T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BETONARME KİRİŞLİ DÖŞEMELERDE ETKİLİ TABLA GENİŞLİĞİNİN İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Mehmet TERZİ

Balıkesir,Eylül-1998

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BETONARME KİRİŞLİ DÖŞEMELERDE ETKİLİ TABLA GENİŞLİĞİNİN İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ
Mehmet TERZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Şerif SAYLAN

Sınav Tarihi : 16.10.1998
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Şerif SAYLAN
: Prof. Dr. Muhammed D. TEKİN
: Doç. Dr. Eşref ÜNLÜOĞLU

Balıkesir,Eylül-1998

ÖZ

BETONARME KİRİŞLİ DÖŞEMELERDE ETKİLİ TABLA GENİŞLİĞİNİN İNCELENMESİ

İnş.Yük.Müh. Mehmet TERZİ

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

(Doktora Tezi / Tez Danışmanı: Prof.Dr. Şerif SAYLAN)

Balıkesir,1998

Betonarme inşaatın monolitik özelliğinden dolayı döşeme ve kirişler birlikte çalışırlar. Kirişlerin kesit hesabı yapılırken döşemenin bir kısmını da enkesite dahil etmek gerekir. Yapısal çözümleme ve yer değiştirme için gerekli atalet momentinin bulunmasında gözönüne alınacak etkili tabla genişliğinin hesaplanması gerekmektedir. Bu çalışmada, döşeme kirişlerinin etkili tabla genişliklerinin belirlenmesi için dikdörtgen prizma eleman kullanılarak üç boyutlu sonlu elemanlar programı hazırlanmıştır.

Teorik ve nümerik çalışmalara bakıldığında basit mesnetli, eşit açıklıklı, karşılıklı kenarları boşta olan ve eşit yükleme için kirişli döşeme sistemleri incelenmiş ve bu sınır şartlarına ait etkili tabla genişliği ifadeleri geliştirilmiştir. Bu çalışmalardan farklı olarak kolonların kirişlerle birleştiği noktalarda tam ankastre mesnetli kirişli döşemelerin etkili tabla genişliği ifadeleri tekil ve çizgisel yük halleri için bulunmuştur. Üç Boyutlu Sonlu Elemanlar ile elde edilen etkili tabla genişlikleri bazı ülke yönetmelikleri ve teorik çalışmalara göre daha büyük olduğu görülmüştür.

Çeşitli ülke yönetmeliklerinde etkili tabla genişliği için önerilen değerlerde ciddi farklılıklar olmasına rağmen yapısal çözümleme için gerekli olan kesit tesirlerinde bu denli ciddi bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Bu yüzden önerilen ifadelerden elde edilecek etkili tabla genişliği değerleri yapısal çözümleme için uygun sonuçlar vermektedir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Betonarme kiriş / etkili tabla genişliği / Üç Boyutlu Sonlu Elemanlar / tekil yük / çizgisel yük / Rijitlik Matrisi / deplasman / döşeme.

ABSTRACT

AN INVESTIGATION OF EFFECTIVE FLANGE WIDTH IN REINFORCED CONCRETE SLAB WITH BEAMS

Mehmet TERZİ
BSc.MSc.(Civil Eng.)
Balıkesir University, Institute of Science, Department of Civil Engineering
(Ph.D.Thesis / Supervisor:Prof.Dr.Şerif SAYLAN)

Balıkesir,TURKEY-1998

Slabs and beams in reinforced concrete structures work together because of their monolithic characteristic. In the design of reinforced concrete slabs with beams, a part of the slab should be taken into account for the calculation of the cross sectional properties of a beam. The effective flange width of a beam is required in the calculation of the moment of inertia of the beam cross sections for to using in structural analysis and calculation of displacements. Using a rectangular prism element, a three dimensional finite elements program is prepared for determining the effective flange width of the slab beams.

In theoretical and numerical studies, a system of slab with concrete beam for equal load positions with simple support, equal space and free opposite edges are studied, and statements for effective flange width of beams belonging these extremity conditions are improved. Apart from these studies effective flange width of the slab beams fixed-end supported on points where columns are connected with beams is found for concentrated and uniformly distributed line loads. The effective width obtained by the three dimensional finite elements analysis is found larger than the given values of the standards and theoretical studies.

In spite of serious differences in suggested values for effective width in standards of various countries, no significant differences are recorded for cross section effects that are necessary for structural analysis. Therefore, values for effective flange width of beams obtained by the statements suggested are convenient for structural analysis.

KEY WORDS: Reinforced concrete beam / effective flange width of beam / three dimensional finite elements / concentrated load / uniformly distributed line load / stiffness matrix / deflection / slab.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER ve TERİMLER LİSTESİ

Simge	Adı	Birimi
u	X ekseni doğrultusundaki deplasman bileşeni	cm
v	Y ekseni doğrultusundaki deplasman bileşeni	cm
w	Z ekseni doğrultusundaki deplasman bileşeni	cm
σ	Normal gerilme	kgf/cm^2
ν	Poisson oranı	
E	Elastisite Modülü	kgf/cm^2
τ	Kayma gerilmesi	kgf/cm^2
$[D]$	Elastisite matrisi	
δ	Kısmi türev operatörü	
$\{\delta\}$	Uç yerdeğiştirme bileşenlerinden oluşan kolon matris	
$\{P\}$	Dış kuvvetler vektörü	
$[K]$	Rijitlik (Stiffness) matrisi	
$\{\varepsilon\}$	Şekil değiştirme bileşenlerinden oluşan kolon matris	
$[N]$	Eleman şekil fonksiyonları matrisi	
P	Eleman sınırındaki yayılı yük	
$[B]$	Eleman şekil değiştirme (Slope) matrisi	
$[J]$	Jakobiyen matrisi	
$[J^a]$	Jakobiyen matrisinin adjoint(eşlenik) matrisi	
ρ	Birim hacmin kütlesi	
γ	Şekil değiştirme açısı	
λ	Lame sabiti	
G	Kayma modülü	
ε	Birim deformasyon	
ε_x	X ekseni doğrultusundaki birim deformasyon bileşeni	
ε_y	Y ekseni doğrultusundaki birim deformasyon bileşeni	
ε_z	Z ekseni doğrultusundaki birim deformasyon bileşeni	
V	Hacim	
$\{u\}$	Eleman içindeki genel deplasman vektörü	
$\{f\}$	Deplasman vektörü	
b	Etkili tabla genişliği	cm
b_e	Tablanın kiriş gövdesine kadar olan genişliği	cm
b_w	Kiriş genişliği	cm
h_f	Döşeme kalınlığı	cm
d	Kiriş yüksekliği	cm
$2s$	Kiriş eksenine dik yöndeki kirişler arası döşeme açıklığı	cm
ℓ	Kiriş hesap açıklığı	cm
σ_x	x doğrultusundaki normal gerilme	kgf/cm^2
σ_y	y doğrultusundaki normal gerilme	kgf/cm^2
σ_z	z doğrultusundaki normal gerilme	kgf/cm^2

ŞEKİL LİSTESİ

TABLO LİSTESİ

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın, bu konu ile ilgilenen kişilere ışık tutmasını ve faydalı olmasını diliyorum. Deneysel olarak gerçekleştiremediğim bu çalışmam, teorik bir çalışma olmuştur.

Çalışmamım yönlendirilmesinde ve gerçekleştirilmesinde, çalışma süresince ilgi, destek ve katkıları için değerli hocam Sayın Prof. Dr. Şerif SAYLAN'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Program yazılımı ve üç boyutlu sonlu elemanlarla ilgili problemlerimi aşmamda yardımcı olan, Yard. Doç. Dr. Mehmet İREN'E teşekkürlerimi sunarım.

Tez yazımı sırasında katkılarından dolayı Araştırma görevlisi arkadaşlarım. Ayhan ARIK, Altuğ YAVAŞ ve Fehmi ÇİVİCİ'ye teşekkür eder, akademik çalışmalarında başarılar dilerim.

Çalışmalarım sırasında moral desteğini esirgemeyen ve kendilerine ayırmam gereken zamanları, çalışmalarım nedeniyle bana bağışlayan eşim Aysel ve kızım Zeynep'e gönül dolusu sevgiler sunarım.

Ayrıca, yetişmemde katkıları ve emeği olan aileme teşekkür borcu bile azdır.

Balıkesir, 1998 İnş. Yük. Müh. Mehmet TERZİ

1.GİRİŞ

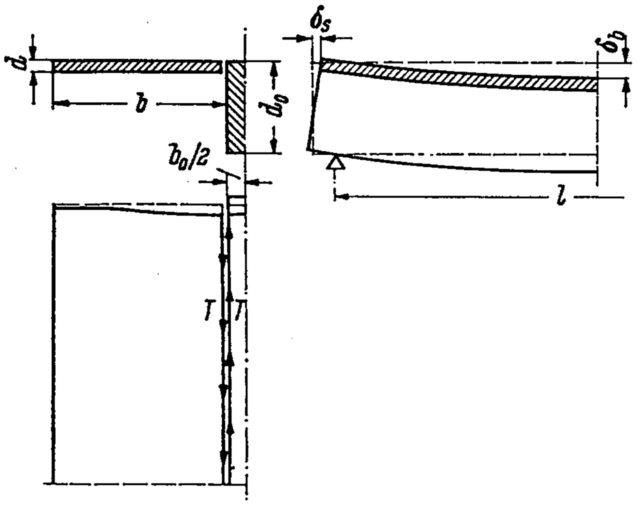
Tabla ve kirişlerin birlikteliğini ifade eden Tablalı Kirişler Betonarme yapıların en çok ve en etkili taşıyıcılarıdır. Yapıların döşemelerini oluşturmada, döşeme ve kirişlerin monolitik olarak birlikte dökülmelerinde ve köprülerde çok yaygın bir şekilde kullanılırlar. Donatıyla kirişe rijit olarak bağlanmış olan döşeme parçası kirişle birlikte hareket ederek T şeklinde bir eğilme elemanı teşkil eder. Önemli olan bu konstrüksiyon elemanlarının kolay, doğru ve hızlı bir şekilde hesabı gerekmektedir.

Çeşitli ülke yönetmelikleri üzerinde yapılan araştırmalar göstermiştir ki; etkili tabla genişliği olarak önerilen değerde ciddi farklılıklar vardır. Bu öneriler genellikle problemin aşırı basite indirgenmesinden doğmuştur. Deneysel olduğu kadar teorik olarak da T- kirişin etkili genişliğinin doğru şekilde elde edilmesi bu tür kirişlerin dizaynında çözümü oldukça güç bir problem olarak karşımıza çıkmaktadır. Tablalı kirişlerin dizaynında etkili genişlik **b** için çok değişik şartname kısıtlamaları mevcuttur. Fakat her şeye rağmen etkili genişlik, tablalı kirişlerin gövde merkezinden gövde merkezine olan mesafeyi aşamaz.

Analitik çözümlerin güçlüğü, deneysel çalışmaların belirli şartlarda ve sınırlı sayıda yapılabilmesi son yıllardaki bilgisayarların hızlı gelişmesine paralel olarak bu konuda sayısal hesap yöntemlerinden sonlu elemanlar metoduna ilgi göstermemize neden olmuştur.

1.1 Etkili Tabla Genişliğinin Belirlenmesi İle İlgili Yapılan Çalışmalar

Şekil 1.1'de görüldüğü gibi tablalı kirişin eğiminde tablanın etkisi özellikle kirişin çekme ve kesme dayanımlarına bağlıdır. Tabla ne kadar ince olursa tablanın kesme dayanımı o kadar düşük olur. Bortsch ve Kármán'dan başlayarak tablalı kirişler üzerine yapılan hemen hemen tüm teorik çalışmalar [1-10] çok ince tablalar üzerine yapılmış ve sadece tablaların plaka etkisi gözönüne alınmıştır.



Şekil 1.1 Tablanın Etkisi

1.2.1 Yükleme Durumunun ve Sınır Şartlarının Etkili Tabla Genişliğine Etkisi İle İlgili Çalışmalar

Pek çok araştırmacı tarafından malzemenin lineer elastik olduğu kabul edilmiştir.

Kaymanın etkisini dikkate alarak etkili tabla genişliği üzerine Metzer [3] ve Chwalla [7] önemli çalışmalar yapmışlardır.

Tek bir kiriş için, sonsuz büyüklükteki bir tabla genişliği ile sınır durumu, yani $l/b = 0$ ve $b_0/b = 0$ hali için ayrıntılı olarak Chwalla[7] tarafından incelenmiştir. Her iki yazarın etkili tabla genişliği tanımları farklı olmasına rağmen Chwalla'nın elde ettiği sonuçlar Metzer'in sonuçları ile hemen hemen aynı olacak şekilde çakışmaktadır.

Ayrıca Allen ve Savern [50] 'in bu konuda çalışmaları mevcuttur. Brendel[14] ise bu konuda deneysel çalışmalar yapmıştır. Yine Gajanan M. Sabnis[28] tarafından basit mesnetli, karşılıklı kenarları boşta olan simetrik ve her kirişe eşit yük ile alçıdan yapmış olduğu modelleri test etmiştir.

Beschkine[11]etkili tabla genişliği üzerine yaptığı ayrıntılı çalışmasında kiriş boyu ℓ'nin 1/10'undan daha az tekil yük dağılım uzunluğunda bir daralma oluşmadığını teorik olarak ispatlamıştır. Beschkine'e göre etkili tabla genişliğinin çizgisel yükte olduğu gibi hesaplanabileceğini ifade etmiştir.

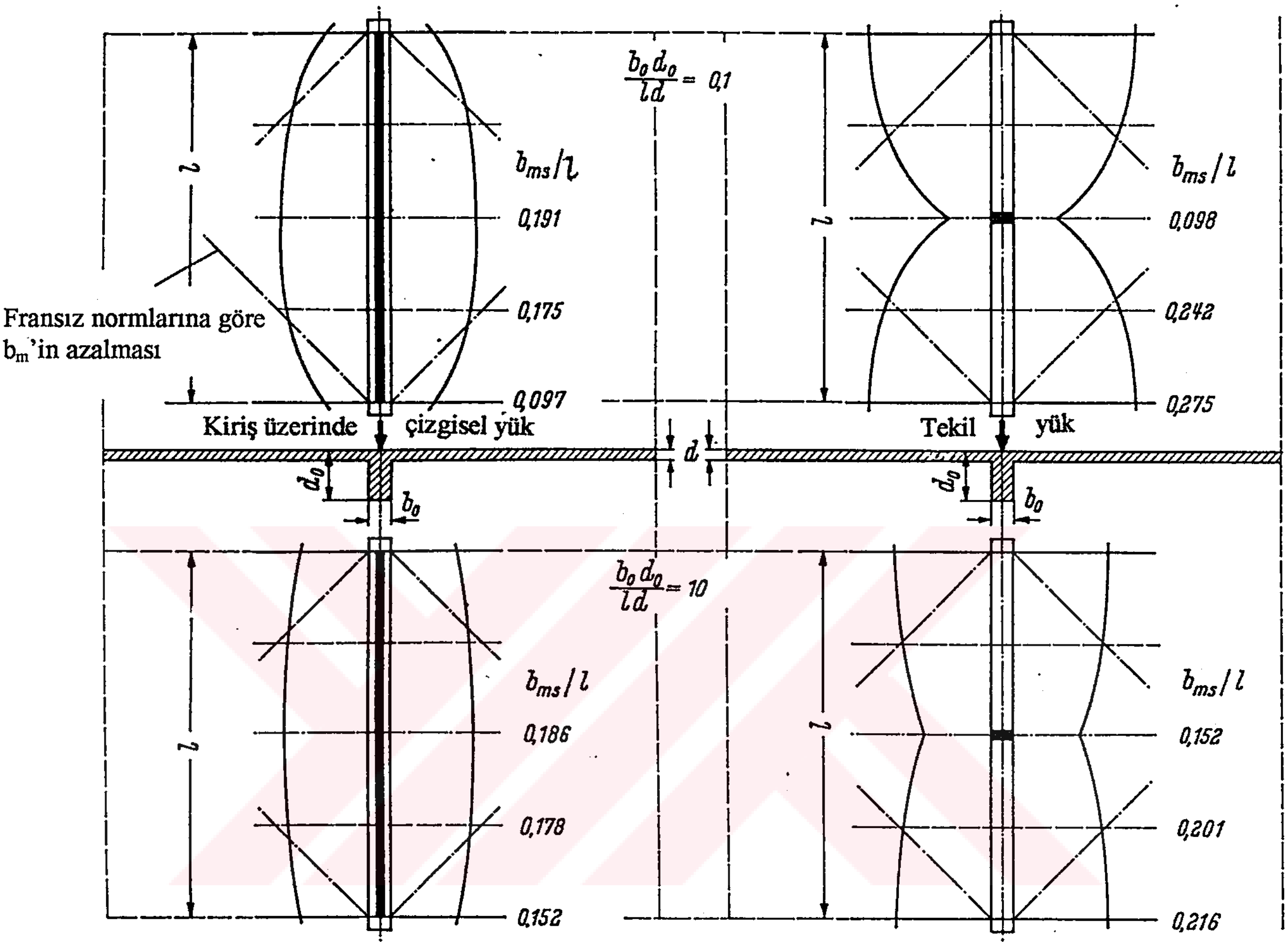
Avrupa Beton Komisyonu tarafından bir noktada yoğunlaşmış ve teorik dağılım boyu a=0 olan bir tekil yük için azalma faktörü ℓ/b=0 için 0.5 ve ℓ/b=20 için 0.9 olarak tavsiye edilmiştir. Bu değerler Tablo 1.1'de gösterilmiştir. Tablo 1.1'de ara değerler lineer interpolasyonla bulunabilir.

Bu şekilde teorik olarak çok zor olan bir yükleme hali için pratik ve çok kullanışlı bir yaklaşık metot verilmiş olmaktadır.

Tablo 1.1 Dağıtma uzunluğu a olan kiriş ortasında b_{ms} için azaltma faktörü

ℓ / b	0	5	10	15	20	25
a = 0	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
a ≥ 1/10ℓ	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Tabla (döşeme) eğer kiriş mesnedinde serbest bir kenara sahipse elastisite teorisine göre önce yalnızca sınır şartı σ_b =0 sağlanabilir. Ancak kayma gerilmelerinin kaldırılmasından sonra serbest bir kenar oluşabilir. Metzer bu kenar kayma kuvvetleri etkisinin taşıyıcı orta noktasına kadar uzamadığını ispatlamıştır. Bu aynı zamanda Şekil 1.2'te gösterilenin aksine gerçekte etkili tabla genişliğinde kuvvetli bir azalma görülür. Çünkü kayma gerilmelerinin tabla içine yayılması ilk olarak bu noktada başlamaktadır. Fransız Betonarme Yönetmeliğine göre b_m serbest kenar kesitinin aralığından fazla olmamalıdır. b_m'in bu sınırlaması Şekil 1.2'te gösterilmiştir.



Şekil 1.2 Kirişte etkili tabla genişliği(Chwalla'ya göre)

Dischinger [8] ise önceden verilmiş herhangi bir yükleme fonksiyonunun sinüs fonksiyonlarına ayrılması ile çözmüştür.

Herhangi bir yükün farklı bölümlere ayrılmasından dolayı, hesaplanan kesitte bir o kadar da moment M_1, M_2 , ... ve bunlara ait etkili genişlikler b_{ms1}, b_{ms2}, ...ortaya çıkar. Toplam yükleme için aranan etkili genişlik böylece ortalama bir değerdir. Bunların oluşma esasları üzerine detaylı deneyler yapmanın çok az bir anlamı olacaktır[14]. Betonun lineer olmayan şekil değiştirme davranışı gözönüne alındığında, tablanın sehimini ihmal ederek basınç kuvvetlerini aşağıdaki denklemlere göre kabaca tahmin etmek yeterli olacaktır.

$$\sigma_1 b_{ms1} + \sigma_2 b_{ms2} + \ldots\ldots = (\sigma_1 + \sigma_2) b_{ms} \tag{1.1}$$

İlk adımda yaklaşık basınç gerilmeleri momentler ile doğru ve ait oldukları etkili tabla genişlikleriyle ters orantılı olarak kabul edilebilir. Yani $\sigma_i = C\ M_i / b_{msi}$ bu hatayı dengeleyen düzeltme faktörü C, her durumda eşit büyüklükte seçilmelidir. Bu durumda aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$M_1 + M_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = \left(\frac{M_1}{b_{ms1}} + \frac{M_2}{b_{ms2}} + \ldots\ldots\ldots \right) b_{ms} \tag{1.2}$$

Buradan ortalama etkili tabla genişliği,

$$b_{ms} = (M_1 + M_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots) / \left(\frac{M_1}{b_{ms1}} + \frac{M_2}{b_{ms2}} + \ldots\ldots\ldots \right) \tag{1.3}$$

Etkili tabla genişliğinin hesaplandığı (1.3) bağıntısı elastisite teorisiyle çok iyi şekilde uyuşan sonuçlar vermektedir.

1.2.2 Tablanın Eğilme Rijitliğinin Gözönüne Alınması İle İlgili Çalışmalar

Tabla(döşeme), tablalı kirişin eğilmesi durumunda eğilme momentlerine maruz kalır. Bu moment döşeme kalınlığı ile kiriş yüksekliği arasındaki oranın büyüklüğüne bağlı olarak artar. Marguerre'in[12] deneylerine göre mesnet açıklığının 1/4'üne kadar olan tabla genişliklerinde, yani $\ell/b \geq 4$, toplam tabla genişliğini tablalı kirişin eğilme rijitliği için kullanılabilir. Buna karşılık, daha geniş tablalar için eğilmeye göre etkiyen etkili genişlik b_{mb}. Tablo 1.2'ye göre seçilebilir.

Tablo 1.2. Eğilmeye göre etkiyen etkili tabla genişliği b_{mb}

ℓ/b	≥ 4	$=4$	$=3$	$=2$	$=1$
b_{mb}	b	0.25ℓ	0.3ℓ	0.4ℓ	0.5ℓ

Aranan etkili tabla genişliği b_m daha önce bulunan b_{ms} ve b_{mb}'ye bağlı olarak hesaplanabilir. Bu tablo tablalı kirişlerin çizgisel yük durumları için geçerlidir. b_m/b oranı için, ℓ/b değeri dışında d/d_0 ve ℓ/b_0 oranları da önemlidir. d/d_0, ℓ/b_0 ve ℓ/b oranlarına bağlı olarak Brendel[14] çizgisel yük hali için tablo hazırlamıştır.

Bunun yanında Brendel[14] alçıdan yaptığı modelleri test etmiş ve çeşitli faktörlere bağlı olarak çalışan tabla genişliğini araştırmıştır. Bu deneylerde etkili tabla genişliği ℓ/b oranına bağlı olarak araştırılmış, yükleme durumu ve tabla ile kiriş arasındaki rijitlik farklılığının etkili tabla genişliği üzerindeki etkisini ihmal etmiştir

1.2 Etkili Tabla Genişliğinin Hesaplanması ile ilgili Şartname Kayıtları

1.2.1 TS 500'de Etkili Tabla Genişliği

Tablalı kesitlerin boyutlandırılmasında, yapısal çözümleme ve şekil değiştirme için gerekli eylemsizlik momentinin bulunmasında gözönüne alınacak tabla genişliği Şekil 1.3'den yararlanarak aşağıdaki bağıntılardan hesaplanmalıdır.

Simetrik kesitlerde:

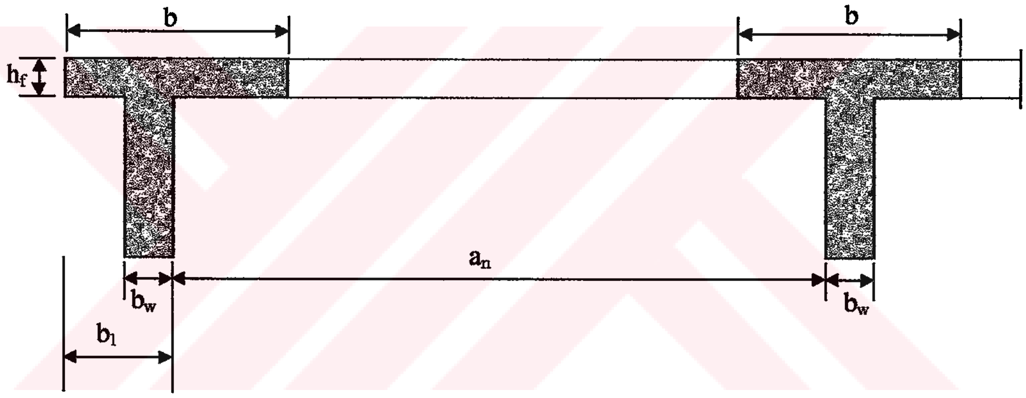
$$b = b_w + 1/5\, L_p \qquad (1.4)$$

Simetrik olmayan kesitlerde:

$$b = b_1 + 1/10\, L_p \qquad (1.5)$$

Ancak, kesit gövdesinin dışına taşan tabla genişliği kesitin herbir yanında tabla kalınlığının 6 katından ve komşu kiriş gövde yüzüne olan uzaklığın yarısından fazla olamaz ($\leq 6\ h_f$ veya $1/2\ a_n$). (1.4) ve (1.5) bağıntısındaki L_p iki moment sıfır noktası arasındaki uzaklık, ℓ ise kirişin hesap açıklığıdır ($L_p = \alpha\ \ell$). Daha kesin hesap yapılmadığı durumlarda α için aşağıdaki değerler kullanılabilir[19].

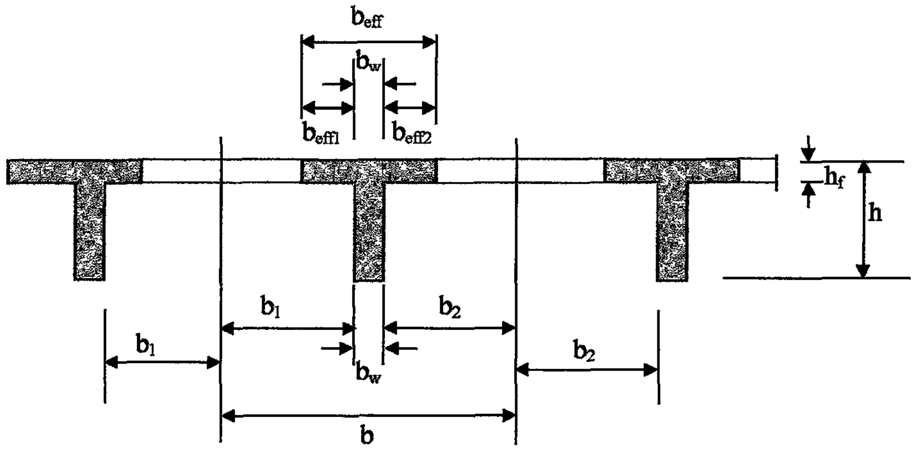
Tek açıklıklı, basit mesnetli kirişler	α=1.0
Sürekli kirişler, kenar açıklık	α=0.8
Sürekli kirişler, orta açıklık	α=0.6
Konsol kirişlerde	α=1.5



Şekil 1.3 Simetrik ve simetrik olmayan kirişlerde etkili tabla genişliği

1.2.2 EC2 (Avrupa Beton Yönetmeliği)

Avrupa Ülkeleri Komisyonu'nun (CEC) üye ülkelerde ortak kurallar sağlamak amacıyla hazırladığı Avrupa Beton Yönetmeliği (Eurocode-2) de Tablalı kesitlerin boyutlandırılmasında gözönüne alınacak tabla genişliği TS 500'e benzer şekilde hesaplanmasını öngörmüştür.

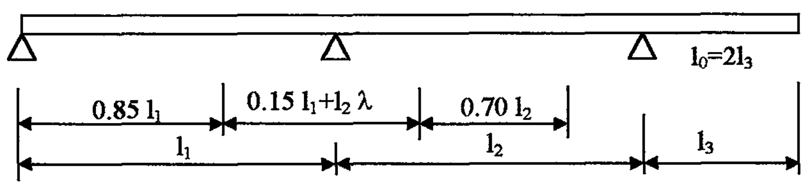


Şekil 1.4 Boyutların tanımlanması

Moment sıfir noktaları arasındaki mesafe ℓ_0 , özel haller için aşağıdaki koşulların sağlanması halinde Şekil 1.5'den elde edilebilir.

i) Konsol uzunluğu bitişik açıklığın yarısından daha az olmalıdır.

ii) Bitişik açıklıkların oranı 1 ile 1.5 arasında olmalıdır.



Şekil 1.5 Etkili açıklıklar

EC2 (Eurocode 2) Bölüm 2.5.2.2.1'e göre Etkili tabla Genişliği güvenli bölgede kalmak üzere yaklaşık olarak aşağıdaki formüller ile hesaplanabilir [17],[20].

Simetrik kesitlerde:

$$b_{eff} = b_w + \frac{1}{5} \cdot \ell_0 \langle \; b$$

Simetrik olmayan kesitlerde:

$$b_{eff} = b_w + \frac{1}{10} \cdot \ell_0 \langle \; b_w + b_1$$

$$\ell_0 = \alpha \cdot \ell$$

$$b_{eff} = b_w + b_{1,eff} + b_{2,eff}$$

$$b_{1,eff} = 0.2 \cdot b_1 + 0.1 \cdot \ell_0 \leq 0.2 \cdot \ell_0 \leq b_1$$

ve

$$b_{2,eff} = 0.2 \cdot b_2 + 0.1 \cdot \ell_0 \leq 0.2 \cdot \ell_0 \leq b_2$$

Daha kesin hesap yapılamadığı durumlarda EC2'de α için önerilen değerler aşağıda verilmiştir.

Tek açıklıklı, basit mesnetli kirişler	α=1.0
Sürekli kirişler, kenar açıklık	α=0.85
Sürekli kirişler, orta açıklık	α=0.7
Konsol kirişlerde	α=2.0

1.2.3 DIN 1045

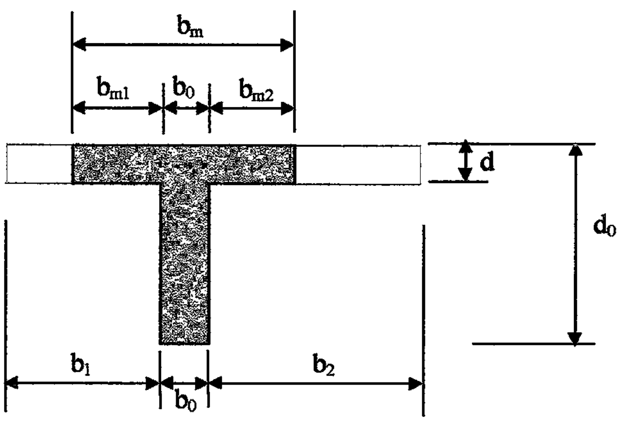
1.2.3.1. Tablalı Kirişler

3.2.3.1.1. Tablalı Kirişlerin Çalışan Tabla Genişliği

Tablalı kirişlerin kesit hesabındaki çalışan tabla genişliği ile hiperstatik sistemlerin kesit hesapları yapılırken alınacak tabla genişlikleri, DIN 1045, Kısım 17.2.1'e göre, aynı kabul edilmektedir. Kesit tesirleri yaklaşık olarak, tabla genişliğinin açıklık boyunca sabit olması haline göre hesaplanabilir. Elastisite teorisine göre hesaplanan çalışan tabla genişlikleri, kırılma durumunda basınç bölgesinde σ-ε bağıntısının lineer olmaması sebebiyle, emniyetli tarafta bulunurlar yani kırılma halinde çalışan tabla genişliği daha büyük olur. Basitleştirmek ve emniyetli tarafta kalmak için çalışan tabla genişliği

$$b_m = \frac{\ell}{3} \tag{1-6}$$

kabul edilir. Burada ℓ kirişin açıklığıdır; sürekli kirişler ve konsol kirişlerde, aşağıdaki verilere göre ℓ yerine ℓ_0 konmalıdır. Daha kesin hesaplar yapılmadığı takdirde b_m değeri aşağıdaki bağıntılarla hesaplanabilir.



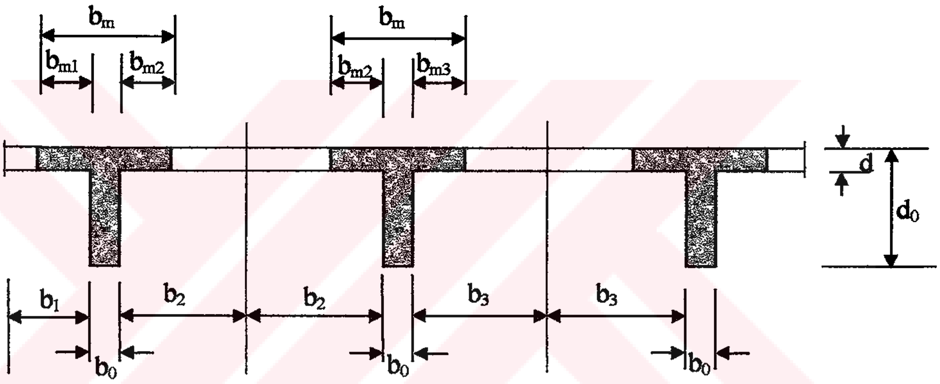
Şekil 1.6 Çalışan tabla genişliği

Tablasının iki kenarı boşta olan kirişler (Şekil 1.6) ve kenar kirişlerde (Şekil 1.7)

$$b_m = b_0 + b_{m1} + b_{m2} \tag{1.7}$$

orta kirişlerde;

$$b_m = b_0 + b_{m2} + b_{m3} \tag{1.8}$$



Şekil 1.7 Çalışan tabla genişliği

(1.7), (1.8) denklemlerine göre hesaplanan tabla genişlikleri simetrik halden çok farklı ise ve bunlar dönmeye karşı emniyete alınmamışsa ve ayrıca kesit tama yakın değerde kullanılıyorsa, bu durumda eğik eğilmeli kesit hesabı yapılmalıdır. Çizgisel yük altında b_{mi}/b_i oranlarının b_i/ℓ_0 ve d/d_0'a bağlı olarak değişimleri Tablo 1.3'de verilmiştir. Ara değerler için lineer enterpolasyon yapılabilir.

Tablo 1.3. b_{m1}, b_{m2} ,b_{m3} değerleri

$\frac{d}{d_0}$	$\frac{b_1}{\ell}=$ $\frac{b_2}{\ell}=$ $\frac{b_3}{\ell}=$													
	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.45	0.40	0.35	0.30	0.25	0.20	015.	0.1	
0.10	0.18	0.20	0.22	0.25	0.31	0.38	0.43	0.48	0.55	0.62	0.71	0.82	0.92	1.00	$\frac{b_{m1}}{b_1}$
0.15	0.20	0.22	0.25	0.38	0.33	0.40	0.45	0.50	0.57	0.64	0.72	0.82	0.92	1.00	
0.20	0.23	0.26	0.30	0.34	0.38	0.45	0.50	0.55	0.61	0.68	0.76	0.85	0.93	1.00	$\frac{b_{m2}}{b_2}$
0.30	0.32	0.36	0.40	0.44	0.50	0.56	0.59	0.63	0.68	0.77	0.80	0.87	0.94	1.00	$\frac{b_{m3}}{b_3}$
1.00	0.67	0.72	0.78	0.85	0.91	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	

Sürekli kirişlerde, (1.6) denklemi ve Tablo 1.3'de ℓ yerine moment sıfır noktaları arasındaki ℓ_0 alınmalıdır. Yükleme şeklinden ve komşu açıklıklardan bağımsız olmak üzere, hesapları basitleştirmek amacı ile, ℓ_0 değeri

Sürekli kirişlerin kenar açıklıklarında $\ell_0 = 0.8\,\ell$,

Sürekli kirişlerin orta açıklıklarda $\ell_0 = 0.6\,\ell$,

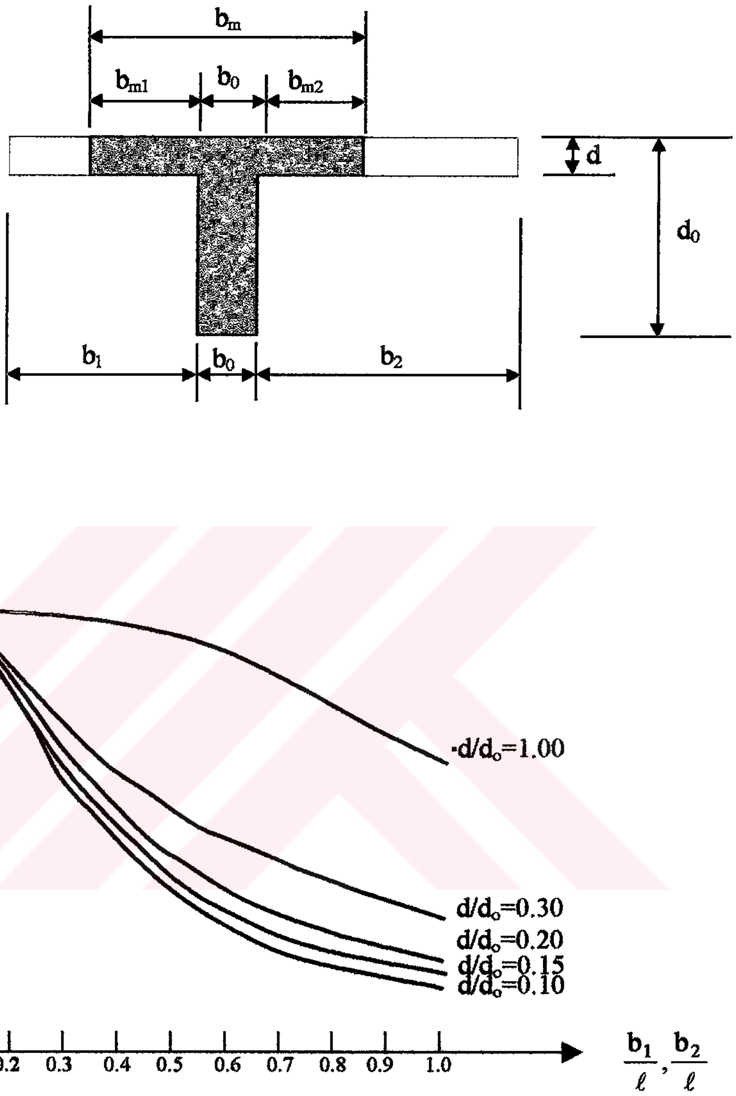
Konsol kirişlerde, ℓ konsol açıklığı yerine ℓ_0=1.5ℓ

olarak alınmalıdır.

