T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FABER POLİNOMLARI VE ONLARIN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ali GÜVEN

98341

Balıkesir, 2000

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FABER POLİNOMLARI VE ONLARIN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ali GÜVEN

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV

Sınav Tarihi : 02. 05. 2000
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Daniyal Mehmetoğlu İsrafilov
Prof. Dr. Turgut Başkan
Doç. Dr. İsmail Naci Cangül

Balıkesir, 2000

ÖZET

FABER POLİNOMLARI VE ONLARIN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ
Ali GÜVEN
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı : Prof.Dr. Daniyal M. İsrafilov)
Balıkesir, 2000

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, önce ilerideki bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar, gösterimler ve teoremler verilmiş, daha sonra yaklaşımın incelendiği ağırlıklı Bergman uzayları tanımlanmış, yaklaşımın derecesi ve en iyi yaklaşım polinomu ile ilgili gereken bilgiler verilmiştir. Bölümün son kısmında, yaklaşım teorisinde kvazikonform dönüşümler teorisinin kullanılması ile yeni uygulama boyutu kazanan kvazikonform eğriler ve kvazikonform yansımalar tanımlanmıştır.

İkinci bölümde yaklaşım teorisinde yaklaşan polinomların inşası için vazgeçilmez bir obje haline gelmiş olan Faber polinomları ve genelleştirilmiş Faber polinomları incelenmiştir. İlk önce , Faber ve genelleştirilmiş Faber polinomlarının asimptotik özellikleri araştırılmıştır. Bu bölümün son kısmında Faber serileri ve genelleştirilmiş Faber serilerinin yaklaşım özellikleri, karmaşık düzlemin basit bağlantılı bölgelerinde incelenmiştir.

Son bölümde, kvazikonform sınırlı bölgelerde geçerli olan, analitik fonksiyonların bölge üzerinden bir integral gösteriminin doğurduğu genelleştirilmiş Faber serilerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bu bölümde önce bazı gerekli yardımcı sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra ağırlıklı Bergman uzaylarında genelleştirilmiş Faber serilerinin yaklaşım özellikleri ve teklik problemleri incelenmiş ve yaklaşım hatası değerlendirilmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER : ağırlıklı Bergman uzayı / kvazikonform yansıma / yaklaşımın derecesi / Faber polinomu / genelleştirilmiş Faber polinomu / Faber serisi / genelleştirilmiş Faber serisi

ABSTRACT

FABER POLYNOMIALS AND THEIR APPROXIMATION PROPERTIES

Ali GÜVEN

Balıkesir University, Institue of Science, Department of Mathematics

(M.Sc. Thesis/Supervisor : Prof.Dr. Daniyal M. İsrafilov)

Balıkesir-Türkiye, 2000

This work consists of three chapters.

In the first chapter, basic definitions, notations and theorems which are used in the following two chapters are given. After that, the weighted Bergman spaces, in which the approximation is investigated, are defined, and the necessary information about the degree of approximation and the best approximant polynomial are given. At the final part of the chapter, quasiconformal curves and quasiconformal reflections used in the approximation theory by means of quasiconformal mapping theory are given.

In the second chapter, Faber polynomials and generalized Faber polynomials which has been used without alternative in the construction of approximant polynomials in approximation theory are investigated. Firstly, asymptotic properties of Faber and generalized Faber polynomials are investigated. Secondly, approximation properties of Faber and the generalized Faber series are considered in the simply connected regions in the complex plane.

In the final chapter, the approximation properties of generalized Faber series which are generated by an integral representation over a region, which is valid for bounded regions with quasiconformal boundary are investigated. Firstly, some necessary lemmas are obtained and then the approximation properties and uniqueness problems of the generalized Faber series and the error of approximation in the weighted Bergman spaces are given.

KEY WORDS : weighted Bergman space / quasiconformal reflection / degree of approximation / Faber polynomial / generalized Faber polynomial / Faber series / generalized Faber series

İÇİNDEKİLER Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Simge	Adı
$\mathbf{C}$	Karmaşık Sayılar Kümesi
$\overline{\mathbf{C}}$	Genişletilmiş Karmaşık Sayılar Kümesi
$\mathbf{D}$	$\{z\in \mathbf{C} : \lvert z\rvert<1\}$ kümesi (açık birim disk)
$D(z_0,r)$	$\{z\in \mathbf{C} : \lvert z-z_0\rvert < r\}$ kümesi
$\overline{D}(z_0,r)$	$\{z\in \mathbf{C} : \lvert z-z_0\rvert \le r\}$ kümesi
$d\sigma_z$	Alan diferansiyeli
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
$\overset{\circ}{A}$	A kümesinin içi
∂A	A kümesinin sınırı
CA	$\overline{\mathbf{C}}-A$ (A kümesinin tümleyeni)
$l(\Gamma)$	Γ eğrisinin uzunluğu

ÖNSÖZ

İleride devam etmesini istediğim, Faber polinomları ve Faber serilerini konu alan bu çalışmam boyunca bana zamanını ayıran ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Daniyal M. İsrafilov'a teşekkürlerimi sunarım.

Matematiği bana sevdiren ve yetişmemde büyük emeği olan, değerli hocalarım Prof. Dr. Seyit Ahmet Kılıç, Prof.Dr.Turgut Başkan ve Prof. Dr. Musa Erdem'e teşekkür ederim.

Ayrıca, türlü zorluklara katlanarak beni okutan annem ve babama teşekkürlerimi sunarım.

Balıkesir, 2000 Ali Güven

1. ÖN BİLGİLER

1.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu kısımdaki bilgiler, [3], [7], [8], [11], [12], [13] ve [15] numaralı kaynaklardan alınmıştır.

1.1.1 Tanım: Karmaşık düzlemde, bağlantılı ve kapalı bir kümeye kontinyum, bağlantılı ve açık bir kümeye de bölge denir [13, s: 1].

1.1.2 Tanım: Γ karmaşık düzlemde bir eğri olsun. Eğer bir C çemberini Γ'ya resmeden ve C çemberinin bir komşuluğunda konform olan bir dönüşüm varsa Γ eğrisine analitik eğri denir [11, s: 20]. Eğer Γ eğrisi bir çembere homeomorfik ise, Γ'ya Jordan eğrisi denir [13, s: 2].

Tanımdan görüldüğü gibi her analitik eğri bir Jordan eğrisidir.

1.1.3 Teorem: Eğer bir G bölgesinin sınırı analitik bir eğri ise, G bölgesinin $\mathbf{D}$'ye her konform dönüşümü, $\overline{G}$'yi kapsayan belirli bir bölgeye birebir ve analitik olarak genişletilebilir. Aynı şekilde G'nin sınırı analitik eğri ise, $C\overline{G}$ bölgesinin $C\overline{\mathbf{D}}$'ye olan her konform dönüşümü CG'yi kapsayan bir bölgeye birebir ve analitik olarak genişletilebilir [13, s: 41].

1.1.4 Teorem: Eğer bir G bölgesinin sınırı bir Jordan eğrisi ise, G'nin $\mathbf{D}$'ye her konform dönüşümü $\overline{G}$'ye birebir ve sürekli olarak genişletilebilir. Aynı şekilde, G'nin sınırı bir Jordan eğrisi ise, $C\overline{G}$'nin $C\overline{\mathbf{D}}$'ye olan her konform dönüşümü CG'ye birebir ve sürekli olarak genişletilebilir [13, s: 24].

1.1.5 Teorem(Riemann Dönüşüm Teoremi): $G\subset\mathbf{C}$ sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0\in G$ olsun. Bu durumda, G bölgesini $\mathbf{D}$'ye,

$$f(z_0) = 0 \text{ ve } f'(z_0) > 0$$

koşulları altında resmeden bir tek f konform dönüşümü vardır [12, s: 8].

1.1.6 Teorem: $E \subset C$ en az iki noktadan oluşan, bağlantılı tümleyene sahip, sınırlı bir kontinyum olsun. Bu durumda, CE bölgesini $C\overline{D}$'ye

$$\Phi(\infty) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{z \to \infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$$

koşulları altında resmeden bir tek Φ konform dönüşümü vardır [12, s: 104].

1.1.6 Teoremdeki Φ fonksiyonu CE bölgesinde ∞ noktası dışında analitiktir ve ∞ bunun bir basit kutup yeridir. Bu nedenle, Φ fonksiyonunun ∞ noktasındaki Laurent açılımı,

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\Phi(z)}{z} = a$$

olmak üzere,

$$\Phi(z) = a z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

biçimindedir. $\lim_{z \to \infty} \frac{\Phi(z)}{z} = a$ koşulu $\Phi'(\infty) = a$ biçiminde de yazılabilir. Φ fonksiyonunun tersini Ψ ile gösterelim. Bu durumda, Ψ fonksiyonu $|w| > 1$ bölgesinde ∞ noktası dışında analitiktir ve ∞ noktasında bir basit kutbu vardır. Ψ fonksiyonunun ∞ noktasındaki Laurent açılımı, $c = \frac{1}{a}$ olmak üzere,

$$\Psi(w) = c w + c_0 + \frac{c_{-1}}{w} + \frac{c_{-2}}{w^2} + \dots, \ |w|>1$$

biçimindedir.

c sayısına, E kontinyumunun kapasitesi denir [6, s: 12].

$R > 1$ olmak üzere, merkezi 0 ve yarıçapı R olan çemberin Ψ fonksiyonu altındaki görüntüsüne ya da Φ fonksiyonu altındaki ters görüntüsüne Γ_R diyelim. Yani,

$$\Gamma_R = \{ z \in CE : |\Phi(z)| = R \} = \{ \Psi(w) : |w| = R \}$$

olsun.

Γ_R eğrilerine CE bölgesinin seviye çizgileri denir [15, s: 34].

Ψ konform olduğundan, Γ_R kapalı bir eğridir ve analitiktir. Bu nedenle Γ_R biri sınırlı diğeri sınırsız olmak üzere iki bölgenin sınırı olur. Γ_R eğrisinin sınırladığı sınırlı bölgeyi E_R ile gösterelim. Yani,

$$E_R = \{ z \in CE : |\Phi(z)| < R \} \cup E$$

olsun.

$R = 1$ durumunda $\Gamma_1 = \partial E$ ve $E_1 = \overset{o}{E}$ yazacağız.

1.1.6 Teoremi sınırlı ve basit bağlantılı bir G bölgesinin kapanışı için de geçerlidir. Yalnız bu durumda Φ konform dönüşümünün tanım bölgesi $C\overline{G}$ ve $R>1$ için

$$\Gamma_R = \{ z \in C\overline{G} : |\Phi(z)| = R \} = \{ \Psi(w) : |w| = R \}$$

ve

$$G_R = \{ z \in C\overline{G} : |\Phi(z)| < R \} \cup \overline{G}$$

olacaktır.

$R = 1$ durumunda $\Gamma_1 = \partial G$ ve $G_1 = G$ yazacağız.

1.1.7 Teorem(Lebedev-Millin): E en az iki noktadan oluşan ve tümleyeni bağlantılı olan sınırlı bir kontinyum ve Q, E'de analitik bir fonksiyon olsun. Ψ, birim diskin dışını E'nin dışına resmeden bir konform dönüşüm olsun. Eğer, $Q(\Psi(t))$ fonksiyonunun $1 < |t| < \rho$ halkasındaki Laurent açılımı

$$Q(\Psi(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k + \sum_{s=1}^{\infty} b_s t^{-s}$$

ise, E'nin Q fonksiyonu altındaki görüntüsünün, Q fonksiyonunun Riemann yüzeyindeki alanı

$$S(E) = \pi \left(\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2 - \sum_{s=1}^{\infty} s|b_s|^2 \right)$$

olur [15, s: 170].

1.1.8 Teorem(Sınırsız Bölgeler İçin Cauchy İntegral Formülü): G, sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ile sınırlanmış sınırlı bir bölge ve Γ bunun pozitif yönlendirilmiş sınırı olsun. f, CG bölgesinde analitik bir fonksiyon ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \begin{cases} f(\infty) - f(z); & z \in C\overline{G} \\ f(\infty) & ; \ z \in G \end{cases}$$

olur [7, s: 486].

1.1.9 Teorem(Green Formülü): G, sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ile sınırlanmış sınırlı bir bölge ve f, G bölgesinde f_z ve $f_{\bar{z}}$ sürekli kısmi türevlerine sahip ve $\overline{G}$ kümesinde sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f_{\bar{z}}$ fonksiyonu G üzerinde integrallenebilir ise

$$\iint_G f_{\bar{z}}\, d\sigma_z = \frac{1}{2i}\int_{\partial G} f(z)\, dz$$

olur [3, s: 9].

1.1.10 Teorem(Cauchy-Green Formülü): G sınırı sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge, f ise G bölgesinde sürekli kısmi türevlere sahip ve $\overline{G}$ 'de sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f_{\bar{z}}$ fonksiyonu G üzerinde integrallenebilir ise, her $z \in G$ için,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}\, d\varsigma - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f_{\bar{\varsigma}}}{\varsigma - z}\, d\sigma_\varsigma$$

olur [3, s: 10].

1.1.11 Tanım(O Gösterimi): f ve g bir $A \subset \mathbf{C}$ kümesi üzerinde tanımlı iki fonksiyon olsunlar. Eğer her $z \in A$ için $|f(z)| \leq M\,|g(z)|$ olacak şekilde bir $M>0$ sayısı varsa $f=O(g)$ yazacağız.

1.2 Ağırlıklı Bergman Uzayları

Bu kısımdaki bilgiler [6] ve [8] numaralı kaynaklardan alınmıştır.

$G \subset \mathbf{C}$ bir bölge ve w G üzerinde bir ağırlık fonksiyonu, yani G üzerinde tanımlı, hemen her yerde sıfırdan farklı, negatif olmayan ve G üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun. G bölgesinde analitik olan ve

$$\iint_G |f(z)|^2\, w(z)\, d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesini $L^2(G,w)$ ile, G bölgesinde analitik olan ve

$$\iint_G |f(z)|\ d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesini de L(G) ile gösterelim. w=1 durumunda $L^2(G,1)$ yerine $L^2(G)$ yazacağız.

Her a, b∈**C** ve her f, g∈$L^2(G,w)$ için

$$|af(z)+bg(z)|^2 \le 2\ (|a|^2|f(z)|^2+|b|^2|g(z)|^2),\ z\in G$$

eşitsizliği sağlanacağından $L^2(G,w)$ bir vektör uzayı olur. Bir f∈$L^2(G,w)$ fonksiyonunun normunu

$$\| f \|_{L^2(G,w)} = \left(\iint_G |f(z)|^2 w(z)\, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlarsak, $L^2(G,w)$ bir normlu uzay olur. $L^2(G,w)$ normlu uzayına G bölgesi üzerindeki ağırlıklı Bergman uzayı denir. w=1 durumunda ise $L^2(G)$ uzayına G üzerindeki Bergman uzayı denir.

Ayrıca, bir G sınırlı bölgesinde analitik ve $\overline{G}$ kontinyumunda sürekli olan fonksiyonların kümesini $A(\overline{G})$ ile göstereceğiz. $A(\overline{G})$ bir vektör uzayıdır ve $f\in A(\overline{G})$ için

$$\| f \|_{\overline{G}} = \max\{|f(z)| : z\in \overline{G}\}$$

normu ile bir normlu uzay olur.

1.3 Yaklaşımın Derecesi ve En İyi Yaklaşım Polinomu

Bu kısımdaki bilgiler [5] numaralı kaynaktan alınmıştır.

