T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIRLI DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLERİN YARIGRUPLARI VE SOYUT CAUCHY PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehtap KAYIKÇI (YILMAZ)

Balıkesir, 1997

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIRLI DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLERİN YARIGRUPLARI VE SOYUT CAUCHY PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehtap KAYIKÇI (YILMAZ)

Tez Danışmanı: Prof.Dr. Musa ERDEM

Sınav Tarihi: 05.09.1997

Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Musa ERDEM
Prof. Dr. S. Ahmet KILIÇ
Prof. Dr. Turgut BAŞKAN

Balıkesir, 1997

ÖZ

SINIRLI DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLERİN YARIGRUPLARI ve SOYUT CAUCHY PROBLEMİ

Mehtap KAYIKÇI (YILMAZ)

Balıkesir üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilimdalı

(Y. Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Prof.Dr. Musa ERDEM)

Balıkesir, 1997

Sınırlı doğrusal dönüşümlerin yarıgrupları, vektör-değerli fonksiyonların türevleri, soyut Riemann integrali, yarıgrupların üreteçleri ve soyut Cauchy problemleri birbirleri ile ilişki içindedirler. Derleme niteliğinde olan bu çalışmada yukarıdaki kavramları tanıtmak ve bunlar arasındaki bazı bağıntıları vermek amaçlanmıştır.

Çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm süreklilik koşulları olan yarıgrupların temel tanımlarına ve böyle yarıgrupların örneklerine ayrılmıştır.

İkinci bölümde vektör-değerli fonksiyonlar için türev kavramı ve soyut Riemann integral tanımı verilmiş ve soyut Riemann integralinin, kaynaklarda ispatları bulunmayan, bazı özellikleri kanıtlanmıştır.

Üçüncü bölümde üreteç kavramı verilmiş ve üreteçle ilgili olan temel teoremler ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde iki soyut Cauchy problemi tanıtılmış ve problemin çözümleri için temel varlık ve teklik teoremleri incelenmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: yarıgrup / soyut Riemann integrali / sonsuz küçük üreteç / Cauchy problemi.

ABSTRACT

SEMIGROUPS OF BOUNDED LINEAR OPERATORS AND THE ABSTRACT CAUCHY PROBLEM

Mehtap KAYIKÇI (YILMAZ)

Balıkesir University, Instute of Science, Department of Mathematic

(M.Sc.Thesis / Supervisor : Prof.Dr. Musa ERDEM)

Balıkesir-Türkiye, 1997

The semigroups of bounded linear operators, the derivatives of vector-valued functions, the abstract Riemann integral, generators of semigroups and Abstract Cauchy problems are related with each other.

The aim of this study which can be qualified as a collection is to introduce above concepts and give some relations among them.

The study consists of four chapter.

The first chapter is devoted to the basic definitions of semigroup which have continuity conditions and some examples of such semigroups.

In the second chapter, the concept of the derivative for vector-valued functions and the definition of the abstract Riemann integral are given. Moreover, some properties of the abstract Riemann integral whose proofs do not exist in sourcebooks are proved.

In the third chapter, the notion of generator and related theorems are considered.

In the fourth chapter, two abstract Cauchy problems are introduced, and the main existence and uniqueness theorems for their solutions are given.

KEY WORDS: semigroup / abstract Riemann integral / infinitesimal generator / Cauchy problem.

İÇİNDEKİLER

sayfa

ÖZ, ANAHTAR SÖZCÜKLER	i
ABSTRACT, KEY WORDS	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOL LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ	v
1. TANIMLAR VE ÖRNEKLER	1
1.2 Tanımlar	1
1.3 Örnekler	6
4. VEKTÖR-DEĞERLİ FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ VE İNTEGRALLERİ	15
2.1 Vektör-Değerli Fonksiyonların Türevleri	15
2.2 Vektör-Değerli Fonksiyonların İntegralleri	17
3. SONSUZ KÜÇÜK ÜRETEÇLER	35
4. SOYUT CAUCHY PROBLEMİ	51
KAYNAKÇA	63

SEMBOL LİSTESİ

Simge	Adı
X	Banach uzayı
B(X)	X doğrusal uzayından kendisine olan bütün sınırlı (sürekli) doğrusal dönüşümlerin Banach uzayı
$T(t)\ ,\ t \geq 0$	X doğrusal uzayından kendisine olan sınırlı doğrusal dönüşüm
$\{ T(t) : t \geq 0 \} = (T(t))_{t \geq 0}$	Sınırlı doğrusal dönüşümlerin bir yarıgrubu
C	Kompleks sayılar kümesi
$C_s[0, \infty[$	$C_s[0,\infty[= \{f \mid f: [0, \infty[\to \mathbf{C}$ sürekli, $\lim_{x\to\infty} f(x) < \infty \}$
$L^p\,]0,\infty[$	] 0, ∞[aralığı üzerinde tanımlı, kompleks değerli ve mutlak değerlerinin p. kuvvetleri integrallenebilen bütün kompleks değerli fonksiyonların uzayı
$C_0^\infty[0,\infty[$	Her mertebeden türevi olan ve kompakt dayanaklı bütün kompleks değerli fonksiyonların kümesi
P	[a, b] aralığının bir bölüntüsü
$\mu(P)$	P bölüntüsünün normu
S(f,P)	P bölüntüsüne karşılık gelen toplam
A	Bir yarıgrubun sonsuz küçük üreteci (ya da üreteci)
D(A)	A dönüşümünün tanım kümesi

ÖNSÖZ

İlerde devam etmesini istediğim çalışmalarıma bir temel oluşturacağını düşündüğüm 'Sınırlı doğrusal Dönüşümlerin Yarıgrupları ve Soyut Cauchy Problemi' isimli tezimi değerli hocam Prof.Dr. Musa ERDEM 'le beraber tamamladım.

Benimle çalışmayı kabul ettiği, tecrübeleriyle her zaman bana yardımcı olduğu ve çalışmamın büyük bir kısmının oluşmasını sağladığı için sayın hocam Prof.Dr. Musa ERDEM 'e, çalışmalarım sırasında desteğini hiç esirgemeyen sayın hocam Prof.Dr. Seyit Ahmet KILIÇ 'a, iyi bir matematikçi olmamız için bütün imkanlarını kullanan sayın hocam Prof.Dr. Turgut BAŞKAN 'a sonsuz teşekkürler ediyorum.

Ayrıca hayatımın her aşamasında bana hep destek olan canım anneme, babama ve kardeşlerime, her zaman moral kaynağım olan sevgili eşime, teknik konularda yardımcı olan Ahmet SUBAŞI 'na ve tüm arkadaşlarıma da teşekkürü bir borç biliyorum.

Balıkesir,1997 Mehtap KAYIKÇI (YILMAZ)

1. TANIMLAR VE ÖRNEKLER

Yarıgrup cebirsel bir kavramdır. Boş olmayan bir G kümesi ile bunun öğeleri arasında

$$x \in G\,,\; y \in G \;\Rightarrow\; x{*}y \in G$$

özelliği olan bir $*$ ikili işleminin oluşturduğu $(G,*)$ sıralı ikilisine bir *yarıgrup* denir.

Sınırlı doğrusal dönüşümlerin bir yarıgrubu dendiğinde kabaca, gerçel ya da karmaşık bir Banach uzayı üzerinde bileşke işlemi altında kapalı olan sınırlı doğrusal dönüşümlerin bir ailesi anlaşılacaktır. Sınırlı doğrusal dönüşümlerin bir yarıgrubuna doğrusal (lineer) yarıgrup dendiği de olur.

Bu bölümün ilk kesiminde doğrusal yarıgrupların, süreklilik koşullarına dayalı temel tanımları ve ikinci kesiminde doğrusal yarıgrup örnekleri verilecektir. Temel tanımlar, [1], [2], [3] ve [4] numaralı kaynaklarda bulunabilir.

1.1 Tanımlar

X bir Banach uzayı olsun. B(X) ile X uzayından kendisine olan bütün sınırlı (sürekli) doğrusal dönüşümlerin doğrusal uzayı gösterilir.

$$\|\,.\,\| : B(X) \to IR \quad , \quad \|T\| = \sup\{\, \|Tx\| : \|x\| \le 1 \,\}$$

fonksiyonu B(X) üzerinde bir normdur ve B(X) bu norma göre bir Banach uzayıdır.

1.1.1 Tanım: $(T(t))_{t\geq 0}$ ile de gösterilen $\{ T(t) : t \geq 0 \} \subset B(X)$ ailesi

(YG$_1$) $T(0)=I$, X üzerinde özdeşlik dönüşümü

(YG$_2$) Her s, $t \in \mathbb{R}_+$ için $T(s+t)=T(s)T(t)$

özelliklerini sağlıyorsa ya da daha soyut deyimle, bu aile yardımıyla

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \to B(X) \quad , \quad \varphi(t)=T(t)$$

biçiminde tanımlanan φ dönüşümü, $(\mathbb{R}_+ ,+)$ toplamsal yarıgrubundan $(B(X),.)$ çarpımsal yarıgrubu içine bir homomorfizma oluyorsa bu aileye X üzerinde sınırlı doğrusal dönüşümlerin bir (bir-parametreli) *yarıgrubu* denir. $(B(X),.)$ ikilisindeki ve (YG$_2$) özelliğindeki çarpma bileşke anlamındadır.

(YG$_2$), $\{ T(t) : t \geq 0 \}$ ailesinin bileşke işlemine göre kapalı ve dolayısıyla bir yarıgrup olduğunu ifade eder. (YG$_2$) özelliğinden dolayı, her $s,t \in \mathbb{R}_+$ için

$$T(s)T(t)=T(s+t)=T(t+s)=T(t)T(s)$$

olduğundan $\{ T(t) : t \geq 0 \}$ yarıgrubunun değişme özelliği vardır. (YG$_1$) ve (YG$_2$) kullanılarak $T(0)$ dönüşümünün bir yarıgrubun birim öğesi olduğu kolayca gösterilebilir.

1.1.2 Tanım: $\{ T(t) : t \geq 0 \}$, X üzerinde sınırlı doğrusal dönüşümlerin bir yarıgrubu olsun. Eğer her bir $x \in X$ için

(YG$_3$) $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x$

ya da buna denk olarak, her bir $x \in X$ için

$$\lim_{t\to 0^+} \| T(t)x - x \| = 0$$

oluyorsa bu yarıgruba *kuvvetli sürekli yarıgrup* ya da *C_0-yarıgrup* denir.

Tanımdaki limit, sabit bir $x \in X$ için $T(0)x = x$ olduğundan,

$$\varphi_x : [\,0, \infty\,[\to X \quad , \quad \varphi_x(t)=T(t)x$$

fonksiyonunun 0 noktasında sağ sürekli olması anlamına gelir.

$\{ T(t) : t \geq 0 \} \subset B(X)$ bir C_0-yarıgrup olsun. (YG_3) özelliği ve

$$\| T(t+h)x - T(t)x \| \leq \| T(t) \| \, \| T(h)x - x \| \quad , \quad t>0 \quad , \quad h>0$$

eşitsizliği

$$\lim_{h \to 0^+} \| T(t+h)x - T(t)x \| = 0$$

ya da

$$\lim_{h \to 0^+} T(t+h)x = T(t)x$$

olmasını, yani $\varphi_x(t)=T(t)x$ fonksiyonunun t noktasında sağ sürekli olmasını gerektirir. Yine (YG_3) özelliği

$$\| T(t-h)x - T(t)x \| \leq \| T(t-h) \| \, \| x - T(h)x \| \quad , \quad t>0 \quad , \quad 0<h<t$$

eşitsizliği ve 3.Bölümdeki 3.8 Teorem

$$\lim_{h \to 0^-} \| T(t+h)x - T(t)x \| = \lim_{h \to 0^+} \| T(t-h)x - T(t)x \| = 0$$

ya da

$$\lim_{h \to 0^-} T(t+h)x = T(t)x \quad , \quad t+h \geq 0$$

olduğunu yani, φ_x (t)=T(t)x fonksiyonunun t noktasında sol sürekli olduğunu gerektirir.

Bu iki sonuç, { T(t) : t ≥ 0 } ⊂ B(X) ailesinin bir C_0-yarıgrup olması koşulu altında φ_x fonksiyonunun sürekli olduğunu verir ve 1.1.2 Tanım 'a denk olan aşağıdaki tanıma öncülük eder.

1.1.3 Tanım: { T(t) : t ≥ 0 } ⊂ B(X) ailesi 1.1.1 Tanım anlamında bir yarıgrup olsun. Her bir $t_0 \geq 0$ ve her bir $x \in X$ için

(YG_4) $\lim\limits_{t \to t_0} \| T(t)x - T(t_0)x \| = 0$

ya da

$$\lim_{t \to t_0} T(t)x = T(t_0)x$$

oluyorsa, { T(t) : t ≥ 0 } yarıgrubuna *güçlü sürekli yarıgrup* denir.

