

T.C.
İSTANBUL GELİŞİM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜPERİLETKEN KUBİTLİ
KUANTUM BİLGİSAYARLAR
VE KUANTUM HESAPLAMA

HÜSEYİN ULUCAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MEKATRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF.DR.EKREM YANMAZ

İSTANBUL, 2017

Hüseyin ULUCAN tarafından hazırlanan "Süperiletken Kubitli Kuantum Bilgisayarlar ve Kuantum Hesaplama " adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile İstanbul Gelişim Üniversitesi Mekatronik Mühendisliği Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof.Dr.Ekrem YANMAZ

Mekatronik Mühendisliği.İstanbul Gelişim Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Başkan : Prof.Dr.Lütfü ARDA

Mekatronik Mühendisliği.Bahçeşehir Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Üye : Yrd.Doç.Dr. E.Eray AKKAYA

Mekatronik Mühendisliği.İstanbul Gelişim Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Tez Savunma Tarihi: 19/06/2017

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

İstanbul Gelişim Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarımı kabullendiğimi beyan ederim.

Hüseyin ULUCAN

19/06/2017

SÜPERİLETKEN KUBİTLİ KUANTUM BİLGİSAYARLAR VE KUANTUM HESAPLAMA

(Yüksek Lisans Tezi)

Hüseyin ULUCAN

GELİŞİM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2017

ÖZET

Bu çalışmada, henüz çok yeni bir kavram olan ve bilgisayar bilimini kökten değiştirebilme potansiyeline sahip süperiletken tabanlı kuantum bilgisayarları ve kuantum devre hesaplamaları incelenmiştir. Kuantum hesaplama algoritmaları ve süperiletken kubit uygulamaları hakkında literatür taraması yapılmış, ilgili matematiksel notasyon hakkında ayrıntılı bilgi verilmiştir. Süper iletken devre elemanların temel elemanı olan josephson eklemi incelenmiştir. Süperiletken Kuantum girişim devresi incelenerek, Çoklu girişim devresi için Akı ve akım ilişkisi ilk kez bu çalışmada yapılmıştır. Süperiletken kubitlerden oluşan devrelerin analizi için Hamilton- lagranage mekaniği ,Yük kubitleri üzerinde uygulanarak devrenin hamiltonyeni çıkarılmıştır. Akı ve Faz kubitleri hakkında bilgi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Kuantum hesaplama, Kuantum bilgisayar, Süperiletkenlik, Josephson eklemi, Kubitler,
Sayfa Adeti : 78
Danışman : Prof. Dr.Ekrem YANMAZ

SUPERCONDUCTING QUBIT QUANTUM COMPUTERS AND QUANTUM
COMPUTTING

(M.Sc.Thesis)

Hüseyin ULUCAN

GELİŞİM UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2017

ABSTRACT

In this study, superconductivity based quantum computers and quantum circuit calculations, which are a very new concept and have the potential to fundamentally change computer science, have been investigated. Quantum computation algorithms and superconducting qubit applications have been reviewed and detailed information about the mathematical notation has been given. Josephson joint, which is the basic element of superconducting circuit elements, is investigated. By examining the superconducting quantum interference circuit, the flux and current relation for the multi-interference circuit is made for the first time in this study. The Hamilton-Lagrangian mechanics for the analysis of the circuits consisting of superconducting qubits was applied on the load qubit to remove the hamiltonian of the circuit. Information about flux and phase qubits is given.

Key Words : Quantum computing, Quantum computer, Süperconductivty, Josephson junction, Qubits,
Page Numbers : 78
Süpervisor : Prof. Dr.Ekrem YANMAZ

TEŞEKKÜR

Bu Tez alıőmasında değerli grüş ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam ve danıőmanım Mekatronik mhendisliği Bölüm Baőkanı Sayın Prof. Dr. Ekrem YANMAZ'a en içten saygı ve teőekkürlerimi sunarım. Ayrıca her zaman Destekleri ile yanımda olan değerli eőim NAZ'a ve Kızlarım Ay ıőıęım ELİF ve Gün ıőıęım İREM'e, gösterdikleri sabır ve anlayıőları için minnetlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR	xi
1 GİRİŞ	1
2 KLASİK BİLGİ İŞLEM	2
2.1 Klasik Bilgi	2
2.2 Klasik Mantık Kapılar	2
3 KUANTUM MEKANİĞİNİN VARSAYIMLARI VE MATEMATİKSEL ALT YAPISI	4
3.1 Klasik Mekanik	4
3.2 Kuantum Mekanği	6
3.2.1 Kuantum mekanğin kısa tarihi	6
3.2.2 Dirac gösterimi ve lineer cebir	7
3.2.3 Lineer cebir	7
3.2.4 Pauli spin matrisleri ve işlemcileri	12
3.3 Kuantum Mekanğinin Varsayımları	13
3.3.1 İşlemciler	14
3.3.2 Durum ve Durum Uzayı	14
3.3.3 Gözlenebilirler	15
3.3.4 Dinamik	15
3.3.5 Ölçüm	16
3.3.6 Birleşik sistemler	17

4	KUANTUM HESAPLAMA	18
4.1	Kubitler	19
4.1.1	Çoklu kubitler	20
5	KUANTUM KAPILARI VE KUANTUM DEVRE UYGULAMALARI	22
5.1	Kuantum Kapıları	22
5.2	Kuantum Hesaplama Uygulamaları	27
5.2.1	Kuantum dolaşıklık	27
5.2.2	Bell durumları	28
6	KUANTUM ALGORİTMALARI	31
6.1	Deutsch Algoritması	32
6.2	Shore Algoritması	34
6.3	Grove Algoritması	35
7	KUANTUM BİLGİSAYAR MİMARİSİ	36
7.1	DiVincenzo Kriterleri	36
7.2	Kuantum Bilgisayarlarının Gerçekleştirildiği Sistemler	36
7.2.1	Fotonik tabanlı kuantum bilgisayar	37
7.2.2	İyon kapanlama sistemli kuantum bilgisayarı	37
7.2.3	Nükleer manyetik rezonans (NMR) sistemli kuantum bilgisayarlar	37
7.2.4	Süperiletken sistemli kuantum bilgisayarlar	37
8	SÜPERİLETKENLİK VE SÜPERİLETKEN KUBİTLER	38
8.1	Süperiletkenlik	38
8.1.1	Süperiletken bir halkada akı kuantumlanması	40
8.1.2	Josephson eklemi	43
8.1.3	DC (doğru akım) Josephson etkisi	43
8.1.4	AC (alternatif akım) Josephson etkisi	45
8.1.5	Makroskopik kuantum girişimi	46
8.2	Süperiletken Kubitler	47
8.2.1	LC - Devresinde Lagrange-Hamilton sistemi	49
8.2.2	Cooper çifti kutusu / Yük kubitleri	51

8.2.3	Flux/ Akı kubitleri	52
8.2.4	Faz kubitleri	53
9	ÇOKLU KUANTUM GİRİŞİM DEVRESİNİN İNCELENMESİ	54
10	SONUÇ VE ÖNERİLER	57
	KAYNAKLAR	58
	ÖZGEÇMİŞ	62



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
2.1 Temel Mantık Kapıları	3
2.2 NOR, NAND ve XOR mantık kapıları	3
4.1 Bloch Küresi	20
5.1 CNOT kapısı	25
5.2 SWAP kapısı	27
5.3 Bell durumlarını üreten kuantum devresi	30
6.1 Deutsch Algoritması devresi	32
8.1 Süperiletkenlik bölgesi	39
8.2 Süperiletken malzemenin içinde bulunduğu manyetik alanı dışlaması .	39
8.3 Elektronların normal iletkenler içerisinde hareketi ve Cooper çiftlerinin süperiletken malzeme içerisindeki hareketi	40
8.4 Bir manyetik alan içindeki süperiletken halka	42
8.5 Josephson Ekleme	43
8.6 kuantum girişim devresi	47
8.7 Josephson eklemi ve Eşdeğer devresi	48
8.8 Klasik kütle- yay harmonik hareketi	49
8.9 LC Devresi	50
8.10 Mekanik ve elektrik sistemlerin değişken dönüşüm tablosu	50
8.11 Cooper çifti kutusu/ yük kubitleri	51
8.12 Akı kubitleri	53
8.13 Faz kubitleri	53
9.1 çoklu girişim devresi- iki akı	54

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
\hbar	Planck sabiti
H	Hamiltoniyen
A	Operatör
A_{nm}	Matris gösterimi
$\langle A \rangle$	A'nın beklenen değeri
Ψ	Dalga fonksiyonu
σ_x	Pauli-X matrisi
σ_y	Pauli-Y matrisi
σ_z	Pauli-Z matrisi
J	Akım yoğunluğu
J_c	Kritik Akım yoğunluğu
H_c	Kritik magnetik alan
T_c	Kritik sıcaklık
$\langle \cdot $	bra
$ \cdot \rangle$	ket
$ \beta_{xy}\rangle$	bell durumları
\otimes	tansör çarpımı
ω	faz açısı
∇	Nabla operatörü
c	ışık hızı
e	Elektrik yükü

Kısaltmalar	Açıklamalar
OR	VEYA kapısı
AND	VE kapısı
NOT	DEĞİL kapısı

1. GİRİŞ

Modern dünyasının önemli teknolojik başarılarından biri olan bilgisayar bilimi artan bir hızla gelişmektedir. Bilgisayarın işlem kapasitesinin artması ve bununla ters orantılı şekilde küçülen donanım mimarisi bazı teknik sorunları da beraberinde getirmektedir. Ortaya çıkan bu sorun, bilgi işlem uzmanlarını mikro dünyayı tanımlayan kuantum mekaniği üzerinde düşünmeye sevk etmiştir.

Bilindiği gibi klasik bilgisayarların mimarisinin en önemli parçası olan mikro işlemcilerin boyutları günden güne küçülmekte ve cm^2 başına bir milyar devre ve daha fazlası sığdırılmaya çalışılmaktadır. Nanometre mertebelerine doğru gitmekte olan bilgisayar mimarisi mikro dünyada alışık olmadığı kuantum doğa fenomenleri ile karşılaşmaktadır. Örneğin Tünelleme olayı, Belirsizlik olayı, Ölçme olayı gibi. Bu sorunlarla karşılaşılması ve çıkan sorunların çözümü için bilgisayar mimarisinin tasarımı ilkelerinin yeniden gözden geçirilmesi gerekmektedir. Bu gözden geçirme süreçlerinde göz önünde bulundurulacak önemli kavramlardan biride şüphesiz kuantum mekaniği kanunları olacaktır.

Teorik olarak kuantum bilgisayarların öngörüsü 1980 yılının başlarında yapılmıştır. Ama o yıllarda yapılan öngörülerin kaynağı kuantum mekaniği fenomenlerinin, klasik bilgisayarlarda simülasyonunun etkin şekilde yapılabileceği üzerineydi. Kuantum sistemlerinin evrimini simule edebilmek için klasik bilgisayarların yetersizliği anlaşılmış ve çözüm olarak kuantum mekaniği ilkelerine göre çalışan bir bilgisayarın zaruretiydi.

Klasik Bilgisayar bilimi iki ana yapı üzerine inşa edilmiştir. Bunlar Donanım ve Yazılımdır. Donanım ölçeğinin nanometre düzeylere doğru gitmesi sonucu karşılaşılabilecek kuantum mekaniği kanunları, ister istemez yazılım yapısını da kuantum mekaniği prensiplerine göre kendini yapılandırmıştır. Dolayısıyla ortaya, Kuantum hesaplama, Kuantum Algoritmaları ve Kuantum kodlama kavramları çıkmıştır.

Kuantum mekaniği, Klasik fizikten tamamen farklı olduğundan bir kuantum bilgisayarıda, Klasik bilgisayarlardan hem donanım hemde yazılım açısından farklı olacaktır. Kuantum bilgisayarları, Kubit adı verilen yapılar üzerinde tasarlanmaya çalışılır. Bunlar klasik bilgisayardaki bitlerin kuantum eşdeğerleri olarak düşünülebilir.

2. KLASİK BİLGİ İŞLEM

2.1. Klasik Bilgi

Claude Shannon'un temel bilgi birimi olarak 'bit' leri tanımlaması bilgi teorisinin temelini oluşturmuştur.[9]

Bilgi, ikili sayı sistemindeki bitlere karşılık gelen '0' ve '1' lere çevrilebilen her türlü veri olarak tanımlanabilir.

2.2. Klasik Mantık Kapılar

Klasik Bilgisayarlarda işlemler, temel işlem basamaklarına bölünerek yapılır. Bu temel işlem basamakları mantık kapıları olarak adlandırılır.

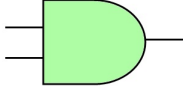
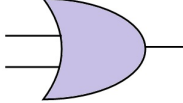
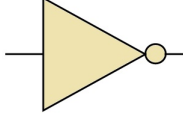
Mantık kapıları, bitleri bir durumdan alıp başka bir duruma götüren mantıksal işlemlerdir.

Temel mantık kapıları $NOT(değil)$, $AND(ve)$ ve $OR(veya)$ mantık kapılarıdır.

AND ve OR mantık kapıları 2 bitlik girişe ve tek bitlik çıkışa sahip, tersinir olmayan mantık kapılarıdır.

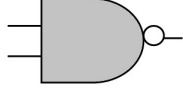
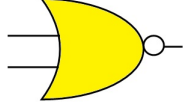

NOT mantık kapısı ise tek bitlik giriş ve çıkışa sahip tersinir bir mantık kapısıdır. Mantık kapılarının etkisi doğruluk çizelgesi ile açıklanabilir. Bu mantık kapılarının devre sembolleri ve doğruluk çizelgeleri (Şekil 2.1) de verilmiştir.

Bu temel mantık kapıları ile daha karmaşık mantık kapıları yapılabilir. Bunlar, $NOR(NOT - OR)$, $NAND(NOT - AND)$ ve $XOR(exclusive - OR)$ mantık kapıları olarak örneklendirilebilir. Bu mantık kapılarından XOR mantık kapısı koşullu bir NOT kapısıdır ve kontrollü bir mantık kapısı şeklindedir. Burada ilk bit kontrol bit, ikinci bit hedef bit olarak işlem görür ve kontrol bit '1' durumunda iken hedef bite NOT kapısı uygulanmakta, '0' durumunda iken ise hiçbir işlem uygulanmamaktadır. Öte yandan NOR ve NAND mantık kapılarının uygun bir şekilde birleştirilmesiyle istenen herhangi bir mantıksal işlem inşa edilebilir. Bu yüzden bu mantık kapılarına evrensel mantık kapıları denilir. Evrensel mantık kapıları tersinir değildir. Bunların her bir işlemi $kT \ln 2$ kadar enerji kaybına neden olmakta ve entropiyi arttırmaktadır. Basit mantık kapılarının birleşmesinden oluşan mantık kapıları ve doğruluk çizelgeleri

Mantık Kapısı	Devre Sembolü	Doğruluk Tablosu	
		Girdi	Çıktı
AND VE		10	0
		11	1
		01	0
		00	0
OR VEYA		10	1
		11	1
		01	1
		00	0
NOT DEĞİL		1	0
		0	1

Şekil 2.1: Temel Mantık Kapıları

(Şekil 2.2) de verilmiştir.

Mantık Kapısı	Devre Sembolü	Doğruluk Tablosu	
		Girdi	Çıktı
NAND VE DEĞİL		00	1
		01	1
		10	1
		11	0
NOR VEYA DEĞİL		00	1
		01	0
		10	0
		11	0
XOR ÖZEL VEYA		00	0
		01	1
		10	1
		11	0

Şekil 2.2: NOR, NAND ve XOR mantık kapıları

3. KUANTUM MEKANİĞİNİN VARSAYIMLARI VE MATEMATİKSEL ALT YAPISI

Kuantum bilgisayarların temelinde kuantum mekaniğinin kurallarına dayanan kuantum hesaplama mantığı yatmaktadır. Dolayısıyla kuantum bilgisayarların çalışma mantığının anlaşılması için kuantum mekaniğinin temel kavramlarının ve varsayımlarının bilinmesi gerekmektedir.

Bu bölümde kuantum hesaplamaların temeli olan kuantum mekaniğinin varsayımları, Temel kavramları (Durum, Gözlenebilir, Dinamik, Ölçüm, Bileşke sistemler) hakkında özet şeklinde bahsedilecektir.

3.1. Klasik Mekanik

Klasik mekanikte sistemlerin durumunu belirlemek ve dinamiğini tanımlamak için iki farklı yöntem uygulanır. Bunlar, Kuvvete kavramına dayalı Newton mekaniği ve Enerji kavramına dayalı Hamilton-Lagrange mekaniğidir.[6]

Klasik mekaniğin Newton yaklaşımında bir notkanın üç boyutlu uzayda ve herhangi bir t anındaki durumu, parçacığın o anda ki $\vec{x}_i(t)$; $i = x, y, z$ konum vektörleri ve o andaki $\dot{x}_i = d\vec{x}_i/dt$ hız vektörlerinin verilmesiyle tam olarak belirlenir. Sistemin zamanla evrimi ise

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\dot{\vec{v}} \quad (3.1)$$

Newtonun ikinci denklemi ile belirlenir.

Tek bir parçacıktan oluşan basit bir sistem yerine daha karmaşık bir sistem, Mesela N sayıda parçacıktan oluşan bir sistemin durumu tespit edilmek istenirse, o zaman sistemi oluşturan parçacıkların her biri için tek tek yazılan hareket denklemleri çözülerek sistemin durumu tespit edilmeye çalışılır. Bu durumda sisteme ait her parçacığa etki eden \vec{F}_i bileşke kuvvetleri belirlenerek sistemin zamanla gelişimi Denklem (3.2) de verilen dinamik fonksiyonu kullanılarak belirlenmeye çalışılır.

$$\vec{F}_i = \frac{d(m_i\vec{v}_i)}{dt} = m_i\dot{\vec{v}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.2)$$

Denklem (3.2) yardımıyla, önce parçacıkların \ddot{x}_i ivmeleri, bundan yararlanarak da \dot{x}_i hızları ve daha sonrada x_i konumları zamana bağlı olarak bulunabilir. Eğer her bir parçacığın belirlenmiş bir başlangıç anındaki konum ve hızları biliniyorsa, Denklem 3.2 integre edilerek parçacıkların daha sonraki herhangi bir andaki konum ve hızları da tam olarak belirlenmiş olur.