1.3.1 Tanım: X bir normlu uzay, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bu uzay içinde n tane doğrusal bağımsız eleman ve x∈X bunlardan farklı bir eleman olsun.

$$E_n(x) = \inf\left\{ \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{C} \right\}$$

sayısına, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemanlarının doğrusal birleşimleri ile x'e en iyi yaklaşım sayısı ya da yaklaşımın derecesi denir [5, s: 137].

1.3.2 Teorem: X bir normlu uzay, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bu uzay içinde n tane doğrusal bağımsız eleman ve x∈X bunlardan farklı bir eleman olsun. Bu durumda,

$$E_n(x) = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* x_i \right\|$$

olacak şekilde $\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_n^* \in \mathbf{C}$ sayıları vardır [5, s:137].

1.3.3 Sonuç: $G \subset \mathbf{C}$ sınırlı bir bölge, w, G üzerinde bir ağırlık fonksiyonu ve $f \in L^2(G,w)$ olsun. Bu durumda her n doğal sayısı için,

$$E_n(f) = \left\| f - P_n^* \right\|_{L^2(G,w)}$$

olacak şekilde, derecesi n'yi aşmayan bir P_n^* polinomu vardır. Bu P_n^* polinomuna, f fonksiyonuna $\| \cdot \|_{L^2(G,w)}$ normunda derecesi n'yi aşmayan polinomlar sınıfında en iyi yaklaşan polinom ya da en iyi yaklaşım polinomu denir.

f fonksiyonuna $\| \cdot \|_{L^2(G,w)}$ normunda derecesi n'yi aşmayan polinomlar sınıfında en iyi yaklaşım sayısını $E_n(f,G)_w$ ile göstereceğiz.

1.4 Kvazikonform Eğriler ve Yansımalar

Bu kısımdaki bilgiler [1], [2], [4], [8] ve [11] numaralı kaynaklardan alınmıştır.

1.4.1 Tanım: $G \subset \mathbf{C}$ bir bölge ve u, G'de tanımlı reel değerli ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer, kapanışı G'de bulunan ve kenarları x ve y eksenlerine paralel olan her R dikdörtgeni için, u fonksiyonu R'de çizilen yatay ve düşey doğru parçalarının hemen hepsi üzerinde mutlak sürekli ise, u fonksiyonu G bölgesinde doğrular üzerinde mutlak süreklidir denir. Bir $h: G \to \mathbf{C}$ fonksiyonunun reel ve sanal bileşenleri G bölgesinde doğrular üzerinde mutlak sürekli iseler, h fonksiyonu G bölgesinde doğrular üzerinde mutlak süreklidir denir [11, s: 127].

$G \subset \mathbf{C}$ bir bölge ve $z=x+iy$ olmak üzere $h(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ G bölgesinde doğrular üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $y=c$ doğruları üzerinde u ve v fonksiyonları x değişkenli fonksiyonlardır ve bu doğruların hemen hepsi üzerinde mutlak süreklidirler. Bu nedenle, G'de hemen her yerde u_x ve v_x kısmi türevleri vardır. Aynı şekilde, G'de hemen her yerde u_y ve v_y kısmi türevleri vardır. Bu nedenle G'de hemen her yerde

$$h_z = \frac{1}{2}(h_x - i h_y) \text{ ve } h_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(h_x + i h_y)$$

kısmi türevleri mevcuttur.

1.4.2 Tanım: $G \subset \mathbf{C}$ bir bölge, $h: G \to \mathbf{C}$ bir homeomorfizm ve $K \geq 1$ olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa h dönüşümüne G üzerinde bir K-kvazikonform dönüşüm denir [1, s: 24].

1) h, G bölgesinde doğrular üzerinde mutlak süreklidir.

2) $k = \dfrac{K-1}{K+1}$ olmak üzere, G'de hemen her yerde $|h_{\bar{z}}| \leq k\,|h_z|$ olur.

Bir kvazikonform dönüşümün bir yansıma ile bileşkesine yön değiştiren kvazikonform dönüşüm ya da antikvazikonform dönüşüm denir [11, s: 16].

1.4.3 Teorem: Kvazikonform dönüşümlerin aşağıdaki özellikleri vardır.

a) Konform dönüşümler 1-kvazikonformdur. Tersine, 1-kvazikonform dönüşümler de konformdurlar.

b) K-kvazikonform bir dönüşümün tersi de K-kvazikonformdur.

c) K_1-kvazikonform bir dönüşüm ile K_2-kvazikonform bir dönüşümün bileşkesi K_1K_2-kvazikonformdur [1, s: 22].

1.4.4 Tanım: $\overline{\mathbf{C}}$'nin kendi üzerine bir K-kvazikonform dönüşümü altında bir çemberin görüntüsüne bir K-kvazikonform eğri denir [11, s: 97].

Tanımdan görüldüğü gibi her kvazikonform eğri bir Jordan eğrisidir. Ayrıca, her analitik eğri bir kvazikonform eğridir. Bir kvazikonform eğrinin 2 boyutlu Lebesgue ölçümü sıfırdır, 1 boyutlu Lebesgue ölçümü ise sonlu olmayabilir, yani bir kvazikonform eğri sonlu uzunluklu olmayabilir [11, s: 104].

1.4.5 Tanım: Γ, biri sınırlı diğeri sınırsız olan G_1 ve G_2 bölgelerini sınırlayan bir Jordan eğrisi olsun. G_1 bölgesini G_2 bölgesine, G_2 bölgesini G_1 bölgesine resmeden ve Γ eğrisinin noktalarını sabit bırakan bir antikvazikonform dönüşüme Γ'ya göre bir kvazikonform yansıma denir [11,s: 98].

Γ bir K-kvazikonform eğri olsun. Γ'nın sınırladığı sınırlı bölgeyi G ile gösterelim ve $0 \in G$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\overline{\mathbf{C}}$'nin kendi üzerine, birim çemberi Γ'ya resmeden bir w K-kvazikonform dönüşümü vardır. Bu dönüşüm **D**'yi G'ye ve $C\overline{\mathbf{D}}$'yi $C\overline{G}$'ye resmeder. Birim çembere göre $j(z)=\frac{1}{\bar{z}}$ yansımasını gözönüne alalım. Bu durumda $y = w \circ j \circ w^{-1}$ dönüşümü G'yi $C\overline{G}$'ye, $C\overline{G}$'yi G'ye resmeden ve Γ'nın noktalarını sabit bırakan bir K^2-antikvazikonform dönüşümdür. Yani, Γ'ya göre bir K^2-kvazikonform yansımadır.

Tersine, Γ Jordan eğrisinin bir y kvazikonform yansımaya sahip olduğunu varsayalım. **D**'nin G'ye bir f konform dönüşümünü alalım. Bu durumda,

$$h(z)=\begin{cases} f(z) & ; \ z\in\overline{\mathbf{D}} \\ (y\circ \bar{f}\circ j)(z) & ; \ z\in C\overline{\mathbf{D}} \end{cases}$$

dönüşümü, birim çemberi Γ'ya resmeden, $\overline{\mathbf{C}}$'den $\overline{\mathbf{C}}$'ye bir kvazikonform dönüşümdür. O halde Γ bir kvazikonform eğri olur.

Sonuç olarak, bir Jordan eğrisinin bir kvazikonform yansımaya sahip olması için gerekli ve yeterli koşul bir kvazikonform eğri olmasıdır.

G, sınırı kvazikonform bir Γ eğrisi olan sınırlı ve basit bağlantılı bir bölge ve $0\in G$ olsun. Γ'nın bir y kvazikonform yansımasına sahip olduğunu biliyoruz. Bu kvazikonform yansıma, yeterince küçük bir $\delta>0$ sayısı için, c_1 ve c_2 sabit sayılar olmak üzere

$$|y_\varsigma|+|y_{\bar{\varsigma}}| \le c_1 \ ; \ \delta<|\varsigma|<\frac{1}{\delta} \text{ ve } \varsigma\notin\Gamma$$

ve

$$|y_\varsigma|+|y_{\bar{\varsigma}}| \le c_2\,|\varsigma|^{-2} \ ; \ \frac{1}{\delta}<|\varsigma| \text{ ya da } |\varsigma|\le\delta$$

koşullarını sağlayacak , $\Gamma\cup\{0\}$ dışında her yerde türevlenebilecek ve $y(0)=\infty$, $y(\infty)=0$ olacak şekilde seçilebilir [8]. Bundan sonra bu şekildeki yansımaları doğal kvazikonform yansıma olarak kullanacağız.

Ayrıca, y bir K-kvazikonform yansıma ise, $\bar{y}$ hemen her yerde türevlenebilen bir K-kvazikonform dönüşüm olur [8].

1.4.6 Teorem: G, sınırı kvazikonform bir Γ eğrisi olan, sınırlı, basit bağlantılı bir bölge, $0\in G$ ve $f\in A(\overline{G})$ olsun. Bu durumda, her $z\in G$ için,

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{CG} \frac{(f\circ y)(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2}\, y_{\bar{\varsigma}}(\varsigma)\, d\sigma_{\varsigma}$$

olur. Burada y, Γ 'ya göre bir kvazikonform yansımadır.

İspat: f fonksiyonunun

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & ;\ z\in\overline{G} \\ (f\circ y)(z); & z\in C\overline{G} \end{cases}$$

sürekli genişlemesini oluşturalım. $\tilde{f}$ fonksiyonunun hemen her yerde $\tilde{f}_z$ ve $\tilde{f}_{\bar{z}}$ türevleri vardır ve

$$\tilde{f}_z = \begin{cases} f'(z) & ;\ z\in G \\ (f_y\circ y)(z)\, y_z(z); & z\in C\overline{G} \end{cases}$$

$$\tilde{f}_{\bar{z}} = \begin{cases} 0 & ;\ z\in G \\ (f_y\circ y)(z) y_{\bar{z}}(z) & ;\ z\in C\overline{G} \end{cases}$$

olur.

$$F(z) = \int_{\gamma} f(t)\, dt,\ z\in\overline{G}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada γ, 0 ve z noktalarını birleştiren ve tümüyle G içinde kalan sonlu uzunluklu bir yaydır. F, G'de analitik, $\overline{G}$ ' de türevlenebilir ve F(0)=0'dır. F fonksiyonunun,

$$\tilde{F}(z) = \begin{cases} F(z) & ;\ z\in\overline{G} \\ (F\circ y)(z); & z\in C\overline{G} \end{cases}$$

sürekli genişlemesini gözönüne alalım. $\tilde{F}$ fonksiyonu $\overline{\mathbf{C}}$ 'de sürekli ve sınırlıdır. $\tilde{F}(\infty)=\tilde{F}(0)=F(0)=0$'dır ve $\tilde{F}_z$ ve $\tilde{F}_{\bar{z}}$ türevleri vardır. Her $z\in\overline{G}$ için $F'(z)=f(z)$ olduğu açıktır. Şimdi $\tilde{F}_{\bar{z}}\in L^2(\overline{\mathbf{C}})$ olduğunu gösterelim. y yansımasının K-kvazikonform olduğunu varsayalım. Bu durumda $\overline{y}$ hemen her yerde türevlenebilir bir K-kvazikonform dönüşüm olacağından, $k=\dfrac{K-1}{K+1}$ olmak üzere, hemen her yerde

$$\left|\frac{y_z}{y_{\bar{z}}}\right| = \left|\frac{\overline{y_{\bar{z}}}}{\overline{y_z}}\right| \le k < 1$$

olur. y'nin jakobiyeni $J(y)=|y_z|^2-|y_{\bar{z}}|^2 < 0$ olduğundan,

$$\iint_{CG} |y_{\bar z}|^2 d\sigma_z = \iint_{CG} \left[1-\left|\frac{y_z}{y_{\bar z}}\right|^2\right]^{-1} |J(y)|\, d\sigma_z \le \frac{1}{1-k^2} \iint_{CG} |J(y)|\, d\sigma_z = \frac{1}{1-k^2} \iint_G d\sigma_\varsigma$$

$$= \frac{1}{1-k^2} \text{alan}(G) < \infty$$

bulunur. $\widetilde{F}$ G'de analitik olduğundan her $z \in G$ için $\widetilde{F}_{\bar z}=0$ olur. Ayrıca Γ eğrisinin 2 boyutlu Lebesgue ölçüsü sıfır olduğundan

$$\iint_G |\widetilde{F}_{\bar z}|^2 d\sigma_z = 0$$

elde edilir.

$$\iint_{\mathbf{C}} |\widetilde{F}_{\bar z}|^2 d\sigma_z = \iint_{CG} |\widetilde{F}_{\bar z}|^2 d\sigma_z = \iint_{CG} |(F_y \circ y) y_{\bar z}|^2 d\sigma_z = \iint_{CG} |F_y(y(z))|^2 |y_{\bar z}|^2 d\sigma_z$$

$$= \iint_{CG} |f(y(z))|^2 |y_{\bar z}|^2 d\sigma_z \le \frac{1}{1-k^2} \iint_{CG} |f(y(z))|^2 |J(y)|\, d\sigma_z$$

$$= \frac{1}{1-k^2} \iint_G |f(\varsigma)|^2 d\sigma_\varsigma \le \frac{M^2}{1-k^2} \iint_G d\sigma_\varsigma = \frac{M^2}{1-k^2} \text{alan}(G) < \infty$$

olduğundan $\widetilde{F}_{\bar z} \in L^2(\overline{\mathbf{C}})$ olur. Burada $M=\max\{|f(\varsigma)| : \varsigma \in \overline{G}\}$ olarak alınmıştır.

Merkezi 0, yarıçapı r olan ve G'yi kapsayan bir disk alalım. Cauchy-Green formülünden, $|z|< r$ biçimindeki her z için

$$\widetilde{F}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma|=r} \frac{\widetilde{F}(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma - \frac{1}{\pi} \iint_{|\varsigma|\le r} \frac{\widetilde{F}_{\bar\varsigma}}{\varsigma - z} d\sigma_\varsigma$$

yazılabilir. Buradan, her $z \in G$ için

$$f(z) = \widetilde{F}_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma|=r} \frac{\widetilde{F}(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2} d\varsigma - \frac{1}{\pi} \iint_{|\varsigma|\le r} \frac{\widetilde{F}_{\bar\varsigma}}{(\varsigma - z)^2} d\sigma_\varsigma$$

elde edilir. $\varsigma \in C\overline{G}$ için $\widetilde{F}_{\bar{\varsigma}} = (F_y \circ y)\, y_{\bar{\varsigma}}$ ve $\varsigma \in G$ için $\widetilde{F}_{\bar{\varsigma}} = 0$ olduğundan, her $z \in G$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma|=r} \frac{\widetilde{F}(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2} d\varsigma - \frac{1}{\pi} \iint_{\{\varsigma:|\varsigma|\le r\}-G} \frac{(F_y \circ y) y_{\bar{\varsigma}}}{(\varsigma - z)^2} d\sigma_{\varsigma}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma|=r} \frac{\widetilde{F}(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2} d\varsigma - \frac{1}{\pi} \iint_{\{\varsigma:|\varsigma|\le r\}-G} \frac{(f \circ y)(\varsigma)\, y_{\bar{\varsigma}}}{(\varsigma - z)^2} d\sigma_{\varsigma}$$

ve

$$\lim_{r\to\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma|=r} \frac{\widetilde{F}(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2} d\varsigma \right| \le \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi} \max_{|\varsigma|=r} \left|\widetilde{F}(\varsigma)\right| \frac{4}{r^2} \int_{|\varsigma|=r} |d\varsigma| = \lim_{r\to\infty} \max_{|\varsigma|=r} \left|\widetilde{F}(\varsigma)\right| \frac{4}{r} = 0$$

olur. Çünkü r yeterince büyük olduğunda $\frac{r}{2} \le |\varsigma - z|$ eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca $r \to \infty$ için $\{\varsigma : |\varsigma| \le r\} \to \overline{\mathbb{C}}$ olduğundan, her $z \in G$ için

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{CG} \frac{(f \circ y)(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2} y_{\bar{\varsigma}}(\varsigma)\, d\sigma_{\varsigma}$$

elde edilir. Fakat, Γ 'nın ölçüsü sıfır olduğundan, son eşitlik

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{C\overline{G}} \frac{(f \circ y)(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2} y_{\bar{\varsigma}}(\varsigma)\, d\sigma_{\varsigma}\,, \quad z \in G$$

halini alır.