1.1.4 Tanım: { T(t) : t ≥ 0 }, X üzerinde sınırlı doğrusal dönüşümlerin bir yarıgrubu olsun. Eğer,

(YG_5) $\lim\limits_{t \to 0^+} \| T(t) - I \| = 0$

ya da

$$\lim_{t \to 0^+} T(t) = I$$

oluyorsa bu yarıgruba *düzgün sürekli yarıgrup* denir. Tanımdaki limit,

$$\varphi : [\, 0,\ \infty\, [\ \to B(X) \quad , \quad \varphi(t) = T(t)$$

fonksiyonunun 0 noktasında sağ sürekli olması anlamına gelir.

$\{ T(t) : t \geq 0 \} \subset B(X)$ düzgün sürekli yarıgrup olsun. (YG_5) özelliği ve

$$\| T(t+h) - T(t) \| \leq \| T(t) \| \, \| T(h) - I \| \quad , \quad t \geq 0 \quad , \quad h>0$$

eşitsizliği

$$\lim_{h \to 0^+} \| T(t+h) - T(t) \| = 0$$

ya da

$$\lim_{h \to 0^+} T(t+h) = T(t)$$

olduğunu yani, $\varphi(t) = T(t)$ fonksiyonunun t noktasında sağ sürekli olduğunu verir. Yine (YG_5) özelliği

$$\| T(t-h) - T(t) \| \leq \| T(t-h) \| \, \| I - T(h) \| \quad , \quad t \geq 0 \quad , \quad o<h<t$$

eşitsizliği 3.8 Teorem

$$\lim_{h \to 0^-} \| T(t+h) - T(t) \| = \lim_{h \to 0^+} \| T(t-h) - T(t) \| = 0$$

ya da

$$\lim_{h \to 0^-} T(t+h) = T(t) \quad , \quad t \geq 0 \quad , \quad t+h \geq 0$$

olduğunu yani, $\varphi(t) = T(t)$ dönüşümünün t noktasında sol sürekli olduğunu, gerektirir.

Bu iki sonuçtan, $\{ T(t) : t \geq 0 \}$ yarıgrubunun düzgün sürekli olması durumunda $\varphi(t) = T(t)$ dönüşümünün sürekli olduğunu ve 1.1.4 Tanım 'ın aşağıdaki tanıma denk olduğu çıkar.

1.1.5 Tanım: $\{ T(t) : t \geq 0 \} \subset B(X)$ ailesi 1.1.1 Tanım anlamında bir yarıgrup olsun. Her bir $t_0 \geq 0$ için

$$\lim_{t \to t_0} \| T(t) - T(t_0) \| = 0 \quad , \quad t \geq 0$$

ya da

$$\lim_{t \to t_0} T(t) = T(t_0)$$

oluyorsa, $\{ T(t) : t \geq 0 \}$ yarıgrubuna, *düzgün sürekli yarıgrup* denir.

1.1.6 Tanım: $\{ T(t) : t \geq 0 \} \subset B(X)$ bir yarıgrup olsun. Her $t \in [0,\infty[$ için

$$\| T(t) \| \leq M$$

olacak biçimde bir M>0 sayısı varsa, bu yarıgruba *sınırlı yarıgrup* denir.

1.2 Örnekler

1.2.1 Örnek: $X=\mathbf{C}^2$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alalım ve $\mathbf{C}^2$

$$\| (\alpha,\beta) \|_1 = | \alpha | + | \beta |$$

normu ile normlanmış olsun. $t \in [0,\infty[$ için

$$T(t) : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2 \quad , \quad T(t) = e^{tA} = I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \ \ldots$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2!}t^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\ldots$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&t\\0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}t^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}+\ldots$$

$$=\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}+\ldots$$

$$=\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanan T(t) dönüşümleri doğrusaldırlar. $\mathbf{C}^2$ sonlu boyutlu olduğu için bu doğrusal dönüşümler süreklidirler.

$$T(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I \quad \text{ve } t,\, s\in [0,\infty[\text{ için}$$

$$T(t)T(s)=\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&s\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&s+t\\0&1\end{pmatrix}=T(t+s)$$

olduğundan sürekli doğrusal dönüşümlerin $\{\, T(t) : t \geq 0 \,\}$ ailesi $\mathbf{C}^2$ üzerinde bir yarıgrup oluşturur.

$$\| T(t) \| = \sup\left\{ |\alpha + t\beta| + |\beta| : \| (\alpha, \beta) \|_1 \leq 1 \right\} = 1 + t$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Buradan yarıgrubun sınırsız olduğu çıkar [2,s.3].

1.2.2 Örnek: $[0, \infty[$ aralığı üzerinde tanımlı, kompleks değerli ve

sürekli olan ve

$$\lim_{x\to\infty} f(x) < \infty$$

koşulunu sağlayan bütün fonksiyonların kümesini $C_s[\,0,\,\infty\,[$ ile gösterelim. Bu küme alışılmış toplama ve skalerle çarpma işlemine göre bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayı

$$\|\,.\,\|_\infty : C_s[\,0,\,\infty\,[\to IR \quad , \quad \|\,f\,\|_\infty = \sup\{\,|\,f(x)\,|\,:\, x \in [0,\,\infty\,[\,\}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. Her bir $t \geq 0$ için

$$T(t) : C_s[\,0,\,\infty\,[\to C_s[\,0,\,\infty\,[\quad , \quad [T(t)f](x)=f(x+t) \quad , \quad x \geq 0 \tag{1.1}$$

biçiminde tanımlanan T(t) dönüşümlerinin oluşturduğu $\{\,T(t) : t \geq 0\,\}$ ailesi bir C_0-yarıgrubudur [1, s.10].

İspat: T(t) dönüşümlerinin doğrusal oldukları, tanımdan, açıktır. Her bir $t \geq 0$ ve her $f \in C_s[\,0,\infty\,[$ için sağlanan

$$\|\,T(t)f\,\|_\infty = \sup\left\{\,|\,(\,T(t)f)(x)\,|\,:\, x \in [0,\infty\,[\,\right\} = \sup\,\left\{\,|\,f(t+x)|\,:\, x \in [0,\infty\,[\,\right\} \leq \|\,f\,\|_\infty$$

eşitsizliği, T(t) dönüşümünün sınırlı olduğunu verir. Burada $\|\,f\,\|_\infty \leq 1$ koşulunu sağlayan f fonksiyonları üzerinden sup alınarak

$$\|\,T(t)\,\| \leq 1$$

bulunur. $\|\,T(t)\,\| \leq 1$ ve $C_s[\,0,\infty\,[$ uzayının bir öğesi olan

$$f : [0,\infty[\, \to C \quad , \quad f(x) = 1$$

fonksiyonunun normunun 1 olması

$$\|\,T(t)\,\| = 1$$

olmasını gerektirir.

Her $x \in [0,\infty[$ için

$$[\,T(0)f\,](x) = f(x+0) = f(x) = (\,I\,f\,)(x)$$

dır. Bu, $T(0) = I$ eşitliğini verir. Her $s,\ t \in [\,0,\infty\,[$ ve her $x \in [\,0,\infty\,[$ için

$$[T(t+s)f](x) = f(x+(t+s)) = [T(t)f]\ (x+s) = [T(s)T(t)f](x) = [T(t)T(s)f](x)$$

olmasından $T(t+s)=T(t)T(s)$ çıkar. Bu iki sonuç, (1.1) biçiminde tanımlanan $\{T(\,t\,) : t \geq 0\,\}$ ailesinin $C_s[\,0,\infty\,[$ üzerinde bir yarıgrup olduğunu gösterir.

Şimdi de bu yarıgrubun C_0-yarıgrup olduğunu gösterelim. Bir $f \in C_s[0,\infty[$ alalım. Eğer

$$\lim_{t\to 0^+} \| T(t)f - f \|_\infty = 0$$

olduğunu kanıtlarsak, f keyfi alındığından, bu bize $\{\ T(t)\ :\ t \geq 0\ \}$ yarıgrubunun C_0-yarıgrup olduğunu verir. $f \in C_s[\,0,\infty\,[$ olduğundan

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$$

olacak biçimde bir $\alpha \in C$ sayısı vardır. Bu nedenle, keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$a \leq x \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon / 2 \qquad (1.2)$$

olacak şekilde ε sayısına bağlı bir a sayısı vardır. $x \geq a$ ve $t \geq 0$ olması, $x+t \geq a$ olmasını gerektirir. Her $x \geq a$ için $x+t \geq a$ olması ve (1.2),

$$|\,(T(t)f)(x) - (If)(x)\,| = |\,f(x+t) - f(x)\,| \leq |\,f(x+t) - \alpha\,| + |\alpha - f(x)| < \varepsilon$$

olmasını gerektirir. Buradan, her $t \geq 0$ için

$$\sup \{ |f(x+t) - f(x)| : x \in [a, \infty[\} \leq \varepsilon \qquad (1.3)$$

bulunur. f fonksiyonu [0, a+1] kapalı aralığında, sürekli olduğundan, düzgün süreklidir. Bundan dolayı yukarıdaki $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $x \in [0,a]$ ve her $t \in [0, \delta]$ için

$$|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde (a ve ε sayısına bağlı) bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan da

$$\sup \{ |f(x+t) - f(x)| : x \in [0,a] \} \leq \varepsilon \qquad (1.4)$$

olur. (1.3) ve (1.4) denklemlerinden

$$0 \leq t \leq \delta \Rightarrow \| T(t)f - f \|_\infty = \sup \{ |f(x+t) - f(x)| : x \in [0, \infty[\} \leq \varepsilon$$

elde edilir. Bu

$$\lim_{t \to 0^+} \| T(t)f - f \|_\infty = 0$$

demektir.

1.2.2 Örnek 'te tanımlanan yarıgruba *kaymaların yarıgrubu* adı verilir.

1.2.3 Örnek: $C_s[0, \infty [$ üzerinde (1.1) ile tanımlanan kaymaların yarıgrubu, düzgün sürekli yarıgrup değildir.

İspat: Keyfi bir t>0 için

$$f_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{t}x & , \quad 0 \le x \le t \\ 1 & , \quad t < x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f_t fonksiyonunu gözönüne alalım. $f_t \in C_s[\,0, \infty\,[$ olup, $f_t(0)=0$, $f_t(t) = 1$, $\|f_t\|_\infty = 1$ dir.

$$[\,T(t)f_t\,](x) - f_t(x) = f_t(x+t) - f_t(x)$$

olması,

$$[\,T(t)f_t(0) - f_t(0)\,] = f_t(t) - f_t(0) = 1$$

olmasını gerektirir. Bu nedenle,

$$\|T(t)f_t - f_t\|_\infty = \sup\{\,|\,(T(t)f_t)(x) - f_t(x)\,| : x \in [0, \infty[\,\} \ge 1 = \|f_t\|_\infty$$

olur. O halde

$$\|T(t)f_t - f_t\|_\infty \ge \|f_t\|_\infty = 1$$

olacak şekilde bir $f_t \in C_s[\,0, \infty\,[$ vardır. Buradan

$$\|T(t) - I\| \ge 1$$

olur. Bu,

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t) - I\| = 0$$

olmasını gerektirmez. Bundan dolayı $C_s[0, \infty[$ üzerindeki kaymaların yarıgrubu, düzgün sürekli yarıgrup olamaz.

1.2.4.Örnek: $1 \le p < \infty$ olmak üzere

$$L^p\,]0,\infty[\; = \left\{ f : \; f : \,]0,\infty[\; \to C \,, \; \int_0^\infty |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

doğrusal uzayı,

$$\|\,.\,\|_p : L^p\,]0,\infty[\; \to \mathbb{R} \quad , \quad \|f\|_p = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \qquad (1.5)$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. Her bir $t \geq 0$ için

$$T(t) : L^p\,]0,\infty[\; \to L^p\,]0,\infty[\quad , \quad [\,T(t)f\,](x) = f(x+t) \quad , \quad x \geq 0$$

biçiminde tanımlanan T(t) dönüşümlerinin oluşturduğu $\{ T(t) : t \geq 0 \}$ ailesi bir C_0-yarıgruptur [1, s.11].