Klasik mekanikte Newtonun kuvvete dayanan yönteminden farklı olarak, Enerji kavramına dayanan Hamilton yöntemi vardır.

Hamilton yönteminde faz uzayı kavramı önemli bir yer tutar. Bu uzay n serbestlik dereceli bir parçacıklar sisteminin durumlarının uzayı;

$$q = (q_1, \dots, q_n), \quad p = (p_1, \dots, p_n)$$

genelleştirilmiş q_j ($j = 1, 2, \dots, n$), koordinat ve p_j momentumlarının oluşturduğu $2n$ boyutlu klasik faz uzayıdır. Sistemle ilgili fiziksel gözlenebilirler, faz uzayı üzerinde tanımlı konum, momentum ve zaman parametresine bağlı, gerçel (reel) değerli tüm fonksiyonlardır. Bunlara klasik gözlenebilirlerde denir.

Hamilton yönteminde sistemin zamanla gelişimi, onu tanımlayan dinamik denklemlerin çözülmesi ile bulunan faz uzayında bir $\gamma(t)$ egrisidir. Buna sistemin gelişim egrisi denir. Bu eğrinin bir $\gamma(t) = (q(t), p(t))$ noktası sistemin o t anındaki fiziksel durumunu tam olarak belir. Böyle bir $(q(t), p(t))$ durumu verildiğinde, her fiziksel gözlenebilirin de o durumdaki değeri tam olarak belirlenmiş olur. Yani faz uzayında bir nokta sistemin bir durumuna karşılık gelir.

Klasik mekaniğin Hamilton formülasyonunda temel ilke, başlangıçta tüm sistemi temsil eden ve Hamilton fonksiyonu olarak adlandırılan $H(q, p, t)$ skaler fonksiyonun belirlenmesidir. Faz uzayında tanımlı bir klasik gözlenebilir olan bu fonksiyon, tüm serbestlik dereceleri için söz konusu olan kinetik ve potansiyel enerji fonksiyonlarının toplamıdır. ($H = T + V$)

Hamilton fonksiyonu, tek tek tüm genelleştirilmiş koordinat ve momentumlar için $2n$ tane

$$\dot{q}_i = \frac{dH}{dp_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{dH}{dq_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.3)$$

hareket denklemleri yazılarak belirlenir. Bu denklemlerin de verilen $2n$ tane başlangıç koşulu altında çözümlenmesi yapılır.

3.2. Kuantum Mekanği

3.2.1 Kuantum mekanğinin kısa tarihi

20. yüzyılın başlarında Klasik fiziğın bir takım deneysel çalışmalar sonucu bazı doğa olaylarını açıklama da yetersiz kalması (Siyah cisim ışması,Fotoelektrik olayı gibi), bilim insanlarını yeni teorik modeller arayışına itmıştır.Bu doğa olayların açıklaması için yapılan çalışmaların sonunda kuantum mekanığı denilen yeni bir fizik dalı ortaya çıkmıştır.

Bu fizik dalının ortaya çıkmasında etkin olaylardan birincisi ‘Siyah Cisim Işıması’dır. Yirminci yüzyılın başında alman teorik fizikçi Max Planck, atomlardan yayılan radyasyonun sürekli olmadığını ve kesikli (kuantumlu) şekilde olduğunu ifade etmiştir. Yayının frekansı ν değerinde olan bir radyasyonun atomlara aktardığı enerjin miktarının $h\nu$ ’nün tam katları şeklinde olacağını öne sürdü ($E = nh\nu$). Burada ki h sembolü Planck sabitini, E sembolüde enerjiyi göstermektedir ve n sayısında, $n = 1, 2, 3, \dots$ değerlerini alır. $h\nu$ değerine, kuantum enerji birimi denir.

Kuantum mekanığinin gelişmesine yardımcı olan bir başka olay ise, Albert Einstein’in açıkladığı fotoelektrik olaydır. ilk defa hertz tarafından bulunan, Metal üzerine gönderilen ışık ışınlarının yüzeyden elektron koparmasının gizemi, Einsteinin ışığın bir dalga değil de, kuantum enerji paketleri şeklindeki tanecikler olduğunu ileri sürmesiyle açıklığa kavuşmuştur.

Fransız fizikçi de Broglie tarafından öne sürülen maddelerinde dalgalısal özelliğı olabileceğı fikri, kuantum mekanığinin gelişmesinde önemli bir yer tutar. 1926 yılında iki deneysel fizikçi Davisson ve Germer, de broglie nin teorik olarak öne sürdüğü varsayımını, nikel kristalini kullanarak yaptıkları elektron saçılma deneylerinde, saçılan elektronların dalgalısal özellikler gösterdiğini buldular.

Daha sonra E.Schrödinger, kendi adıyla bilinen dalga denklemini öne sürdü. Bu denklemin çözümü sonunda bulunan ve Ψ sembolü ile gösterilen dalga fonksiyonu ile taneciğın belli bir andaki durumu belirlenebiliyordu. Böylelikle dalga, parçacık ikilemini sona erdirdi.

1927 yılında Werner Heisenberg, Bir parçacığın konumu ile momentumu aynı anda ölçülemez şeklinde ifade edilen ‘Belirsizlik İlkesi’ni ortaya attı.

3.2.2 Dirac gösterimi ve lineer cebir

Kuantum mekaniğinin temel matematiğinin alt yapısını sağlayan lineer cebir, vektör uzayları ve bu uzaylar arası lineer işlemlerle ilgilenir. Vektörlerin temsili için kullanılan matematiksel gösterimlerden biride dirac gösterimidir. Dirac gösterimi bra $\langle \dots |$, ket $|\dots\rangle$ ve braket $\langle \dots | \dots \rangle$ şeklinde yapılır.

Bir kuantum durumu $|\psi\rangle = (\alpha, \beta)$ veya Dirac gösterimiyle aşağıdaki gibidir

$$|\psi\rangle = \alpha |x\rangle + \beta |y\rangle \quad (3.4)$$

Denkelem (3.4) deki α ve β sayıları , karmaşık sayılar kümesine ait birer sayıdırlar.

Bra, Ket'in karmaşık eşleniğini temsil eder. Eğer $|\psi\rangle$ sütun vektörü $|\psi\rangle = (\alpha, \beta)^T$ şeklinde yazılıyorsa bunun satır vektörü $\langle\psi| = (\alpha^*, \beta^*)$ olup, Burada $\langle\psi|$, $|\psi\rangle$ 'nin karmaşık eşleniğidir. Dirac gösterimiyle,

$$\langle\psi| = \alpha^* \langle x| + \beta^* \langle y| \quad (3.5)$$

şeklinde verilir. Bra ve ket'lerin Dirac gösteriminde yazılma sebeplerinden birisi, kuantum mekaniğinde bir $|\psi\rangle$ vektörü ile başka bir $|\phi\rangle$ vektörün karmaşık eşleniğinin çarpımına ihtiyaç duyulmasıdır. $\langle\phi|\psi\rangle$ değerine 'iç çarpım' denir.

Bra ve ket'ler aynı zamanda matrislerle de temsil edilebilir. Bir A matrisi,

$$A = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Dirac gösteriminde bra ve ketlerin dış çarpımı $(|\dots\rangle \langle \dots|)$ aşağıdaki gibidir:

$$A = a_{xx} |x\rangle \langle x| + a_{xy} |x\rangle \langle y| + a_{yx} |y\rangle \langle x| + a_{yy} |y\rangle \langle y| \quad (3.7)$$

3.2.3 Lineer cebir

Lineer cebirin temel objeleri olan vektör uzayları n-boyutlu karmaşık uzay, C^n 'de tanımlı (Z_1, \dots, Z_n) karmaşık sayılarıdır. Bu vektör uzayların elemanları vektörler olup,

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

şeklinde sütun matrisleriyle temsil edilir. Vektörleri temsilen genel gösterim $|\psi\rangle$ şeklindeki dirac gösterimidir.

$|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_i\rangle$ vektör kümesi tarafından gerilen bir vektör uzayındaki herhangi bir $|v\rangle$ vektörü bu küme elemanlarının lineer toplamı olarak

$$|v\rangle = \sum_i a_i |v_i\rangle \quad (3.9)$$

şeklinde yazılabilir. Bu şekilde yazılmış sıfırdan farklı bir vektör kümesi $a_i \neq 0$ olmak üzere;

$$a_1 |v_1\rangle + a_2 |v_2\rangle + \dots + a_i |v_i\rangle = 0 \quad (3.10)$$

eşitliğini sağlayan a_1, a_2, \dots, a_i karmaşık sayıları bulunuyorsa bu küme lineer bağımlıdır, bulunmuyorsa lineer bağımsızdır denir. Bir vektör uzayındaki lineer bağımsız vektörlerin maksimum sayısı o vektör uzayının boyutunu verir.[7]

Lineer işlemciler ve matrisler

Bir lineer işlemci herhangi bir V vektör uzayında tanımlı bir vektörü aynı veya farklı bir vektör uzayına taşır. Herhangi bir A işlemcisi,

$$A\left(\sum_i a_i |v_i\rangle\right) = \sum_i a_i A(|v_i\rangle) \quad (3.11)$$

ifadesini sağlıyorsa lineer bir işlemcidir ve bu işlemci $A : V \rightarrow V$ şeklinde tanımlıdır.

Lineer işlemciler matris temsilleriyle çok daha yaygın bir şekilde kullanılmakta ve tanımlanmaktadır. Bunun için vektörlerin iç çarpımı tanımlanmalıdır. İç çarpım, girdi olarak $|v\rangle, |m\rangle$ gibi iki vektörü alarak çıktı olarak bir karmaşık sayı veren fonksiyon olarak tanımlanmaktadır. İç çarpım için standart gösterim, $(|v\rangle, |m\rangle)$ veya $\langle v | m \rangle$ şeklindedir. Burada $\langle v |$ vektörüne bra veya $|v\rangle$ vektörüne göre dual vektör denilmektedir. İç çarpımın sırasıyla

$$\langle v | \sum_i \lambda_i |m_i\rangle = \lambda_i \langle v | m \rangle, \quad \langle v | m \rangle = \langle m | v \rangle^* \quad \text{ve} \quad \langle v | v \rangle = 0 \quad (3.12)$$

denklemlerinden görüleceği gibi lineerlik, simetri ve sıfırdan büyük olma özellikleri vardır. Buna göre C^n uzayında bir iç çarpım,

$$((y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n)) = \sum_i y_i^* z_i = (y_1^*, \dots, y_n^*) \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlanabilir. İki vektörün iç çarpımı sıfırsa bu iki vektör ortogonal ya da diktir denilir. Bir vektörün kendisiyle iç çarpımının kareköküne ise o vektörün boyu ya da normu denilir. Bir $|v\rangle$ vektörünün normu,

$$||v\rangle| = \sqrt{\langle v|v\rangle} \quad (3.14)$$

şeklindedir. Bir vektörün $|v'\rangle = |v\rangle / ||v\rangle|$ şeklinde normuna bölümüne o vektörün normalize edilmesi denir. Normalize bir vektörün boyu $||v\rangle| = 1$ 'dir ve buna birim vektör denilir. Her biri birim vektör olan $|i\rangle$ vektörler kümesindeki her bir vektör $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ şeklinde bir diğerine dikse bu vektörler kümesi *ortonormal*dir denir. Diğer yandan vektörlerin dış çarpım gösterimi de tamlık bağıntısı denen yararlı bir aracı ortaya çıkarır. Yine V vektör uzayındaki ortonormal bir baz $|i\rangle$ şeklinde ve bu durumda herhangi bir vektörde,

$$|v\rangle = \sum_i v_i |i\rangle \quad (3.15)$$

şeklinde tanımlansın. Burada $v_i = \langle i|v\rangle$ karmaşık katsayılarıdır.

Buna göre $\sum_i |i\rangle \langle i|$ şeklinde tanımlı bir dış çarpım $|v\rangle$ vektörüne

$$\left(\sum_i |i\rangle \langle i|\right) |v\rangle = \sum_i |i\rangle \langle i|v\rangle = \sum_i v_i |i\rangle = |v\rangle$$

şeklinde uygulandığında yine aynı vektörün elde edildiği görülüyor. Bu durumda tüm bazlar üzerinden toplamı alınmış dış çarpım ifadesi,

$$\sum_i |i\rangle \langle i| = I \quad (3.16)$$

şeklinde birim işlemciye eşit olmalıdır. Son eşitlik tamlık bağıntısı olarak bilinmektedir. Bu bağıntının yararını daha iyi anlamak için $A : V \rightarrow W$ şeklinde tanımlı bir A işlemcisine uygulanırsa işlemcisinin

$$A = \sum_i |m_i\rangle \langle m_i| A |v_i\rangle \langle v_i| = \sum_i \langle m_i| A |v_i\rangle |m_i\rangle \langle v_i| \quad (3.17)$$

şeklinde dış çarpım temsili elde edilmiş olur. Burada $|v_i\rangle$ ve $|m_i\rangle$ ortonormal bazlardır. Son eşitlikte $\langle m_i|v_i\rangle$ iç çarpımı, $|v_i\rangle$ ve $|m_i\rangle$ bazlarına göre A işlemcisinin i . sütun ve j . satır matris elemanını temsil etmektedir. Buna göre A işlemcisinin vektör uzayını geren $|v_i\rangle$ vektörleri bazında matris temsili,

$$A = \begin{pmatrix} \langle v_1 | A | v_1 \rangle & \langle v_1 | A | v_2 \rangle & \dots & \langle v_1 | A | v_n \rangle \\ \langle v_2 | A | v_1 \rangle & \langle v_2 | A | v_2 \rangle & \dots & \langle v_2 | A | v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n | A | v_1 \rangle & \langle v_n | A | v_2 \rangle & \dots & \langle v_n | A | v_n \rangle \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

şeklindedir.

Bir lineer A işlemcisinin özvektörü, a karmaşık bir sayı olmak üzere

$$A |v\rangle = a |v\rangle \quad (3.19)$$

denklemini sağlayan $|v\rangle$ vektörüdür. Burada a sayısına A işlemcisinin $|v\rangle$ özvektörüne karşılık gelen özdeğeri denilir. İşlemcilerin matris temsillerinden özdeğer ve özvektörler

$$\det|A - \lambda I| = 0 \quad (3.20)$$

şeklindeki karakteristik denklem çözümlerinden bulunur. V vektör uzayında tanımlı bir A işlemcisi için köşegen temsil $|i\rangle$, λ_i özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özvektörler seti olmak üzere

$$A = \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| \quad (3.21)$$

şeklinde ifade edilir. Eğer bir işlemci köşegen bir temsile sahipse bu işlemci köşegenleştirilebilir denilir.

$A : C^n \rightarrow C^n$ 'e tanımlı bir A lineer işlemcisinin adjointi yada hermitik eşleniği A^\dagger ;

$$\langle m | A | v \rangle = \langle v | A^\dagger | m \rangle^* \quad (3.22)$$

eşitliğini sağlamaktadır. Burada $|v\rangle, |m\rangle \in C^n$ şeklindedir.

Buna göre bir A lineer işlemcisinin matris temsili için $(A^\dagger)_{jk} = A^*_{kj}$ geçerlidir. Diğer bir deyişle bir matrisin adjointi, transpozunun ve elemanlarının karmaşık eşleniğinin alınmasıyla elde edilir. Karmaşık uzayda tanımlı lineer işlemciler için $z \in C^n$ olmak üzere

$$(zA)^\dagger = z^* A^\dagger, \quad (A + B)^\dagger = (A)^\dagger + (B)^\dagger, \quad (AB)^\dagger = (B)^\dagger (A)^\dagger$$

eşitlikleri geçerlidir. Bir işlemcinin adjointi,

$$(A)^\dagger = A$$

şeklinde kendisine eşitse hermitik bir işlemcidir denilir. Diğer bir özel tanımlı işlemci normal işlemcidir. Bir A işlemcisi,

$$AA^\dagger = A^\dagger A$$

Tensör çarpımı

Tensör çarpımı vektör uzaylarından daha büyük vektör uzayları elde etmek için kullanılır. Boyutları $m \times n$ ve $p \times q$ olan herhangi iki A , B matrisinin tensör çarpımı $A \otimes B$ olarak gösterilir

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \dots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \dots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1}B & A_{n2}B & \dots & A_{nn}B \end{pmatrix}_{mp} \quad (3.23)$$

şeklinde $(nq \times mp)$ boyutlarında bir matris oluşur. Herhangi iki $|i\rangle, |j\rangle$ ortonormal baz vektörü sırasıyla V ve W gibi iki vektör uzayında tanımlı ise $|i\rangle \otimes |j\rangle$ de $V \otimes W$ vektör uzayında tanımlıdır. Genellikle $|i\rangle \otimes |j\rangle$ yerine $|i\rangle |j\rangle$ veya $|ij\rangle$ gösterimleri de kullanılmaktadır. Bu bazlar kullanılarak tensör çarpımı ile ilgili bazı özellikler aşağıdaki denklemler

$$\begin{aligned} c(|i\rangle \otimes |j\rangle) &= (c|i\rangle \otimes |j\rangle)(|i\rangle \otimes c|j\rangle) \\ (|i\rangle + |k\rangle) \otimes |j\rangle &= |i\rangle \otimes |j\rangle + |k\rangle \otimes |j\rangle \\ |i\rangle \otimes (|j\rangle + |k\rangle) &= |i\rangle \otimes |j\rangle + |i\rangle \otimes |k\rangle \end{aligned} \quad (3.24)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada c sabit bir sayıdır.

Lineer işlemcilerin $V \otimes W$ uzayına etkisi ise

$$(A \otimes B)(|i\rangle \otimes |j\rangle) = A|i\rangle \otimes B|j\rangle$$

şeklinde ifade dileyebilir. Burada A ve B sırasıyla V ve W vektör uzaylarında tanımlı lineer işlemcilerdir.

Matrisin izi

Diğer bir önemli matris özelliği de iz kavramıdır. Bir A matrisinin izi

$$\text{iz}(A) = \sum_i A_{ii} \quad (3.25)$$

şeklinde köşegen elemanların toplamıdır. Ayrıca iz özelliğinin $\text{iz}(AB) = \text{iz}(BA)$ ve $\text{iz}(A + B) = \text{iz}(A) + \text{iz}(B)$ şeklinde döngü ve lineer özellikleri de vardır. Yine herhangi iki işlemcinin matris temsili için $\text{iz}(AB) = \text{iz}(A)\text{iz}(B)$ şeklinde yazılabilir.