Bu teorem Belyi tarafından ispatlanmıştır. Daha sonra bu integral gösterimi Batchaev tarafından aşağıdaki şekilde güçlendirilmiştir [8].

1.4.7 Teorem: G, sınırı kvazikonform bir eğri olan, sınırlı,basit bağlantılı bir bölge, $0 \in G$ ve f, G'de tanımlı bir fonksiyon ve y ∂G'ye göre bir doğal kvazikonform yansıma olsun. Bu durumda,

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{CG} \frac{(f \circ y)(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2} \, y_{\bar{\varsigma}}(\varsigma) \, d\sigma_{\varsigma}, \; z \in G$$

olması için gerekli ve yeterli koşul $f \in L(G)$ olmasıdır.

2. FABER POLİNOMLARI VE FABER SERİLERİ

Bu bölümdeki bilgiler [6], [10] ve [15] numaralı kaynaklardan alınmıştır.

Bu bölüm boyunca, E, en az iki noktadan oluşan, sınırlı ve basit bağlantılı bir kontinyum olacaktır.

2.1.Faber Polinomları ve Genelleştirilmiş Faber Polinomları

$w=\Phi(z)$, CE bölgesini $C\overline{\mathbf{D}}$ bölgesine $\Phi(\infty)=\infty$ ve $\Phi'(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\Phi(z)}{z}>0$ koşulları altında resmeden konform dönüşüm olsun. $\Phi'(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\Phi(z)}{z}=a$ olmak üzere, Φ fonksiyonunun ∞ noktasındaki Laurent açılımının

$$w=\Phi(z)=az+a_0+\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+\ldots$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. n=0,1,2,... için,

$$[\Phi(z)]^n=[az+a_0+\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+\ldots]^n$$

$$=a^nz^n+b_{n-1}^{(n)}z^{n-1}+\ldots+b_1^{(n)}z+b_0^{(n)}+\frac{b_{-1}^{(n)}}{z}+\frac{b_{-2}^{(n)}}{z^2}+\ldots$$

eşitliğinin polinom kısmını $F_n(z)$ ve geri kalan kısmını da $-H_n(z)$ ile gösterelim. $F_n(z)$ n. dereceden bir polinomdur. Bu açılım ∞'un bir komşuluğunda yani $|z|>\rho$ ve ρ'nun yeterince büyük olduğu durumlarda geçerlidir. Fakat $[\Phi(z)]^n$ ve $F_n(z)$ fonksiyonları bütün $z\in CE$ noktaları için tanımlı olduklarından $H_n(z)$ fonksiyonu da CE bölgesinde tanımlı ve analitik olur. O halde her $z\in CE$ için,

$$[\Phi(z)]^n=F_n(z)-H_n(z)$$

olur. Dolayısıyla, her $z\in CE$ için

$$F_n(z)=[\Phi(z)]^n+H_n(z)$$

ve

$$H_n(z) = F_n(z) - [\,\Phi(z)]^n$$

eşitlikleri sağlanır.

2.1.1 Tanım: $F_n(z)$ polinomuna E kontinyumunun n. dereceden Faber polinomu denir.

2.1.2 Teorem: $R>1$ olmak üzere, her $z \in E_R$ için

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{[\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma$$

ve her $z \in C\overline{E_R}$ için

$$H_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{[\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma$$

olur.

İspat: $z \in E_R$ alalım. H_n, $C\overline{E_R}$ bölgesinde analitik olduğundan, sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülünden,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{H_n(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = H_n(\infty) = 0$$

olur. Buradan,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{[\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{F_n(\varsigma) - H_n(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{F_n(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{H_n(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{F_n(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = F_n(z)$$

elde edilir. Şimdi $z \in C\overline{E_R}$ alalım. Sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülünden

$$H_n(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{H_n(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma$$

olur. Buradan,

$$H_n(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{F_n(\varsigma) - [\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{F_n(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{[\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{[\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma$$

elde edilir.

Φ dönüşümünün tersini Ψ ile gösterelim. $c = \frac{1}{a}$ olmak üzere, Ψ fonksiyonunun $|w|>1$ bölgesindeki Laurent açılımının

$$z = \Psi(w) = c\,w + c_0 + \frac{c_{-1}}{w} + \frac{c_{-2}}{w^2} + \dots$$

biçiminde olduğunu biliyoruz.

$F_n(z) = [\Phi(z)]^n + H_n(z),\ z \in CE$ eşitliğinde $z = \Psi(w)$ yazarsak,

$$F_n[\Psi(w)] = w^n + H_n[\Psi(w)] = w^n + \sum_{k=1}^{\infty} n\, d_k^{(n)} w^{-k} \quad , |w|>1$$

elde edilir.

$d_k^{(n)}$ katsayılarına Grunsky katsayıları denir [6, s: 43].

$R \geq 1$ ve $z \in \overline{E_R}$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R+\varepsilon}} \frac{[\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikte $\varsigma = \Psi(w)$ dönüşümü yapılırsa

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R+\varepsilon} \frac{w^n\, \Psi'(w)}{\Psi(w) - z} dw \quad , z \in \overline{E_R}$$

elde edilir. $z \in \overline{E_R}$ olduğundan $\frac{w\,\Psi'(w)}{\Psi(w) - z}$ fonksiyonu $|w|>R$ bölgesinde analitiktir. Son eşitlikten görüldüğü gibi $F_n(z)$ Faber polinomları $\frac{w\,\Psi'(w)}{\Psi(w) - z}$ fonksiyonunun ∞ noktasındaki Laurent açılımının Laurent katsayılarıdırlar. O halde $z \in \overline{E_R}$ ve $|w|>R$ için

$$\frac{w\,\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^n}$$

ya da

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}}$$

olur. Ayrıca bu yakınsama $|w|>R$ bölgesinin kompakt altkümeleri üzerinde mutlak ve düzgündür.

$R>1$ olmak üzere $C\overline{E_R}$ bölgesinin $C\overline{\mathbf{D}}$ bölgesine konform dönüşümü

$w = \dfrac{1}{R}\Phi(z)$ olacağından, $\overline{E_R}$ kontinyumunun Faber polinomları

$$F_n(z,R) = \frac{1}{R^n} F_n(z)$$

olurlar.

Şimdi Faber polinomlarına birkaç örnek verelim.

2.1.3 Örnek: $E=\{z\in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$ kontinyumunu gözönüne alalım. CE bölgesinin $|w|>1$ bölgesine, $\Phi(\infty)=\infty$ ve $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\Phi(z)}{z}>0$ koşulları altındaki konform dönüşümü $\Phi(z)=z$ dönüşümüdür. Her n doğal sayısı için

$$[\Phi(z)]^n = z^n$$

olduğundan

$$F_n(z)=z^n$$

olur.

2.1.4 Örnek: $E=[-1,1]$ olsun. E kontinyumunun dışının $|w|>1$ bölgesine $\Phi(\infty)=\infty$ ve $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\Phi(z)}{z}>0$ koşullarını sağlayan konform dönüşümü

$$w = \Phi(z) = z+\sqrt{z^2-1}$$

dönüşümüdür. Karekök fonksiyonunun

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\sqrt{z^2-1}}{z}=1$$

koşulunu sağlayan dalını seçelim. Φ fonksiyonunun tersi

$$z = \Psi(w) = \frac{1}{2}(w+\frac{1}{w})$$

olur. $R>1$ olmak üzere,

$$\frac{w\,\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(z)}{w^n}\ , z\in \overline{E_R}\ , |w|>R$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\frac{w^2-1}{w^2-2zw+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(z)}{w^n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n(z)}{w^n}$$

bulunur. $t=\frac{1}{w}$ denirse, $|t|<1$ ve

$$\frac{1-t^2}{t^2-2zt+1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}t^nF_n(z)$$

elde edilir.

Öte yandan $T_n(z)=\cos(n \arccos z)$ $(n = 0,1,2, \ldots)$ biçiminde tanımlı Chebyshev polinomları için

$$\frac{1-t^2}{t^2-2zt+1}=T_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}t^nT_n(z)\ ,\ |t|<1$$

açılımı geçerli olduğundan [15, s:36], $F_0(z)=T_0(z)=1$ ve $n\geq1$ için $F_n(z)=2T_n(z)$ elde edilir.

2.1.5 Örnek: $R>1$ olmak üzere, büyük yarı ekseni $\frac{1}{2}(R+\frac{1}{R})$, küçük yarı ekseni $\frac{1}{2}(R-\frac{1}{R})$ ve odakları ±1 olan elipsin iç bölgesini G ile gösterelim.

$E=[-1,1]$ kontinyumunun birim diskin dışına konform dönüşümünün $w = \Phi(z)=z+\sqrt{z^2-1}$ olduğunu biliyoruz. ∂G elipsi CE bölgesinin Γ_R seviye çizgisidir ve $G=E_R$'dir. Bu nedenle $\overline{G}$ kontinyumunun Faber polinomları, E'nin Faber polinomları $F_n(z)$'ler olmak üzere

$$F_n(z,R)=\frac{1}{R^n}F_n(z)$$

olurlar. Yani, $F_0(z,R)=F_0(z)=1$ ve $n\geq1$ için $F_n(z,R)=\frac{2}{R^n}T_n(z)$ olur.

Φ ve Ψ yukarıdaki gibi olsunlar. g, $g(\infty)>0$ koşulunu sağlayan ve CE bölgesinde analitik olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda n= 0, 1, 2, ... için $g(z)[\Phi(z)]^n$ fonksiyonunun ∞ noktasında n. dereceden kutbu vardır ve bu nedenle ∞'daki Laurent açılımı, $g(\infty)=b$ olmak üzere

$$g(z)[\Phi(z)]^n=ba^nz^n+b_{n-1}^{(n)}z^{n-1}+\ldots+b_1^{(n)}z+b_0^{(n)}+\frac{b_{-1}^{(n)}}{z}+\frac{b_{-2}^{(n)}}{z^2}+\ldots$$

biçiminde olur.

$g(z)[\Phi(z)]^n$ fonksiyonunun ∞'daki Laurent açılımının polinom kısmını $F_n(z,g)$ ve geri kalan kısmını da $-H_n(z,g)$ ile gösterelim. $F_n(z,g)$ n. dereceden bir polinomdur. Bu açılım ∞'un bir komşuluğunda geçerlidir, fakat $F_n(z,g)$ ve $g(z)[\Phi(z)]^n$ fonksiyonları bütün CE bölgesinde tanımlı olduklarından $H_n(z,g)$ fonksiyonu da CE bölgesinde tanımlıdır. O halde her $z \in CE$ için

$$g(z)[\Phi(z)]^n = F_n(z,g) - H_n(z,g)$$

$$F_n(z,g) = g(z)[\Phi(z)]^n + H_n(z,g)$$

ve

$$H_n(z,g) = F_n(z,g) - g(z)[\Phi(z)]^n$$

eşitlikleri geçerli olur.

2.1.6 Tanım: $F_n(z,g)$ polinomuna, E kontinyumunun g fonksiyonuna göre n. mertebeden genelleştirilmiş Faber polinomu denir.

2.1.2 Teoremin ispatındaki yöntem kullanılarak aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

2.1.7 Teorem: $R>1$ olmak üzere, her $z \in E_R$ için,

$$F_n(z,g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{g(\varsigma)[\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z}\, d\varsigma$$

ve her $z \in C\overline{E_R}$ için

$$H_n(z,g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{g(\varsigma)[\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z}\, d\varsigma$$

olur.

$R \geq 1$ ve $z \in \overline{E_R}$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$F_n(z,g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R+\varepsilon}} \frac{g(\varsigma)[\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z}\, d\varsigma$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikte $\varsigma = \Psi(w)$ dönüşümü yapılırsa

$$F_n(z,g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R+\varepsilon} \frac{w^n\, g[\Psi(w)]\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} d\varsigma$$

ve buradan da, |w|>R için $\dfrac{w\, g[\Psi(w)]\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}$ fonksiyonu analitik olduğundan

$$\frac{g[\Psi(w)]\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z,g)}{w^{n+1}} \quad , z\in \overline{E_R}\ , |w|>R$$

açılımı elde edilir. Buradaki yakınsama, |w|>R bölgesinin kompakt altkümeleri üzerinde mutlak ve düzgündür.

2.2 Faber Polinomlarının Bazı Asimptotik Özellikleri

2.2.1 Teorem: $F_n(z)$'ler E kontinyumunun Faber polinomları olmak üzere, her $z\in E$ için

$$\limsup_{n\to\infty} |F_n(z)|^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

olur.

İspat: $z\in E$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} \frac{[\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$|F_n(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} \frac{[\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} \frac{|[\Phi(\varsigma)]^n|}{|\varsigma - z|} |d\varsigma| = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} \frac{(1+\varepsilon)^n}{|\varsigma - z|} |d\varsigma|$$

elde edilir. $\Gamma_{1+\varepsilon}$ eğrisi kapalı ve E kümesi kompakt olduğundan aralarındaki $d(\Gamma_{1+\varepsilon}, E)$ uzaklığı sıfırdan büyüktür. Ayrıca $\varsigma \in \Gamma_{1+\varepsilon}$ ve $z\in E$ olduğundan

$$d(\Gamma_{1+\varepsilon}, E) \leq |\varsigma - z|$$

olur. Bu nedenle,

$$|F_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi}(1+\varepsilon)^n \frac{1}{d(\Gamma_{1+\varepsilon}, E)} \int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} |d\varsigma| = \frac{1}{2\pi}(1+\varepsilon)^n \frac{1}{d(\Gamma_{1+\varepsilon}, E)} l(\Gamma_{1+\varepsilon})$$

olur. $c(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{d(\Gamma_{1+\varepsilon}, E)} l(\Gamma_{1+\varepsilon})$ denirse

$$|F_n(z)| \leq c(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n$$

ve buradan da

$$|F_n(z)|^{\frac{1}{n}} \leq [c(\varepsilon)]^{\frac{1}{n}} (1+\varepsilon)$$

elde edilir. Bu ise

$$\limsup_{n\to\infty} |F_n(z)|^{\frac{1}{n}} \leq 1+\varepsilon$$

olduğunu verir. $\varepsilon \to 0$ olursa,

$$\limsup_{n\to\infty} |F_n(z)|^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

elde edilir.

2.2.2 Teorem: $F_n(z)$'ler E'nin Faber polinomları olsunlar. $1<r<R$ olmak üzere, her $z \in CE_R$ ve her n doğal sayısı için

$$F_n(z) = [\Phi(z)]^n + O(r^n)$$

olur.