Fikir vermek amacıyla, şekil 1.8'de tablalı kirişin çalışan tabla genişliğinin çeşitli faktörlere göre değişimi gösterilmiştir.

Sürekli kirişlerin mesnetlerinde basınç bölgesinde döşeme varsa, buralarda yukarıdaki esaslara göre hesaplanmış çalışan tabla genişlikleri, tekil kuvvetler(mesnet reaksiyonları) in etkisinden ötürü %40 azaltılmalıdır.

Kiriş açıklıklarının (b_1,b_2,b_3) çok büyük olması halinde, b_i/ℓ = 1, (i=1,2,3) alınarak Tablo 1.3'deki b_i = 1.0 ℓ değerlerine ait çalışan tabla genişlikleri hesaplarda gözönüne alınmalıdır. Bu suretle çalışan tabla genişliği d/d_0 oranına bağlı olarak kiriş açıklığının %40-50 si olarak sınırlandırılmalıdır [17],[21].



Şekil 1.8 Tablalı kirişin çalışan tabla genişliğinin çeşitli faktörlere göre değişimi

1.2.4 ACI 318-95

1.2.4.1 Tablalı Kiriş Yapımı

1- Tablalı kiriş yapımında, tabla ve gövde birlikte dökülmeli veya birbirlerine iyice kenetlenmelidir.

2- Bir T kesitin tablası olarak etkili döşeme genişliği, kiriş açıklığının 1/4 ünü geçmemeli ve gövdenin her bir tarafındaki taşan tabla mesafesi,

a) döşeme kalınlığının 8 katını,

b) komşu kiriş gövde yüzüne olan mesafenin yarısını aşmamalıdır.

3- Sadece tek tarafında döşeme bulunan kirişlerin, etkili tabla genişliği,

a) kiriş açıklığının1/12'sini,

b) döşeme kalınlığının 6 katını,

c) komşu kiriş gövdesine olan mesafenin yarısını aşmamalıdır.

4- T şeklinin tablaya ek basınç alanı sağlamak için kullanıldığı tekil kirişlerde (isolated beam) gövde genişliğinin yarısından az olmayan bir tabla kalınlığı ve gövde genişliğinin 4 katından fazla olmayan etkili bir tabla genişliğine sahip olmalıdır[22].

1.3 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Betonarme yapılarda, kirişlerin ve döşemelerin betonlarının birlikte dökülmesi kiriş ve döşemelerin monolitik olarak yapılmasını sağlar. Monolitik kiriş-döşeme sistemlerinin pozitif moment bölgelerinde, çekme donatısının karşıladığı çekme kuvvetini dengeleyen basınç kuvvetinin büyük bir bölümünü döşemeler karşılar. Diğer bir deyişle, döşemeler, bağlı oldukları kiriş için bir ''basınç tablası'' oluştururlar. Böylece basınç bölgesi T yada Γ biçiminde kirişler ortaya çıkar.

Tabla genişliği döşeme kalınlığının yanısıra, açıklığa, kiriş genişliğine, gövdeler arası mesafeye ve dış yüke de bağlıdır.

Bu çalışmada, konu ile ilgili yapılmış olan teorik ve nümerik çalışmalar incelenmiş, geliştirilen üç boyutlu sonlu elemanlar programı ile de yukarıdaki parametrelerin değişik kombinasyonlarının araştırıldığı açıklık boyunca farklı kesitlerdeki etkili tabla genişliği bulunmuştur.

Teorik ve nümerik çalışmalara bakıldığında basit mesnetli, eşit açıklıklı, karşılıklı kenarları boşta olan ve eşit yükleme halleri için kirişli döşeme sistemleri incelenmiş ve bu sınır şartlarına ait çalışan tabla genişliği ifadeleri geliştirilmiştir.

Bu çalışmamızda esas olarak kolonların kirişlerle birleştiği noktalarda tam ankastre mesnetli kirişli döşemelerin çalışan tabla genişliği araştırılmıştır.

Tek açıklıklı kirişli bir döşeme ile her iki yönde ikişer açıklığı bulunan kirişli döşeme sistemleri incelenmiş ve kirişlerin çalışan tabla genişlikleri çeşitli parametrelere bağlı olarak bulunmuştur.

Düşük yükler altında tam aderans kabulü ile donatı da modellenmiş ve sonuçlar irdelenmiştir. Bilgisayar hafizalarının yetersiz olmasından dolayı çok açıklıklı döşeme sistemler ile aderans ve donatı ayrıca modellenmemiş ardışık yükler altında çizgisel çatlak gelişimi yöntemi ile göçme durumu incelenememiştir.

2. ETKİLİ TABLA GENİŞLİĞİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

2.1 Giriş

Tabla ve kirişlerin yekpare olduğunu ifade eden Tablalı kirişler Betonarme yapılarda çok sık karşılaşılan taşıyıcı elemanlardır. Bu yüzden tablalı kiriş taşıyıcı sistem elemanlarının kolay, doğru ve hızlı bir şekilde hesabı mutlaka gerekmektedir. Burada problem, tablanın ne kadarlık bir parçasının taşıyıcı olarak hesaplara katılması gerektiğidir.

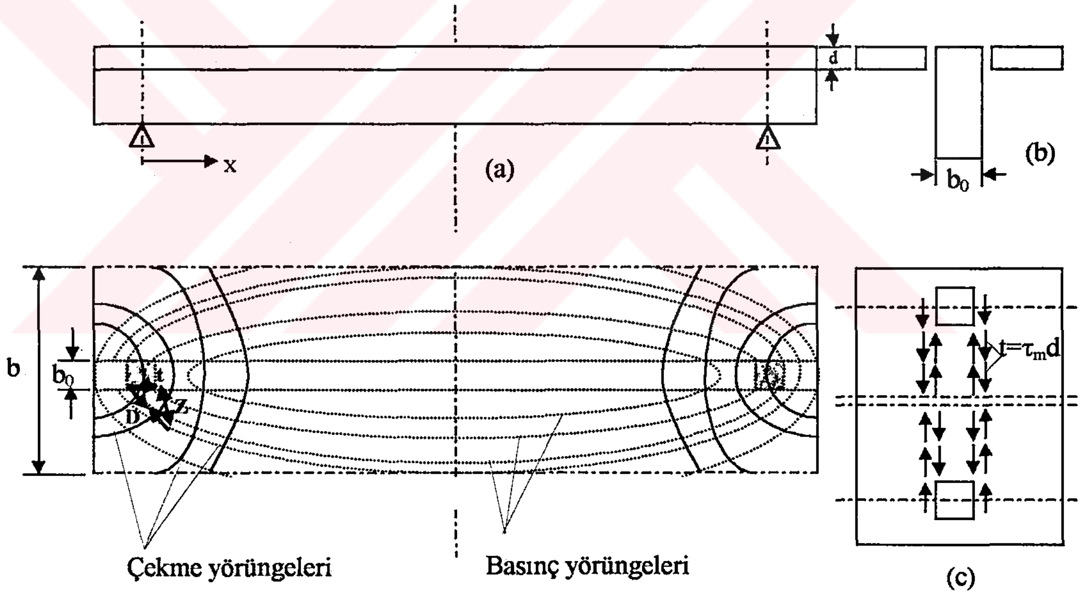
Bir tablalı kirişin basınç başlığının bir parçası olarak uygulanan "etkili genişlik" kavramında, ana fikir, teorik gerilme dağılımının, elastik analiz kullanılarak daha basit olan eşdeğer gerilme dağılımına indirgenmesi ve buna karşı gelen derinliği basit denge ve uygunluk denklemleri yardımıyla hesap etmektir.

Elemanter eğilme teorisi eğilme gerilmelerinin tarafsız eksenden olan uzaklıkla orantılı olacağını, yani gerilmelerin tablanın genişliği boyunca değişmeyeceğini farzeder. Fakat bu genişliğin çok büyük olduğu hallerde, tablanın, gövdeden uzak olan kısımlarının eğilme momentine karşı koymada bütün hisselerini almadıkları ve bu sebeple kirişin, elemanter eğilme teorisinden işaret edilenden daha zayıf olduğu bilinmektedir. Böyle kirişlerdeki gerilme hesaplarının hakiki tabla genişliğine göre değil fakat indirgenmiş bir başka genişliğe göre yapılması adet olmuştur. Bu değiştirme o şekilde yapılır ki değiştirilmiş kiriş kesidine uygulanan elemanter eğilme teorisi hakiki en büyük eğilme gerilmesini versin. Bu indirgenmiş tabla genişliğine etkili genişlik adı verilir [13].

Etkili tabla genişliğinin belirlenmesinde ön şart, gerçek gerilme dağılımındaki toplam basınç kuvvetinin, etkili tabla genişliğinde sabit dağılımındaki toplam basınç kuvvetine eşit olmasıdır.

Eğer bu etkili genişliğin değeri belirlenebilseydi, bir yapının dizaynında kullanılmak üzere dizayn abakları çizilirdi. Fakat bu yaklaşımın zorluğu, sadece etkili genişliğin hesaplanmasından değil, bu hesaplamaların belirli bir esasa oturtulamamasından da kaynaklanmaktadır.

T kesitli betonarme bir kirişte gövde ile tabla beraber dökülmüşlerdir. Buna göre böyle bir kiriş eğilmeye maruz olduğunda, gövdenin tablaya bitişik en üst lifi ne kadar kısalıyorsa, tablanın komşu lifi de aynı miktarda kısalacaktır. Böyle bir deformasyon eşitliği ancak gövde ile tabla arasında meydana gelen kayma gerilmeleri sayesinde mümkün olabilir. Bu τ kayma gerilmeleri eğilmede meydana gelen basınç kuvvetinin bir kısmını tablaya aktarırlar. (Şekil 2.1)



Şekil 2.1 Tablada çekme ve basınç yörüngeleri

Tablanın gövde ile bitişik kesitindeki τ kayma gerilmeleri, hem kiriş boyunca hem de d kalınlığı üzerinde değişkendirler. Bunun neticesi olarak tablada meydana gelen asal çekme ve asal basınç gerilmeleri de hem d kalınlığı üzerinde ve hem de kiriş boyunca değişken olmaktadır. Ancak d kalınlığı üzerinde kayma gerilmelerinin ortalama τ_m gerilmesine eşit şiddette üniform olarak yayıldığı kabul edilirse, tabladaki gerilme durumu düzlem gerilme durumu olur. Bu halde tablada asal basınç ve asal çekme yörüngeleri Şekil 2.1'de gösterildiği gibidir. Bu yörüngelere hakiki gerilme durumunda, kalınlık üzerinde ortalama asal basınç gerilmesi (σ_{bm}) ve kalınlık üzerinde asal çekme (σ_{mz}) gerilmelerinin yörüngeleri gözü ile bakılabilir.

Açıklığın herhangi bir x noktasında, tablanın gövde ile birleştiği kesitte gerilmeler yerine kuvvetler kullanılarak, birim kiriş boyuna tekabül eden $t(x)= \tau_m(x)$ d kayma kuvveti sebebiyle Şekil 2.1'de görülen $D(x) =\sigma_{bm}(x)d$ basınç ve $Z(x) =\sigma_{mz}(x)d$ çekme kuvvetleri meydana gelir.

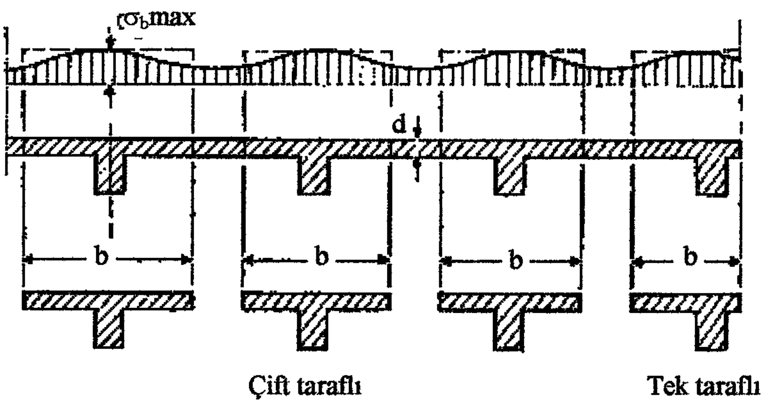
Homojen ve lineer elastik malzemeden yapılmış kirişlerde herhangi bir kesitte τ kayma gerilmelerinin hesabına ait,

$$\tau = \frac{Q}{b}\frac{S_x}{J_x} \tag{2.1}$$

ifadesi bu kesitin aynı bir bölgesinde τ gerilmesinin kiriş boyunca Q kesme kuvveti ile aynı değişimi göstereceği kolayca anlaşılabilir.

Burada da $\tau_m(x)$ ve dolayısıyla Z(x) çekme kuvveti, Q kesme kuvveti ile aynı değişimi göstermektedir. Buna göre mesela üniform yüklü, basit mesnetli bir kirişte Z(x) çekme kuvvetinin mesnetler civarında maksimum değere ulaştığı ve açıklığın ortasına doğru azaldığı söylenebilir.

Diğer taraftan d kalınlığı üzerinde üniform $\tau_m(x)$ kayma gerilmeleri ile, Şekil 2.1c'de görüldüğü gibi, yüklenmiş bir levhada, yüklenen kenardan uzaklaştıkça, bu kenara paralel liflerin daha az kısalacağı açıktır. Halbuki bu ε_b kısalmaları Hooke kanunu sonucu, bu liflerdeki normal σ_b gerilmeleri ile orantılı olduklarından ($\varepsilon_b=\sigma_b/E_b$), kesitte tabladaki, normal gerilmelerin gövdeden uzaklaştıkça azalacakları ortaya çıkar. Nitekim bir döşeme-kiriş sisteminde açıklıkta alınmış bir kesitte en üst a-a lifinde σ_b normal gerilmeleri yayılışı Şekil 2.2'de gösterildiği gibi olmaktadır.



Şekil 2.2 T kesitli kirişler

Diğer taraftan kiriş eğilmeye maruz olduğuna göre kesitte aynı bir düşey üzerinde gerilmeler tarafsız eksenden olan uzaklıkla orantılı olarak değişmektedirler. Buna göre, gövdeden uzaklaştıkça basınç gerilmelerinin azalması sebebiyle tarafsız eksenin bir doğru olmadığı söylenebilir. Bu durumda beton basınç kuvveti D_b'nin değerinin hesabı ve tatbik noktasının tayini çok zorlaşır. Bu güçlüğü ortadan kaldırmak, kesit ve gerilme durumunu basitleştirmek gerekmektedir. Bunun için şu kabulleri yapmak uygundur:

a) Tarafsız eksen gövdedeki yerinden tabla üst kenarına paralel çizilen bir doğrudur.

b) Çalışan tabla genişliği denen bir b genişliği için tabla üst kenarında gerilme maksimum σ_b'ye eşittir ve diğer kısımlarda tabla gerilmeleri sıfırdır.

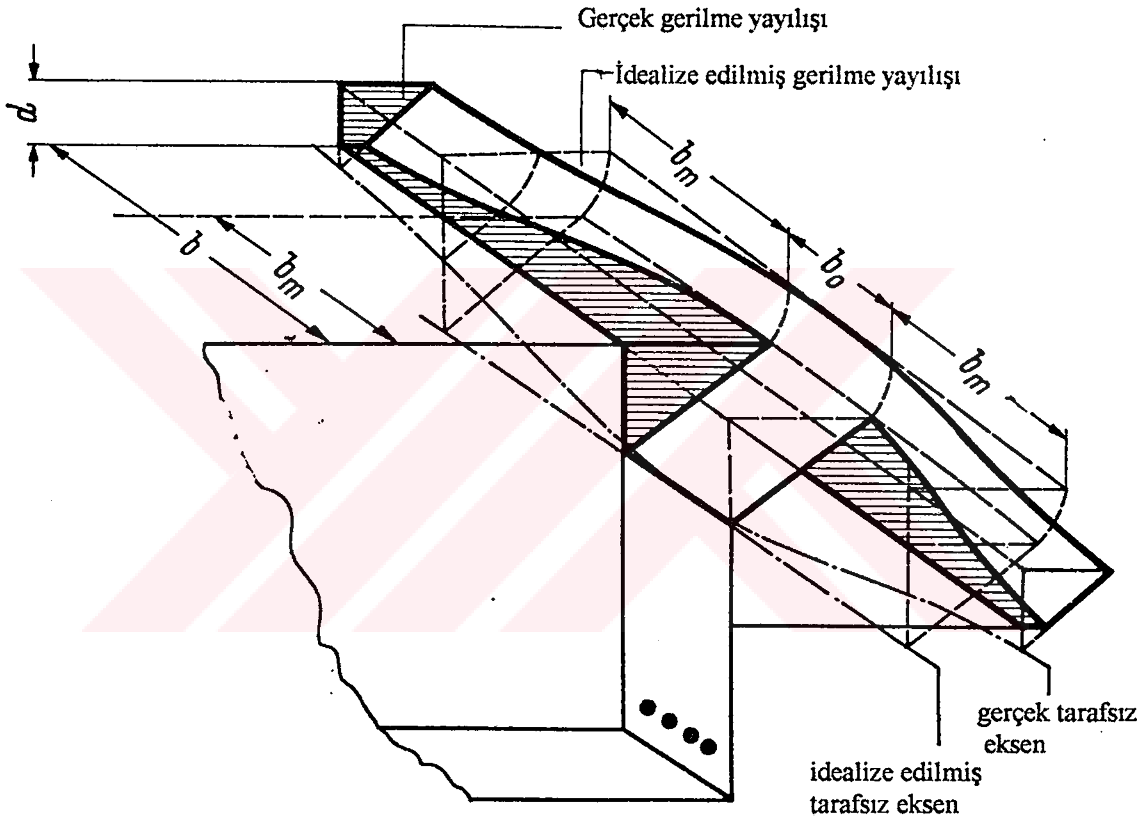
c) Bu şekilde belirlenen kesitte gerilme yayılışı lineerdir.

İşte yukarıdaki kabullerle eğilme teorisine uyan bu ideal kesitin b genişliği öyle olmalıdır ki M kesite tesir eden moment iken, eğilme teorisinin

$$M = D_b \, Z_b$$

denkleminden kesit üst kenarında b genişliği ile bulunan gerilme, maksimum σ_b olsun.

Kesitte hakiki gerilme durumu ile idealize edilmiş kesit ve gerilme durumu sırasıyla Şekil 2.3 de görülmektedir[14],[15],[16],[17].

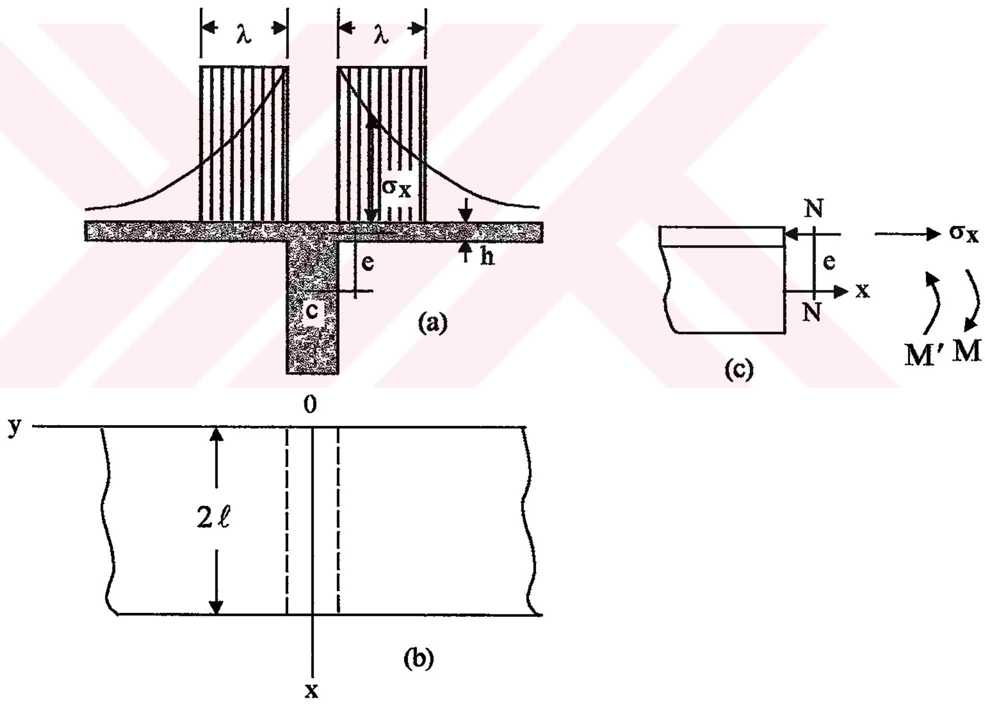


Şekil 2.3 Tablalı kiriş kesitinde basınç gerilmelerinin yaklaşık olarak dağılımı

2. Diferansiyel Denklem Yöntemi

2.2.1 Tablalı Kirişin Etkili Tabla Genişliği

Dikdörtgenlerin iki boyutlu problemlerine minimum enerji prensibinin uygulanmasına ait bir örnek olarak çok geniş tablalı bir kiriş gözönüne alınsın. (Şekil 2.4). Bu tür kirişlere betonarme yapılarda ve gemilerin gövdelerinde çok sık olarak rastlanmaktadır. Elemanter eğilme teorisi eğilme gerilmelerinin tarafsız eksenden olan uzaklıkla orantılı olacağını, yani gerilmelerin tablanın genişliği boyunca değişmeyeceğini kabul eder.



Şekil 2.4 Etkili Tabla Genişliği

Fakat bu genişliğin çok büyük olduğu durumlarda, tablanın , gövdeden uzak olan kısımlarının eğilme momentine karşı koymada bütün hisselerini almadıkları ve bu sebeple kirişin, elemanter eğilme teorisinden işaret edilenden daha zayıf olduğu bilinmektedir. Böyle kirişlerdeki gerilme hesaplarının gerçek tabla genişliğine göre değil fakat indirgenmiş bir tabla genişliğine göre yapılanı adet olmuştur. Bu değiştirme o şekilde yapılır ki değiştirilmiş kiriş kendine uygulanan elemanter eğilme teorisi hakiki en büyük eğilme gerilmesini versin. Bu indirgenmiş tabla genişliğine etkili genişlik denir.

Problemi mümkün olduğunca basit hale getirmek için kirişin sonsuz uzunlukta olduğu ve eşit aralıklı mesnetlere oturduğu kabul edilmiştir. Bütün açıklıklar, açıklık ortasına göre simetrik olan eşit yüklerle yüklenmişlerdir. Açıklık mesnetlerinden Şekil 2.4'de gösterilen herhangi birisi koordinat başlangıcı olarak alınmış ve x ekseni kirişin ekseni doğrultusunda seçilmiştir. Simetri sebebiyle yalnız bir açıklığın ve tablanın herhangi bir yarısının gözönüne alınması yeterlidir. Tabla genişliğinin sonsuz büyük olduğu, tabla kalınlığı h'nin ise kiriş yüksekliği yanında çok küçük olduğu farz edilmiştir. İnce bir plak olarak tablanın eğilmesi bu durumda ihmal edilebilir ve kirişin eğilmesi esnasında tablaya intikal eden kuvvetler tablanın orta düzlemi içinde olur. Böylece tabladaki gerilme yayılışı, iki boyutlu bir problem teşkil eder. Bu probleme karşı gelen φ gerilme fonksiyonunun sağlayacağı diferansiyel denklem,

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \tag{2.2}$$

olacaktır. Bu gerilme fonksiyonu bizim simetrik halimiz için

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \cos\frac{n\pi x}{\ell} \tag{2.3}$$

şeklinde bir seri olarak alınabilir. Burada $f_n(y)$ ler yalnız y'nin fonksiyonlarıdır. Bunu (2.2) denkleminde yerine koyarsak $f_n(y)$ ler için aşağıdaki ifadeyi buluruz.

$$\begin{aligned} f_n(y) &= A_n e^{-\frac{n\pi y}{\ell}} + B_n\left(1+\frac{n\pi y}{\ell}\right)e^{-\frac{n\pi y}{\ell}} \\ &+ C_n e^{\frac{n\pi y}{\ell}} + D_n\left(1+\frac{n\pi y}{\ell}\right)e^{\frac{n\pi y}{\ell}} \cdots \end{aligned} \tag{2.4}$$

y'nin sonsuz değeri için gerilmelerin kaybolacağı şartını sağlamak için $C_n = D_n = 0$ alınız. Böylece gerilme fonksiyonuna ait ifade aşağıdaki şekli alır.

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n e^{-\frac{n\pi y}{\ell}} + B_n\left(1+\frac{n\pi y}{\ell}\right)e^{-\frac{n\pi y}{\ell}}\right]\cos\frac{n\pi x}{\ell} \tag{2.5}$$

A_n ve B_n sabitleri, şimdi, gerçek gerilme yayılışının tabla ve gövdeye ait şekil değiştirme enerjisini bir minimum yapan gerilme yayılışı olması şartından tayin edilecektir.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \qquad \tau_x = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} \tag{2.6}$$

değerleri, şekil değiştirme ifadesi olan

$$V_1 = 2\frac{h}{2E}\int_0^{\infty}\int_0^{2\ell}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2\right]dx\,dy \tag{2.7}$$

denkleminde yerlerine konularak ve gerilme fonksiyonu için (2.5) denklemi kullanılırsa, tablaya ait şekil değiştirme enerjisi

$$V_1 = 2h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\pi^3}{\ell^2}\left(\frac{B_n^2}{E} + \frac{A_n B_n}{2G} + \frac{A_n^2}{2G}\right) \tag{2.8}$$

olur. Yalnız gövdeye ait şekil değiştirme enerjisini gözönüne alırken, A gövde alanını, I, c ağırlık merkezinden geçen yatay eksene göre gövdenin atalet momentini, ℓ ise gövdenin ağırlık merkezi ile tablanın orta düzlemi arasındaki uzaklığı göstersin (Şekil 2.4). Herhangi bir kesitte gövdenin tabla ile beraber taşıdığı toplam eğilme momenti, bizim simetrik halimizde,

$$M = M_0 + M_1\cos\frac{\pi x}{\ell} + M_2\cos\frac{2\pi x}{\ell} + \cdots \tag{2.9}$$

serisi ile temsil edilebilir. Bu seride M_0 mesnetlerdeki eğilme momentinin büyüklüğüne bağlı statikçe belirsiz bir miktardır. M_1, M_2,. . . katsayıları ise yükleme şartından tayin edilecektir. Tabladaki basınç kuvvetini N ile gösterelim (Şekil 2.4 c). M eğilme momentini iki kısma bölebiliriz. M', gövde tarafindan alınan kısmı, N.e'ye eşit olan M'' ise gövde ve tabladaki N boyuna kuvvetleri sebebiyle alınan kısmı göstersin. Statiğe göre, kirişin bütününe ait herhangi bir kesit üzerindeki normal gerilmelerin M kuvvet çiftlerini vermeleri gerekir. Böylece

$$
\begin{aligned}
& N + 2h\int_0^\infty \sigma_x dy = 0 \\
& M' - 2he\int_0^\infty \sigma_x dy = M
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

yazılır. Burada $-2he\int_0^\infty \sigma_x dy = M''$ kısmı, eğilme momentinin tabla tarafından alınan kısmıdır. Gövdenin şekil değiştirme enerjisi

$$V_2 = \int_0^{2\ell} \frac{N^2\, dx}{2AE} + \int_0^{2\ell} \frac{M'^2\, dx}{2EI} \tag{2.11}$$

olur. (2.10)'un ilk denkleminden

$$N = -2h\int_0^\infty \sigma_x dy = -2h\int_0^\infty \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} dy = 2h\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_\infty^0 \tag{2.12}$$

bulunur. Gerilme fonksiyonuna ait (2.5)ifadesinden

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=\infty} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\ell} A_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

olduğu görülür. Böylece

$$N = 2h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{\ell}A_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$M' = M + 2he\int_0^{\infty}\sigma_x dy = M + Ne = M + 2he\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{\ell}A_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

ifadeleri, yahut

$$2h\frac{n\pi}{\ell}A_n = X_n$$

notasyonunu kullanarak

$$\begin{aligned} N &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} \\ M' &= M + e\sum_{n=1}^{\infty} X_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(M_n + eX_n\right)\cos\frac{n\pi x}{\ell} \end{aligned} \qquad (2.13)$$

ifadeleri yazılabilir. Bunları (2.11) de yerine koyarsak

$$\int_0^{2\ell}\cos^2\frac{n\pi x}{\ell}dx = \ell \quad , \quad \int_0^{2\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx = 0 \quad (m \neq n \text{ iken})$$

olduğuna dikkat edilirse,

$$V_2 = \frac{I}{2AE}\sum_{n=1}^{\infty}X_n^2 + \frac{M_0^2\ell}{EI} + \frac{\ell}{2EI}\sum_{n=1}^{\infty}\left(M_n + eX_n\right)^2$$

elde edilir. Bunu tablanın (2.7) şekil değiştirme enerjisine ilave edip, bunun sonucunda

$$2h\frac{n\pi}{\ell}A_n = X_n \quad , \qquad 2h\frac{n\pi}{\ell}B_n = Y_n$$

notasyonlarını kullanırsak toplam şekil değiştirme enerjisi için aşağıdaki ifadeyi buluruz.

$$V = \frac{\pi}{2hE}\sum_{n=1}^{\infty} n\left[Y_n^2 + (1+\nu)X_n Y_n + (1+\nu)X_n^2\right] + \frac{\ell}{2AE}\sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 + \frac{M_0^2 \ell}{EI} + \frac{\ell}{2EI}\sum_{n=1}^{\infty}\left(M_n + eX_n\right)^2 \tag{2.14}$$

M_0, X_n, Y_n büyüklüklerinin (2.14) şekil değiştirme enerjisinin minimum olması şartından tayin edilmeleri gerekir. Burada görüleceği gibi M_0 yalnız $\frac{M_0 \ell}{EI}$ teriminden gözükmektedir ve (2.14) ün minimum olması gerektiğine göre M_0=0 olmalıdır.

$$\frac{\partial V}{\partial Y_n} = 0$$

şartından ise

$$2Y_n + (1+\nu)X_n = 0$$

$$Y_n = -\frac{1+\nu}{2}X_n \tag{2.15}$$

bulunur. (2.15) ve M_0 değeri (2.14) denkleminde yerine konursa şekil değiştirme enerjisi,

$$V = \frac{\pi}{2hE}\cdot\frac{3+2\nu-\nu^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty} nX_n^2 + \frac{\ell}{2AE}\sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 + \frac{\ell}{2EI}\sum_{n=1}^{\infty}(M_n + eX_n)^2 \tag{2.16}$$

olarak yazılabilir.

X_n'in V'yi minimum yapma şartı olarak

$$\frac{\partial V}{\partial X_n} = 0$$

yazılabilir ki buradan da

$$X_n = -\frac{M_n}{e} \frac{1}{1 + \frac{I}{A e^2} + \frac{n \pi I}{h \ell e^2} \cdot \frac{3 + 2\nu - \nu^2}{4}} \tag{2.17}$$

bulunur. Eğilme momenti diyagramın $M = M_1 \operatorname{Cos}(\pi x / \ell)$ şeklinde basit bir cosinüs eğrisi olduğu bir özel hali gözönüne alalım. Böylece (2.17) denkleminden

$$X_1 = -\frac{M_1}{e} \frac{1}{1 + \frac{I}{A e^2} + \frac{\pi I}{h \ell e^2} \cdot \frac{3 + 2\nu - \nu^2}{4}}$$

değeri bulunur. (2.13) denkleminden de tablanın N kuvvetinden meydana gelen momenti

$$M'' = -e N = -e X_1 \cos\frac{\pi x}{\ell} = \frac{M}{1 + \frac{I}{A e^2} + \frac{\pi I}{h \ell e^2} \cdot \frac{3 + 2\nu - \nu^2}{4}} \cos\frac{\pi x}{\ell} \tag{2.18}$$

olur. σ_x gerilmesinin tablanın genişliği boyunca yayılışı, artık (2.5) denkleminden A_1 ve B_1 hariç bütün A_n ve B_n katsayıları sıfır olarak hesaplanabilir. A_1 , B_1 yerine

$$A_1 = \frac{\ell X_1}{2 \pi h} \quad , \quad B_1 = -\frac{1 + \nu}{2} A_1 = -\frac{(1 + \nu) \ell X_1}{4 \pi h}$$

konulacaktır. σ_x'e ait bu gerilme yayılışı (Şekil 2.4 a) daki eğrilerle gösterilmiştir. σ_x gerilmesi, şekilden de görüldüğü üzere gövdeden olan uzaklık arttıkça şiddeti azalmaktadır.

Şimdi bir T kirişin öyle bir 2λ tabla genişliğini (Şekil 2.4 a) tayin edelim ki tabla kesit üzerinde, şekilde taralı alanla gösterilen, düzgün gerilme yayılışı, yukarıda (2.18) denklemi ile hesaplanan M'' momentini versin. Böylece hesaplanan genişlik tablanın, tayini istenen etkili genişliği olacaktır.

Evvelce olduğu gibi eğilme momentinin gövde ve tabla tarafindan alınan kısımları M' ve M'' ile gövdenin c ağırlık merkezindeki gerilmeyi σ_c ile ve nihayet tablanın orta düzlemindeki gerilmeyi σ_e ile gösterirsek elemanter eğilme teorisinden

$$\sigma_e = \sigma_c + \frac{M'e}{\ell} \tag{2.19}$$

değerini statik denge denklemlerinden de

$$\begin{aligned} &2\lambda h \sigma_e + \sigma_c A = 0 \\ &2\lambda h \sigma_e e = M' \end{aligned} \tag{2.20}$$

buluruz. (2.19) ve (2.20) denklemlerinden eğilme momentinin her iki kısmına ait ifadeler,

$$M' = \frac{I}{e}\left(\sigma_e - \sigma_c\right) = \frac{I}{e}\left(1 + \frac{2\lambda h}{A}\right) \cdot \sigma_e$$

$$M'' = 2\lambda h e \sigma_e$$

olarak bulunur. M'' nin toplam eğilme momentine oranı ise

$$\frac{M''}{M' + M''} = \frac{2\lambda h e \sigma_e}{2\lambda h e \sigma_e + \frac{I}{e}\left(1 + \frac{2\lambda h}{A}\right)\sigma_e} = \frac{1}{1 + \frac{I}{Ae^2} + \frac{I}{2\lambda h e^2}} \tag{2.21}$$

olur. Bu oranı (2.18) gerçek çözümünden elde edilen $\dfrac{M''}{M}$ oranına eşit kılmak için

$$\frac{I}{2\lambda h e^2}=\frac{\pi I}{h e^2 \ell}\,\frac{3+2\nu-\nu^2}{4}$$

almamız gerekir ki buradan 2λ etkili genişliğine ait ifade

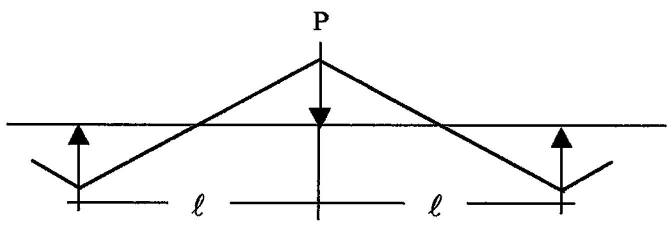
$$2\lambda=\frac{4\ell}{\pi\left(3+2\nu-\nu^2\right)}$$

olarak elde edilir. Örnek olarak ν=0,2 alınırsa

$$2\lambda=0.189\left(2\ell\right)$$

bulunur. Yani kabul edilen eğilme momenti diyagramına göre etkili tabla genişliği, yaklaşık olarak, açıklığın %19 kadardır.

Açıklıkların ortalama eşit tekil kuvvetlerin etkidiği çok açıklıklı kiriş halinde eğilme momenti diyagramı Şekil 2.5'de gösterildiği gibi olur. Bu eğilme moment diyagramını Fourier Serisi ile temsil edip yukarıda gösterilen metod kullanılırsa mesnetlerdeki etkili genişlik



$$2\lambda = 0.85\frac{4\ell}{\pi\left(3+2\nu-\nu^2\right)}$$

olarak bulunur. Yani bu haldeki etkili genişlik moment diyagramının sinüs eğrisi olması halindekinden bir miktar azdır.

ν=0.2 için $\qquad 2\lambda=0.161\left(2\ell\right)$

bulunur[13].