Komütasyon

İşlemcilerle ilgili diğer bir özellik komütasyon bağıntılarıdır. A ve B gibi iki işlemci arasındaki komütasyon bağıntısı

$$[A, B] = AB - BA \quad (3.26)$$

şeklinde ifade edilir ve $[A, B] = 0$ ise A ve B işlemcileri komüte ediyor denilir. Herhangi iki işlemci komüte ediyorsa bu iki işlemcinin de köşegen olduğu bir ortonormal baz bulunmaktadır. Bu durumda bu iki işlemci aynı anda köşegenleştirilebilir denilir.[27]

3.2.4 Pauli spin matrisleri ve işlemcileri

Kuantum hesaplamada son derece yararlı matris temsillerine sahip işlemciler spin matrisleri olarak bilinen Pauli matrisleridir. Kuantum hesaplamalarda sıkça kullanılan ve birimsel matrisler olan Pauli matrislerinin gösterimleri ve temsilleri

$$\sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$\sigma_x = X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$\sigma_y = Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$$\sigma_z = Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

şeklinde ifade edilir. Pauli matrisleri komüte etmezler. Pauli matrislerinin sağladığı komütasyon bağıntılarından bazıları

$$[X, Y] = 2iZ \quad , \quad [Y, Z] = 2iX \quad , \quad [Z, X] = 2iY \quad (3.31)$$

şeklinindedir. Bu eşitliklerden yola çıkarak Pauli matrislerinin komütasyon bağıntıları daha genel ve uygun biçimde

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} \sigma_l \quad (3.32)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ϵ_{jkl} , Levi-civita tensörü olup $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$ ve $\epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1$ olup bunların dışındaki durumlar için $\epsilon_{jkl} = 0$ 'dır.

3.3. Kuantum Mekanikinin Varsayımları

Kuantum mekaniğinde bir sistemin durumu ve bu sisteme ilişkin gözlenebilirleri, üzerinde bir iç çarpımın tanımlı olduğu, sonlu ya da sonsuz boyutlu bir kompleks vektor uzayı olan Hilbert (H) uzayında tanımlanır.

Hilbert uzayında vektörler, Dirac notasyonu kullanılarak $|\psi\rangle$ ketleri ve vektör eşlenikleride $\langle\psi|$ şekline de bra'lar ile gösterilir. İki vektörün iç çarpımı da $\langle\phi|\psi\rangle$ şeklinde gösterilir. Genel olarak iç çarpımın sonucu bir kompleks sayıdır ve iç çarpımın kompleks eşleniği,

$$\langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle \quad (3.33)$$

bağıntısını sağlar.

Sıfırdan farklı iki vektörün iç çarpımları sıfır ise bu iki vektöre dik (ortogonal) vektörler ve bir vektörün kendisi ile iç çarpımına onun normu (boyu) denir. Bir $|\psi\rangle$ vektörünün normu

$$\| |\psi\rangle \|^2 = \langle\psi|\psi\rangle \quad (3.34)$$

şeklinde tanımlanır. Vektörün normu bir reel sayıdır ve daima sıfırdan büyüktür. Normu bir olan vektörlere de normalize edilmiş vektörler denir.

3.3.1 İşlemciler

Hilbert uzayı üzerinde tanımlı bir lineer dönüşüme İşlemci (operatör) denir. Bir \hat{A} işlemcisinin, iki vektörün $\alpha|\psi\rangle + \beta|\psi\rangle$ şeklinde gösterilen lineer bileşimine etkimesi,

$$\hat{A}(\alpha|\psi\rangle + \beta|\psi\rangle) = \alpha\hat{A}|\psi\rangle + \beta\hat{A}|\psi\rangle \quad (3.35)$$

şeklinde olur.

Özetle, işlemciler Hilbert uzayındaki herhangi bir vektöre uygulandığında, onu yine Hilbert uzayında ki başka bir vektöre dönüştüren matematiksel nesnelere denir.

Her işlemcinin kendine özgü olan özdeğerleri ve özvektörleri vardır. Bir \hat{A} işlemcisinin bir $|\psi\rangle$ vektörüne etkisi; bir sabit kere aynı vektör ise,

$$\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \quad (3.36)$$

λ sabitine \hat{A} işlemcisinin bir özdeğeri ve sıfırdan farklı olduğu varsayılan $|\psi\rangle$ vektörüne de, bu özdeğere karşılık gelen \hat{A} işlemcisinin özvektörü denir. Bir işlemcinin bütün özdeğerlerinin kümesine de onun spektrumu denir.

Kuantum mekaniği açısından önemli bir işlemci sınıfı, her $|\psi\rangle$ ve $|\phi\rangle$ vektör çifti için,

$$\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle^* = \langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle \quad (3.37)$$

bağıntısı sağlanacak şekilde tanımlanan Hermitsel işlemcilerdir. Bu tür işlemcilerin özdeğerleri reeldir ve farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise birbirine diktir. [6] [7]

3.3.2 Durum ve Durum Uzayı

İster basit, isterse karmaşık olsun bir fiziksel sistemin tüm gözlenebilirlerinin olası bütün ölçüm sonuçlarının oluşturduğu topluluk kümesinin her bir elemanına o sistemin bir durumu denir.

Klasik mekanikte temel gözlenebilirler, sistemi oluşturan tüm parçacıkların koordinatları ve momentumlarıdır. Faz uzayındaki bir nokta sistemin durumunu belirler.

Kuantum mekaniğinde ise kapalı (İzole edilmiş, dış dünya ile herhangi bir etkileşimde olmayan) bir fiziksel sistemin durumları, iç çarpım ile tanımlı Hilbert uzayında

bir vektör ile temsil edilir.

Hilbert uzayındaki bir fiziksel sistemin herhangi bir andaki durumu $|\psi\rangle$ şeklinde gösterilen bir ‘durum vektörü’ ile tanımlanır. Sisteme ait $|\psi_1\rangle$ ve $|\psi_2\rangle$ gibi herhangi iki farklı durum söz konusu olduğunda bu durumların süperpozisyonu, a_1 ve a_2 kompleks sayılar olmak üzere $|\psi\rangle = a_1|\psi_1\rangle + a_2|\psi_2\rangle$ şeklinde yine sistemin bir durumunu ifade eder.

3.3.3 Gözlenebilirler

Deneyssel olarak bir ölçüm aleti ile ölçülebilen, değerlendirilebilen fiziksel varlıklara gözlenebilir denir.

Klasik mekanikte temel gözlenebilirler konum, momentum, açısal momentum, enerji, olarak tanımlanır. Zaman klasik mekanikte gözlenebilir değildir ve denklemlerde sadece bir parametre olarak kullanılır. Klasik mekanikte matematiksel olarak, tek bir parçacık için temel gözlenebilirler 6 tane sayı, $(x, y, z, p_x, p_y, p_z,)$ ile temsil edilir.

Kuantum mekaniğinde ise gözlenebilirler Hilbert uzayında kendine eşlenik yani hermitik olan işlemciler olarak tanımlanır. Herhangi bir kuantum mekaniksel bir sistemde gözlenebilir nicelik olan A , Hilbert uzayında (durum uzayı) bir hermityen operatör olarak \hat{A} şeklinde gösterilir. \hat{A} operatörüne ait a_1, a_2, \dots, a_n özdeğerleri, gözlenirin ölçümünde elde edilebilecek mümkün sonuçları ifade eder. Bu özdeğerlere karşı gelen özvektörleri, sistemin durum uzayının ortonormal baz vektörlerinin bir seti şeklindedir.

3.3.4 Dinamik

Bir fiziksel sistemin gözlenebilirlerinin ölçülen değerleri genellikle zaman içinde değişir. Fiziksel sistemin zaman içinde ki değişimini (evrimini) ifade eden matematiksel ve fiziksel olguya o sistemin Dinamiği denir.

Kuantum mekaniğinde kapalı (İzole edilmiş, dış dünya ile herhangi bir etkileşimde olmayan) bir sistemin değişimi (evrimi) üniter dönüşüm operatörü aracılığı ile gerçekleşir.

Herhangi bir t_1 anındaki sisteme ait $|\psi\rangle$ durumu ile t_2 anındaki sisteme ait $|\psi'\rangle$ arasındaki ilişki U üniter operatör ile kurulur.

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \quad (3.38)$$

Kapalı bir kuantum sistemine ait durumun zamanla değişimi,

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle \quad (3.39)$$

şeklinde tanımlı Schrödinger denklemi ile ifade edilir. Burada, \hbar Planck sabiti, H hamiltonyendir.

3.3.5 Ölçüm

Kuantum mekaniğinde bir M_m ölçümü, aşağıda özellikleri verilen $\{M_m\}$ ölçüm operatörleri ile tanımlanır. Bu operatörler ölçülecek sisteme ait durum uzayı üzerine etki ederler. Burada, m indisi ölçüm sonucu çıktılara karşılık gelmektedir. Eğer bir kuantum sistemi ölçümden önce $|\psi\rangle$ durumunda ise m sonucunun elde edilme olasılığı,

$$P(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle \quad (3.40)$$

ile verilir. Ölçümden sonra sistemin yeni durumu ise

$$|\psi'\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}} \quad (3.41)$$

ifadesi ile verilir.

Tüm ölçüm çıktıları üzerinden P_m olasılıkları toplamının tamlık koşulu altında 1 (bir) olması, operatörlerin tam bir küme oluşturduklarını ifade eder.

$$\sum_m P(m) = \sum_m \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle = 1, \quad \sum_m M_m^\dagger M_m = I \quad (3.42)$$

Kuantum mekaniğinde kullanılan izdüşümsel ölçüm (Von Neumann ölçümü) metodu ise yukarıda bahsedilen genel ölçüm formalizminin özel bir halidir. Bu formalizmde kuantum sisteminin durum uzayına etkiyen $\{M_m\}$ izdüşümsel ölçüm operatörleri seti ile tanımlanır. Gözlenecek sistemin durum uzayında tanımlı hermityen bir operatör olan M için spektral ayrılma bağıntısı;

$$M = \sum_m m P_m \quad (3.43)$$

ile verilir. Burada P_m , M ölçüm operatörüne ait m özdeğerli özvektörlerinin üzerindeki dik izdüşüm operatörleridir. Olası ölçüm sonuçları gözlenebilirin m özdeğerlerine karşılık gelir. $|\psi\rangle$ durumunun ölçümünde m sonucunun elde edilme olasılığı;

$$P(m) = \langle \psi | P_m | \psi \rangle$$

ile verilir. Ölçümden hemen sonraki kuantum sistem durumu ise;

$$|\psi'\rangle = \frac{P_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_m | \psi \rangle}}$$

şeklinde ifade edilir.

İzdüşümsel ölçüm yönteminde M operatörünün beklenen değeri ,

$$E(M) = \sum_m m p_m = \sum_m \langle \psi | P_m | \psi \rangle = \langle \psi | \left(\sum_m m P_m \right) | \psi \rangle = \langle \psi | M | \psi \rangle = \langle M \rangle$$

şeklinde dir.

3.3.6 Birleşik sistemler

İki veya daha fazla farklı fiziksel sistemlerden oluşan bileşke sistemin durum uzayı, bu fiziksel sistemlere ait bileşenlerin tensörel çarpımı (\otimes) olarak ifade edilir. Sistemler, sırasıyla $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$ durumlarında bulunuyorsa, bileşke sisteme ait Hilbert uzayı (durum uzayı) $H_{\psi_1} \otimes H_{\psi_2} \otimes H_{\psi_3} \otimes \dots \otimes H_{\psi_n}$ şeklinde ve bileşke sistem durumu $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$ ile verilir.

4. KUANTUM HESAPLAMA

Kuantum bilgisayar fikri ile ilgili çalışmalar, 1982’de Feynman’ın kuantum bilgisayarının klasik bilgisayardan çok daha verimli olabileceğini önermesi ile başlamıştır (Feynman, 1982). Aynı yıl Benioff da çeşitli kuantum mekaniksel hesaplama modelleri inşa etmiştir . Deutsch(1989) ilk kez tamamen kuantum mekaniği kurallarına dayalı bir hesaplama modeli ortaya atmış ve ‘evrensel kuantum bilgisayar’ın tanımını yapmıştır. Böylece kuantum mekaniğinin buna imkan verebileceğini ortaya konmuştur [15].

Deutsch’un ön çalışmalarından sonra, P.Shor polinom zamanda tamsayıları çarpanlarına ayıran ve ayrık logaritmaları alabilen kuantum algoritmalarını ortaya atmıştır (Shor, 1994). Ardından L.Grover kuantum arama algoritmasını sunmuştur [24]

Shor’un yapmış olduğu çalışma kuantum bilgisayarların, klasik bilgisayarlarda imkansız gibi gözüken, büyük sayıların asal çarpanlarına işleminin çok kısa sürede bulunabileceğini göstermesidir. Bunu sağlayan da, kuantum mekaniğinin özelliklerinden olan, kuantum durumlarının üst üste binmesi (süperpozisyon) ya da bir parçacığın aynı anda birden fazla yerde bulunabilme olgusudur.

Kuantum bilgisayarlarının çok hızlı çözebileceği bir başka problem de sıralanmamış bir listeden arama yapabilmesidir.

Kuantum bilgisayarlarında üst üste binmeyi ilgi çekici kılan özellik, kubitlerin, klasik bilgisayarlarda kullanılan ikili sistemdeki ‘0’ ya da ‘1’ değerlerinden başka aynı anda hem ‘0’ hem de ‘1’ gibi davranabilmeleridir. Buna göre klasik bilgisayarlarda işlemler teker teker sırayla yapılırken, kuantum bilgisayarlarında teorik olarak aynı anda yapılır ve aynı anda incelenen birçok durum tek bir doğru cevaba ‘çöker’.

Kuantum bilgisayarlarında üç temel özellik ön plana çıkar:

Birincisi, bilgi işlemedir. Kuantum bilgisayarlarındaki en küçük bilgi saklama ve işleme birimi kubit’lerdir. Kubitler ‘0’ ve ‘1’ olabileceği gibi bu ikisinin süperpozisyon durumunda da olabilir.

İkincisi, yapılacak olan mantıksal işlemin özelliği ve kapsamıdır. Kuantum bilgisayarlar kuantum mantık kapılarıyla çalışır. Kuantum mantık kapıları ise girdi olarak

bir ya da birden fazla kubit alıp, çıktı olarak bir ya da birden fazla kubit üretebilirler.

Üçüncü ve son özellik ise çalışan bir bilgisayarın hangi halde olduğunu öğrenme durumudur. Klasik bilgisayarlarda istediğimiz an bit'lerin hangi hallerde olduğu kolaylıkla saptanabilir. Bu, kuantum bilgisayarlarda teorik olarak imkansızdır. Kubitlerin hangi durumda olduğu tam olarak belirlenemez.

Kuantum hesaplama, kuantum ilkeleri kullanılarak yapılan hesaplama ve bilgi işlem süreçlerini içerir. Kuantum hesaplama yoluyla çalışan bir kuantum bilgisayarın ya da algoritmanın neler yapıp yapamayacağı açık bir soru ve araştırma konusudur. Diğer yandan pratik olarak klasik algoritmaların ve bilgisayarların şu an için başaramadığı çok büyük sayıların polinom sürede asal çarpanlarına ayrılması probleminin Shor algoritmasıyla yapılabildiğinin ispatlanması, kuantum hesaplamasının gücünün umut vaat eden bir örneğini oluşturmaktadır.

4.1. Kubitler

Klasik bilginin temel birimi olan "0" ve "1" lerden oluşan bitlere benzer şekilde kuantum hesaplamasının temel bilgi birimi olarak Kubitler (kuaantum bit) kullanılır. Bir kubit iki boyutlu Hilbert uzayda tanımlı bir birim vektördür ve

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (4.1)$$

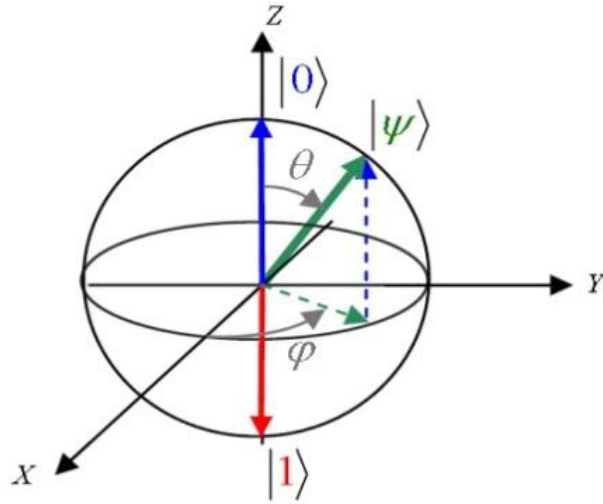
şeklinde ifade edilebilir. Burada α ve β ,

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (4.2)$$

şartını sağlayan karmaşık katsayılar, $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ vektörleri ise matris temsilleri

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

şeklinde olan, hesaplama bazı adı verilen vektörlerdir. denklem 4.1'de görüldüğü gibi kubit, $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ vektörlerinin süperpozisyon halindedir. Bu durumda bir kubit fiziksel olarak herhangi iki kuantum durumunu aynı anda içeren bir fiziksel sistem tarafından temsil edilebilir. Bir kubit görsel olarak en iyi Bloch küresi ile görselleştirilebilir.