İspat.: T(t) dönüşümlerinin doğrusal oldukları tanımdan açıktır. Her bir $t \geq 0$ ve her $f \in L^p\,]0,\infty[$ için

$$\|T(t)f\|_p^p = \int_0^\infty |f(x+t)|^p \, dx = \int_t^\infty |f(y)|^p \, dy \leq \int_0^\infty |f(y)|^p \, dy = \|f\|_p^p$$

olur. Buradan

$$\|T(t)f\|_p \leq \|f\|_p \qquad (1.6)$$

bulunur. Bu eşitsizlik, T(t) dönüşümlerinin sınırlı olduğunu verir. Bu ailenin $L^p\,]0,\infty[$ üzerinde yarıgrup olduğu 1.2.2 Örnek 'teki gibi gösterilir. Eğer bir $f \in L^p\,]0,\infty[$ için

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t)f - f\|_p = 0 \qquad (1.7)$$

olduğunu gösterirsek bu yarıgrup, tanım gereğince bir C_0-yarıgrup olur.

Her mertebeden türevi olan ve kompakt dayanaklı bütün $f:]0,\infty[\to \mathbf{C}$ fonksiyonlarının ailesi $C_0^\infty]0,\infty[$ ile gösterilir(f fonksiyonunun dayanağı $\operatorname{day} f = \{x : f(x) \neq 0\}^-$ olarak tanımlanır). $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, $C_0^\infty]0,\infty[$, $L^p]0,\infty[$ içinde yoğundur [4, 18.34 Sonuç].

$f \in C_0^\infty]0,\infty[$ olduğunu varsayalım. f kompakt dayanaklı olduğu için $x \notin [a,b] \Rightarrow f(x)=0$ olacak biçimde a ve b ($0<a<b<\infty$) sayıları vardır. $t\in[0,a/2[$ almak, genelliği bozmaz. Bu durumda $[a/2, b]$ dışında $f(x+t)-f(x)$ sıfırlanır. f sürekli ve türevlenebilir olduğundan, ara-değer teoremi gereğince, bir $x\in[a/2,b]$ ve $t \in[0,a/2[$ için

$$f(x+t) - f(x) = t f'(x+\theta t)$$

olacak şekilde bir $\theta \in]0,1[$ sayısı vardır. Burada θ, x ve t noktalarına bağlıdır. $x+\theta t\in[a/2, b+a/2]$ için $|f'(x)| \leq M$ olacak biçimde bir M sayısı vardır. Bunlar, $t \in[0,a/2[$ için

$$\left(\int_0^\infty |f(x+t) - f(x)|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_{a/2}^b |f(x+t) - f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_{a/2}^b |t f'(x+\theta t)|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_{a/2}^b (tM)^p dx\right)^{1/p} = t M (b - a/2)^{1/p}$$

olmasını gerektirir. Buradan, $f \in C_0^\infty]0,\infty[$ olması durumunda

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)f - f\|_p = 0$$

çıkar.

Şimdi herhangi bir $f \in L^p\,]0,\infty[$ için (1.7) eşitliğinin sağlandığını gösterelim. $C_0^\infty\,]0,\infty[$, $L^p\,]0,\infty[$ ($1 \le p < \infty$) içinde yoğun olduğundan, $C_0^\infty\,]0,\infty[$ içinde

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f_n - f \right\|_p = 0$$

olacak biçimde bir (f_n) dizisi vardır. Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bu dizi içinden

$$\left\| f_N - f \right\|_p < \varepsilon / 2 \qquad (1.8)$$

olacak şekilde bir f_N fonksiyonunu seçelim (yukarıdaki yakınsama nedeniyle bu seçim yapılabilir.). f_N fonksiyonuna, önceki durumda olduğu gibi, karşılık gelen sayılar a, b, M olsun. Böylece $t \in [0, a/2[$ için, üçgen eşitsizliği, önceki durum, (1.6) ve (1.8) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\left\| T(t)f - f \right\|_p &\le \left\| T(t)f - T(t)f_N \right\|_p + \left\| T(t)f_N - f_N \right\|_p + \left\| f_N - f \right\|_p \\
&\le \left\| T(t)(f_N - f) \right\|_p + t\,M\,(b - a/2)^{1/p} + \left\| f_N - f \right\|_p \\
&\le \left\| f - f_N \right\|_p + t\,M\,(b - a/2)^{1/p} + \left\| f_N - f \right\|_p \\
&\le \varepsilon + t\,M\,(b - a/2)^{1/p}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{t\to 0^+} \left\| T(t)f - f \right\|_p \le \varepsilon$$

bulunur. Bu, ε keyfi olduğundan

$$\lim_{t\to 0^+} \left\| T(t)f - f \right\|_p = 0$$

olmasını gerektirir.

2. VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ VE İNTEGRALLERİ

Tanım kümesi IR ya da bunun bir alt kümesi ve değerler kümesi bir normlu uzay ya da bir Banach uzayı olan vektör-değerli bir fonksiyonun türevi ve integrali tanımlanabilir. Bu bölümde önce böyle bir fonksiyonun türev tanımı verilecek ve türevin bazı özellikleri gözden geçirilecektir. Sonra böyle bir fonksiyonun integrali tanımlanacak ve integralin temel özellikleri incelenecektir.

2.1 Vektör Değerli Fonksiyonların Türevleri

Bir Y normlu uzayı ile $-\infty < a < b < \infty$ olmak üzere bir $f : [a, b] \to Y$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bir $c \in [a,b]$ için Y uzayı içinde

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

limiti varsa f fonksiyonuna c noktasında *türevlenebilir* bir fonksiyon denir. Bu durumda limite f fonksiyonunun c noktasındaki *türevi* adı verilir ve $f'(c)$ ile gösterilir. Eğer f fonksiyonu [a,b] aralığının her noktasında türevlenebiliyorsa, f fonksiyonuna [a,b] üzerinde *türevlenebilir fonksiyon* denir. Örneğin, X bir Banach uzayı ve $\{ T(t) : t \geq 0 \} \subset B(X)$ güçlü sürekli bir yarıgrup olmak üzere, $x \in X$ yardımıyla,

$$\varphi_x : [0,b] \to X \quad , \quad \varphi_x(t) = T(t)x$$

biçiminde tanımlanan φ_x fonksiyonu ek koşullar altında [0,b] üzerinde türevlenebilirdir. Bunun ispatı 3. Bölümde verilecektir.

Bir $f \in C([a,b], IR)$ fonksiyonu $]a,b[$ üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ise

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$$

olacak biçimde bir $c \in \,]a,b[$ sayısı vardır. Buna gerçel-değerli fonksiyonlar için *ortalama değer teoremi* denir. Vektör-değerli fonksiyonlar için bunun benzeri yoktur.

$$f : [\,0, 2\pi\,] \rightarrow IR^2 \quad , \quad f(t) = (\,-1+\text{Cos}t\,,\ \text{Sin}t\,)$$

fonksiyonu bunun için bir örnektir. Vektör-değerli ya da soyut fonksiyonlar için ortalama değer teoreminin aşağıdaki biçimi kullanılır.

2.1.1 Teorem: X bir gerçel Banach uzayı olsun. $f \in C(\,[a,b],\ X\,)$, f fonksiyonu $]a,b[$ üzerinde türevlenebilir ve f' türevi $]a,b[$ üzerinde sınırlı ise, yani her $t \in [a,b]$ için $\| f'(t) \| \leq K$ olacak biçimde bir K sayısı varsa

$$\| f(b) - f(a) \| \leq K\,(b - a)$$

olur [5].

İspat: Hahn-Banach Teoremi 'nin bir sonucu gereğince

$$\| F \| = 1 \quad \text{ve} \quad F(\,f(b) - f(a)\,) = \| f(b) - f(a) \|$$

olacak biçimde bir $F \in X$ fonksiyoneli vardır. Bunun yardımıyla

$$g : [a, b] \rightarrow IR \quad , \quad g(t) = F(\,f(t)\,)$$

biçiminde gerçel-değerli bir g fonksiyonelini tanımlayalım. F fonksiyonelinin doğrusallığını kullanarak

$$\frac{g\,(t+h) - g\,(t)}{h} = \frac{F(\,f(t+h)\,) - F(\,f(t)\,)}{h} = F\left(\frac{f(t+h) - f(t)}{h}\right)$$

yazılabilir. Buradan, F sürekli ve $f'(t)$ türevi var olduğundan, $t\in]a,b[$ için $g'(t)$ türevinin var ve $g'(t) = F(f'(t))$ olduğu çıkar. Sürekli iki fonksiyonun bileşkesi olan g fonksiyonu $]a,b[$ üzerinde türevlenebilir olduğu için, klasik ortalama değer teoremi gereğince

$$g(b) - g(a) = g'(c)\,(b - a)$$

olacak biçimde bir $c\in]a,b[$ vardır.

$$| f(b)-f(a) | = | F(f(b)-f(a)) | = | F(f(b))-F(f(a)) | = | g(b)-g(a) | = | g'(c) |(b-a)$$

$$= | F(f'(c)) |(b-a) \le \| F \| \, \| f'(c) \| (b-a) \le K(b-a)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

2.1.2 Sonuç: X bir gerçel Banach uzayı olmak üzere $x\in C([a, b], X)$ ve her $t\in[a, b]$ için $x'(t)=0$ ise x, sabit bir fonksiyondur.

2.2 Vektör-Değerli Fonksiyonların İntegralleri

Vektör-değerli ya da soyut Riemann integralinin gerçel Riemann integraline benzer özellikleri vardır. Kaynaklarda bunların ispatlarına rastlanmamaktadır. Bu kesimde Soyut Riemann İntegralinin tanımı yapıldıktan sonra, [6] ve [7] no 'lu kaynaklardaki gerçel Riemann integralinin özelliklerinin ispatlarından esinlenerek bunun bazı özellikleri kanıtlanacak ve C_0-yarıgrupları ile olan ilişkisi belirlenecektir [bkz. 2.2.6 Sonuç, 2.2.9 Sonuç].

X bir Banach uzayı olmak üzere [a, b] aralığı üzerinde tanımlı X-değerli bir fonksiyon f olsun. [a,b] aralığını

$$a=t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_i < \ldots < t_{n-1} < t_n=b$$

noktaları ile alt aralıklara bölelim ve

$P=\{ t_0, t_1, t_2, \dots , t_{n-1}, t_n \}$ ve $\mu(P)=\text{maks}\{ t_i - t_{i-1} : \ i= 1, 2, \dots , n \}$

diyelim. P kümesine $[a, b]$ aralığının bir *bölüntüsü* ve $\mu(P)$ sayısına bu P bölüntüsünün *normu* denir. $k=1, 2, 3, \dots , n$ için $s_k \in [t_{k-1}, t_k]$ alarak

$$S(f, P)= \sum_{k=1}^{n} f(s_k) (t_k - t_{k-1})$$

toplamını oluşturalım. s_k noktalarının seçimine bağlı olmaksızın X Banach uzayının bir öğesi olarak

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S(f, P)$$

limiti varsa, f fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde *integrallenebilir fonksiyon* ve limite de f fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde *güçlü* ya da *Soyut Riemann İntegrali* denir. Bu limit,

$$\int_a^b f(t)dt$$

ile gösterilir.

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S(f, P) = \int_a^b f(t)dt$$

olması, her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $\delta> 0$ sayısının normları δ 'dan daha küçük olan bütün P bölüntüleri ve bütün S(f, P) toplamları için

$$\left\| S(f, P) - \int_a^b f(t)dt \right\| < \varepsilon$$

olacak biçimde bulunması anlamına gelir.

2.2.1 Önerme: X bir Banach uzayı olmak üzere $f : [a, b] \to X$, g:[a,b]$\rightarrow$X fonksiyonları [a, b] üzerinde integrallenebilir olsunlar. Bu durumda f+g ve $\alpha\in C$ olmak üzere αf fonksiyonları [a, b] üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b [\,f(x)+g(x)\,]dx = \int_a^b f(x)dx \;+\; \int_a^b g(x)dx \;,$$

$$\int_a^b \alpha\, f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

olur.

İspat: $\varepsilon > 0$ verilsin. f ile g fonksiyonları [a, b] üzerinde integrallenebilir olduğundan tanım gereğince, $\varepsilon / 2$ sayısına karşılık öyle $\delta_1 > 0$ ve $\delta_2 > 0$ sayıları vardır ki, [a, b] aralığının $\mu(P) < \delta_1$ koşulunu sağlayan her P bölüntüsü ile $\mu(Q) < \delta_2$ koşulunu sağlayan her Q bölüntüsü için

$$\left\| S(f,\ P) - \int_a^b f(x)\,dx \right\| < \varepsilon/2$$

$$\left\| S(g,\ Q) - \int_a^b g(x)\,dx \right\| < \varepsilon/2 \qquad (2.1)$$

olur. $\delta = \min\{\ \delta_1\ ,\ \delta_2\ \}$ diyelim. (2.1) kullanılarak [a, b] aralığının $\mu(P) < \delta$ koşulunu sağlayan her P bölüntüsü için

$$\left\| S(\,f+g,\ P\,) - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \right\| < \varepsilon$$

bulunur. Bu, ε keyfi olduğundan, f+g fonksiyonunun [a, b] üzerinde integrallenebilir olduğu anlamına gelir ve

$$\int_a^b [\, f(x) + g(x) \,]dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

eşitliğini verir.

