıştırma Metodu

$$u''(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \quad u(0) = a_0, \quad u'(0) = a_1$$

Fredholm integro-diferansiyel denkleminin her iki yanını da 0' dan  $x'$  e integre edersek  $u(0) = a_0$  ve  $u'(0) = a_1$  başlangıç koşullarıyla,  $L^{-1}$  iki katlı bir integral operatör olmak üzere

$$u(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left( \int_a^b K(x,t)u(t)dt \right)$$

denklemini elde ederiz.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

seri açılımını kullanırsak denklem

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left( \int_a^b K(x,t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt \right)$$

halini alır ve buradan

$$\begin{aligned} u_0(x) &= a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) \\ u_{k+1}(x) &= L^{-1} \left( \int_a^b K(x,t) (u_k(t)) dt \right), \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Bu ikinci mertebeden bir Fredholm integro-diferansiyel denklem çözüm algoritmasıydı ancak aynı adımlar izlenerek diğer mertebeden denklemlerde çözülebilir. Aynı zamanda daha önceden kullandığımız değiştirilmiş Adomian ayrıştırma metodu gerekli görüldüğünde bu tip denklemler içinde kullanılabilir.

### 4.1.3 Değiştirilmiş Adomian Ayrıştırma Metodu

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

Fredholm integral denkleminde

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

ve

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}u_0(x) &= f_1(x), \\u_1(x) &= f_2(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u_0(t)dt, \\u_{k+1}(x) &= \lambda \int_a^b K(x, t)u_k(t)dt, \quad k \geq 1\end{aligned}$$

şeklinde  $u(x)$  fonksiyonunun bileşenleri tespit edilmesi yoluyla çözüme ulaşılır.

#### 4.1.4 Gürültü Terimi

$u_0(x)$  ve  $u_1(x)$  bileşenleri gürültü terimleri içeriyorsa, tam sonuç sadece ilk iki integrasyona bakılarak bulunabilir. Gürültü terimleri, eğer varsa  $u_0(x)$  ve  $u_1(x)$  bileşenlerinde yer alan zıt işaretli identik terimlerdir.  $u(x)$  'in diğer bileşenleri de farklı gürültü terimlerine sahip olabilirler.  $u_0(x)$  ve  $u_1(x)$  'in gürültü terimlerinin sadeleşmesi sonucunda kalan  $u_0(x)$  'in diğer terimleri verilen integro-diferansiyel denklemin tam sonucu olabilir bunu kontrol etmek gerekir [15, 16, 14, 35].

#### Örnek 4.1.2.

$$u'(x) = 36x^2 + \int_0^1 u(t)dt, \quad u(0) = 1$$

*Fredholm integro-diferansiyel denklemini Adomian ayrıştırma yöntemi ile çözüünüz.*

*Çözüm.* Denklemi 0' dan  $x$  ' e integre eder ve başlangıç koşulunu yerine yazarsak sırasıyla

$$\begin{aligned}u(x) - u(0) &= 12x^3 + x \left( \int_0^1 u(t)dt \right) \\u(x) &= 1 + 12x^3 + x \left( \int_0^1 u(t)dt \right)\end{aligned}$$

bulunur.  $u(x)$  'in seri formu kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 + 12x^3 + x \left( \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)dt \right)$$

buradan da

$$u_0(x) = 1 + 12x^3, \quad u_{k+1}(x) = x \int_0^1 u_k(t)dt, \quad k \geq 0,$$

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= 1 + 12x^3, \\
u_1(x) &= x \int_0^1 u_0(t) dt = 4x, \\
u_2(x) &= x \int_0^1 u_1(t) dt = 2x, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

bileşenleri göz önüne alındığında  $u(x)$ ' in seri çözümü

$$u(x) = 1 + 12x^3 + 4x \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right),$$

Burada yakınsak geometrik serinin toplamı  $r = \frac{1}{2}$  olmak üzere

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

dir ve tam çözüm

$$u(x) = 1 + 8x + 12x^3$$

olarak bulunur. □

### Örnek 4.1.3.

$$\begin{aligned}
u^{(iv)}(x) &= 1 - x + \sin x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - t)u(t) dt, \\
u(0) &= u''(0) = 0, \quad u'(0) = -u'''(0) = 1
\end{aligned}$$

*Fredholm integro-diferansiyel denklemini Adomian ayrıştırma metoduyla çözünüz ve varsa gürültü terimlerini bulunuz.*

*Çözüm.* İlk önce denklemi üç defa 0' dan  $x$ ' e integre edersek

$$u(x) = \sin x + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{4!}x^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t) dt - \frac{1}{3!}x^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} tu(t) dt$$

denklemi elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= \sin x + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4, \\
u_{k+1} &= \frac{1}{4!}x^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_k(t) dt - \frac{1}{3!}x^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} tu_k(t) dt, \quad k \geq 0
\end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır yani denklemin  $u_0$  ve  $u_1$  bileşenleri

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= \sin x + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4, \\
u_1(x) &= -\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots,
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Buna göre denklemin gürültü terimleri  $\pm \frac{1}{3!}x^3$  ve  $\mp \frac{1}{4!}x^4$  olarak belirlenir. Burada  $u_0(x)$  bileşenin gürültü terimlerini yok sayarsak

$$u(x) = \sin x$$

tam çözümüne ulaşırız. □

### 4.1.5 Seri Çözümü Metodu

Reel  $u(x)$  fonksiyonu, her mertebeden türevlere sahip olmak üzere tanım bölgesindeki herhangi bir  $b$  noktası için

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(b)}{n!} (x-b)^n$$

şeklinde  $b$  civarında  $u(x)$ 'e yakınsayan bir Taylor serisi açılımına sahip ise *analitik* olarak adlandırılır.  $x=0$  olması durumunda

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

şeklinde bir açılım elde edilir.

Bu bölümde seri çözümü metodu ikinci tip Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için kullanılır. Çözümü  $u(x)$  olan bir analitik Fredholm integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

$$u^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \quad u^{(j)}(0) = a_j, \quad 0 \leq j \leq (k-1)$$

O halde seri açılımlarını yerlerine yazdığımızda denklem

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^{(k)} = T(f(x)) + \int_a^b K(x,t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt$$

şeklini alır ve yine buradan da  $T(f(x))$ ,  $f(x)$ 'in Taylor serisi olmak üzere denklem

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)^{(k)} = T(f(x)) + \lambda \int_a^b K(x,t)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)dt$$

olarak yazılarak çözüm aranır.

#### Örnek 4.1.4.

$$u'(x) = 4 + 4x + \int_{-1}^1 (1-xt)u(t)dt, \quad u(0) = 1$$

*Fredholm integro-diferansiyel denklemini seri çözümü metodunu kullanarak çözüünüz.*

Çözüm.  $u(x)$  fonksiyonunun seri açılımı

$$u'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)'$$

kullanılır ve bu seri açılımı denklemden yerine yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 4 + 4x + \int_{-1}^1 \left( (1 - xt) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt$$

olur. Başlangıç değeri koşulu olarak  $a_0 = 1$  verilir ve bununla birlikte

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots &= 6 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 + \frac{2}{7}a_6 + \frac{2}{9}a_8 \\ &+ \left( 4 - \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{5}a_3 - \frac{2}{7}a_5 - \frac{2}{9}a_7 \right)x \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte aynı dereceli  $x$ ' lerin katsayıları eşitlendiğinde

$$a_1 = 6, \quad a_n = 0, \quad n \geq 2$$

bulunur. Böylece tam çözümü  $a_0 = 1$  başlangıç koşuluyla

$$u(x) = 1 + 6x$$

olarak bulunmuş oluruz. □

## BÖLÜM 5

### Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemler

Başlangıç değer problemlerini, integral denklemlerine çevirmek için kullanılan bu yeni tip denklemler *Volterra integro-diferansiyel denklemler* olarak adlandırılmıştır [11, 27, 33, 34]. Bu denklemler  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonunu integral işareti içinde ve onun bir türevi olan  $u^{(n)}(x), n \geq 1$ , fonksiyonunu ise integral işareti dışında barındırır. Bu durumda Volterra integrasyon denklemlerinin genel tanımından dolayı integrasyon limitlerinin en az biri burada da değişkendir. Denklemin genel formu

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt$$

şeklindedir.

### 5.1 2. Tip Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemler

#### 5.1.1 Adomian Ayrıştırma Metodu

Adomian ayrıştırma metodu bize sonsuza giden bir seri halinde çözümü verir ve eğer varsa tam çözüme ulaşmamızı sağlar [6, 13, 14, 15, 35]. Genellikle ikinci türevin kullanıldığı Volterra integro-diferansiyel denklemlerin aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım

$$u''(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)u(t)dt, \quad u(0) = a_0, \quad u'(0) = a_1.$$

Denklemin her iki tarafını da 0' dan  $x$ ' e integre edersek,  $L^{-1}$  iki katlı bir integral operatör olmak üzere

$$u(x) = a_0 + a_1 + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left( \int_0^x K(x, t)u(t)dt \right)$$

denklemini bulunur.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

seri açılımını kullanırsak, denklem

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = a_0 + a_1 + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left( \int_0^x K(x, t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt \right)$$

halini alır ve buradan

$$\begin{aligned} u_0(x) &= a_0 + a_1 + L^{-1}(f(x)) \\ u_{k+1}(x) &= L^{-1} \left( \int_0^x K(x, t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt \right), \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu ikinci mertebeden bir Volterra integro-diferansiyel denklem çözüm algoritmasıydı ancak aynı adımlar izlenerek diğer mertebeden denklemlerde çözülebilir. Aynı zamanda daha önceden kullandığımız değiştirilmiş Adomian ayrıştırma metodu gerekli görüldüğünde bu tip denklemler için de kullanılabilir.