Şekil 4.1: Bloch Küresi

Bloch küresi (Şekil 4.1) gösterimine göre herhangi bir kubit, Bloch küresinin yüzeyinde ya da içerisinde bulunan bir noktaya, orjin noktasından çizilen bir vektörle temsil edilir. Bloch küresi geometrisine göre bir kubit γ, θ, ϕ reel sayılar olmak üzere;

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \right) = e^{i\gamma} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

şeklinde ifade edilebilir. Sırasıyla yükselti ve azimut açıları $0 \leq \theta \leq \pi$ ve $0 \leq \phi \leq 2\pi$ aralığında olup Bloch küresindeki noktanın yerini temsil eder. Bağntı(4.4)'te parantez önündeki $e^{i\gamma}$, global bir faz faktörü olup gözlenebilir bir özelliği yoktur. Parantez içindeki $e^{i\phi}$ ise kubitin, $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumları arasındaki bağıl bir faz faktörüdür, gözlenebilir ve kubitte ilgili çok değerli bilgiler taşır. (Şekil 4.1)'de görüldüğü gibi Bloch küresinin kutuplarında $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ baz vektör durumları bulunmaktadır.[1]

4.1.1 Çoklu kubitler

İkili durum uzayında (mesela Spin- $\frac{1}{2}$ uzayında) iki parçacıklı sistemin iki kubitlik durumları $|00\rangle, |10\rangle, |01\rangle$ ve $|11\rangle$ şeklinde yazılır. Bu bileşik sistemin durum vektörü ise ;

$$|\psi\rangle = \alpha |00\rangle + \beta |10\rangle + \gamma |01\rangle + \lambda |11\rangle \quad (4.5)$$

olarak ifade edilir ve $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ sayıları ise karmaşık katsayılardır. Ayrıca,

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\lambda|^2 = 1 \quad (4.6)$$

normalizasyon şartı sağlanır.

Kuantum mekaniğinde çoklu parçacıkların olduğu sistemleri tanımlamada genellikle tensör çarpımları kullanılır. Tensör çarpımları yöntemiyle Hilbert uzayının boyutu artırılabilir. Örnek vermek gerekirse, M Hilbert uzayı 'm' boyutlu, N Hilbert uzayı 'n' boyutlu olsun. M ve N'nin tensör çarpımı yapılırsa $m \times n$ boyutlu bir vektör uzayı elde edilir.

M ve N iki boyutlu vektör uzayları olsunlar,

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in M, \quad |\beta\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \in N$$

olmak üzere

$$|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_1\beta_2 \\ \alpha_2\beta_1 \\ \alpha_2\beta_2 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

çarpımı ile dört boyutlu Hilbert uzayı oluşturulur. örneğin ;

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilen spin 1/2 parçacıkları için durum matrisleri tensör çarpımı ile şu şekilde oluşturulur.

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

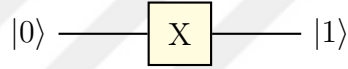
5. KUANTUM KAPILARI VE KUANTUM DEVRE UYGULAMALARI

5.1. Kuantum Kapıları

Boolean cebirinden yararlanarak oluşturulan klasik bilgisayar mantık kapıları bitler oluşur. Kuantum bilgisayarlarında ise bit yerine kubitler (kuantum bitler) kullanılır.

Kuantum hesaplamada tek kubitler için mantık kapısı olarak kullanılan pauli matrisleri, kuantum bilgi teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. Klasik hesaplamalarda kullanılan ‘NOT(değil)’ kapısının ‘0’ \rightarrow ‘1’ ve ‘1’ \rightarrow ‘0’ şeklinde olan dönüşümlerini, kuantum hesaplama için gerçekleştirir.

‘NOT (değil)’ kapısının kuantum karşılığı *Pauli - X* matrisidir. *Pauli - X* kapısını, kuantum devre gösterimi ve matris gösterimi aşağıdaki gibidir ;



$$Pauli-X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Bu matris tek kubit durumu üzerine uygulandığında;

$$X |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

$$X |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

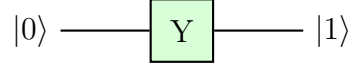
olarak yazılır.genel olarak ;

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \rightarrow X |\psi\rangle = |\psi'\rangle = \beta |0\rangle + \alpha |1\rangle \quad (5.4)$$

şeklinde ifade edilir.

Kuantum kapıların olması gereken bir özelliğide, kubit üzerine uygulanan işlemci matrislerinin üniter yapıda olmalarıdır. Çünkü mantık işlemleri yapılırken durum vektörünün normu değişmemesi gerekir.

Diğer bir kuantum kapısı olan Pauli-Y kapısının kuantum devre gösterimi ve matris temsili:



$$Pauli_Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

şekindedir. Bu matrisin tek bir kubit üzerindeki etkisi şu şekildedir;

$$Y |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

$$Y |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Genel ifadeyle,

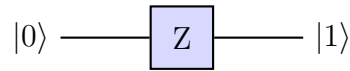
$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \rightarrow Y |\psi\rangle = |\psi'\rangle = i\beta |0\rangle - i\alpha |1\rangle \quad (5.8)$$

şeklini alır.

Bu işlemin Bloch küresi üzerinde karşılığı ise Y eksenini etrafında döndürmedir.

Pauli-Z işlemcisinin matris gösterimi ve kuantum devre gösterimi;

$$Pauli_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$



dir. Pauli-Z işlemcisinin tek bir kubit üzerine etkisi;

$$Z |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

$$Z |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

şeklinde olur. Genel ifadeyle

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \rightarrow Z |\psi\rangle = |\psi'\rangle = \beta |1\rangle - \alpha |0\rangle \quad (5.12)$$

şeklini alır.

Görüldüğü gibi bu Pauli-Z mantık kapısı kuantum durumunun sadece işaretini değiştirmektedir. Bu Pauli Z işlemcisi aynı zamanda fazı döndüren işlemci olarak tanımlanır.

Kuantum hesaplamada kullanılan diğer bir önemli mantık kapısında Hadamard mantık kapısıdır. Bu kapının önemi üzerine uygulandığı kubitte süperpozisyon durumuna getirir.

$$\begin{array}{l} |0\rangle \text{ ——— } \boxed{\text{H}} \text{ ——— } \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |1\rangle \text{ ——— } \boxed{\text{H}} \text{ ——— } \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \end{array}$$

Bu kapının bir diğer özelliği ise bir duruma ardı ardına iki kez uygulandığında, o durumu eski haline getirmesidir. Durum işleyişi şu şekildedir.

$$|0\rangle \text{ ——— } \boxed{\text{H}} \text{ ——— } \boxed{\text{H}} \text{ ——— } |0\rangle$$

Hadamard matrisinin bir duruma iki defa uygulanması, X ve Z işlemcileri kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$H = \frac{X + Y}{\sqrt{2}} \quad (5.13)$$

daha açık yazılırsa,

$$H = \frac{X + Y}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

matris gösterimi şeklinde Hadamard kapısı elde edilir.

Genel olarak herhangi bir sistemin durumu;

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (5.15)$$

şeklinde verilmiş olsun. Böyle bir duruma Hadamard matrisi işlemi uygulanırsa,

$$H |\psi\rangle = H(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \quad (5.16)$$

$$= \alpha \frac{(|0\rangle + |1\rangle)}{\sqrt{2}} + \beta \frac{(|0\rangle - |1\rangle)}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha |0\rangle + \alpha |1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{\beta |0\rangle - \beta |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$H|\psi\rangle = \frac{(\alpha + \beta)}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{(\alpha - \beta)}{\sqrt{2}}|1\rangle \quad (5.17)$$

ifadesi elde edilir.

Şu ana kadar yapılan işlemler tek kubitli durumlara uygulandı. Eğer elimizde çok kubitli sistemler var ise o zaman daha farklı mantık kapıları oluşturulur. Şu ana kadar tek kubitlik sistemlere uygulanan Hadamard mantık kapısı çoklu kubit durumlarında uygulanabilir. Bunun için İki kubitlik Hadamard kapısını oluşturmak iki hadamard matrisinin tansörel çarpımı alınarak,

$$H \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

matrisi elde edilir.

Genelleştirildiğinde Hadamard n kubitlik bir sistemde oluşabilecek süperpozisyon durumu;

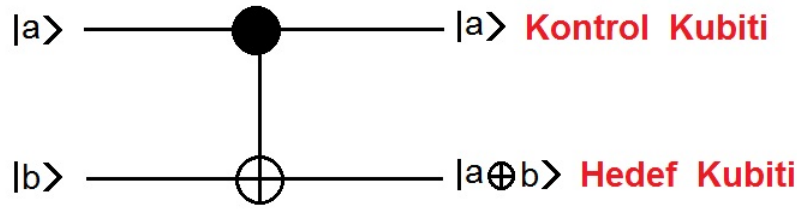
$$H \otimes H \otimes \dots \otimes H \otimes |00\dots 0\rangle = H^{\otimes n} |00\dots 0\rangle \quad (5.20)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \quad (5.21)$$

ifadesi ile elde edilir.

Kuantum devrelerinde birden fazla kubite etki eden kapı CNOT (Kontrol değil) kapısıdır . Bu kapı iki kubitli veya daha fazla kubitli durumlara uygulanır. Kontrol-Değil (CNOT) Mantık kapısının kuantum devrele tasarımlarında kullanılan devre gösterimi (Şekil 5.1) de gösterildiği gibidir.

Bu mantık kapısını çalışma ilkesini şöyledir.Kontrol kubitini 0 olduğunda hedef kubitte değişiklik olmaz. Kontrol kubitini 1 ise hedef kubitinin değerini değiştirir. yani 1 ise 0 yapar ya da tam tersini yapar. CNOT kapısı kontrol kubitini asla değiştirmez. Eğer Kontrol kubitinin değeri a, hedef kubitinin değeri b ise CNOT kapısı hedef kubitinin değerini mod2 ye göre $b \oplus a$ yapar.Yani,



Şekil 5.1: CNOT kapısı

$$CNOT_a |ab\rangle = |a, a \oplus b\rangle$$

Burada \oplus İşareti mod 2'ye göre toplama işlemini ifade eder.

Eğer hedef ve kontrol kubitlerin yerleri değiştirilirse;

$$CNOT_b |ab\rangle = |a \oplus b, b\rangle \quad (5.22)$$

ifadesini elde edilir.

CNOT mantık kapısının matris temsilleri aşağıdaki gibidir:

$$CNOT_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

$$CNOT_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

CNOT kapısı $|10\rangle$ durumunu üzerine uygulandığında,

$$CNOT_a |10\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

sonucu elde edilir.

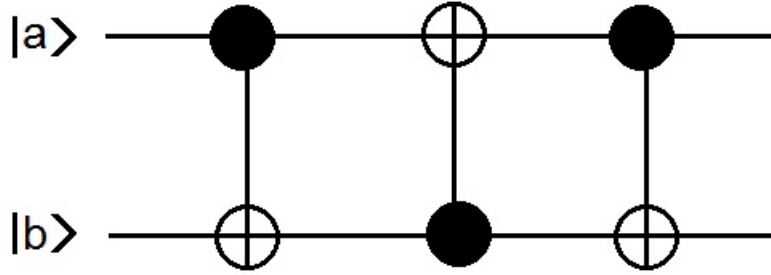
CNOT kapısının diğer kubit yapıları üzerine uygulanmasının etkisi,

$$CNOT_a |00\rangle = |00\rangle, \quad CNOT_a |01\rangle = |01\rangle \quad (5.26)$$

$$CNOT_a |10\rangle = |11\rangle, \quad CNOT_a |11\rangle = |10\rangle \quad (5.27)$$

şeklinde gözlemlenir.

Kuantum hesaplamada kullanılan iki kubitlik mantık kapısında SWAP mantık kapısıdır. Bu kapının özelliği, herhangi bir iki kubitli sistem üzerine uygulandığında o kubitlerin yerlerini birbirini ile değiştirir. (Şekil 5.2) de görüleceği gibi bu mantık kapısı 3 adet CNOT mantık kapısının birleşiminden oluşur.



Şekil 5.2: SWAP kapısı

(Şekil 5.2) de gösterilen kuantum devre şemasına göre SWAP kapısı,

$$SWAP = (CNOT_a)(CNOT_b)(CNOT_a)$$

şeklinde tanımlanır ve bu devre iki kubitlik bir duruma uygulandığında,

$$SWAP |\alpha\beta\rangle = |\beta\alpha\rangle$$

dönüşümü sağlamış olur. SWAP mantık kapısının matris temsili,

$$SWAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

şeklinindedir.

5.2. Kuantum Hesaplama Uygulamaları

5.2.1 Kuantum dolaşıklık

İki veya daha fazla kuantum parçacığının (Genel anlamda ; Sistemin) fiziksel özelliklerinin güçlü bir şekilde bağlantılı olduğu bir durum olan dolanıklık, kuantum mekaniğinin ilginç özelliklerinden biridir. Bu özellik klasik fizikle açıklanamayan, sistemler arasındaki karşılıklı ilişkiyi ifade eder. Dolaşıklık kuantum hesaplama teorisinde önemli rol oynar. Kuantum dolanıklığı olarak adlandırılan olgu ile sistemler

birbirinden ayrı olsa bile yine de birbirleriyle iletişim halinde olduklarını ifade eder. Klasik fizikğin doğasında buna benzer bir durum söz konusu değildir.

Dolanıklık, somut olarak kısaca şu şekilde açıklanabilir. Tek kubitlik bilgi taşıyabilen A ve B parçacıkları olsun ($|0\rangle$ veya $|1\rangle$). mesela A ve B iki elektron (spin yukarı ‘1’, spin aşağı ‘0’) olabilir. Böyle bir sistem için A ve B’nin dört tane olası klasik durumları ‘00’, ‘01’, ‘10’ ve ‘11’ vardır. Kuantum fiziğine görede, parçacıklar bu dört farklı durumda birinde bulunabilir. Fakat Klasik fizikten farklı olarak, parçacıklar bu dört farklı durumun değişik olasılıklarla üst üste gelmesiyle (süperpozisyon) oluşabilecek herhangi bir durumda da bulunma olasılığı vardır. Genellikle süperpozisyon $|00\rangle + |11\rangle$ şeklinde gösterilen durumdadır. Yani A ve B’nin her ikisinin aynı anda ‘0’, veya aynı anda ‘1’ olduğu durumda, parçacıklar dolanıktır denir.

Dolanıklık matematiksel olarak şöyle ifade edilir. Eğer iki kubitlik bir sistemin $|\psi\rangle$ durumu, iki tane $|\phi\rangle$ ve $|\Phi\rangle$ gibi tek kubitlik durumların tensör çarpımı şeklinde yazılabiliyorsa bu durum ‘ayrıştırılabilir’ durum olarak adlandırılır. Eğer durum ayrıştırılamaz ise dolanık olarak adlandırılır. Daha genel bir şekilde ifade edilirse, Kuantum durumu iki veya daha fazla sistemin tensör çarpımı şeklinde ifade edilemiyorsa bu Kuantum durumuna dolanıktır denir. Yani herhangi bir $|\psi\rangle_{AB}$ kuantum durumu eğer $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ şeklinde iki durumun bileşimi şeklinde ifade edilemiyorsa, sistem dolanıktır denir. Dolanıklık uzaysal olarak çok büyük mesafelere konmuş iki sistem arasında da olabilir. Yani dolanıklık tamamen uzaklıktan bağımsızdır.

Kuantum mekaniğinde herhangi iki kuantum sisteminin durumu, bu iki sistemin tensör çarpımları ile birlikte verilir. Örneğin eşitlik (5.29) da iki tane $|+\rangle$ ve $|-\rangle$ Hadamard durumu kuantum mekaniğinde,

$$|+\rangle |-\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)(|+\rangle - |-\rangle) = |00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle \quad (5.29)$$

şeklinde düşünülebilir. Ancak dolanık bir sistemde böyle bir durumun söz konusu olmaz.

5.2.2 Bell durumları

Tek kubit için baz durumlarının küme elemanları, sütun vektör temsilinin iki bileşeni şeklinde ifade edilir:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

İki durumlu sistem için baz durumlarının tüm setleri verilen durumların tensör çarpımı ile oluşturulur.

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

$$|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

Böylece matris temsili olarak kuantum bilgi teorisi için çok önemli bir yere sahip olan dört tane Bell durumu elde edilmiş olur. Bell durumlarının en yaygın gösterimi dirac gösterimi ile yapılandır.

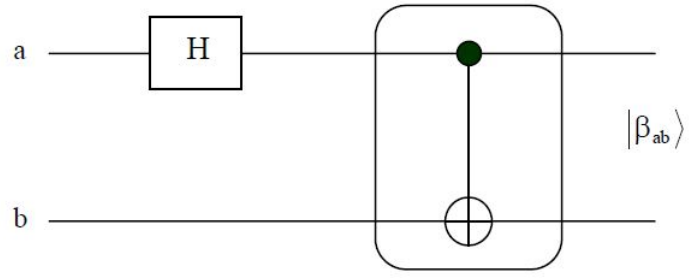
$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (5.34)$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \quad (5.35)$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \quad (5.36)$$

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \quad (5.37)$$

şeklinde ifade edilir. Bell durumları, sonuç olarak aynı şeyi ifade etmelerine rağmen değişik şekillerde türetilir. Bunlardan bir tanesi olan Bell durumlarını üretmedeki uygun devre aşağıda gösterilmiştir.[1]



Şekil 5.3: Bell durumlarını üreten kuantum devresi

Bu devreye göre önce birinci kubitte Hadamard dönüşümü uygulanır, buradan elde edilen sonuca da CNOT mantık kapısı uygulanarak ilgili Bell durumları elde edilir.



6. KUANTUM ALGORİTMALARI

Kuantum bilgisayarları kuantum algoritmaları tarafından çalıştırılır. Kuantum algoritmaları ile klasik bilgisayarlarla gerçekleştirilemeyen işlemler yapılabilir. Kuantum algoritmaları üniter işlemlerin bir dizisidir. Bu üniter işlemler, kubitlerden oluşturulmuş bir kuantum bit dizisi üzerine uygulanır. Bu kubitler klasik bit dizilerinin bir süperpozisyonu olabilir. Çünkü kuantum algoritmalar klasik bilgisayarlarda mümkün olmayan süperpozisyon ve dolanıklık durumları yardımıyla hesaplama yapabilir.

Kuantum algoritmaların klasik olanlara göre üstünlüğü bunların klasiklerden daha hızlı olmasıdır. Bir kuantum bilgisayarı için zor olan kısım çıktının ölçülmesidir. Çünkü süperpozisyondaki dizilerden sadece bir tanesinin seçilmesi gereklidir. İşte kuantum algoritmalarının gücü burada yatmaktadır.