αf fonksiyonunun [a, b] üzerinde integrallenebilir ve

$$\int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx$$

olduğu benzer biçimde ispatlanır.

2.2.2 Önerme: X bir Banach uzayı ve a<b olmak üzere bir f :[a, b] $\to$X fonksiyonunun

$$\int_a^b f(t)dt$$

integralinin var olması için gerekli ve yeterli koşul her bir $\varepsilon>0$ sayısına karşılık normları δ 'dan daha küçük olan bütün P ve Q bölüntüleri ve bütün S(f, P), S(f, Q) toplamları için

$$\| S(f, P) - S(f, Q) \| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta>0$ sayısının var olmasıdır.

İspat: $\int_a^b f(t)dt$

integrali var olsun. Bir $\varepsilon > 0$ alalım. İntegral ya da

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S(f, P)$$

limiti var olduğundan $\varepsilon/2$ sayısına karşılık $\mu(P)< \delta$ koşulunu sağlayan her P bölüntüsü ve herhangi bir S(f, P) için

$$\left\| S(f, P) - \int_a^b f(t)dt \right\| < \varepsilon/2$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan, normu δ 'dan daha küçük olan her P, Q bölüntü çifti ve herhangi S(f, P), S(f, Q) toplamları için

$$\| S(f, P) - S(f, Q) \| < \varepsilon$$

bulunur.

Tersine olarak koşulun sağlandığını varsayalım ve bir $\varepsilon>0$ sayısını alalım. $\varepsilon/2$ sayısına karşılık öyle bir $\delta>0$ sayısı vardır ki, normu δ 'dan daha küçük olan her P, Q bölüntü çifti ve herhangi S(f, P), S(f, Q) toplamları için

$$\| S(f, P) - S(f, Q) \| < \varepsilon/2$$

olur. Şimdi (P_n),

$$\lim_{n\to\infty} \mu(P_n) = 0$$

olacak biçimde bölüntülerin bir dizisi olsun. Her bir P_n bölüntüsüne karşılık bir $(S_n(f, P_n))$ özel toplamını alarak toplamların bir $(S_n(f, P_n))$ dizisini oluşturalım. Bu durumda

$$N_0 \leq n \Rightarrow \mu(P_n) < \delta$$

ve dolayısıyla,

$$N_0 \leq n, m \Rightarrow \| S_n(f, P_n) - S_m(f, P_m) \| < \varepsilon / 2$$

olacak şekilde bir $N_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bundan dolayı $(S_n(f, P_n))$, X içinde bir Cauchy dizisidir. X Banach uzayı olduğundan bu Cauchy dizisi X içinde bir noktaya yakınsar.

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f, P_n) = x$$

olsun. $n \geq N_0$ 'yi

$$\| S_n(f, P_n) - x \| < \varepsilon/2$$

olacak şekilde alalım. O zaman $\mu(P) < \delta$ koşulunu sağlayan bütün P bölüntüleri ve bütün S(f , P) toplamları için

$$\| S(f, P) - x \| \leq \| S(f, P) - S_n(f, P_n) \| + \| S_n(f, P_n) - x \| < \varepsilon$$

olur. Bu, $\varepsilon > 0$ keyfi alındığından,

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S(f, P) = x$$

ya da

$$\int_a^b f(t)dt$$

integralinin var olması demektir.

2.2.3 Teorem: (X_1, d_1) ve (X_2, d_2) metrik uzaylar olsun. $f : X_1 \to X_2$ sürekli bir fonksiyon ve X_1 tıkız ise f , düzgün süreklidir.

2.2.4 Teorem: Bir (X, d) metrik uzayının tıkız (kompakt) bir K alt kümesi kapalı ve sınırlıdır.

2.2.5 Önerme: X bir Banach uzayı ve a < b olmak üzere, $f :[a, b] \to X$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu [a,b] üzerinde integrallenebilirdir.

İspat: 2.2.3 Teorem gereğince f düzgün sürekli olacağından verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$s,t \in [a, b]\ ,\ |s - t| < \delta \Rightarrow \| f(s) - f(t) \| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad (2.2)$$

olacak biçimde bir $\delta>0$ sayısı vardır. [a, b] aralığının normları δ 'dan daha küçük olan herhangi iki bölüntüsü P ve Q olsun. Bunların bileşimi olan $P \cup Q$, P ve Q bölüntülerinden daha ince bir bölüntüdür.

$$P = \{ t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n \}$$

$$P \cup Q = \{ s_0, s_1, s_2, \dots, s_{m-1}, s_m \}$$

ve $s_{m_1} = t_1$, $s_{m_2} = t_2$, ... , $s_{m_{n-1}} = t_{n-1}$ olsun. i=1, 2, ... , n için rasgele bir $u_i \in [t_{i-1}, t_i]$ noktasını ve k=1, 2, ... , m için herhangi bir $v_k \in [s_{k-1}, s_k]$ noktasını alarak

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\, \Delta t_i$$

$$S(f, P \cup Q) = \sum_{k=1}^{m} f(v_k)\, \Delta s_k$$

toplamlarını oluşturalım. S(f, P) toplamını

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{m_1} f(u_1)\, \Delta s_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} f(u_2)\, \Delta s_k + \dots + \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m} f(u_m)\, \Delta s_k$$

biçiminde yazabiliriz. Şimdi S(f, P) - S(f, $P \cup Q$) farkını oluşturalım.

$$S(f, P) - S(f, P \cup Q) = \sum_{k=1}^{m_1} [\, f(u_1) - f(v_k)]\, \Delta s_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} [\, f(u_2) - f(v_k)]\, \Delta s_k + \dots$$

$$+ \sum [\, f(u_n) - f(v_k)]\, \Delta s_k$$

Buradan iki yanın normu alınarak ve normun üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\| S(f, P) - S(f, P \cup Q) \| \leq \sum_{k=1}^{m_1} \| f(u_1) - f(v_k) \| \Delta s_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} \| f(u_2) - f(v_k) \| \Delta s_k + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m} \| f(u_n) - f(v_k) \| \Delta s_k$$

ve buradan da (2.2) kullanılarak

$$\| S(f, P) - S(f, P \cup Q) \| < \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}\,(b - a) = \varepsilon / 2$$

elde edilir. Q ve $P \cup Q$ bölüntüleri için benzer ispat yapılırsa

$$\| S(f, Q) - S(f, P \cup Q) \| < \varepsilon / 2$$

bulunur. Bu iki eşitsizlik

$$\| S(f, P) - S(f, Q) \| < \varepsilon$$

eşitsizliğini verir. Bu sonuç ve 2.2.2 Önerme 'den f fonksiyonunun [a,b] üzerinde integrallenebilir olduğu çıkar.

2.2.6 Sonuç: (İ) $\{T(t) : t \geq 0\} \subset B(X)$ bir C_0-yarıgrup ve $x \in X$ olsun. Bu durumda, her $t \in [0, \infty[$ için, X uzayının bir öğesi olarak

$$\int_a^b T(t)x\,dt$$

integrali vardır.

(ii) $\{T(t) : t \geq 0\} \subset B(X)$ bir düzgün sürekli yarıgrup olsun. Bu durumda, her $t \in [0, \infty[$ için B(X) uzayının bir öğesi olarak

$$\int_a^b T(t)\, dt$$

integrali vardır [1, s.31]

İspat: (i) $\{T(t) : t \geq 0\}$ C_0-yarıgrup olduğundan,

$$\varphi_x : [0, t[\to X \quad , \quad \varphi_x(t) = T(t)x \quad , \quad t \in [0, \infty[$$

fonksiyonu süreklidir (1.1.2 Tanım 'dan sonra sürekli olduğu gösterildi). İstenen, 2.2.5 Önerme 'den çıkar.

(ii) $\{T(t) : t \geq 0\}$ düzgün sürekli yarıgrup olduğundan

$$f : [0, t] \to B(X) \quad , \quad f(t) = T(t) \quad , \quad t \in [0, \infty]$$

fonksiyonu süreklidir (1.1.4 Tanım 'dan sonra ispatlandı). İstenen, 2.2.4 Teorem 'den çıkar.

2.2.7 Önerme: $f : [a,b] \to X$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Bu durumda $a < c < b$ olmak üzere f fonksiyonu $[a, c]$ ve $[c, b]$ aralıkları üzerinde integrallenebilirdir. Ve

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt$$

olur.

İspat: Önce f fonksiyonunun $[a, c]$ üzerinde integrallenebilir olduğunu kanıtlayalım. f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir olduğundan, 2.2.2Önerme 'den dolayı, verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki, normları δ 'dan daha küçük olan bütün P_{ab}, Q_{ab} bölüntüleri ve bütün $S(f, P_{ab})$, $S(f, Q_{ab})$ toplamları için

$$\| S(f, P_{ab}) - S(f, Q_{ab}) \| < \varepsilon \qquad (2.3)$$

olur. [a,c] aralığının normları δ 'dan daha küçük olan herhangi iki bölüntüsü P_{ac} , Q_{ac} ve bunlara karşılık gelen herhangi iki toplam $S(f, P_{ac})$, $S(f, Q_{ac})$ olsun. P_{ac} , Q_{ac} bölüntülerini

$$c = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_{r-1} < z_r = b$$

noktaları ile normları δ 'dan küçük olacak biçimde [a, b] aralığının P, Q bölüntülerine genişletelim. Her bir $[z_{k-1}, z_k]$ aralığı içinde bir z_i noktasını alarak

$$\left.\begin{aligned} S(f, P) &= S(f, P_{ac}) + \sum_{k=1}^{r} f(\tau_i)\,\Delta z_k \\ S(f, Q) &= S(f, Q_{ac}) + \sum_{k=1}^{r} f(\tau_i)\,\Delta z_k \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

toplamlarını oluşturalım. $\mu(P) < \delta$, $\mu(Q) < \delta$ olması ve (2.3) ile (2.4)

$$\| S(f, P_{ac}) - S(f, Q_{ac}) \| = \| S(f, P) - S(f, Q) \| < \varepsilon$$

olmasını gerektirir. Buradan $\varepsilon > 0$, P_{ac} ,Q_{ac} bölüntüleri ve $S(f, P_{ac})$, $S(f, Q_{ac})$ toplamları rasgele alındığı için 2.2.2 Önerme gereğince, f fonksiyonunun [a,c] üzerinde integrallenebilir olduğu çıkar. f fonksiyonunun [c,b] üzerinde integrallenebilir olduğu benzer biçimde kanıtlanır.

Şimdi

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

olduğunu kanıtlayalım.

f fonksiyonu [a,c] ve [c,b] üzerinde integrallenebilir olduğundan, verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki, normları δ 'dan daha küçük olan bütün P_{ac} , P_{cb} bölüntüleri ve $S(f , P_{ac})$, $S(f , P_{cb})$ toplamları için

$$\left\| S(f,\ P_{ac}) - \int_a^c f(t)\,dt \right\| < \varepsilon / 2 \qquad (2.5)$$

$$\left\| S(f,\ P_{cb}) - \int_c^b f(t)\,dt \right\| < \varepsilon / 2 \qquad (2.6)$$

olur.

$$P_{ab} = \{ a=t_0 , t_1 , t_2 , \dots , t_n = b \}$$

[a,b] aralığının normu δ 'dan daha küçük olan bir bölüntüsü olsun. c noktasının $[t_i , t_{i+1}]$ aralığı içinde olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\{ t_0 , t_1 , t_2 , \dots , t_{r-1} , c , t_{r+1} , t_{r+2} , \dots , t_n \}$$

[a,b] aralığının P_{ab} bölüntüsünden daha ince bir bölüntü olur ve bir $S(f , P_{ac})$ toplamı,

$$S(f , P_{ab}) = \sum_{k=1}^{n} f(s_k)\,\Delta t_k$$

$$= \sum_{k=1}^{r} f(s_k)\,\Delta t_k + f(s_{r+1})\,(c - t_r) + f(s_{r+1})\,(t_{r+1} - c) + \sum_{k=r+2}^{n} f(s_k)\,\Delta t_k \qquad (2.7)$$

biçiminde yazılabilir. $\{ t_0 , t_1 , t_2 , \dots , t_{r-1} , c \}$ ve $\{ c , t_{r+1} , t_{r+2} , \dots , t_n \}$ sırasıyla [a,c] ve [c,b] aralıklarının normları δ 'dan daha küçük olan birer bölüntüsü olduğundan (2.5) ve (2.6) eşitsizliklerinden dolayı

$$\left\| \sum_{k=1}^{r} f(s_k)\,\Delta t_k + f(s_{k+1})(c - t_r) - \int_a^c f(t)\,dt \right\| < \varepsilon / 2$$

ve

$$\left\| f(s_{r+1})(t_{r+1} - c) + \sum_{k=r+2}^{n} f(s_k)\,\Delta t_k - \int_c^b f(t)\,dt \right\| < \varepsilon / 2$$

olur. Bunlar ve (2.7),

$$\left\| S(f,\, P_{ab}) - \left[\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \right] \right\| < \varepsilon$$

olmasını gerektirir. Buradan $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan ve $\mu(P_{ab}) < \delta$ olacak biçimde P_{ab} bölüntüsü ile $S(f\ ,\ P_{ab})$ toplamı rasgele alındığından, tanım gereğince

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S(f,\, P_{ab}) = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

ya da

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

çıkar.