### Örnek 5.1.1.

$$u''(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 1$$

*Volterra integro-diferansiyel denklemini Adomian ayrıştırma metodunu kullanarak çözüyoruz.*

*Çözüm.* Öncelikle iki katlı bir integral operatörü olan  $L^{-1}$ 'i

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx$$

olarak tanımlayalım ve denklemin her iki yanını da iki kez 0'dan  $x$ 'e integre edelim. Böylece

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + L^{-1} \left( \int_0^x (x-t)u(t)dt \right)$$

denklemini elde edilir. Bileşenlere bakarsak,

$$u_0(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$$
$$u_1(x) = L^{-1} \left( \int_0^x (x-t)u(t)dt \right) = \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7$$

diye devam eder. Buradan denklemin seri çözümü

$$u(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7,$$

tam çözümü ise

$$u(x) = e^x$$

olarak bulunur. □

### 5.1.2 Laplace Dönüşüm Metodu

Laplace dönüşüm metodunu daha önce ikinci tip Volterra integral denklemlerini çözerken kullanmıştık. Aynı şekilde Laplace dönüşümü özellikleri göz önünde bulundurularak bu metodu Volterra integro-diferansiyel denklemleri çözmek için kullanabiliriz. Bildiğimiz gibi  $u(x)$ ' in türevlerinin Laplace dönüşümleri aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u'(x)\} &= s\mathcal{L}\{u(x)\} - u(0) \\ &= sU(s) - u(0), \\ \mathcal{L}\{u''(x)\} &= s^2\mathcal{L}\{u(x)\} - su(0) - u'(0) \\ &= s^2U(s) - su(0) - u'(0), \\ \mathcal{L}\{u'''(x)\} &= s^3\mathcal{L}\{u(x)\} - s^2u(0) - su'(0) - u''(0) \\ &= s^3U(s) - s^2u(0) - su'(0) - u''(0) \end{aligned}$$

şeklinde devam eder.

#### Örnek 5.1.2.

$$u'(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt, \quad u(0) = 1$$

*Volterra integro-diferansiyel denklemini Laplace dönüşüm metoduyla çözüünüz.*



*Çözüm.* Çekirdek  $K(x-t) = 1$  şeklinde olduğundan Laplace dönüşüm metodunu bu denkleme uygulayabiliriz. Öncelikle denklemin her iki yanında da Laplace dönüşümünü kullanırsak

$$\mathcal{L}\{u'(x)\} = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{(1 * u(x))\},$$

$$sU(s) - u(0) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}U(s)$$

olur. Buradan  $U(s)$ ' yi çekersek

$$U(s) = \frac{1}{s-1}$$

bulunur. Şimdi ise bulunan bu eşitlikte ters Laplace dönüşümü yaparsak, denklemin tam çözümü

$$u(x) = e^x$$

olarak elde edilir. □

### 5.1.3 Seri Çözümü Metodu

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

olmak üzere

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \quad u^{(k)}(0) = k!a_k, \quad 0 \leq k \leq (n-1)$$

O halde

$$a_0 = u(0), \quad a_1 = u'(0), \quad a_2 = \frac{1}{2!}u''(0), \quad a_3 = \frac{1}{3!}u'''(0), \dots$$

eşitliklerini elde ederiz. Seri açılımlarını yerlerine yazdığımızda denklem

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^{(n)} = T(f(x)) + \int_0^x K(x,t) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt$$

şeklini alır ve yine buradan da  $T(f(x))$ ,  $f(x)$ ' in Taylor serisi olmak üzere denklem

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^{(n)} = T(f(x)) + \lambda \int_0^x K(x,t)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt$$

olarak son halini alır. Şimdi bu metodun kullanımını bir örnekle daha anlaşılır hale getirelim.

**Örnek 5.1.3.**

$$u'(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt, \quad u(0) = 0$$

Volterra integro-diferansiyel denklemini seri çözümü metodunu kullanarak çözünüz.

Çözüm.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

serisini denklemden kullanırsak

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = 1 + \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt$$

ve integralden kurtulup eşitlik yeniden yazıldığında

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n$$

buradan da  $x$ ' in dereceleri eşitlenirse

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n$$

bulunur. Denklemin her iki yanında da aynı dereceli  $x$  bilinmeyenlerinin katsayıları eşitlenir ve başlangıç koşullarından  $a_0 = 0$  olduğu kullanılırsa

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} a_{n-1}, \quad n \geq 1$$

Buradan da

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$$

elde edilir. O halde denklemin seri çözümü

$$u(x) = 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots,$$

tam çözümü ise

$$u(x) = \sinh x$$

olarak bulunur. □

## 5.1.4 Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemlerinin Başlangıç Değer Problemlerine Dönüştürülmesi

**Örnek 5.1.4.**

$$u'(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt, \quad u(0) = 1$$

*Volterra integro-diferansiyel denklemini, başlangıç değer problemine dönüştürerek çözünüz.*

*Çözüm.*

$$u'(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt \quad (5.1)$$

(5.1) Volterra integro-diferansiyel denklemini, başlangıç değer problemine dönüştürmek için öncelikle denklemin her iki yanından da Leibniz kuralı ile türev alalım.

$$u''(x) = u(x) \quad (5.2)$$

(5.1) denkleminde  $x = 0$  alınır

$$u'(0) = 1 + \int_0^0 u(t)dt = 1 \quad (5.3)$$

bulunur ki buradan da  $u'(0) = 1$  başlangıç değer koşulu elde edilir. Dolayısıyla (5.1) Volterra integro-diferansiyel denkleminde

$$u''(x) - u(x) = 1, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 1 \quad (5.4)$$

şeklinde ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemini elde edilir. Bu adi diferansiyel denklemin karakteristik denklemini

$$r^2 - 1 = 0$$

ve kökleri

$$r = \pm 1$$

olarak bulunur. Genel çözüm formuna göre

$$u(x) = Ae^x + Be^{-x}$$

dir. Burada başlangıç değer koşulları yerine konulduğunda  $A = 1, B = 0$  bulunur. Tüm bunlar göz önünde bulundurulduğunda Volterra integro-diferansiyel denklemin tam çözümü

$$u(x) = e^x$$

olarak bulunur. □

### 5.1.5 Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemlerinin Volterra İntegral Denklemlerine Dönüştürülmesi

Çekirdeğin, fark çekirdeği olduğu durumlarda Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümleri, Volterra integral denklemlerine dönüştürülüp, çeşitli çözüm metodları bu dönüşümden sonra uygulanarak bulunabilir.

I. Türev fonksiyonların integralleri: Analiz bilgilerimize dayanarak bildiğimiz gibi türev fonksiyonlarının integralleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\int_0^x u'(t)dt &= u(x) - u(0), \\ \int_0^x \int_0^{x_1} u''(t)dt dx_1 &= u(x) - xu'(0) - u(0), \\ \int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} u'''(t)dt dx_2 dx_1 &= u(x) - \frac{1}{2!}x^2u''(0) - xu'(0) - u(0)\end{aligned}$$

II. Katlı integrallerin tek katlı integrale dönüştürülmesi de aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\int_0^x \int_0^{x_1} u(t)dt dx_1 &= \int_0^x (x-t)u(t)dt, \\ \int_0^x \int_0^{x_1} (x-t)u(t)dt dx_1 &= \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2u(t)dt,\end{aligned}$$

ve genelleştirilmiş formu

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_{n-1}} (x-t)u(t)dt dx_{n-1} \cdots dx_1 = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n u(t)dt$$

dir.

Tüm bunları göz önüne alarak aşağıdaki örneği çözelim.

#### Örnek 5.1.5.

$$u'(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt, \quad u(0) = 0$$

*Volterra integro-diferansiyel denklemini Volterra integral denklemine dönüştürerek çözüünüz.*

*Çözüm.* Öncelikle denklemin her iki yanını da 0' dan  $x$ ' e integre edersek

$$\begin{aligned}\int_0^x u'(x) &= \int_0^x 1 + \int_0^x \int_0^x u(t)dt \\ u(x) - u(0) &= x + \int_0^x (x-t)u(t)dt\end{aligned}$$

bulunur. Başlangıç değer koşulunu kullanırsak

$$u(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

Volterra integral denklemi elde edilir ve bu denklemin çözümü için Adomian ayrıştırma metodunu seçersek

$$u_0(x) = x, \quad u_k(x) = \int_0^x (x-t)u_{k-1}(t)dt$$

yani

$$u_0(x) = x, \quad u_1(x) = \frac{1}{3!}x^3, \quad u_2(x) = \frac{1}{5!}x^5$$

olarak devam eden bileşenler bulunur. O halde denklemin seri çözümü

$$u(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7,$$

tam çözümü ise

$$u(x) = \sinh x$$

olarak elde edilir. □

## 5.2 1. Tip Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemler

1. tip Volterra integro-diferansiyel denklemlerin standart formu başlangıç koşulları verilmesi durumunda aşağıdaki gibidir:

$$\int_0^x K_1(x,t)u(t)dt + \int_0^x K_2(x,t)u^{(n)}(t)dt = f(x), \quad K_2(x,t) \neq 0$$

1. tip Volterra integro-diferansiyel denklemler, 2. tip Volterra integral denklemlere dönüştürülerek çözülebilir [37, 38].