İspat: Her $z \in CE_R$ için

$$H_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{[\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma$$

olduğundan,

$$|H_n(z)| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{[\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_r} \frac{|[\Phi(\varsigma)]^n|}{|\varsigma - z|} |d\varsigma| = \frac{r^n}{2\pi} \int_{\Gamma_r} \frac{|d\varsigma|}{|\varsigma - z|}$$

olur. CE_R kapalı ve Γ_r kompakt olduğundan aralarındaki uzaklık sıfırdan büyüktür. Ayrıca $z \in CE_R$ ve $\varsigma \in \Gamma_r$ olduğundan

$$|\varsigma - z| \geq d(CE_R, \Gamma_r) = d(\Gamma_R, \Gamma_r)$$

olur. Buradan,

$$|H_n(z)| \leq \frac{r^n}{2\pi}\frac{1}{d(\Gamma_R,\Gamma_r)}\int_{\Gamma_r}|d\varsigma| = \frac{r^n}{2\pi}\frac{1}{d(\Gamma_R,\Gamma_r)}l(\Gamma_r)$$

bulunur. $c(R,r) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{d(\Gamma_R,\Gamma_r)}l(\Gamma_r)$ denirse,

$$|H_n(z)| \leq c(R,r)\, r^n$$

yani

$$H_n(z) = O(r^n)$$

elde edilir. Bu ise

$$F_n(z) = [\Phi(z)]^n + O(r^n)$$

olduğunu verir.

2.2.3 Teorem: $F_n(z)$'ler E'nin Faber polinomları olsunlar. Her $z \in CE$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}(z)}{F_n(z)} = \Phi(z)$$

olur ve yakınsama CE'nin kompakt altkümeleri üzerinde düzgündür.

İspat: $1 < R$ olmak üzere bir $z \in \Gamma_R$ alalım. r sayısını $1 < r < R$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda, her n doğal sayısı için

$$F_n(z) = [\Phi(z)]^n + O(r^n)$$

olduğundan,

$$\frac{F_{n+1}(z)}{F_n(z)} = \frac{[\Phi(z)]^{n+1} + O(r^{n+1})}{[\Phi(z)]^n + O(r^n)} = \Phi(z)\frac{1 + O(\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}})}{1 + O(\frac{r^n}{R^n})} = \Phi(z)\left[1 + \frac{O(\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}}) - O(\frac{r^n}{R^n})}{1 + O(\frac{r^n}{R^n})}\right]$$

$$= \Phi(z) + O(\frac{r^n}{R^n})$$

olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}(z)}{F_n(z)} = \Phi(z) \ , z \in \Gamma_R$$

elde edilir. Her $z \in CE$ için $z \in \Gamma_R$ olacak şekilde bir $R > 1$ sayısı bulunabileceğinden, her $z \in CE$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}(z)}{F_n(z)} = \Phi(z)$$

elde edilir.

2.2.4 Teorem: $F_n(z)$'ler E'nin Faber polinomları olsunlar. Her $z\in CE$ için

$$\lim_{n\to\infty} |F_n(z)|^{\frac{1}{n}} = |\Phi(z)|$$

olur ve yakınsama CE'nin kompakt altkümeleri üzerinde düzgündür.

İspat: R>1 olmak üzere bir $z\in \Gamma_R$ alalım. Bu durumda, 1<r<R olmak , üzere

$F_n(z) = [\Phi(z)]^n + O(r^n)$ olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$F_n(z) = [\Phi(z)]^n + O(r^n) = [\Phi(z)]^n \left[1 + \frac{O(r^n)}{[\Phi(z)]^n}\right] = [\Phi(z)]^n \left[1 + \frac{O(r^n)}{O(R^n)}\right]$$

$$= [\Phi(z)]^n \left[1 + O(\frac{r^n}{R^n})\right]$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$\frac{F_n(z)}{[\Phi(z)]^n} - 1 = O(\frac{r^n}{R^n})$$

eşitliği, buradan da

$$\left|\frac{F_n(z)}{[\Phi(z)]^n} - 1\right| \leq c\frac{r^n}{R^n}$$

ve dolayısıyla

$$1 - c\frac{r^n}{R^n} \leq \frac{|F_n(z)|}{R^n} \leq 1 + c\frac{r^n}{R^n}$$

olduğu çıkar. $c_1(R) = 1 - c\frac{r^n}{R^n}$, $c_2(R) = 1 + c\frac{r^n}{R^n}$ denirse

$$c_1(R)\, R^n \leq |F_n(z)| \leq c_2(R)\, R^n$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$[c_1(R)]^{\frac{1}{n}} R \leq |F_n(z)|^{\frac{1}{n}} \leq [c_2(R)]^{\frac{1}{n}} R$$

ve bu nedenle

$$\lim_{n\to\infty} |F_n(z)|^{\frac{1}{n}} = R = |\Phi(z)|$$

olduğu çıkar. Her $z \in CE$ için $z \in \Gamma_R$ olacak şekilde bir $R>1$ sayısı bulunabileceğinden, her $z \in CE$ için

$$\lim_{n\to\infty} |F_n(z)|^{\frac{1}{n}} = |\Phi(z)|$$

elde edilir.

Genelleştirilmiş Faber polinomları için de aynı asimptotik özelliklerin geçerli olduğu benzer yöntemlerle gösterilebilir.

$F_n(z,g)$'ler E kontinyumunun g fonksiyonuna göre genelleştirilmiş Faber polinomları olsunlar. Her $z \in E$ için

$$\limsup_{n\to\infty} |F_n(z,g)|^{\frac{1}{n}} \le 1,$$

$1<r<R$ olmak üzere her $z \in CE_R$ için

$$F_n(z,g) = g(z)\,[\Phi(z)]^n + O(r^n)$$

özellikleri sağlanır. Ayrıca her $z \in CE$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}(z,g)}{F_n(z,g)} = \Phi(z)$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} |F_n(z,g)|^{\frac{1}{n}} = |\Phi(z)|$$

eşitlikleri geçerli olur.

2.3 Faber Serileri ve Genelleştirilmiş Faber Serileri

2.3.1 Tanım: $F_n(z)$'ler E kontinyumunun Faber polinomları ve $F_n(z,g)$'ler E kontinyumunun g fonksiyonuna göre genelleştirilmiş Faber polinomları olsunlar. (c_n) bir karmaşık sayı dizisi olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} c_n F_n(z)$ biçimindeki serilere E kontinyumuna göre Faber serileri, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n F_n(z,g)$ biçimindeki serilere de E kontinyumuna göre genelleştirilmiş Faber serileri denir.

2.3.2 Teorem: (c_n) bir karmaşık sayı dizisi ve $F_n(z)$'ler E kontinyumunun Faber polinomları olsunlar. Eğer

$$\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R} < 1$$

ise, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n F_n(z)$ Faber serisi, E_R bölgesinde mutlak yakınsak, E_R'nin kompakt altkümeleri üzerinde düzgün yakınsak ve $C\overline{E_R}$ bölgesinde ıraksaktır.

İspat: $\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir N doğal sayısı vardır ki, $n \geq N$ için

$$|c_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R} + \varepsilon = \frac{1+\varepsilon R}{R}$$

olur. $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon R^2}{1+\varepsilon R}$ denirse, $n \geq N$ için

$$|c_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R-\varepsilon_0}$$

elde edilir. $1<r<R$ olsun. 2.2.4 Teoremin ispatından her $z \in \Gamma_r$ için

$$a_1(r)\, r^n \leq |F_n(z)| \leq a_2(r)\, r^n$$

olduğunu biliyoruz. ε sayısını $r < R-\varepsilon_0$ olacak şekilde alalım. Bu durumda, $n \geq N$ için

$$|c_n F_n(z)| \leq a_2(r) \left(\frac{r}{R-\varepsilon_0}\right)^n$$

olur.

$q = \frac{r}{R-\varepsilon_0}$ denirse, $0<q<1$ ve her $z \in \Gamma_r$ için

$$|c_n F_n(z)| \leq a_2(r)\, q^n$$

elde edilir. Her $z \in E_R - E$ için $z \in \Gamma_r$ olacak şekilde bir $r \in (1,R)$ sayısı bulunabileceğinden bu eşitsizlik her $z \in E_R - E$ için geçerli olur.

E kompakt olduğundan $E \subset \overline{E_r}$ olacak şekilde bir $r \in (1,R)$ sayısı vardır. her $z \in E$ için

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{[\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$|F_n(z)| \le \frac{1}{2\pi}\frac{l(\Gamma_r)}{d(\Gamma_r, E)} r^n = c(r)\, r^n$$

elde edilir. ε sayısını $r < R - \varepsilon_0$ olacak şekilde seçelim. $p = \dfrac{r}{R-\varepsilon_0}$ denirse, $0<p<1$ ve her $z \in E$ için

$$|c_n F_n(z)| \le c(r)\, p^n$$

olur. $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n F_n(z)|$ serisi, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ serisi yakınsak olduğundan her $z \in E_R - E$ için, $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$ serisi yakınsak olduğu için de her $z \in E$ için yakınsaktır. O halde $\sum_{n=0}^{\infty} c_n F_n(z)$ serisi E_R üzerinde mutlak yakınsaktır.

F, E_R'nin kompakt bir altkümesi olsun. Bu durumda $F \subset \overline{E_{r_0}}$ olacak şekilde bir $1<r_0<R$ sayısı vardır. $r_0<r<R$ olmak üzere, her $z \in F$ için

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{[\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z}\, d\varsigma$$

olduğunu biliyoruz. F ve Γ_r kapalı olduklarından her $z \in F$ ve her $\varsigma \in \Gamma_r$ için

$$|\varsigma - z| \ge d(\Gamma_r, F) > 0$$

olur. Buradan her $z \in F$ için

$$|F_n(z)| \le \frac{1}{2\pi}\frac{l(\Gamma_r)}{d(\Gamma_r, F)} r^n = c(r)\, r^n$$

elde edilir. Bir $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon R^2}{1+\varepsilon R}$ diyelim ve ε sayısını $r<R-\varepsilon_0$ olacak şekilde seçelim. $\limsup\limits_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{R}$ olduğundan, $n \ge N$ için $|c_n|^{\frac{1}{n}} < \dfrac{1}{R-\varepsilon_0}$ olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. Bu ise, $n \ge N$ için ve her $z \in F$ için

$|c_n F_n(z)| \le \left(\dfrac{r}{R-\varepsilon_0}\right)^n c(r)$ olduğunu verir. $M_n = \left(\dfrac{r}{R-\varepsilon_0}\right)^n c(r)$ denirse, $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ serisi yakınsak olacağından Weierstrass-M testi gereğince $\sum_{n=0}^{\infty} c_n F_n(z)$ serisi F üzerinde düzgün yakınsak olur.

$z \in C\overline{E_R}$ olsun. $R_0 = |\Phi(z)|$ denirse, $R_0 > R$ ve $z \in \Gamma_{R_0}$ olur. Bu durumda

$$b_1(R_0)R_0^{\,n} \leq |F_n(z)| \leq b_2(R_0)R_0^{\,n}$$

olduğu bilinmektedir. $\limsup\limits_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için (c_n) dizisinin $|c_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} > \frac{1}{R} - \varepsilon = \frac{1-\varepsilon R}{R}$ olacak biçimde bir (c_{n_k}) alt dizisi vardır. $\varepsilon_1 = \frac{1}{(1-\varepsilon R)^2}$ denirse

$$|c_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} > \frac{1-\varepsilon R}{R} = \frac{1}{R+\varepsilon_1}$$

olur. ε sayısını, $R + \varepsilon_1 < R_0$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda,

$$|c_{n_k} F_{n_k}(z)| > \frac{b_1(R_0)R_0^{\,n_k}}{(R+\varepsilon_1)^{n_k}} = b_1(R_0)\left(\frac{R_0}{R+\varepsilon_1}\right)^{n_k}$$

elde edilir. $\frac{R_0}{R+\varepsilon_1} > 1$ olduğundan $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{R_0}{R+\varepsilon_1}\right)^{n_k}$ serisi ıraksak olur. Buradan $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n F_n(z)$ serisinin ıraksak olduğu çıkar.

2.3.3 Teorem: G basit bağlantılı ve sınırlı bir bölge ve $\Gamma = \partial G$ analitik bir eğri olsun. Bu durumda G bölgesinde analitik olan her f fonksiyonu $\overline{G}$ kontinyumunun Faber polinomları serisine açılabilir ve bu açılım G'nin kompakt altkümeleri üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

İspat: Γ analitik bir eğri olduğundan, Φ konform dönüşümü G'nin içine belirli bir yere kadar analitik ve birebir olarak genişletilebilir. Φ konform dönüşümü belirli bir $0<\rho_0<1$ için $C\overline{G_{\rho_0}}$ bölgesinde birebir ve analitik olur. Bu durumda, Ψ fonksiyonu $|w| > \rho_0$ bölgesinde ∞ noktası dışında analitiktir ve ∞'da basit kutbu vardır.

f, G'de analitik bir fonksiyon ve $z \in G$ olsun. $\rho_0 < \rho < 1$ ve $z \in G_\rho$ olacak şekilde bir ρ sayısı vardır. Bu nedenle

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}\, d\varsigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho} f(\Psi(w))\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}\, dw$$

olur.

$z \in G_\rho$ ve $|w| \geq \rho$ için Ψ fonksiyonu analitik olduğundan, $\dfrac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}$

fonksiyonu $|w| \geq \rho$ için analitik olur. Ayrıca

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} \frac{w^n \Psi'(w)}{\Psi(w)-z} dw$$

olduğundan, $|w| \geq \rho$ için

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}}$$

olur. $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|w|=\rho} f(\Psi(w)) \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} dw$ ve $\dfrac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}}$, $|w| = \rho$

eşitliklerinden,

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} \frac{f(\Psi(w))}{w^{n+1}} dw$$

olmak üzere

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) F_n(z)$$

yazılabilir.

$z \in G_\rho$ olduğundan $z \in \overline{G_{r_0}}$ olacak biçimde bir $\rho_0 < r_0 < \rho$ sayısı vardır.

$r_0 < r < \rho$ olmak üzere

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{[\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma$$

eşitliğinden

$$|F_n(z)| \leq c(r)\, r^n$$

elde edilir. $|w| \geq \rho$ için,

$$\left| \frac{F_n(z)}{w^{n+1}} \right| \leq \frac{c(r)\, r^n}{\rho^{n+1}} = \frac{c(r)}{\rho} \left(\frac{r}{\rho} \right)^n$$

olduğundan ve $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c(r)}{\rho} \left(\frac{r}{\rho} \right)^n$ serisi yakınsak olduğundan, Weierstrass-M testi

gereğince $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}}$ serisi $|w| \geq \rho$ için düzgün yakınsak olur.

O halde,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho} f(\Psi(w))\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho} f(\Psi(w))\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(z)}{w^{n+1}}\Big]dw$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(z)\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho}\frac{f(\Psi(w))}{w^{n+1}}dw\Big]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)F_n(z)$$

bulunur.

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)F_n(z)$ yakınsamasının G'nin kompakt altkümeleri üzerinde düzgün olduğunu gösterelim.

F, G'nin kompakt bir altkümesi olsun. Bu durumda $F\subset\overline{G_{r_0}}$ olacak şekilde bir $r_0<1$ sayısı vardır. $r_0<r<1$ olmak üzere her $z\in F$ için

$$F_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{[\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma-z}d\varsigma$$

olduğundan ve F ile Γ_r kapalı olduklarından, her $z\in F$ için

$$|F_n(z)|\le d(r)\,r^n$$

elde edilir.