2.2.8 Teorem: X bir Banach uzayı ve $f : [a, b] \to X$ sürekli bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır :

(i) $\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \| f(t) \|\,dt$

(ii) $F : [a, b] \to X \quad , \quad F(t) = \int_a^t f(s)\,ds$

biçiminde tanımlanan F fonksiyonu [a, b] üzerinde süreklidir.

(iii) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_a^t f(s)\,ds = f(t)$, $t \in [a, b]$

dir.

İspat: (i) Bu Y=**C** ya da Y=IR durumunda bilinen

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$$

eşitsizliğinin bir genellemesidir. [a, b] aralığının bir

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} = b$$

bölüntüsüne karşılık gelen

$$\sum_{k=1}^{n} f(s_k)\,(t_k - t_{k-1})$$

Riemann toplamından norm alınarak elde edilen

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f(s_k)\,(t_k - t_{k-1}) \right\| \le \sum_{k=1}^{n} \| f(s_k) \| (t_k - t_{k-1})$$

eşitsizliğinden $\mu(P) \to 0$ için limit alınırsa, istenen eşitsizlik bulunur.

$$g_f : [0,1] \to IR \quad , \quad g_f(t) = \| f(t) \|$$

fonksiyonu

$$| \, g_f(t) - g_f(s) \, | = | \, \| f(t) \| - \| f(s) \| \, | \le \| f(t) - f(s) \|$$

eşitsizliği ve f fonksiyonunun sürekli olması nedeniyle, sürekli olduğundan sağ yandaki integral vardır.

(ii) f sürekli ve [a,b] tıkız olduğundan f ([a,b]), X içinde tıkız olur. Bir metrik ya da normlu uzayın tıkız bir alt kümesi (kapalı ve) sınırlı olacağından 2.2.4 Teorem 'den her $x \in [a,b]$ için $\|f(x)\| \le M$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı vardır. $s, t \in [a,b]$ için integralin 2.2.7 Önerme (i) 'deki eşitsizlik kullanılarak

$$\|F(t) - F(s)\| = \left\| \int_s^t f(u)\,du \right\| \le M \mid t - s \mid \tag{2.8}$$

elde edilir. Verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\delta = \varepsilon / M$ olarak seçelim. O zaman (2.8), $\mid t - s \mid < \delta$ koşulunu sağlayan her $t, s \in [a,b]$ için

$$\|F(t) - F(s)\| < \varepsilon$$

olmasını gerektirir. Bu ε keyfi olduğundan F fonksiyonunun düzgün sürekli ve dolayısıyla sürekli olduğunu ispatlar.

(iii) $t \in [a,b]$ alalım. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. f, t noktasında sürekli olduğundan

$$0 < \mid h \mid < \delta \ , \ t + h \in [a,b] \Rightarrow \|f(t+h) - f(t)\| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bundan dolayı $0 < \mid h \mid < \delta$, $t+h \in [a,b]$ ise

$$\left\| \frac{1}{h}\left(\int_a^{t+h} f(s)ds - \int_a^{t} f(s)ds \right) - f(t) \right\| = \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (f(s) - f(t))ds \right\| < \varepsilon$$

olur. Bu, $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t f(s)\,ds = f(t)$$

demektir.

2.2.9 Sonuç: $\{ T(t) : t \geq 0 \} \subset B(X)$ bir C_0-yarıgrup olsun. Bu durumda

i) $\left\| \int_0^t T(s)x ds \right\| \leq \int_0^t \| T(s)x \| ds \leq \int_0^t \| T(s) \| \| x \| ds$

ii) $\frac{d}{dt} \left(\int_0^t T(s)\, ds \right) = T(t)$

iii) $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\, ds = T(t)x$

olur [1,3]

İspat: (i) ve (ii), 2.2.7 Teorem 'in apaçık sonuçlarıdırlar. (iii) eşitliğindeki

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\, ds$$

sürekli olan

$$F :]0, \infty[\to X \quad , \quad F(t) = \int_0^t T(s)x\, ds$$

biçiminde tanımlanan F fonksiyonunun t noktasındaki türevidir ve 2.2.8 Teorem (iii) gereğince

$$\frac{d}{dt} \int_0^t T(s)x\, ds = T(t)x$$

olur. Çünkü

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\, ds$$

dır (Burada 2.2.6 Önerme kullanıldı.).

2.2.10 Önerme: $f : [\, a,b\,] \rightarrow X$ fonksiyonu $]a,b[$ üzerinde sürekli olarak türevlenebilsin. Bu durumda $\alpha,\ \beta \in\ ]a,b[$ için

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(t)\, dt = f(\beta) - f(\alpha)$$

olur.

İspat: 2.2.8 Teorem,

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\alpha}^{t} f'(t)\, dt - f(t)\right] = 0 \quad , \alpha \leq t \leq \beta$$

olmasını gerektirir. Bu nedenle

$$\int_{\alpha}^{t} f'(t)\, dt - f(t) = c \quad (\, c \text{ sabit}\,) \tag{2.9}$$

olur. Buradan $t = \alpha$ için $c = -f(\alpha)$ olarak bulunur. Bu değer (2.9) eşitliğinde yerine konularak ve $t = \beta$ alınarak istenen eşitlik elde edilir.*

Sürekli bir $f : [\, a,b\,] \rightarrow IR$ fonksiyonu için

$$\int_{a}^{b} f(t)\, dt = f'(c)(\, b - a\,)$$

olacak biçimde bir $c \in\ ]a,b[$ sayısı vardır. Gerçel değerli fonksiyonlar için geçerli olan bu özellik, vektör-değerli fonksiyonlar için geçerli değildir.

$$f : [\, 0, \pi\,] \rightarrow IR^2 \quad , \quad f(t) = (\, Cost\, ,\ Sint\,)$$

fonksiyonu buna örnektir.

2.2.11 Önerme: X bir Banach uzayı, f_n : $[\, a,b\,] \rightarrow X$ sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun ve bu dizi düzgün olarak $f : [a,b] \to X$ fonksiyonuna yakınsasın. Bu durumda f süreklidir ve X içinde

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

olur [5, s.10]

İspat: (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsadığından, verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$N \le n \Rightarrow \text{her } t \in [a,b] \text{ için } \left\| f_n(t) - f(t) \right\| < \varepsilon / 3 \qquad (2.10)$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. $t_0 \in [a,b]$ alalım. f_N fonksiyonu t_0 noktasında sürekli olduğundan,

$$t \in [a,b],\ |t - t_0| < \delta \Rightarrow \left\| f_N(t) - f_N(t_0) \right\| < \varepsilon / 3 \qquad (2.11)$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. (2.10) ve (2.11) , $t \in [a,b]$, $|t-t_0| < \delta$ koşulunu sağlayan her t için

$$\left\| f(t) - f(t_0) \right\| \le \left\| f(t) - f_N(t) \right\| + \left\| f_N(t) - f_N(t_0) \right\| + \left\| f_N(t_0) - f(t_0) \right\| < \varepsilon$$

olmasını gerektirir. Bu, ε keyfi olduğundan, f fonksiyonunun t_0 noktasında sürekli olması demektir.

$\varepsilon > 0$ verilsin. (f_N) dizisi f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsadığından,

$$N_1 \le n \Rightarrow \left\| f_n - f \right\| < \varepsilon / (b - a)$$

olacak biçimde bir $N_1 \in IN$ vardır. Bu, $N_1 \leq n$ koşulunu sağlayan her n için

$$\left\| \int_a^b f_n(t)\, dt - \int_a^b f(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \| f_n(t) - f(t) \| \, dt < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dt = \varepsilon$$

olmasını gerektirir. Bu da ε rasgele alındığından

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$$

anlamına gelir.

3. SONSUZ KÜÇÜK ÜRETEÇLER

$f : [0, \infty[\to IR$

(i) $f(0) = 1$

(ii) $t, s \in [0, \infty[$ için $f(s)\, f(t) = f(s+t)$

(iii) $[0,\infty[$ üzerinde sürekli (0 noktasında sağ sürekli)

olacak biçimde bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu A bir sabit olmak üzere,

$$f(t) = e^{tA} \quad , \quad t \in [0, \infty[\qquad (3.1)$$

biçiminde ifade edilebilir [1, s.28]. Ek olarak f, $[0, \infty[$ üzerinde türevlenebilir (0 noktasında sağ türevlenebilir) ise

$$f'(t) = A\, f(t)$$

olur. Buradan

$$A = f'(0) \qquad (3.2)$$

bulunur.

Yukarıdaki özellik, bir $\{T(t) : t \geq 0\}$ C_0 - yarıgrup (ya da düzgün sürekli yarıgrup) için, A bir doğrusal dönüşüm olmak üzere

$$T(t) = e^{tA} \quad , \quad t \in [0, \infty[\qquad (3.3)$$

yazılıp yazılamayacağının sorulmasına öncülük eder. $\{T(t) : t \geq 0\}$, (3.3) biçiminde ifade edildiğinde (3.2), t=0 noktasında

$$\varphi : [0, \infty[\to X \quad , \quad \varphi(t) = T(t)$$

fonksiyonunun sağ türevi olarak,

$$A = \frac{d}{dt} T(t) \Big|_{t=0}$$

olmasını önerir. Bu da bizi aşağıdaki tanıma götürür.

3.1 Tanım: $\{T(t) : t \geq 0\} \subset B(X)$ bir yarıgrup olsun.

$$A : X \supset D(A) \to X$$

$$D(A) = \left\{ x \in X : X \text{ içinde } \lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ limiti vardır.} \right\}$$

$$Ax = \lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}$$

biçiminde tanımlanan A dönüşümüne $\{T(t) : t \geq 0\}$ yarıgrubunun *sonsuz küçük üreteci* denir. A dönüşümünün tek olduğu açıktır. D(A) alt kümesinin X uzayının bir doğrusal alt uzayı ve A dönüşümünün bir doğrusal dönüşüm olduğu hemen gösterilebilir. Belirli özel hallerde sonsuz küçük üreteç her yerde tanımlıdır ve dolayısıyla sınırlıdır (bkz. 3.6 Teorem).

3.2 Teorem: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

yakınsaklık yarıçapı $R > 0$ ($R = \infty$ olabilir.) olan bir karmaşık seri olsun.

$$f : B(0, R) \to \mathbf{C} \quad , \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

biçiminde tanımlansın. X bir karmaşık Banach uzayı ve $\|T\| < R$ koşuluyla $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$$

serisi, B(X) uzayının normuna göre, $f(T) \in B(X)$ ögesine yakınsar [1, s.35].

3.3 Teorem: X bir karmaşık Banach uzayı ve $\|T\| \leq 1$ koşuluyla $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda X üzerinde bir sınırlı bir doğrusal dönüşüm olarak $(I - T)^{-1}$ vardır ve

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \tag{3.4}$$

olur [1, s.35; 8,s.475].

3.4 Örnek: $f(z) = e^z$, $z \in \mathbf{C}$ fonksiyonunun kuvvet serisi, yani

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n / n!$$

serisi, yakınsaklık yarıçapı $R = \infty$ olduğundan, her z için yakınsaktır. 3.2 Teorem 'den dolayı bir X Banach uzayı üzerinde sınırlı doğrusal bir T dönüşümü için

$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n / n!$$

serisi B(X) içinde yakınsak olur. Bu nedenle

$$e^T = \sum_{n=0}^{\infty} T^n / n!$$

yazacağız.