### 5.2.1 Laplace Dönüşüm Metodu

Laplace dönüşüm metodunu daha önce Volterra integral denklemlerin birinci ve ikinci tiplerini ve bu bölümde 2. tip Volterra integral denklemlerini çözerken kullanmıştık. Bu metod için çekirdeğin formunun fark çekirdeği olması en önemli koşullardan biri olmak üzere

$$\int_0^x K_1(x,t)u(t)dt + \int_0^x K_2(x,t)u^{(n)}(t)dt = f(x), \quad K_2(x,t) \neq 0$$

denkleminin her iki yanında da Laplace dönüşümü uygularsak

$$\mathcal{L}(K_1(x-t) * u(x)) + \mathcal{L}(K_2(x-t) * u^{(n)}(x)) = \mathcal{L}(f(x))$$

yani

$$U(s) = \mathcal{L}(u(x)), \quad K_1(s) = \mathcal{L}(K_1(x)), \quad K_2(s) = \mathcal{L}(K_2(x)), \quad F(s) = \mathcal{L}(f(x))$$

olmak üzere

$$K_1(s)U(s) + K_2(s)(s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0)) = F(s)$$

bulunur. Bu denklemden  $U(s)$ ' yi çekersek  $K_1(s) + s^n K_2(s) \neq 0$  koşuluyla

$$U(s) = \frac{F(s) + K_2(s)(s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0))}{K_1(s) + s^n K_2(s)}$$

denklemini elde edilir ve her iki yanından ters Laplace dönüşümü alınarak tam çözümü bulmuş oluruz.

### Örnek 5.2.1.

$$\int_0^x (x-t)u(t)dt + \int_0^x (x-t)^2 u'(t)dt = 3x - 3 \sin x, \quad u(0) = 0$$

*Volterra integro-diferansiyel denklemini Laplace dönüşüm metoduyla çözüünüz.*

*Çözüm.* Denklem her iki yanına da Laplace dönüşümü uygularsak

$$\frac{1}{s^2}U(s) + \frac{2}{s^3}(sU(s) - u(0)) = \frac{3}{s^2} - \frac{3}{1+s^2}$$

ve buradan da

$$U(s) = \frac{1}{1+s^2}$$

bulunur ve ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$u(x) = \sin x$$

tam çözümü elde edilir. □

## BÖLÜM 6

### Abel İntegral Denklemi ve Singüler İntegral Denklemler

Abel integral denklemi; deprem bilimi, radyo astronomisi, fiber optik değerlendirme gibi bir çok alanda kullanılmaktadır ve integral denklemlerinin en eski örneğidir [3]. Daha önce Abel integral denklemini bir singüler denklem olarak tanımlamıştık. Volterra integral denklemleri birinci ya da ikinci cins farketmeksizin eğer, limitlerden en az biri sonsuzsa ya da  $K(x, t)$  çekirdek fonksiyonu integrasyon aralığında bir ya da daha fazla noktada sonsuz oluyorsa *singüler* denklemler olarak adlandırılır. [6, 40]

Birinci tip Volterra integral denklem örnekleri olarak sırası ile,  $u(x)$  fonksiyonunun Fourier dönüşümü ve Laplace dönüşümü

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} u(x) dx,$$
$$\mathcal{L}\{u(x)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} u(x) dx.$$

verilebilir. Açıkça görülüyor ki her iki örnekte de integrasyon limitlerinden en az biri sonsuz olduğundan, bu denklemler singüler olarak adlandırılır.

#### 6.1 Abel İntegral Denklemi

Abel,  $f(x)$  önceden belirlenmiş bir fonksiyon ve  $u(x)$ 'in belirlenecek çözüm olduğu

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt,$$

singüler integral denklemini kullanarak kaygan parçacıkların pürüzsüz bir eğri boyunca hareketinin denklemini üretmiştir. Abel integral denklemi aynı zamanda birinci tip Volterra integral denklemi olarak adlandırılmaktadır. Burada çekirdek fonksiyonu,

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{x-t}}$$

dir ve

$$t \rightarrow x \text{ iken } K(x, t) \rightarrow \infty$$

dır. Abel integral denklemleri birer birinci tip Volterra integral denklemleri olmasına rağmen, daha önce birinci tip Volterra integral denklemlerini çözmek için kullandığımız, seri çözümü metodu ve birinci tip denklemleri ikinci tip denklemlere çevirerek çözüme metodu Abel integral denklemlerinde çözüm yöntemi olarak kullanılamamaktadır.

### 6.1.1 Laplace Dönüşüm Metodu

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt \quad (6.1)$$

denkleminin her iki tarafında da Laplace dönüşüm metodunu uygularsak,

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{u(x)\} \mathcal{L}\{x^{-\frac{1}{2}}\}$$

denklemini elde edilir ve

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

olarak tanımlanan gamma fonksiyonu ile

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

eşitliği kullanılırsa

$$F(s) = U(s) \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{s^{1-\frac{1}{2}}} = U(s) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} = U(s) \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}}$$

bulunur. Bunu denklemini düzenlersek

$$U(s) = F(s) \frac{s^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

olur ve bu denklem

$$U(s) = \frac{s}{\pi} \left( \sqrt{\pi} s^{-\frac{1}{2}} F(s) \right) \quad (6.2)$$



şeklinde yeniden yazılabilir.

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} f(t) dt$$

olmak üzere (6.2) denkleminde

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{s}{\pi} \mathcal{L}\{y(x)\}$$

denklemini elde edilir ve

$$\mathcal{L}\{y'(x)\} = s \mathcal{L}\{y(x)\} - y(0)$$

eşitliği kullanılarak

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{1}{\pi} \mathcal{L}\{y'(x)\}$$

bulunur ve denklemin her iki tarafına da ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt \quad (6.3)$$

formülü elde edilir. Bu formül  $u(x)$  çözümünün belirlenmesi için kullanılır. Bu formülle her bir problem için Laplace dönüşüm metodu kullanmaya gerek kalmadığı için Abel integral denklemlerin çözümü kolaylaşır. Yani (6.1) denklemini direkt olarak (6.3) formülü ile çözülebilir.

$f(x) = x^n$ ,  $n$  bir pozitif tamsayı olmak üzere,

Tablo 6.1:  $u(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{x-t}} dt$ ,  $n \geq 0$  formundaki integraller için,

$u(x)$	$2c\sqrt{x}$	$\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}}$	$\frac{32}{35}x^{\frac{7}{2}}$	$\dots$	$\frac{2^{n+1}\Gamma(n+1)x^{n+\frac{1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$
$f(t)$	$c$	$t$	$t^2$	$t^3$	$\dots$	$t^n$

Tablo 6.2:  $u(x) = \int_0^x \frac{t^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{x-t}} dt$ ,  $n \geq 0$  formundaki integraller için,

$u(x)$	$2c\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\pi x$	$\frac{3}{8}\pi x^2$	$\frac{5}{16}\pi x^3$	$\dots$	$\frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\Gamma(\frac{n+3}{2})} \sqrt{\pi} x^{\frac{n+1}{2}}$
$f(t)$	$c$	$t^{\frac{1}{2}}$	$t^{\frac{3}{2}}$	$t^{\frac{5}{2}}$	$\dots$	$t^{\frac{n}{2}}$

**Örnek 6.1.1.**

$$2\pi\sqrt{x} = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt$$

*Abel integral denklemini çözünüz.*

*Çözüm.*  $f(x) = 2\pi\sqrt{x}$  eşitliğini (6.3) formülünde yerine yazarsak çözüm doğrudan,

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{2\pi\sqrt{x}}{\sqrt{x-t}} dt = \frac{d}{dx}(\pi x) = \pi$$

olarak bulunur. □

## 6.2 Genelleştirilmiş Abel İntegral Denklemi

Genelleştirilmiş Abel integral denkleminin genel formu  $0 < \alpha < 1$  ve  $\alpha$  bilinen bir sabit olmak üzere

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t) dt \quad (6.4)$$

şeklindedir. Abel problemi, bu denklemin  $\alpha = \frac{1}{2}$  olmak üzere özelleşmiş bir halidir. Denklemdaki  $(x-t)^\alpha$ , kısaca *Abel çekirdeği* olarak adlandırılır.