Kuantum dünyasının kendine has özelliği olan dolanıklıktan makroskopik dünyada da yararlanma düşüncesi, 1980'li yıllarda bilim dünyasında çok yoğun çalışmalara neden olmuştur. Bu düşünceden yola çıkarak Paul Benioff, kuantum bilgisayarları için bir mantık kapısı tasarladı. Onun düşünceleri, daha sonra Charles Bennett ve David Deutsch tarafından daha da geliştirildi. Böylece ilk kuantum algoritması David Deutsch tarafından yapıldı [15]. Bu çalışmayla da kuantum algoritmanın klasik algoritmalara olan üstünlüğü kanıtlanmış oldu. Yani, kuantum algoritması ile problemler, üstel olarak klasik bilgisayara göre daha hızlı çözülebiliyordu [18]. Kuantum algoritmaları, süperpozisyonları oluşturmak için Hadamard mantık kapısını kullanır. Bu ise klasik bilgisayarlarda imkansızdır.

1994 yılında Peter Shor, kuantum bilgisayarlar için tamsayıları çarpanlara ayırabilen kuantum algoritmayı keşfetti [17]. Bu algoritma klasik versiyonlarından üstel olarak daha hızlıdır. Shor'un, yüzlerce haneden oluşan sayıları çok kısa sürede asal çarpanlarına ayırmak için geliştirdiği bu algoritma, konu üzerindeki araştırmaları daha da hızlandırdı. Akabinde Kuantum arama algoritması L.K.Grover tarafından oluşturuldu [24].

6.1. Deutsch Algoritması

Deutsch algoritması, kuantum algoritmalarının ilki ve en basit örneğidir. Deutsch algoritmasının asıl özelliği, klasik olarak çözümsüz olan bir problemi çözmekten çok, kuantum ilkelerini kullanarak bir problemin daha kısa sürede çözülebileceğini göstermesidir. Klasik olarak iki adımda çözülebilecek bir problemi, tek adımda çözülebileceğini gösterir.

Örneğin problemimiz şu şekilde olsun. Elimizde bir fonksiyon var ve bu fonksiyonun özellikleride şöyledir, $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$

Şimdi, Eğer $f(0) = f(1)$ ise fonksiyona SABİT FONKSİYON, Yok eğer $f(0) \neq f(1)$ ise fonksiyona DENGELİ FONKSİYON diyelim.

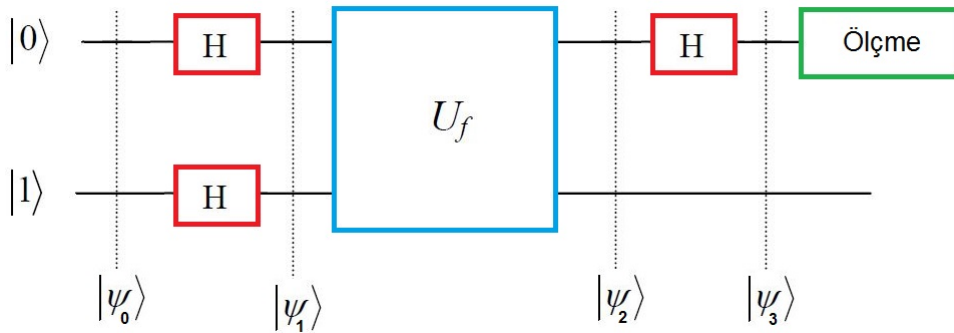
Problemimiz şu ; Böyle bir fonksiyonun dengeli mi yoksa sabit mi olduğunu anlamak için kaç adım işlem yapmalıyız ?

Klasik bilgisayarlarda bu problemi çözmek için en az iki adım gereklidir. Deutsch'un algoritması ise bize bu problemin tek bir adımda çözülebileceğini söyler.

Bu algoritmayı uygulamada ilk adım iki kubit üzerine etki eden ve U_f ile gösterilen üniter operatörünü tanımlamaktır. Bu operatörün özelliği ise iki kubitlik bir sistemde, birinci kubit üzerine herhangi bir etki yapmazken; ikinci kubite etkisi, ikinci kubit ile $f(x)$ fonksiyonunun mod2'ye göre toplamını almaktır. Yani;

$$U_f |x, y\rangle = |x, y \oplus f(x)\rangle \quad (6.1)$$

şeklinde bir işlemi yapar. Burada $x, y \in 0, 1$ 'dir.



Şekil 6.1: Deutsch Algoritması devresi

(Şekil 6.1)'deki devreden yola çıkarak adım adım neler olduğunu inceleyelim.

$|\psi_0\rangle$ başlangıç durumunda birinci girdi $|0\rangle$ ikinci girdi $|1\rangle$ durumda hazırlanır.

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle |1\rangle \quad (6.2)$$

her iki duruma hadamard uygulanırsa,

$$|\psi_1\rangle = H |0\rangle H |1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right) \quad (6.3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right) \quad (6.4)$$

Durumunu elde ederiz.

Şimdi U_f uygulanırsa yeni durum ,

$$|\psi_2\rangle = \frac{(-1)^{f(0)}}{\sqrt{2}} |0\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right) + \frac{(-1)^{f(1)}}{\sqrt{2}} |1\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right) \quad (6.5)$$

$$= \left(\frac{(-1)^{f(0)}}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{(-1)^{f(1)}}{\sqrt{2}} |1\rangle\right) \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (6.6)$$

$$= (-1)^{f(0)} \left(\frac{|0\rangle + (-1)^{f(0)\oplus f(1)} |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right) \quad (6.7)$$

şekline gelir.

Şimdi, f fonksiyonu sabit bir fonksiyonsa, yani $f(0) \oplus f(1) = 0$ ise, o zaman;

$$|\psi_2\rangle = (-1)^{f(0)} \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \quad (6.8)$$

elde edilir ve ilk kubitte uygulanacak bir hadamard kapısıyla durum;

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} |0\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \quad (6.9)$$

durumuna gelir. ilk kubitteki $|0\rangle$ baz durum normunun karesi 1 dir. Bunun anlamı; sabit bir fonksiyon için ilk kubit ölçümününün $f(0) \oplus f(1) = 0$ değerini vermesi kesindir.

Eğer f fonksiyonu dengeli fonksiyonsa, yani $f(0) \oplus f(1) = 1$ ise,

$$|\psi_2\rangle = (-1)^{f(0)} \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \quad (6.10)$$

elde edilir ve ilk kubitte son hadamard kapısı uygulanırsa, durum ,

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} |1\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \quad (6.11)$$

şekline gelir. Bu durumda da ilk kubitteki $|1\rangle$ durumunun norm karesi 1 dir. Bunun anlamı; dengeli bir fonksiyon için ilk kubitin ölçümü $f(0) \oplus f(1) = 1$ değerini vermesi kesindir.

Sonuç olarak Deutsch algoritması için devrenin sonunda ki ilk ilk kubitleri ölçersek $f(0) \oplus f(1)$ değerini, dolayısıyla fonksiyonun dengeli mi yoksa sabit mi olduğu belirlenebilir.

6.2. Shore Algoritması

Shor algoritması Kuantum hesaplamının en önemli uygulamasıdır. Bu algoritma asal çarpanların bulunmasında dolayısıyla , günümüzün bilgi işlem güvenliğinde kullanılan RSA şifreleme tekniğinin kırılmasında kullanılabilir. Shor algoritması polinomsal olarak $\log(n)$ ile orantılı çalışır (n , basamak sayısı). Örneğin 1024 bitlik bir sayıyı asal çarpanlarına ayırmak için günümüzde kullanılan klasik bilgisayarlarda yaklaşık 100 yıl gerekirken, Shor çarpanlarına ayırma algoritmasını kullanarak çalışan kuantum bilgisayarlarında bu işlem 5 dakikadan daha az bir zaman alır.

Bunun nasıl mümkün olduğunu şöyle açıklayabiliriz.Kubitlerin taşıdığı bilginin en önemli özelliği, aynı anda farklı bilgiler saklayabilmesidir. Örneğin yönelmiş bir elektronun spini, eşit olasılıkla ‘0’ ve ‘1’ değerlerini alır. Eğer bellekte aynı yöne yönelmiş üçbinden fazla elektron spin durumu varsa, yine eşit olasılıkla bine kadar rakamı olan bütün sayılarında aynı anda bellekte olması demektir (bin rakamlı herhangi bir sayı üçbinden fazla bit kullanılarak gösterilir). Halbuki aynı miktardaki klasik bilgisayar bitleri bu sayılardan sadece birini saklayabilir. Bu kadar çok sayının çok küçük bir yere sığması kuantum bilgisayarlarının özelliklerinden biridir. Ayrıca kuantum bilgisayarları toplama, çarpma, modüler aritmetik gibi birçok işlemi bu sayılar üzerinden tek bir işlemle gerçekleştirir. Yani kısaca, tek işlemle belli bir uzunlukta olan bütün sayıları çarpıp olası bütün sonuçları bulabilir. Bu olaya KUANTUM PARALELLİĞİ denir.

Sonuç olarak kuantum paralelliği bu işlemde kubitlerin her iki durumunu da göz önünde bulundurmaktadır. Yani kubit ‘0’ veya ‘1’ durumunda olduğunda sonucun alacağı iki farklı değer ayrı ayrı hesaplanmış gibi tek bir işlemde hesaplanmaktadır. kuantum hesaplamının en büyük farklılığı kuantum paralelliğidir. Shor’un çarpanlara ayırma algoritması da bu kuantum paralelliğini kullanır.

6.3. Grover Algoritması

Grover algoritması, kısaca bir veritabanını tarayarak, istenilen bir değerin bu veritabanında olup olmadığını belirler. Örneğin, bir şehrin telefon rehberinde aranan nicelik bir kişinin telefon numarasıysa ve o kişinin adı biliniyorsa ve rehber de ada göre sıralıysa aranan numara kolayca bulunabilir. Fakat numarayı değil de, numarası belli olan bir kişinin arandığı düşünölsün. Bu durumda rehber numaraya göre sıralı olmadığından, doğru sonuca ulaşana dek veritabanındaki her bir telefon numarasını tek tek kontrol etmek gerekecektir. Veritabanının çok büyük olduğu durumlarda problemin etkin bir şekilde çözülemeyeceği ortadadır. İşte Grover'in geliştirdiği algoritma bize bu problemin kuantum ilkelerini kullanarak nasıl verimli şekilde bulunabileceğini göstermiştir.

Grover algoritması temel olarak üç adımda gerçekleştirilir. Bu adımlar,

- Başlangıç durumunu tüm durumların eşit olasılıkta bulunduğu (Süperpozisyon) duruma getirme.
- Aranan durumu işaretleme ve genliğini (olasılığını) artırma.
- ve Ölçme'dir.

7. KUANTUM BİLGİSAYAR MİMARİSİ

7.1. DiVincenzo Kriterleri

DiVincenzo, bir sistemin kuantum bilgisayarı olarak değerlendirilebilmesi için 5 kriter belirlemiştir [30]. Bu kriterler özetle şöyledir:

1. Kuantum hesaplamanın net olarak yapılabilmesi için kubitlerin iyi tanımlanmış olması gerekir.
2. Hesaplamadan önce, sistemin ilk durumu belirlenirken, kubitlerin $|000\dots 0\rangle$ gibi bir taban durumdan başlaması gerekir.
3. Sistemdeki etkileşimlerin gözlenebilmesi için en azından çalışma süresinden daha uzun olan uzun durulma zamanına sahip olması gerekir.
4. Evrensel kuantum geçitlerine sahip olması gerekir.
5. Kubitler üzerinde ölçme yeteneği olmalıdır ve istenildiğinde her kubit için ayrı sonuç bulunabilmelidir.

7.2. Kuantum Bilgisayarlarının Gerçekleştirildiği Sistemler

Kuantum devre ve algoritma sistemlerinin deneysel olarak gerçekleşmesi çoğu zaman çok zorlu işlemler gerektirir. [8]

Yukarıda bahsedilen de vincenzo kriterlerine göre, eğer bir kuantum bilgisayarı tasarlanacaksa , sistemin kuantum işlemlerini kusursuz yapması için dış çevre etkilerinden çok iyi korunabilmesi yani izole edilmesi gerekir. Aynı zamanda da sistemde oluşturulan kubitlere kolaylıkla erişilebilir olmalı ve üzerinde işlem yapılabilmesi için de bu kubitler kolayca yönlendirilebilir olmalıdır. son olarakta çıkışta alınacak değerlerde kolayca okunabilmelidir.

Kuantum bilgisayarı tasarlama sürecinde karşımıza çıkabilecek sorunlardan biride kuantum gürültü (kuantum noise) kavramıdır. Başka bir deyişle uyum bozulması (decoherence) kavramlarıdır. Bu sorun kuantum bilgisayarının stabil bir şekilde yapabileceği işlem sayısını azaltır. Sonuç olarak uyum sorunu kuantum bilgisayarında, hesaplama açısından sistemin güvenilirliğini ve verimini azaltır.

7.2.1 Fotonik tabanlı kuantum bilgisayar

Optik fotonik sistemler, kuantum biti oluşturmak için kullanılan fiziksel sistemlerden biridir. Bu yöntemde fotonların yüksüz ve diğer fotonlarla güçlü etkileşmelere girmeme olgusu kuantum kubitleri olarak kullanılma fikrini doğurmuştur.

Teknik olarak fotonların fiberler ile uzun mesafelere düşük kayıplarla iletilmesi, birleştirilebilmeleri ve dış etkilerden diğer sistemlere göre çok az etkilenmesi, bu sistemin kullanılmaya çalışılmasındaki artı etkenlerdir.

7.2.2 İyon kapanlama sistemli kuantum bilgisayarı

Kuantum bilgisayarı oluşturma çalışmalarında kullanılan iyon kapanlama yönteminde ise atomlardaki elektronların spin durumları baz alınarak kubitler tasarlanmaya çalışılır. Bu yöntemde Temel yaklaşım, spinlerin farklı durumlardaki enerjilerin farklı olmasından yararlanarak, önceden kontrollü ortamlarda izole bir şekilde tuzaklanmış az sayıdaki yüklü atomlarla bir kuantum bit sistemi oluşturulmaya çalışılmasıdır. Bu yöntemde atomun kinetik enerjisi spin enerji katkısından daha küçük olmalıdır. Bundan dolayı ortam çok düşük sıcaklıkta tutulmaya çalışılır. Sisteme tek renkli ışık radyasyonu gönderilerek, sistemin spin durumları manipüle edilir.

7.2.3 Nükleer manyetik rezonans (NMR) sistemli kuantum bilgisayarlar

NMR tipik olarak bir sistemde bulunan bütün moleküllerden gelen sinyallerin ortalamasının bir ölçümüdür. Bir kuantum bilgisayarı oluşturmak için NMR yöntemi oldukça dikkat çeken bir yöntemdir.

7.2.4 Süperiletken sistemli kuantum bilgisayarlar

Süperiletken malzemelerden yararlanarak kuantum bitleri(kubitler) oluşturarak, kuantum bilgisayar yapma çabaları günümüzün yoğun araştırma alanlarından biridir. Şu an için çalışmaların yoğunlaştığı süperiletken kubit oluşturma çalışmaları, Cooper çifti kutusu (yük) kubitleri, Akı (Flux) kubitleri ve Faz kubitleri olmak üzere üç dalda yürütülmektedir.

Bu tezin bundan sonraki bölümlerinde süperiletkenlik ve süperiletken tabanlı kubitler ayrıntılı olarak incelenecektir.

8. SÜPERİLETKENLİK VE SÜPERİLETKEN KUBİTLER

8.1. Süperiletkenlik

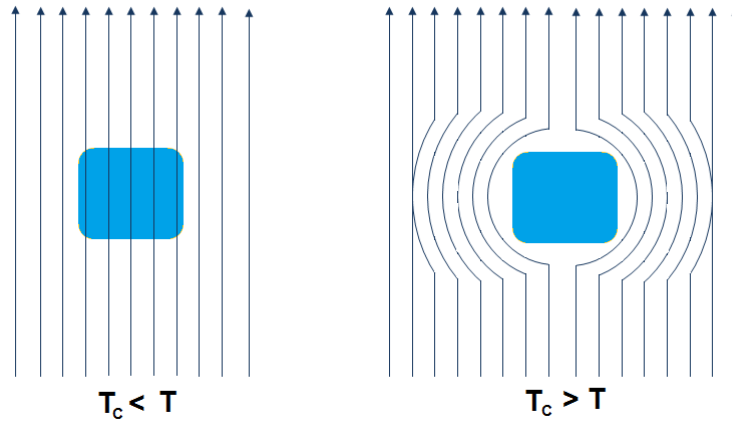
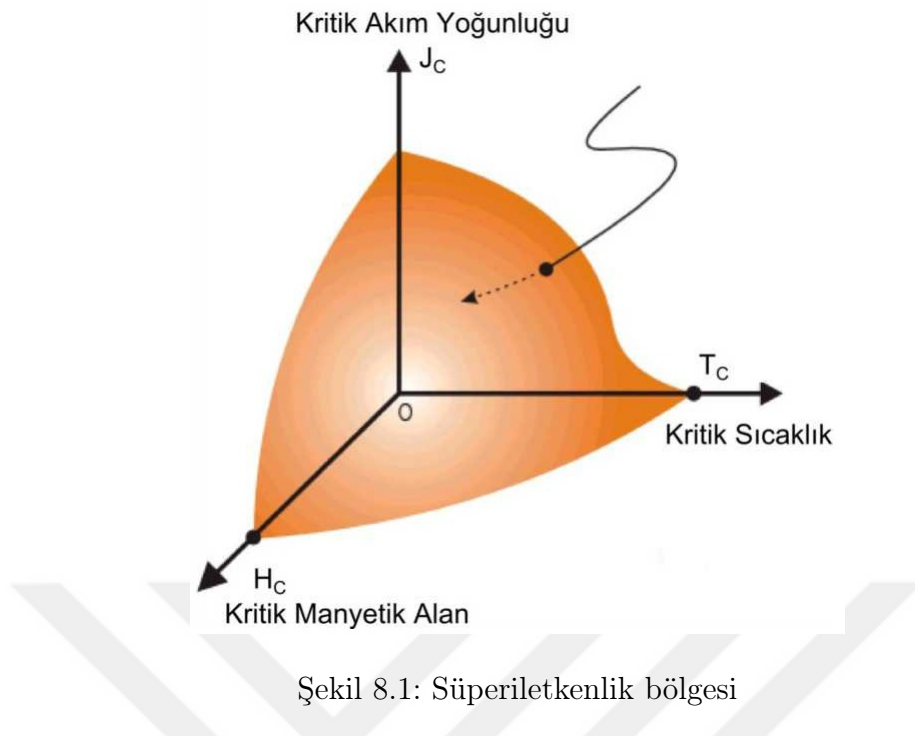
Süperiletkenlik, günümüzden yaklaşık yüz yıl önce alaman fizikçi K.Onnes'in, metallerin elektriksel dirençlerinin düşük sıcaklıklardaki etkilerini araştırırken bulmuş olduğu bir fiziksel olaydır.