3. ETKİLİ TABLA GENİŞLİĞİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

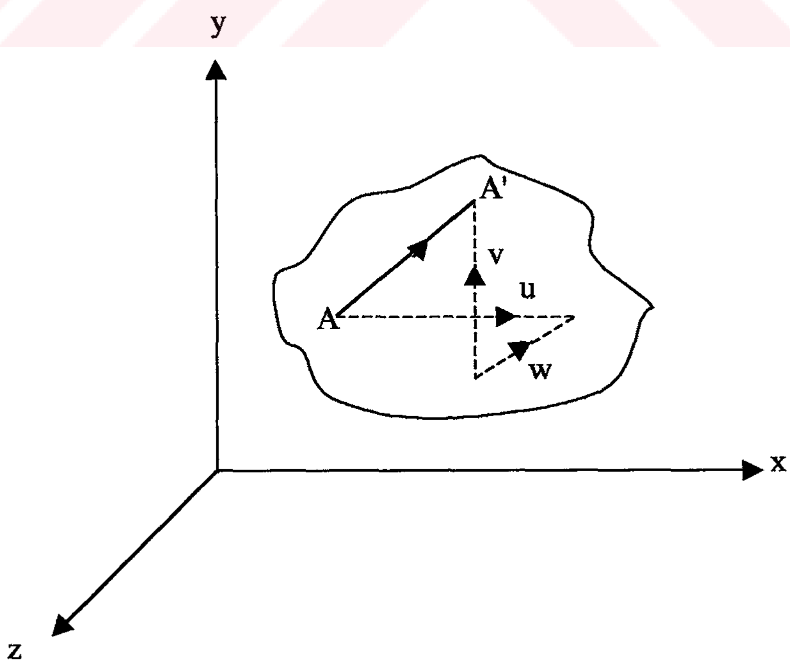
3.1 Lineer Elastisitenin Esasları

3.1.1 Deplasmanlar ve Şekil Değiştirmeler

Elastik bir cismin, genel olarak uzayda yaptığı rijit cisim hareketine ek olarak cismin partikülleri de birbirlerine göre çeşitli hareketler yaparlar. Bu hareketlerde partiküller arasındaki mesafeler değişir ve böylece cisim şekil değiştirir. Elastisite teorisinde bu deplasman alanları incelenirken aşağıdaki kabuller yapılır [25], [26].

1- Şekil değiştiren cisimlerin içindeki deplasmanlar, cisme uygulanan kuvvetlere lineer şekilde bağlıdır. Bir başka deyişle deplasmanlarla kuvvetler arasındaki ilişki Hooke kanununa uyar.

2- Şekil değiştiren cisimlerin içindeki deplasmanlar küçüktür ve birim deformasyonlara lineer olarak bağlıdır.



Şekil 3.1 Üç boyutlu deplasman bileşenleri

Şekil 3.1'de görüldüğü gibi deforme olmuş bir cismin içindeki herhangi bir A noktasında bulunan bir partikül sırasıyla x,y ve z doğrultularında u, v ve w kadar yer değiştirip A' noktasına varsın. u, v ve w deplasman fonksiyonları genel olarak x,y ve z'nin birer fonksiyonları olup,

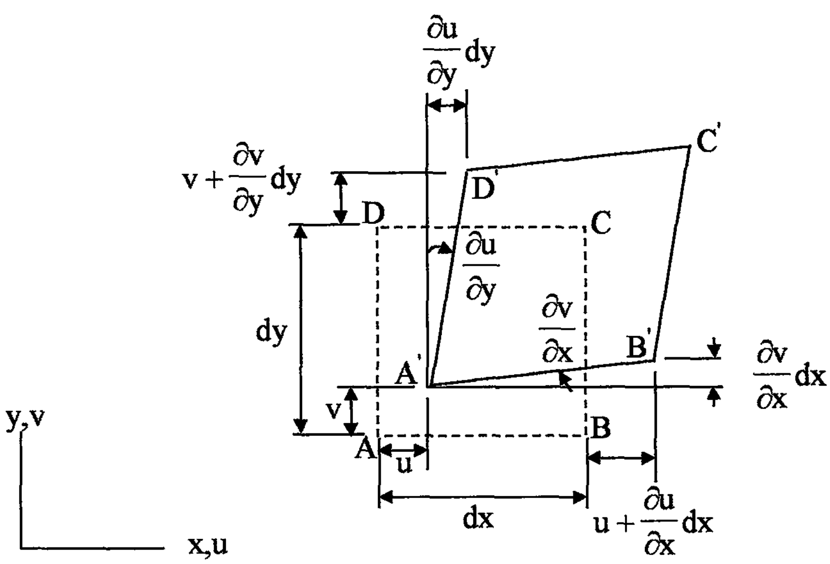
$$u=u(x,y,z) \tag{3.1a}$$

$$v=v(x,y,z) \tag{3.1b}$$

$$w=w(x,y,z) \tag{3.1c}$$

şeklindedir.

Cisim içindeki toplam deformasyonlar, normal gerilmeler ve açı değişimlerinin kombinasyonu ile ifade edilebilir. Şekil 3.2'de görüldüğü gibi deforme olmamış bir cisimden izole edilmiş bir ABCD diferansiyel elemanı gözönüne alalım. Gözönüne aldığımız bu eleman, kuvvetler sisteminin etkisi altında kalarak deforme olacaktır. Deforme olmuş eleman $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ ile gösterilsin.



Şekil 3.2 Bir düzlem elemanının deformasyonu

Elemanın $A^{'}B^{'}$ kenarının x ekseni üzerindeki izdüşümünün uzunluğu,

$$dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \tag{3.2}$$

şeklindedir.

Yine bu doğrultudaki düzlem şekil değiştirme ise,

$$\varepsilon_x = \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.3a}$$

olarak bulunur.

Diğer iki doğrultudaki şekil değiştirmeler de benzer yolla,

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.3b}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.3c}$$

olarak elde edilir. Cismin biçimi değişmeksizin cisimde meydana gelen toplam hacim değişimi ise,

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

ile verilir. Bu hacim değişimine dilatasyon denir.

Öte yandan kayma şekil değiştirmeleri, cismin hacminde bir değişiklik olmaksızın meydana gelen açısal çarpılmalar ise,

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2$$

ile belirlenir.

$$\gamma_1 \approx \tan\gamma_1 = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}\,dx}{dx + \dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx}$$

$$= \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}\,dx}{1 + \dfrac{\partial u}{\partial x}}$$

$$1 \gg \frac{\partial u}{\partial x}$$

olduğundan,

$$\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$$

bulunur. Benzer olarak,

$$\gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$$

elde edilir. Buradan,

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.4a}$$

olur. Diğer düzlemlerdeki kayma şekil değiştirmeleri ise benzer şekilde,

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{3.4b}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{3.4c}$$

olduğu görülür.

Yerdeğiştirme ve açı değişimlerine ait bileşenleri,

$$\{\varepsilon\}_F = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

şeklinde bir matris içinde toplayabiliriz. $\{\varepsilon\}_F$ elastik şekil değiştirme vektörü üç boyutlu hale tekabül eder.

3.1.2 Gerilme - Şekil Değiştirme Bağıntıları

Gerilme-şekil değiştirme bağıntılarının en basit hali için, cismin malzemesi homojen, izotrop ve lineer elastik kabul edilmektedir. Böylece malzemenin elastisite modülü E ve poisson oranı ν, koordinatlardan bağımsızdır. Şekil 3.3'de görüldüğü gibi üzerinde başlangıç ve termal deformasyonlar bulunmayan bir paralel yüzlü alalım.

Hooke kanununa göre x doğrultusundaki yerdeğiştirme,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z\right) \tag{3.6a}$$

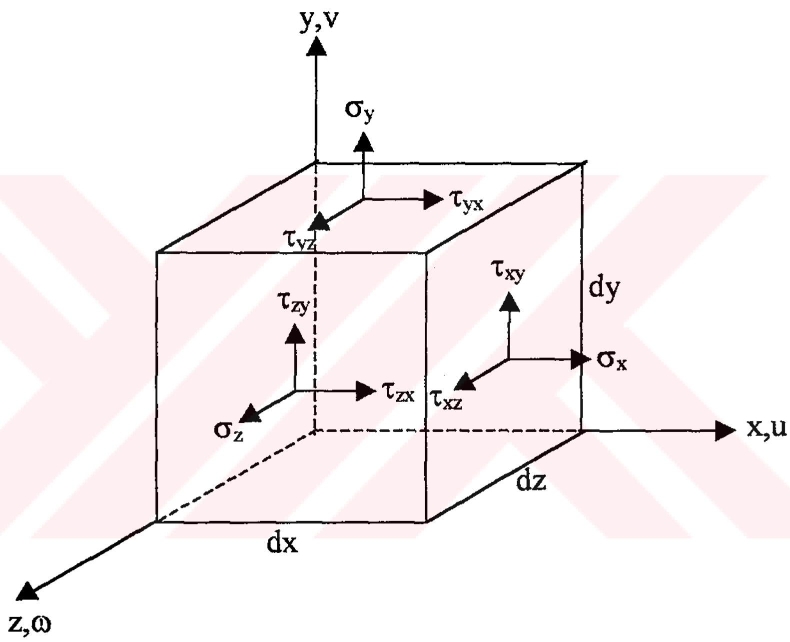
y doğrultusundaki yerdeğiştirme,

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(-\nu\sigma_x + \sigma_y - \nu\sigma_z\right) \tag{3.6b}$$

z doğrultusundaki yerdeğiştirme,

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(-\nu\sigma_x - \nu\sigma_y + \sigma_z\right) \tag{3.6c}$$

şeklindedir.



Şekil 3.3 Kenarları bir birim olan paralel yüzlüdeki gerilmeler

Açı değişimleri ise,

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{3.7a}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \tag{3.7b}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \tag{3.7c}$$

olur. Bu formüllerdeki G kayma modülü olup,

$$G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}$$

şeklindedir. Yukarıda yazdığımız gerilme-şekil değiştirme bağıntılarını matris formunda yazarsak,

$$\{\varepsilon\} = [C]\,\{\sigma\} \tag{3.8}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \tag{3.9}$$

elde ederiz. $[C]$ matrisinin tersi alınarak,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{3.10}$$

yazılabilir. Burada λ Lame sabiti olup,

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)+(1-2\nu)} \tag{3.11}$$

şeklinde ifade edilir. Matris formunda yazılmış (3.10) denklem takımı Hooke kanununu üç boyutta ifade eder. Bu ifadeyi sembolik formda yazarsak,

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{3.12}$$

elde ederiz. Burada [D], elastisite matrisi olup,

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & \nu/(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

şeklinde verilmiştir. Eğer termal ve başlangıç uzamaları da aynı anda mevcutsa, genel gerilme-şekil değiştirme bağıntıları,

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon_F\} - [D]\{\varepsilon_t\} - [D]\{\varepsilon_i\} \tag{3.14}$$

haline gelir. Burada,

$[D]\{\varepsilon_F\}$: kuvvetler sistemi dolayısıyla cisimde meydana gelen gerilmeleri;

$[D]\{\varepsilon_t\}$: termal etkilerden dolayı cisimde meydana gelen gerilmeleri;

$[D]\{\varepsilon_i\}$: başlangıçtaki deformasyonlardan dolayı cisimde meydana gelen gerilmeleri gösterir.

Buradan,

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon_F\} - \{\sigma_t\} - [D]\{\varepsilon_i\} \tag{3.15}$$

elde edilir. Denklem (3.15) üç boyutlu, izotrop ve homojen bir cismin genel gerilme-şekil değiştirme bağıntısıdır [37],[39],[42],[44],[45].

3.2 Sonlu Elemanlar Metodu

Sonlu elemanlar metodu çok çeşitli mühendislik problemlerinde yaklaşık çözümler elde etmek üzere kullanılan nümerik analiz tekniğidir. Bu metod, sürekli ortam mekaniği gibi teorik yollarla ulaşılamayan sürekli sistem problemlerinin çözülmesinde yeni bir çığır açmıştır. Bu yöntem artık akademisyenler ve araştırmacılar için özel bir uzmanlık alanı olarak görülmekle birlikte günümüzde teknolojinin bir çok dalında dizayn amaçları için kullanılmaktadır [25], [26].

Sonlu elemanlar yöntemi başlangıçta, gerilme analizi problemlerinin geliştirilmesi sırasında, sadece birkaç ayrı düğüm noktasında fiziksel olarak birleşmiş elemanlardan oluşan sistemlerin çözümünde kullanılmıştır. Sonraları bu yöntem, yapısal mekanik problemlerine uygulanarak virtüel iş prensibi ve enerji metotlarının kullanılması ile geliştirilmiştir. Bu gelişmelerle yöntem genelleştirilmiş ve daha geniş matematiksel formülasyonlar kullanılmıştır. Böylece sonlu elemanlar, içinde varyasyonel fonksiyonların yer aldığı herhangi bir matematik problemine uygulanabilir bir yöntem haline gelmiştir. Daha sonraları, "Weighted residual methods" olarak bilinen klasik tekniklerden uyarlanan sonlu eleman çözümleri geliştirilmiştir. Bu çözümlere örnek olarak Galarkin ve en küçük kareler yaklaşımı verilebilir. Aslında, sonlu elemanlar yöntemi günümüzde daha çok, uygun başlangıç ve sınır koşullarına bağlı kısmi diferansiyel eşitlik sistemlerinin çözümü için genel sayısal bir teknik olarak kabul edilmiştir.

Sonlu elemanlar metodu, sayısal yöntemler içerisinde önemi gittikçe artan ve mühendisler tarafından her gün daha yaygın olarak kullanılan yöntemdir.

3.3 Sonlu Elemanlar Metodunun Faydaları, Sınırları

Sayısal yöntemlerin çoğu, elektronik hesaplama çağı başlamadan önce gelişmiş ve sonradan bilgisayarlara uygulanmıştır; mesela sonlu farklar yöntemi, ağırlıklı artıklar yöntemi gibi. Bu yöntemlerin aksine, sonlu elemanlar yöntemi elektronik hesaplama çağının bir ürünüdür. Bu nedenle sonlu elemanlar yönteminin diğer sayısal yöntemlerle bazı ortak özelliklerinin yanında yüksek hızlı bilgisayarlara daha uygun gelen özellikleri vardır. Bu özelliklerin başlıcaları aşağıda belirtilmiştir.

a- Sonlu eleman yöntemi, geometrisi karmaşık şekillerin incelenmesinde kolaylıklar sağlar. Çözüm ortamı alt bölgelere ayrılabilir, değişik sonlu elemanlar kullanılabilir. Bazı bölgeleri daha hassas hesaplama imkanları vardır. Bu yönleriyle sonlu elemanlar yöntemi diğer sayısal yöntemlerden daha esnek ve kullanışlıdır.

b- Sonlu elemanlar yöntemi, değişik ve karmaşık malzeme özellikleri olan sistemlere kolaylıkla uygulanabilir. Noktadan noktaya değişen, anizotrop, nonlineer, histerezis (tekrarlı), zamana bağlı, sıcaklığa bağlı malzeme özellikleri dikkate alınabilir.

c- Sonlu elemanlar yönteminde sürekli, süreksiz veya değişken yükler kolaylıkla ele alınabilir.

d- Sınır şartları, sistemin temel denklemleri kurulduktan sonra ve oldukça basit bir işlemle denklemlere dahil edilebilir. Bu sonlu elemanlar yönteminin en önemli özelliklerinden biridir. Sınır şartları ile değişken fonksiyonlarını değiştirmeye gerek kalmaz.

e- Sonlu elemanlar yöntemi, matematik genelleştirilebilir ve çok sayıda problemi çözmek için güçlü ve çok yönlü bir araç olarak kullanılabilir. Bunun için "genel amaçlı" ve "özel amaçlı" bilgisayar programları geliştirilmiştir.

f- Sonlu elemanlar yönteminin hem fiziksel anlam, hem de matematik temelleri vardır.

g- Sonlu elemanlar yönteminin elastikiyete, kompleks yapılarda, sürekli ortamlar mekaniğinde ve diğer problemlerde gerilme-şekil değiştirme münasebetlerini daha iyi geliştirme imkanını sağlar.

Sonlu elemanlar yönteminin yukarıda açıklanan faydalı yönlerinin yanında aşağıdaki sınırları da belirtilmelidir.

a- Bugünkü seviyesinde yöntemin uygulanmasında zorluklar vardır; örnek olarak çatlama, kırılma davranışı, temas problemleri, yumuşayan nonlineer malzeme davranışı gibi.

b- Sonlu elemanlar yöntemi, ancak malzeme parametreleri ve katsayıları iyi tanımlanmışsa, gerçekçi sonuçlar verir.

c- Sonlu elemanlar yöntemi, genellikle büyük bilgisayar belleğine ve zamanına ihtiyaç gösterir.

d- Doğru sonuç elde edebilmek için sürekli ortamın bölünmesi ve çok sayıdaki giriş bilgileri hatasız olmalıdır. Programın verileri iyi kontrol edilmelidir.

e- Diğer yaklaşık sayısal yöntemlerde olduğu gibi, sonlu elemanlar yönteminden alınan sonuçlar dikkatlice değerlendirilmelidir. Formülasyonda kullanılan varsayımlar, muhtemel sayısal zorluklar ve kullanılan malzeme özelliklerindeki yaklaşıklıklar üzerinde dikkat edilmelidir.

Kabul edilen deplasman fonksiyonlarının, komşu elemanları ayıran hat veya yüzeylerin her noktasında sürekliliği sağlaması beklenemez. Ancak bu sınırlar üzerinde seçilen ara düğüm noktalarında bu şart sağlanabilir, bunun dışındaki noktalar için kesin bir şey söylemek mümkün değildir. Gerçek yükler yerine statikçe eşdeğer yüklerle çalışılması, denge şartlarının gerek eleman içerisinde gerekse sınırlarda ihlal olmasını mümkün kılar.

Eleman şekli ve deplasman fonksiyonlarının seçiminde büyük bir esneklik söz konusu olduğuna göre, elde edilecek neticelerin hassasiyet mertebesi bu seçimlerle de yakından ilgilidir [25], [26], [37], [39].

3.4 Sonlu Elemanlar Metodunda Hesap Sırası

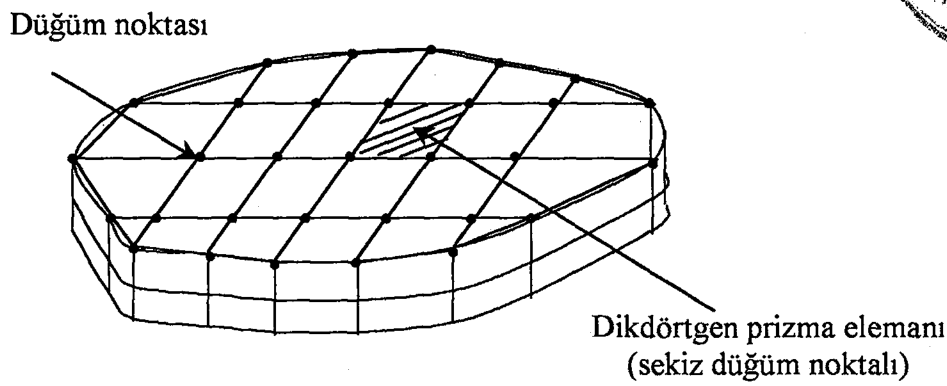
Herhangi bir boyuta sahip sürekli ortam probleminde basınç, sıcaklık, deplasman, gerilme vb. gibi alan değişkenleri, ortamın içindeki bütün noktaların bir fonksiyonu olduğundan sonsuz sayıda birçok değere sahiptir. Sonuçta problem karşımıza sonsuz bilinmeyene sahip olarak çıkar.

Sonlu elemanlar metodunda sürekli ortamı elemanlara ayırmak ve bilinmeyen alan değişkenini eleman içinde kabul edilen bir yaklaşım fonksiyonu ile ifade etmek, esas takip edilen yoldur. İnterpolasyon fonksiyonu da denilen yaklaşım fonksiyonu düğüm noktalarındaki alan değişkeninin değerleri cinsinden belirlenir. Düğüm noktaları önceden belirlenmiş noktalardır. Elemanlar bu noktalar vasıtasıyla birbirine bağlanır. Sınır düğüm dışında elemanların içinde veya kenarlar üzerinde bir ile birkaç düğüm noktası bulunabilir. Alan değişkeninin düğüm noktası değerleri ve eleman için yazılan interpolasyon fonksiyonları, bu değişkeninin eleman içindeki değerini tam anlamıyla belirler. Alan değişkeni problemin başındaki bilinmeyen düğüm noktası değerleri, problemin esas bilinmeyenlerdir [40].

Çözümün esası ve yaklaşımın derecesi eleman sayısına ve boyutuna bağlı olduğu kadar seçilecek interpolasyon fonksiyonuna da bağlıdır. Belirli uygunluk şartlarının sağlanması gerekeceğinden interpolasyon fonksiyonunun keyfi olarak seçilemeyeceği açıktır. İnterpolasyon fonksiyonları, alan değişkenlerinin kendileri ve türevleri elemanlar arasında sürekli olacak şekilde seçilir. Sonlu elemanlar metodunda hesap sırası, elastik ve sürekli ortamlara aşağıda açıklanan sıra ile uygulanmaktadır.

3.4.1 Sürekli Ortamın Sonlu Elemanlara Bölünmesi

Bu adımda, sürekli ortam, bazı hayali basit şekilli elemanlara bölmemiz gerekir. Şekil 3.4'de görüldüğü gibi yüzey sonlu sayıda dikdörtgen prizma elemanlara bölünmüştür. Üç boyutlu problemlerde ortam aynı zamanda dört yüzlü, hem de dikdörtgen prizma biçiminde (sekiz veya yirmi düğüm noktalı) elemanlara ayrılabilir. Bölme sayısı arttıkça problemin çözüm hassasiyeti artar [25].



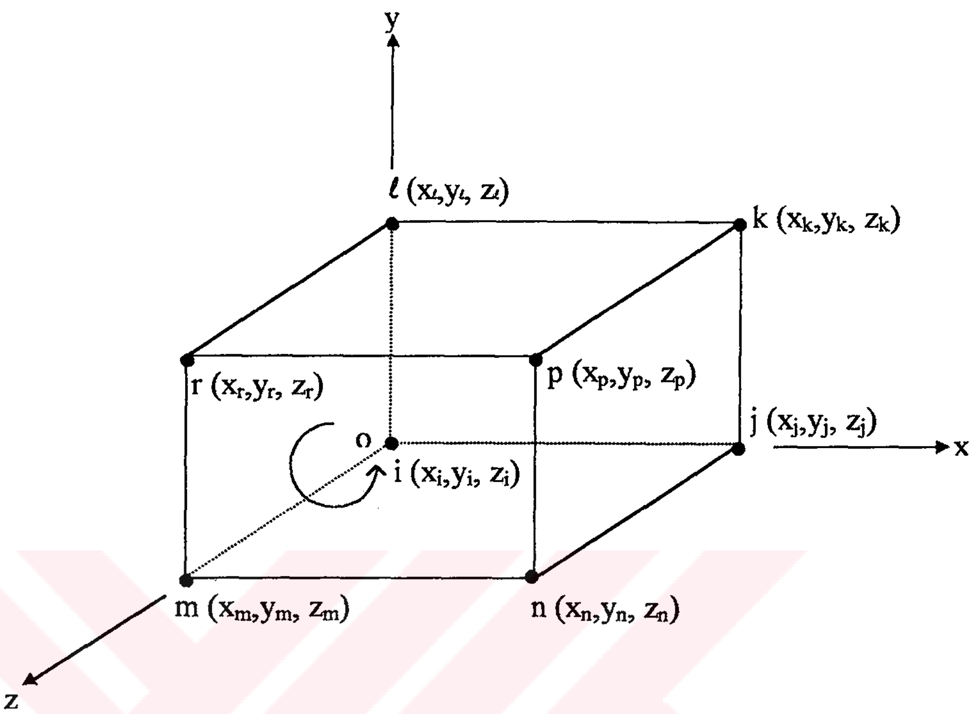
Şekil 3.4 Çözüm bölgesinin sonlu elemanlara bölünmesi

Eleman tip ya da boyutunun seçimi bir mühendislik yaklaşımı olmasına rağmen, eleman seçiminde karar vermede sonlu elemanlar metodu hakkındaki bilgi ve tecrübeden de yararlanmak gerekir.

Problemin çözümünde, sonlu elemanın (mesh) en büyük boyutu ile en küçük boyutu arasındaki şekil oranı da önemlidir. Çözüm bölgesinin herhangi bir yerinde en iyi şekil oranı, orada yerdeğişimlerin değişik doğrultudaki değişme hızlarına bağlıdır ve buna uygun seçilmelidir. Eğer deplasmanlar her doğrultuda aynı oranda değişiyorsa, en uygun şekil oranı bire eşit olur [25].

3.4.2 Düğüm Noktalarının Tespiti

Sonlu elemanlar, birbirlerine ve sürekli ortama belli sayıda "düğüm noktası" ile bağlıdır. Bu düğüm noktalarının yerdeğişimleri (veya dönmeleri) problemin "bilinmeyenleri" veya sistemin "serbest (bağımsız) değişkenleri" dir. Mesela Şekil 3.4 ve 3.5'de dikdörtgen prizma elemanların i, j, k, l, m, n, p, r köşeleri düğüm noktalarıdır.



Şekil 3.5 Dikdörtgen prizma eleman ve düğüm noktaları

Bu çalışmada, Şekil 3.5'de görülen sekiz düğüm noktalı dikdörtgen prizma eleman kullanılmıştır.

3.4.3 İnterpolasyon Fonksiyonunun Seçimi

Birinci adım, sürekli ortamın bölünmesiyle ortaya çıkan düğümler arasında alan değişkeninin değerini idare etmek üzere interpolasyon fonksiyonunun tipini belirlemektir. Alan değişkeni bir skaler, bir vektör ya da yüksek mertebeden bir tansör olabilir. Daima değilse de genellikle, interpolasyon fonksiyonu olarak bir polinom seçilmektedir. Çünkü bir polinomun derecesi her bir düğüm noktasının serbestlik derecesine bağlıdır. [37], [40], [41].

3.4.4 Eleman Özelliklerinin Bulunması

Sonlu eleman modeli bir kere kurulunca, -ki bu elemanın ve interpolasyon fonksiyonun seçimi demektir- her bir elemanın özelliklerini tek tek ifade eden matris denklemlerini belirlemeye hazır hale geliriz. Bu belirlemede dört yaklaşımdan biri kullanılabilir. Doğrudan yaklaşım, varyasyonel yaklaşım, ağırlıklı artıklar yaklaşımı ve enerji dengesi yaklaşımı adı geçen dört yaklaşımdır. Varyasyonel yaklaşım genellikle en uygun olanıdır [40].

3.4.5 Eleman Düğüm Noktalarındaki Yerdeğişimlerin ve Gerilmelerin Hesabı

Bu çalışmadaki sonlu elemanlar programı, üç boyutlu düzlem gerilme problemini ele almaktadır.

Bu tür analizlerde aksi belirtilmedikçe incelenen cismin malzemesi homojen, izotrop ve lineer elastik kabul edilmektedir. Böylece malzemenin elastisite modülü E ve poisson oranı ν, koordinatlardan bağımsızdır. Problemlerin çözümünde E_{beton}=285000 kg/cm^2, ν_{beton}=0.2 ve $E_{çelik}$=2000000 kg/cm^2, $\nu_{çelik}$=0.3 olarak alınmıştır.

Eleman deformasyon halinde altı bileşenli vektördür.

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{3.16}$$

$$\left[B_i\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N'_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N'_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial N'_i}{\partial z} \\ \dfrac{\partial N'_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N'_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N'_i}{\partial z} & \dfrac{\partial N'_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N'_i}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial N'_i}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & c_i & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & d_i \\ c_i & \vdots & b_i & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & d_i & \vdots & c_i \\ d_i & \vdots & 0 & \vdots & b_i \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

veya kısaca

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{\delta\}^e = \left[B_i, B_j, B_m, B_p\right] \cdot \{\delta\}^e \tag{3.18}$$

ifadesi elde edilir.

Elastik sürekli ortamda gerilme hali ise,

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} \tag{3.19}$$

eşitliği ile ifade edilir. (3.18) denklemini (3.19)'de yerine yazarsak,

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = [D]\cdot\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = [D]\cdot[B]\cdot\{\delta\}^e \tag{3.20}$$

Burada, [D] matrisi sürekli ortamın özelliklerini tanımlayan "Elastisite Matrisi" dir.

3.4.6 Rijitlik Matrisinin Hesaplanması

Sonlu elemana etki eden dış ve iç yükler dengede ise, toplam potansiyel enerji minimum olmalıdır. Toplam potansiyel enerji şu şekilde yazılabilir;

$$\pi = \frac{1}{2}\int_V [\sigma]^T\{\varepsilon\}dv - \int_V [\delta]^T\{p\}dv - \int_S [\delta]^T\{q\}ds \tag{3.21}$$

olarak ifade edilir.

Burada σ ve ε sırasıyla, gerilme ve birim şekil değiştirme vektörleridir. δ herhangi bir noktadaki yerdeğiştirme, p birim hacme gelen hacim kuvvetleri, q ise uygulanan yüzey çekme kuvvetidir. İntegraller, yapı hacmi v ve yük uygulanan yüzey alan s üzerinde alınır. (3.21) eşitliğinin sağ tarafindaki ilk terim birim şekil değiştirme enerjisini, ikinci ve üçüncü terimler ise sırasıyla, cisme gelen kuvvetlerin yaptığı işi ve yüzeye dağılmış yükleri temsil eder [42].

Yapıya ait eleman şekil fonksiyonları, fonksiyonların genelinde hiçbir süreksizlik oluşturmayacak şekilde seçilmiştir. Sürekli dizinin toplam potansiyel enerjisi, ayrı ayrı elemanların potansiyel enerjilerinin toplamına eşit olacaktır. Bu durumda,

$$\pi = \sum_{e} \pi_e \tag{3.22}$$

Burada π, e elemanın toplam potansiyel enerjisini göstermektedir. (3.22) eşitliğinin sağ tarafindaki π_e terimi daha açık ifade ile

$$\pi_e = \frac{1}{2}\int_{Ve}[\delta^e]^T[B]^T[D][B][\delta^e]dv - \int_{Ve}[\delta^e]^T[N]\{p\} - \int_{Se}[\delta^e]^T[N]\{q\}ds \tag{3.23}$$

olarak yazılabilir.

Burada V_e elemanının hacmi, S_e yüklü elemanın yüzey alanıdır. e elemanının noktasal δ^e şekil değiştirmelerine göre değişimi,

$$\frac{\partial\pi_e}{\partial\delta^e} = \int_{Ve}\left([B]^T[D]\cdot[B]\right)\cdot\delta^e dv - \int_{Ve}[N]^T p\cdot dv - \int_{Se}[N]^T q\cdot ds = K^e\delta^e - F^e \tag{3.24}$$

olarak verilir.

Bu denklemde F^e, elamanın eşdeğer düğüm kuvvetleridir ve,

$$[K^e] = \int_{Ve}[B]^T[D][B]dv \tag{3.25}$$

olarak hesaplanır.

Burada $[K^e]$ elemanın rijitlik matrisidir.

3.4.7 Sistem Denklemlerinin Çözümü

Bir önceki adımda bahsettiğimiz sonlu eleman için ifade edilen denge denklemleri uygun şekilde toplanarak sistem denklemleri elde edilir. Bu denklemler,

$$[K]\cdot\{u\}=\{p\} \tag{3.26}$$

matris eşitliği ile ifade edilir; burada,

[K] : Sistem rijitlik (stiffness) matrisi
{p} : Yük vektörü
{u} : Düğüm noktası yerdeğiştirmeleridir

Denklem (3.26) açık yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & \cdots & K_{1,3n} \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & \\ & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ K_{3n,1} & \cdots & \cdots & K_{3n},K_{3n} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} \tag{3.27}$$

olur, burada
n : düğüm noktası sayısı
3n : toplam serbestlik derecesi sayısıdır.

Bu denklemlerin çözümü için çeşitli standart çözüm metotları vardır. Denklemlerin lineer olup olmamasına göre bu metotlardan birisi kullanılır. Bu çalışmada elde edilen sistem denklemlerinin çözümünde Choleisky metodu kullanılmıştır.

3.5 Genel Eleman Karakteristikleri

3.5.1 Birim Deplasman Teoremi

Bu teorem sonlu elemanın rijitlik karakteristiklerini çıkarmada belki de en basit yoldur. Denge durumundaki bir cisme etki eden kuvvet ile bu cisim içindeki gerçek gerilme dağılımı arasında fonksiyonel ilişki kurar. Bölüm 3.1'deki 1 ve 2 kabullerine uyan üç boyutlu elastik bir cismin herhangi bir k noktasına bir F_k kuvveti etki etsin. $\{\sigma\}$ ve $\{\varepsilon\}$ denge durumundaki cisim içindeki gerilme ve şekil değiştirme dağılımını, U_k, k noktasına uygulanan F_k kuvveti doğrultusundaki deplasmanını göstersin.

Şimdi k noktasına F_k doğrultusunda küçük δU_k virtüel deplasmanı verirsek cisim içinde her yerde gerilme ve şekil değiştirme dağılımı değişecektir. Tipik olarak ε_x deki değişim $\delta\varepsilon_x$ olacaktır. Şekil değiştirmedeki herhangi bir değişim, cismin toplam şekil değiştirme enerjisini değiştireceğinden, $\delta\varepsilon_x$ den dolayı birim hacim başına değişen şekil değiştirme enerjisi $\sigma_x\delta\varepsilon_x$ olacaktır. Bu işlemi bütün şekil değiştirme bileşenleri için yaparsak δU_x den dolayı cisimdeki toplam şekil değiştirme enerjisi değişimi,

$$\delta H = \int_V \left(\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx}\right)dv \qquad (3.28)$$

olarak hesaplanır. Bu integrasyon cismin hacmi içerisinde alınır. Buradaki integrandı (3.28) bağıntısının sağ tarafında yer alan parantez içindeki ifade kapalı formda $\{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma\}$ şeklinde yazılırsa,

$$\delta H = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma\}dv \qquad (3.29)$$

olarak ifade edilir. Burada,

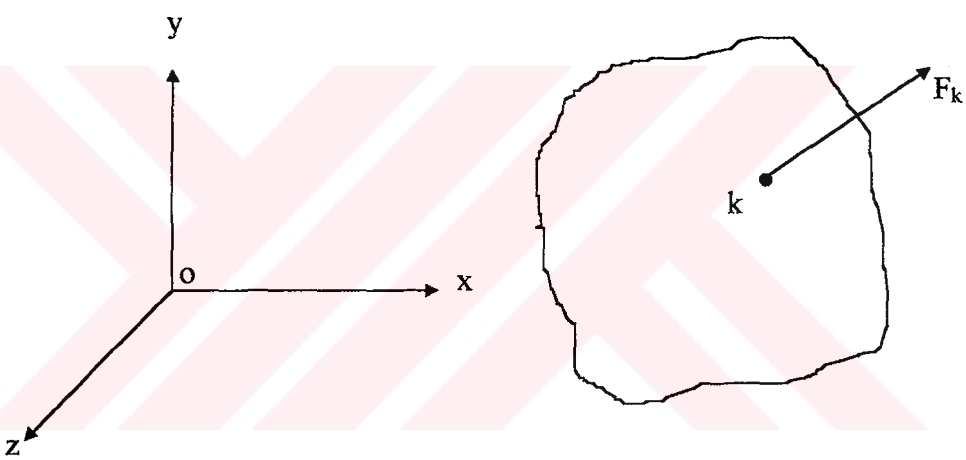
$$\{\delta\varepsilon\}^T = [\delta\varepsilon_x \;\; \delta\varepsilon_y \;\; \delta\varepsilon_z \;\; \delta\gamma_{xy} \;\; \delta\gamma_{yz} \;\; \delta\gamma_{zx}]$$

dır.

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \;\; \sigma_y \;\; \sigma_z \;\; \tau_{xy} \;\; \tau_{yz} \;\; \tau_{zx}]^T$$

Cismin elastisite özelliklerinin lineer kabul edilmesi halinde,

$$\{\varepsilon\} = \{f\}\, U_k \qquad (3.30)$$



Şekil 3.6 Yüzeyin k noktasına etkiyen F_k kuvvetinin etkisinde üç boyutlu bir elastik cisim

yazılabilir. Burada {f}, cisimdeki {ε} şekil değiştirme vektörü ile U_k deplasmanı arasındaki lineer bağıntıyı gösterir. (3.30) denkleminin her iki tarafının diferansiyelini alarak,

$$\{\delta\varepsilon\} = \{f\}\, \delta U_k \qquad (3.31)$$

buluruz. Denklem (3.29) ve (3.31) arasında {δε} elimine edilerek,

$$\delta H = \int_V \delta U_k \cdot \{f\}^T \cdot \{\sigma\} \cdot dv$$

bulunur.

Deformasyon esnasında hiçbir enerji kaybı olmadığını kabul edersek δH, F_k kuvvetinin δU_k boyunca yaptığı işe eşit olacaktır. Bu iş,

$$\delta U_k \cdot F_k = \int_V \delta U_k \cdot \{f\}^T \cdot \{\sigma\} dv$$

olur. δU_k keyfi olduğundan eşitliğin her iki tarafında sadeleştirilirse,

$$F_k = \int_V \{f\}^T \{\sigma\} dv \qquad (3.32)$$

elde edilir.