### 6.2.1 Laplace Dönüşüm Metodu

Laplace dönüşüm metodunu kullanarak, (6.4) denklemini çözmek için, bir önceki (6.3) formülü gibi bir formül geliştirilebilir. Öncelikle (6.4) denkleminin her iki yanına da Laplace dönüşüm metodu uygularsak,

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{u(x)\} \mathcal{L}\{x^{-\alpha}\}$$

denklemini ya da eşit olarak

$$F(s) = U(s) \frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}}$$

bulunur. Bunu denklemini düzenlersek

$$U(s) = \frac{s^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} F(s)$$

olur ve bu denklem,

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} f(t) dt$$

olmak üzere (6.4) yeniden yazılırsa

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \mathcal{L}\{y(x)\}$$

denklemini elde edilir ve

$$\mathcal{L}\{y'(x)\} = s\mathcal{L}\{y(x)\} - y(0)$$

ve

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \mathcal{L}\{y'(x)\}$$

denklemini bulunur ve denklemin her iki tarafına da Laplace ters dönüşümü uygulanırsa

$$u(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (6.5)$$

formülü elde edilir. Daha uygun bir formül elde etmek için (6.5) denkleminin sağ tarafındaki integralde düzenleme yapılırsa

$$u(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left( \frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (6.6)$$

formülüne ulaşılır.

**Örnek 6.2.1.**

$$\frac{128}{231}x^{\frac{11}{4}} = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{4}}} u(t) dt$$

*genelleştirilmiş Abel denklemini çözünüz.*

*Çözüm.*  $f(x) = \frac{128}{231}x^{\frac{11}{4}}$ ,  $\alpha = \frac{1}{4}$  eşitliklerini (6.5) formülünde yerine yazarsak çözüm doğrudan,

$$u(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\frac{128}{231}t^{\frac{11}{4}}}{(x-t)^{\frac{3}{4}}} dt = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dx} \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \pi x^3 \right) = x^2$$

olarak bulunur. □

## 6.3 Ana Genelleştirilmiş Abel Denklemi

Abel denklemlerinde ki  $K(x, t)$  çekirdek fonksiyonu yerine singüler bir çekirdek fonksiyonu genellemesi daha yararlı olabilir ve bu fonksiyonun genel formu,

$$K(x, t) = \frac{1}{[g(x) - g(t)]^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

olarak belirlendiğinde denklem,  $g'(t) \neq 0$  ve  $0 < t < b$  aralığındaki her  $t$  için, monoton artan ve türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{[g(x) - g(t)]^\alpha} u(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (6.7)$$

olarak yazılabilir. (6.7) denklemindeki  $u(x)$  in çözümü,

$$u(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{g'(t)f(t)}{[g(x) - g(t)]^{1-\alpha}} dt \quad (6.8)$$

şeklinde bulunur. Formülü ispatlamak için integrali incelersek [4, 39]

$$\int_0^x \frac{g'(y)f(y)}{[g(x) - g(y)]^{1-\alpha}} dy$$

integralinde (6.7) eşitliği kullanılarak  $f(y)$  yerine yazılıp, düzenlenirse

$$\int_0^x \int_0^y \frac{u(t)g'(y)}{[g(y) - g(t)]^\alpha [g(x) - g(y)]^{1-\alpha}} dt dy$$

ve integraller ayrılırsa

$$\int_0^x u(t) dt \int_0^y \frac{g'(y)}{[g(y) - g(t)]^\alpha [g(x) - g(y)]^{1-\alpha}} dy$$

olur. Bu durumda beta fonksiyonu kullanılırsa

$$\int_0^y \frac{g'(y)}{[g(y) - g(t)]^\alpha [g(x) - g(y)]^{1-\alpha}} dy = \beta(\alpha, 1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}$$

bulunur ve buradan da

$$\int_0^x \frac{g'(y)f(y)}{[g(x) - g(y)]^{1-\alpha}} dy = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \int_0^x u(t) dt \quad (6.9)$$

eşitliği elde edilir ve her iki tarafında türevini alırsak

$$u(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{g'(t)f(t)}{[g(x) - g(t)]^{1-\alpha}} dt, \quad 0 < \alpha < 1$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur. Abel integral denklemi ve Abel genelleştirilmiş integral denklemi de bu denklemin  $g(x) = x$  olmasıyla oluşan özel durumlarıdır.

### Örnek 6.3.1.

$$\frac{4}{3}(\sin x)^{\frac{3}{4}} = \int_0^x \frac{u(t)}{(\sin x - \sin t)^{\frac{1}{4}}} dt \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

*genelleştirilmiş Abel integral denklemini çözünüz.*

*Çözüm.* Yukarıdaki denklemde  $f(x) = \frac{4}{3}(\sin x)^{\frac{3}{4}}$  ve  $\alpha = \frac{1}{4}$  dir ve  $g(x) = \sin x$   $0 < x < \frac{\pi}{2}$  aralığında monoton artan ve aynı aralıkta her  $x$  için  $g'(x) \neq 0$  dir. Koşullar sağlandığına göre çözüme başlayabiliriz.

(6.8) eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\frac{3}{4} \cos t (\sin t)^{\frac{3}{4}}}{(\sin x - \sin t)^{\frac{1}{4}}} dt \\ &= \frac{4}{3\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dx} \left( \frac{3\pi\sqrt{2}}{4} \sin x \right) = \cos x \end{aligned}$$

olarak çözüm bulunur. □

## 6.4 Zayıf Singüler Volterra İntegral Denklemleri

$$\int_0^x \frac{\beta}{\sqrt{x-t}} u(t) dt, \quad x \in [0, T] \quad (6.10)$$

ve  $\beta$  bir sabit olmak üzere

$$f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{[g(x) - g(y)]^\alpha} u(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1, \quad x \in [0, T] \quad (6.11)$$

singüler çekirdeğe sahip bu her iki denklemde zayıf singüler Volterra denklemleridir ve (6.11) *genelleştirilmiş zayıf singüler Volterra denklemi* olarak adlandırılır.

### 6.4.1 Adomian Ayrıştırma Metodu

Daha önce incelediğimiz bu metodu şimdi zayıf singüler Volterra denklemlerini çözmek için kullanacağız. Öncelikle denklemdeki  $u(x)$  fonksiyonun seri açılımını denklemde yerine yazalım.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{[g(x) - g(y)]^\alpha} \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt, \quad 0 < x < 1$$

burada aynı dereceli bileşenlerin katsayıları eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= f(x), \\
u_1(x) &= f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{[g(x) - g(t)]^\alpha} u_0(t) dt \\
u_2(x) &= f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{[g(x) - g(t)]^\alpha} u_1(t) dt \\
&\vdots
\end{aligned}$$

### Değiştirilmiş Adomian Ayrıştırma Metodu

$f(x)$  fonksiyonun; iki ya da daha fazla polinomun birleşimi, trigonometrik fonksiyonlar gibi olması durumunda kullanılır.  $f(x)$  fonksiyonu  $f_1(x)$  ve  $f_2(x)$  şeklinde ayrılmasıyla çözümü kolaylaştırır. Adomian ayrıştırma metodu gibi bileşenlerin seri formunun yazılmasıyla ve daha sonra aynı dereceli terimlerin katsayılarının eşitlenmesiyle çözüme ulaşılır.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = (f_1(x) + f_2(x)) + \int_0^x \frac{\beta}{[g(x) - g(y)]^\alpha} \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt, \quad 0 < x < 1$$

denkleminin çözüm bileşenleri

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= f_1(x), \\
u_1(x) &= f_2(x), \\
u_2(x) &= f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{[g(x) - g(t)]^\alpha} u_1(t) dt \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklindedir.

### Gürültü Terimi

Daha önce de tanımlandığı gibi gürültü terimleri  $u_0(x)$  ve  $u_1(x)$  bileşenlerinde yer alan zıt işaretli identik terimlerdir.  $u(x)$ ' in diğer bileşenleri de farklı gürültü terimlerine sahip olabilir.

### Örnek 6.4.1.

$$u(x) = 1 - 2x - \frac{32}{21}x^{\frac{7}{4}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{4}}} u(t) dt$$

zayıf singüler Volterra integral denkleminin gürültü terimlerini bularak çözüünüz.

Çözüm.  $f(x) = u_0(x)$  olduğundan,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1 - 2x - \frac{32}{21}x^{\frac{7}{4}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} \\ u_1(x) &= - \int_0^x \frac{1 - 2t - \frac{32}{21}t^{\frac{7}{4}} + \frac{4}{3}t^{\frac{3}{4}}}{(x-t)^{\frac{1}{4}}} u(t) dt, \\ &= \frac{32}{21}x^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + \frac{128}{63}x^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{9}x^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Buradan da  $u_0(x)$  ve  $u_1(x)$  bileşenleri arasında zıt işaretli identik terimler yani denklemin gürültü terimleri,  $\mp \frac{32}{21}x^{\frac{7}{4}}$  ve  $\pm \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}$  olarak belirlenir. Gürültü terimlerini dışarıda bıraktığımızda da tam çözüm,

$$u(x) = x^2$$

bulunur. □

## 6.5 Laplace Dönüşüm Metodu

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t) dt, \quad 0 < x < 1 \quad (6.12)$$

Öncelikle (6.12) denkleminin her iki tarafında da Laplace dönüşümü uygularsak,

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\} + \mathcal{L}\{x^{-\alpha}\} \mathcal{L}\{u(x)\}$$

ve buradan da

$$U(s) = F(s) + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}} U(s)$$

bulunur ve bu denklemi düzenlersek

$$U(s) = \frac{s^{1-\alpha} F(s)}{s^{1-\alpha} - \Gamma(1-\alpha)} \quad (6.13)$$

elde edilir.