3.5 Teorem: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin mutlak yakınsak, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ ve

$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k}$ (n = 0, 1, 2, ...) olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = A.B$$

olur [6, s.65]

3.6 Teorem: X bir Banach uzayı olsun. Bir $A : X \to X$ doğrusal dönüşümünün bir düzgün sürekli yarıgrubun sonsuz küçük üreteci olması için gerekli ve yeterli koşul A dönüşümünün bir sınırlı doğrusal dönüşüm olmasıdır [3, s.2].

İspat: A bir sınırlı doğrusal dönüşüm olsun.

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} (tA)^n / n! \quad , \quad t \in [\, 0, \infty \,[$$

diyelim. Her $t \geq 0$ için $tA \in B(X)$ olduğundan 3.4 Örnek 'ten dolayı $T(t) \in B(X)$ olur. $T(0) = I$ olduğu açıktır. Her $z \in \mathbf{C}$ ve her $w \in \mathbf{C}$ için mutlak yakınsak olan

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n / n! \quad , \quad \sum_{m=0}^{\infty} w^m / m!$$

serilerinin çarpımına 3.5 Teorem uygulanarak

$$e^z . e^w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n / n! \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} w^n / m! \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k w^{n-k} / k! \, (n-k)!$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 1 / n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} (z + w)^n / n! = e^{z+w}$$

elde edilir. Buradan s, t $\in$ [0, ∞ [olmak üzere z yerine sA ve w yerine tA alınarak ve mutlak yakınsamanın işlevi B(X) uzayındaki norma göre yakınsamaya yüklenerek

$$T(s)\,T(t) = T(s+t)$$

bulunur. Çünkü mutlak yakınsamanın işlevini B(X) uzayındaki norma göre yakınsamaya yüklemek e^{sA} ve e^{tA} için serinin yeniden düzenlenmesine izin verir ve sA, tA dönüşümlerinin ve bunların kuvvetlerinin değişme özelliği olduğundan terimler yeniden gruplanabilir. Böylece { T(t) : t $\geq$ 0 } ailesinin bir yarıgrup olduğu kanıtlanmış olur.

$$\| T(t) - I \| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (tA)^n / n! \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (t \| A \|)^n / n!$$

$$= t\| A \| \sum_{n=1}^{\infty} (t\| A \|)^{n-1} / n! \leq t \| A \| \sum_{n=1}^{\infty} (t\| A \|)^{n-1} / (n-1)!$$

$$= t \| A \| e^{t\| A \|}$$

eşitsizliği { T(t) : t $\geq$ 0 } yarıgrubunun X üzerinde düzgün sürekli bir yarıgrup olduğunu gerektirir.

$$\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| = \left\| \frac{tA^2}{2!} + \frac{t^2A^3}{3!} + \ldots \right\| \leq \frac{\| tA^2 \|}{2!} + \frac{\| t^2A^3 \|}{3!} + \ldots$$

$$\leq \frac{\| A \| t \| A \|}{2!} + \frac{\| A \| (t \| A \|)^2}{3!} + \ldots$$

$$= \| A \| \left(\frac{t \| A \|}{2!} + \frac{(t \| A \|)^2}{3!} + \ldots \right)$$

$$\leq \| A \| \left(\frac{t \| A \|}{1!} + \frac{(t \| A \|)^2}{2!} + \ldots \right)$$

$$= \| A \| (e^{t\| A \|} - 1)$$

eşitsizliğinden A dönüşümünün sonsuz küçük üreteç olduğu çıkar.

Tersine olarak $\{ T(t) : t \geq 0 \}$, X üzerinde sınırlı doğrusal dönüşümlerin düzgün sürekli yarıgrubu ve s > 0,

$$\left\| I - \frac{1}{\sigma} \int_0^{\sigma} T(s)\, ds \right\| < 1$$

olacak biçimde bir sayı olsun. 3.3 Teorem 'den dolayı B(X) uzayının bir öğesi olan

$$\frac{1}{\sigma} \int_0^{\sigma} T(s)\, ds$$

dönüşümünün ve dolayısıyla

$$\int_0^{\sigma} T(s)\, ds$$

dönüşümünün tersi vardır. T(t) dönüşümlerinin sürekliliği kullanılarak

$$\frac{1}{h} (T(h) - I) \int_0^{\sigma} T(s)\, ds = \frac{1}{h} \left(\int_0^{\sigma} T(s+h)\, ds - \int_0^{\sigma} T(s)\, ds \right)$$

$$= \frac{1}{h} \left(\int_{\sigma}^{\sigma+h} T(s) ds - \int_0^{h} T(s) ds \right)$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{1}{h} (T(h) - I) = \left(\frac{1}{h} \int_{\sigma}^{\sigma+h} T(s) ds - \frac{1}{h} \int_0^{h} T(s)\, ds \right) \left(\int_0^{\sigma} T(s)\, ds \right)^{-1}$$

bulunur. Buradan da $h \to 0^+$ için limit alınarak ve 2.2.9 Sonuç (iii) kullanılarak, norma göre $(T(h) - I) / h$ fonksiyonunun

$$(T(\sigma) - I) \left(\int_0^\sigma T(s)\, ds \right)^{-1}$$

sınırlı doğrusal dönüşümüne yakınsadığı görülür. Bu nedenle

$$A = (T(\sigma) - I) \left(\int_0^\sigma T(s)\, ds \right)^{-1}$$

dönüşümü, düzgün sürekli $\{ T(t) : t \geq 0 \}$ yarıgrubunun sonsuz küçük üreteci olur.

O halde düzgün sürekli bir $\{ T(t) : t \geq 0 \}$ yarıgrubunun sonsuz küçük üreteci, sınırlı doğrusal bir dönüşümdür. Tersine olarak, sınırlı doğrusal bir $A:X \to X$ dönüşümü düzgün sürekli $\{ T(t) : t \geq 0 \}$ yarıgrubunun sonsuz küçük üretecidir. Aşağıdaki teorem, üreteci sınırlı bir $A:X \to X$ doğrusal dönüşümü olan düzgün sürekli yarıgrubun tek olduğunu anlatır.

3.7 Teorem: $\{ T(t) : t \geq 0 \} \subset B(X)$ ve $\{ S(t) : t \geq 0 \} \subset B(X)$ düzgün sürekli yarıgruplar olsunlar. Eğer

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t) - I}{t}$$

ise, her $t \in [0,\infty[$ için $T(t) = S(t)$ olur [3].

Bu teorem, $\{ T(t) : t \geq 0 \}$ ve $\{ S(t) : t \geq 0 \}$ yarıgruplarının C_0-yarıgrup olmaları durumunda da geçerlidir [1, s.46]

3.8 Teorem: X karmaşık bir Banach uzayı ve $\{ T(t) : t \geq 0 \} \subset B(X)$ bir C_0-yarıgrup olsun. Bu durumda her $t \in [0,\infty[$ için

$$\| T(t) \| \leq M e^{wt}$$

olacak şekilde $w \geq 0$ ve $M \geq 1$ sabitleri vardır [1, s.41]

İspat: İlk iş olarak her $t \in [0, t_0[$ için $\| T(t) \|$ sınırlı olacak biçimde bir t_0 sayısının var olduğunu kanıtlayalım. Böyle bir t_0 sayısının var olmadığını varsayalım. O zaman n = 1, 2, 3, ... için

$$0 \le t_n \le 1 / n \quad \text{ve} \quad \| T(t_n) \| \ge n$$

olacak şekilde bir (t_n) dizisini seçebiliriz.

$$\lim_{n \to \infty} t_n = 0$$

olacağı açıktır. $(\| T(t_n) \|)$ sınırsız olduğundan düzgün sınırlılık teoremi $(\| T(t_n)\, x \|)$ sınırsız olacak biçimde bir $x \in X$ noktasının varlığını gerektirir.

$$\lim_{t \to 0^+} T(t)x = x \quad \text{ve} \quad \lim_{n \to \infty} t_n = 0$$

olmasından çıkar.

$$\lim_{n \to \infty} T(t_n)x = x$$

eşitliği ile çelişir. O halde her $t \in [0, t_0]$ için $\| T(t) \| \le M$ olacak biçimde bir $M>0$ vardır. $\| T(0) \| = 1$ olduğundan $M \ge 1$ olmalıdır.

$$w = (1 / t_0) \log M$$

olsun. $M \ge 1$ ve $t_0 > 0$ verilmiş olduğundan $w \ge 0$ dır. $t \ge 0$ verilmiş olsun. $t = nt_0 + s$ olacak biçimde bir $n \in IN$ ve $0 \le s < t_0$ sayısını bulabiliriz. Yarıgrup özelliği kullanılarak

$$\| T(t) \| = \| T(nt_0 + s) \| = \| T(s)\, T(nt_0) \| = \| T(s)\, T(t_0)^n \| \le M^{n+1} \le M\, e^{wt}$$

bulunur.

3.9 Teorem: $\{ T(t) : t \geq 0 \} \subset B(X)$ sonsuz küçük üreteci A olan C_0- yarıgrup olsun. Bu durumda $x \in D(A)$ ise her $t \in [0,\infty[$ için $T(t)x \in D(A)$ ve 0 noktasında sağ-türev ve $t > 0$ için iki yanlı türev olarak

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax \quad , \quad x \in D(A) \qquad (3.5)$$

olur [3, s.5]

İspat: $x \in D(A)$ alalım. Değişme özelliği kullanılarak,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h) - I}{h} (T(t)x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)T(t)x - I\,T(t)x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{T(t)T(h)x - T(t)Ix}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} T(t)\left(\frac{T(h) - I}{h} \right)x$$

yazılabilir. $x \in D(A)$ ve $T(t)$ dönüşümünün sürekli olması

$$\lim_{h\to 0^+} T(t)\left(\frac{T(h) - I}{h} \right)(x) = T(t)Ax$$

olmasını ve bu da

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h) - I}{h} (T(t)x)$$

limitinin varolmasını gerektirir. Bundan dolayı $T(t)x \in D(A)$ olur. Limitlerin eşitliğinden

$$AT(t)x = T(t)Ax \quad , \quad x \in D(A) \qquad (3.6)$$

Şimdi $t \geq 0$ noktasında $t \to T(t)x$ fonksiyonunun sağ türevini hesaplayalım. Yarıgrup özelliği ve (3. 6) kullanılarak,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

bulunur. Şimdi de $t > 0$ noktasında $t \to T(t)x$ fonksiyonunun sol-türevini hesaplayalım.

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{T(t-h)\,T(h)x - T(t-h)x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} T(t-h)\,\frac{T(h)x - x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} T(t-h) \left\{ \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\} + \lim_{h\to 0^+} T(t-h)Ax$$

$x \in D(A)$ olması durumunda $[0, t]$ üzerinde $\| T(t-h) \|$ sınırlı olduğundan

$$\lim_{h\to 0^+} T(t-h) \left\{ \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\} = 0$$

olur.

3.8 Teorem kullanılarak $0 < h < t$ için

$$\| T(t-h)Ax - T(t)Ax \| = \| T(t-h)Ax - T(t-h)\,T(h)Ax \|$$

$$\leq \| T(t-h) \| \; \| Ax - T(h)Ax \|$$

$$\leq M\, e^{w(t-h)} \| Ax - T(h)Ax \|$$

$$\leq M\, e^{wt} \| T(h)Ax - Ax \|$$

eşitsizliği elde edilir. Burada M ve w, 3.8 Teorem 'deki sabitlerdir. Bu eşitsizlik ve güçlü süreklilik nedeniyle

$$\lim_{h \to 0^+} (T(h)Ax - Ax) = 0$$

olması

$$\lim_{h \to 0^+} T(t-h)Ax = T(t)Ax$$

olmasını gerektirir. O halde $t \to T(t)x$ fonksiyonunun $t > 0$ için sol-türevi $T(t)Ax$ dir. Böylece $t \to T(t)x$ fonksiyonunun $t > 0$ noktasında sağ ve sol-türevlerinin var ve $T(t)Ax$ ögesine eşit olduğu kanıtlanmış olur.

3.10 Teorem: $\{ T(t) : t \geq 0 \}$ bir C_0-yarıgrup ve A bunun sonsuz küçük üreteci olsun.

(i) Her bir $x \in X$ ve $t > 0$ için

$$\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A) \quad \text{ve} \quad A\left(\int_0^t T(s)x \, ds\right) = T(t)x - x$$

olur.