Denklem (3.32), tek bir kuvvet dikkate alındığında birim deplasman teoreminin en basit formunu ifade eder. Birden fazla kuvvetin hesaba katıldığı en genel halde, cismin sadece bir noktası yerine 1, 2, ..., N yüzey noktalarına F_1, F_2,....., F_n kuvvetlerinin etkidiği ve bu noktalarda sırasıyla F_1, F_2,....., F_n kuvvetleri doğrultusunda U_1, U_2, ..., U_n deplasmanlarının meydana geldiği kabul edilirse her bir kuvvet için (3.32) denklemine benzer denklemler,

$$\{P\} = \{F_1 \; F_2 \; \cdots \; F_n\}^T$$

olarak yazılabilir.

$$\{p\} = \int_V [f]^T \{\sigma\} dv \qquad (3.33)$$

ifadesini elde ederiz. Burada [f] matrisi,

$$\{\varepsilon\} = [f] \; \{\delta \sim\} \qquad (3.34a)$$

ile belirlenir. $\{\delta^{\sim}\}$ ise,

$$\{\delta^{\sim}\} = [u_1\ u_2 .....u_N]^T \tag{3.34b}$$

dır.

3.5.2 Eleman Rijitlik Karakteristikleri

(3.33) denklemi, herhangi bir sonlu eleman rijitlik karakteristiklerinin türetilebildiği bir temel teşkil eder. Bu denklem verilen bir elemana uygulandığında $\{p\}$, bu elemanın bütün düğüm kuvvetlerini veren bir vektör gibi işlem görecektir. Bunun ötesinde eleman izole olarak dikkate alındığında $\{p\}$, elemanın düğüm kuvvetlerine eşit olmalıdır. Bu nodal kuvvetleri $\{p^{\sim}\}$ ile gösterirsek (3.33) denklemi

$$\{p\sim\} = \int_V [f]\{\sigma\} dv \tag{3.35}$$

olur. Bu safhada elemanın boyutlarını, düğüm numaralarını ya da serbestlik derecelerini belirtmeye gerek yoktur; ancak $\{p^{\sim}\}$ vektörünün elemana ait bütün düğüm kuvvetlerini, $\{\delta^{\sim}\}$ ise yine aynı elemana ait düğüm deplasmanlarını ifade eder.

Şimdi, (3.34) denklemi ile (3.29) denklemi arasında $\{\varepsilon\}$ elimine edilirse,

$$\{\sigma\} = [D]\ \{f\}\ \{\delta^{\sim}\} - [D]\ \{\varepsilon\}_t - [D]\ \{\varepsilon\}_i$$

bulunur. bu denklemde,

$$\{\sigma\}_t = [D]\ \{\varepsilon\}_t$$

yazarak,

$$\{\sigma\} = [D]\ \{f\}\ \{\delta^{\sim}\} - \{\sigma\}_t - [D]\ \{\varepsilon\}_i \qquad (3.36)$$

elde edilir. Burada $\{\sigma\}_t$ termal gerilmeler vektörüdür.

Neticede, (3.35) denklemi ile (3.36) denklemi arasında $\{\sigma\}$' nın eliminasyonu ile

$$\{p^{\sim}\} = \int_V [f]^T[D][f]dv\{\delta^{\sim}\} - \int_V [f]^T\{\sigma\}_t dv - \int_V [f]^T[D]\{\varepsilon\}_i dv \qquad (3.37)$$

ifadesini elde ederiz. $\{\delta^{\sim}\}$ koordinatlarının bir fonksiyonu olmadığından integral işaretinin dışında yer alması gerekir. Termal (ısıl) gerilmeler ve başlangıç gerilmeleri mevcut değilse (3.37) denklemindeki ilk integral, elemanın eşdeğer düğüm kuvvetleri ile düğüm deplasmanları arasındaki ilişkiyi ortaya koyar ve rijitlik matrisi adını alır.

$$[K] = \int_V [f]^T[D][f]dv \qquad (3.38)$$

olarak ifade edilir.

(3.37) denkleminin ikinci ve üçüncü integrali sırasıyla termal ve başlangıç gerilmelerine ait kuvvetleri gösterir. Bunları,

$$\{p_t\} = \int_V [f]^T[\sigma]_t dv \qquad \text{(termal)} \qquad (3.39)$$

$$\{p_i\} = \int_V [f]^T[D]\{\varepsilon\}_i dv \qquad \text{(başlangıç gerilmeleri)} \qquad (3.40)$$

ile göstererek, (3.37) denklemi,

$$[K_i]\{\delta^{\sim}\} = \{p^{\sim}\} + \{p_t\} + \{p_i\} \qquad (3.41)$$

şeklinde yazılabilir. Verilen cismi temsil eden tek tek elemanlar için hesaplanan $[K_i]$ rijitlik matrisleri cismin tamamı için bir araya getirilmelidir. Bir araya getirme işleminde $\{p_t\}$, $\{p_i\}$ verilen nodal dış kuvvetler olup çözülen denklemin bilinenler kısmında yer alırlar.

3.5.3 Yayılı Dış Yükler

Elemanların sınırlarında yayılı dış yükler, elemanın düğüm noktalarında eşdeğer konsantre edilmiş kuvvetlere dönüştürülürler. $\{p_c\}$ ile gösterilen konsantre edilmiş bu yükler, aşağıda olduğu gibi belirlenir. $\{U\}$, elemanın içinde her yerde deplasmanları tanımlayan fonksiyon olsun. Bu deplasman fonksiyonu elemanın düğüm noktaları, $\{\delta\,\tilde{}\}$'ya bağlı olarak,

$$\{U\} = [N]\,\{\delta\,\tilde{}\} \tag{3.42}$$

ifade edilir. [N] matrisi, kullanılan koordinatların bir fonksiyonudur. Eleman sınırındaki yayılı yük yoğunluğu p olsun. Bu yük yoğunluğu sabit olabildiği gibi koordinatların bir fonksiyonu da olabilir. Küçük bir p·ds yayılı yükün $\{\delta U\}$ virtüel deplasmanı boyunca yaptığı iş açıkça $\{\delta U\}^T \cdot p \cdot ds$ olacaktır. Buna göre yayılı yükün yaptığı toplam iş,

$$\int_s \{\delta U\}^T p\,ds$$

olacaktır. İntegrasyon p'nin etkidiği eleman yüzeyi üzerinde alınır. Bu iş $\{p_c\}$ kuvveti tarafından, elemanın virtüel düğüm deplasmanı $\{\delta\delta\tilde{}\}$ ile yapılan,

$$\{\delta\delta\tilde{}\}^T \{P_c\} = \int_s \{\delta U\}^T p\,ds \tag{3.43}$$

işine eşit olmalıdır.

(3.42) denkleminin iki tarafının da diferansiyelini alarak,

$$\{\delta U\} = [N]\,\{\delta\delta^{\sim}\} \tag{3.44}$$

elde ederiz. Transpoze çarpma kuralını ve (3.43) ile (3.44) denklemlerini kullanarak

$$\{\delta\delta^{\sim}\}^{T}\{P_c\} = \int_S \{\delta\delta^{\sim}\}^{T}[N]^{T} p\cdot ds$$

ifadesini elde ederiz. $\{\delta\delta^{\sim}\}^{T}$ keyfi olduğundan denklemin her iki tarafından yok edilerek,

$$\{P_c\} = \int_S [N]^{T} p\cdot ds \tag{3.45}$$

bulunur. Herhangi bir sonlu eleman için eşdeğer kuvvet vektörü (3.45) denkleminden elde edilir.

3.5.4 Öz Ağırlıklar

Öz ağırlıklar (zati kuvvetler), elemanın doğrudan hacmine bağlı kuvvetlerdir. Yayılı yüklerde olduğu gibi zati kuvvetler de eşdeğer düğüm kuvvetler tarafından açıklanır. Bu kuvvetler $\{P_b\}$ ile gösterilir. $\{P_b\}$ nin türetilmesi $\{P_c\}$ nin türetilmesiyle aynıdır. Bu durumda zati kuvvetler tarafından yapılan virtüel iş,

$$\int_V \rho\cdot\{\delta U\}^{T}\begin{Bmatrix} X^{\sim} \\ Y^{\sim} \\ Z^{\sim} \end{Bmatrix} dv$$

şeklinde gösterilebilir. Bu integrasyon cismin hacmi içinde alınmalıdır. Bu iş $\{P_b\}$ tarafından, $\{\delta\delta^{\sim}\}^{T}$ boyunca yapılan işe eşittir. Buna göre ,

$$\{P_b\} = \int_V \rho \cdot \{N\}^T \begin{Bmatrix} X^{\sim} \\ Y^{\sim} \\ Z^{\sim} \end{Bmatrix} \cdot dv \qquad (3.46)$$

olur.

3.5.5 Deplasman Fonksiyonu - Çözümün Hassasiyeti

Sonlu elemanlar metodu hesaplamasının temel esası, belli bir kuvvet takımı etkisindeki sürekli bir cismin tepkisinin; cismin bölündüğü varsayılan elemanlar sisteminin tepkisine eşit olmasıdır. Enerji metoduna göre deforme olmuş cisim onun parçalı modeline eşit ise, cisim ile onun sonlu eleman modeli arasındaki eşdeğerlik tam olacaktır.

(3.28) ve (3.34) denklemleri gösterir ki; cisim ile onun sonlu eleman modeli içindeki gerilme dağılımının aynı olması durumunda bu şart sağlanır [40].

Bununla beraber şekil değiştirme dağılım fonksiyonu [f]'nin tam olarak belirlenmesi ciddi güçlükler gösterir. Çünkü çözümün doğruluğu buna bağlıdır. Değişik hallerde, özellikle iki ve üç boyutlu elemanlarda bu denklemlerin kapalı formda çözümü çok güç ve hatta imkansız olmaktadır. Bu bizi alternatif bir varsayıma zorlar. Bu varsayımda eleman için {U} deplasman fonksiyonu kabul ederiz. Şekil değiştirme dağılım fonksiyonu [f], varsayılan bu deplasmanın türevinden elde edilebilir. Sonlu eleman modelinin şekil değiştirme enerjisi kapsaması, ve bunun sonucu olarak hassasiyet derecesi ve eleman sayısı arttıkça çözümün kesin değere yaklaşması, öncelikle, kabul edilen yerdeğiştirmelerin kesin eşdeğerlerine uyuşma derecesi ile belirlenir.

n adet düğüm noktası bulunan bir sonlu eleman için {U} deplasman fonksiyonu kabulünde aşağıdaki açıklamalar dikkate alınmalıdır.

a-)Bir polinom olarak seçilen deplasman fonksiyonunun derecesi elemanın derecesinden küçük olmamalı ve katsayıları elemanın düğüm koordinatları ile belirlenebilmelidir.

b-)Seçilen deplasman fonksiyonunun kendisi ve türevi hem eleman içinde hem de elemanın sınırlarında sürekli olmalıdır. Çünkü herhangi bir süreksizlik, sonsuz şekil değiştirmelere ve bunun sonucu olarak sonsuz şekil değiştirme enerjisine yol açar.

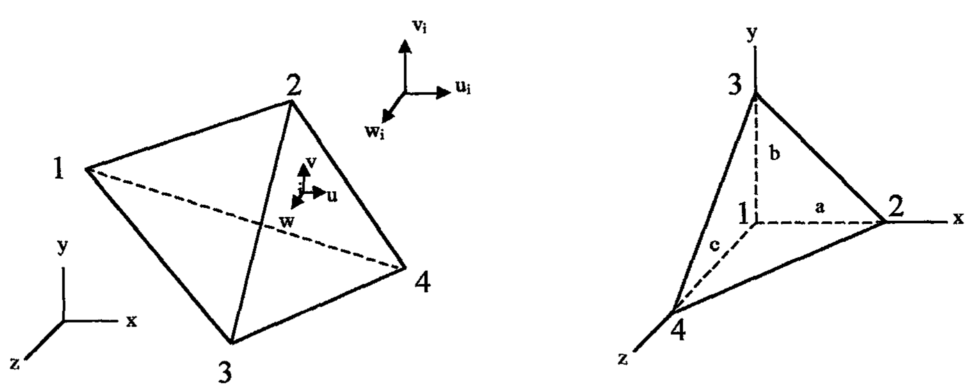
c-)Bir elastisite probleminin çözümünde deplasmanlar esas bilinmeyenler kabul edilerek gerilmeler verilen sınır şartları altında çözülebilirler ve gerilmeler ise bunlara bağlı olarak ayrıca hesaplanabilirler. Kabul edilen yerdeğiştirmelerden doğan gerilmelerin, gerilme-denge denklemlerini de sağlaması istenir. Bu ek şart, $\{U\}$ nun seçimini gerçekten zorlaştırır. Bunu sağlamanın bir yolu, $\{U\}$ yu, şekil değiştirmelerin dolayısıyla gerilmelerin elemanın her tarafında sabit kalmasını sağlayacak şekilde seçmektir [37], [39], [40], [41].

3.6 Üç Boyutlu Problemlerin Sonlu Elemanlar Metodu İle Çözümü

3.6.1 Sonlu Eleman Çeşitleri

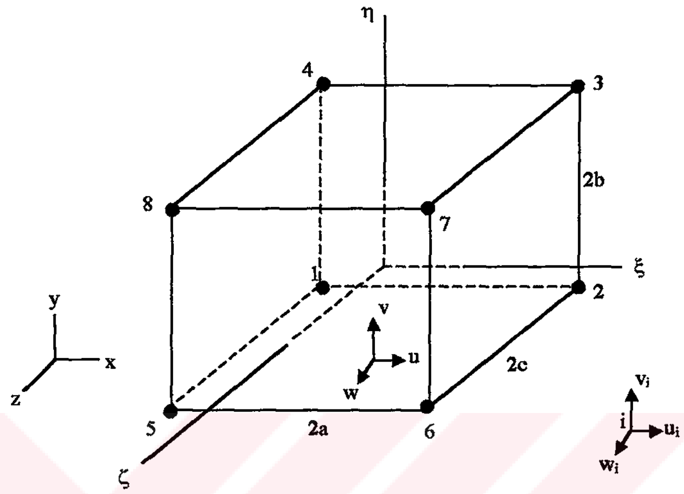
Bir sürekli ortamın en uygun sonlu elemanlara bölünmesi problemi çözene bağlıdır. Bu seçim, sürekli ortamın boyutuna, yapının veya cismin geometrisine uygun olmalıdır [25], [37], [41], [43], [49].

Üç boyutlu elastisite problemlerinde kullanılan eleman tiplerinden en basit olanı dörtyüzlü elemandır. Şekil 3.7'de gösterilen dörtyüzlü elemanda (1, 2, 3, 4) noktaları, bu dörtyüzlü elemanı komşu sonlu elemanlara bağlayan "dış düğüm noktaları" olarak bilinir.

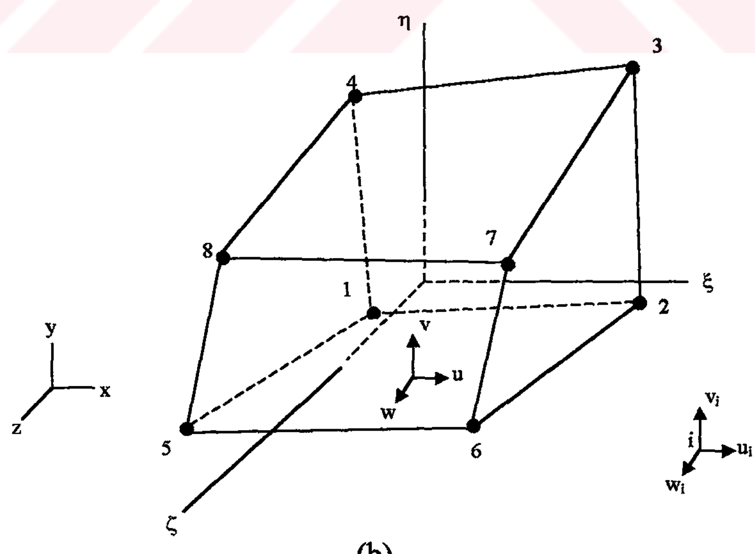


Şekil 3.7 Üç boyutlu dörtyüzlü eleman

Şekil 3.8 Dikdörtgen prizma eleman (8 düğüm noktalı), Şekil 3.9 20 düğüm noktalı dikdörtgen prizma eleman, Şekil 3.10 Dörtyüzlü elamanlar ile bölünmüş küp gösterilmiştir.

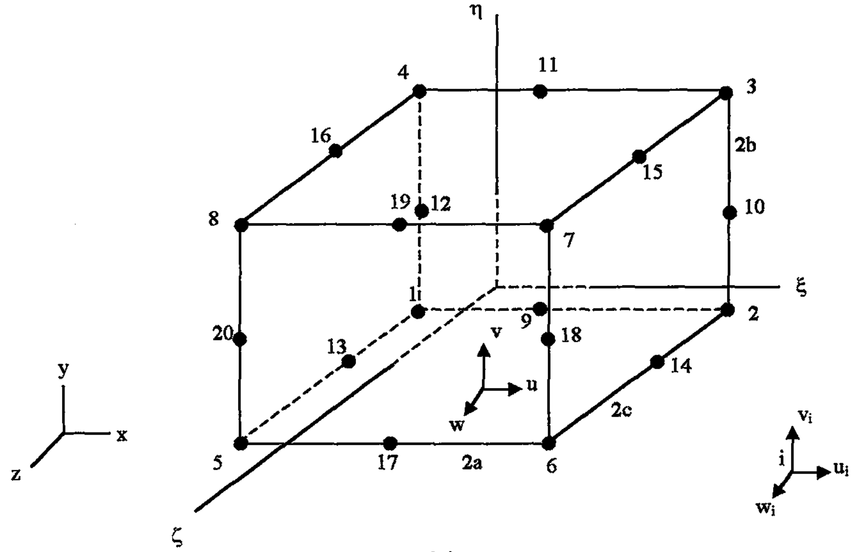


(a)

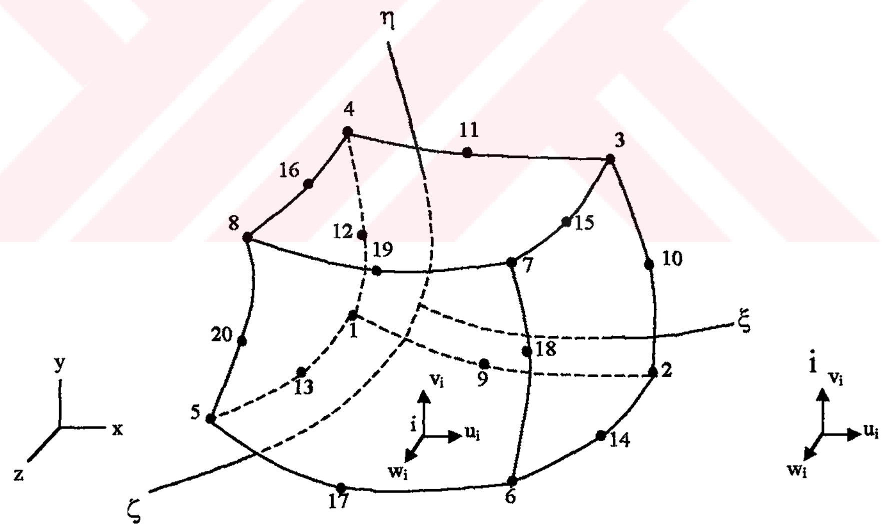


(b)

Şekil 3.8 a) 8 düğüm noktalı dikdörtgen prizma eleman
b) İzoparametrik eleman



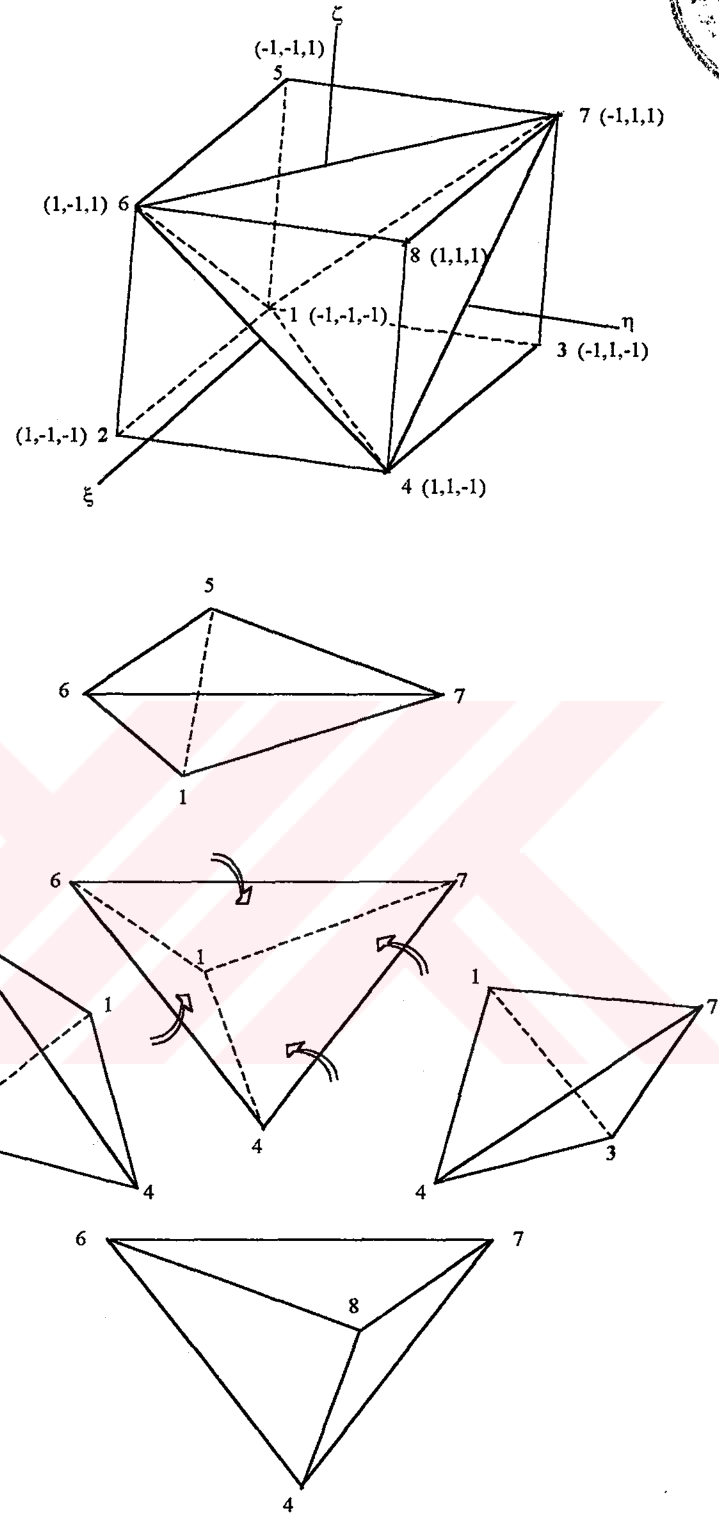
(a)



(b)

Şekil 3.9 a) 20 düğüm noktalı dikdörtgen prizma eleman

b) İzoparametrik eleman



Şekil 3.10 a) Dörtyüzlü eleman ile bölünmüş küp

b) Ağ (mesh) hazırlama

3.6.2 İnterpolasyon Fonksiyonları

Bir sonlu elemandaki her düğüm noktası birinci derecedeki bilinmeyenlerin ve düğüm noktalarının sayısı ile yerleşimi ve bir bağımlı değişkenin eleman üzerindeki polinom yaklaşımlarında kullanılan terimlerin sayısı arasında bir ilişki vardır. Şekil 3.7'deki eleman dört düğüm noktalı olduğundan, yerdeğiştirmesinin her bir bileşenin değişimi, aşağıdaki gibi dört sabitle tanımlanan bir polinomdur.

$$U(x,y,z) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4z \tag{3.47a}$$

$$V(x,y,z) = C_5 + C_6x + C_7y + C_8z \tag{3.47b}$$

$$W(x,y,z) = C_9 + C_{10}x + C_{11}y + C_{12}z \tag{3.47c}$$

Burada C_1, C_5 ve C_9; sırasıyla x, y, ve z eksenleri boyunca rijit cisim ötelemelerini göstermektedir.

Benzer şekilde sekiz düğüm noktalı dikdörtgen prizma elemandaki yerdeğiştirme bileşenlerinin her biri, sekiz sabitle tanımlanan bir polinom olarak değişeceğini kabul edebiliriz. Bu durumda,

$$U(x,y,z) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4z + C_5xy + C_6yz + C_7zx + C_8xyz \tag{3.48a}$$

$$V(x,y,z) = C_9 + C_{10}x + C_{11}y + C_{12}z + C_{13}xy + C_{14}yz + C_{15}zx + C_{16}xyz \tag{3.48b}$$

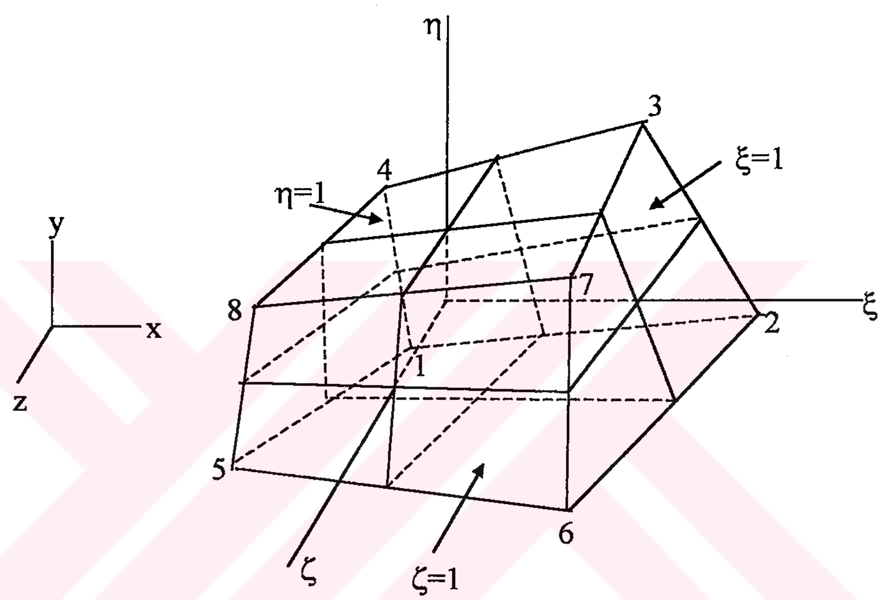
$$W(x,y,z) = C_{17} + C_{18}x + C_{19}y + C_{20}z + C_{21}xy + C_{22}yz + C_{23}zx + C_{24}xyz \tag{3.48c}$$

olarak ifade edilir.

Bu çalışmada, interpolasyon fonksiyonları sekiz düğüm noktalı dikdörtgen prizma eleman için bulunmuştur.

3.6.2.1 Sekiz Düğüm Noktalı Dikdörtgen Prizma Eleman İçin Lineer İnterpolasyon Fonksiyonları

Sekiz düğüm noktalı dikdörtgen prizma eleman için parametrik koordinatlar kullanılmıştır. Şekil 3.11'de tipik bir dikdörtgen prizma eleman ve parametrik eksenler görülmektedir.



Şekil 3.11 Dikdörtgen prizma eleman ve parametrik koordinatlar

Burada parametrik eksenler ξ, η ve ζ ile gösterilmiştir. Bu koordinatlar elemanın düğüm noktalarında 1 mutlak değerini alırlar. Bu koordinatların eleman düğüm noktalarındaki değerleri Şekil 3.11'de görülmektedir.

$$U = C_1 + C_2\xi + C_3\eta + C_4\zeta + C_5\xi\eta + C_6\eta\zeta + C_7\zeta\xi + C_8\xi\eta\zeta \quad (3.49a)$$

$$V = C_9 + C_{10}\xi + C_{11}\eta + C_{12}\zeta + C_{13}\xi\eta + C_{14}\eta\zeta + C_{15}\zeta\xi + C_{16}\xi\eta\zeta \quad (3.49b)$$

$$W = C_{17} + C_{18}\xi + C_{19}\eta + C_{20}\zeta + C_{21}\xi\eta + C_{22}\eta\zeta + C_{23}\zeta\xi + C_{24}\xi\eta\zeta \quad (3.49c)$$

Burada N_i şekil fonksiyonlarını parametrik koordinatlarda

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0) \quad (3.50)$$

$$\xi_0 = \xi_i\xi \qquad \eta_0 = \eta_i\eta \qquad \zeta_0 = \zeta_i\zeta \quad (3.51)$$

olarak yazılabilir. (3.51) bağıntısındaki ξ_i, η_i; ζ_i değerleri Tablo 3.1 den alınabilir.

Tablo 3.1 Dikdörtgen prizma için parametrik koordinatlar

i	ξ_i	η_i	ζ_i
1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1
3	1	1	-1
4	-1	1	-1
5	-1	-1	1
6	1	-1	1
7	1	1	1
8	-1	1	1

Tablo 3.1 yardımıyla N_i şekil fonksiyonlarını her düğüm noktası için

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad (3.52a)$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad (3.52b)$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad (3.52c)$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad (3.52d)$$

$$N_5 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \quad (3.52e)$$

$$N_6 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \quad (3.52f)$$

$$N_7 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \qquad (3.52g)$$

$$N_8 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \qquad (3.52h)$$

olarak hesaplanır ve

$$\sum_{i=1}^{8} N_i = 1$$

dir.

3.6.3 Eleman Rijitlik Matrisinin Bulunması

Gerilme - Şekil değiştirme bağıntısı,

$$\varepsilon_i = B_i\, q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots,8) \qquad (3.53)$$

olarak ifade edilir.

$$B_i = d \cdot N_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot N_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,z} \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,z} & N_{i,y} \\ N_{i,z} & 0 & N_{i,x} \end{bmatrix} \qquad (3.54)$$

Eleman şekil değiştirme matrisi $[B_i]$ açık olarak,

$$
\{B\} = \begin{bmatrix}
N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 & N_{3,x} & 0 & 0 & N_{4,x} & 0 & 0 \\
0 & N_{1,y} & 0 & 0 & N_{2,y} & 0 & 0 & N_{3,y} & 0 & 0 & N_{4,y} & 0 \\
0 & 0 & N_{1,z} & 0 & 0 & N_{2,z} & 0 & 0 & N_{3,z} & 0 & 0 & N_{4,z} \\
N_{1,y} & N_{1,x} & 0 & N_{2,y} & N_{2,x} & 0 & N_{3,y} & N_{3,x} & 0 & N_{4,y} & N_{4,x} & 0 \\
0 & N_{1,z} & N_{1,y} & 0 & N_{2,z} & N_{2,y} & 0 & N_{3,z} & N_{3,y} & 0 & N_{4,z} & N_{4,y} \\
N_{1,z} & 0 & N_{1,x} & N_{2,z} & 0 & N_{2,x} & N_{3,z} & 0 & N_{3,x} & N_{4,z} & 0 & N_{4,x}
\end{matrix}
\tag{3.55}
$$

$$
\begin{matrix}
N_{5,x} & 0 & 0 & N_{6,x} & 0 & 0 & N_{7,x} & 0 & 0 & N_{8,x} & 0 & 0 \\
0 & N_{5,y} & 0 & 0 & N_{6,y} & 0 & 0 & N_{7,y} & 0 & 0 & N_{8,y} & 0 \\
0 & 0 & N_{5,z} & 0 & 0 & N_{6,z} & 0 & 0 & N_{7,z} & 0 & 0 & N_{8,z} \\
N_{5,y} & N_{5,x} & 0 & N_{6,y} & N_{6,x} & 0 & N_{7,y} & N_{7,x} & 0 & N_{8,y} & N_{8,x} & 0 \\
0 & N_{5,z} & N_{5,y} & 0 & N_{6,z} & N_{6,y} & 0 & N_{7,z} & N_{7,y} & 0 & N_{8,z} & N_{8,y} \\
N_{5,z} & 0 & N_{5,x} & N_{6,z} & 0 & N_{6,x} & N_{7,z} & 0 & N_{7,x} & N_{8,z} & 0 & N_{8,x}
\end{bmatrix}
$$

şeklinde yazılabilir.

$$
\{\varepsilon\} = [B] \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_8 \\ V_8 \\ W_8 \end{Bmatrix} \tag{3.56}
$$

dir.(3.56) denklemi dikdörtgen prizma eleman içindeki herhangi bir noktada şekil değiştirme bileşenlerini verir. Şimdi parametrik koordinatlarda,

$$
\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{\partial N_8}{\partial x} \tag{3.57a}
$$

$$
\frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_2}{\partial y}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{\partial N_8}{\partial y} \tag{3.57b}
$$

ve

$$
\frac{\partial N_1}{\partial z}, \frac{\partial N_2}{\partial z}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{\partial N_8}{\partial z} \tag{3.57c}
$$

ifadelerini ayrı ayrı hesaplamak için,

$$N_{i,x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{a}\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{a} N_{i,\xi} \tag{3.58a}$$

$$N_{i,y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{b}\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{b} N_{i,\eta} \tag{3.58b}$$

$$N_{i,z} = \frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{1}{c} N_{i,\zeta} \tag{3.58c}$$

olarak yazılabilir. (3.58) denklemlerini daha açık şekilde

$$N_{1,x} = -\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{a}(1-\eta)(1-\zeta)\right\} \tag{3.59a}$$

$$N_{1,y} = -\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{b}(1-\xi)(1-\zeta)\right\} \tag{3.59b}$$

$$N_{1,z} = -\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{c}(1-\xi)(1-\eta)\right\} \tag{3.59c}$$

$$N_{2,x} = \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{a}(1-\eta)(1-\zeta)\right\} \tag{3.59d}$$

$$N_{2,y} = -\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{b}(1+\xi)(1-\zeta)\right\} \tag{3.59e}$$

$$N_{2,z} = -\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{c}(1+\xi)(1-\eta)\right\} \tag{3.59f}$$

$$N_{3,x} = \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{a}(1+\eta)(1-\zeta)\right\} \tag{3.59g}$$

$$N_{3,y} = \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{b}(1+\xi)(1-\zeta)\right\} \tag{3.59h}$$

$$N_{3,z} = -\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{c}(1+\xi)(1+\eta)\right\} \tag{3.59ı}$$

$$N_{4,x} = -\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{a}(1+\eta)(1-\zeta)\right\} \tag{3.59j}$$

$$N_{4,y} = \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{b}(1-\xi)(1-\zeta)\right\} \tag{3.59k}$$

$$N_{4,z} = -\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{c}(1-\xi)(1+\eta)\right\} \tag{3.59l}$$

$$N_{5,x} = -\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{a}(1-\eta)(1+\zeta)\right\} \tag{3.59m}$$

$$N_{5,y} = -\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{b}(1-\xi)(1+\zeta)\right\} \tag{3.59n}$$

$$N_{5,z} = \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{c}(1-\xi)(1-\eta)\right\} \tag{3.59o}$$

$$N_{6,x} = \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{a}(1-\eta)(1+\zeta)\right\} \tag{3.59p}$$

$$N_{6,y} = -\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{b}(1+\xi)(1+\zeta)\right\} \tag{3.59r}$$

$$N_{6,z} = \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{c}(1+\xi)(1-\eta)\right\} \tag{3.59s}$$

$$N_{7,x} = \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{a}(1+\eta)(1+\zeta)\right\} \tag{3.59t}$$

$$N_{7,y} = \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{b}(1+\xi)(1+\zeta)\right\} \tag{3.59u}$$

$$N_{7,z} = \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{c}(1+\xi)(1+\eta)\right\} \tag{3.59v}$$

$$N_{8,x} = -\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{a}(1+\eta)(1+\zeta)\right\} \tag{3.59w}$$

$$N_{8,y} = \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{b}(1-\xi)(1+\zeta)\right\} \tag{3.59y}$$

$$N_{8,z} = \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{c}(1-\xi)(1+\eta)\right\} \tag{3.59z}$$

olarak yazılabilir.

Şekil fonksiyonlarının türevleri aşağıdaki ifadelerle de bulunabilir.

$$[J]=\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x,\xi & y,\xi & z,\xi \\ x,\eta & y,\eta & z,\eta \\ x,\zeta & y,\zeta & z,\zeta \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

olarak ifade edilir. Jacobiyen matrisi olarak verilen (3.60) bağıntısındaki terimler ise,

$$\begin{aligned}
J_{11} &= \sum_{i=1}^{8} N_{i,\xi} x_i & J_{12} &= \sum_{i=1}^{8} N_{i,\xi} y_i & J_{13} &= \sum_{i=1}^{8} N_{i,\xi} z_i \\
J_{21} &= \sum_{i=1}^{8} N_{i,\eta} x_i & J_{22} &= \sum_{i=1}^{8} N_{i,\eta} y_i & J_{23} &= \sum_{i=1}^{8} N_{i,\eta} z_i \\
J_{31} &= \sum_{i=1}^{8} N_{i,\zeta} x_i & J_{32} &= \sum_{i=1}^{8} N_{i,\zeta} y_i & J_{33} &= \sum_{i=1}^{8} N_{i,\zeta} z_i
\end{aligned} \tag{3.61}$$

olarak ifade edilir. (3.61) bağıntısındaki ifadeler matris formunda kapalı olarak ifade

$$[J] = [D_L]\,[C_N] \tag{3.62}$$

edilir. (3.62) bağıntısında kapalı formda verilen matrislerin açık ifadeleri,

$$D_L = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} & N_{5,\xi} & N_{6,\xi} & N_{7,\xi} & N_{8,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} & N_{5,\eta} & N_{6,\eta} & N_{7,\eta} & N_{8,\eta} \\ N_{1,\zeta} & N_{2,\zeta} & N_{3,\zeta} & N_{4,\zeta} & N_{5,\zeta} & N_{6,\zeta} & N_{7,\zeta} & N_{8,\zeta} \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -(1-\eta)(1-\zeta) & (1-\eta)(1-\zeta) & (1+\eta)(1-\zeta) & -(1+\eta)(1-\zeta) & -(1-\eta)(1+\zeta) & (1-\eta)(1+\zeta) & (1+\eta)(1+\zeta) & -(1+\eta)(1+\zeta) \\ -(1-\xi)(1-\zeta) & -(1+\xi)(1-\zeta) & (1+\xi)(1-\zeta) & (1-\xi)(1-\zeta) & -(1-\xi)(1+\zeta) & -(1+\xi)(1+\zeta) & (1+\xi)(1+\zeta) & (1-\xi)(1+\zeta) \\ -(1-\xi)(1-\eta) & -(1+\xi)(1-\eta) & -(1+\xi)(1+\eta) & -(1-\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1-\eta) & -(1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

ve düğüm noktaları koordinatlarından oluşan $[C_N]$ matrisi ise

$$C_N = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

dir. Jakobiyen matrisinin tersi

$$J^{-1} = \frac{J^a}{|J|} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J^a_{11} & J^a_{12} & J^a_{13} \\ J^a_{21} & J^a_{22} & J^a_{23} \\ J^a_{31} & J^a_{32} & J^a_{33} \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

şeklinde hesaplanır. Burada J^a matrisi J matrisinin adjoint (eklenik) matrisidir. $|J|$ ise J matrisinin determinantıdır.