(6.13) eşitliği, her iki tarafına da ters Laplace dönüşümü uygulandığında  $u(x)$  çözümünün belirlenmesi için kullanılacak formülü verir.

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{1-\alpha} F(s)}{s^{1-\alpha} - \Gamma(1-\alpha)} \right\} \quad (6.14)$$

Dikkat edilirse, zayıf singüler integral denklemlerinin çözümünde kullanılan bu formül sayesinde her bir problemde ayrı ayrı Laplace dönüşümü uygulamak yerine, formül sayesinde problemler daha rahat ve kolay çözümü sağlanabilir.

**Örnek 6.5.1.**

$$u(x) = 1 - 2\sqrt{x} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt$$

*zayıf singüler Volterra integral denklemini Laplace dönüşüm metoduyla çözünüz.*

*Çözüm.* (6.14) formülünü kullanmak için öncelikle

$$F(s) = \frac{1}{s} - 2 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{s} - 2 \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}$$

ve

$$\alpha = \frac{1}{4}$$

belirlenir ve daha sonra formülde yerine konulduğunda

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{s^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}} \right)}{s^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\pi}} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{2} \right)$$

$$u(x) = x$$

tam çözümü bulunur. □



## BÖLÜM 7

### Volterra-Fredholm İntegral Denklemler

Volterra-Fredholm integral denklemleri  $f(x)$  ve  $K(x, t)$  analitik fonksiyonlar olmak üzere, iki ayrı formda

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_0^x K_1(x, t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x, t)u(t)dt \quad (7.1)$$

ya da bu iki formu birleştiren integraller içeren,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \int_a^b K(r, t)u(t)dtdr \quad (7.2)$$

integral denklemlerdir.

Yukarıdaki (7.1) denkleminde birbirinden ayrık Volterra ve Fredholm integralleri kullanılırken, (7.2) denkleminde ise Volterra ve Fredholm integralleri içeren çift katlı bir integral kullanılmıştır. Ayrıca tüm integral denklemlerde olduğu gibi bilinmeyen  $u(x)$  fonksiyonu hem integral işareti altında hem de dışında yer alıyorsa *ikinci tip*, eğer sadece integral işareti altında yer alıyorsa *birinci tip* olarak adlandırılır.

$$u(x) = 6x + 3x^2 + 2 - \int_0^x xu(t)dt - \int_0^1 tu(t)dt,$$
$$u(x) = x + \frac{17}{2}x^2 - \int_0^x \int_0^1 (r-t)u(t)drdt.$$

Çözümü için Taylor serisi metoduyla Adomian ayrıştırma metodunu birleştirip, gürültü terimi ve değiştirilmiş ayrıştırma metodundan da yararlanılmaktadır.

#### 7.0.1 Seri Çözümü Metodu

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K_1(x, t)u(t)dt + \int_a^b K_2(x, t)u(t)dt$$

denkleminde  $u(x)$  analitik, her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon ve  $T(f(x))$  fonksiyonu  $f(x)$  fonksiyonunun Taylor açılımı

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

olmak üzere yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = T(f(x)) + \int_0^x K_1(x, t) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt + \int_a^b K_2(x, t) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt$$

ve eşit olarak

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots &= T(f(x)) + \int_0^x K_1(x, t)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt \\ &+ \int_a^b K_2(x, t)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt \end{aligned}$$

yazılabilir. Daha sonrasında aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitlenerek  $a_0, a_1, a_2, \dots$  terimlerini bulunur ve böylece çözüme ulaşılır.

### Örnek 7.0.2.

$$u(x) = -5 - x + 12x^2 - x^3 - x^4 + \int_0^x (x-t)u(t)dt + \int_0^1 (x+t)u(t)dt$$

*Volterra-Fredholm integral denklemini seri çözümü metoduyla çözüünüz.*

*Çözüm.* Öncelikle

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

seri açılımını soruda yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= -5 - x + 12x^2 - x^3 - x^4 + \int_0^x \left( (x-t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \\ &+ \int_0^1 \left( (x+t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \end{aligned}$$

bulunur ve eşitliğin sağ tarafındaki integraller çözümlenip her iki taraftaki aynı dereceli terimlerin katsayıları belirlenir

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots &= -5 + \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{5}a_3 + \frac{1}{6}a_4 \\ &+ \left( -1 + a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{5}a_4 \right) x \\ &+ \left( 12 + \frac{1}{2}a_0 \right) x^2 + \left( -1 + \frac{1}{6}a_1 \right) x^3 \\ &+ \left( -1 + \frac{1}{12}a_2 \right) x^4 + \dots \end{aligned}$$

ve katsayılar eşitlenirse

$$a_0 = 0, a_1 = 6,$$

$$a_2 = 12, a_3 = a_4 = a_5 = \dots = 0$$

bulunur. Denklemden yerine yazıldığında da

$$u(x) = 6x + 12x^2$$

çözümü elde edilir. □

## 7.0.2 Adomian Ayrıştırma Metodu

Adomian ayrıştırma metodunu daha önce Fredholm ve Volterra integral denklemlerin çözümünde incelemiştik. Aynı çözüm algoritması Volterra-Fredholm integral denklemlerin çözümü için de kullanılmaktadır.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

eşitliği ana denklemden yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \int_0^x K_1(x, t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt + \int_a^b K_2(x, t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt$$

$u_0(x)$  yani sıfırıncı bileşen, integral işareti altında olmayan tüm terimler olarak tanımlandığından,

$$u_0(x) = f(x),$$

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x K_1(x, t) u_n(t) dt + \int_a^b K_2(x, t) u_n(t) dt, \quad n \geq 0$$

olur. Buradan diğer bileşenler bulunup, tüm bileşenler birbiriyle toplanarak çözüme ulaşılır.

### Örnek 7.0.3.

$$u(x) = \cos x - \sin x - 2 + \int_0^x u(t) dt - \int_0^{\pi} (x - t) u(t) dt$$

*Volterra-Fredholm integral denklemini değiştirilmiş Adomian ayrıştırma metodu kullanarak çözüünüz.*

Çözüm.

$$\begin{aligned}u_0(x) &= \cos x, \\u_1(x) &= -\sin x - 2 + \int_0^x u_0(t)dt - \int_0^\pi (x-t)u_0(t)dt \\&= -\sin x - 2 + \int_0^x \cos tdt - \int_0^\pi (x-t)\cos tdt \\&= -\sin x - 2 + \sin x + 2 = 0\end{aligned}$$

bu durumda geriye kalan tüm bileşenler de 0 olacağı için tam çözüm,

$$u(x) = \cos x$$

olarak bulunur. □

## 7.1 Karışık Volterra-Fredholm İntegral Denklemler

$f(x)$  ve  $K(x, t)$  analitik fonksiyonlar olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \int_a^b K(r, t)u(t)dtdr$$

formunda denklemlerdir.

### 7.1.1 Seri Çözümü Metodu

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \int_a^b K(r, t)u(t)dtdr$$

denkleminde  $u(x)$  analitik, her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon ve  $T(f(x))$  fonksiyonu  $f(x)$  fonksiyonunun Taylor açılımı

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

olmak üzere yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = T(f(x)) + \int_0^x \int_a^b K(r, t) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dtdr$$

ve eşit olarak

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = T(f(x)) + \int_0^x \int_a^b K(r, t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dtdr$$

bulunur ve buradan aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitlenirse, çözüme ulaşılır.

### Örnek 7.1.1.

$$u(x) = 11x + \frac{17}{2}x^2 + \int_0^x \int_0^1 (r-t)u(t)dt dr$$

*karışık Volterra-Fredholm integral denklemini Taylor seri çözümü metodu kullanarak çözüünüz.*

*Çözüm.* Öncelikle denklemdede,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

seri açılımını yerine yazarsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 11x + \frac{17}{2}x^2 + \int_0^x \int_0^1 \left( (r-t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt dr$$

olur ve burada sağ taraftaki integraller çözümlenip aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitlenirse

$$a_0 = 0, a_1 = 6,$$

$$a_2 = 12, a_3 = a_4 = a_5 = \dots = 0$$

bulunur ve buradan tam çözüm

$$u(x) = 6x + 12x^2$$

olarak belirlenir. □

### 7.1.2 Adomian Ayrıştırma Metodu

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

eşitliği ana denklemdede yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \int_0^x \int_a^b K(r,t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt dr$$

$u_0(x)$  yani sıfıncı bileşen, integral işareti altında olmayan tüm terimler olarak tanımlandığından,

$$u_0(x) = f(x),$$

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x \int_a^b K(r,t) u_n(t) dt dr, \quad n \geq 0$$

olur. Buradan diğer bileşenler bulunup, tüm bileşenler birbiriyle toplanarak çözüme ulaşılır.