Deneylerinin sonucunda Onnes, Cıva elementinin 4.2 Kelvin sıcaklığında direncinin aniden sıfıra düştüğünü gözlemiştir.

Sonrasında yapılan çalışmalar, maddelerin süperiletkenlik özelliğinin sadece belli koşullar altında geçerli olduğunu göstermiştir. Bu koşullardan ilki Maddelerin süperiletken özellik göstermeye başladığı kritik sıcaklık değeridir T_c ve bu sıcaklık değeri her maddede farklı farklıdır. Bir diğer koşul ise Kritik akım yoğunluğudur. Süperiletken maddeler, kritik sıcaklığın altında, elektrik Copper çiftleri adı verilen elektronlar çiftleri aracılığıyla iletirler. Bu elektron çiftlerinin sayısı sınırlı olduğundan belirli bir kritik akım yoğunluğunda J_c malzeme dirençli hale geçer. Son olarak kritik manyetik alan koşulu vardır. Bu koşula göre, bir Süperiletken madde belirli bir manyetik alan H_c altında süperiletkenlik özelliği gösterir. Eğer dışarıdan malzemeye etkiyecek bir dış manyetik alanın değeri kritik manyetik alanın üstüne çıkarsa , malzeme süperiletkenlik özelliğini kaybetmektedir. Bu kritik koşulların biribirine bağlılığı (Şekil 8.1) gösterilmiştir.

Süperiletken maddelerin ilginç bir özelliği olan manyetik alanı dışarlamaı 1933 yılında Meissner ve Ochsenfeld tarafından gözlemlenmiştir . Bu etki sayesinde bir manyetik alan etkisi altında soğutulan süperiletken, kendi üzerindeki manyetik alanı dışarlar. (Şekil 8.2)

Süperiletkenler hakkında ilk teorik inceleme london kardeşler tarafından yapılmış olmasına rağmen süper iletkenliğin tam açıklayıcı teorisi(saf malzemeler ve düşük sıcaklıklar için) 1957 yılında John Bardeen, Leon Cooper ve John Schrieffer tarafından yapılmıştır. Her ne kadar BCS Teorisi saf elementler için geçerliliğini korusada, alaşımlardan oluşan kompozit yapıları yüksek sıcaklık süperiletkenlerini tam olarak

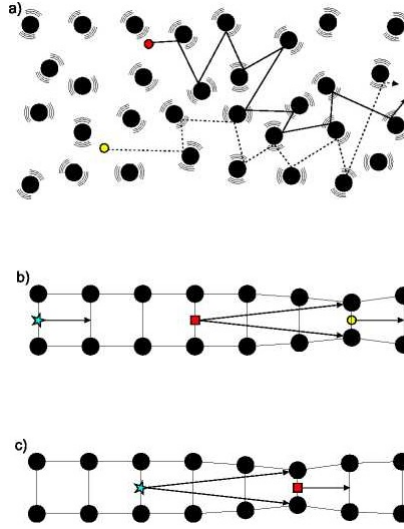


Şekil 8.2: Süperiletken malzemenin içinde bulunduğu manyetik alanı dışlaması

açıklayamamaktadır.

Elektronlar normal iletkenlerde bir elektrik alan etkisiyle hareket ederken (Şekil 8.3 a)'daki gibi termal etkilerle titreşen atomlarla, elektronlar çarpışırlar ve bundan dolayı metal içinde ısı enerjisi oluşur.

BCS teorisin göre süperiletken durumuna gelmiş maddelerde elektronlar çiftlenerek ,cooper çiftleri oluştur. Bu çiftler fermiyon düzeyinden bozon düzeyine geçerler. Bozon düzeyine geçen bu çiftler einstein- bozon yoğunlaşması sonucu ortak bir dalga fonksiyonu sahip olurlar.



Şekil 8.3: Elektronların normal iletkenler içerisinde hareketi ve Cooper çiftlerinin süperiletken malzeme içerisindeki hareketi

Süperiletkenliğin keşfinden sonra Süperiletken malzemelerden teknolojik olarak faydalanma çalışmaları hızlanmıştır. Bunun sonucu olarak süperiletken elektronığıne yönelik çalışmaların sonucu ortaya çıkan önemli buluşlardan biriside 1962 yılında Brian D. Josephson tarafından ortaya konana Josephson etkisidir. Bu etkiye göre, iki süperiletken malzeme nano düzeyde bir yalıtkan ile ayrıldığında Cooper çiftleri bu yalıtkan tabakadan tünelleme etkisiyle geçebilmektedir. Bu yapıya Josephson Ekleme (Josephson Junction) denir.

8.1.1 Süperiletken bir halkada akı kuantumlanması

Akı kuantumlanması, Kuantum olgusunun kendisini makroskopik düzeyde gösterdiği bir kuantum mekaniksel etkidir.

Bir Süper iletken halkadaki akı kuantumlanması, elektromagnetik alan için tanımlanan bozon alanı düşünülerek anlaşılmaya çalışılır. Elektrik alan şiddeti $E(\vec{r})$, alan olasılık genliği yerine geçer. Toplam foton sayısı büyük ise enerji yoğunluğu

$$E^*(\vec{r})E(\vec{r})/4\pi \simeq n(\vec{r})\hbar\omega \quad (8.1)$$

olarak yazılabilir. Burada $n(\vec{r})$ frekansı ω olan fotonların sayısal yoğunluğudur. Bu durumda yarı klasik yaklaşımda elektrik alan şöyle yazılır.

$$E(\vec{r}) \simeq (4\pi\hbar\omega)^{1/2}n(\vec{r})^{1/2}e^{i\theta(\vec{r})} \quad (8.2)$$

$$E^*(\vec{r}) \simeq (4\pi\hbar\omega)^{1/2}n(\vec{r})^{1/2}e^{-i\theta(\vec{r})} \quad (8.3)$$

Burada $\omega(\vec{r})$ alanın fazıdır. kabul edilen bu varsayım , aynı yörüngede çok sayıda bozon içeren bir gaz için geçerlidir. bu durumda, bozon olasılık genliği, tıpkı fotonlar yerine elektromagnetik alan kullanıldığı gibi, klasik bir büyüklük olarak ele alınır. Böylece hem genlik ve hemde faz gözlenebilir büyüklüklere dönüşmüş olur. Bu varsayım normal durumda ki metale uygulanamaz. Çünkü normal durumda ki bir elektron fermiyon olarak davranır ve klasik olarak ele alınamaz.

Parçacık olasılık genliği $\psi(\vec{r})$ olduğu kabul edilirse. Çift yoğunluğunun $n = \psi^*\psi = \text{sabit}$ olduğunu varsayılır. Mutlak sıfırda n doğal olarak, iletkenlik bandındaki elektron yoğunluğunun yarısıdır.

$$\psi = n^{1/2}e^{i\theta(\vec{r})} \quad ; \quad \psi^* = n^{1/2}e^{-i\theta(\vec{r})} \quad (8.4)$$

yazılabilir.

Klasik Mekanikteki Hamilton denklemlerine göre, bir parçacığın bir magnetik alan içindeki hızı, \vec{A} magnetik vektör potansiyeli olmak üzere ;

$$\vec{v} = \frac{1}{m}(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}) = \frac{1}{m}(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}) \quad (8.5)$$

şeklinde yazılır. Buradan parçacık akısı,

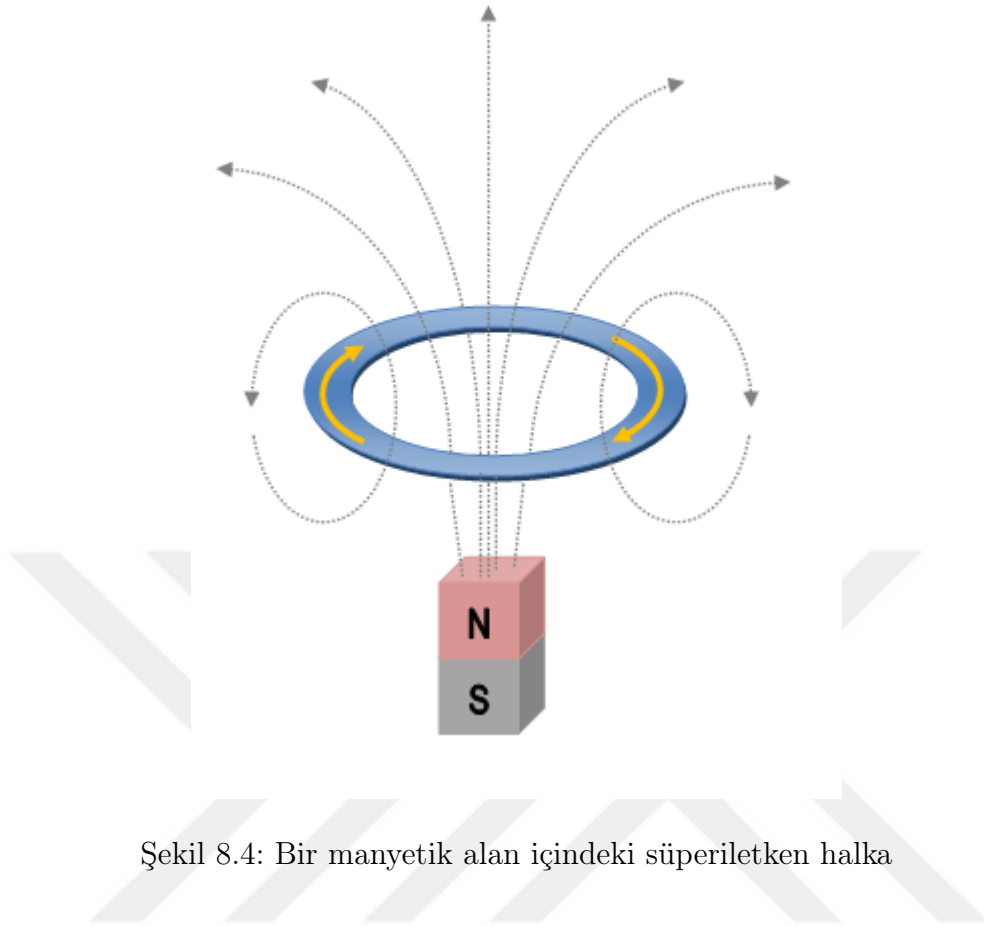
$$\psi^*\vec{v}\psi = \frac{n}{m}(-i\hbar\vec{\nabla}\theta - \frac{q}{c}\vec{A}) \quad (8.6)$$

ve elektrik akım yoğunluğu

$$\vec{j} = q\psi^*\vec{v}\psi = \frac{nq}{m}(-i\hbar\vec{\nabla}\theta - \frac{q}{c}\vec{A}) \quad (8.7)$$

olarak yazılabilir.

Halka içinde ki magnetik akının kuantumlanması denklem (8.7) nin bir sonucu olarak ortaya çıkar. Süperiletken malzemenin içinde, dış yüzeyden iyice içeride kapalı bir C göz önüne alınırsa, Meissner etkisi bu bölgede \vec{B} ve \vec{J} nin sıfır olduğunu gösterir. denklem(8.7) nin sıfır olabilmesi için,



Şekil 8.4: Bir manyetik alan içindeki süperiletken halka

$$\hbar c \vec{\nabla} \theta = q \vec{A} \quad (8.8)$$

olmalıdır. Kapalı eğri üzerinde aşağıdaki integral

$$\oint_C \vec{\nabla} \theta \cdot d\vec{l} = \theta_2 - \theta_1 \quad (8.9)$$

eğriyi bir kez dolandığımızda fazdaki değişmeyi verir.

Klasik yaklaşımda olasılık genliği ölçülebilir bir büyüklüktür. O Halde ψ ölçülebilen bir büyüklüktür. Dolayısıyla ψ tek değerlikli bir fonksiyon olmalıdır. bunun için,

$$\theta_2 - \theta_1 = 2n\pi \quad (8.10)$$

olmalıdır. Stokes teoremine göre,

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{\sigma} = \int_S \vec{B} \cdot \vec{\sigma} = \Phi \quad (8.11)$$

yazıldığında C eğrisi ile çevrili bir S yüzeyi üzerindeki yüzey elemanı $d\vec{\sigma}$ ve S içinden geçen manyetik akı Φ olur. Denklem (8.9) ve denklem(8.8) den

$$\Phi = \left(\frac{2\pi\hbar c}{q}\right)s \quad (8.12)$$

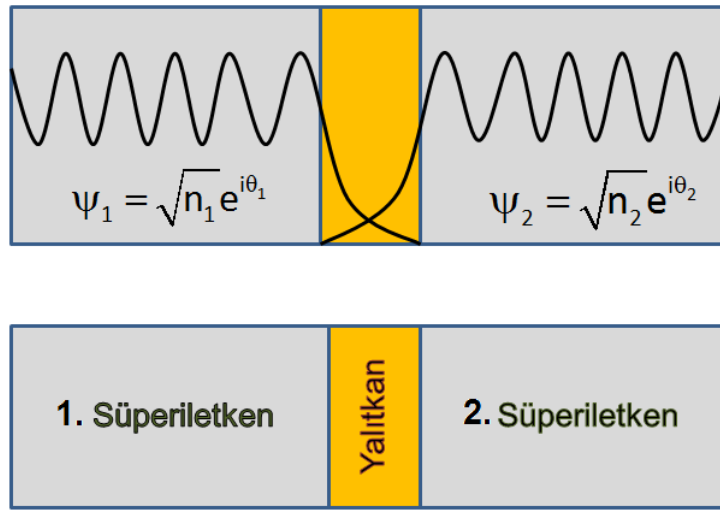
bulunur. Bu sonuca göre , halka içinde ki akı $2\pi\hbar c/q$ nun katları şeklinde kuantize olmuştur.Halka içinde ki akı dış kaynakların Φ_d dış akısı ile, halka yüzeyinde dolaşan süperiletkenlik akımlarının oluşturduğu Φ_i akısının toplamıdır.

$$\Phi = \Phi_d + \Phi_i \quad (8.13)$$

Kuantalanan akı Φ dir.

8.1.2 Josephson eklemi

B.josephson tarafından ortaya konulan, uygun koşullarda iki süperiletken arasındaki yalıtkan tabakadan, süperiletken bir elektron çiftinin tünelleme yolu ile geçebildiği önerilmiş ve bir kaç sene sonrada deneysel olarak gözlenmiştir. (Şekil 8.5)



Şekil 8.5: Josephson Eklemi

8.1.3 DC (doğru akım)Josephson etkisi

Josephson etkisinin incelenmesi akı kuantumlanmasının incelenmesine benzerdir. Kesişimin bir tarafındaki elektron çiftlerinin olasılık genliği ψ_1 , diğer taraftaki elektronların olasılık genliği ψ_2 olsun. İşlem kolaylığı için iki süperiletken özdeş ve potansiyellerini sıfır alınırsın. Zamana bağlı Schrödinger denklemi

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (8.14)$$

her iki genliğe uygulanırsa

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \hbar T \psi_2 \quad ; \quad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \hbar T \psi_1 \quad (8.15)$$

olur. Burada $\hbar T$ yalıtkan içerisindeki transfer etkileşmesini ifade eder. T bir frekans boyutunda olup ψ_1 in bölgeye sızması veya ψ_2 nin birinci bölgeye sızmasının bir ölçüsüdür. Yalıtkan kalınlığı çok büyükse T sıfır olur ve tünelleme gerçekleşmez.

$\psi_1 = n_1^{1/2} e^{i\theta_1}$ ve $\psi_2 = n_2^{1/2} e^{i\theta_2}$ olsun. Buna göre

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{1}{2} n_1^{-1/2} e^{i\theta_1} \frac{\partial n_1}{\partial t} + i\psi_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -iT\psi_2 = -iTn_2^{1/2} e^{i\theta_2} \quad (8.16)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{1}{2} n_2^{-1/2} e^{i\theta_2} \frac{\partial n_2}{\partial t} + i\psi_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -iT\psi_1 = -iTn_1^{1/2} e^{i\theta_1} \quad (8.17)$$

Denklem (8.16) $n_1^{1/2} e^{-i\theta_1}$ ile ve Denklem (8.17) de $n_2^{1/2} e^{-i\theta_2}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{2} \frac{\partial n_1}{\partial t} + in_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -iT(n_2 n_1)^{1/2} e^{i\theta_2} e^{-i\theta_1} = -iT(n_2 n_1)^{1/2} e^{i\delta} \quad (8.18)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial n_2}{\partial t} + in_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -iT(n_2 n_1)^{1/2} e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2} = -iT(n_2 n_1)^{1/2} e^{-i\delta} \quad (8.19)$$

Bulunur. Burada $\theta_2 - \theta_1 = \delta$ olarak tanımlandı.

Denklem (8.18) ve denklem (8.19) un reel ve sanal kısımları ayrı ayrı eşitlenirse,

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = 2T(n_1 n_2)^{1/2} \sin \delta \quad (8.20)$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = 2T(n_1 n_2)^{1/2} \sin \delta \quad (8.21)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -T \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^{1/2} \cos \delta \quad (8.22)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -T \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{1/2} \cos \delta \quad (8.23)$$

bulunur. Eğer eklemi oluşturan iki süperiletken özdeş , yani aynı ise $n_1 \simeq n_2$ olur ve denklem (8.20) ve (8.21) den

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = -\frac{\partial n_1}{\partial t} \quad (8.24)$$

bulunur. ilk süperiletkenden ikinci süperiletkene akım geçişi $\partial n_2/\partial t$ ile (veya $-\partial n_1/\partial t$) orantılı olduğu görülmektedir. Denklem (8.22) ve (8.23) deki sonuçlara göre süperiletken bir çift arasındaki keşişimden geçen J akımı δ faz farkına şu şekilde bağımlı olur

$$J = J_0 \sin \delta = J_0 \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (8.25)$$

Burada J_0 akımı transfer etkileşmesi T ye bağlı olup, voltaj sıfırken keşişimden geçebilecek maksimum akımdır. Bir voltaj uygulanmazken bile , keşişimden geçen akım $\theta_2 - \theta_1$ faz farkına bağlı olarak $-J_0$ ile J_0 arasında bir değerde olacaktır. Bu olguya josephson etkisi denir.