$r<R<1$ biçiminde bir R sayısı alalım. Her $z\in F$ için $z\in G_R$ olur. Bu durumda, her $z\in F$ için

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} f(\Psi(w))\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}dw$$

olduğundan ve

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(z)}{w^{n+1}},\quad |w|=R,\ z\in F$$

açılımı düzgün yakınsak olduğundan, her $z\in F$ için,

$$a_n(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\frac{f(\Psi(w))}{w^{n+1}}dw$$

olmak üzere $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)F_n(z)$ olur. $M=\max\{|f(z)|:z\in\overline{G_R}\}$ olarak alınırsa,

$$|a_n(f)|\le\frac{M}{R^n}$$

olacağından, her n doğal sayısı ve her $z\in F$ için

$$|a_n(f)F_n(z)|\leq d(r)\, M\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

olur. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d(r)\, M\left(\frac{r}{R}\right)^n$ serisi yakınsak olduğundan Weierstrass-M testi gereğince $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(f)\, F_n(z)$ serisi F üzerinde mutlak ve düzgün yakınsak olur.

$a_n(f)$ katsayılarına, f fonksiyonunun $\overline{G}$ kontinyumuna göre Faber katsayıları denir.

Bu teorem genelleştirilmiş Faber serileri için de geçerlidir :

g fonksiyonu $\overline{CG_{\rho_0}}$ bölgesinde analitik, $g(\infty)>0$ ve her $z\in \overline{CG_{\rho_0}}$ için $g(z)\neq 0$ olsun. Bu durumda her $z\in G$ için

$$a_n(f,g) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\rho} \frac{f(\Psi(w))}{g(\Psi(w))\, w^{n+1}}\, dw$$

olmak üzere $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(f,g)\, F_n(z,g)$ olur ve bu açılım G'nin kompakt altkümeleri üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. $a_n(f,g)$ katsayılarına, f fonksiyonunun $\overline{G}$ kontinyumuna göre genelleştirilmiş Faber katsayıları denir.

2.3.4 Teorem: E'de analitik olan her fonksiyon E'nin Faber polinomları serisine açılabilir ve bu açılım E üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

İspat: f, E'de analitik bir fonksiyon olsun. E kapalı olduğundan f fonksiyonu E'yi kapsayan belirli bir bölgeye analitik olarak genişletilebilir. Bu durumda f fonksiyonu belirli bir $R>1$ için E_R bölgesinde analitik olur.

$1<\rho<R$ biçiminde bir ρ sayısı alalım. Her $z\in E$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}\, d\varsigma = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\rho} f(\Psi(w))\, \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z}\, dw$$

olur. Öte yandan, $z\in E$ ve $|w|\geq\rho$ için

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}}$$

açılımı w'ye göre düzgün yakınsak olacağından,

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho} \frac{f(\Psi(w))}{w^{n+1}}\,dw$$

olmak üzere, her $z \in E$ için $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)\,F_n(z)$ olur.

$M = \max\{|f(z)| : z \in \overline{E_\rho}\}$ denirse, katsayıların yukarıdaki ifadesinden her n ve her $z \in E$ için

$$|a_n(f)| \le \frac{M}{\rho^n}$$

eşitsizliği elde edilir.

$1 < r < \rho$ biçiminde bir r sayısı alalım. Her $z \in E$ için

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{[\Phi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z}\,d\varsigma$$

olduğundan,

$$|F_n(z)| \le c(r)\, r^n$$

olur. O halde her n doğal sayısı ve her $z \in E$ için

$$|a_n(f)\, F_n(z)| \le c(r)\, M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

olur. $\sum_{n=0}^{\infty} c(r)\, M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ serisi yakınsak olduğundan Weierstrass-M testi gereğince $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)\, F_n(z)$ serisi E üzerinde mutlak ve düzgün yakınsak olur.

Aslında, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)\, F_n(z)$ serisi yalnız E üzerinde değil, E_R bölgesinin her kompakt altkümesi üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Gerçekten, F E_R bölgesinin kompakt bir altkümesi ise, $F \subset \overline{E_r}$ olacak şekilde bir $r \in (1,R)$ sayısı vardır. $r < \rho < R$ biçiminde bir ρ sayısı alalım. Her $z \in E$ için

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}}, \quad |w| \ge \rho$$

açılımı düzgün yakınsak olur. Bu nedenle, her $z \in F$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} f(\Psi(w)) \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} \Big[f(\Psi(w)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}} \Big] dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) F_n(z)$$

olur. Ayrıca her $z \in F$ ve her n için

$$|a_n(f) F_n(z)| \le c \left(\frac{r}{\rho} \right)^n$$

olduğundan Weierstrass-M testi bu açılımın F üzerinde mutlak ve düzgün yakınsak olduğunu verir.

Bu teorem genelleştirilmiş Faber serileri için de geçerlidir :

g, CE bölgesinde analitik bir fonksiyon ve her $z \in CE$ için $g(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda, $1 < \rho < R$ ve

$$a_n(f,g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} \frac{f(\Psi(w))}{g(\Psi(w)) w^{n+1}} dw$$

olmak üzere her $z \in E$ için $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f,g) F_n(z,g)$ olur ve bu açılım mutlak ve düzgün yakınsaktır. Ayrıca, E_R bölgesinin her kompakt altkümesi için bu açılım geçerlidir ve mutlak ve düzgün yakınsaktır.

3. AĞIRLIKLI BERGMAN UZAYLARINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ FABER SERİLERİ İLE YAKLAŞIM

3.1 Bazı Yardımcı Sonuçlar

3.1.1 Teorem: E, en az iki noktadan oluşan, bağlantılı tümleyene sahip sınırlı bir kontinyum ve Φ CE'nin $C\overline{\mathbf{D}}$'ye $\Phi(\infty)=\infty$ ve $\Phi'(\infty)=\lim_{z\to\infty}\frac{\Phi(z)}{z}>0$ koşulları altındaki konform dönüşümü olsun. $F_n(z)$'ler E kontinyumunun Faber polinomları ve $F_n(z,g)$'ler E kontinyumunun $g(z)=\Phi'(z)$ fonksiyonuna göre genelleştirilmiş Faber polinomları olsunlar. Bu durumda, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ve her $z\in\mathbf{C}$ için,

$$F_n(z,g)=\frac{1}{n+1}F'_{n+1}(z)$$

olur.

İspat: $R\geq 1$ biçiminde bir sayı alalım. Φ dönüşümünün tersi Ψ olmak üzere

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(z)}{w^{n+1}}\quad, z\in\overline{E_R}\ ,|w|>R$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitliğin her iki tarafının w'ye göre integrali alınırsa

$$\log\frac{\Psi(w)-z}{w}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{F_n(z)}{w^n}\quad, z\in\overline{E_R}\ ,|w|>R$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafının z'ye türevi alınırsa,

$$\frac{1}{\Psi(w)-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{F'_{n+1}(z)}{w^{n+1}}\quad, z\in\overline{E_R}\ ,|w|>R$$

bulunur.

g, CE bölgesinde analitik bir fonksiyon ve $g(\infty)>0$ ise,

$$\frac{g[\Psi(w)]\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(z,g)}{w^{n+1}} \quad, z\in\overline{E_R} \quad ,|w|>R$$

açılımının geçerli olduğu biliniyor. Özel olarak $g(z) = \Phi'(z)$ alınırsa,

$g[\Psi(w)]=\dfrac{1}{\Psi'(w)}$ olacağından,

$$\frac{1}{\Psi(w)-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(z,g)}{w^{n+1}} \quad, z\in\overline{E_R} \quad ,|w|>R$$

elde edilir. O halde her $z\in\overline{E_R}$ ve her n doğal sayısı için

$$F_n(z,g)=\frac{1}{n+1}F'_{n+1}(z)$$

olur. Her $z\in\mathbf{C}$ için $z\in E_R$ olacak şekilde bir $R>1$ sayısı bulunabileceğinden bu eşitlik her $z\in\mathbf{C}$ için geçerli olur.

3.1.2 Sonuç: $g(z) = \Phi'(z)$ durumunda, her n doğal sayısı ve her $z\in CE$ için

$$H_n(z,g)=\frac{1}{n+1}H'_{n+1}(z)$$

olur.

İspat: Her $z\in CE$ ve $n = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$F_n(z,g)=g(z)[\Phi(z)]^n+H_n(z,g)$$

olduğundan,

$$F_n(z,g)=\Phi'(z)\,[\Phi(z)]^n+H_n(z,g)$$

olur. Ayrıca,

$$F_{n+1}(z)=[\Phi(z)]^{n+1}+H_{n+1}(z)$$

olduğundan,

$$\frac{1}{n+1}F'_{n+1}(z)=\Phi'(z)[\Phi(z)]^n+\frac{1}{n+1}H'_{n+1}(z)$$

eşitliği sağlanır. $F_n(z,g)=\dfrac{1}{n+1}F'_{n+1}(z)$ olduğundan

$$F_n(z,g)=\Phi'(z)[\Phi(z)]^n+\frac{1}{n+1}H'_{n+1}(z)$$

olur. Bu eşitlik ve $F_n(z,g)=\Phi'(z)\,[\Phi(z)]^n+H_n(z,g)$ eşitliğinden

$$H_n(z,g) = \frac{1}{n+1} H'_{n+1}(z)$$

elde edilir.

3.1.3 Teorem: $g(z) = \Phi'(z)$ durumunda, a_k'lar $g[\Psi(w)]$ fonksiyonunun $|w|>1$ bölgesindeki Laurent katsayıları olmak üzere, her n doğal sayısı için

$F_n(\Psi(w), g)$ fonksiyonu

$$F_n(\Psi(w), g) = a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_{n-1} w + a_n + \sum_{s=1}^{\infty} d_s w^{-s} \quad , |w|>1$$

biçiminde bir Laurent açılımına sahiptir.

İspat. $F_{n+1}(z) = [\Phi(z)]^{n+1} + H_{n+1}(z)$ eşitliğinde $z = \Psi(w)$ dönüşümü yapılırsa,

$$F_{n+1}(\Psi(w)) = w^{n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} (n+1)\, b_k^{(n+1)} w^{-k} \quad , |w|>1$$

elde edilir. $b_k^{(n+1)}$'ler Grunsky katsayılarıdır. $H_{n+1}(\Psi(w)) = \sum_{k=1}^{\infty} (n+1)\, b_k^{(n+1)} w^{-k}$ eşitliğinde $w = \Phi(z)$ yazılırsa

$$H_{n+1}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (n+1)\, b_k^{(n+1)} [\Phi(z)]^{-k}$$

bulunur. Buradan

$$H'_{n+1}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (n+1)\, b_k^{(n+1)} (-k) [\Phi(z)]^{-k-1} \Phi'(z)$$

ve buradan da

$$H_n(z,g) = \frac{1}{n+1} H'_{n+1}(z) = -\Phi'(z) \sum_{k=1}^{\infty} k\, b_k^{(n+1)} [\Phi(z)]^{-k-1}$$

elde edilir. Burada yeniden $z = \Psi(w)$ yazılırsa

$$H_n(\Psi(w), g) = -\frac{1}{\Psi'(w)} \sum_{k=1}^{\infty} k\, b_k^{(n+1)} w^{-k-1} \quad , |w|>1$$

bulunur. $F_n(z,g) = \Phi'(z) [\Phi(z)]^n + H_n(z,g)$ eşitliğinde $z = \Psi(w)$ yazılır ve $H_n(\Psi(w)) = -\frac{1}{\Psi'(w)} \sum_{k=1}^{\infty} k\, b_k^{(n+1)} w^{-k-1}$ eşitliği kullanılırsa

$$F_n(\Psi(w),g)=\frac{1}{\Psi'(w)}w^n-\frac{1}{\Psi'(w)}\sum_{k=1}^{\infty}k\,b_k^{(n+1)}w^{-k-1}\ ,\ |w|>1$$

elde edilir.

$g[\Psi(w)]=\dfrac{1}{\Psi'(w)}$ fonksiyonu $|w|>1$ bölgesinde analitik olduğundan

$$g[\Psi(w)]=\frac{1}{\Psi'(w)}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,w^{-k},\ |w|>1$$

Laurent açılımına sahiptir. Buradan $|w|>1$ için

$$\frac{1}{\Psi'(w)}w^n=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,w^{n-k}=a_0w^n+a_1w^{n-1}+\ldots+a_{n-1}w+a_n+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\,w^{n-k}$$

ve

$$H_n(\Psi(w),g)=-\frac{1}{\Psi'(w)}\sum_{k=1}^{\infty}k\,b_k^{(n+1)}w^{-k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\,w^{-k}$$

olduğu çıkar. Son iki eşitlikten

$$\begin{aligned}F_n(\Psi(w),g)&=a_0w^n+a_1w^{n-1}+\ldots+a_{n-1}w+a_n+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\,w^{n-k}+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\,w^{-k}\\&=a_0w^n+a_1w^{n-1}+\ldots+a_{n-1}w+a_n+\sum_{s=1}^{\infty}d_s\,w^{-s},|w|>1\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.4 Lemma: G, K-kvazikonform sınıra sahip sınırlı bir bölge olsun. Bu durumda, derecesi n'yi aşmayan her P polinomu için

$$\|P'\|_{\overline{G}}\le\frac{e}{2^k}\frac{n^{1+k}}{c}\|P\|_{\overline{G}}$$

olur. Burada, $k=\dfrac{K-1}{K+1}$ ve c, $\overline{G}$ kontinyumunun kapasitesidir [9].

3.1.5 Lemma: $F_n(z)$'ler E'nin Faber polinomları olsunlar. Bu durumda

$$\|F_n\|_E=\max_{z\in E}|F_n(z)|\le A\,n^{\alpha}\ ,\ n=0,1,2,\ldots$$

olacak şekilde A>0 ve $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$ sabit sayıları vardır [10].

3.1.6 Teorem: G, kvazikonform sınıra sahip sınırlı bir bölge ve Φ, $C\overline{G}$'nin $C\overline{\mathbf{D}}$'ye $\Phi(\infty)=\infty$ ve $\Phi'(\infty)>0$ koşullarını sağlayan konform dönüşümü olsun. $\overline{G}$ kontinyumunun $g(z)=\Phi'(z)$ fonksiyonuna göre genelleştirilmiş Faber polinomlarını $B_m(z)$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) ile gösterelim. Bu durumda her $z\in G$ için

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B'_m(z)}{m+1}w^{m+1}$$

serisi **D** üzerinde analitik bir fonksiyon tanımlar.

İspat: G'nin sınırı K-kvazikonform ve $k=\dfrac{K-1}{K+1}$ olsun. $F_m(z)$'ler $\overline{G}$ kontinyumunun Faber polinomları olmak üzere $B_m(z)=\dfrac{1}{m+1}F'_{m+1}(z)$ olduğundan $B'_m(z)=\dfrac{1}{m+1}F''_{m+1}(z)$ olur. 3.1.5.Lemma gereğince

$$\| F_{m+1}\|_{\overline{G}}=\max_{z\in\overline{G}}|F_{m+1}(z)|\le A\,(m+1)^{\alpha}\quad (m=0,1,2,\ldots)$$

olacak şekilde A ve $\alpha<\dfrac{1}{2}$ sabitleri vardır. $\overline{G}$ kontinyumunun kapasitesi c olmak üzere 3.1.4 Lemma ve son eşitsizlik kullanılarak

$$\| F'_{m+1}(z)\|_{\overline{G}}\le\frac{e}{2^k}\frac{(m+1)^{1+k}}{c}\| F_{m+1}\|_{\overline{G}}\le\frac{e}{2^k}\frac{(m+1)^{1+k}}{c}A\,(m+1)^{\alpha}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik ve 3.1.4.Lemma kullanılarak

$$\| F''_{m+1}\|_{\overline{G}}\le\frac{e}{2^k}\frac{m^{1+k}}{c}\| F'_{m+1}\|_{\overline{G}}\le\frac{e^2}{2^{2k}c^2}A\,m^{1+k}(m+1)^{1+k}(m+1)^{\alpha}$$

$$\le\frac{e^2}{2^{2k}c^2}A\,(m+1)^{2(1+k)+\alpha}\le\frac{e^2}{2^{2k}c^2}A\,(m+1)^5$$

eşitsizliği bulunur. Buradan, $d=\dfrac{e^2}{2^{2k}c^2}A$ olmak üzere, her $z\in G$ için

$$\frac{|B'_m(z)|}{m+1}=\frac{|F''_{m+1}(z)|}{(m+1)^2}\le d\,(m+1)^3$$

olduğu çıkar.