**Örnek 7.1.2.**

$$u(x) = xe^x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x \int_0^1 ru(t)dt dr$$

*karışık Volterra-Fredholm integral denklemini Adomian ayrıştırma metoduyla çözünüz.*

*Çözüm.*

$$u(x) = xe^x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x \int_0^1 ru(t)dt dr$$

denkleminde integral işareti altında olmayan tüm terimler  $u_0(x)$  olarak tanımlandığından

$$u_0(x) = xe^x - \frac{1}{2}x^2,$$
$$u_{k+1}(x) = \int_0^x \int_0^1 ru_k(t)dt dr, \quad k \geq 0$$

buradan

$$u_0(x) = xe^x - \frac{1}{2}x^2,$$
$$u_1(x) = \int_0^x \int_0^1 ru_0(t)dt dr = \frac{5}{12}x^2,$$
$$u_2(x) = \int_0^x \int_0^1 ru_1(t)dt dr = \frac{5}{72}x^2,$$
$$u_3(x) = \int_0^x \int_0^1 ru_2(t)dt dr = \frac{5}{432}x^2,$$
$$\vdots$$

bulunur ve

$$u(x) = xe^x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{12}x^2 \left( 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \dots \right)$$
$$= xe^x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{12}x^2 \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} \right)$$
$$= xe^x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 = xe^x$$

çözümü bulunur. □

## BÖLÜM 8

### Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler

Bu denklemlerin iki türü vardır. İlki aynı isimli Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemler

$$u^{(k)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_0^x K_1(x, t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x, t)u(t)dt,$$

ve ikincisi karışık Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemler,

$$u^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \int_a^b K(r, t)u(t)dtdr$$

dir.

### 8.1 Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler

#### 8.1.1 Seri Çözümü Metodu

$$u'(x) = f(x) + \lambda_1 \int_0^x K_1(x, t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x, t)u(t)dt$$

denkleminde  $u(x)$  analitik, her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon ve  $T(f(x))$  fonksiyonu  $f(x)$  fonksiyonunun Taylor açılımı

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

olmak üzere yerine yazılırsa,

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^{(k)} = T(f(x)) + \int_0^x K_1(x, t) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt + \int_a^b K_2(x, t) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt$$

ve eşit olarak

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)^{(k)} &= T(f(x)) \\ &+ \int_0^x K_1(x, t)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)dt \\ &+ \int_a^b K_2(x, t)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)dt \end{aligned}$$

yazılabilir. Daha sonrasında aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitlenerek  $a_0, a_1, a_2, \dots$  terimlerini bulunur ve böylece çözüme ulaşılır.

### Örnek 8.1.1.

$$u'(x) = 11 + 17x - 2x^3 - 3x^4 + \int_0^x tu(t) + \int_0^1 (x-t)u(t)dt, u(0) = 0$$

*Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemini seri çözümü metoduyla çözünüz.*

*Çözüm.*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

serisi soru denkleminde yerine yazılır ve  $a_0 = 0$  başlangıç koşulu yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n \right)' &= 11 + 17x - 2x^3 - 3x^4 + \int_0^x \left( t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \\ &+ \int_0^1 \left( (x-t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right)^{(k)} dt \end{aligned}$$

gerekli integraller çözülür ve aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitlenirse,

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 6, \quad a_2 = 12, \quad a_j = 0, \quad j \geq 3$$

bulunur ve burada bulunan katsayılar seride yerine yazılırsa,

$$u(x) = 6x + 12x^2$$

tam çözümü bulunur. □

## 8.2 Karışık Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler

### 8.2.1 Doğrudan Hesaplama Yöntemi

Standart  $i$ .nci mertebe karışık Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin formu;  $f(x)$ ,  $K(r, t)$  analitik fonksiyonlar ve  $u^{(i)}(x) = \frac{d^i u}{dx^i}$  olmak üzere



aşağıdaki gibidir:

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \int_a^b K(r, t)u(t)dt dr. \quad (8.1)$$

Bu metodun kullanılması için en önemli faktör çekirdek fonksiyonunun *ayrıştırılabilir çekirdek*,

$$K(r, t) = g(r)h(t) \quad (8.2)$$

veya *fark çekirdeği*

$$K(r, t) = K(r - t) = g(r) - h(t) \quad (8.3)$$

olmasıdır. Bu durumda çözüm için (8.2) veya (8.3), (8.1) denkleminde

$$\alpha = \int_a^b u(t)dt, \quad \beta = \int_a^b h(t)u(t)dt,$$

olmak üzere yerine yazılırsa,

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x \beta g(r)dr$$

veya

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x (\alpha g(r) - \beta)dr$$

denklemleri elde edilir böylece  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonu  $i$  kere 0 dan  $x$  e integre edilir ve  $\alpha$  ile  $\beta$  sabitleri kullanılırsa, tam çözüm elde edilir. Bu yöntemin bir diğer özelliği de her zaman tam çözüm bulunmasıdır.

### Örnek 8.2.1.

$$u'(x) = e^x(1+x) - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x \int_0^1 ru(t)dt dr, \quad u(0) = 0$$

*karışık Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemini doğrudan hesaplama yöntemiyle çözünüz.*

*Çözüm.*

$$\alpha = \int_0^1 u(t)dt \quad (8.4)$$

olmak üzere denklem yeniden yazılırsa,

$$u'(x) = e^x(1+x) - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x \alpha r dr, \quad u(0) = 0$$

olur ve denklemin her iki tarafı da bir kez 0 dan  $x$  e integre edilirse,

$$u(x) = xe^x + \frac{\alpha - 1}{6}x^3 \quad (8.5)$$

bulunur. (8.4) de  $u(x)$  yerine yazılırsa,

$$\alpha = \int_0^1 te^t + \frac{\alpha - 1}{6}t^3 dt$$

elde edilir ve buradan

$$\alpha = 1$$

bulunur. Tam çözümlü bulmak için (8.5) eşitliğinde  $\alpha$  yerine yazılırsa,

$$u(x) = xe^x$$

tam çözümlü elde edilir.

□

## BÖLÜM 9

### Volterra İntegral Denklem Sistemleri

Bilinmeyen  $u(x), v(x)$  gibi fonksiyonların sadece integral işareti altında yer aldığı birinci tip,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_0^x (K_1(x, t)u(t) + \widetilde{K}_1(x, t)v(t) + \cdots) dt, \\ f_2(x) &= \int_0^x (K_2(x, t)u(t) + \widetilde{K}_2(x, t)v(t) + \cdots) dt, \\ &\vdots \end{aligned}$$

ve hem integral işareti altında hem de dışında yer aldığı ikinci tip,

$$\begin{aligned} u(x) &= f_1(x) + \int_0^x (K_1(x, t)u(t) + \widetilde{K}_1(x, t)v(t) + \cdots) dt, \\ v(x) &= f_2(x) + \int_0^x (K_2(x, t)u(t) + \widetilde{K}_2(x, t)v(t) + \cdots) dt, \\ &\vdots \end{aligned}$$

olmak üzere iki çeşit Volterra integral denklem sistemi vardır.

## 9.1 İkinci Tip Volterra İntegral Denklem Sistemleri

### 9.1.1 Adomian Ayrıştırma Metodu

Örnek 9.1.1.

$$\begin{aligned} u(x) &= x - \frac{1}{6}x^4 + \int_0^x ((x-t)^2u(t) + (x-t)v(t))dt, \\ v(x) &= x^2 - \frac{1}{12}x^5 + \int_0^x ((x-t)^3u(t) + (x-t)^2v(t))dt \end{aligned}$$

Volterra integral denklem sistemini Adomian ayrıştırma metodu kullanarak çözüünüz.

Çözüm.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$$

serilerini soruda yerine yazarsak,

$$u(x) = x - \frac{1}{6}x^4 + \int_0^x \left( (x-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) + (x-t) \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \right) dt,$$

$$v(x) = x^2 - \frac{1}{12}x^5 + \int_0^x \left( (x-t)^3 \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) + (x-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \right) dt$$

olur.  $u_0(x)$  ve  $v_0(x)$  integral işareti altında kalmayan tüm terimler olarak tanımlanır ve Adomian ayrıştırma metodunu takip edersek

$$u(x) = x - \frac{1}{6}x^4,$$

$$u_{k+1}(x) = \int_0^x ((x-t)^2 u_k(t) + (x-t)v_k(t)) dt, k \geq 0,$$

$$v(x) = x^2 - \frac{1}{12}x^5,$$

$$v_{k+1}(x) = \int_0^x ((x-t)^3 u_k(t) + (x-t)^2 v_k(t)) dt, k \geq 0.$$

bulunur. Bileşenleri yerine yazarsak,

$$u_0(x) = x - \frac{1}{6}x^4, \quad u_1(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{280}x^7,$$

$$v_0(x) = x^2 - \frac{1}{12}x^5, \quad v_1(x) = \frac{1}{12}x^5 - \frac{11}{10080}x^8.$$

elde edilir.  $u_0(x)$  ve  $u_1(x)$  bileşenleri arasında  $\mp \frac{1}{6}x^4$ ,  $v_0(x)$  ve  $v_1(x)$  bileşenleri arasında da  $\mp \frac{1}{12}x^5$  gürültü terimleri bulunmaktadır. Tüm bileşenlerde gürültü terimlerini göz ardı edersek tam çözüm,

$$(u(x), v(x)) = (x, x^2)$$

olarak bulunur.

□

## 9.1.2 Laplace Dönüşüm Metodu

**Örnek 9.1.2.**

$$u(x) = 1 - x^2 + x^3 + \int_0^x ((x-t)u(t) + (x-t)v(t)) dt,$$

$$v(x) = 1 - x^3 - \frac{1}{10}x^5 + \int_0^x ((x-t)u(t) - (x-t)v(t)) dt$$

Volterra integral denklem sistemini Laplace dönüşüm metodu kullanarak çözüünüz.