8.1.4 AC (alternatif akım) Josephson etkisi

josephson eklemi üzerine bir doğru akım uygulanması durumunda keşişimi geçen elektron çifti $q = -2e$ olmak üzere qV potansiyeli etkisinde kalır. Bir yandaki çiftin $-eV$,diğer yandaki çiftin ise eV potansiyelinde olduğunu göz önüne alarak, denklem 8.15 deki hareket denklemlerini şu şekilde yazabiliriz.

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \hbar T \psi_2 - eV \psi_1 \quad ; \quad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \hbar T \psi_1 + eV \psi_2 \quad (8.26)$$

DC josephson etkisinde yaptığımız işlemlerin aynısını uygularsak

$$\frac{1}{2} \frac{\partial n_1}{\partial t} + in_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{ie}{\hbar} V n_1 - iT(n_2 n_1)^{1/2} e^{i\delta} \quad (8.27)$$

bulunur. Bu denklem iki kısma ayrıldığında reel kısım

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = 2T(n_2 n_1)^{1/2} \sin \delta \quad (8.28)$$

daha önceki sıfır voltaj bağıntısının aynısı olur. Sanal kısmı ise

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{eV}{\hbar} - T(n_2 n_1)^{1/2} \cos \delta \quad (8.29)$$

olup denklem (8.22) dekinden fazla olarak eV/\hbar terimi gelir. Ayrıca

$$\frac{1}{2} \frac{\partial n_2}{\partial t} + in_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -\frac{ie}{\hbar} V n_2 - iT(n_2 n_1)^{1/2} e^{-i\delta} \quad (8.30)$$

bulunur ve bunun reel sanal kısımlarından şu bağıntılar elde edilir.

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = -2T(n_2 n_1)^{1/2} \sin \delta \quad (8.31)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -\frac{eV}{\hbar} - T(n_2 n_1)^{1/2} \cos \delta \quad (8.32)$$

yine $n_1 \simeq n_2$ alındığında denklem (8.29) ve (8.32) den

$$\partial(\theta_2 - \theta_1)/\partial t = \partial\delta/\partial t = -2eV/\hbar \quad (8.33)$$

bulunur. Denkelem (8.33) ün integrali alınır, kesişime birde DC voltajı uygulandığında olasılık genliğinin faz farkı

$$\delta(t) = \delta(0) - (2eV/\hbar)t \quad (8.34)$$

şeklinde değişir. Buna göre denklem (8.25) deki süperiletken akımı

$$J = J_0 \sin[\delta(0) - (2eV/\hbar)t] \quad (8.35)$$

olup, bu akımın salınım frekansı $\omega = 2eV/\hbar$ olur ve buna AC Josephson Etkisi denir.

8.1.5 Makroskopik kuantum girişimi

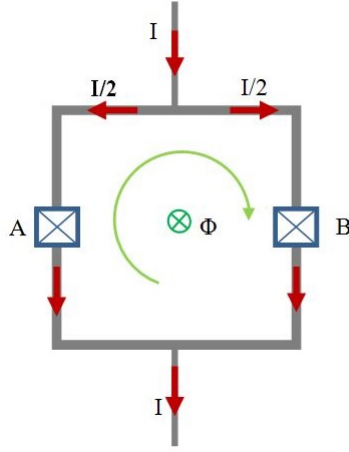
Toplam Φ magnetik akısını çevreleyen kapalı bir halka üzerindeki $\theta_2 - \theta_1$ faz farkı

$$\theta_2 - \theta_1 = \left(\frac{2e}{c\hbar}\right)\Phi \quad (8.36)$$

olup manyetik akı, dış alanların ve kapalı eğrideki akımın oluşturduğu akımın toplamıdır.

(şekil 8.6) de paralel bağlı iki Josephson eklemine göz önüne alalım. Uygulanan voltaj sıfırdır.

A kesişimi içinden geçen bir eğri üzerindeki faz farkı δ_a olsun. B kesişimi içinden geçen eğrideki faz farkıda δ_b olsun. Magnetik alan yokluğunda bu iki faz birbirine eşit olmalıdır. Şimdi içinden bir Φ akısı geçirilsin.



Şekil 8.6: kuantum girişim devresi

$$\delta_b - \delta_a = \left(\frac{2e}{c\hbar}\right)\Phi \quad (8.37)$$

veya

$$\delta_b = \delta_0 + \frac{e}{c\hbar}\Phi \quad ; \quad \delta_a = \delta_0 - \frac{e}{c\hbar}\Phi \quad (8.38)$$

olur. Toplam akım J_a ile J_b nin toplamı olacaktır. Herhangi bir keşişim içinden geçen akım

$$J_{toplam} = J_0 \left[\sin\left(\delta_0 + \frac{e}{c\hbar}\Phi\right) + \sin\left(\delta_0 - \frac{e}{c\hbar}\Phi\right) \right] \quad (8.39)$$

$$= 2(J_0 \sin \delta_0) \cos\left(\frac{e}{c\hbar}\Phi\right) \quad (8.40)$$

olur. Bu bağıntıya göre akım Φ ile değişir ve maksimum değerine

$$\frac{e}{c\hbar}\Phi = n\pi \quad ; \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (8.41)$$

olduğunda erişir ve akımın periyodik özellikte olduğu görülür.

8.2. Süperiletken Kubitler

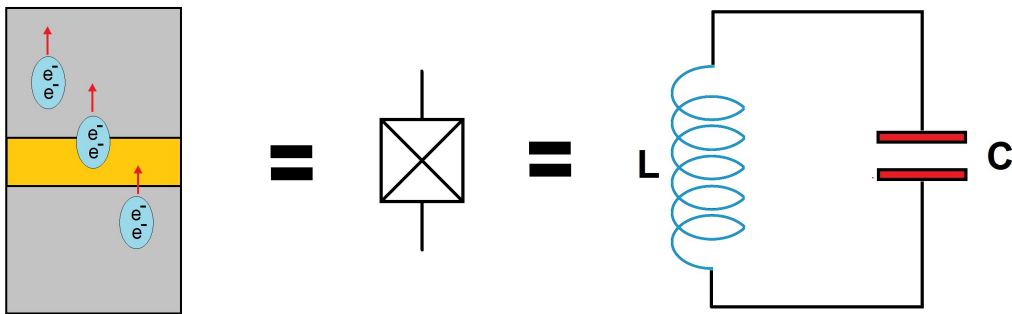
Kuantum bilgisayarlarda devre olarak süperiletken malzemelerden yararlanma çabaları günümüzün yoğun araştırmaları arasındadır.

Josephson etkisine dayanan kuantum biti (kubit) kavramı bu araştırmaların odağında yer almaktadır. Bu makroskopik kuantum sistemi, kuantum tutarlılığı kontrol

etme yeteneğine sahiptir. Her ne kadar ilerlemelerin hızlı olmasına rağmen bu alan hala çözülememiş konularla karşı karşıyadır. Bu alanda fizikçilerin ve mühendislerin araştırabilecekleri bir çok açık alan barındırmaktadır.

Bu bölümde şu ana kadar üzerinde çalışılan süperiletken kubit araştırmaları hakkında bilgi verilecektir.

Bölüm 8.1 de bahsedildiği gibi Kritik sıcaklığın altında bir süper iletkende, elektronlar, 'Cooper çiftleri' şeklinde birbirine bağlanır ve elektrik akımı çok düşük dirençle iletilir. Süper iletken kubitler, Cooper çiftlerinin tünelleşmesine izin verecek kadar ince bir izolasyon katmanı ile ayrılmış iki süper iletken tarafından oluşturulan Josephson eklemeleridir. Genelde Bir Josephson eklemi , devre diyagramlarında çapraz bir kutu olarak gösterilir. Sıfır dirence sahip bir süper akım, kavşak boyunca bir LC devresine eşdeğer şekilde eklem boyunca davranış gösterir. Bir yalıtkan ile ayrılmış iki süperiletken elektrot içeren bir birleşmenin fiziksel olarak eşdeğer devresi, bir kapasitör (C) ve indüktör (L_J) oluşan bir harmonik osilatör devresidir.

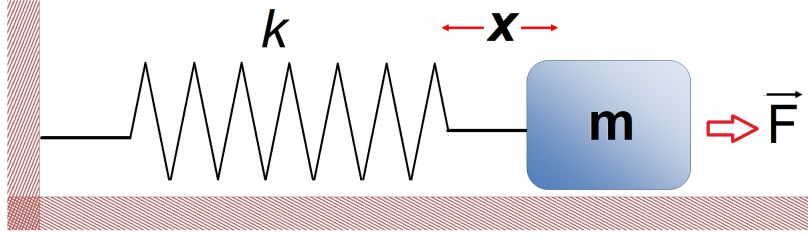


Şekil 8.7: Josephson eklemi ve Eşdeğer devresi

Nonlinerliği, düşük dağılım ile birleştiren Josephson kavşağı çok özel bir osilatördür. Nonlinerlikten maksat, Enerji düzeylerinin anharmonik (düzenli aralıklarla olmaması) olabileceği ve doğru devre konfigürasyonu ile diğerlerinden yeterince ayrılmış iki alçak gerilme durumu elde edilebileceği ve böylece birleşmenin iki seviyeli bir kuantum sistemi veya bir kubit olarak ele alınabileceği anlamına gelir . Bu tür bir enerji ayrımı, kriyojenik soğutucularda, milikelvin sıcaklıklarında oluşturulmuş kubit sistemini incelemeye yetecek kadar büyüktür.

8.2.1 LC - Devresinde Lagrange-Hamilton sistemi

Kubit devreleri incelenirken sistemin kuantize olmuş durumları araştırılır(genelde ikili durumlar).Dolayısıyla bu kısımda kubitleri analiz etmemizde bize yol gösterecek devrelerde Lagrange- Hamilton sistemi hakkında bilgi verilecektir. hatırlatma babında (Şekil 8.8) klasik harmonik osilatörün Lagrange ve Hamilton deklemlerini yazalım.



Şekil 8.8: Klasik kütle- yay harmonik hareketi

m kütle, x hareket miktarı, k yay sabiti ,p momentum olmak üzere sistemin kinetik enerji ve potansiyel eneji

$$\text{Kinetik enerji} = T = \frac{p^2}{2m} = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad (8.42)$$

$$\text{Potansiyel enerji} = K = \frac{kx^2}{2} \quad (8.43)$$

şeklindedir. Buradan Lagrange fonksiyonumuzu $L = T - K$ tanımından elde ederiz.

$$L = T - K = \frac{p^2}{2m} - \frac{kx^2}{2} \quad (8.44)$$

Burada genelleştirilmiş koordinatlar olarak p ve x olduğuna göre, sistemin hareketini tanımlayan diferansiyel denklemler Euler-Lagrange denklemiyle elde edebiliriz.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (8.45)$$

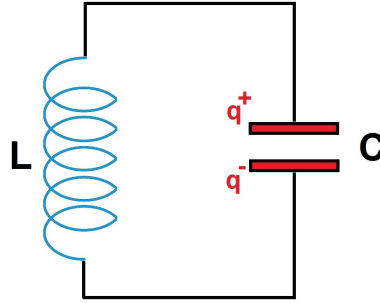
Bu denklemin çözümü sonunda $\ddot{x} + kx = 0$ diferansiyel denklemini elde ederiz. Bu denklemin çözümü ile hareketi tam olarak belirlemiş oluruz.

Legendre dönüşümü ile Sistemin Hamiltonyenini bulabiliriz.

$$H = px - L \quad (8.46)$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = T + K \quad (8.47)$$

Mekanik sistemler ile Elektriksel sistemlerin benzerliğinden yola çıkarak, en basit LC osilasyon devresinin Lagrangeve Hamilton denklemlerini çıkaracağız. Bunun yapılmasındaki amaç, biraz sonra incelenecek olan Süperiletken kubitlerin dinamik denklemlerini ortaya çıkarmaktır.



Şekil 8.9: LC Devresi

(Şekil 8.9) görülen LC devresinin Lagrange fonksiyonunu bulmak için, mekanik sistemlerle , elektrik sistemleri arasında kurulan benzerlikten yararlanılır. Mekanik sistem ile elektriksel sistem değişken karşılıkları (Şekil 8.10) da gösterilmiştir.

Mekaniksel Sistem	Sembol	Elektriksel Sistem	Sembol
Yer değiştirme	X	Yük	q
Hız	X	Akım	I
Kuvvet	F	Potansiyel Farkı	V
Kütle	m	İndüktans	L
Yay sabiti	k	Sığanın Tersisi	1/C

Şekil 8.10: Mekanik ve elektrik sistemlerin değişken dönüşüm tablosu

Elektriksel sistemde kapasitörün eşleniği bir yay olarak alınır. Yayın depoladığı enerji $kx^2/2$ ve benzer şekilde kapasitörün depoladığı enerjide $q^2/2C$ dir. Yay sabiti k

yerine $1/C$ kapasitörün tersini ve yerdeğiştirme x yerinde q yükü konur. İndüktansın biriktirdiği enerji ise $m\dot{x}^2/2$ ile verilen kinetik enerji eşleneğinden $L\dot{q}^2/2$ ile verilir. m kütlesi yerine L indüktansı ve \dot{x} yerine \dot{q} kullanılır.

Sistemin lagrenjiyeni

$$L = T - V = \frac{L\dot{q}^2}{2} - \frac{q^2}{2C} \quad (8.48)$$

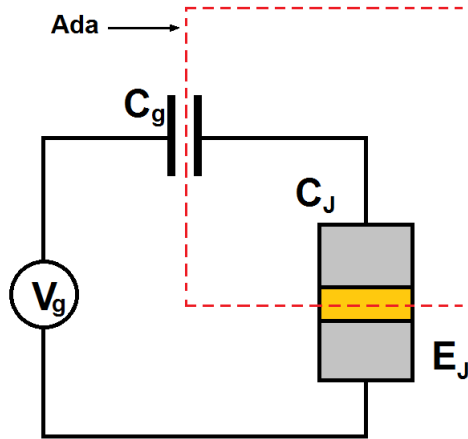
olarak bulunur. Serbestlik derecesi bir tanedir ve o da q yüküdür. Lagrange denklemleri q yük koordinatı için yazılırsa

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = L\ddot{q} + \frac{q}{C} = \ddot{q} + \frac{q}{LC} = 0 \quad (8.49)$$

bulunur. Burada $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ osilasyon frekansıdır.

8.2.2 Cooper çifti kutusu / Yük kubit

Süper iletken tabanlı kuantum bilgisayar devresi oluşturma çalışmalarında, üzerinde çalışılan ilk kubit modeli, bir kondansatörün plakaları arasına yerleştirilmiş izole Josephson ekleminden oluşan yük kubit (Şekil 8.11) veya Cooper-çifti kutusudur.



Şekil 8.11: cooper çifti kutusu/ yük kubit

Kondansatöre (C_g), bir (V_g) voltajı uygulayarak, eklem bölgesinin iki tarafı arasında bir yük farkı oluşturulur. Şekilde kesikli çizgi çerçeveyle gösterilen kısma, Cooper çifti kutusunda "Ada" denmektedir. Ada ya aynı zamanda kapasitif olarak kontrol edilebilir bir voltaj bağlanır (Kapı voltajı).

Şimdi bu cooper çifti devresinin Lagrange fonksiyonunu yazalım.

Önce $I_J = I_c \sin(\phi)$ ve $E_J = I_J V(t)$ Enerji bağıntısından Josephson eklemının enerjijisini bulalım.

$$\int_0^t dt I(t) V(t) = I_c \int_0^t dt \sin\left(2\pi \frac{\Phi_J}{\Phi_0}\right) \frac{d\Phi_J}{dt} = I_c \frac{\Phi_0}{2\pi} \cos\left(2\pi \frac{\Phi_J}{\Phi_0}\right) = -E_J \cos\left(2\pi \frac{\Phi_J}{\Phi_0}\right) \quad (8.50)$$

$$L = \frac{C_J \dot{\Phi}_J^2}{2} + \frac{C_g (\dot{\Phi}_J - V_g)^2}{2} + E_J \cos\left(2\pi \frac{\Phi_J}{\Phi_0}\right) \quad (8.51)$$

Devrenin Hamiltonyenini bulmak için önce $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}}$ eşlenik momentumu bulunur ve bulunan bu eşlenik momentum Legendre dönüşümde $H = p\dot{\Phi} - L$ yerine konularak devrenin Hamiltonyeni bulunur.

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_J} = C_J \dot{\Phi}_J + C_g (\dot{\Phi}_J - V_g) \quad (8.52)$$

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_J} \dot{\Phi}_J - L = \frac{1}{2C_\Sigma} (p - C_g V_g)^2 - E_J \cos\left(2\pi \frac{\Phi_J}{\Phi_0}\right) \quad (8.53)$$

bulunmuş olur.

Eşlenik momentum p yük boyutundadır. Cooper çifti kutusu adası içindeki elektron çiftinin sayısı $n = p/2e$ dir. Kondansatörde biriken elektron çifti sayısı ise $n_g = C_g V_g/2e$ dir. $E_c = e^2/2(C_g + C_J)$ olarak tanımlanırsa,

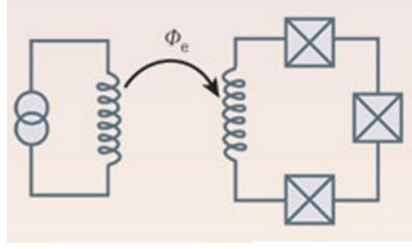
$$H = 4E_c (n - n_g)^2 - E_J \cos\left(2\pi \frac{\Phi_J}{\Phi_0}\right) \quad (8.54)$$

bulunur.

8.2.3 Flux/ Akı kubitleri

İkinci tip ise bir veya daha fazla Josephson bağlantılarının kesintiye uğrattığı bir süper iletken halkadan oluşan akı kübitidir (Şekil 8.12)

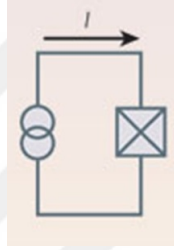
Harici bir endüktörden geçen akım, saat ibresi yönünde veya saatin ters yönünde dönen süper akımları indükleyen döngüyü bağlayan bir manyetik akı Φ üretir.