Şekil fonksiyonlarının x, y, ve z'ye göre türevleri

$$\begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \\ N_{i,\zeta} \end{bmatrix} \qquad (i = 1,2,.....,8) \tag{3.66}$$

dir.

$$B_i = J^{-1}\, D_L = (D_L\, C_N)^{-1}\, D_L \tag{3.67}$$

olarak yazılabilir. Burada B_i matrisi N_i fonksiyonlarının sistem koordinatlarındaki türevleri olup açık ifadesi

$$[B_i] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} & N_{5,x} & N_{6,x} & N_{7,x} & N_{8,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} & N_{5,y} & N_{6,y} & N_{7,y} & N_{8,y} \\ N_{1,z} & N_{2,z} & N_{3,z} & N_{4,z} & N_{5,z} & N_{6,z} & N_{7,z} & N_{8,z} \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

dir. Elde edilen bu türev ifadeleri ile elemanın içindeki herhangi bir noktadaki gerilme

$$\{\varepsilon\} = [B]\,[\delta] \tag{3.69}$$

şeklinde bir ifade elde edilir. Burada [B] slope (eleman şekil değiştirme) matrisi, [δ] eleman şekil değiştirme matrisi elde edildikten sonra, kartezyen koordinatlarda eleman rijitlik (stiffness) matrisi,

$$[K] = \int_V B^T \cdot (x,y,z) \cdot D \cdot B(x,y,z)\,dxdydz \tag{3.70}$$

şeklinde ifade edilir. Bununla birlikte (3.70) denklemi parametrik koordinatlarda,

$$[K] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} B^T(\xi,\eta,\zeta) \cdot D \cdot B(\xi,\eta,\zeta) \cdot \left|J(\xi,\eta,\zeta)\right| \cdot d\xi d\eta d\zeta \tag{3.71}$$

haline gelir. Burada [J], (3.60)'deki Jakobiyen matrisidir [39], [42].

4.ÜÇ BOYUTLU SONLU ELEMANLAR METODU KULLANILARAK ETKİLİ TABLA GENİŞLİĞİNİN ARAŞTIRILMASI

4.1 Giriş

Bu bölümde, üç boyutlu problemlerin çözümü için kullanılabilecek tarzda hazırlanmış PC uyumlu bilgisayar programı tanıtılacak ve ele alınan bazı örnekler bu programla çözülerek sonuçları değerlendirilecektir.

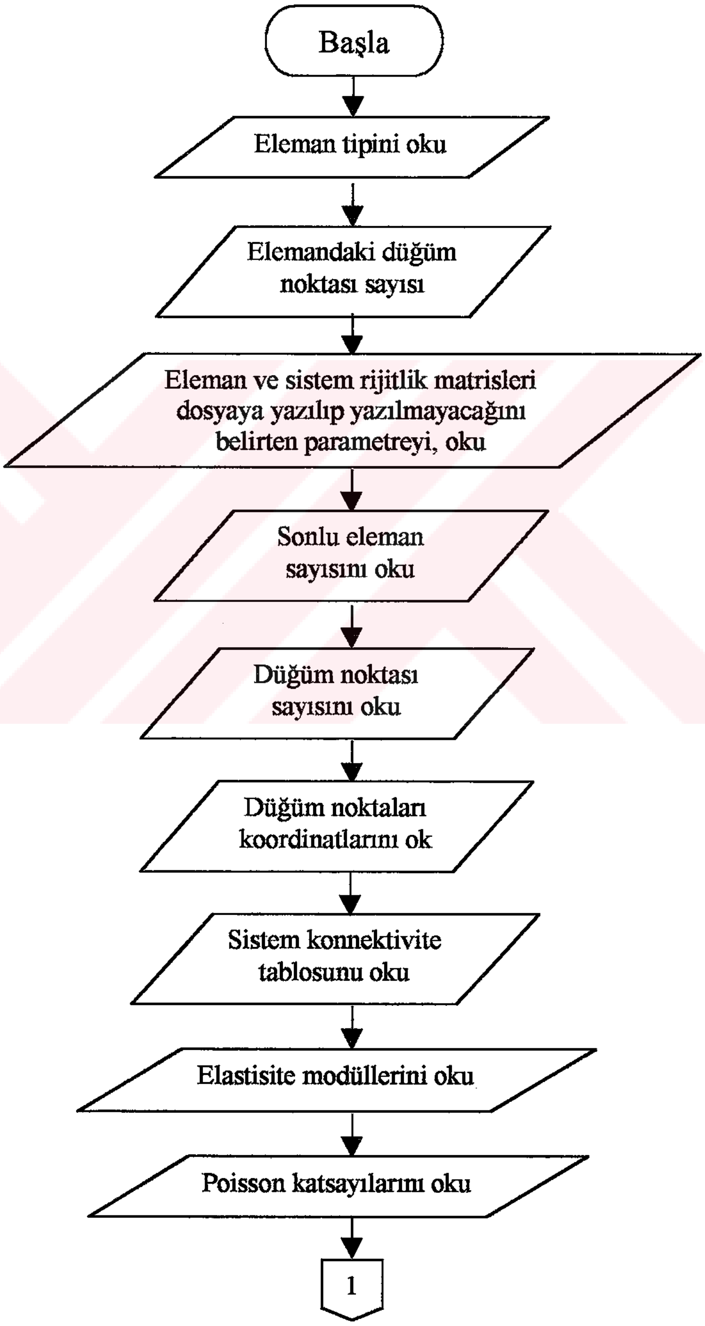
Üç boyutlu sonlu elemanlar programı aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır:

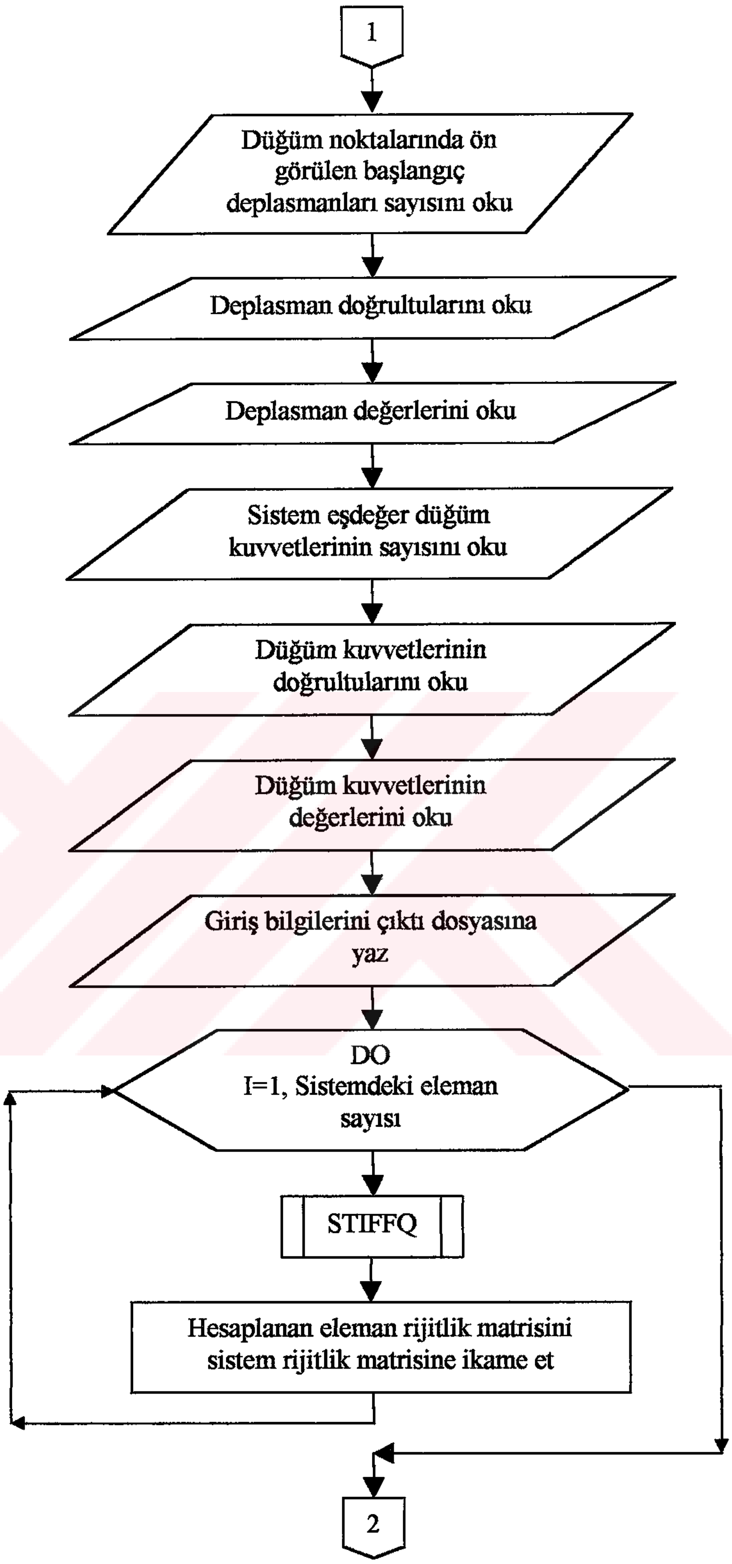
1. Veri girişi
2. Eleman özelliklerinin belirlenmesi
3. Eleman rijitlik matrislerinin birleştirilerek sistem rijitlik matrisinin oluşturulması
4. Sistem rijitlik matrisinin çözülmesi
5. Düğüm noktası deplasmanlarının hesaplanması
6. Düğüm noktalarındaki gerilmelerin hesaplanması
7. Sonuçların yazdırılması

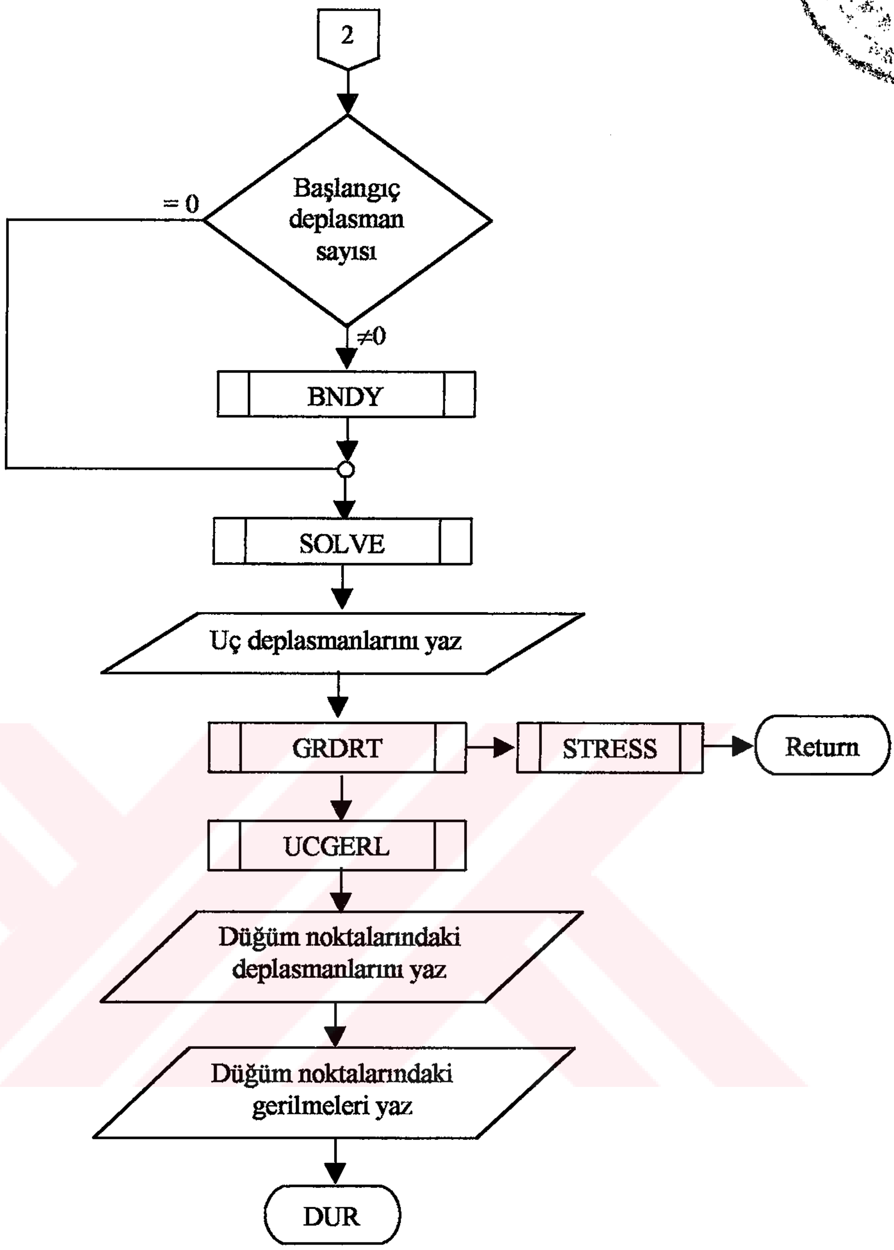
Herhangi bir sonlu elemanlar programında gerekli olan giriş verileri ve sonuçların çıktısı teknik yönden pek fazla önem taşımamakla birlikte sonlu elemanlar programın çalıştırılmasında en fazla zamanı verilerin hazırlanması ve sonuçların yorumlanması almaktadır. Bu yüzden veri girişinde yapılacak bazı kısaltma ve kolaylıklar harcanan zamanın düşürülmesi açısından çok faydalı olacaktır.

Kişisel bilgisayarlar için geliştirilmiş olan etkileşimli bir programın başarısı büyük oranda kullanılan PC'nin sunduğu donanım ve yazılım özelliklerine de bağlıdır. Bu amaçla yazılan programın gereksinimi baştan belirlenerek kullanılacak yardımcı programlar ve programlama hedeflediği minimum donanım ve yazılım dillerinin seçimi yapılmalıdır. Bu çalışmamızda, sağladığı avantajlar nedeniyle hesaplama modülünde FORTRAN 77 programlama dili kullanılmıştır.

4.1.1 Bilgisayar Programı ve Akış Diyagramı




1
Düğüm noktalarında ön görülen başlangıç deplasmanları sayısını oku
Deplasman doğrultularını oku
Deplasman değerlerini oku
Sistem eşdeğer düğüm kuvvetlerinin sayısını oku
Düğüm kuvvetlerinin doğrultularını oku
Düğüm kuvvetlerinin değerlerini oku
Giriş bilgilerini çıktı dosyasına yaz
DO
I=1, Sistemdeki eleman sayısı
STIFFQ
Hesaplanan eleman rijitlik matrisini sistem rijitlik matrisine ikame et
2



4.1.2 FEM3D'in Yapısı ve Yardımcı Alt Programlar

Program, veri dosyaları ve çıktılar problem parametrelerine göre sabit diskte ilgili alt dizinde yapılandırılmıştır.

Hazırlanan program üç yardımcı modülden meydana gelir. GİRİŞ, HESAP, RAPOR. Yardımcı alt programlarıyla birlikte akış diyagramında verilen bu modüller aşağıda detaylı olarak incelenecektir.

a. Veri Girişi

Veri giriş bölümünde girilmesi gereken ilk bilgi grubu problem parametreleridir. Eleman sayısı ve düğüm noktası sayısının yanısıra önceden bir yardımcı program yardımıyla sistem tanıtılıp ve uygun olarak sonlu elemanlara bölünmekte, düğüm noktaları koordinatları ve konnektivite tablosu otomatik olarak hazırlanmaktadır. Bunun dışında elastisite modülleri, poisson oranları, sınır şartları ile dış yükler bu bölümde tanımlanmaktadır.

Problem parametrelerinde düğüm sayısının girilmesinden sonra her bir düğüme ait koordinatlar referans uzunlukta uyumlu olacak şekilde girilmesi gerekir.

Bu giriş bilgilerinin tamamı veri dosyası olarak hazırlanmaktadır.

b. Hesap Bölümü

Veri giriş dosyası hazırlandıktan sonra akış diyagramın da belirtildiği gibi program hesap işlemlerine başlamadan önce veri giriş dosyasından bilgiler okunmakta ve her bir elemana ait eleman rijitlik matrisi STIFFQ alt programında hesaplanmaktadır. Hesaplanan eleman rijitlik matrisi sistem rijitlik matrisine aktarılmaktadır. Sistem rijitlik matrisi bant tipi denklemlere ayrılıp hazırlanmakta ve hafızada daha az yer kaplaması sağlanmaktadır.

İşlemler problemdeki bu eleman sayısı kadar tekrarlanarak sistem rijitlik matrisi elde edilir. Elde edilen denklem takımının çözümü yapılmadan önce sınır şartlarının yerleştirilmesi BNDY alt programında yapılır. Buna göre denklemler tekrar düzenlenmiş olur.

Sistem rijitlik matrisinin inversinin alınması ise SOLVE alt programında yapılmaktadır. Burada bant tipi simetrik denklemler sistemi çözülmektedir.

$$[K]\{U\}=\{P\}$$

$$\{\mathbf{U}\} = [\mathbf{K}]^{-1}\{\mathbf{P}\}$$

Burada [K], sistem rijitlik matrisi bir kare matristir. Bununla birlikte [K], değişik bir yol olarak çok daha küçük bir dikdörtgen matris olarak tanımlanıp saklanmaktadır. Matrisin inversi ise Choleisky iterasyon yöntemi ile yapılmaktadır. Büyük hacimli problemlerin çözümü için uygun matris inversi yöntemi Choleisky iterasyon yöntemidir. Gauss eliminasyon yöntemi de kullanılmış ama Choleisky iterasyon yöntemine göre matrisin inversinde çözüm hızını bir hayli düşürmüştür.

Sistem denklem takımı çözülüp düğüm noktaları deplasmanları hesaplandıktan sonra , GRDRT alt programına gidilir ve her eleman için [B] şekil değiştirme fonksiyonu hesaplanarak ve elemana ait deplasmanlar ile çarpımları

$$[B]\{q\}$$

yapılır.

GRDRT alt programdaki işlemlerden sonra STRESS alt programına geçilir ve elemanların düğüm noktalarındaki [σ] gerilme değerleri

$$[\sigma]=[D]\{B\}\{q\}$$

olarak hesaplanır.

UCGERIL alt programı ile de sistem düğüm noktalarındaki gerilme değerleri hesaplanır.

c. Rapor Bölümü

Bu kısımda alınabilecek çıktılar üç farklı şekilde gönderilebilir. Ekran, yazıcı, dosya. Programda çıktılar dosyaya gönderilmekte ve buradan sonuçlar alınıp değerlendirilmektedir.

4.2 Örnek Çözümler

4.2.1 Karşılıklı Kenarları Boşta Basit Mesnetli Kirişli Döşeme

Bu uygulamamızda, kirişin sonsuz uzunlukta olduğu ve eşit aralıklı mesnetlere oturduğu kabul edilmiştir. Bütün açıklıklar, açıklık ortasına göre simetrik olan eşit yüklerle yüklenmişlerdir. Sistem tekil, çizgisel ve düzgün yayılı yük halleri için çözülmüştür. Aşağıda verilen malzeme sabitlerine bağlı olarak yapılan farklı boyut oranlarına bağlı sistem çözümlerden elde edilen değerler Tablo 4.1 ve Tablo 4.2'de özetlenmiştir. Sonlu elemanlar ile çözdüğümüz döşeme sisteminin,

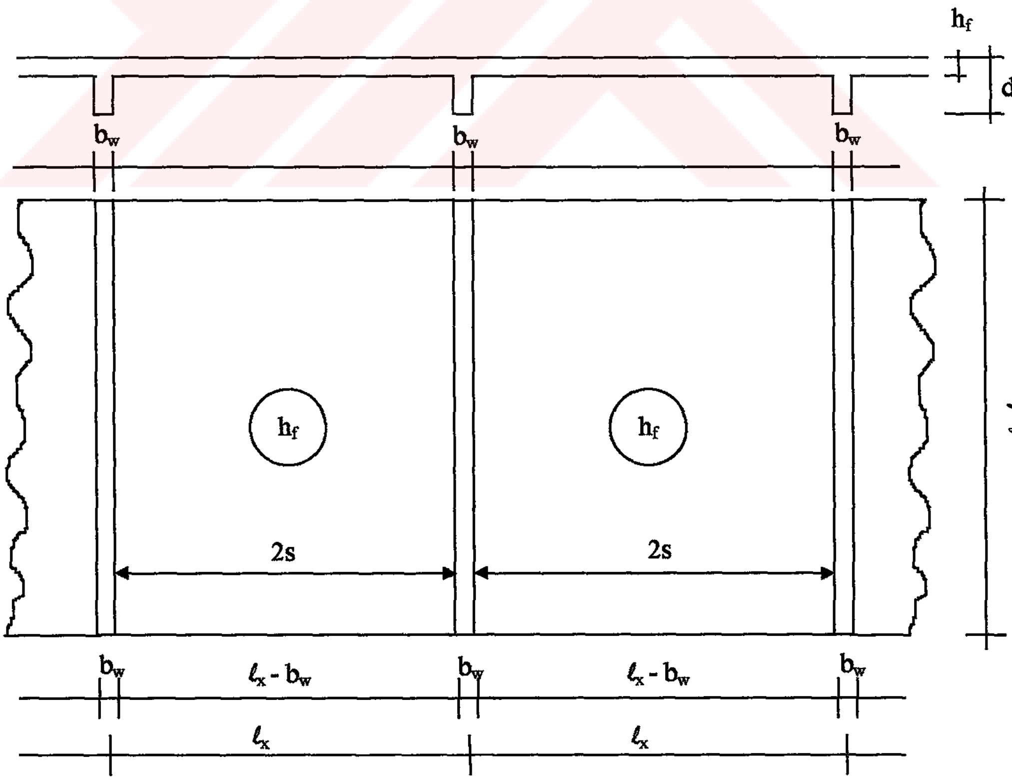
$\nu_{beton} = 0.2$

$\nu_{çelik} = 0.3$

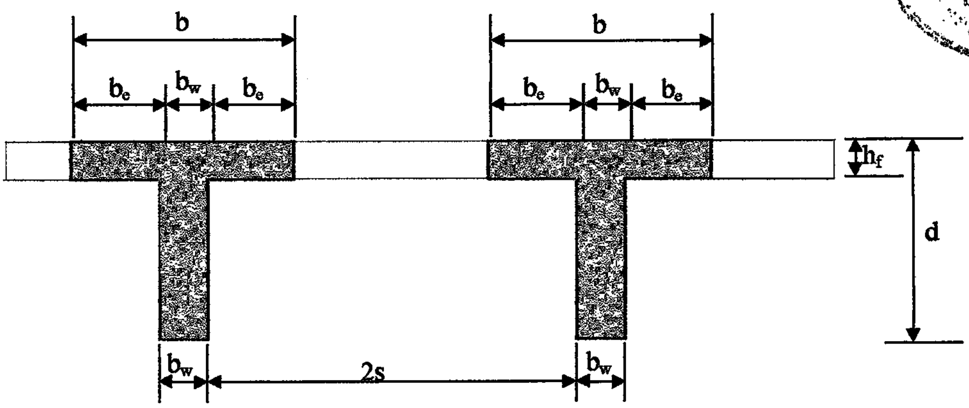
$E_{beton} = 285000\ \text{kgf/cm}^2$

$E_{çelik} = 2000000\ \text{kgf/cm}^2$

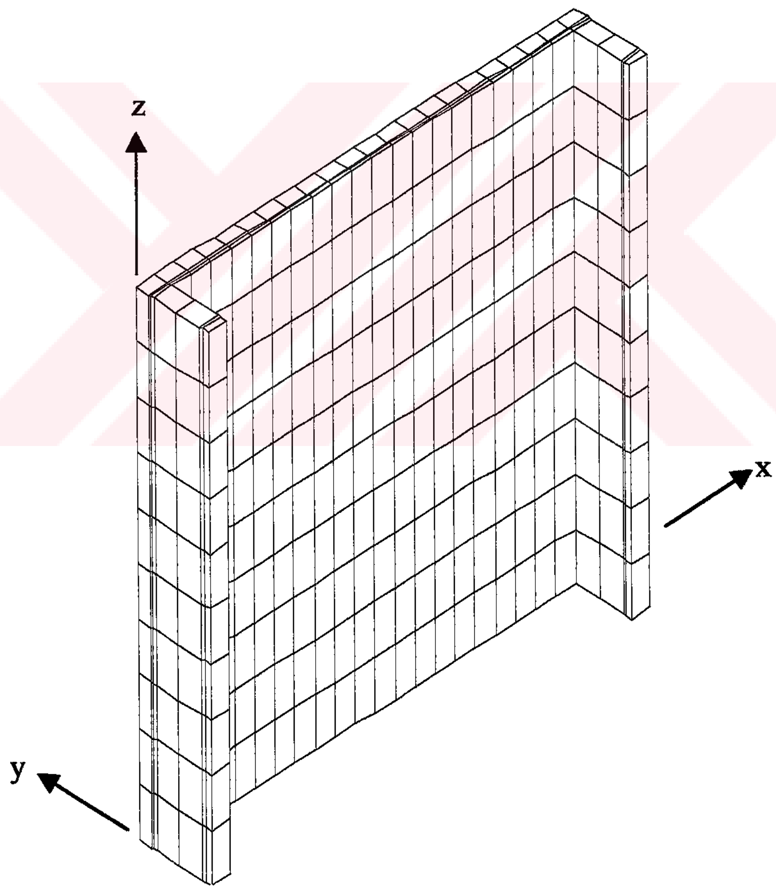
olarak alınmıştır. Bulunan b (çalışan tabla genişliği) değerleri açıklık ortası içindir.



Şekil 4.1 Sonsuz uzunlukta basit mesnetli plak

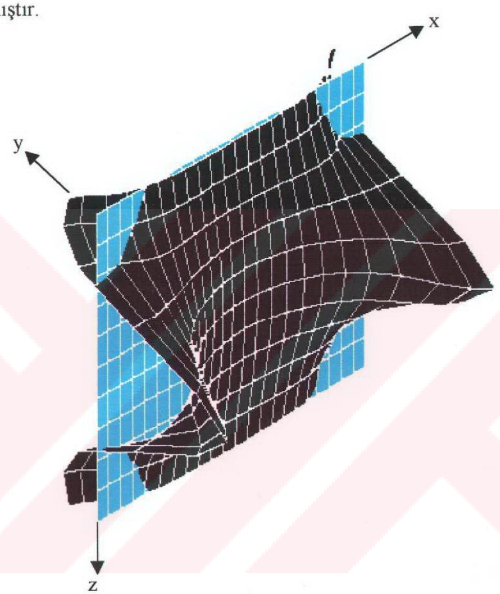


Şekil 4.2 Simetrik kesitli kirişte etkili tabla genişliği.



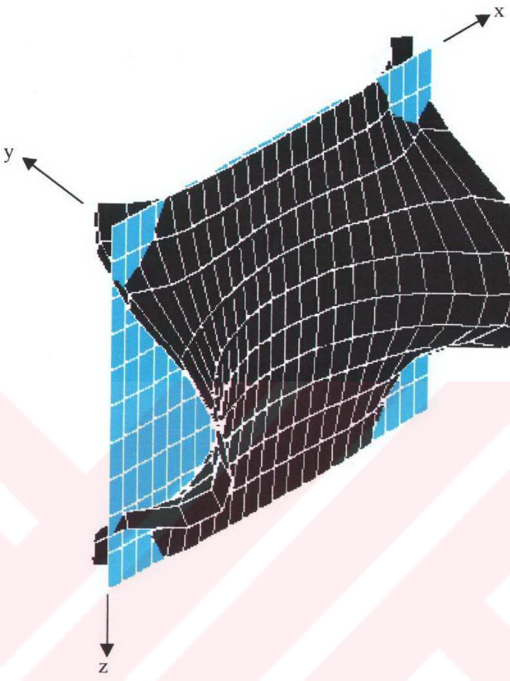
Şekil 4.3 Sonsuz uzunlukta basit mesnetli plağın üç boyutlu görünüşü.

Şekil 4.3'de görülen basit mesnetli döşeme sisteminde sonlu elemanlar metodu ile çözümde, döşeme sistemi 740 eleman ve 1188 düğüm noktasından oluşmaktadır. Farklı kenar oranlarına bağlı olarak tekil, çizgisel ve düzgün yayılı yükleme şekilleri için çözümler yapılmıştır. Döşemenin ℓ_x açıklığı ve dış yükler sabit alınmıştır. Diğer yöndeki açıklık ise değiştirilerek ℓ/s parametresine bağlı olarak etkili tabla genişliği hesaplanmıştır.



Şekil 4.4 Tekil yük için σ_z gerilme diyagramı

Şekil 4.4 ve şekil 4.5'deki gerilme grafiklerinden de görüleceği gibi tekil yükten dolayı oluşan gerilmeler çizgisel yüke göre düğüm noktaları arasındaki değişimleri daha büyüktür. Bu yüzden tekil yükün uygulandığı bölgede etkili tabla genişliği çizgisel yüke göre daha küçük çıkmaktadır.



Şekil 4.5 Çizgisel yük için σ_z gerilme diyagramı.

Tablo 4.1 ve Tablo 4.2 incelendiğinde bazı şartname kayıtları ile teorik çalışmalar arasında ciddi farklılıklar vardır. Bunun sebebi ise bazı kısıtlama kayıtlarından kaynaklanmaktadır.

Örneklerin çözümünde, tekil yük kirişlerin ortasına, y doğrultusunda kirişe alttan asılmıştır. Her bir kirişe etkitilen tekil yükün şiddeti ise –5000 kgf'dir. Çizgisel yük, kiriş aksları üzerinde ve kirişlerin en üst düğüm noktalarına y doğrultusunda –3000 kgf/m olarak uygulanmıştır. Düzgün yayılı yük ise kiriş ve döşeme üzerinde y doğrultusunda –1000 kgf/m^2 alınarak çözülmüştür.

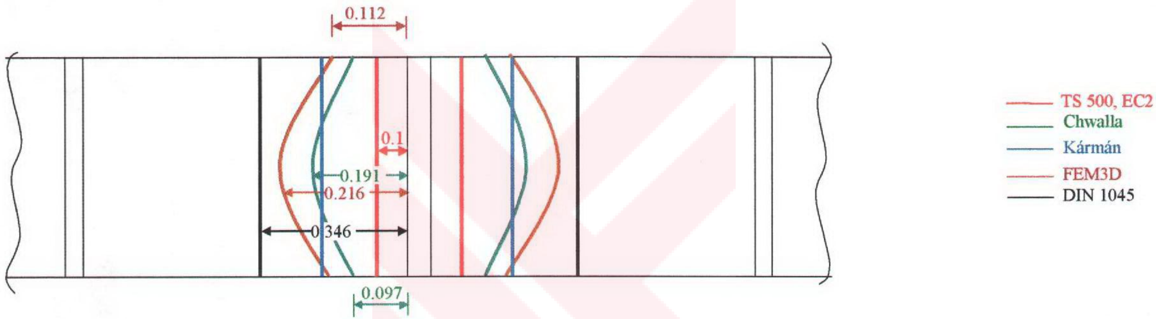
Tablo 4.1 Tekil yük ile yüklenmiş simetrik kesitli sonsuz uzunlukta basit mesnetli kiriş için b_e değerleri

Tekil yük												
ℓ (cm)	b_w (cm)	d (cm)	h_f (cm)	ℓ/s	b_e							
					TS 500	EC2	ACI 318-95	DIN 1045	Chwalla	Kärmän	Brendel	FEM3D
300	25	50	12	2	30	30	25	73.8	29.4	48.3	25	55.66
600	25	50	12	4	60	60	50	118.8	58.8	96.6	50	67.41
900	25	50	12	6	72	90	75	135	88.2	144.9	75	73.69
1200	25	50	12	8	72	120	96	145	117.6	150	110	76.64
1500	25	50	12	10	72	150	96	150	147.0	150	115	77.24

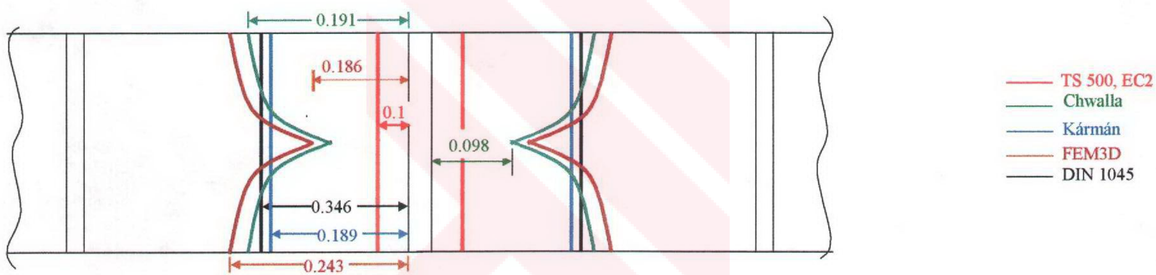
Tablo 4.2 Çizgisel yük ile yüklenmiş simetrik kesitli sonsuz uzunlukta basit mesnetli kiriş için b_e değerleri.

Çizgisel yük												
ℓ (cm)	b_w (cm)	d (cm)	h_f (cm)	ℓ/s	b_e							
					TS 500	EC2	ACI 318-95	DIN 1045	Chwalla	Kärmän	Brendel	FEM3D
300	25	50	12	2	30	30	25	73.8	57.3	56.7	50	64.96
600	25	50	12	4	60	60	50	118.8	114.6	113.4	100	82.63
900	25	50	12	6	72	90	75	135	150	150	120	91.69
1200	25	50	12	8	72	120	96	145	150	150	130	96.81
1500	25	50	12	10	72	150	96	150	150	150	140	99.44

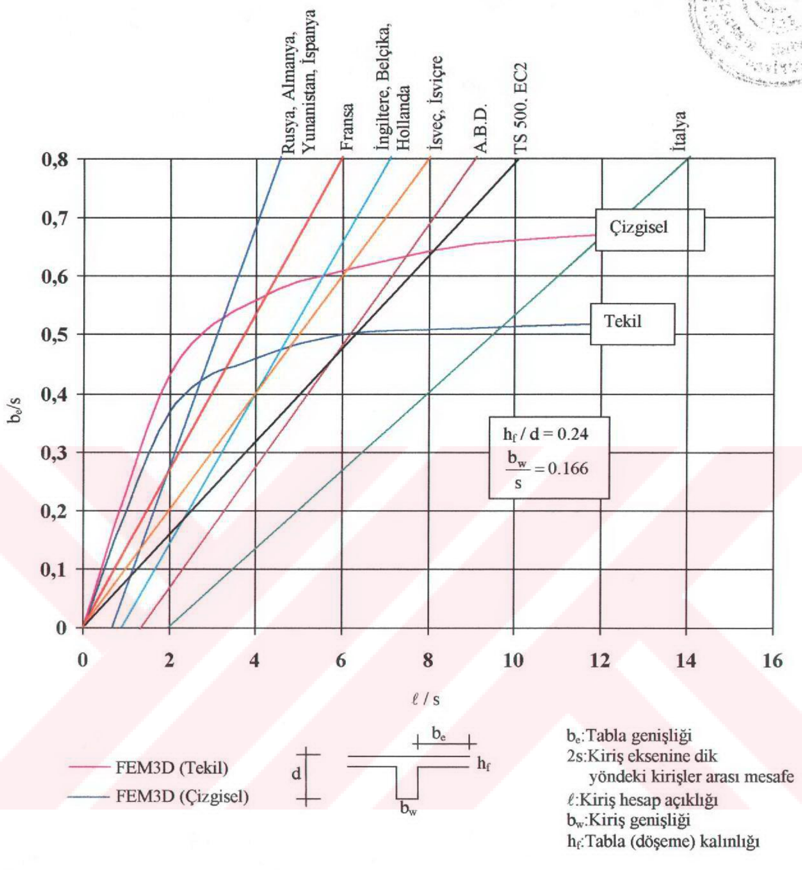
Tekil ve çizgisel yük için elde edilen b_e değerleri kiriş açıklık ortası için verilmiştir. Yükler sabit olup ℓ/s'in değişik oranları için etkili genişlik bulunmuştur.