Çözüm.  $K_1(x-t) = K_2(x-t) = x-t$  fark çekirdekleri olmak üzere,

$$\begin{aligned}u(x) &= 1 - x^2 + x^3 + \int_0^x ((x-t)u(t) + (x-t)v(t))dt, \\v(x) &= 1 - x^3 - \frac{1}{10}x^5 + \int_0^x ((x-t)u(t) - (x-t)v(t))dt\end{aligned}$$

denklemlerinin her iki tarafına da Laplace dönüşümü uygularsak

$$\begin{aligned}U(x) &= \mathcal{L}\{u(x)\} = \mathcal{L}\{1 - x^2 + x^3\} + \mathcal{L}\{(x-t) * u(x) + (x-t) * v(x)\} \\V(x) &= \mathcal{L}\{v(x)\} = \mathcal{L}\left\{1 - x^3 - \frac{1}{10}x^5\right\} + \mathcal{L}\{(x-t) * u(x) - (x-t) * v(x)\}\end{aligned}$$

olur ve dönüşümleri yaparsak

$$\begin{aligned}U(s) &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s^2}U(s) + \frac{1}{s^2}V(s), \\V(s) &= \frac{1}{s} - \frac{6}{s^4} - \frac{12}{s^6} + \frac{1}{s^2}U(s) - \frac{1}{s^2}V(s),\end{aligned}$$

ve eşit olarak

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{s^2}\right)U(s) - \frac{1}{s^2}V(s) &= +\frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^4}, \\ \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)V(s) - \frac{1}{s^2}U(s) &= \frac{1}{s} - \frac{6}{s^4} - \frac{12}{s^6}\end{aligned}$$

yazarız ve bu iki değişkenli denklem sistemini çözersek,

$$\begin{aligned}U(s) &= \frac{1}{s} + \frac{3!}{s^4}, \\V(s) &= \frac{1}{s} - \frac{3!}{s^4}\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir ve eşitliklerin her iki tarafına da ters Laplace dönüşümü uygularsak tam çözüm,

$$(u(x), v(x)) = (1 + x^2, 1 - x^3)$$

olarak bulunur.

□

## 9.2 Birinci Tip Volterra İntegral Denklem Sistemleri

### 9.2.1 Laplace Dönüşüm Metodu

Örnek 9.2.1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4 &= \int_0^x ((x-t-1)u(t) + (x-t+1)v(t))dt, \\ \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 &= \int_0^x ((x-t+1)u(t) + (x-t-1)v(t))dt\end{aligned}$$

Volterra integral denklem sistemini Laplace dönüşüm metodu kullanarak çözüünüz.

Çözüm.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4 &= \int_0^x ((x-t-1)u(t) + (x-t+1)v(t))dt, \\ \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 &= \int_0^x ((x-t+1)u(t) + (x-t-1)v(t))dt\end{aligned}$$

denklemlerinin her iki tarafına da Laplace dönüşümü uygularsak

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4\right\} &= \mathcal{L}\{(x-t-1) * u(x) + (x-t+1) * v(x)\}, \\ \mathcal{L}\left\{\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4\right\} &= \mathcal{L}\{(x-t+1) * u(x) + (x-t-1) * v(x)\}\end{aligned}$$

olur ve dönüşümleri yaparsak,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)U(s) + \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)V(s) &= \frac{1}{s^3} + \frac{3}{s^4} + \frac{2}{s^5}, \\ \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)U(s) + \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)V(s) &= \frac{3}{s^3} - \frac{1}{s^4} + \frac{2}{s^5}\end{aligned}$$

elde edilir ve bu iki bilinmeyenli denklem sistemini çözersek,

$$U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}, \quad V(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^3}$$

eşitlikleri elde edilir ve eşitliklerin her iki tarafına da ters Laplace dönüşümü uygularsak tam çözüm,

$$(u(x), v(x)) = (1 + x, 1 + x^2)$$

olarak bulunur. □

## 9.3 Volterra İntegro-Diferansiyel Denklem Sistemleri

### 9.3.1 Laplace Dönüşüm Metodu

Örnek 9.3.1.

$$\begin{aligned}u'(x) &= 2x^2 + \int_0^x ((x-t)u(t) + (x-t)v(t))dt, \quad u(0) = 1, \\v'(x) &= -3x^2 - \frac{1}{10}x^5 + \int_0^x ((x-t)u(t) - (x-t)v(t))dt, \quad v(0) = 1\end{aligned}$$

Volterra integro-diferansiyel denklem sistemini Laplace dönüşüm metodu kullanarak çözüünüz.

Çözüm.  $K_1(x-t) = K_2(x-t) = x-t$  fark çekirdekleri olduğu ve

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(x)\} &= s\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0), \\ \mathcal{L}\{f''(x)\} &= s^2\mathcal{L}\{f(x)\} - sf(0) - f'(0), \\ \mathcal{L}\{f'''(x)\} &= s^3\mathcal{L}\{f(x)\} - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)\end{aligned}$$

eşitlikleri göz önünde bulundurularak,

$$\begin{aligned}u'(x) &= 2x^2 + \int_0^x ((x-t)u(t) + (x-t)v(t))dt, \quad u(0) = 1, \\v'(x) &= -3x^2 - \frac{1}{10}x^5 + \int_0^x ((x-t)u(t) - (x-t)v(t))dt, \quad v(0) = 1\end{aligned}$$

denklemlerinde Laplace dönüşümü yaparsak,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u'(x)\} &= \mathcal{L}\{2x^2\} + \mathcal{L}\{(x-t) * u(t) + (x-t) * v(t)\}, \\ \mathcal{L}\{v'(x)\} &= \mathcal{L}\left\{-3x^2 - \frac{1}{10}x^5\right\} + \mathcal{L}\{(x-t) * u(t) - (x-t) * v(t)\}\end{aligned}$$

olur ve dönüşümleri yaparsak,

$$\begin{aligned}\left(s - \frac{1}{s^2}\right)U(s) - \frac{1}{s^2}V(s) &= 1 + \frac{4}{s^3}, \\ \left(s + \frac{1}{s^2}\right)V(s) - \frac{1}{s^2}U(s) &= 1 - \frac{6}{s^3} - \frac{12}{s^6}\end{aligned}$$

elde edilir ve bu iki bilinmeyenli denklem sistemini çözersek,

$$U(s) = \frac{1}{s} + \frac{3!}{s^4}, \quad V(s) = \frac{1}{s} - \frac{3!}{s^4}$$

eşitlikleri elde edilir ve eşitliklerin her iki tarafına da ters Laplace dönüşümü uygularsak tam çözüm,

$$(u(x), v(x)) = (1 + x^3, 1 - x^3)$$

olarak bulunur.

□





## BÖLÜM 10

### Fredholm İntegral Denklem Sistemleri

Bilinmeyen  $u(x), v(x)$  gibi fonksiyonların sadece integral işareti altında yer aldığı birinci tip,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_a^b (K_1(x, t)u(t) + \widetilde{K}_1(x, t)v(t) + \dots) dt, \\ f_2(x) &= \int_a^b (K_2(x, t)u(t) + \widetilde{K}_2(x, t)v(t) + \dots) dt, \\ &\vdots \end{aligned}$$

ve bilinmeyen  $u(x), v(x)$  gibi fonksiyonların hem integral işareti altında hem de dışında yer aldığı ikinci tip,

$$\begin{aligned} u(x) &= f_1(x) + \int_a^b (K_1(x, t)u(t) + \widetilde{K}_1(x, t)v(t) + \dots) dt, \\ v(x) &= f_2(x) + \int_a^b (K_2(x, t)u(t) + \widetilde{K}_2(x, t)v(t) + \dots) dt, \\ &\vdots \end{aligned}$$

olmak üzere iki çeşit Fredholm integral denklem sistemi vardır.

## 10.1 Fredholm İntegral Denklem Sistemleri

### 10.1.1 Adomian Ayrıştırma Metodu

**Örnek 10.1.1.**

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin x - 2 - 2x - \pi x + \int_0^\pi ((1 + xt)u(t) + (1 - xt)v(t))dt, \\ v(x) &= \cos x - 2 - 2x + \pi x + \int_0^\pi ((1 - xt)u(t) - (1 + xt)v(t))dt \end{aligned}$$

Fredholm integral denklem sistemini Adomian ayrıştırma metodu kullanarak çözünüz.