Şekil 8.12: Akı kubitleri

8.2.4 Faz kubitleri

Üçüncü kubit tipi, bir akım kaynağına bağlı tek bir Josephson birleşiminden oluşan faz kubitidir(Şekil 8.13)



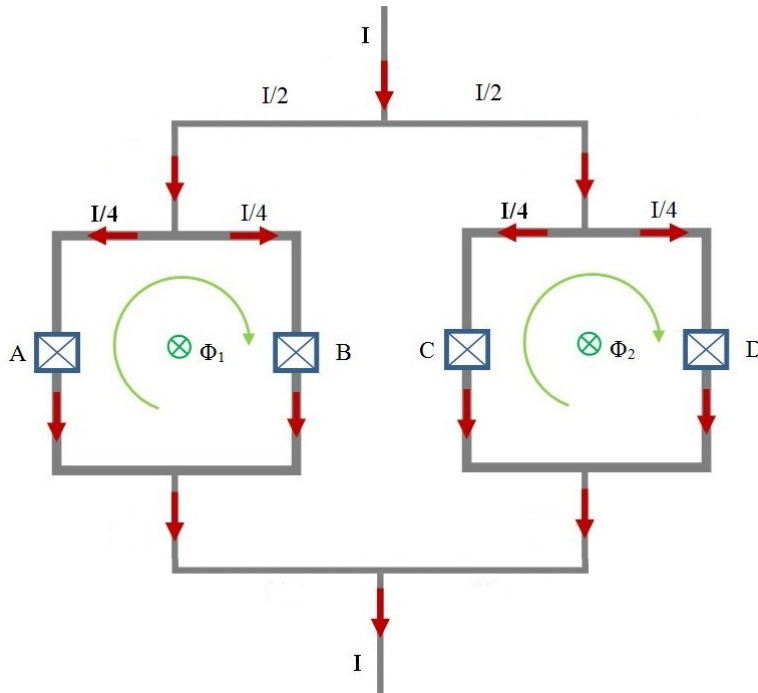
Şekil 8.13: Faz kubitleri

Bağlantı boyunca akan akım (I), birleşme yerinin iki yüzü arasındaki faz farkını değiştirir.

Bu üç çeşit Kubit modeli laboratuvarlarda başarılı bir şekilde kullanılmıştır ve üst üste binme(süperpozisyon) yapabilmeleri ve kontrol edilebilme özellikleri gösterilmiştir.[31]

9. ÇOKLU KUANTUM GİRİŞİM DEVRESİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde süperiletken josephson eklemleri ile oluşturulmuş çoklu kuantum girişim devresinin analizi yapılacaktır. Bölüm 8.1.5 de bahsedilen iki JJ eklemi ile oluşturulan kuantum girişim devresinin genişletilmiş hali (Şekil 9.1) de gösterilmiştir.



Şekil 9.1: çoklu girişim devresi- iki akı

Devrede A-B ve C-D JJ Eklemleri vardır.

A Eklemleri için ;

$$\delta_A = \delta_0 + \frac{e}{\hbar c} \Phi_1 \quad (9.1)$$

ve josephson akımını yazalım;

$$I_A = \frac{I}{4} = I_0 \sin \delta_A = I_0 \sin \left(\delta_0 + \frac{e}{\hbar c} \Phi_1 \right) \quad (9.2)$$

B Eklemleri için ;

$$\delta_B = \delta_0 - \frac{e}{\hbar c} \Phi_1 \quad (9.3)$$

ve josephson akımını yazalım;

$$I_B = \frac{I}{4} = I_0 \sin \delta_B = I_0 \sin \left(\delta_0 - \frac{e}{\hbar c} \Phi_1 \right) \quad (9.4)$$

C Eklemi için ;

$$\delta_C = \delta_0 + \frac{e}{\hbar c} \Phi_2 \quad (9.5)$$

ve josephson akımını yazalım;

$$I_C = \frac{I}{4} = I_0 \sin \delta_C = I_0 \sin \left(\delta_0 + \frac{e}{\hbar c} \Phi_2 \right) \quad (9.6)$$

D Eklemi için ;

$$\delta_D = \delta_0 - \frac{e}{\hbar c} \Phi_2 \quad (9.7)$$

ve josephson akımını yazalım;

$$I_D = \frac{I}{4} = I_0 \sin \delta_D = I_0 \sin \left(\delta_0 - \frac{e}{\hbar c} \Phi_2 \right) \quad (9.8)$$

(9.2) ve (9.4) Denklemlerindeki I_A ve I_B akımlarını toplarsak

$$I_A + I_B = I_{AB} = I_0 \left[\sin \left(\delta_0 + \frac{e}{\hbar c} \Phi_1 \right) + \sin \left(\delta_0 - \frac{e}{\hbar c} \Phi_1 \right) \right] \quad (9.9)$$

ve

$\sin x + \sin y = 2 \sin[(x+y)/2] \cos[(x-y)/2]$ trigonometrik özdeşliğini kullanırsak,

$$I_{AB} = 2I_0 \sin \left(\frac{\delta_0 + \frac{e}{\hbar c} \Phi_1 + \delta_0 - \frac{e}{\hbar c} \Phi_1}{2} \right) \cos \left(\frac{\delta_0 + \frac{e}{\hbar c} \Phi_1 - \delta_0 + \frac{e}{\hbar c} \Phi_1}{2} \right) \quad (9.10)$$

$$= 2I_0 \sin \left(\frac{2\delta_0}{2} \right) \cos \left(\frac{2e\Phi_1}{2\hbar c} \right) \quad (9.11)$$

$$= 2I_0 \sin(\delta_0) \cos \left(\frac{e\Phi_1}{\hbar c} \right) \quad (9.12)$$

Bulunur. Aynı şekilde (9.6) ve (9.8) Denklemlerindeki I_C ve I_D akımlarını toplarsak

$$I_C + I_D = I_{CD} = I_0 \left[\sin \left(\delta_0 + \frac{e}{\hbar c} \Phi_2 \right) + \sin \left(\delta_0 - \frac{e}{\hbar c} \Phi_2 \right) \right] \quad (9.13)$$

ve

$\sin x + \sin y = 2 \sin[(x+y)/2] \cos[(x-y)/2]$ trigonometrik özdeşliğini kullanırsak,

$$I_{CD} = 2I_0 \sin\left(\frac{\delta_0 + \frac{e}{\hbar c}\Phi_2 + \delta_0 - \frac{e}{\hbar c}\Phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta_0 + \frac{e}{\hbar c}\Phi_2 - \delta_0 + \frac{e}{\hbar c}\Phi_2}{2}\right) \quad (9.14)$$

$$= 2I_0 \sin\left(\frac{2\delta_0}{2}\right) \cos\left(\frac{2e\Phi_2}{2\hbar c}\right) \quad (9.15)$$

$$= 2I_0 \sin(\delta_0) \cos\left(\frac{e\Phi_2}{\hbar c}\right) \quad (9.16)$$

Bulunur. Şimdi toplam akımı bulmak için denklemler (9.12) ve (9.16) toplanırsa

$$I_{\text{toplamlam}} = I_{AB} + I_{CD} = 2I_0 \sin(\delta_0) \cos\left(\frac{e\Phi_1}{\hbar c}\right) + 2I_0 \sin(\delta_0) \cos\left(\frac{e\Phi_2}{\hbar c}\right) \quad (9.17)$$

$$= 2I_0 \sin(\delta_0) \left[\cos\left(\frac{e\Phi_1}{\hbar c}\right) + \cos\left(\frac{e\Phi_2}{\hbar c}\right) \right] \quad (9.18)$$

Bulunur. Bu sefer $\cos x + \cos y = 2 \cos\left[\frac{x+y}{2}\right] \cos\left[\frac{x-y}{2}\right]$ trigonometrik özdeşliği kullanılırsa,

$$I_{\text{toplamlam}} = 4I_0 \sin(\delta_0) \cos\left(\frac{e\Phi_1}{\hbar c} + \frac{e\Phi_2}{\hbar c}\right) \cos\left(\frac{e\Phi_1}{\hbar c} - \frac{e\Phi_2}{\hbar c}\right) \quad (9.19)$$

$$I_{\text{toplamlam}} = 4I_0 \sin(\delta_0) \cos\left[\frac{e}{\hbar c}(\Phi_1 + \Phi_2)\right] \cos\left[\frac{e}{\hbar c}(\Phi_1 - \Phi_2)\right] \quad (9.20)$$

bulunur.

Eğer $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$ alınırsa;

$$I_{\text{toplamlam}} = 4I_0 \sin(\delta_0) \cos\left[\frac{e}{2\hbar c}(\Phi + \Phi)\right] \cos\left[\frac{e}{2\hbar c}(\Phi - \Phi)\right] \quad (9.21)$$

$$= 4I_0 \sin(\delta_0) \cos\left[\frac{e}{2\hbar c}(2\Phi)\right] \cos 0 \quad (9.22)$$

$$I_{\text{toplamlam}} = 4I_0 \sin(\delta_0) \cos\left(\frac{e}{\hbar c}\Phi\right) \quad (9.23)$$

bulunur.

10. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Süperiletken tabanlı kuantum bilgisayarları ve kuantum devre hesaplamaları incelendi. Kuantum hesaplama algoritmaları ve süperiletken kubit uygulamaları hakkında literatür taraması yapılarak, matematiksel notasyon hakkında ayrıntılı bilgi verildi.

Süperiletken devre elemanların temel elemanı olan Josephson eklemi incelenmiştir. Süperiletken Kuantum girişim devresi incelenerek, Çoklu girişim devresi için Akı ve akım ilişkisi ilk kez bu çalışmada yapılmıştır.

Süperiletken kubitlerden oluşan devrelerin analizi için Hamilton- Lagrange mekaniği, Yük kubitleri üzerinde uygulanarak devrenin Hamiltonyeni çıkarılmıştır. Akı ve Faz kubitleri hakkında bilgi verilmiştir.

Kuantum hesaplama yöntemleri, kuantum algoritmaları ve süperiletken kubitlerin çalışma ilkesi açıklanarak bir kuantum bilgisayarının aşamaları incelenmiştir.

Laboratuarlarda oluşturulan kuantum devrelerinin yapımında karşılaşılabilecek bazı problemler tanımlandı. Süper iletkenlerden oluşan kubitlerin bu problemlere nasıl yardımcı olabileceğini açıklandı.

Kuantum bilgisayarların geleceğin dünyasında ülkelerin refahına katacağı katkıları şüphesiz ki büyük olacaktır. Gelişmiş ülkelerin bu konuya büyük önem vermeleri ve bu konuda çalışan, araştırma yapan laboratuarlara büyük yatırımlar yapmaları elbette sadece refah düzeyinin yükseltilmesi ile ilgili değildir. Gelecekte teknolojinin gelişmesi ile birlikte ortaya çıkacak bilgi güvenliği sorunu, devletlerin bu konuya büyük önem vermelerinin nedeni olarak görülmektedir.

Kuantum bilgisayarların oluşturulmasında, süperiletken kubitlerin diğer kubit oluşturma yaklaşımlarından(Fotonik, İyon yakalama, Nükleer manyetik rezonans gibi.) daha avantajlı olduğu görülmektedir.

Bu avantajları şöyle sıralayabiliriz.

Nanoteknoloji bilimi sayesinde kuantum devrelerin mikroskopik ölçekte yapılmasına süperiletken devreler daha uygundur. Her ne kadar şu an için yapılan süperiletken kubitlerin mutlak sıcaklık derecesine yakın bir sıcaklık ortamında olmasını gerektirir-se, Günümüzde Yüksek sıcaklık süperiletken araştırmaların sonucuda elde edilecek

süper iletkenlerle bu sorun giderilebilir. Dolayısıyla gelecekte süperiletken bilgisayarların yapımı daha ekonomik hale gelecektir.

Ülkemizde bu konuda yapılacak çalışmalara destek vermesi ve bu desteği verirken de kaynakları verimli kullanma önceliğini göz önünde bulundurması gerekmektedir.

Ülke olarak zaman kaybetmeden kuantum bilgisayarı çalışmalarında hem geri kalmamak hem de gelecekte yaşanabilecek bilgi güvenliği sorunuyla karşılaşmamak için şimdiden Kuantum bilgisayarlar konusunda ki çalışmalara başlanması gerekmektedir.



Kaynakça

- [1] Kaye, Phillip, Raymond Laflamme, and Michele Mosca. An introduction to quantum computing. Oxford University Press, 2007.
- [2] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum computation and quantum information, Cambridge (2010).
- [3] Umesh Vazirani, Quantum Computation lecture notes,CS294-4,fall 2016 <https://people.eecs.berkeley.edu/~vazirani/f16quantum.html>
- [4] Preskill, J., 1998, Lecture Notes for Physics 229; Quantum Information and Computation, California Institute of Technology, 319 p.
- [5] Lecture Notes On Quantum Computation Cornell University, Physics 481-681, CS 483; Spring, 2006 , N. David Mermin
- [6] Harekete iki Farklı Bakış: Kuantum Mekaniği ve Klasik Mekanik,Prof.Dr.Abdullah Verçin , Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü ,06100, Tandoğan-Ankara
- [7] Karaoğlu, Bekir. Kuantum mekaniğine giriş. Seçkin yayıncılık, 2006.
- [8] Kuantum Fisher Bilgisi Optimizasyonu Önerisi ve Dolanıklık Ölçütleri ile ilişkisi - Volkan EROL Okan Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü/ Bilgisayar müh. ABD ,Doktora tezi , 101 s. , 2015 101 s.
- [9] Sıvı hal NMR kuantum bilgisayarıyla bazı sistemlerin kuantum simülasyonu Deniz TÜRKPENÇE, Ondokuz Mayıs Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora tezi, 133 s., 2013
- [10] ŞEN, Gürkan Aydın. Kuantum bilgi-işlem algoritmaları üzerine bir inceleme. 2002. PhD Thesis. Ege Üniversitesi.
- [11] Heisenberg spin sistemlerinde kuantum dolanıklığın incelenmesi / Seyit Deniz HAN İstanbul Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü ,Yüksek Lisans ,2013 ,87 s.

- [12] SI ($S=3/2$, $I=1/2$ ve $3/2$) spin sistemlerinde kuantum dolanıklık ve kuantum iletişimdeki bazı uygulamaları / Ahmet GÜN Ondokuz Mayıs Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi ,2011, 169 s.
- [13] Kuantum anahtar dağıtımında bilgi uzlaştırma, Mustafa TOYRAN Gebze Teknik Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı Doktora tezi, 2016, 111 s.
- [14] P. A. Benioff. The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines. *Journal of Statistical Physics*, 22(5):563 , 591, may 1980.
- [15] D. Deutsch. Quantum theory, the Church,Turing principle and the universal quantum computer. In *Proceedings of the Royal Society of London*, volume 400 of A, page 97, 1985.
- [16] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can Quantum-Mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 47(10):777-780, 1935.
- [17] P. W. Shor. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring. In *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 124-134. IEEE Computer Society Press, 1994.
- [18] Deutsch, David; Jozsa, Richard, Rapid Solution of Problems by Quantum Computation, *mathematical and Physical Sciences*, Volume 439, Issue 1907, pp. 553-558, 1992
- [19] Sakurai, J.J. 1994. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing, 500 p., USA.
- [20] Turing A. , 1936. On computable numbers with an application to the entscheidungs problem, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42, 230–265.
- [21] Shannon C. E. ,1948. A mathematical theory of communication, *Bell System Tech. J.*, 27, 379-423, 623-656.
- [22] Griffiths D.J. , 1995. *Introduction to quantum mechanics*, 2nd ed., Prentice Hall Inc, New Jersey.

- [23] Einstein A., Podolsky B. Rosen N. , 1935. Can Quantum mechanical description of physical reality be considered complete?, Physical Review, 47, 777-780.
- [24] Grover L. K. , 1997. Quantum mechanics helps in searching a needle in a haystack, Phys. Rev. Lett. 97, 325
- [25] Preskill, J., 1998, Lecture Notes for Physics 229; Quantum Information and Computation, California Institute of Technology, 319 p.
- [26] Rızaoğlu, Emine, Kuantum Mekaniği Çözümlü problem kitabı. İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi yayını, 1994.
- [27] Cansoy, Çetin, Kuantum Mekaniği . İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi yayını, 1994.
- [28] Toyran, Mustafa. EEB Mühendisliklerinde Kuantum Hesaplama Eğitimi. 3. EEB Mühendislikleri Eğitimi Sempozyumu (2006).
- [29] Toyran, M., Pedersen, T. B., Hasekioğlu, A. A., Can, M. A., Berber, S. Bilgi Güvenliğinde Kuantum Teknikler. IV. Ağ Ve Bilgi Güvenliği Sempozyumu 2011 Bildiriler Kitabı, 98. EMO Yayın No: sk/2011/11
- [30] Di Vincenzo D.P. ,1995. Two-bit gates are universal for quantum computation, Phys.Rev.A, 51, 1015-1022.
- [31] Y. Nakamura , Yu. A Pashkin, and J. S. Tsai, Nature 398, 786 (1999).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Hüseyin ULUCAN
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve Yeri : 01.03.1965/Pülümür
Medeni hali : Evli
Telefon : 05423268274
Fax : -
e-mail : huposta@gmail.com

Eğitim

Derece	Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek Lisans	İstanbul Gelişim Üniversitesi Mekatronik Mühendisliği	-
Lisans	İstanbul Üniversitesi Fen Fak. Fizik Bölümü	1997
Lise	Büyükçekmece Lisesi	1984

İş deneyimi

Yıl	Yer	Görev
1997-2000	Ümran boru A.Ş.	Kalite kontrol müdür
2000-2003	Mateka Makine A.Ş.	Toplam kalite koordinatörü
2003-2006	TÜV teknik belgelendirme	Baş denetçi
2006-2017	SVK-Niutest Teknik belgelendirme	Genel müdür

Yabancı Dil

İngilizce

Yayımlar

-

Hobiler

Matematiksel Fizik
Toplam Kalite Yönetimi



ĞELİŐİM ĞELİŐMEKTİR..