Şekil 4.6 Çizgisel yük ile yüklenmiş sonsuz uzunlukta basit mesnetli plak için b_e/ℓ oranları (ℓ/s=2).



Şekil 4.7 Tekil yük ile yüklenmiş sonsuz uzunlukta basit mesnetli plak için b_e/ℓ oranları (ℓ/s=2)



Şekil 4.8 Sonsuz uzunluktaki basit mesnetli plak için etkili tabla genişliğinin çeşitli ülke yönetmeliklerine göre grafik olarak gösterimi

4.2.2 Bir Açıklıklı, Kirişleri Kolonlara Tam Ankastre Mesnetli Döşeme Sistemi

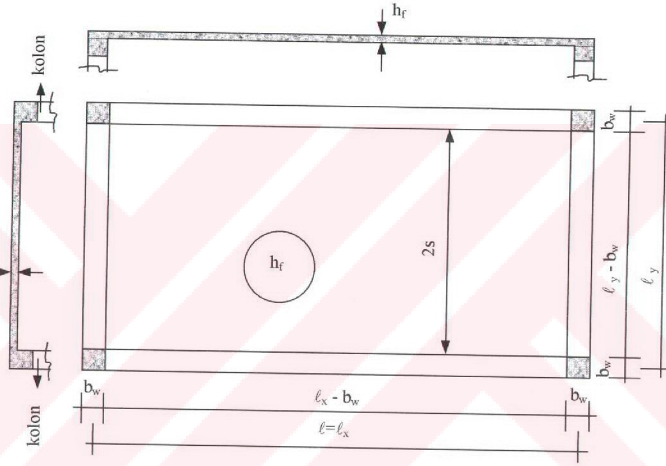
Bu bölümde, bir açıklıklı döşeme-kiriş sistemi ele alınmış kirişlerin kolonlarla birleştiği noktalarda tam ankastre mesnetli olduğu kabul edilmiştir. Sistem tekil, çizgisel ve düzgün yayılı yük halleri için çözülmüştür. Donatı tam aderans kabulü ile modellenmiş ve aşağıdaki verilen malzeme sabitlerine bağlı olarak yapılan farklı boyut oranlarına bağlı sistemlerin çözümlerinden elde edilen değerler Tablo 4.3 ve Tablo 4.4'de özetlenmiştir.

$\nu_{beton} = 0.2$

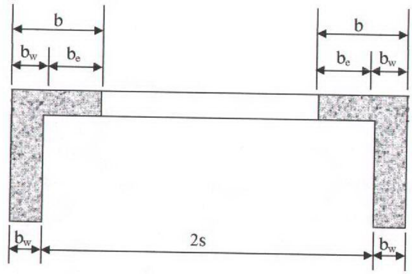
$\nu_{çelik} = 0.3$

$E_{beton} = 285000$ kgf/cm^2

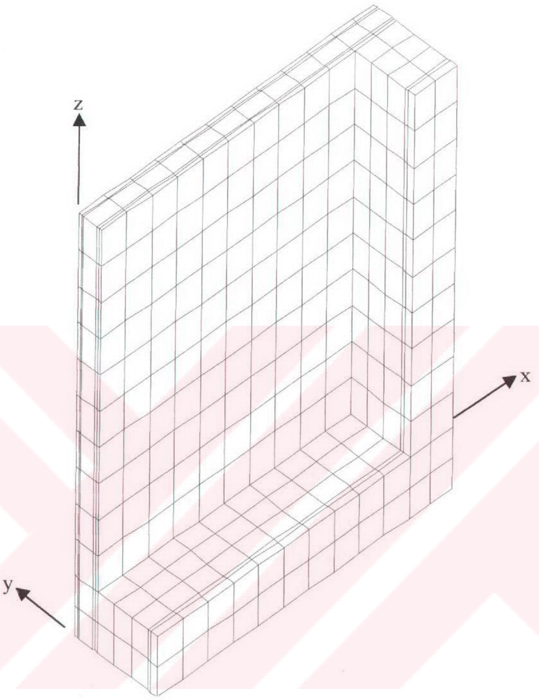
$E_{çelik} = 2000000$ kgf/cm^2



Şekil 4.9 Kirişleri kolonlara tam ankastre mesnetli tek açıklıklı plak

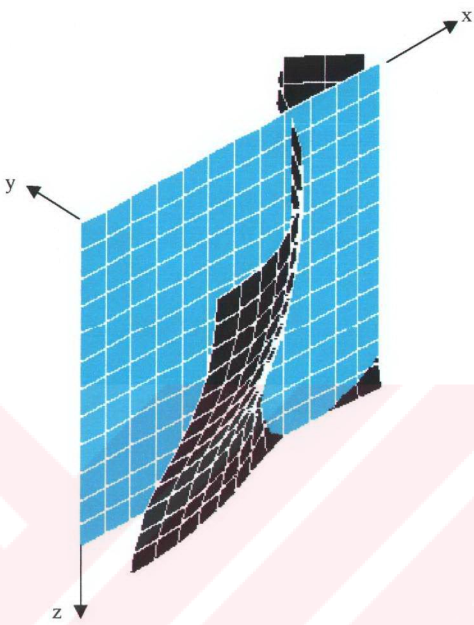


Şekil 4.10 Çalışan tabla genişliği



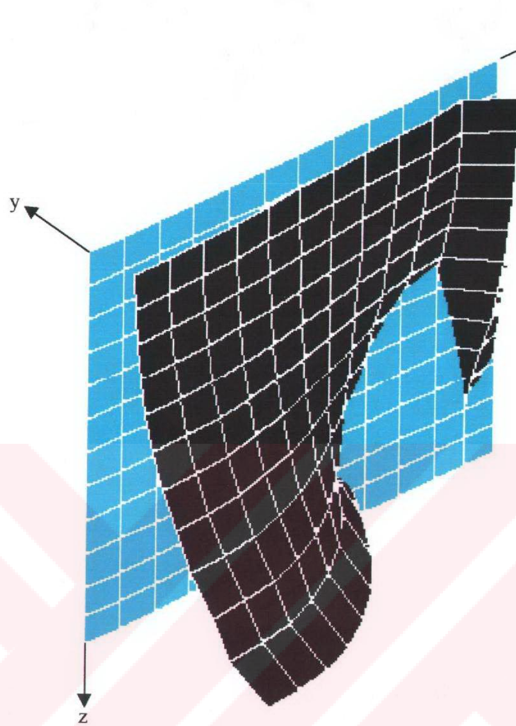
Şekil 4.11 Kirişleri kolonlara tam ankastre mesnetli dörtte bir plağın üç boyutlu görünüşü

Şekil 4.11 de görülen bir açıklıklı döşeme sistemin sonlu elemanlar metodu ile çözümde döşeme sistemi 940 eleman ve 1359 düğüm noktasından oluşmaktadır. Farklı kenar oranlarına bağlı olarak tekil, çizgisel ve düzgün yayılı yükleme şekilleri için çözümler yapılmıştır



Şekil 4.12 Düzgün yayılı yük için σ_x gerilme diyagramı

Bu örnekte de kirişlerin ortasına ve alttan asılmış olarak y doğrultusunda -5000 kgf'lık tekil yükler uygulanmıştır. Çizgisel yük kiriş aksları üzerinde ve kirişlerin en üst düğüm noktalarına y doğrultusunda –3000 kgf/m olarak uygulanmıştır. Düzgün yayılı yük ise kiriş ve döşeme üzerinde, y doğrultusunda -1000 kgf/m^2 alınarak çözülmüştür.



Şekil 4.13 Çizgisel yük için σ_x gerilme diyagramı

Tablo 4.3 Tekil yük ile yüklenmiş tek açıklıklı, kolonlara tam ankastre mesnetli kirişlerin b_e değerleri

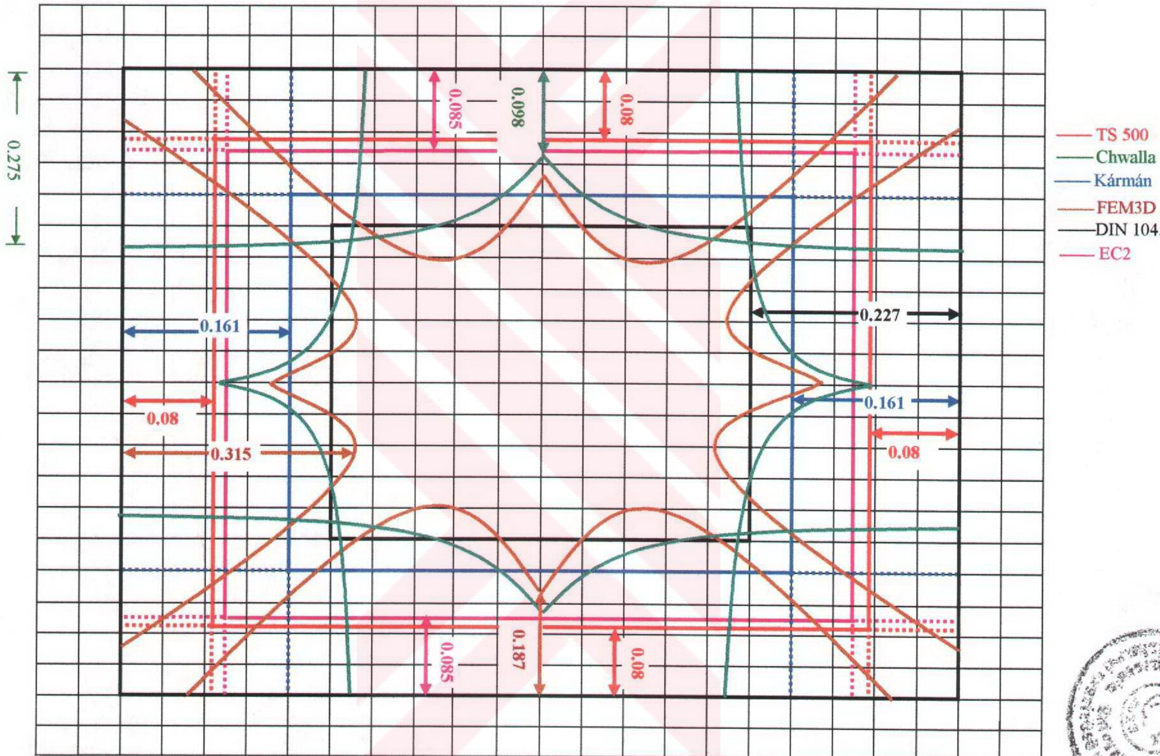
Tekil yük													
ℓ_x (cm)	ℓ_y (cm)	b_w (cm)	d (cm)	h_f (cm)	ℓ/s	b_e							
						TS 500	EC2	ACI 318-95	DIN 1045	Chwalla	Kärmän	Brendel	FEM3D
325	325	25	50	14	2.17	26	27.6	27.1	69	31.85	52.33	27.1	60.8
600	325	25	50	14	4	48	51	50	112.5	58.8	96.6	50	82.2
900	325	25	50	14	6	72	76.5	75	130.0	88.2	144.9	75	96.8
1200	325	25	50	14	8	84	102	84	141.0	117.6	150	110	106.5
1500	325	25	50	14	10	84	127.5	84	150.0	147	150	115	113

Tablo 4.4 Çizgisel yük ile yüklenmiş tek açıklıklı, kolonlara tam ankastre mesnetli kirişlerin b_e değerleri

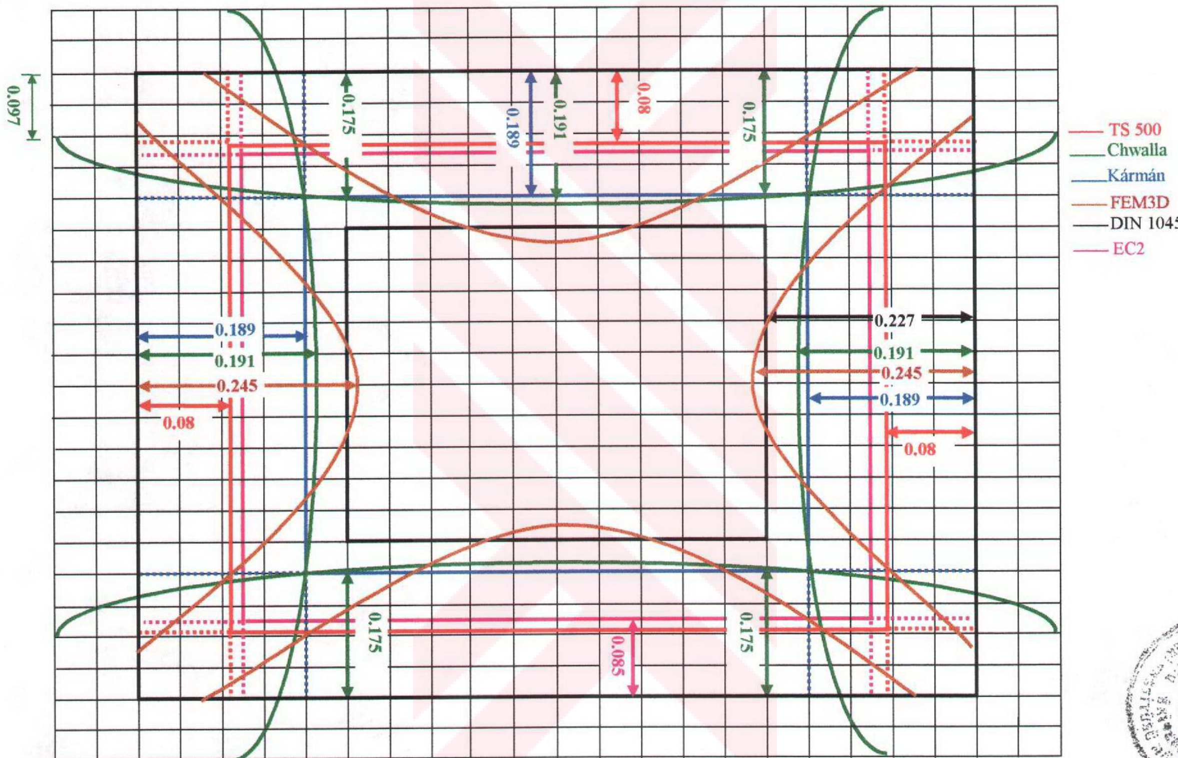
Çizgisel yük													
ℓ_x (cm)	ℓ_y (cm)	b_w (cm)	d (cm)	h_f (cm)	ℓ/s	b_e							
						TS 500	EC2	ACI 318-95	DIN 1045	Chwalla	Kärmän	Brendel	FEM3D
325	325	25	50	14	2.17	26	27.6	27.1	69	62.08	61.43	54.17	79.63
600	325	25	50	14	4	48	51	50	112.5	114.6	113.4	100	108.4
900	325	25	50	14	6	72	76.5	75	130.0	150	150	120	124.4
1200	325	25	50	14	8	84	102	84	141.0	150	150	130	132.9
1500	325	25	50	14	10	84	127.5	84	150.0	150	150	140	137.6

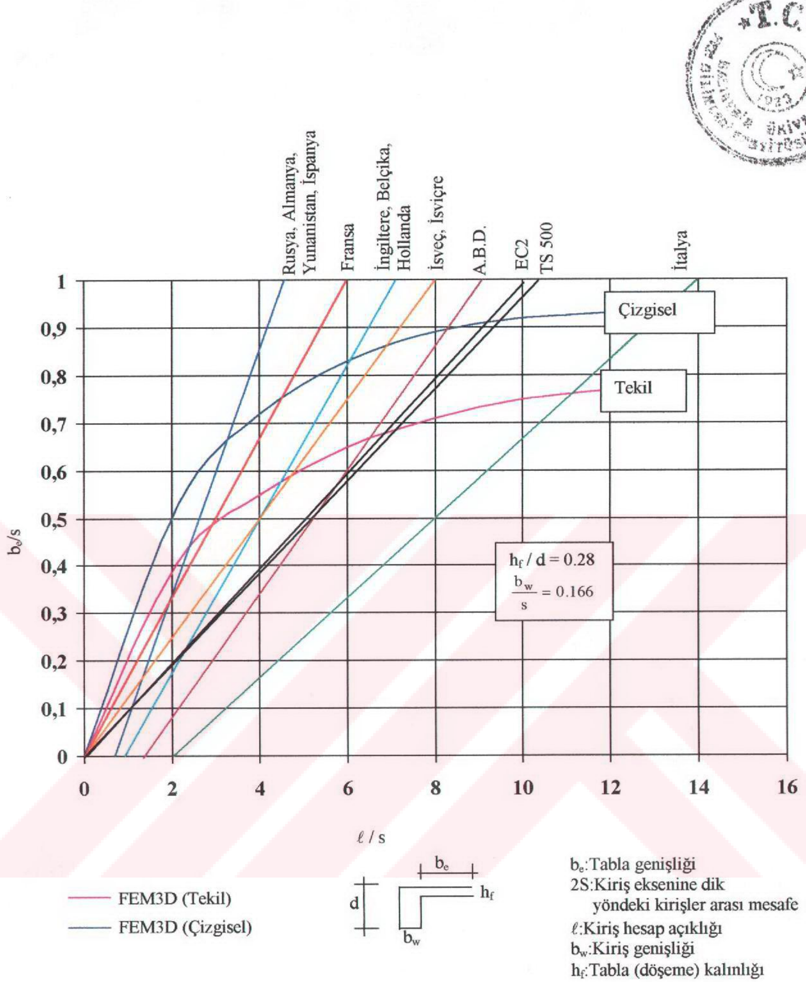
Yukarıdaki tablolardan da görüleceği gibi tekil ve çizgisel yük durumları için elde edilen sonuçlarda kiriş açıklığı (ℓ) arttıkça etkili tabla genişliğinin arttığı görülmektedir. ℓ/s arttıkça etkili tabla genişliğindeki değişim aynı oranda olmadığını görüyoruz. Tekil yükten elde edilen etkili tabla genişliği, çizgisel yükten elde edilen genişliğe göre daha küçük çıkmaktadır. Elde edilen b_e değerleri kirişlerin açıklık ortası içindir. Yükler, döşeme kalınlığı, kiriş boyutları ve yükler sabit alınmıştır. ℓ/s oranına göre b_e değerleri elde edilmiştir.

Şekil 4.14 Tekil yük için tek açıklıklı, kolonlara tam ankastre mesnetli kirişlerin b_e/ℓ oranları



Şekil 4.15 Çizgisel yük için tek açıklıklı, kolonlara tam ankastre mesnetli kirişlerin b_e/ℓ oranları





Şekil 4.16 Kolonlara tam ankastre mesnetli bir açıklıklı kirişli döşemede çalışan tabla genişliğinin çeşitli ülke yönetmeliklerine göre grafik olarak gösterimi

4.2.3. İki Açıklıklı, Kirişleri Kolonlara Tam Ankastre Mesnetli Döşeme Sistemi

Bu bölümde de, her iki yönde ikişer açıklığı olan ve her iki yönde de simetrik olan döşeme-kiriş sistemi çözülmüştür. Üç farklı yükleme hali dikkate alınmış (tekil, çizgisel, düzgün yayılı) ayrıca donatıda modellenmiştir. Bu uygulamada,

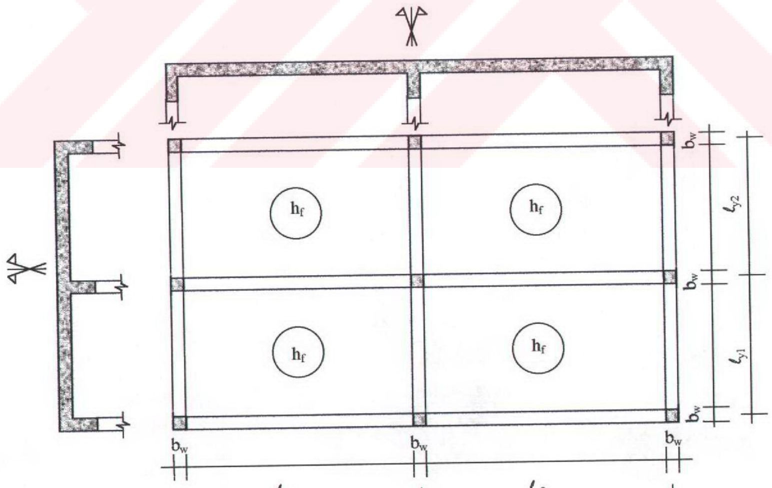
$\nu_{beton} = 0.2$

$\nu_{çelik} = 0.3$

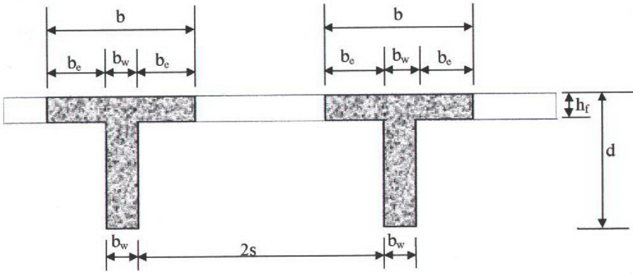
$E_{beton} = 285000$ kgf/cm^2

$E_{çelik} = 2000000$ kgf/cm^2

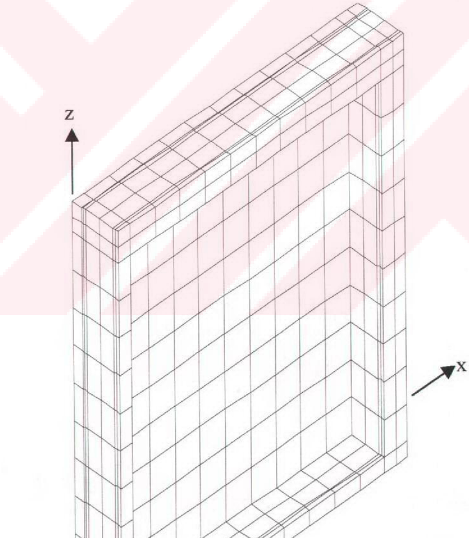
olarak alınmıştır. Farklı boyut oranlarına göre yapılan çözümlerden elde edilen sonuçlar tablo ,şekil ve grafiklerle verilmiştir.



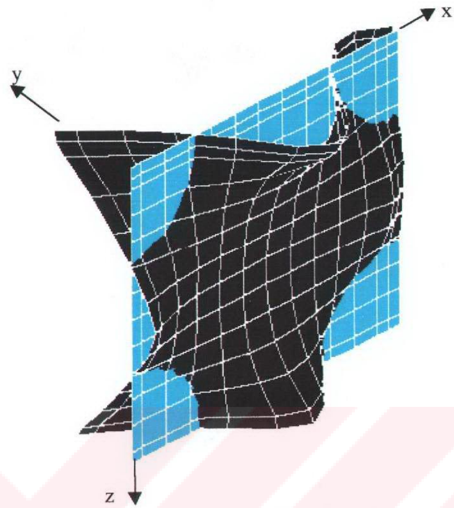
Şekil 4.17 Her iki yönde iki açıklıklı, kirişleri kolonlara tam ankastre mesnetli döşeme sistemi



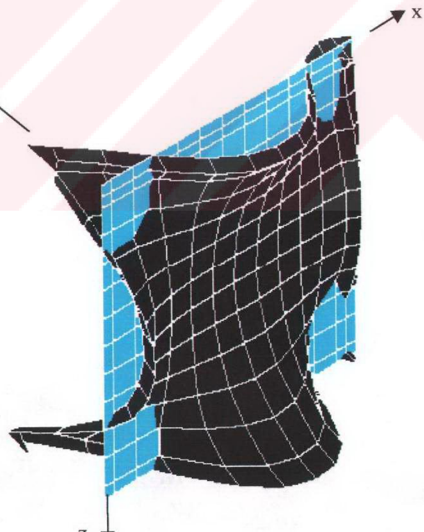
Şekil 4.18 Simetrik kesitli kirişte etkili tabla genişliği



Şekil 4.19 Dörtte bir döşeme sisteminin üç boyutlu görünüşü



Şekil 4.20 Tekil yük için σ_x gerilme diyagramı



Şekil 4.21 Çizgisel yük için σ_x gerilme diyagramı

Tablo 4.5 Tekil yük ile yüklenmiş iki açıklıklı, kolonlara tam ankastre mesnetli simetrik kirişlerin b_e değerleri

Tekil yük															
								b_e							
ℓ_{x1} (cm)	ℓ_{x2} (cm)	ℓ_{y1} (cm)	ℓ_{y2} (cm)	b_w (cm)	d (cm)	h_f (cm)	ℓ/s	TS 500	EC2	ACI 318-95	DIN 1045	Chwalla	Kārmān	Brendel	FEM3D
300	300	325	325	25	50	14	2	24	25.5	25	69	33	48.3	25	53.65
600	600	325	325	25	50	14	4	48	51.0	50	112.5	63	96.6	50	83.87
900	900	325	325	25	50	14	6	72	76.5	75	130	82.5	144.9	75	99.94
1200	1200	325	325	25	50	14	8	84	102	100	141	97.5	150	95	108.4
1500	1500	325	325	25	50	14	10	84	127	112	150	105	150	100	112.9

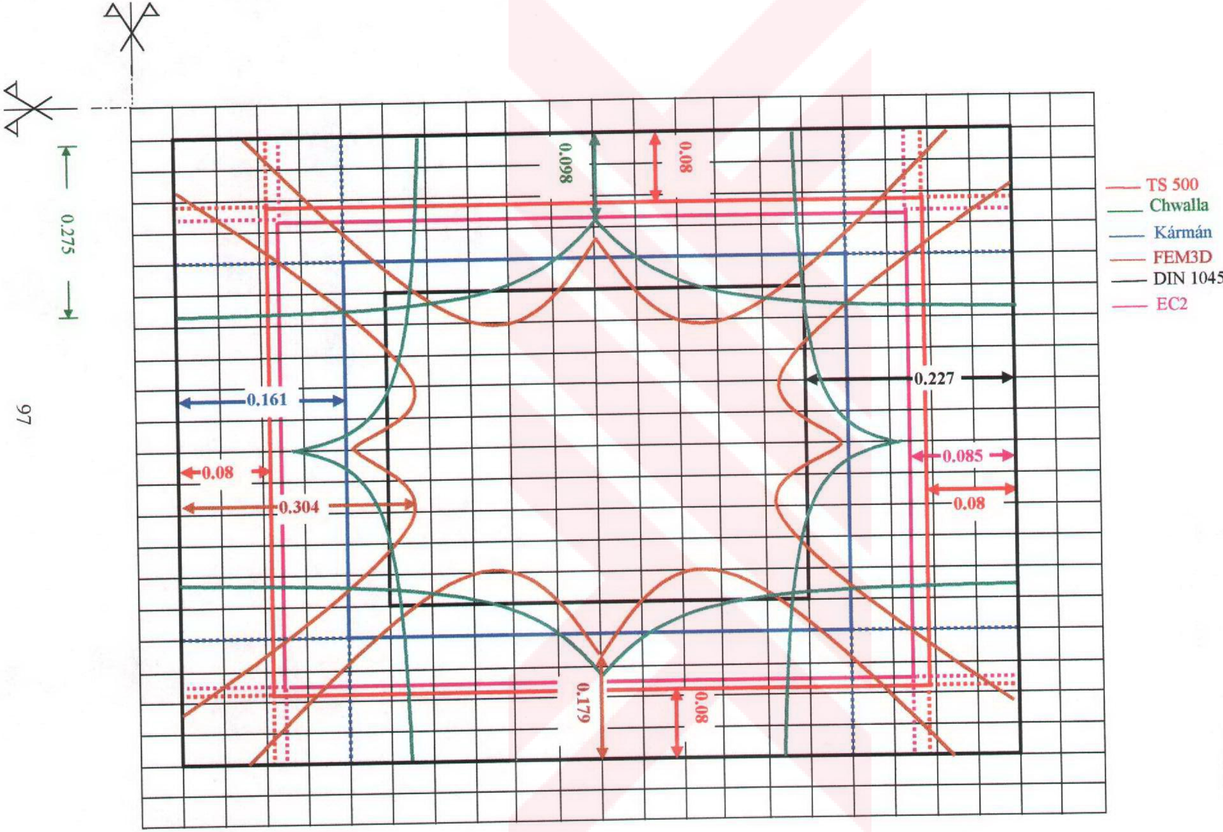
Tablo 4.6 Çizgisel yük ile yüklenmiş iki açıklıklı, kolonlara tam ankastre mesnetli simetrik kirişlerin b_e değerleri

Çizgisel yük															
								b_e							
ℓ_{x1} (cm)	ℓ_{x2} (cm)	ℓ_{y1} (cm)	ℓ_{y2} (cm)	b_w (cm)	d (cm)	h_f (cm)	ℓ/s	TS 500	EC2	ACI 318-95	DIN 1045	Chwalla	Kārmān	Brendel	FEM3D
300	300	325	325	25	50	14	2	24	25.5	25	69	60	56.7	50	64.07
600	600	325	325	25	50	14	4	48	51.0	50	112.5	105	113.4	100	99.51
900	900	325	325	25	50	14	6	72	76.5	75	130	133.5	150	105	116.2
1200	1200	325	325	25	50	14	8	84	102	100	141	144	150	115	124.5
1500	1500	325	325	25	50	14	10	84	127	112	150	150	150	125	129.2

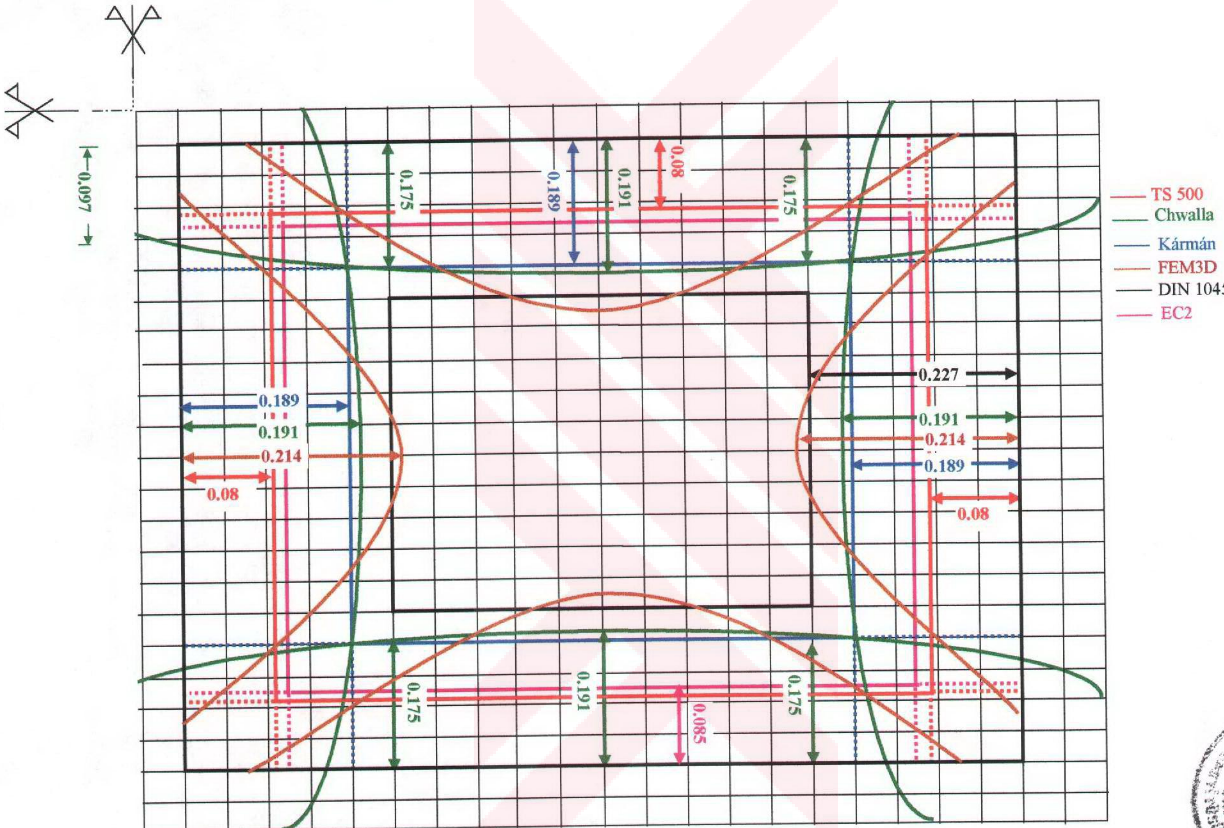
Elde edilen sonuçlara göre ℓ/s nin küçük değerleri için gerilmeler daha büyük çıktığından etkili tabla genişliği şartname kayıtlarına göre daha büyük çıkmaktadır. ℓ/s oranı büyüdükçe şartname kayıtları ile teorik çalışmalardan elde edilen tabla genişliği değerleri arasındaki fark azalmaktadır. Tablolardaki b_e değerleri kirişlerin açıklık ortası içindir. Tekil ve çizgisel yükler sabit alınmıştır. ℓ/s oranına bağlı olarak b_e değerleri elde edilmiştir.

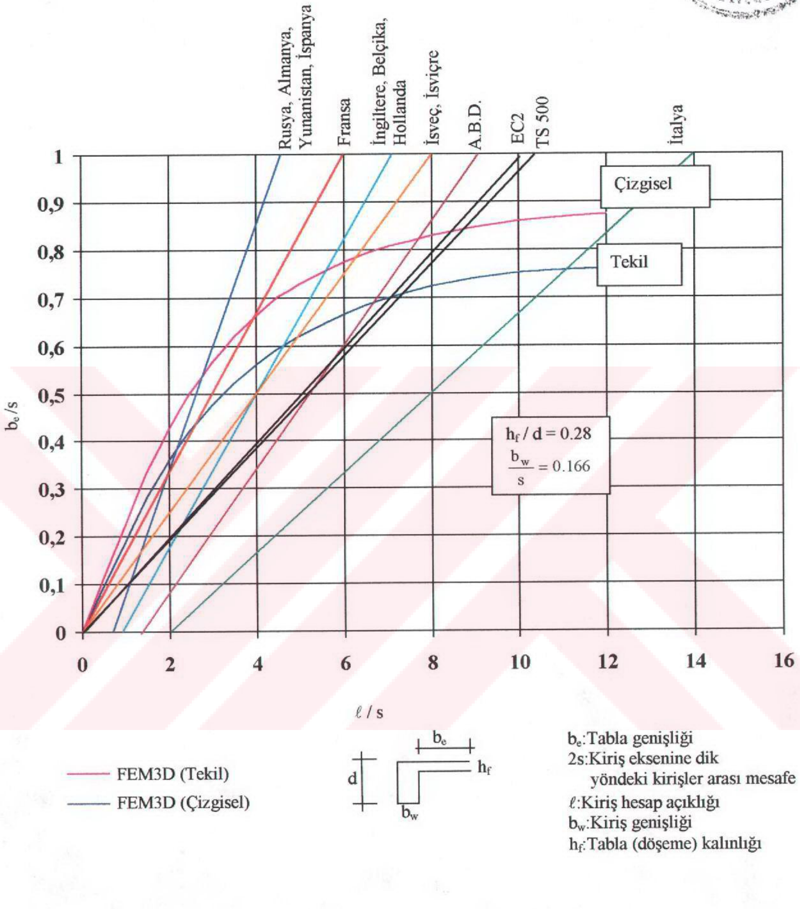
Gerilme dağılışı kesinlikle bilinmediğinden ve bu gerilmeyi bir çok değişken etkilediğinden çeşitli şartnamelerde çeşitli kabuller yapılıp farklı sonuçların bulunması doğaldır

Şekil 4.22 Tekil yük ile yüklenmiş her iki yönde iki açıklıklı kolonlara tam ankastre mesnetli kirişlerin b_e/ℓ oranları



Şekil 4.23 Çizgisel yük ile yüklenmiş her iki yönde iki açıklıklı kolonlara tam ankastre mesnetli kirişlerin b_e/ℓ oranları



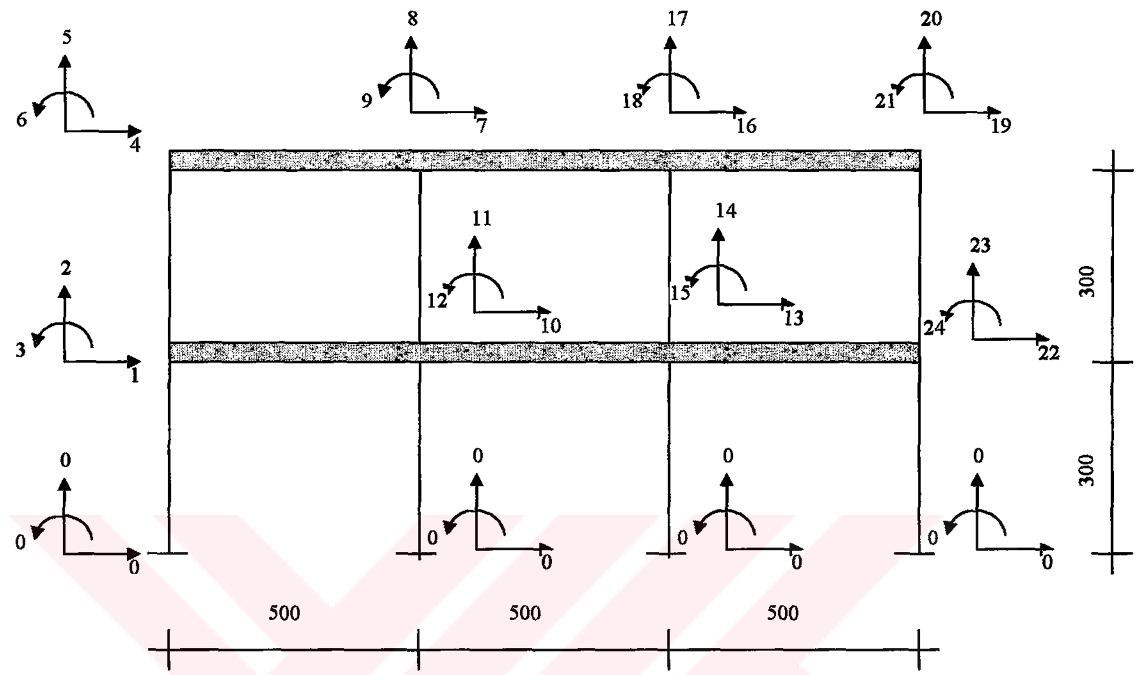


Şekil 4.24 Kolonlara tam ankastre mesnetli iki açıklıklı kirişli döşemede çalışan tabla genişliğinin çeşitli ülke yönetmeliklerine göre grafik olarak gösterimi

Bu örnekte de, tekil yükler kiriş ortasına, y doğrultusunda, kirişlere alttan asılmış ve yüklerin şiddeti de –5000 kgf dır. Çizgisel yük ise, kiriş aksları üzerinde ve kirişlerin en üst noktalarına y doğrultusunda –3000 kgf/m olarak uygulanmıştır. Düzgün yayılı yük ise kiriş ve döşeme üzerinde, y doğrultusunda –1000 kgf/m^2 alınarak çözülmüştür.