Çözüm.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x), \quad n \geq 0$$

serilerini soruda yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) &= \sin x - 2 - 2x - \pi x + \int_0^{\pi} \left( (1+xt) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) + (1-xt) \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \right) dt, \\ \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) &= \cos x - 2 - 2x + \pi x + \int_0^{\pi} \left( (1-xt) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) - (1+xt) \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \right) dt \end{aligned}$$

olur. Bu soru için değiştirilmiş Adomian ayrıştırma metodunu takip edersek,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sin x - 2, \\ v_0(x) &= \cos x - 2, \\ u_1(x) &= -2x - \pi x + \int_0^{\pi} ((1+xt)u_0(t) + (1-xt)v_0(t))dt, \\ v_1(x) &= -2x + \pi x + \int_0^{\pi} ((1-xt)u_0(t) - (1+xt)v_0(t))dt, \\ u_{k+1}(x) &= \int_0^{\pi} ((1+xt)u_k(t) + (1-xt)v_k(t))dt, \quad k \geq 1, \\ v_{k+1}(x) &= \int_0^{\pi} ((1-xt)u_k(t) - (1+xt)v_k(t))dt, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

bulunur. Bileşenleri yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sin x - 2, & u_1(x) &= 2 - 4\pi, \\ v_0(x) &= \cos x - 2, & v_1(x) &= 2 + 2\pi^2 x \end{aligned}$$

elde edilir.  $u_0(x)$  ve  $u_1(x)$  bileşenleri arasında  $\mp 2$ ,  $v_0(x)$  ve  $v_1(x)$  bileşenleri arasında da  $\mp 2$  gürültü terimlei bulunmaktadır. Tüm bileşenlerde gürültü terimlerini göz ardı edersek tam çözüm,

$$(u(x), v(x)) = (\sin x, \cos x)$$

olarak bulunur. □

## 10.1.2 Doğrudan Hesaplama Yöntemi

**Örnek 10.1.2.**

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin x + \cos x - 4x + \int_0^{\pi} (xu(t) + xv(t))dt, \\ v(x) &= \sin x - \cos x + \int_0^{\pi} (u(t) - v(t))dt \end{aligned}$$

Fredholm integral denklem sistemini doğrudan hesaplama metodu kullanarak çözüünüz.

Çözüm.

$$\alpha = \int_0^\pi (u(t) + v(t))dt, \quad \beta = \int_0^\pi (u(t) - v(t))dt \quad (10.1)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin x + \cos x + (\alpha - 4)x, \\ v(x) &= \sin x - \cos x + \beta \end{aligned} \quad (10.2)$$

şeklinde yeniden yazarsak ve  $\alpha$  ve  $\beta$  bulmak için (10.2) eşitliklerinden yararlanarak (10.1) integrallerini çözersek,

$$\begin{aligned} \alpha &= (4 - 2\pi^2) + \frac{\pi^2}{2}\alpha + \pi\beta, \\ \beta &= -2\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\alpha - \pi\beta \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\alpha = 4, \quad \beta = 0$$

bulunur. Bulunan  $\alpha$  ve  $\beta$  değerleri (10.1) eşitliklerinde yerine yazıldığında,

$$(u(x), v(x)) = (\sin x + \cos x, \sin x - \cos x)$$

tam çözümü elde edilir. □

## 10.2 Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklem Sistemleri

### 10.2.1 Doğrudan Hesaplama Metodu

**Örnek 10.2.1.**

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sin x + x \cos x + (2 - \pi^2) + \int_0^\pi (tu(t) - v(t))dt, \quad u(0) = 0, \\ v'(x) &= \cos x - x \sin x - 3\pi + \int_0^\pi (u(t) - tv(t))dt, \quad v(0) = 0 \end{aligned}$$

Fredholm integro-diferansiyel denklem sistemini doğrudan hesaplama metodu kullanarak çözüünüz.

*Çözüm.*

$$\alpha = \int_0^\pi (tu(t) - v(t))dt, \quad \beta = \int_0^\pi (u(t) - tv(t))dt \quad (10.3)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sin x + x \cos x + (2 - \pi^2 + \alpha), \\ v'(x) &= \cos x - x \sin x + (\beta - 3\pi) \end{aligned} \quad (10.4)$$

yeniden yazılır ve (10.4) eşitliklerinin her iki tarafını da 0'dan  $x$ 'e integre edersek,

$$\begin{aligned} u(x) &= x \sin x + (2 - \pi^2 + \alpha)x, \\ v(x) &= x \cos x + (\beta - 3\pi)x \end{aligned} \quad (10.5)$$

eşitlikleri elde edilir.  $\alpha$  ve  $\beta$  bulmak için (10.5) eşitliklerinden yararlanarak (10.3) integrallerini çözersek,

$$\alpha = \pi^2 - 2, \quad \beta = 3\pi$$

bulunur. Bulunan  $\alpha$  ve  $\beta$  değerleri (10.5) eşitliklerinde yerine yazıldığında,

$$(u(x), v(x)) = (x \sin x, x \cos x)$$

tam çözümü elde edilir. □

## KAYNAKLAR

- [1] C.D. Green, *Integral Equations Methods* (New York: Barnes and Noble, 1969).
- [2] H. Hochstadt, *Integral Equations* (New York: Wiley, 1973).
- [3] A. Jerri, *Introduction to Integral Equations with Applications* (New York: Wiley, 1999).
- [4] R. Kanwal, *Linear Integral Equations* (Boston: Birkhauser, 1997).
- [5] R. Krees, *Linear Integral Equations* (Berlin: Springer, 1999).
- [6] A.M. Wazwaz, *A First Course in Integral Equations* (Singapore: World Scientific, 1997).
- [7] K. Maleknejad ve Y. Mahmoudi, "Taylor polynomial solution of highorder non-linear Volterra-Fredholm integro-diferansiyel equations," *Appl. Math. Comput.* 145(2003): 641-653.
- [8] A.M. Wazwaz, "A reliable treatment for mixed Volterra-Fredholm integral equations," *Appl. Math. Comput.* 127(2002): 405-414.
- [9] M. Bocher, *Integral Equations* (London: Cambridge University Press, 1974).
- [10] P. Linz, *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations* (Philadelphia: SIAM, 1985).
- [11] B.L. Moiseiwitsch, *Integral Equations* (London and New York: Longman, 1977).
- [12] D. Porter ve D.S. Stirling, *Integral Equations: A Practical Treatment from Spectral Theory to Applications* (Cambridge, 2004).

- [13] G. Adomian, *Solving Frontier Problems of Physics, The Decomposition Method* (Boston: Kluwer, 1994).
- [14] G. Adomian ve R. Rach, "Noise terms in decomposition series solution," *Comput. Math. Appl.* 24(1992): 61-64.
- [15] A.M. Wazwaz, *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory* (Beijing and Berlin: HEP and Springer, 2009).
- [16] A.M. Wazwaz, "A reliable modification of the Adomian decomposition method," *Appl. Math. Comput.* 102(1999): 77-86.
- [17] A.M. Wazwaz, "Necessary conditions for the appearance of noise terms in decomposition solution series," *Appl. Math. Comput.* 81(1997): 265-274
- [18] J.H. He, "Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations," *International Journal of Modern Physics B* 20(2006): 1141-1199.
- [19] J.H. He, "Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems," *Appl. Math. Comput.* 114(2/3) (2000): 115-123.
- [20] W.V. Lovitt, *Linear Integral Equations* (New York: Dover, 1950).
- [21] G. Adomian, "A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equation," *Math. Comput. Modelling* 13(1992): 17-43.
- [22] A.M. Wazwaz, "Necessary conditions for the appearance of noise terms in decomposition solution series," *Appl. Math. Comput.* 81(1997): 199-204.
- [23] J. Hadamard *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations* (New Haven: Yale University Press, 1923).
- [24] J.H. He, "Homotopy perturbation technique," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 178(1999): 257-262.
- [25] D.L. Phillips, "A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind," *J. Assoc. Comput. Mach* 9(1962): 84-96.

- [26] A.N. Tikhonov, "On the solution of incorrectly posed problem and the method of regularization," *Soviet Math* 4(1963): 1035-1038.
- [27] R.F. Churchhouse, *Handbook of Applicable Mathematics* (New York: Wiley, 1981).
- [28] Y. Cherruault and V. Seng, "The resolution of non-linear integral equations of the first kind using the decomposition method of Adomian," *Kybernetes* 26(1997): 109-206.
- [29] H.T. Davis, *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations* (New York: Dover, 1962).
- [30] R.P. Kanwal, *Linear Integral Equations* (Boston: Birkhauser, 1997).
- [31] G. Micula ve P. Pavel, *Differential and Integral Equations through Practical Problems and Exercises* (Boston: Kluwer, 1992).
- [32] J.H. He "Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems," *Appl. Math. Comput.* 114(2/3) (2000): 115-123.
- [33] L.G. Chambers, *Integral Equations, A Short Course* (London: International Textbook Company, 1976).
- [34] V. Volterra, *Theory of Functionals of Integral and Integro-Differential Equations* (New York: Dover, 1959).
- [35] G. Adomian, *Nonlinear Stochastic Operator Equations* (San Diego: Academic Press, 1986).
- [36] A.M. Wazwaz, "The variational iteration method; a reliable tool for solving linear and nonlinear wave equations," *Comput. Math. Appl.* 54(2007): 926-932.
- [37] P. Linz, "A simple approximation method for solving Volterra integro-differential equations of the first kind," *J. Inst. Math. Appl.* 14(1974): 211-215.

- [38] P. Linz, *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations* (Philadelphia: SIAM, 1985).
- [39] I.N. Sneddon, *Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory* (New York: Wiley, 1966).
- [40] M.Masujima, *Applied Mathematical Methods in Theoretical Physics* (Wienhiem: Wiley, 2005).
- [41] A.M. Wazwaz, *Linear and Nonlinear Integral Equations, Methods and Applications* (Chicago: Saint Xavier University, 2011).