$0<r<1$ olmak üzere $\overline{D}(0,r)$ kapalı diskini gözönüne alalım. Her $w\in\overline{D}(0,r)$ ve her $m = 1, 2, \ldots$ için

$$\left|\frac{B'_m(z)}{m+1}w^{m+1}\right| \le d\,(m+1)^3\, r^{m+1}$$

eşitsizliği geçerlidir. $\sum\limits_{m=1}^{\infty} d\,(m+1)^3 r^{m+1}$ serisi yakınsak olduğundan, Weierstrass-M testi gereğince $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{B'_m(z)}{m+1}w^{m+1}$ serisi $\overline{D}(0,r)$ kapalı diski üzerinde düzgün yakınsaktır. **D** içindeki her $\overline{D}(w_0, r_0)$ kapalı diski bir $\overline{D}(0,r)\subset\mathbf{D}$ kapalı diski içine alınabileceğinden, $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{B'_m(z)}{m+1}w^{m+1}$ serisi **D** içindeki her kapalı disk üzerinde düzgün yakınsak olur. $\frac{B'_m(z)}{m+1}w^{m+1}$ fonksiyonlarının herbiri **D** üzerinde analitik ve $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{B'_m(z)}{m+1}w^{m+1}$ serisi **D** içindeki her kapalı disk üzerinde düzgün yakınsak olduğundan, bu serinin belirttiği fonksiyon **D** üzerinde analitik olur.

3.1.7 Sonuç: Her $z\in G$ için, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} B'_m(z)\,w^m$ serisi, $0<r<1$ biçimindeki her r sayısı için $\overline{D}(0,r)$ kapalı diski üzerinde düzgün yakınsaktır.

3.1.9 Teorem: G, sınırlı ve basit bağlantılı tümleyene sahip bir bölge, Φ, $C\overline{G}$ 'nin $C\overline{\mathbf{D}}$'ye $\Phi(\infty)=\infty$ ve $\Phi'(\infty)>0$ koşullarını sağlayan konform dönüşümü ve Ψ bunun tersi olsun. Bu durumda, G'nin kompakt altkümelerinden alınan z noktaları için

$$\iint\limits_{\mathbf{D}} \frac{1}{\left|\left[\,\Psi(\frac{1}{w}) - z\,\right]^2 w\right|^2}\, d\sigma_w < \infty$$

olur.

İspat: M, G'nin kompakt bir altkümesi ve $z\in M$ olsun. $1<R_0<\infty$ biçiminde bir R_0 sayısı alalım.

$$\iint\limits_{\mathbf{D}} \frac{1}{\left|\left[\,\Psi(\frac{1}{w}) - z\,\right]^2 w\right|^2}\, d\sigma_w = \iint\limits_{\mathbf{D}} \frac{1}{\left|\Psi(\frac{1}{w}) - z\right|^4 |w|^2}\, d\sigma_w = \iint\limits_{C\overline{\mathbf{D}}} \frac{\frac{1}{|t|^4}}{|\Psi(t)-z|^4\left|\frac{1}{t}\right|^2}\, d\sigma_t$$

$$= \iint_{C\mathbf{D}} \frac{1}{|t|^2|\Psi(t)-z|^4} d\sigma_t = \iint_{1<|t|<R_0} \frac{1}{|t|^2|\Psi(t)-z|^4} d\sigma_t + \iint_{|t|\geq R_0} \frac{1}{|t|^2|\Psi(t)-z|^4} d\sigma_t$$

$$\leq \iint_{1<|t|<R_0} \frac{1}{|\Psi(t)-z|^4} d\sigma_t + \frac{1}{R_0^2} \iint_{|t|\geq R_0} \frac{1}{|\Psi(t)-z|^4} d\sigma_t$$

$$= \iint_{G_{R_0}-G} \frac{|\Phi'(\varsigma)|^2}{|\varsigma-z|^4} d\sigma_\varsigma + \frac{1}{R_0^2} \iint_{CG_{R_0}} \frac{|\Phi'(\varsigma)|^2}{|\varsigma-z|^4} d\sigma_\varsigma$$

$\delta = d(M, \partial G)$ diyelim. M kompakt ve ∂G kapalı olduğundan $\delta > 0$ olur. Her $\varsigma \in G_{R_0} - G$ için $\delta \leq |\varsigma - z|$ olacağından,

$$\iint_{G_{R_0}-G} \frac{|\Phi'(\varsigma)|^2}{|\varsigma-z|^4} d\sigma_\varsigma \leq \frac{1}{\delta^4} \iint_{G_{R_0}-G} |\Phi'(\varsigma)|^2 d\sigma_\varsigma = \frac{1}{\delta^4} \iint_{1<|t|<R_0} d\sigma_t = \frac{1}{\delta^4} \pi(R_0^2 - 1) < \infty$$

olur. Ayrıca, Φ' fonksiyonu CG_{R_0} bölgesinde analitik olduğundan sınırlıdır ve bu nedenle c= $\max\{|\Phi'(\varsigma)| : \varsigma \in CG_{R_0}\}$ olmak üzere,

$$\iint_{CG_{R_0}} \frac{|\Phi'(\varsigma)|^2}{|\varsigma-z|^4} d\sigma_\varsigma \leq c^2 \iint_{CG_{R_0}} \frac{1}{|\varsigma-z|^4} d\sigma_\varsigma$$

olur.

$\rho = d(z, \Gamma_{R_0})$ diyelim. M kompakt ve Γ_{R_0} kapalı olduğundan $\rho > 0$ olur. Ayrıca $D(z, \rho) \subset G_{R_0}$ olduğundan,

$$\iint_{CG_{R_0}} \frac{1}{|\varsigma-z|^4} d\sigma_\varsigma \leq \iint_{CD(z,\rho)} \frac{1}{|\varsigma-z|^4} d\sigma_\varsigma = \iint_{|\varsigma-z|\geq\rho} \frac{1}{|\varsigma-z|^4} d\sigma_\varsigma$$

olur. Buradan, kutupsal koordinatlara geçilerek,

$$\iint_{|\varsigma-z|\geq\rho} \frac{1}{|\varsigma-z|^4} d\sigma_\varsigma = \int_0^{2\pi}\int_\rho^\infty \frac{r\,dr\,d\theta}{r^4} = \int_0^{2\pi}\int_\rho^\infty \frac{dr\,d\theta}{r^3} = \frac{4\pi}{\rho^3} < \infty$$

elde edilir.

$$\iint_{G_{R_0}-G} \frac{|\Phi'(\varsigma)|^2}{|\varsigma-z|^4} d\sigma_\varsigma < \infty \text{ ve } \iint_{CG_{R_0}} \frac{|\Phi'(\varsigma)|^2}{|\varsigma-z|^4} d\sigma_\varsigma < \infty \text{ olduğundan}$$

$$\iint_{\mathbf{D}} \frac{1}{\left|\left[\Psi(\frac{1}{w}) - z\right]^2 w\right|^2} d\sigma_w < \infty$$

olduğu çıkar.

3.2 Ağırlıklı Bergman Uzaylarında Genelleştirilmiş Faber Serileri İle Yaklaşım

G, sınırı kvazikonform bir Γ eğrisi olan sınırlı bir bölge ve $0\in G$ olsun. Φ, $C\overline{G}$'nin $C\overline{D}$'ye $\Phi(\infty)=\infty$ ve $\Phi'(\infty)>0$ koşullarını sağlayan konform dönüşümü olsun. Φ dönüşümünün tersini Ψ ile gösterelim.

g, $C\overline{G}$'de analitik ve $g(\infty)>0$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon ise, $\overline{G}$ kontinyumunun g fonksiyonuna göre $F_m(z,g)$ $(m=0,1,2,\ldots)$ genelleştirilmiş Faber polinomları için

$$\frac{g[\Psi(w)]\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{F_m(z,g)}{w^{m+1}}\ ,\ |w|>1,\ z\in\overline{G}$$

açılımının geçerli olduğunu ve buradaki yakınsamanın her $z\in\overline{G}$ için $|w|>1$ bölgesinin kompakt altkümeleri üzerinde mutlak ve düzgün olduğunu biliyoruz. Bu bölümde özel olarak $g(z)=\Phi'(z)$ alacak ve $m=0,1,2,\ldots$ için $F_m(z,g)=B_m(z)$ yazacağız.

$g(z)=\Phi'(z)$ durumunda $g[\Psi(w)]=\dfrac{1}{\Psi'(w)}$ olacağından

$$\frac{1}{\Psi(w)-z}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m(z)}{w^{m+1}}\ ,\ |w|>1,\ z\in\overline{G}$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafının z'ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{1}{[\Psi(w)-z]^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B'_m(z)}{w^{m+1}}\ ,\ |w|>1,\ z\in\overline{G}$$

elde edilir.

$f\in L(G)$ olsun. 1.4.7 Teoremden y, Γ'ya göre doğal kvazikonform yansıma olmak üzere her $z\in G$ için

$$f(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_{C\overline{G}}\frac{(f\circ y)(\varsigma)}{(\varsigma-z)^2}\,y_{\bar{\varsigma}}(\varsigma)\,d\sigma_{\varsigma}$$

olduğu biliniyor.

Bu bölüm boyunca y, Γ'ya göre doğal kvazikonform yansıma olacaktır.

$$f(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_{C\overline{G}}\frac{(f\circ y)(\varsigma)}{(\varsigma-z)^2}\,y_{\bar{\varsigma}}(\varsigma)\,d\sigma_{\varsigma}\ ,\ z\in G$$

eşitliğinde $\varsigma=\Psi(w)$ dönüşümü yapılırsa, her $z\in G$ için

$$f(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_{CD} f(y(\Psi(w)))\, y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)\frac{1}{[\Psi(w)-z]^2}\,d\sigma_w$$

elde edilir. Buradan,

$$c_m(f)=-\frac{1}{\pi}\iint_{CD}\frac{f(y(\Psi(w)))\, y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)}{w^{m+1}}\,d\sigma_w\ ,\ m=1,2,\ldots$$

olmak üzere

$$f(z)\sim\sum_{m=1}^{\infty}c_m(f)\,B'_m(z)$$

yazalım.

$\sum_{m=1}^{\infty}c_m(f)\,B'_m(z)$ serisi, bir genelleştirilmiş Faber serisinin türev serisi olduğundan , sadelik için bu seriye de f fonksiyonunun genelleştirilmiş Faber serisi, $c_m(f)$ katsayılarına da f fonksiyonunun genelleştirilmiş Faber katsayıları diyeceğiz.

Bu bölümde, özel bir w ağırlık fonksiyonu için $\sum_{m=1}^{\infty}c_m(f)\,B'_m(z)$ serisinin $f\in L^2(G,w)$ fonksiyonuna G'nin kompakt altkümeleri üzerinde düzgün olarak yakınsadığını gösterecek ve bir $\sum_{m=1}^{\infty}b_m B'_m(z)$ serisi $f\in L^2(G,w)$ fonksiyonuna $\|\cdot\|_{L^2(G,w)}$ normunda yakınsıyorsa, b_m katsayılarının f fonksiyonunun genelleştirilmiş Faber katsayıları olacağını ispatlayacağız. Ayrıca, en az iki noktadan oluşan, sınırlı, bağlantılı tümleyene sahip bir E kontinyumu için, R>1 olmak üzere bir $f\in L^2(E_R,w)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Faber serisinin $S_n(f,z)=\sum_{m=1}^{n+1}c_m(f)\,B'_m(z)$ n. kısmi toplamı için $\|f-S_n(f,.)\|_{L^2(E)}$ yaklaşım hatasını, $\|\cdot\|_{L^2(E_R,w)}$ normunda f'ye derecesi n'yi aşmayan polinomlar sınıfındaki $E_n(f,E_R)_w$ yaklaşım derecesi ile değerlendireceğiz.

3.2.1 Lemma: $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|B'_m(z)|^2}{m+1}$ serisi G'nin kompakt altkümeleri üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat: M, G'nin kompakt bir altkümesi ve $z\in M$ olsun.

3.1.6 Teoremden, $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{B'_m(z)}{m+1} w^{m+1}$ serisinin **D** üzerinde analitik bir A(w, z) fonksiyonu tanımladığını biliyoruz. A(w, z) fonksiyonunun w'ye göre türevi alınırsa

$$A'_w(w,z) = \sum_{m=1}^{\infty} B'_m(z)\, w^m$$

elde edilir. $|w|>1$ için $\frac{1}{[\Psi(w)-z]^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B'_m(z)}{w^{m+1}}$ eşitliği geçerli olduğundan, her $w \in \mathbf{D}$ için

$$A'_w(w,z) = \sum_{m=1}^{\infty} B'_m(z)\, w^m = \frac{1}{\left[\Psi(\frac{1}{w}) - z\right]^2 w}$$

olur.

$0<r<1$ olsun. 3.1.7 Sonuç gereğince $\sum_{m=1}^{\infty} B'_m(z)\, w^m$ serisi $\overline{D}(0,r)$ kapalı diski üzerinde düzgün yakınsak olacağından,

$$\iint_{\overline{D}(0,r)} |A'_w(w,z)|^2 d\sigma_w = \pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|B'_m(z)|^2}{m+1} r^{2m+2}$$

olur. O halde,

$$\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|B'_m(z)|^2}{m+1} r^{2m+2} = \iint_{\overline{D}(0,r)} \frac{1}{\left|\left[\Psi(\frac{1}{w}) - z\right]^2 w\right|^2} d\sigma_w$$

eşitliği geçerli olur.

M üzerinde

$$S(z) = \iint_{\mathbf{D}} \frac{1}{\left|\left[\Psi(\frac{1}{w}) - z\right]^2 w\right|^2} d\sigma_w$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

Her $z \in M$ için

$$S(z)=\iint_{D}\frac{1}{\left|\left[\Psi(\frac{1}{w})-z\right]^{2}w\right|^{2}}d\sigma_{w}=\lim_{r\to1^{-}}\iint_{D(0,r)}\frac{1}{\left|\left[\Psi(\frac{1}{w})-z\right]^{2}w\right|^{2}}d\sigma_{w}$$

$$=\lim_{r\to1^{-}}\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|B'_m(z)|^2}{m+1}r^{2m+2}=\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|B'_m(z)|^2}{m+1}$$

ve 3.1.8 Teorem gereğince $\iint_{D}\frac{1}{\left|\left[\Psi(\frac{1}{w})-z\right]^{2}w\right|^{2}}d\sigma_{w}<\infty$ olduğundan

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|B'_m(z)|^2}{m+1}=\frac{S(z)}{\pi}<\infty$$

elde edilir. Yani $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|B'_m(z)|^2}{m+1}$ serisinin M üzerinde yakınsak olduğu elde edilir.