Bu bölümde ele aldığımız üç farklı döşeme sisteminde değişik yükleme şekilleri için etkili tabla genişliği değerleri bulunmuştur. ℓ/s ve b_e/s 'e bağlı, grafik olarak tekil ve çizgisel yük için bulunan etkili tabla genişliği değerleri, İtalyan Şartnamesi hariç diğer ülke şartnameleri ile uyumlu olduğunu söyleyebiliriz. İtalyan Şartnamesinden elde edilen etkili tabla genişliği değerleri diğer ülke şartnamelerine göre daha küçüktür. Tabla genişliği kiriş rijitliğine olan katkısı küçük olduğundan, kesit tesirlerindeki etkisi de aynı oranda küçük olmaktadır. Bu yüzden hesaplanan tabla genişliklerinde fazla hata aranmamalıdır.

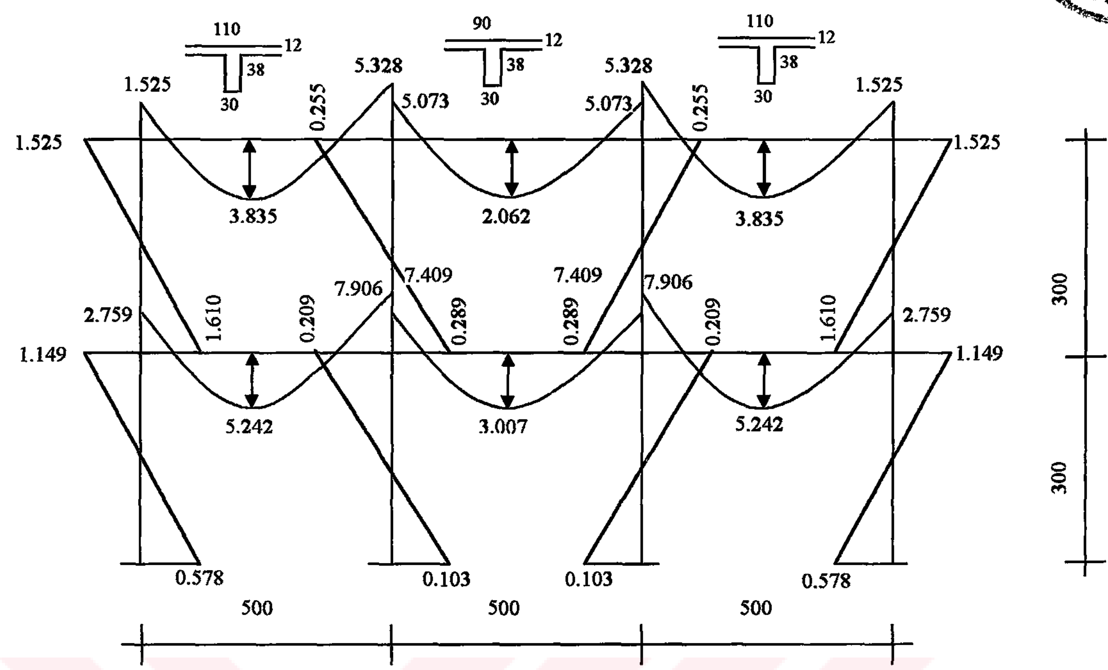
4.3 ÇERÇEVE TİPİ YAPIDA ETKİLİ TABLA GENİŞLİKLERİNE GÖRE KESİT TESİRLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI



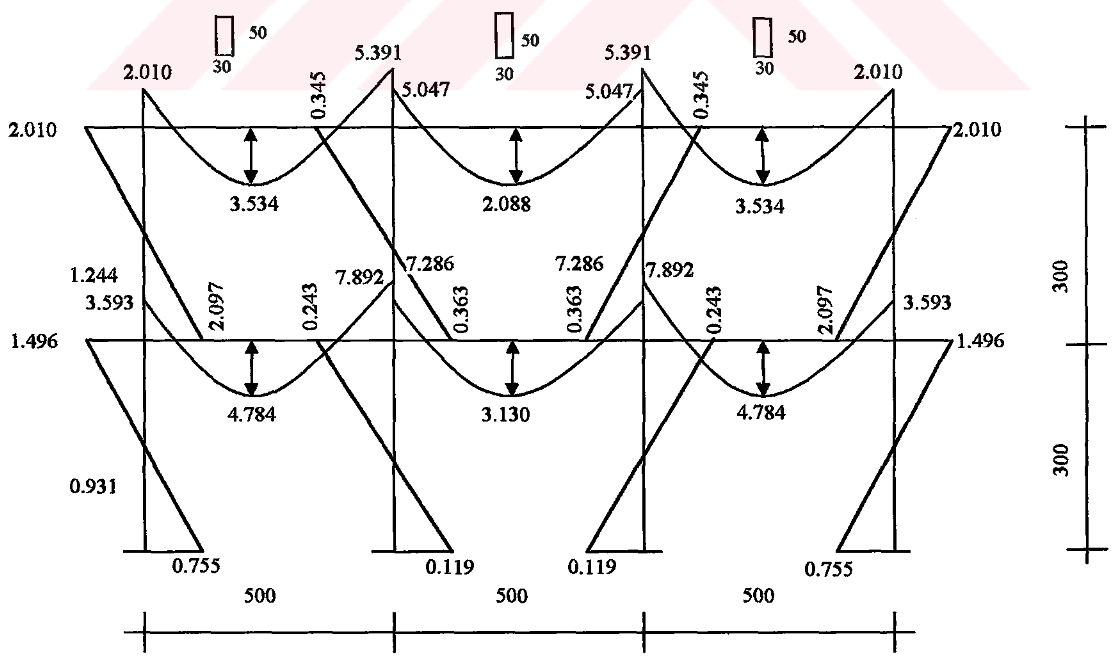
Şekil 4.25 Çözümü yapılan çerçeve sistem

Bu örnekte etkili tabla genişliklerinin etkisini karşılaştırmak için çerçeve tipi bir sistem ele alınmış çeşitli etkili tabla genişliği değerlerine göre kolon ve kirişlerdeki kesit tesirleri değişimi incelenmiştir. +6.00 m. kotundaki kirişler üzerinde q=2.283 t/m, +3.00m. kotundaki kirişler üzerinde ise q=3.333 t/m.'lik düzgün yayılı yük etkitilmiştir.

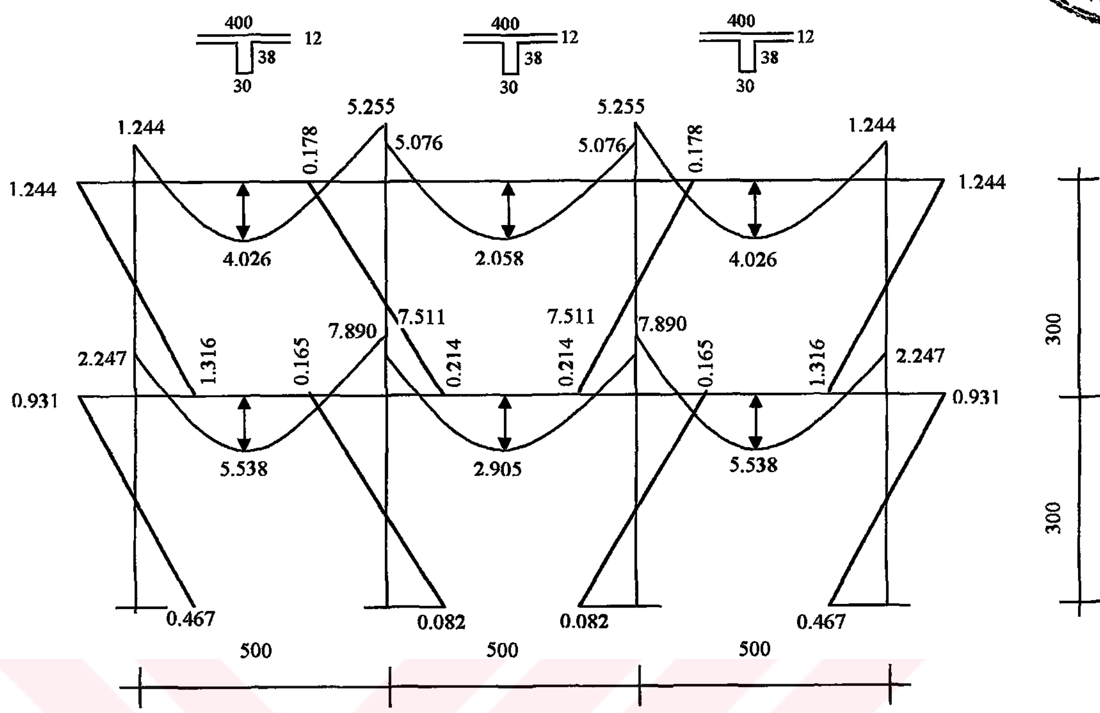
Buna göre düğüm noktalarındaki en büyük kesit tesirleri kiriş kesitinin dikdörtgen kabul edilmesiyle elde edilmiştir. Kirişlerdeki açıklık momentleri; kirişin açıklıkta tablalı, mesnet ile moment sıfır noktaları arasında dikdörtgen kabul edilmesiyle elde edilen değerler diğer çözümlere göre daha büyük çıkmıştır. Etkili tabla genişliğinin TS 500'de ifade edilen değeri ile kirişe dik yönde döşeme ortasından döşeme ortasına alınacak değerden elde edilecek kesit tesirleri arasındaki fark büyük değildir. Bu yüzden etkili tabla genişliğinin küçük alınması daha gerçekçi olabilir.



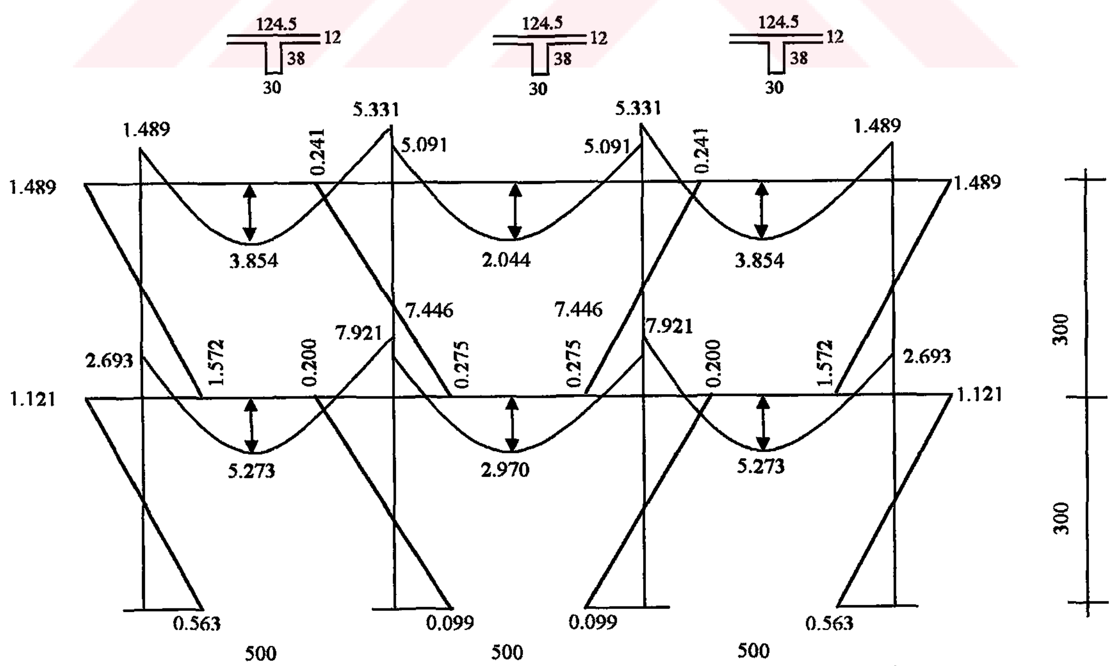
Şekil 4.26 TS 500'den bulunan etkili tabla genişliğine göre moment değerleri



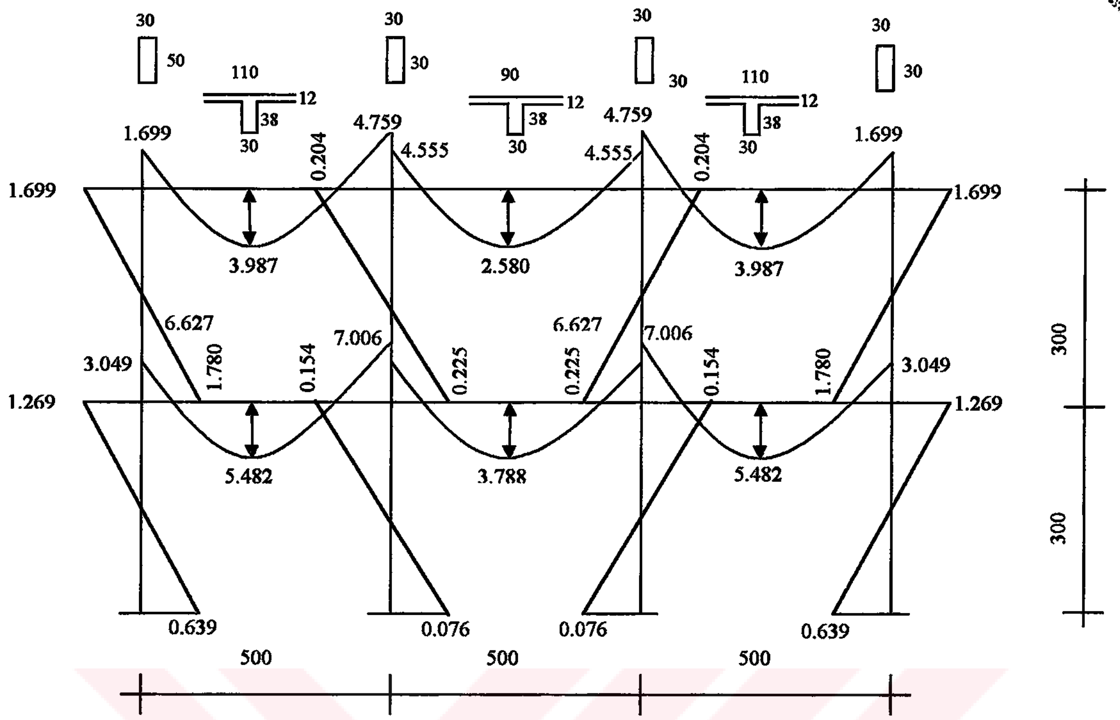
Şekil 4.27 Kirişlerin dikdörtgen kesitli kabul edilmesiyle bulunan moment değerleri



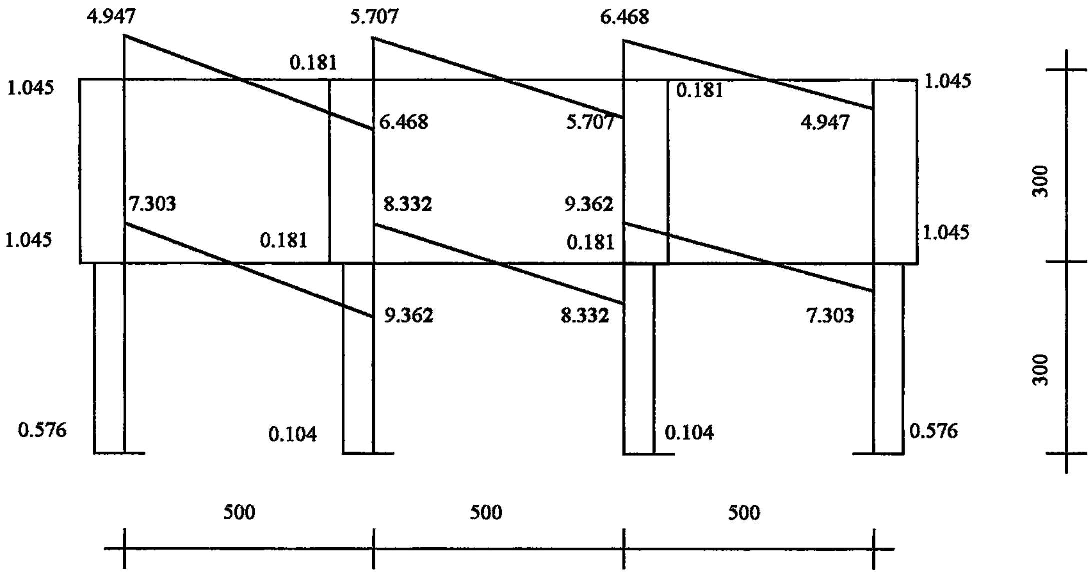
Şekil 4.28 Etkili tabla genişliğinin döşeme ortasından döşeme ortasına kabul edilmesiyle bulunan moment değerleri



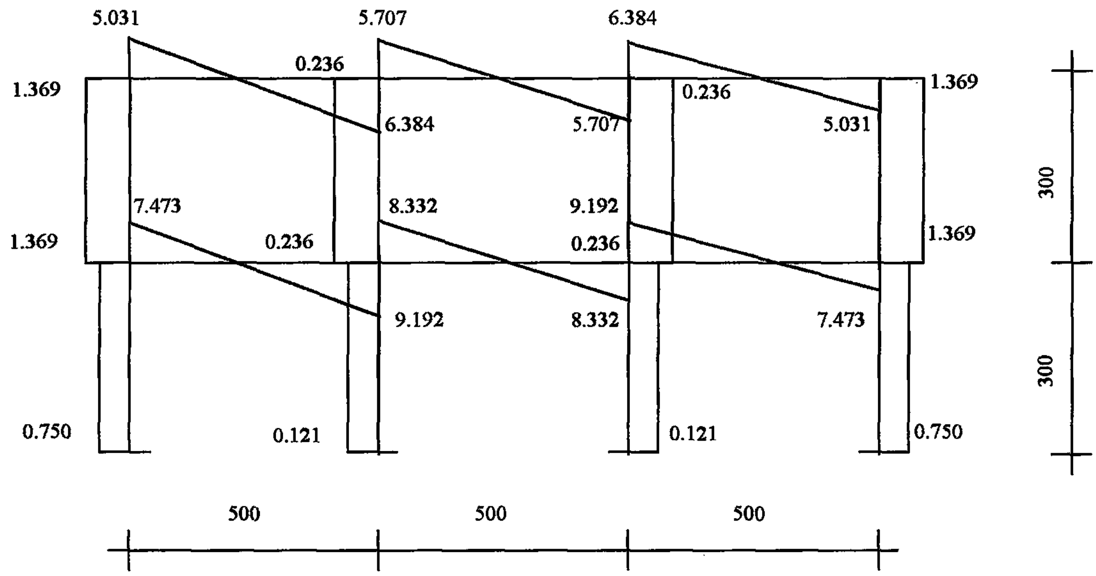
Şekil 4.29 Kármán'ın önerdiği etkili tabla genişliğine göre moment değerleri



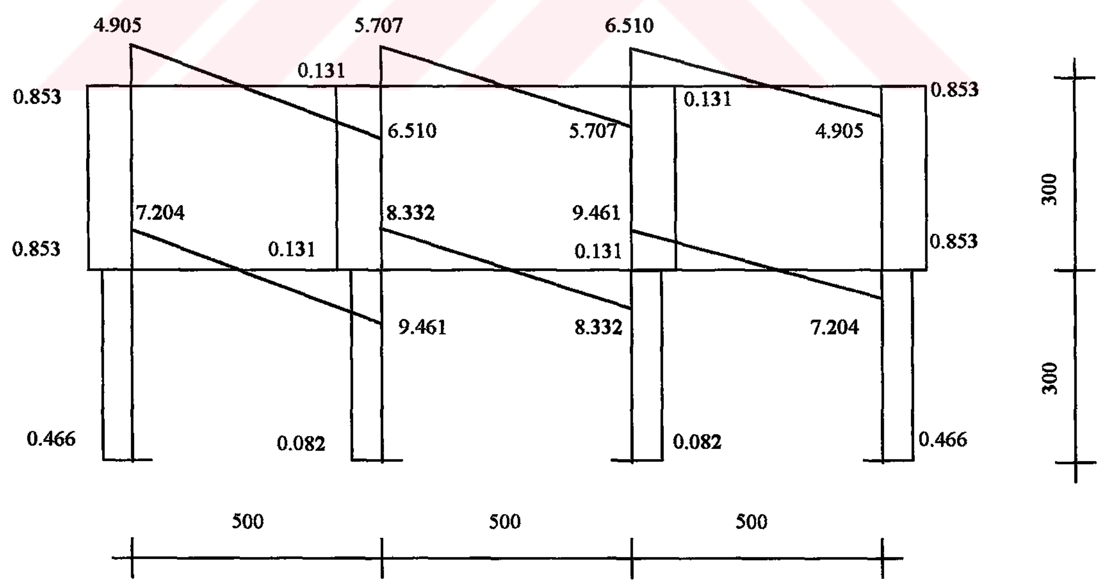
Şekil 4.30 Açıklıkta TS 500'e göre tablalı kesit, mesnet ile moment sıfır noktası arası dikdörtgen kesit kabulü ile elde edilen moment değerleri



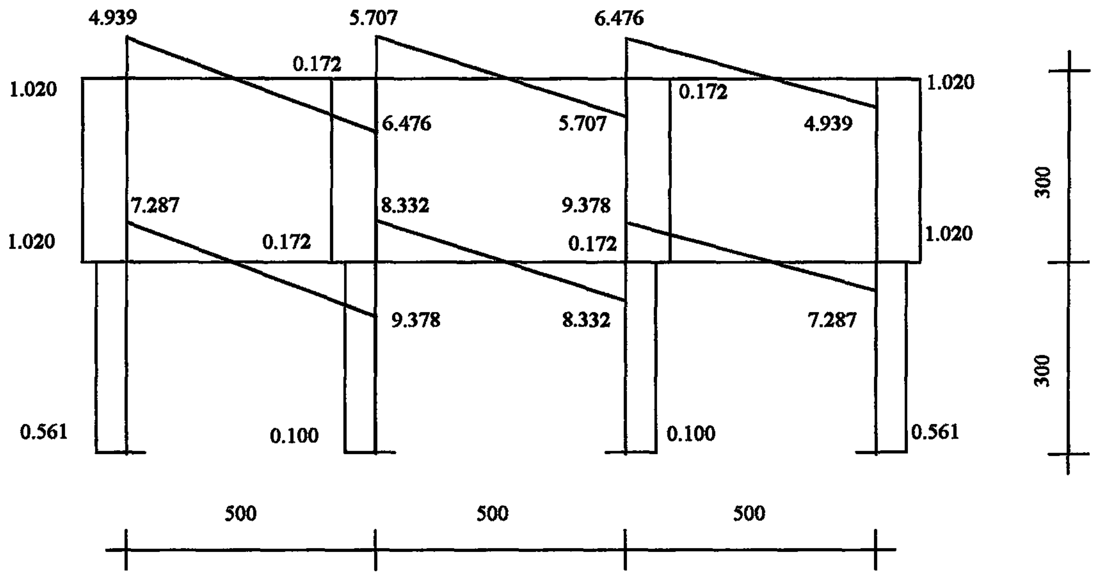
Şekil 4.31 TS 500 den bulunan etkili tabla genişliğine göre kesme kuvveti değerleri



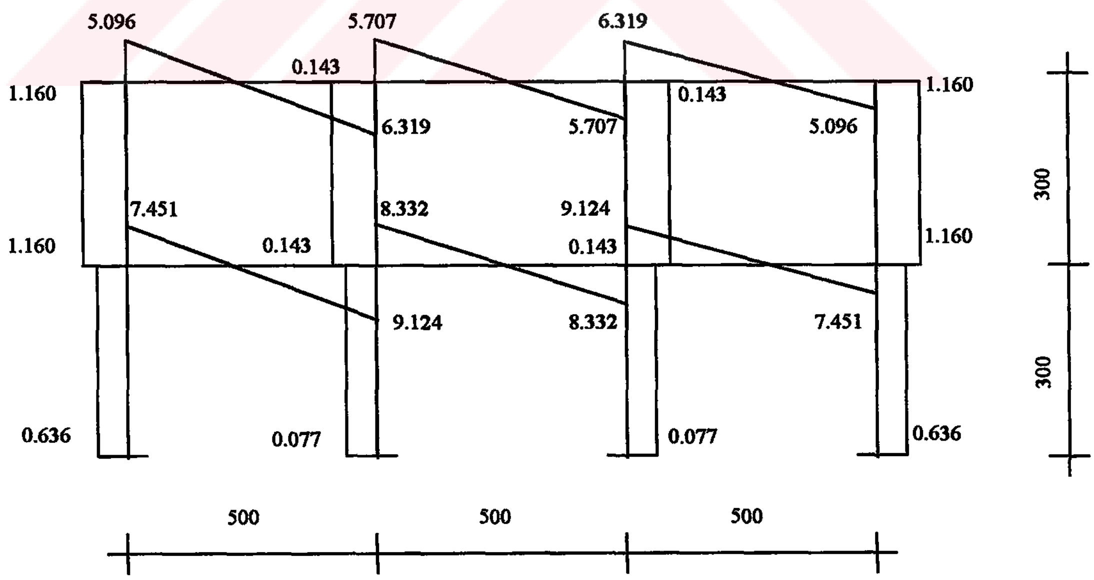
Şekil 4.32 Kirişlerin dikdörtgen kesitli kabul edilmesiyle bulunan kesme kuvveti değerleri



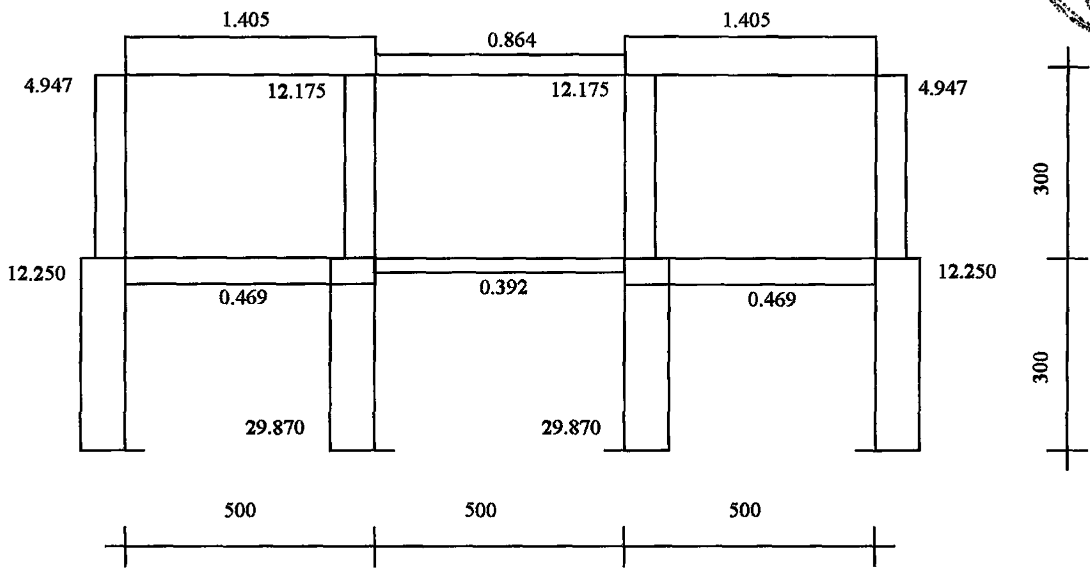
Şekil 4.33 Etkili tabla genişliğinin döşeme ortasından döşeme ortasına kabul edilmesiyle bulunan kesme kuvveti değerleri.



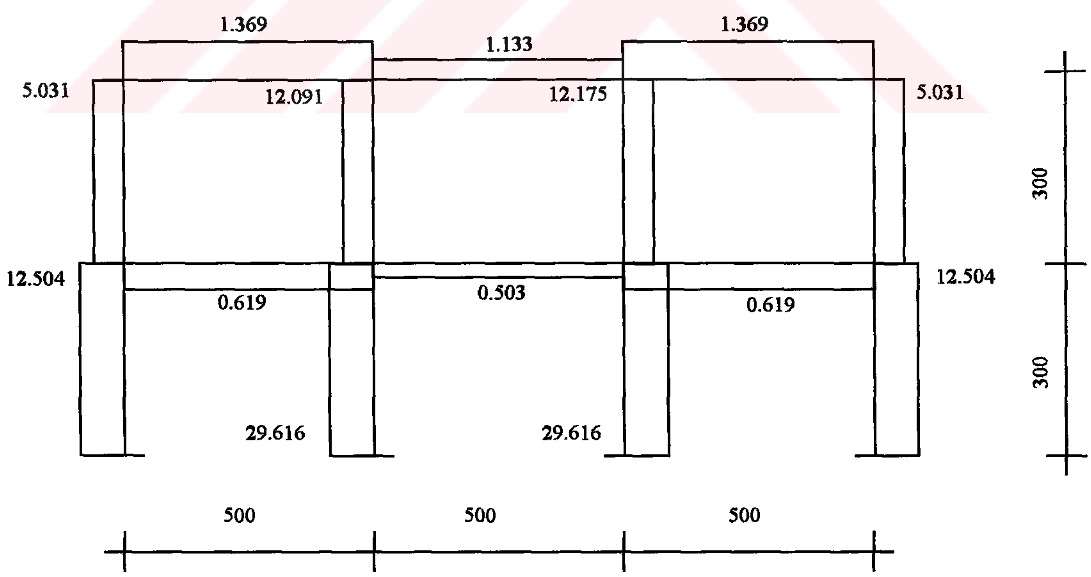
Şekil 4.34 Kármán'ın önerdiği etkili tabla genişliğine göre kesme kuvveti değerleri



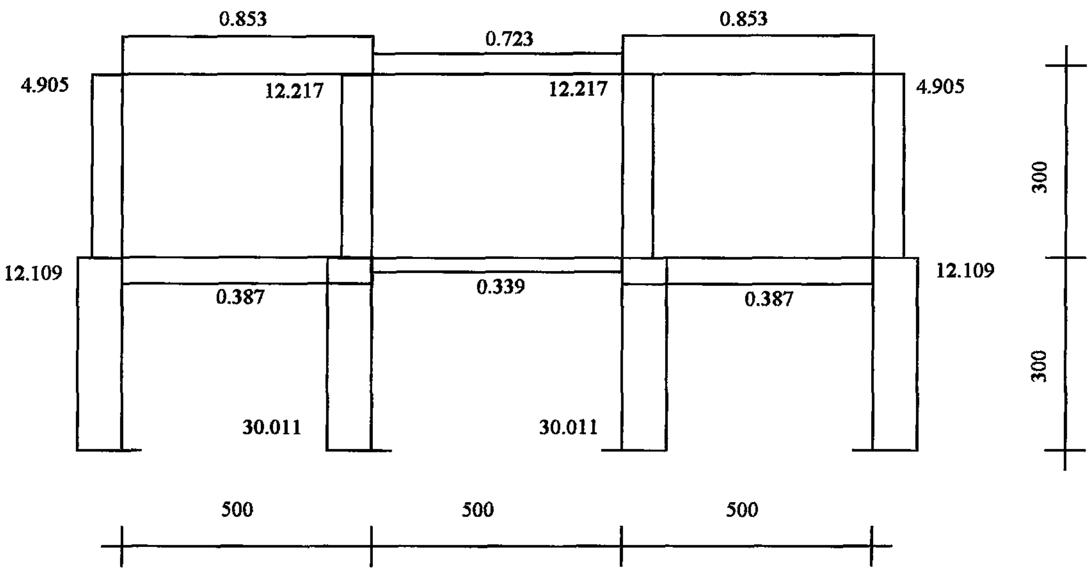
Şekil 4.35 Açıklıkta TS 500'e göre tablalı kesit, mesnet ile moment sıfır noktası arası dikdörtgen kesit kabulü ile elde edilen kesme kuvveti değerleri



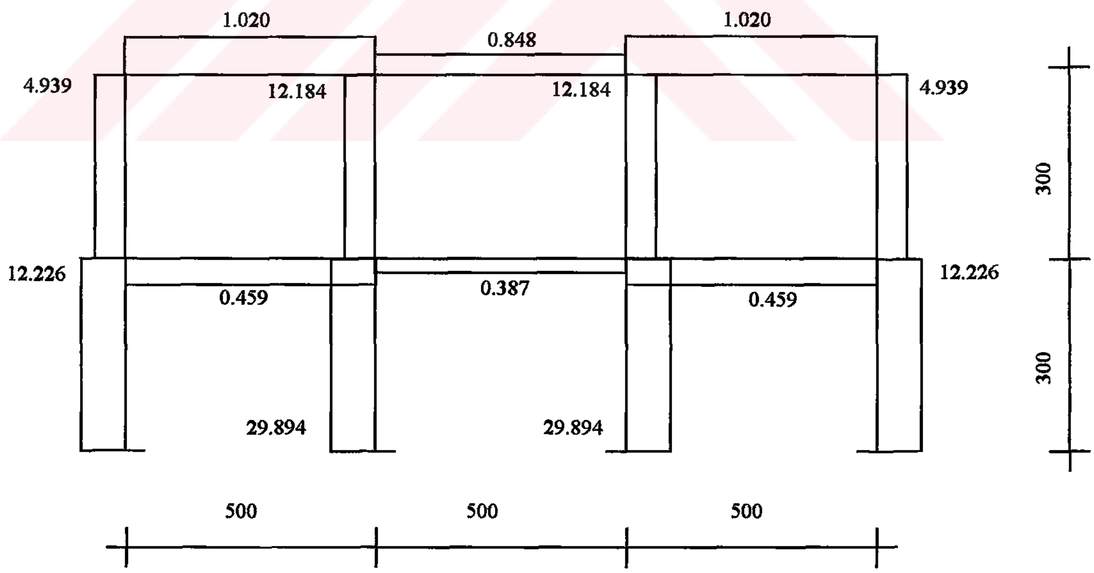
Şekil 4.36 TS 500 den bulunan etkili tabla genişliğine göre normal kuvvet değerleri



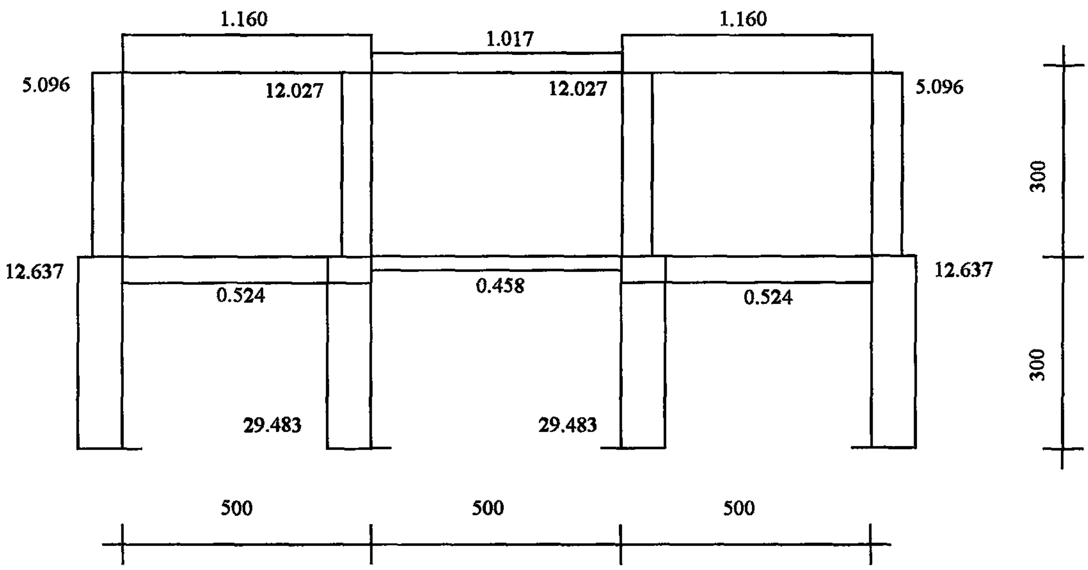
Şekil 4.37 Kirişlerin dikdörtgen kesitli kabul edilmesiyle bulunan normal kuvvet değerleri



Şekil 4.38 Etkili tabla genişliğinin döşeme ortasından döşeme ortasına kabul edilmesiyle bulunan normal kuvvet değerleri.