(ii) $x \in D(A)$ için $\int_s^t T(\tau)Ax \, d\tau = T(t)x - T(s)x$

olur [3]

İspat:(i) $x \in X$ alalım ve $h > 0$ olsun. $T(h)$ sürekli olduğundan

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)x \, ds = \frac{1}{h} \int_0^t (T(s+h)x - T(s)x) \, ds$$

yazabiliriz. Sağ yandaki ifade, soyut (güçlü) Riemann integralinin özellikleri kullanılarak

$$\frac{1}{h}\int_0^t (\,T(s+h)x \;-\; T(s)x\,)\,ds = \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(u)x\,du \;-\; \frac{1}{h}\int_0^t T(u)x\,du$$

$$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(u)x\,du \;-\; \frac{1}{h}\int_0^h T(u)x\,du$$

biçiminde ifade edilebilir. Buradan 2.2.9 Sonuç (iii) kullanılarak

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)\,-\,I}{h}\int_0^t T(s)x\,ds \;= T(t)x - x$$

bulunur. Bu nedenle

$$\int_0^t T(s)x\,ds \;\in D(A)$$

ve

$$A\,(\int_0^t T(s)x\,ds\;) = T(t)x - x$$

bulunur.

(ii) 3.9 Teorem 'den

$$\frac{d}{dt}\,T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

olduğunu biliyoruz. Buradan s ' den t ' ye integral alınarak

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)x\,d\tau \;=\int_s^t T(\tau)Ax\,d\tau$$

bulunur.

3.11 Sonuç: $\{ T(t) : t \geq 0 \}$ bir C_0-yarıgrup ve A bunun sonsuz küçük üreteci olsun. $x \in D(A)$ için

$$\int_0^t T(s)Ax\, ds = T(t)x - x$$

olur.

3.12 Tanım: A, bir X Banach uzayı üzerinde tanım kümesi D(A) olan bir doğrusal dönüşüm olsun. Eğer D(A),

$$\| x \|_A = \| x \| + \| Ax \|$$

grafik normuna göre bir Banach uzayı ise A dönüşümüne *kapalı dönüşüm* denir.

3.13 Teorem: $\{ T(t) : t \geq 0 \} \subset B(X)$ bir C_0-yarıgrup ve A bunun sonsuz küçük üreteci olsun. A dönüşümünün D(A) tanım kümesi, X içinde yoğun bir alt uzaydır ve A bir kapalı doğrusal dönüşümdür [1].

3.14 Örnek: $C_0[0, \infty[= \{ f : f : [0, \infty[\to \mathbf{C}$ sürekli ve $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \}$ vektör uzayı $\| f \|_\infty = \sup \{ | f(x) | : x \in [0, \infty[\}$ normuna göre bir Banach uzayıdır. $t \in [0, \infty[$ için

$$T(t) : C_0[0, \infty[\to C_0[0, \infty[\quad , \quad [T(t)f](x) = f(x+t)$$

biçiminde tanımlanan T(t) dönüşümlerinin oluşturduğu $\{ T(t) : t \geq 0 \}$ ailesi $C_0[0, \infty[$ üzerinde bir C_0-yarıgruptur (bkz. 1.2.2 Örnek).

Bu yarıgrubun üreteci

$$D(B) = \{ f \in C_0[0, \infty[: f \text{ türevlenebilir ve } f' \in C[0, \infty[\}$$

olmak üzere

$$B : D(B) \to C_0[0, \infty[\quad , \quad Bf = \frac{d}{dx} f = f'$$

dönüşümüdür.

İspat: Sözü edilen C_0-yarıgrubunun üreteci A ve $f \in C_0[0, \infty[$ olsun. Bu durumda $x \in [0, \infty[$ için $C_0[0, \infty[$ içinde

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)f - f}{h}$$

limiti vardır. $\{ T(t) : t \geq 0 \}$ yarıgrubunun tanımı yardımıyla yazılan

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)f(x) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eşitliği

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

limitinin var ve Af(x) olduğunun yani f fonksiyonunun $x > 0$ noktasında sağ türevlenebilir olduğunu, gerektirir. Şimdi f fonksiyonunun x noktasında sol türevlenebilir olduğunu kanıtlayalım.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{u \to 0^+} \frac{f(x) - f(x-u)}{u} \qquad (h = -u)$$

$$= \lim_{u \to 0^+} \frac{f(x-u+u) - f(x-u)}{u}$$

$$= \lim_{u \to 0^+} \frac{T(u)f - f}{u} (x-u) \qquad (3.7)$$

$$= \lim_{u \to 0^+} \frac{T(u)f - f}{u}(x-u) \qquad (3.7)$$

yazılabilir. $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$A = \lim_{u \to 0^+} \frac{T(u)f - f}{u}$$

olduğundan

$$0 < u < \delta \Rightarrow \left\| \frac{T(u)f - f}{u} - Af \right\|_\infty < \varepsilon / 2 \qquad (3.8)$$

ya da $0 < u < \delta$ her bir $t \in [0, \infty[$ için

$$\left| \frac{(T(u)f - f)(t)}{u} - (Af)(t) \right| < \varepsilon / 2 \qquad (3.9)$$

olacak biçimde bir $0 < \delta_1 < x$ sayısı vardır. Af fonksiyonu x noktasında sürekli olduğundan

$$t \in [x-\delta_1, x+\delta_2] \Rightarrow | Af(t) - Af(x) | < \varepsilon / 2 \qquad (3.10)$$

olacak biçimde bir $0 < \delta_2 < x$ sayısı vardır. $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$ olsun. Her $u \in]0,\delta[$ için, $u \in]0,\delta_1[$ ve $x-u \in]x-\delta_1, x+\delta_2[$ olduğundan (3.9) ve (3.10)

$$\left| \frac{(T(u)f - f)(x-u)}{u} - (Af)(x) \right| \le \left| \frac{(T(u)f - f)(x-u)}{u} - (Af)(x-u) \right|$$

$$+ | (Af)(x-u) - Af(x) | < \varepsilon$$

olmasını gerektirir. Bu ε keyfi alındığı için (3.7) limitinin, yani f fonksiyonunun x noktasında sol türevinin var ve Af(x) olduğu anlamına gelir. Bu iki sonuçtan, yani f fonksiyonunun $x > 0$ noktasında sağ ve sol türevlerinin var ve (Af)(x) olmasından,

$$D(A) \subset D(B) \text{ ve } Af = Bf = \frac{d}{dx} f = f'$$

olduğu çıkar.

Öte yandan $f \in D(B)$ ise

$$\left| \frac{(T(u)f - f)(x)}{h} - f'(x) \right| = \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| \le \frac{1}{h} \int_x^{x+h} | f'(u) - f'(x) | du$$

eşitsizliği, $f \in D(A)$ ve $Af = f'$ olmasını gerektirir. Çünkü $f \in C_0[0, \infty[$ olduğundan bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$| x - u | < \delta \text{ , } u, x \in [0, \infty[\Rightarrow | f'(u) - f(x) | < \varepsilon / 2$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bundan dolayı $x \ge 0$ ve $0 < h < \delta$ ise

$$\left| \frac{(T(u)f - f)(x)}{h} - f'(x) \right| = \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| \le \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{\varepsilon}{2} du = \varepsilon/2$$

olur. Buradan $0 < h < \delta$ olmak üzere

$$\left\| \frac{T(h)f - f}{h} \right\|_\infty \le \varepsilon / 2 < \varepsilon$$

bulunur.

4. SOYUT CAUCHY PROBLEMİ

Bu bölümde homojen soyut Cauchy problemi ile homojen olmayan soyut Cauchy problemi tanıtılacak ve bu problemlerin C_0-yarıgrupları ile ilişkili olan temel varlık ve teklik teoremleri verilecektir.

X bir Banach uzayı olsun. $A : X \supset D(A) \to X$ bir doğrusal dönüşüm, $x \in X$ ve $u : [0,\infty[\to X$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \ , \quad t > 0 \\ u(0) = x \end{cases} \qquad (4.1)$$

başlangıç değer problemine bir *(homojen) Soyut Cauchy Problemi* denir. Burada sol yan u fonksiyonunun t > 0 noktasındaki türevidir. Sağ yan, u(t) öğesinin A dönüşümü altındaki görüntüsü olduğundan, X uzayının bir öğesidir.

$f : [0,\infty[\to X$ verilen vektör-değerli bir fonksiyon olmak üzere (4.1) soyut Cauchy problemi,

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) \ , \quad t > 0 \\ u(0) = x \end{cases} \qquad (4.2)$$

soyut Cauchy problemine genelleştirilebilir. Buna da *homojen olmayan Soyut Cauchy Problemi* adı verilir.

$u : [0,\infty[\to X$, $[0,\infty[$ üzerinde sürekli, $]0,\infty[$ üzerinde sürekli olarak türevlenebilir ve $t \in]0,\infty[\Rightarrow u(t) \in D(A)$ koşulu ile (4.1) problemini sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu u fonksiyonuna (4.1) Soyut Cauchy Probleminin bir *çözümü* adı verilir.

Aşağıdaki teorem, (4.1) soyut Cauchy probleminin çözümünün var ve tek olduğunu verir.

4.1 Teorem: X bir Banach uzay, A bir $\{ T(t) : t \geq 0 \}$ C_0-yarıgrubunun sonsuz küçük üreteci ve $x \in D(A)$ olsun. Bu durumda (4.1) soyut Cauchy probleminin bir tek $u = u(t)$ çözümü vardır ve

$$u(t) = T(t)x \quad , t \geq 0$$

dır [1].

İspat: $x \in D(A)$ olmak üzere

$$u(t) = T(t)x \quad , t \geq 0$$

fonksiyonu (4.1) soyut Cauchy probleminin bir çözümüdür. Çünkü $\{T(t):t\geq 0\}$ C_0-yarıgrup olduğundan u süreklidir. 3.9 Teorem 'den dolayı diğer çözüm koşullarını sağlar. O halde (4.1) soyut Cauchy probleminin bir çözümü vardır.

Şimdi çözümün tek olduğunu gösterelim. (4.1) probleminin bir çözümü u olsun ve $0 < s < t$ için

$$\frac{d^+}{ds}\,[\, T(t-s)u(s) \,] = \lim_{h \to 0^+} \frac{T(t-s-h)\,u(s+h) - T(t-s)u(s)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{T(t-s-h)(u(s+h)-u(s)) + T(t-s-h)u(s) - T(t-s)u(s)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} T(t-s-h)\left(\frac{u(s+h)-u(s)}{h} \right) - \lim_{h \to 0^+} T(t-s-h)\left(\frac{T(h)u(s)-u(s)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0^+} T(t-s-h)\left(\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - u'(s) \right) + \lim_{h \to 0^+} T(t-s-h)u'(s)$$

$$- \lim_{h \to 0^+} T(t-s-h)\left(\frac{T(h)u(s)-u(s)}{h}\right)$$

yazılabilir. $0 \le h \le t - s$ üzerinde $\| T(t-s-h) \|$ normunun sınırlı olması (3.8Teorem)

$$\lim_{h \to 0^+} T(t-s-h)\left(\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - u'(s)\right) = 0$$

olmasını gerektirir. 3.8 Teorem, 3.9 Teorem 'in son kısmındaki ispat gibi kullanılarak

$$\lim_{h \to 0^+} T(t-s-h)u'(s) = T(t-s)\, u'(s)$$

bulunur. $\{ T(t) : t \ge 0 \}$ C_0-yarıgrup olduğundan, $0 < h \le t$ için,

$$\left\| T(t-s-h)\left(\frac{T(h)\,u(s)-u(s)}{h}\right) - T(t-s)A\,u(s) \right\| =$$

$$\left\| T(t-s-h)\left(\frac{T(h)\,u(s)-u(s)}{h} - T(h)\,A\,u(s)\right) \right\| \le$$

$$\| T(t-s-h) \| \left\| \frac{T(h)u(s)-u(s)}{h} - T(h)Au(s) \right\| \le$$

$$M\,e^{wt}\left(\left\| \frac{T(h)u(s)-u(s)}{h} - Au(s) \right\| + \| Au(s) - T(h)Au(s) \| \right)$$

olacak biçimde $0 \le w$, $1 \le M$ sayıları vardır (bkz. 3.8 Teorem). Bu,

$$\lim_{h \to 0^+} T(t-s-h)\left(\frac{T(h)u(s)-u(s)}{h} \right) = T(t-h)Au(s)$$

sonucunu verir. Bu sonuçlar yerlerine yazılarak

$$\frac{d^+}{ds} T(t-s)u(s) = T(t-s)u'(s) - T(t-s)Au(s)$$

bulunur. $0 < s < t$ için

$$\frac{d^{-}}{ds} T(t-s)u(s) = \lim_{h \to 0^-} \frac{T(t-s-h)\, u(s+h) - T(t-s)u(s)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{T(t-s+h)u(s-h) - T(t-s)u(s)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} T(t-s+h)\left(\frac{u(s)-u(s-h)}{h} \right) + \lim_{h \to 0^+} \frac{T(t-s)u(s) - T(t-s+h)u(s)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} T(t-s+h)\left(\frac{u(s)-u(s-h)}{h} \right) - \lim_{h \to 0^+} T(t-s)\left(\frac{T(h)u(s) - u(s)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0^+} T(t-s+h)\left(\frac{u(s)-u(s-h)}{h} - u'(s) \right) + \lim_{h \to 0^+} T(t-s+h)\, u'(s)$$

$$- \lim_{h \to 0^+} T(t-s)\left(\frac{T(h)u(s) - u(s)}{h} \right)$$

yazılabilir. Buradan $\{ T(t) : t \geq 0 \}$ yarıgrubunun C_0-yarıgrup oluşu ve 3.8Teorem kullanılarak,

$$\frac{d^{-}}{ds} T(t-s)u(s) = T(t-s)u'(s) - T(t-s)Au(s)$$

bulunur. Bu iki sonuçtan

$$\frac{d}{ds} T(t-s)u(s) = T(t-s)u'(s) - T(t-s)Au(s)$$

olduğu görülür. u fonksiyonunun çözüm olması

$$\frac{d}{ds} T(t-s)u(s) = T(t-s)u'(s) - T(t-s)Au(s) = T(t-s)(\, u'(s) - Au(s)\,) = 0$$

olmasını gerektirir. Burada $u(s) \in D(A)$ olmalıdır. Buradan integral alınarak ve 2.2.10 Teorem kullanılarak

$$0=\int_0^t \frac{d}{ds} T(t-s)u(s)\,ds = T(t-s)u(s)\Big|_0^t = T(t-t)u(t) - T(t)u(0)$$

ve buradan da

$$u(t) = T(t)u(0) = T(t)x$$

bulunur.