Böylece, M üzerinde

$$f_k(z)=\frac{S(z)}{\pi}-\sum_{m=1}^{k}\frac{|B'_m(z)|^2}{m+1}\ ,\ k=1,2,\ldots$$

biçiminde tanımlanan (f_k) fonksiyonlar dizisine Dini Teoremi uygulanarak $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|B'_m(z)|^2}{m+1}$ serisinin M üzerinde düzgün yakınsak olduğu görülür.

3.2.2 Lemma: w, G üzerinde bir ağırlık fonksiyonu ve $f\in L^2(G,w)$ olsun. $\Gamma=\partial G$'ye göre y kvazikonform yansımasının K-kvazikonform olduğunu varsayalım. Bu durumda $k=\frac{K-1}{K+1}$ olmak üzere

$$\iint_{CG}|f(y(\varsigma))|^2w(y(\varsigma))\left|y_{\bar{\varsigma}}(\varsigma)\right|^2d\sigma_{\varsigma}\le\frac{\|f\|^2_{L^2(G,w)}}{1-k^2}$$

olur.

İspat: $\bar{y}$ bir K-kvazikonform dönüşüm olduğundan,

$$\frac{|y_{\varsigma}|}{|y_{\bar{\varsigma}}|}=\frac{|\bar{y}_{\bar{\varsigma}}|}{|\bar{y}_{\varsigma}|}\le k<1$$

olur. y'nin Jakobiyeninin $J(y)=|y_{\varsigma}|^2-|y_{\bar{\varsigma}}|^2<0$ olduğu gözönüne alınarak,

$$\iint_{CG} |f(y(\varsigma))|^2 w(y(\varsigma)) \left|y_{\bar{\varsigma}}(\varsigma)\right|^2 d\sigma_\varsigma = \iint_{CG} |f(y(\varsigma))|^2 w(y(\varsigma)) \left[1 - \frac{|y_\varsigma|^2}{|y_{\bar{\varsigma}}|^2}\right]^{-1} |J(y)|\, d\sigma_\varsigma$$

$$\leq \frac{1}{1-k^2} \iint_{CG} |f(y(\varsigma))|^2 w(y(\varsigma))\, |J(y)|\, d\sigma_\varsigma$$

$$= \frac{1}{1-k^2} \iint_{G} |f(z)|^2 w(z)\, d\sigma_z = \frac{\| f \|^2_{L^2(G,w)}}{1-k^2}$$

bulunur.

3.2.3 Lemma: $m, n = 1, 2, \ldots$ için

$$c_n(B'_m) = \begin{cases} 1 & ; m = n \\ 0 & ; m \neq n \end{cases}$$

olur.

İspat: Green formülü ve Cauchy integral teoremi kullanılarak ve y'nin Γ'nın noktalarını sabit bıraktığı gözönünde bulundurularak,

$$c_n(B'_m) = -\frac{1}{\pi} \iint_{CD} \frac{B'_m(y(\Psi(w)))\, y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)]\, \overline{\Psi'(w)}\, \Psi'(w)}{w^{n+1}} d\sigma_w$$

$$= -\frac{1}{\pi} \iint_{CD} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left[\frac{B_m(y(\Psi(w)))\, \Psi'(w)}{w^{n+1}}\right] d\sigma_w$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{B_m(\Psi(w))\, \Psi'(w)}{w^{n+1}} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R>1} \frac{B_m(\Psi(w))\, \Psi'(w)}{w^{n+1}} dw$$

eşitliği elde edilir.

$B_m(\Psi(w)) = \dfrac{1}{\Psi'(w)} w^m + H_m(\Psi(w), g)$ olduğundan

$$c_n(B'_m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R>1} \frac{w^m}{w^{n+1}} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R>1} \frac{H_m(\Psi(w), g)\, \Psi'(w)}{w^{n+1}} dw$$

olur. $H_m(\Psi(w), g)\, \Psi'(w)$ fonksiyonu $|w| > 1$ bölgesinde analitik olduğundan sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülü gereğince

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R>1}\frac{H_m(\Psi(w),g)\,\Psi'(w)}{w^{n+1}}\,dw=0$$

olur. Bu nedenle

$$c_n(B'_m)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R>1}\frac{w^m}{w^{n+1}}\,dw=\begin{cases}1\ ;\ m=n\\ 0\ ;\ m\neq n\end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

3.2.4 Lemma: P, n. dereceden bir polinom olsun. Bu durumda, $P(z)=\sum_{m=1}^{n+1}c_m(P_n)\,B'_m(z)$ ve $m\geq n+2$ için $c_m(P)=0$ olur.

İspat: P, n. dereceden bir polinom olduğundan

$$P(z)=\sum_{k=1}^{n+1}a_k\,B'_k(z)$$

biçiminde yazılabilir. Buradan,

$$c_m(P)=-\frac{1}{\pi}\iint_{C\overline{D}}\frac{P(y(\Psi(w)))\,y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)]\,\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)}{w^{m+1}}\,d\sigma_w$$

$$=-\frac{1}{\pi}\iint_{C\overline{D}}\frac{\left[\sum_{k=1}^{n+1}a_k\,B'_k(y(\Psi(w)))\right]y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)]\,\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)}{w^{m+1}}\,d\sigma_w$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}a_k\left[-\frac{1}{\pi}\iint_{C\overline{D}}\frac{B'_k(y(\Psi(w)))\,y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)]\,\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)}{w^{m+1}}\,d\sigma_w\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}a_k\,c_m(B'_k)$$

elde edilir. Bu eşitlik ve 3.2.3 Lemma kullanılarak $m=1,2,\dots,n+1$ için $c_m(P)=a_m$ bulunur. Buradan $P(z)=\sum_{m=1}^{n+1}c_m(P)\,B'_m(z)$ olduğu çıkar. Bu eşitlik $m\geq n+2$ için $c_m(P)=0$ olduğunu verir.

$g(z)=\Phi'(z)$ konform dönüşümünü ve Γ'ya göre y kvazikonform yansımasını kulanarak G üzerinde

$$w(z)=\frac{1}{|g(y(z))|^2}$$

fonksiyonunu tanımlayalım ve $\iint_G w(z)\,d\sigma_z < \infty$ olduğunu varsayalım. Bundan sonra ağırlık fonksiyonu olarak bu w fonksiyonunu kullanacağız.

3.2.5 Teorem: Bir $f \in L^2(G, w)$ fonksiyonunun $\sum_{m=1}^{\infty} c_m(f)\, B'_m(z)$ genelleştirilmiş Faber serisi, G'nin kompakt altkümeleri üzerinde bu fonksiyona düzgün olarak yakınsar.

İspat: y yansımasının K-kvazikonform olduğunu varsayalım.

Önce $f \in L(G)$ olduğunu gösterelim. $1<R<\infty$ biçiminde bir R sayısı alalım.

$$\iint_G |g(y(z))|^2 d\sigma_z = \iint_{CG} |g(\varsigma)|^2 |J(y)|\, d\sigma_\varsigma = \iint_{CG} |g(\varsigma)|^2 \left[\left|y_{\bar\varsigma}\right|^2 - \left|y_\varsigma\right|^2 \right] d\sigma_\varsigma$$

$$\le \iint_{CG} |g(\varsigma)|^2 \left|y_{\bar\varsigma}\right|^2 d\sigma_\varsigma = \iint_{G_R - \bar G} |g(\varsigma)|^2 \left|y_{\bar\varsigma}\right|^2 d\sigma_\varsigma + \iint_{CG_R} |g(\varsigma)|^2 \left|y_{\bar\varsigma}\right|^2 d\sigma_\varsigma$$

R'yi öyle küçük seçelim ki, $d(\Gamma, \Gamma_R) < 1$ olsun ve $\delta = d(\Gamma, \Gamma_R)$ aldığımızda her $\varsigma \in G_R - \bar G$ için $\delta < |\varsigma| < \dfrac{1}{\delta}$ olsun. Bu durumda, c sabit bir sayı olmak üzere $|y_\varsigma| + |y_{\bar\varsigma}| \le c$ koşulu sağlanacağından

$$\iint_{G_R - \bar G} |g(\varsigma)|^2 \left|y_{\bar\varsigma}\right|^2 \le c^2 \iint_{G_R - \bar G} |g(\varsigma)|^2 d\sigma_\varsigma = c^2 \iint_{G_R - \bar G} |\Phi'(\varsigma)|^2 d\sigma_\varsigma$$

$$= c^2 \iint_{1<|w|<R} \left| \frac{1}{\Psi'(w)} \right|^2 |\Psi'(w)|^2 d\sigma_w = c^2 \iint_{1<|w|<R} d\sigma_w = c^2 \pi (R^2 - 1) < \infty$$

elde edilir. $k = \dfrac{K-1}{K+1}$ ve $m = \max\{|g(\varsigma)| : \varsigma \in CG_R\}$ olmak üzere

$$\iint_{CG_R} |g(\varsigma)|^2 \left|y_{\bar\varsigma}\right|^2 \le m^2 \iint_{CG_R} \left|y_{\bar\varsigma}\right|^2 d\sigma_\varsigma = m^2 \iint_{CG_R} \left[1 - \frac{\left|y_\varsigma\right|^2}{\left|y_{\bar\varsigma}\right|^2} \right]^{-1} |J(y)|\, d\sigma_\varsigma$$

$$\le m^2 \iint_{CG} \left[1 - \frac{\left|y_\varsigma\right|^2}{\left|y_{\bar\varsigma}\right|} \right]^{-1} |J(y)|\, d\sigma_\varsigma \le \frac{m^2}{1-k^2} \iint_{CG} |J(y)|\, d\sigma_\varsigma = \frac{m^2}{1-k^2} \iint_G d\sigma_z$$

$$= \frac{m^2}{1-k^2}\, \mathrm{alan}(G) < \infty$$

bulunur. O halde $\iint_G |g(y(z))|^2 \, d\sigma_z < \infty$ olur. Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\iint_G |f(z)| \, d\sigma_z = \iint_G |f(z)| \, |g(y(z))| \frac{1}{|g(y(z))|} d\sigma_z$$

$$\leq \left[\iint_G |f(z)|^2 \frac{1}{|g(y(z))|^2} d\sigma_z \right]^{\frac{1}{2}} \left[\iint_G |g(y(z))|^2 d\sigma_z \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\iint_G |f(z)|^2 w(z) \, d\sigma_z \right]^{\frac{1}{2}} \left[\iint_G |g(y(z))|^2 d\sigma_z \right]^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik, $\iint_G |g(y(z))|^2 d\sigma_z < \infty$ eşitsizliği ve $f \in L^2(G,w)$ oluşu $\iint_G |f(z)| \, d\sigma_z < \infty$ olduğunu yani $f \in L(G)$ olduğunu verir.

Hölder eşitsizliği kullanılarak, her $z \in G$ için,

$$\left| f(z) - \sum_{m=1}^{n} c_m(f) \, B'_m(z) \right|^2$$

$$= \left| -\frac{1}{\pi} \iint_{C\overline{D}} f(y(\Psi(w))) \, y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)] \overline{\Psi'(w)} \, \Psi'(w) \frac{1}{[\Psi(w) - z]^2} d\sigma_w \right.$$

$$\left. - \sum_{m=1}^{n} \left(-\frac{1}{\pi} \iint_{C\overline{D}} \frac{f(y(\Psi(w))) \, y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)] \overline{\Psi'(w)} \, \Psi'(w)}{w^{m+1}} d\sigma_w \right) B'_m(z) \right|^2$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left| \iint_{C\overline{D}} f(y(\Psi(w))) \, y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)] \overline{\Psi'(w)} \, \Psi'(w) \left(\frac{1}{[\Psi(w) - z]^2} - \sum_{m=1}^{n} \frac{B'_m(z)}{w^{m+1}} \right) d\sigma_w \right|^2$$

$$\leq \frac{1}{\pi^2} \left[\iint_{C\overline{D}} \left| f(y(\Psi(w))) \, y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)] \overline{\Psi'(w)} \, \Psi'(w) \right|^2 d\sigma_w \right] \left[\iint_{C\overline{D}} \left| \frac{1}{[\Psi(w) - z]^2} - \sum_{m=1}^{n} \frac{B'_m(z)}{w^{m+1}} \right|^2 d\sigma_w \right]$$

eşitsizliği elde edilir.

3.2.2 Lemma kullanılarak,

$$\iint_{C\overline{D}} \left| f(y(\Psi(w))) \, y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)] \overline{\Psi'(w)} \, \Psi'(w) \right|^2 d\sigma_w$$

$$= \iint_{C\overline{D}} \frac{\left| f(y(\Psi(w)))\, y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)} \right|^2}{\left| g(\Psi(w)) \right|^2} d\sigma_w$$

$$= \iint_{C\overline{G}} \frac{\left| f(y(\varsigma)) \right|^2 \left| y_{\bar{\varsigma}}(\varsigma) \right|^2}{\left| g(\varsigma) \right|^2} d\sigma_\varsigma = \iint_{C\overline{G}} \left| f(y(\varsigma)) \right|^2 w(y(\varsigma)) \left| y_{\bar{\varsigma}}(\varsigma) \right|^2 d\sigma_\varsigma \le \frac{\| f \|^2_{L^2(G,w)}}{1-k^2}$$

bulunur.

$1 < r < \rho$ olsun. Bu durumda,

$$\iint_{r<|w|<\rho} \left| \frac{1}{[\Psi(w) - z]^2} - \sum_{m=1}^{n} \frac{B'_m(z)}{w^{m+1}} \right|^2 d\sigma_w = \iint_{r<|w|<\rho} \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{B'_m(z)}{w^{m+1}} \right|^2 d\sigma_w$$

$$= \pi \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{r^{2m}} - \frac{1}{\rho^{2m}} \right) \left| B'_m(z) \right|^2$$

$$\le 4\pi \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\left| B'_m(z) \right|^2}{m+1}$$

eşitsizliği sağlanır. $r \to 1, \rho \to \infty$ için bu eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa,

$$\iint_{C\overline{D}} \left| \frac{1}{[\Psi(w) - z]^2} - \sum_{m=1}^{n} \frac{B'_m(z)}{w^{m+1}} \right|^2 d\sigma_w \le 4\pi \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\left| B'_m(z) \right|^2}{m+1}$$

elde edilir.

O halde her $z \in G$ için,

$$\left| f(z) - \sum_{m=1}^{n} c_m(f)\, B'_m(z) \right|^2 \le \frac{4}{\pi} \frac{\| f \|^2_{L^2(G,w)}}{1-k^2} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\left| B'_m(z) \right|^2}{m+1}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece, 3.2.1.Lemma gereğince $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left| B'_m(z) \right|^2}{m+1}$ serisi G'nin kompakt altkümeleri üzerinde düzgün yakınsak olduğundan, $\sum_{m=1}^{\infty} c_m(f)\, B'_m(z)$ serisi G'nin kompakt altkümeleri üzerinde f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar.

3.2.6 Teorem: (b_m) bir karmaşık sayı dizisi olsun. Eğer $\sum_{m=1}^{\infty} b_m B'_m(z)$ serisi, $\| \cdot \|_{L^2(G,w)}$ normuna göre $f \in L^2(G,w)$ fonksiyonuna yakınsıyorsa, b_m katsayıları f fonksiyonunun genelleştirilmiş Faber katsayıları olur.

İspat: $\sum_{k=1}^{\infty} b_k B'_m(z)$ serisinin $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n+1} b_k B'_k(z)$ n. kısmi toplamını alalım.