Şekil 4.39 Kármán'ın önerdiği etkili tabla genişliğine göre kesme kuvveti değerleri



Şekil 4.40 Açıklıkta TS 500'e göre tablalı kesit, mesnet ile moment sıfır noktası arası dikdörtgen kesit kabulü ile elde edilen kesme kuvveti değerleri

Çalışmanın amaç ve kapsamı bölümünde ifade edildiği gibi sadece düşey yükler etkisinde betonarme kesit hesabına esas olacak çalışan tabla genişliği kavramı üzerinde durulmuştur. Bu sebepten düşey yükler etkisinde taşıyıcı sistem kesit tesirleri çerçeve idealleştirmesi yapılarak hesaplanabilmektedir. Yatay yükler etkisi altında taşıyıcı sistem kesit tesirlerinin hesabında kolon rijitlikleri de önem kazandığından çalışan tabla genişliği kavramı farklı bir yaklaşımla ele alınmalıdır [29], [48], [51].

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bugüne kadar yapılan çalışmalarda, çalışan tabla genişliği ifadesi teorik ve deneysel olarak basit mesnetli kirişler için araştırılmıştır. Bu çalışmamızda daha önce yapılmış olan çalışmalarda ele alınan sınır şartlarından farklı olarak kirişlerin kolonlara tam ankastre mesnetli olması durumu ele alınmış, donatı tam aderans kabulü ile modellenmiş, tekil, çizgisel ve düzgün yayılı yük halleri için üç boyutlu sonlu elemanlar kullanılarak elde edilen çözümlerden Tablalı kirişlerin etkili tabla genişliğinin belirlenmesi ile ilgili olarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

Etkili genişliğin, önem sırasına göre yükleme, geometrik parametre ℓ/s ve döşeme gövde rijitliklerinin oranlarının (örneğin d/h_f ve b_w/s) bir fonksiyonu olduğu görülmüştür.

Kirişin tekil yükle yüklenmesi halinde etkili tabla genişliği değeri çizgisel yayılı yükle yüklemeden elde edilen değerden küçük bulunmuştur. Bunun nedeni ise moment diyagramının tüm tepe noktalarında etkili genişlik sınırlandırılmıştır. Gerçek sehim muhtemelen teorik olandan daha küçüktür, çünkü tüm yükler sonlu uzunluğa yayılmış ve bunun sonucunda moment tepe noktaları körlenmiştir. Tekil yüklerde etkili tabla genişliği yükün uygulandığı bölgede daralmakta, yükten uzaklaşıldıkça genişlemektedir.

Kirişlerin tekil yüklemesi durumunda, yükün tatbik noktasının mesnetlere doğru kayması halinde etkili genişlik artmıştır. Çizgisel yük durumunda tersi sözkonusu olmuş ve etkisi çok az olmuştur

Tekil yük uygulamada sınırlı bir alana yayılırken, teoride yük dağılımı çok küçük bir alana (bir noktaya) yapılmıştır ve bunun sonucunda da teorik değerlerle bu konuda yapılmış deneysel sonuçlar arasında farklılık oluşmuştur. Bu yüzden teorik olarak da tekil yük belirli bir alana etkitilmeli, birden fazla düğüm noktasına dağıtılmalıdır.

Tekil yük altında teorik olarak bulunan daralma bu çalışma ile de ispatlanmıştır. Ayrıca tablanın artan yükler altında etkili genişliğinin de arttığı gözlenmiştir.

Tekil yük ile çizgisel yük arasındaki etkili tabla genişliği oranındaki fark, kayma gerilmesinin mesnetten uzaklaştıkça artması-azalmasından kaynaklanmaktadır. Tekil yükün oluşturduğu kayma gerilmesi sabit, çizgisel yükün oluşturduğu kayma gerilmesi ise mesnetten uzaklaştıkça azalan bir yapıya sahiptir.

Açıklığın ortasına tekil yük etkimesi durumunda ise b_e/s büyüklüğü, aynı zamanda kiriş genişliği b_w ile tabla genişliği s arasındaki b_w/s oranına bağlı olarak da değişmektedir.

Kiriş ortasına tekil yük etkimesi hali ile kiriş üzerinde çizgisel yük etkimesi halinde bulunan etkili tabla genişliği arasında önemli bir fark olduğunu görüyoruz. Tekil yük halinde çizgisel yük durumuna göre etkili tabla genişliğinin önemli ölçüde azaldığını görüyoruz. Bunun sebebi kirişin moment diyagramının (çizgilerinin) maksimum olduğu noktalarda incelenmesine bağlıdır.

Teorik olarak kabul edilen tekil yük halinin pratikte hiçbir zaman mümkün olmadığını belirtmek gerekir. Dolayısıyla tekil yükü kirişin belli bir bölümüne eşdeğer yayılı yüke dönüştürmek daha sağlıklı sonuçlar verecektir.

Çizgisel yükler için b_e /b oranının ℓ/b'nin bir fonksiyonu olduğu görülmüştür. Tekil yük olması halinde, başlık ile gövdenin rijitlik oranlarının etkili genişliği etkilediği sonucuna varılmıştır.

Artan l / b oranıyla etkili genişlik artmıştır.

Kiriş kesitinin azalması durumunda tablanın eğilme rijitliği daha büyük oranda etkisini göstereceğinden etkili genişlik b daha da büyük elde edilmiştir.

h_f/d oranının çalışan tabla genişliğine etkisi olmakla birlikte bu tesir ℓ/s oranı ve yükleme şeklinin etkisine göre daha azdır.

Kiriş üzerine yapılan çizgisel yüklemeyle, döşemeye yapılan düzgün yayılı yüklemenin eşdeğer etkili genişlik verdiği ve bu değerin kirişlerin açıklık ortalarına yapılan tekil yüklemeden daha büyük olduğu ortaya çıkmıştır.

Çizgisel yük ile yükleme durumunda, etkili genişlik büyük oranda döşeme gövde rijitlikleri oranından bağımsızdır. Kirişler açıklık ortasındaki tekil yükleme durumunda ise döşeme-gövde rijitliklerinin göreceli oranının etkili genişlik üzerindeki etkisinin çok az olduğu ve d/h_f ve b_w/d oranlarının artmasıyla etkili genişliğin de arttığı ortaya çıkmıştır.

Yük arttıkça etkili genişlik artmış ve bu artış ℓ/s'nin daha küçük değerlerinde daha da belirgin olmuştur.

Döşemelerin bu sınır şartları ile her üç yükleme hali için elde edilen etkili tabla genişliği oranları TS 500'deki oranlardan büyük çıkmıştır. TS 500'deki oranların küçük olması bu noktadaki gerilme değerlerinin büyük çıkması demektir.

T kirişlerde etkili genişliğin büyümesi betonun lineer olmayan şekil değiştirme davranışıyla açıklanabilir. Burada da, tabla içindeki gerilme dağılımı da yükün artması ile birlikte aynı şekilde artmaktadır.

Etkili tabla genişliği ℓ/s ile b_e/s oranları esas alınarak grafik olarak gösterilmiştir. (şekil 4.8, şekil 4.16, şekil 4.24). Yükleme durumunun ve tabla ile kiriş arasındaki rijitlik oranının etkili tabla genişliği üzerine olan etkisi ihmal edilmiştir.

Bir açıklıklı ve iki açıklıklı döşeme sisteminde açıklık ortası için etkili tabla genişliği b_e/s , ℓ/s oranının bir fonksiyonu olarak verilmiştir. Çizgisel yük durumunda, b_e/s ve ℓ/s arasında bir ilişki vardır.

Sürekli kirişlerde de (şekil 4.16, şekil 4.24) verilen grafiği kullanabilmemiz için ℓ yerine ℓ_0 alarak çalışan tabla genişliği b_e hesaplanabilir.

Kiriş rijitliği arttıkça çalışan tabla genişliği de artar.

Basit mesnetli kirişlerde elde edilen tekil ve çizgisel yüke ait çalışan tabla genişliği değerleri mesnetlere kadar elde edildiği halde, döşeme sisteminin kolonlara ankastre mesnetli olması durumunda ise mesnetlere yaklaştıkça çalışan tabla genişliğinden bahsedilemeyeceği görülmüştür.

Mesnetlere yaklaştıkça gerilmeler işaret değiştirdiğinden çalışan tabla genişliği mesnetlere doğru bütün yükleme halleri için sıfır çıkmaktadır. Yani kesit tablalı değil dikdörtgendir.

Etkili tabla genişliğindeki değişim kesit tesirlerine aynı oranda yansımamaktadır.

Donatının çalışan tabla genişliğine etkisinin çok az olduğu görülmüştür. Donatı, gerilmeleri arttırdığını, bu artışa bağlı olarak çalışan tabla genişliğindeki artış %10'nun altında olduğu görülmüştür.

Döşeme sistemlerinin düzgün yayılı yük ile yüklenmesi halinde;

a. Döşeme ve kirişler üzerinde yayılı yükün şiddeti aynı ise çalışan tabla genişliği büyük çıkmaktadır. Buna göre çalışan tabla genişliği döşeme ortasından döşeme ortasına mesafe esas alınabilir.

b- Kirişler üzerindeki yükün şiddeti döşeme yükünün şiddetinden büyükse çalışan tabla genişliği çizgisel yükten elde edilen tabla genişliği esas alınabilir.

Üç boyutlu sonlu elemanlar metodu kullanılarak, donatı ve aderansın modellenmesi ile ardışık yükler altında çizgisel çatlak gelişimi yöntemi ile göçme durumu uygulanarak çözümler yapılması ve bu konu ile ilgili çeşitli sınır şartlarına ait deneylerle sonuçlar alınması bu çalışmanın devamı mahiyetinde olacaktır.

REFERANS LİSTESİ

[1] Bortsch, R., "Die mitwirkende plattenbreite", Bauingenieur 1921, H. 23.

[2] Kármán, Th. V., "Die mittragende Breite", August-Föppl-Festschrift 1924.

[3] Metzer, W., "Die mittragende Breite", Luftfahrtforschung 1929.

[4] Girkman, K., "Spannungsverteilung in geschweiBten Blechtragern", Stahlbau, 1933, H. 12/13.

[5] ReiBner, E., "Überdie Berechnung von plattenbalken", Stahlbau, 1934, H.26.

[6] ReiBner, E., "Beitrag zur Theorie der plattenbalken", Det Kongelige Norske Viderskabers Selskab Forhandlinger Band VIII, Nr. 4.

[7] Chwalla, E., "Die Formeln zur Berechnung der Voll mittragenden Breite dünner Gurt-und Rippenplatten", Stahlbau 1936, H.10.

[8] Dischinger, F., "Massivebau. In schleicher: Taschenbuch für Bauingenieure", Berlin 1943 und folgende Ausgaben.

[9] Bogunovic, V., "Beulung der Gurtplatten von Rippen konstruktionen". Publications de I'Institut Mathematigue de I'Academie Serbe des Sciences. Tome III Belgrad 1950.

[10] Chwalla, E., "Über das Problem der voll mittragenden Breite von Gurt-und Rippenplatten", Alfons-leon-Gedenkschrift. Wien 1952.

[11] Beschkine, L., "Determination de la larguer utile des tables de Compression des poutres", Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau 1937/38, S.65.

[12] Marguerre, K., "Über die Beanspruchung von plattentragern.", Stahlbau 1952, H. 8.

[13] Timoshenko, S., and Goodier, J. N., "Theory of Elasticity", Mc Graw-Hill Co., 1970.

[14] Brendel, G., "Die mitwirkende Plattenbreite nach Theorie und Versuch", Beton und Stahlbetonbau, H.8, 1960.

[15] Rehn, G., "Uber die Grundlagen des Verbundes Zwischen Stahl und Beton", Dafstb, H. 138, 1961.

[16] Leonhardt, F., "Vorlesungen Über Massivbau, Springer Verlag", 1974, Teil I,II;III.

[17] Beton Kalender, Teil I S.359-374, 1995.

[18] Özden, K., "Betonarme I" Cilt I, İ.T.Ü Matbaası, 1978.

[19] TS 500, "Betonarme Yapıların Hesap ve Yapım Kuralları", 1984.

[20] Massiubau König, G., und Wörner, J., Grundlagen I und Konstruktionen I Auflage WS. 1994/95, Eigenverlag, Technische Hochschule Darmstadt., 1993.

[21] DIN 1045 1978.

[22] ACI 318-95, "Building Code Requirements for Structural Concrete", American Concrete Institute.

[23] Wasti, S. T., "Sonlu Eleman Yönteminin Betonarme Yapı Elemanlarına Uygulanması" , İMO Teknik Dergi., Ekim 1990.

[24] Brendel, G., "Strength of the Compression Slab of T-Beams Subject to Simple Bending", Journal of the American Concrete Institute, January, 1964.

[25] Desai, C. S., and Abel, I. F., "Introduction to the Finite Element Method" , Van Nostrand Reinhold Co., 1972.

[26] Kurtay, T., "Sonlu Elemanlar Yöntemine Giriş", İ.T.Ü., 1980.

[27] Berktay, İ., "Betonarme I Taşıma Gücü ve Kesit Hesapları", 1989, İSTANBUL.

[28] Sabnis, G. M., and Lord, W. D, "Investigation of the effective width of reinforced concrete T-beam.", Preprint 2746, Asce Annual Convention and Exposition, Philadelphia, Pa., 1976

[29] Song, Q.-Gen, "Formulas for stress ratio and effective flange width of simple and continuous I,T and box beams." Report No. UCB/SESM-84/11, Div. of struct. Engrg. and Struct. Mech., Dept. of Civ. Engrg., University of California, Berkeley, California., July 1984.

[30] Jackson, N. and Lord, W. D., "Stresses in Wide-Flanged T-Beams", Concrete and Constructional Engineering", June, 1965.

[31] Wieghardt, K., "Über Einen Grenzübergang der Elastizitatslehre und Seine Andewerdung auf die Statik hochgradig Statisch Unbestimter Fachwerke.", 1906.

[32] Hrennikoff, A., "Solution of Problem in Elasticity by the Framework Method" J. Appl. Mech. Vol.8, No.4, 1951.

[33] Courant, R., " Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations", Bull. American. Mat. Soc., 1943.

[34] Levy, S., "Structural Analysis and Influence Coefficents for Delta Wings", J. Aero. Sci. Vol.23, 1953.

[35] Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., TOPP, L. J., "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures" , J. Aero. Sci. Vol. 23, 1956.

[36] Argyris, J. H., Kelsey, S:, "Energy Theorems and Structural Analysis", 1955, Aircraft Engineering.

[37] Zienkiewicz, O. C., "The Finite Element Method in Engineering Science", Mc Graw- Hill, 1977.

[38] Adini, A., Clough, R. W., "Analysis of Plate Bending By the Finite Elements Method", NASA,6.7377,1961.

[39] Nath, B., "Fundamentals of Finite Elements for Engineers" Athlone Press, 1974.

[40] İren, M., "Çeşitli Yükler Altında Kalan Makina Parçalarının Modellenmesi ve Analizi", Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa, 1989 (Doktora Tezi).

[41] Reddy, J. N., "An Introduction to the Finite Element Method", Mc Graw-Hill Co., 1984.

[42] Weaver., Jr. W., and Oakberg, R. R., "Finite Elements for Structural Analysis", Prentice-Hall, inc. 1984.

[43] Saylan, Ş., "Sonlu Elemanlar Metodu İle Çözümde Eleman Seçiminin Önemi", II. Balıkesir Mühendislik Sempozyumu, 1991.

[44] Prezemieniecki, J.S., "Theory of Matrix Structural Analysis", Mc Graw-Hill Co., 1968.

[45] Gallagher, R. H., and Mc Guire, W., "Matrix Structural Analysis", John Wiley, 1979.

[46] Chu-Kia Wag–Charles G.Salmon, "Reinforced Concrete Design", Second Edition. 1973 by Intext Press. Inc. Newyork, N.Y. 10019.

[47] Kenneth Leet, , "Reinforced Concrete Design",Mc Graw-Hill, İnc., 1991.

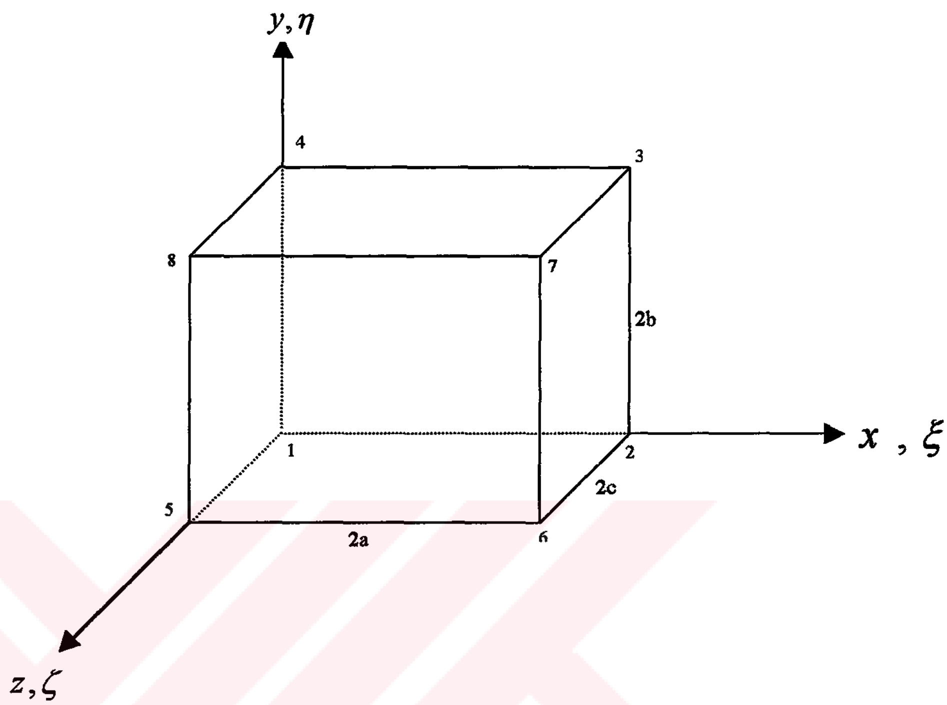
[48] Norio Suzuki, Shunsuke Otani , Hiroyuki Aoyama, "The Effective Width of Slabs in Reinforced Concrete Structures", Transactions of the Japan Concrete Institute . vol.5, 1983.

[49] Tirupathı. R. Chandropatla, Ashok. D. Belegundu, "Introduction to the Finite Elements in Engineering", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.

[50] Allen, D.N. and Severn, R. T., "Composite Action of Slabs and Beams Under Transverse Load", The Structural Engineer (London) ,May, 1961, p. 149-154.

[51] Ünlüoğlu, E., "Kirişsiz Döşemeli Sistemlerde Yatay Kuvvetler Etkisi Altında Rijitlik Değerlerinin Araştırılması", Anadolu Üniversitesi Basımevi, Eskişehir, 1989.

EK 1 DİKDÖRTGEN PRİZMA ELEMAN VE RİJİTLİK MATRİSİ



Ek 1-1 Dikdörtgen Prizma Eleman Rijitlik Matrisi

$$[K]=\frac{a\cdot b\cdot c\cdot E}{(1+\nu)\cdot e_2}\cdot\left[\begin{array}{c|c}[K_{A,B}] & [K_{C,D}]^T \\ \hline [K_{C,D}] & [K_{E,F}]\end{array}\right]_{24x24} \qquad \text{(E-1)}$$

Tablo E-1. (E-1) Denkleminde görülen sembollerin ifadeleri

i	ρ_i	β_i	γ_i
1	$\frac{2}{9}\left(\frac{e_1}{a^2}+\frac{e_3}{b^2}+\frac{e_3}{c^2}\right)$	———	———
2	$\frac{\nu+e_3}{6\cdot a\cdot b}$	$\frac{2}{9}\left(\frac{e_3}{a^2}+\frac{e_1}{b^2}+\frac{e_3}{c^2}\right)$	———
3	$\frac{\nu+e_3}{6\cdot a\cdot c}$	$\frac{\nu+e_3}{6\cdot b\cdot c}$	$\frac{2}{9}\left(\frac{e_3}{a^2}+\frac{e_3}{b^2}+\frac{e_1}{c^2}\right)$
4	$\frac{1}{9}\left(-\frac{2e_1}{a^2}+\frac{e_3}{b^2}+\frac{e_3}{c^2}\right)$	———	———
5	$\frac{\nu-e_3}{6\cdot a\cdot b}$	$\frac{1}{9}\left(-\frac{2e_3}{a^2}+\frac{e_1}{b^2}+\frac{e_3}{c^2}\right)$	———
6	$\frac{\nu-e_3}{6\cdot a\cdot c}$	$\frac{\nu+e_3}{12\cdot b\cdot c}$	$\frac{1}{9}\left(-\frac{2e_3}{a^2}+\frac{e_3}{b^2}+\frac{e_1}{c^2}\right)$
7	$-\frac{1}{18}\left(\frac{2e_1}{a^2}+\frac{2e_3}{b^2}-\frac{e_3}{c^2}\right)$	———	———
8	———	$-\frac{1}{18}\left(\frac{2e_3}{a^2}+\frac{2e_1}{b^2}-\frac{e_3}{c^2}\right)$	———
9	$\frac{\nu-e_3}{12\cdot a\cdot c}$	$\frac{\nu-e_3}{12\cdot b\cdot c}$	$-\frac{1}{18}\left(\frac{2e_3}{a^2}+\frac{2e_3}{b^2}-\frac{e_1}{c^2}\right)$
10	$-\frac{1}{9}\left(-\frac{e_1}{a^2}+\frac{2e_3}{b^2}-\frac{e_3}{c^2}\right)$	———	———
11	———	$-\frac{1}{9}\left(-\frac{e_3}{a^2}+\frac{2e_1}{b^2}-\frac{e_3}{c^2}\right)$	———
12	$\frac{\nu+e_3}{12\cdot a\cdot c}$	$\frac{\nu-e_3}{6\cdot b\cdot c}$	$-\frac{1}{9}\left(-\frac{e_3}{a^2}+\frac{2e_3}{b^2}-\frac{e_1}{c^2}\right)$
13	$\frac{1}{9}\left(\frac{e_1}{a^2}+\frac{e_3}{b^2}-\frac{2e_3}{c^2}\right)$	———	———
14	$\frac{\nu+e_3}{12\cdot a\cdot b}$	$\frac{1}{9}\left(\frac{e_3}{a^2}+\frac{e_1}{b^2}-\frac{2e_3}{c^2}\right)$	———
15	———	———	$\frac{1}{9}\left(\frac{e_3}{a^2}+\frac{e_3}{b^2}-\frac{2e_1}{c^2}\right)$
16	$\frac{1}{18}\left(-\frac{2e_1}{a^2}+\frac{e_3}{b^2}-\frac{2e_3}{c^2}\right)$	———	———
17	$\frac{\nu-e_3}{12\cdot a\cdot b}$	$\frac{1}{18}\left(-\frac{2e_3}{a^2}+\frac{e_1}{b^2}-\frac{2e_3}{c^2}\right)$	———
18	———	———	$\frac{1}{18}\left(-\frac{2e_3}{a^2}+\frac{e_3}{b^2}-\frac{2e_1}{c^2}\right)$
19	$-\frac{1}{18}\left(\frac{e_1}{a^2}+\frac{e_3}{b^2}+\frac{e_3}{c^2}\right)$	———	———
20	———	$-\frac{1}{18}\left(\frac{e_3}{a^2}+\frac{e_1}{b^2}+\frac{e_3}{c^2}\right)$	———
21	———	———	$-\frac{1}{18}\left(\frac{e_3}{a^2}+\frac{e_3}{b^2}+\frac{e_1}{c^2}\right)$
22	$-\frac{1}{18}\left(-\frac{e_1}{a^2}+\frac{2e_3}{b^2}+\frac{2e_3}{c^2}\right)$	———	———
23	———	$-\frac{1}{18}\left(-\frac{e_3}{a^2}+\frac{2e_1}{b^2}+\frac{2e_3}{c^2}\right)$	———
24	———	———	$-\frac{1}{18}\left(-\frac{e_3}{a^2}+\frac{2e_3}{b^2}+\frac{2e_1}{c^2}\right)$

$$\mathbf{e}_1 = 1-\nu, \quad \mathbf{e}_2 = 1-2\nu, \quad \mathbf{e}_3 = 1-2\nu/2$$

$$
\left[K_{A,B}\right] = \begin{bmatrix}
K_{1,1} & & & & & & & & & & & \\
K_{2,1} & K_{2,2} & & & & & & & & & & \\
K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} & & & & & & \text{simetrik} & & & \\
K_{4,1} & K_{4,2} & K_{4,3} & K_{4,4} & & & & & & & & \\
K_{5,1} & K_{5,2} & K_{5,3} & K_{5,4} & K_{5,5} & & & & & & & \\
K_{6,1} & K_{6,2} & K_{6,3} & K_{6,4} & K_{6,5} & K_{6,6} & & & & & & \\
K_{7,1} & K_{7,2} & K_{7,3} & K_{7,4} & K_{7,5} & K_{7,6} & K_{7,7} & & & & & \\
K_{8,1} & K_{8,2} & K_{8,3} & K_{8,4} & K_{8,5} & K_{8,6} & K_{8,7} & K_{8,8} & & & & \\
K_{9,1} & K_{9,2} & K_{9,3} & K_{9,4} & K_{9,5} & K_{9,6} & K_{9,7} & K_{9,8} & K_{9,9} & & & \\
K_{10,1} & K_{10,2} & K_{10,3} & K_{10,4} & K_{10,5} & K_{10,6} & K_{10,7} & K_{10,8} & K_{10,9} & K_{10,10} & & \\
K_{11,1} & K_{11,2} & K_{11,3} & K_{11,4} & K_{11,5} & K_{11,6} & K_{11,7} & K_{11,8} & K_{11,9} & K_{11,10} & K_{11,11} & \\
K_{12,1} & K_{12,2} & K_{12,3} & K_{12,4} & K_{12,5} & K_{12,6} & K_{12,7} & K_{12,8} & K_{12,9} & K_{12,10} & K_{12,11} & K_{12,12}
\end{bmatrix}_{\mathbf{12x12}}
$$

$$
\left[K_{A,B}\right] = \begin{bmatrix}
\rho_1 & & & & & & & & & & & \\
\rho_2 & \beta_2 & & & & & & & & & & \\
\rho_3 & \beta_3 & \gamma_3 & & & & & & \text{simetrik} & & & \\
\rho_4 & -\rho_5 & -\rho_6 & \rho_1 & & & & & & & & \\
\rho_5 & \beta_5 & -\beta_6 & -\rho_2 & \beta_2 & & & & & & & \\
\rho_6 & \beta_6 & \gamma_6 & -\rho_3 & \beta_3 & \gamma_3 & & & & & & \\
\rho_7 & -\rho_2 & -\rho_9 & \rho_{10} & -\rho_5 & -\rho_{12} & \rho_1 & & & & & \\
-\rho_2 & \beta_8 & -\beta_9 & \rho_5 & \beta_{11} & -\beta_{12} & \rho_2 & \beta_2 & & & & \\
\rho_9 & \beta_9 & \gamma_9 & -\rho_{12} & \beta_{12} & -\gamma_{12} & -\rho_3 & -\beta_3 & \gamma_3 & & & \\
\rho_{10} & \rho_5 & \rho_{12} & \rho_7 & \rho_2 & \rho_9 & \rho_4 & -\rho_5 & \rho_6 & \rho_1 & & \\
-\rho_5 & \beta_{11} & -\beta_{12} & \rho_2 & \beta_8 & -\beta_9 & \rho_5 & \beta_5 & -\beta_6 & -\rho_2 & \beta_2 & \\
\rho_{12} & \beta_{12} & \gamma_{12} & -\rho_9 & \beta_9 & \gamma_9 & -\rho_6 & -\beta_6 & \gamma_6 & \rho_3 & -\beta_3 & \gamma_3
\end{bmatrix}_{\mathbf{12x12}}
$$

$$
\left[K_{E,F}\right]=\begin{bmatrix}
K_{13,1} & K_{13,2} & K_{13,3} & K_{13,4} & K_{13,5} & K_{13,6} & K_{13,7} & K_{13,8} & K_{13,9} & K_{13,10} & K_{13,11} & K_{13,12} \\
K_{14,1} & K_{14,2} & K_{14,3} & K_{14,4} & K_{14,5} & K_{14,6} & K_{14,7} & K_{14,8} & K_{14,9} & K_{14,10} & K_{14,11} & K_{14,12} \\
K_{15,1} & K_{15,2} & K_{15,3} & K_{15,4} & K_{15,5} & K_{15,6} & K_{15,7} & K_{15,8} & K_{15,9} & K_{15,10} & K_{15,11} & K_{15,12} \\
K_{16,1} & K_{16,2} & K_{16,3} & K_{16,4} & K_{16,5} & K_{16,6} & K_{16,7} & K_{16,8} & K_{16,9} & K_{16,10} & K_{16,11} & K_{16,12} \\
K_{17,1} & K_{17,2} & K_{17,3} & K_{17,4} & K_{17,5} & K_{17,6} & K_{17,7} & K_{17,8} & K_{17,9} & K_{17,10} & K_{17,11} & K_{17,12} \\
K_{18,1} & K_{18,2} & K_{18,3} & K_{18,4} & K_{18,5} & K_{18,6} & K_{18,7} & K_{18,8} & K_{18,9} & K_{18,10} & K_{18,11} & K_{18,12} \\
K_{19,1} & K_{19,2} & K_{19,3} & K_{19,4} & K_{19,5} & K_{19,6} & K_{19,7} & K_{19,8} & K_{19,9} & K_{19,10} & K_{19,11} & K_{19,12} \\
K_{20,1} & K_{20,2} & K_{20,3} & K_{20,4} & K_{20,5} & K_{20,6} & K_{20,7} & K_{20,8} & K_{20,9} & K_{20,10} & K_{20,11} & K_{20,12} \\
K_{21,1} & K_{21,2} & K_{21,3} & K_{21,4} & K_{21,5} & K_{21,6} & K_{21,7} & K_{21,8} & K_{21,9} & K_{21,10} & K_{21,11} & K_{21,12} \\
K_{22,1} & K_{22,2} & K_{22,3} & K_{22,4} & K_{22,5} & K_{22,6} & K_{22,7} & K_{22,8} & K_{22,9} & K_{22,10} & K_{22,11} & K_{22,12} \\
K_{23,1} & K_{23,2} & K_{23,3} & K_{23,4} & K_{23,5} & K_{23,6} & K_{23,7} & K_{23,8} & K_{23,9} & K_{23,10} & K_{23,11} & K_{23,12} \\
K_{24,1} & K_{24,2} & K_{24,3} & K_{24,4} & K_{24,5} & K_{24,6} & K_{24,7} & K_{24,8} & K_{24,9} & K_{24,10} & K_{24,11} & K_{24,12}
\end{bmatrix}_{12\mathrm{x}12}
$$

$$
\left[K_{E,F}\right]=\begin{bmatrix}
\rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{6} & \rho_{16} & \rho_{17} & \rho_{3} & \rho_{19} & -\rho_{14} & \rho_{12} & \rho_{22} & -\rho_{17} & \rho_{9} \\
\rho_{14} & \beta_{14} & \beta_{12} & -\rho_{17} & \beta_{17} & \beta_{9} & -\rho_{14} & \beta_{20} & \beta_{6} & \rho_{17} & \beta_{23} & \beta_{3} \\
-\rho_{6} & -\beta_{12} & \gamma_{15} & \rho_{3} & -\beta_{9} & \gamma_{18} & \rho_{12} & \beta_{6} & \gamma_{21} & -\rho_{9} & \beta_{3} & \gamma_{24} \\
\rho_{16} & -\rho_{17} & -\rho_{3} & \rho_{13} & -\rho_{14} & -\rho_{6} & \rho_{22} & \rho_{17} & -\rho_{9} & \rho_{19} & \rho_{14} & -\rho_{12} \\
\rho_{17} & \beta_{17} & \beta_{9} & -\rho_{14} & \beta_{14} & \beta_{12} & -\rho_{17} & \beta_{23} & \beta_{3} & \rho_{14} & \beta_{20} & \beta_{6} \\
-\rho_{3} & -\beta_{9} & \gamma_{18} & \rho_{6} & -\beta_{12} & \gamma_{15} & \rho_{9} & \beta_{3} & \gamma_{24} & -\rho_{12} & \beta_{6} & \gamma_{21} \\
\rho_{19} & -\rho_{14} & -\rho_{12} & \rho_{22} & -\rho_{17} & -\rho_{9} & \rho_{13} & \rho_{14} & -\rho_{6} & \rho_{16} & -\rho_{17} & -\rho_{3} \\
-\rho_{14} & \beta_{20} & -\beta_{6} & \rho_{17} & \beta_{23} & -\beta_{3} & \rho_{14} & \beta_{14} & -\beta_{12} & -\rho_{17} & \beta_{17} & -\beta_{9} \\
-\rho_{12} & -\beta_{6} & \gamma_{21} & \rho_{9} & -\beta_{3} & \gamma_{24} & \rho_{5} & \beta_{12} & \gamma_{15} & -\rho_{3} & \beta_{9} & \gamma_{18} \\
\rho_{22} & \rho_{17} & \rho_{9} & \rho_{19} & \rho_{14} & \rho_{12} & \rho_{16} & -\rho_{17} & \rho_{3} & \rho_{13} & -\rho_{14} & \rho_{6} \\
-\rho_{17} & \beta_{23} & -\beta_{3} & \rho_{14} & \beta_{20} & -\beta_{6} & \rho_{17} & \beta_{17} & -\beta_{9} & -\rho_{14} & \beta_{14} & -\beta_{12} \\
-\rho_{9} & -\beta_{3} & \gamma_{24} & \rho_{12} & -\beta_{6} & \gamma_{21} & \rho_{3} & \beta_{9} & \gamma_{18} & -\rho_{6} & \beta_{12} & \gamma_{15}
\end{bmatrix}_{12\mathrm{x}12}
$$

$$
\left[K_{G,H}\right]=\begin{bmatrix}
K_{13,13} & & & & & & & & & & & \\
K_{14,13} & K_{14,14} & & & & & & & & & & \\
K_{15,13} & K_{15,14} & K_{15,15} & & & & & & \text{simetrik} & & & \\
K_{16,13} & K_{16,14} & K_{16,15} & K_{16,16} & & & & & & & & \\
K_{17,13} & K_{17,14} & K_{17,15} & K_{17,16} & K_{17,17} & & & & & & & \\
K_{18,13} & K_{18,14} & K_{18,15} & K_{18,16} & K_{18,17} & K_{18,18} & & & & & & \\
K_{19,13} & K_{19,14} & K_{19,15} & K_{19,16} & K_{19,17} & K_{19,18} & K_{19,19} & & & & & \\
K_{20,13} & K_{20,14} & K_{20,15} & K_{20,16} & K_{20,17} & K_{20,18} & K_{20,19} & K_{20,20} & & & & \\
K_{21,13} & K_{21,14} & K_{21,15} & K_{21,16} & K_{21,17} & K_{21,18} & K_{21,19} & K_{21,20} & K_{21,21} & & & \\
K_{22,13} & K_{22,14} & K_{22,15} & K_{22,16} & K_{22,17} & K_{22,18} & K_{22,19} & K_{22,20} & K_{22,21} & K_{22,22} & & \\
K_{23,13} & K_{23,14} & K_{23,15} & K_{23,16} & K_{23,17} & K_{23,18} & K_{23,19} & K_{23,20} & K_{23,21} & K_{23,22} & K_{23,23} & \\
K_{24,13} & K_{24,14} & K_{24,15} & K_{24,16} & K_{24,17} & K_{24,18} & K_{24,19} & K_{24,20} & K_{24,21} & K_{24,22} & K_{24,23} & K_{24,24}
\end{bmatrix}_{12x12}
$$

$$
\left[K_{G,H}\right]=\begin{bmatrix}
\rho_1 & & & & & & & & & & & \\
\rho_2 & \beta_2 & & & & & & & & & & \\
-\rho_3 & -\beta_3 & \gamma_3 & & & & & \text{simetrik} & & & & \\
\rho_4 & -\rho_5 & \rho_6 & \rho_1 & & & & & & & & \\
\rho_5 & \beta_5 & -\beta_6 & -\rho_2 & \beta_2 & & & & & & & \\
-\rho_6 & -\beta_6 & \gamma_6 & \rho_3 & -\beta_3 & \gamma_3 & & & & & & \\
\rho_7 & -\rho_2 & \rho_9 & \rho_{10} & -\rho_5 & \rho_{12} & \rho_1 & & & & & \\
-\rho_2 & \beta_8 & \beta_9 & \rho_5 & \beta_{11} & \beta_{12} & \rho_2 & \beta_2 & & & & \\
-\rho_9 & -\beta_9 & \gamma_9 & \rho_{12} & -\beta_{12} & \gamma_{12} & \rho_3 & \beta_3 & \gamma_3 & & & \\
\rho_{10} & \rho_5 & -\rho_{12} & \rho_7 & \rho_2 & -\rho_9 & \rho_4 & -\rho_5 & -\rho_6 & \rho_1 & & \\
-\rho_5 & \beta_{11} & \beta_{12} & \rho_2 & \beta_8 & \beta_9 & \rho_5 & \beta_5 & \beta_6 & -\rho_2 & \beta_2 & \\
-\rho_{12} & -\beta_{12} & \gamma_{12} & \rho_9 & -\beta_9 & \gamma_9 & \rho_6 & \beta_6 & \gamma_6 & -\rho_3 & \beta_3 & \gamma_3
\end{bmatrix}_{12x12}
$$