$\{ T(t) : t \geq 0 \} \subset X$, sonsuz küçük üreticisi olan bir yarıgrup ve $f:[0,T] \to X$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) \ , \quad t \in [0, T[\\ u(0) = x \end{cases} \qquad (4.3)$$

soyut Cauchy problemini

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \qquad (4.4)$$

fonksiyonu ile birlikte göz önüne alalım.

4.2 Tanım: (a) $u : [0, T[\to X$, $[0, T[$ üzerinde sürekli, $]0,T[$ üzerinde sürekli olarak türevlenebilir ve (4.3) problemini sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu u fonksiyonuna (4.3) probleminin bir *klasik çözümü* denir.

(b) (4.4) ile verilen u fonksiyonuna (4.3) probleminin bir *ılımlı (mild) çözümü* denir.

Aşağıdaki teorem, bu çözümler arasındaki ilişkiyi verecektir.

4.3 Teorem: (i) (4.3) probleminin en çok bir klasik çözümü vardır. Her klasik çözüm bir ılımlı çözümdür.

(ii) f fonksiyonu C^1-sınıfından ve $x \in D(A)$ ise (4.4) ılımlı çözümü (4.3) probleminin bir klasik çözümüdür. Özel olarak $f \equiv 0$ olması durumunda $x \in D(A)$ için (4.3) probleminin bir tek klasik çözümü vardır. Bu çözüm $u(t)=T(t)x$ biçimindedir.

(iii) $A \in B(X)$ ise her bir $x \in X$ ve sürekli her bir $f : [t_0 , T] \to X$ fonksiyonu için (4.4) ılımlı çözümü (4.3) probleminin bir klasik çözümüdür [4].

İspat: (i) (4.3) probleminin bir klasik çözümü ve $[0, T[$ aralığından X uzayına sürekli bir fonksiyon u olsun. $t < T$ olmak üzere

$$v :]0,t[\to X \quad , \quad v(s) = T(t - s)u(s)$$

biçiminde bir v fonksiyonunu tanımlayalım. 3.9 Teorem 'in ispatındaki gibi türev alınarak ve u fonksiyonunun çözüm olduğu kullanılarak,

$$\begin{aligned} v'(s) &= - AT(t - s)u(s) + T(t - s)u'(s) \\ &= - AT(t - s)u(s) + T(t - s)(Au(s) + f(s)) \\ &= T(t - s)f(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan integral alınarak

$$v(t - \varepsilon) - v(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} T(t - s)f(s)\, ds$$

ve buradan da $\varepsilon \to 0^+$ için limit alınarak

$$v(t) - v(0) = \int_0^t T(t - s)f(s)\, ds$$

ya da

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t - s)f(s)\, ds$$

bulunur. Bu (4.3) probleminin u klasik çözümünün ılımlı ve tek olduğunu verir.

(ii) $f : [0, T[\to X$, C^1 - sınıfından olsun. (4.4) 'teki u fonksiyonunun (4.3) probleminin bir klasik çözümü olduğunu gösterelim. 3.9 Teorem 'den dolayı

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x$$

olduğundan

$$g(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$$

biçiminde tanımlanan g fonksiyonunun (4.3) probleminin bir klasik çözümü olduğunu göstermek yeterli olur. t - s = z değişimi yapılarak ve z integral değişkeni s ile değiştirilerek

$$g(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds = \int_0^t T(s)f(t-s)\,ds$$

yazılabilir. $0 \le t < T$ için

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h} = \frac{1}{h}\left\{\int_0^{t+h} T(s)f(t+h-s)\,ds - \int_0^t T(s)f(t-s)\,ds\right\}$$

$$= \int_0^t T(s)\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}\,ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)f(t+h-s)\,ds \qquad (4.5)$$

dır.

$$\left\|\int_0^t T(s)\left(\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}\right)ds - \int_0^t T(s)f'(t-s)\,ds\right\| =$$

$$\left\| \int_0^t T(s)\left[\frac{f(t+h-s) - f(s-t)}{h} - f'(t-s) \right] \right\| ds \leq$$

$$\int_0^t \| T(s) \| \left\| \frac{f(t+h-s) - f(s-t)}{h} - f'(t-s) \right\| ds$$

eşitsizliği, f fonksiyonunun [0,T[üzerinde C^1-sınıfından olması ve 3.8 Teorem

$$\lim_{h\to 0} \int_0^t T(s) \frac{f(t+h-s) - f(t-s)}{h} ds = \int_0^t T(s) f'(t-s)\, ds$$

olmasını gerektirir. Öte yandan 3.8 Teorem gereğince

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s) f(t+h-s)\, ds = T(t)f(0)$$

dır. Bu limitlerin var olması ve (4.5) g'(t) türevinin var ve

$$g'(t) = \int_0^t T(s) f'(t-s)\, ds + T(t)f(0)$$

olduğunu verir. g fonksiyonunun diğer ifadesi kullanılarak

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)\, ds - \int_0^t T(t-s)f(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^t T(t+h-s)f(s)\, ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\, ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s)\, ds$$

$$= \frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(t-s)f(s)\, ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\, ds$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(t-s)f(s)\, ds = \frac{g(t+h) - g(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\, ds$$

ve buradan da, $h \to 0$ iken, limit alınarak

$$Ag(t) = A\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds = g'(t) - f(t)$$

bulunur.

(iii) $A \in B(X)$ ve $f : [0, T[\to X$ sürekli olsun. Bu durumda 3.6 Teorem gereğince

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} (t^n / n!)\,A^n \quad , \quad t \geq 0$$

olmalıdır. Burada her $t \geq 0$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} (t^n / n!)\,A^n$$

serisi operatör normuna göre mutlak yakınsaktır.

$$V(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \quad , \quad 0 \leq t < T$$

diyelim. $h > 0$ için

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)\,ds - \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds\right)$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^t (T(t+h-s)f(s) - T(t-s)f(s))\,ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\,ds$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{T(h) - I}{h}\,v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\,ds \qquad (4.6)$$

bulunur. f sürekli olduğundan

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\, ds$$

limiti vardır ve f(t)' ye eşittir.

$$\frac{T(h)-I}{h} = \frac{A}{1!} + \frac{hA^2}{2!} + \ldots$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(h)-I}{h} v(x) = Av(x)$$

olmasını gerektirir. Çünkü

$$\frac{\|A\|}{1!} + \frac{h\|A\|^2}{2!} + \ldots \le \|A\| \left(\frac{\|I\|}{1!} + \frac{h\|A\|}{2!} + \frac{h^2\|A\|^2}{3!} + \ldots \right)$$

dır. Sağdaki seri yakınsak olduğundan

$$\frac{A}{1!} + \frac{hA^2}{2!} + \ldots$$

serisi mutlak yakınsak olur. Bu iki limitin varlığı ile (4.6)eşitliğinden v fonksiyonunun t noktasında sağ türevlenebilir ve

$$v_+'(t) = Av(t) + f(t)$$

olduğu çıkar. Av ve f sürekli olduğundan v_+' süreklidir. Bu nedenle v sürekli olarak türevlenebilir ve

$$v'(t) = Av(t) + f(t)$$

olur. v(0) = 0 olduğundan, $x \in X$ için,

$$u(t) = T(t)x + v(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\, ds$$

(4.3) probleminin klasik çözümüdür.

4.4 Örnek: $u=u(x, t)$ bilinmeyen bir fonksiyon ve g, $]0, \infty[$ üzerinde tanımlı olarak verilen bir fonksiyon olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (x>0 \;,\; t>0) \\ &u(x, 0)=g(x) \qquad (x>0) \end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

Cauchy problemini gözönüne alalım. (4.7) probleminin (formal) çözümü

$$u(x, t)=g(x+t) \qquad (x>0 \;,\; t \geq 0)$$

olarak verilir.

$x>0$, $t \geq 0$ değişkenlerinin iki değişkenli bir fonksiyonu olan $u=u(x, t)$ yardımıyla, $t \geq 0$ sabit tutularak,

$$u_t(x) = u(x, t) \qquad (x>0 \;,\; t \geq 0) \qquad (4.8)$$

biçiminde bir u_t fonksiyonu tanımlanabilir. Bu iş her bir $t \geq 0$ için yapılırsa tek x değişkenli fonksiyonların bir $(u_t)_{t\geq 0}$ ailesi elde edilir. Bu aile her bir $t \geq 0$ 'ı bir u_t 'ye eşleyen, yani

$$u(t) = u_t \qquad (4.9)$$

biçiminde tanımlanan, bir fonksiyon olarak düşünülebilir. Üstelik u fonksiyonunun belirli bir X Banach uzayında değerler aldığı varsayılabilir. X olarak $(C_s[0, \infty[, \|.\|_\infty)$ ya da $(L^p[0, \infty[, \|.\|_p)$ alınabilir. Bu durumda (4.7) Cauchy problemi fonksiyonel analiz terimleri türünden

$$u'(t)=Au(t)$$

$$u(0)=g$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada A, bir değişkenli anlamında, diferansiyel operatörüdür. $u'(t)$, (4.3) biçiminde tanımlanan $u : [\ 0, \infty\ [\ \to X$ dönüşümünün türevidir.

4.5 Örnek:$\{ T(t) : t \geq 0 \}$, $(C_0[\ 0, \infty\ [, \|\ .\ \|_\infty)$ Banach uzayı üzerinde sağ kayma grubu olsun (1.2.2 Örnek). Bunun C_0-yarıgrup ve

$$D(A) = \{ f \in C_0[\ 0, \infty\ [: f' \text{ var ve } f' \in C_0[\ 0, \infty\ [\ \}$$

olmak üzere

$$A : D(A) \to C_0[\ 0, \infty\ [\ , \quad Af = f' \tag{4.10}$$

dönüşümünün bu yarıgrubun üreteci olduğunu biliyoruz (bkz. 3.14 Örnek).

(4.10) 'daki A ve $u_0 \in D(A)$ için 4.1 Teorem gereğince

$$u'(t) = Au(t)$$

$$u(0) = u_0$$

soyut Cauchy probleminin bir tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$u(t) = T(t)u_0 \quad (t \geq 0)$$

fonksiyonudur. (.4.8) ve (4.9) eşitliklerinden dolayı, $x \geq 0$ ve $t \geq 0$ için,

$$u_t(x) = [\ T(t)u_0\ ](x) = u_0(x+t)$$

ya da

$$u(x, t) = u_0(x+t)$$

olur.

KAYNAKÇA

[1] Mc Bride, A.C., Semigroups of Linear Operators: An Introduction, Longman Scientific and Technical, (1987).

[2] Nagel, R. (ed.), One-parameter Semigroups of Positive Operators, Springer-Verlag, (1986).

[3] Pazy, A., Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, (1983).

[4] Zeidler, E., Nonlinear Functional Analysis and its Applications, II /A, Springer-Verlag, (1990).

[5] Lados, G.E. and Lakshmikantham, V., Differential Equations in Abstract Spaces, Academic Press, (1972).

[6] Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis, Mc Graw-Hill, (1964).

[7] Hasser, N.B., Sullivan, J.A., Real Analysis, Van Nostrand Reinhold Company, (1971).John Wiley and Sons, (1978).