3.2.3.Lemma kullanılarak, m = 1, 2, … için

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{\pi} \iint_{CD} \frac{S_n(y(\Psi(w)))\, y_{\bar{ç}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)}{w^{m+1}} d\sigma_w$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} b_k \left[-\frac{1}{\pi} \iint_{CD} \frac{B'_k(y(\Psi(w)))\, y_{\bar{ç}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)}{w^{m+1}} d\sigma_w \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} b_k c_m(B'_k)$$

$$= b_m$$

bulunur. Hölder eşitsizliği ve 3.2.2 Lemma kullanılarak, $m = 1,2,...$ için

$$|c_m(f) - b_m| = \left| -\frac{1}{\pi} \iint_{CD} \frac{f(y(\Psi(w)))\, y_{\bar{ç}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)}{w^{m+1}} d\sigma_w - b_m \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{\pi} \iint_{CD} \frac{(f - S_n)(y(\Psi(w)))\, y_{\bar{ç}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)}{w^{m+1}} d\sigma_w \right.$$

$$-\frac{1}{\pi} \iint_{CD} \frac{S_n(y(\Psi(w)))\, y_{\bar{ç}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)}{w^{m+1}} d\sigma_w$$

$$\left. - b_m \right|$$

$$\le \frac{1}{\pi} \left[\iint_{CD} \frac{1}{|w|^{2m+2}} d\sigma_w \right]^{\frac{1}{2}} \left[\iint_{CD} \left|(f - S_n)(y(\Psi(w)))\, y_{\bar{ç}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)\right|^2 d\sigma_w \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left| -\frac{1}{\pi} \iint_{CD} \frac{S_n(y(\Psi(w)))\, y_{\bar{ç}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)}{w^{m+1}} d\sigma_w - b_m \right|$$

$$=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{m}}\left[\iint_{CD}\left|(f-S_n)(y(\Psi(w)))\,y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)\right|^2 d\sigma_w\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left|-\frac{1}{\pi}\iint_{CD}\frac{S_n(y(\Psi(w)))\,y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)}{w^{m+1}}d\sigma_w-b_m\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi m}}\left[\iint_{CG}\left|\frac{(f-S_n)(y(\varsigma))\,y_{\bar{\varsigma}}(\varsigma)}{g(\varsigma)}\right|^2 d\sigma_\varsigma\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left|-\frac{1}{\pi}\iint_{CD}\frac{S_n(y(\Psi(w)))\,y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)}{w^{m+1}}d\sigma_w-b_m\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi m}}\left[\iint_{CG}|(f-S_n)(y(\varsigma))|^2\,w(y(\varsigma))\left|y_{\bar{\varsigma}}(\varsigma)\right|^2 d\sigma_\varsigma\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left|-\frac{1}{\pi}\iint_{CD}\frac{S_n(y(\Psi(w)))\,y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)}{w^{m+1}}d\sigma_w-b_m\right|$$

$$\le c\,\|f-S_n\|_{L^2(G,w)}+\left|-\frac{1}{\pi}\iint_{CD}\frac{S_n(y(\Psi(w)))\,y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)}{w^{m+1}}d\sigma_w-b_m\right|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten ve $n\to\infty$ için $\|f-S_n\|_{L^2(G,w)}\to 0$ ve

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{CD}\frac{S_n(y(\Psi(w)))\,y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)}{w^{m+1}}d\sigma_w\to b_m$$ olduğundan , $m=1,2,\dots$

için $c_m(f)=b_m$ elde edilir.

E, en az iki noktadan oluşan, bağlantılı tümleyene sahip sınırlı bir kontinyum ve $B_m(z)$'ler E kontinyumunun $g(z)=\Phi'(z)$ fonksiyonuna göre genelleştirilmiş Faber polinomları olsunlar.

3.2.7 Lemma: $1<r<R$ ve $M_r=\max\{|g(z)| : z\in CE_r\}$ olmak üzere

$$\sum_{m=n+2}^{\infty}\frac{\|B'_m\|^2_{L^2(E)}}{m\,R^{2m}}\le\frac{\pi M_r^2}{r^2-1}\,\frac{r^{2n+4}}{R^{2(n+1)}(R^2-r^2)}$$

olur.

İspat: a_k'lar $g[\Psi(w)]$ fonksiyonunun $|w|>1$ bölgesindeki Laurent katsayıları olmak üzere 3.1.3.Teoremden,

$$B_m(\Psi(w)) = a_0 w^m + a_1 w^{m-1} + \ldots + a_{m-1} w + a_m + \sum_{s=1}^{\infty} d_s w^{-s}, |w| > 1$$

olduğunu biliyoruz. E'nin B_m altındaki görüntüsünün B_m'nin Riemann yüzeyindeki alanı $S_m(E)$ olsun. Lebedev-Millin teoremi kullanılarak

$$\begin{aligned} S_m(E) &= \pi\left[m|a_0|^2 + (m-1)|a_1|^2 + \ldots + |a_{m-1}|^2 - \sum_{s=1}^{\infty} s|d_s|^2\right] \\ &\le \pi\left[m|a_0|^2 + (m-1)|a_1|^2 + \ldots + |a_{m-1}|^2\right] \\ &\le \pi m\left[|a_0|^2 + |a_1|^2 + \ldots + |a_{m-1}|^2\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=r} g[\Psi(w)] w^{k-1} dw \ (k = 0, 1, \ldots)$ olduğundan,

$$|a_k| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|w|=r} |g[\Psi(w)]| |w|^{k-1} |dw| \le \frac{M_r r^{k-1}}{2\pi} \int\limits_{|w|=r} |dw| = M_r r^k$$

bulunur. Bu nedenle,

$$S_m(E) \le \pi m [\, M_r^2 + M_r^2 r^2 + \ldots + M_r^2 r^{2(m-1)}] = \pi m M_r^2 [1 + r^2 + \ldots + r^{2(m-1)}]$$

$$= \pi m M_r^2 \frac{1-r^{2m}}{1-r^2} = \pi m M_r^2 \frac{r^{2m}-1}{r^2-1} \le \pi m M_r^2 \frac{r^{2m}}{r^2-1}$$

olur. Ayrıca,

$$S_m(E) = \iint\limits_E |B'_m(z)|^2 d\sigma_z = \| B'_m \|^2_{L^2(E)}$$

olduğundan,

$$\| B'_m \|^2_{L^2(E)} \le \pi m M_r^2 \frac{r^{2m}}{r^2-1}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan,

$$\sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{\| B'_m \|^2_{L^2(E)}}{m R^{2m}} \le \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{1}{m R^{2m}} \pi m M_r^2 \frac{r^{2m}}{r^2-1} = \frac{\pi M_r^2}{r^2-1} \sum_{m=n+2}^{\infty} \left(\frac{r^2}{R^2}\right)^m$$

$$= \frac{\pi M_r^2}{r^2-1} \frac{\left(\frac{r^2}{R^2}\right)^{n+2}}{1-\frac{r^2}{R^2}} = \frac{\pi M_r^2}{r^2-1} \frac{r^{2n+4}}{R^{2(n+1)}(R^2-r^2)}$$

elde edilir.

R>1 olmak üzere, Γ_R analitik bir eğri olduğundan kvazikonform bir eğri olur. y_R, Γ_R'ye göre K_R-kvazikonform yansıma ve

$$w(z)=\frac{1}{|g(y_R(z))|^2}\ ,\ z\in E_R$$

olsun.

3.2.8 Teorem: $1<r<R$, $f\in L^2(E_R,w)$ ve $S_n(f,z)=\sum_{m=1}^{n+1}c_m(f)\,B'_m(z)$, f

fonksiyonunun $\sum_{m=1}^{\infty}c_m(f)\,B'_m(z)$ genelleştirilmiş Faber serisinin n. kısmi toplamı

olsun. Bu durumda, $M_r=\max\{|g(z)|: z\in CE_r\}$ ve $k_R=\dfrac{K_R-1}{K_R+1}$ olmak üzere

$$\|f-S_n(f,.)\|_{L^2(E)}\le\frac{M_r\,R}{\sqrt{(1-k_R^2)(R^2-r^2)(r^2-1)}}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2}E_n(f,E_R)_w$$

olur.

İspat: P_n^*, f fonksiyonuna $\|\cdot\|_{L^2(E_R,w)}$ normunda derecesi n'yi aşmayan polinomlar sınıfında en iyi yaklaşan polinom, yani

$$E_n(f,E_R)_w=\|f-P_n^*\|_{L^2(E_R,w)}$$

olsun. 3.2.4 Teorem, 3.2.5 Sonuç, Hölder eşitsizliği ve 3.2.3 Lemma kullanılarak, her $z\in E$ için

$$|f(z)-S_n(f,z)|=\left|\sum_{m=n+2}^{\infty}c_m(f)\,B'_m(z)\right|$$

$$=\left|\sum_{m=n+2}^{\infty}\left[c_m(f)-c_m(P_n^*)\right]B'_m(z)\right|$$

$$=\left|\sum_{m=n+2}^{\infty}\left[-\frac{1}{\pi}\iint_{|w|>R}\frac{(f-P_n^*)(y_R(\Psi(w)))y_{R_\xi}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)}{w^{m+1}}d\sigma_w\right]B'_m(z)\right|$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\sum_{m=n+2}^{\infty}\iint_{|w|>R}(f-P_n^*)(y_R(\Psi(w)))\,y_{R_\xi}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)\frac{B'_m(z)}{w^{m+1}}d\sigma_w\right|$$

$$= \frac{1}{\pi}\left| \iint_{|w|>R} (f - P_n^*)(y_R(\Psi(w)))\, y_{R_{\bar{\varsigma}}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w) \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{B'_m(z)}{w^{m+1}}\, d\sigma_w \right|$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\left[\iint_{|w|>R} \left|(f - P_n^*)(y_R(\Psi(w)))\, y_{R_{\bar{\varsigma}}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\,\Psi'(w)\right|^2 d\sigma_w \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{x}\left[\iint_{|w|>R} \left| \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{B'_m(z)}{w^{m+1}} \right|^2 d\sigma_w \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\iint_{CE_R} \frac{\left|(f - P_n^*)(y_R(\varsigma))\, y_{R_{\bar{\varsigma}}}(\varsigma)\right|^2}{|g(\varsigma)|^2} d\sigma_\varsigma \right]^{\frac{1}{2}} \left[\pi \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{|B'_m(z)|^2}{m R^{2m}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\iint_{CE_R} \left|(f - P_n^*)(y_R(\varsigma))\right|^2 w(y_R(\varsigma)) \left| y_{R_{\bar{\varsigma}}}(\varsigma)\right|^2 d\sigma_\varsigma \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{x}\left[\pi \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{|B'_m(z)|^2}{m R^{2m}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-k_R^2}} \left\| f - P_n^* \right\|_{L^2(E_R, w)} \left[\sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{|B'_m(z)|^2}{m R^{2m}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Buradan her $z \in E$ için

$$|f(z) - S_n(f,z)|^2 \leq \frac{[E_n(f,E_R)_w]^2}{\pi(1-k_R^2)} \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{|B'_m(z)|^2}{m R^{2m}}$$

olduğu çıkar. Son eşitsizliğin her iki tarafının E üzerinden integrali alınır ve 3.2.7 Lemma kullanılırsa

$$\|f - S_n(f,.)\|_{L^2(E)}^2 \leq \frac{[E_n(f,E_R)_w]^2}{\pi(1-k_R^2)} \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{\|B'_m\|_{L^2(E)}^2}{m R^{2m}}$$

$$\leq \frac{[E_n(f,E_R)_w]^2}{1-k_R^2} \frac{R^2 M_r^2}{(R^2 - r^2)(r^2 - 1)} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+4}$$

bulunur. Buradan da

$$\|f - S_n(f,.)\|_{L^2(E)} \leq \frac{M_r\, R}{\sqrt{(1-k_R^2)(R^2 - r^2)(r^2 - 1)}} \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} E_n(f,E_R)_w$$

elde edilir.

Bilindiği gibi, fonksiyonların Faber serisine açılımı, genel olarak Cauchy integral formülü yardımıyla verilir (bak: [6], [15]). Fakat Cauchy integral formülü sadece sonlu uzunluklu eğrilerle sınırlı bölgelerde geçerlidir. Bu çalışmada ise fonksiyonların Faber serisine açılımı için kvazikonform sınırlı bölgelerde geçerli olan bir integral gösterimi kullanılmıştır. Kvazikonform sınırlı bölgelerin sınırları özel halde yerel sonlu uzunluklu bile olmayabilir. Bu açıdan baktığımızda bu bölümde elde edilen sonuçlar daha önce [4] ve [8] çalışmalarında Faber serilerine açılım ve bu serilerin yaklaşım özellikleri ile ilgili elde edilen sonuçların devamı niteliğindedir. Elde edilen sonuçlar aynı zamanda [6] ve [15] numaralı kaynaklarda sonlu uzunluklu eğrilerle sınırlı bölgelerde araştırılmış uygun problemlerin kvazikonform sınırlı bölgelere genelleşmesidir. Bu bölümün ana sonuçları olan 3.2.5 Teorem, 3.2.6 Teorem ve 3.2.8 Teorem'in ifadelerinden de görüldüğü gibi bu bölümde yaklaşım problemlerinin incelenmesinde ve yaklaşan polinomların inşasında çok önemli olan durum, g fonksiyonunun $g[\Psi(w)] = \frac{1}{\Psi'(w)}$ ile verildiği durum araştırılmıştır. Bu durum yukarıda adı geçen [4] ve [8] çalışmalarında araştırılmamıştır. Elde edilen sonuçlar ağırlık fonksiyonunun bu özel durumunun doğurduğu genelleştirilmiş Faber serilerinin uygun ağırlıklı Bergman uzaylarında yeterince iyi yaklaşım özelliklerine sahip olduğunu göstermektedir.

KAYNAKLAR

[1] Ahlfors, L.V., Lectures on quasiconformal mappings, Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series (1987).

[2] Belyi, V.I., "Conformal mappings and the approximation of analytic functions in domains with a quasiconformal boundary", *Math. USSR Sbornik* 31 (1977), 289-317.

[3] Conway, J.B., Functions of one complex variable II, Springer-Verlag (1995).

[4] Çavuş, A., "Approximation by generalized Faber series in Bergman spaces on finite regions with quasiconformal boundary", *Journal of Approximation Theory* 87(1996), 25-35.

[5] Davis, P.J., Interpolation and approximation, Blaisdell Publishing Company (1963).

[6] Gaier, D., Lectures on complex approximation, Birkhauser Boston,Inc. (1987).

[7] Gonzalez, M.O., Classical Complex Analysis, Marcel Dekker, Inc. (1992).

[8] Israfilov, D.M., "Approximation by generalized Faber series in weighted Bergman spaces on finite domains with quasiconformal boundary", *East Journal on Approximations* 4 (1998), 1-13.

[9] Anderson, J.M., Gehring, F.W., Hinkkanen, A., "Polynomial approximation in quasidisks", *Differential Geometry and Complex Analysis* (1985), 75-86.

[10] Kövari, T. and Pommerenke, C., "On Faber polynomials and Faber expansions", *Mathematische Zeitschrift* 99 (1967), 193-206.

[11] Lehto, O. and Virtanen, K., Quasiconformal mappings in the plane, Springer-Verlag (1973).

[12] Markushevich, A.I., Theory of functions of a complex variable III, Prentice Hall, Inc. (1967).

[13] Pommerenke, C., Boundary behaviour of conformal maps, Springer-Verlag (1992).

[14] Pommerenke, C., Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht (1975).

[15] Suetin, P.K., Series of Faber polynomials, Gordon and Breach Science Publishers (1998).