T.C.

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEĞİŞKEN KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Engin BOZACI

Balıkesir, Ocak -2000

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEĞİŞKEN KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Engin BOZACI

Balıkesir, Ocak-2000

T.C.

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEĞİŞKEN KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Engin BOZACI

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Mehmet SEZER

Sınav Tarihi : 23.02.2000

Jüri Üyeleri : Prof. Dr Turgut Başkan

Prof. Dr Mehmet Arısoy

Balıkesir, Ocak-2000

ÖZET

DEĞİŞKEN KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Engin BOZACI
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı : Prof.Dr. Mehmet SEZER

Balıkesir, 2000

Bu çalışmada, yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer adi diferansiyel denklemlerin verilen koşullara göre analitik çözümleri ile ilgili metodlar araştırılmıştır.

Bu çalışma 9 bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde değişken katsayılı yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin belli yöntemlerle çözümleri; ikinci bölümde Riccati Denkleminin dönüşüm yöntemi ile çözümü araştırılmıştır. Üçüncü bölümde Laplace Dönüşüm yöntemleri ile çözüm aranması, dördüncü ve altıncı bölümde sabit katsayılı hale dönüştürme, beşinci bölümde özel çözüm yöntemleri, yedinci bölümde Frenet Benzeri diferansiyel denklem sisteminin 3.mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denkleme dönüşümü, sekizinci bölümde uygulamalar ve dokuzuncu bölümde sonuç ve tartışma verilmiştir.

ABSTRACT

DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COFFICIENTS

Engin BOZACI
Balıkesir University, Institute of Science,
Department of Mathematics

M.Sc. Thesis / Supervisor : Prof. Dr. Mehmet SEZER

Balıkesir-Turkey, 2000

In this study,the different techniques of analytical solution have been examined and presented in the higher order linear ordinary differential equations with variable coefficients under the given conditions.

There are totally 9 chapters. The first chapter deals with the known solution methods of the higher order differential equations with variable coefficients. In the second chapter, the solutions are developed by means of transformation method of Riccati Equation. In the third chapter, the methods of Laplace transformation are used to solve. Fourth and sixth chapters are related with the reduction of linear differential equations to equations with constant coefficients. In the fifth chapter, the solution methods which depend on special conditions are studied in detail. Some examples and solution procedures are also included by considering the main application areas. In the seventh chapter, the transformation of Frenet like differential equations to third order differential equations with variable coefficients are given. The next one deals with the application of above methods. Results and discussions can be found in the last chapter.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans tez danışmanım olmayı kabul ederek kısa bir süre içerisinde bu çalışmayı ortaya çıkarmamı sağlayan ve kısıtlı imkanlarımız çerçevesinde her konuda bana yardımcı olan Buca Eğitim Fakültesi Matematik Bölüm başkanı Öğretim Üyesi Saygıdeğer Hocam Prof.Dr. Mehmet SEZER'e yaptığı girişimler sonucunda, danışman hocamla tanışmamı, çalışmamı sağlayan ve bu konuda her türlü yardımı gösteren Sayın Hocam Prof.Dr. Turgut BAŞKAN ve Prof.Dr. S.Ahmet KILIÇ'a yürekten teşekkür ederim.

Bu çalışmamı hazırlama süresince kendilerine ait olan zamandan fedakarlık ederek ve her zaman yanı başımda olduklarını hissettirerek bana daima çalışma gücü veren tükenmez sevgi kaynağı aileme ve okuluma teşekkür etmek isterim. Beni kendilerini tanımakta ve örnek almaktan çok şeyler kazandığıma inandığım Prof.Dr. Turgut BAŞKAN, Prof.Dr. Mehmet SEZER, Prof.Dr. Seyit Ahmet KILIÇ, , Prof.Dr. Mehmet ARISOY, Prof.Dr. Aydın OKÇU, Yrd.Doç.Dr. Cengiz AYDEMİR ve isimlerini yazamadığım birçok hocama bana gösterdikleri yakınlık ve teşvik edici ilgilerinden dolayı kendilerine minnettarım.

Ocak 2000 **Engin BOZACI**

I. TEMEL KAVRAMLAR

1.1. GİRİŞ

Yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemler fen, mühendislik ve matematiğin birçok dalında matematiksel bir model olarak karşımıza çıkmaktadır. Bunların analitik (tam) çözümlerini bulmak genellikle zordur. Hatta imkansızdır. En basit denklemlerden birisi olan $y'' + f(x)\, y = 0$ tipindeki denklemler dahi belli koşullar altında genellikle çözülemez. n. Mertebeden genel lineer homojen denklem halinde de genel çözüm yöntemleri açık olarak mevcut değildir. [20] Bu durumda problemlere açık bir yaklaşım, verilen denklemi sabit katsayılı hale dönüştürecek olan bir bağımsız değişken değişimi bulmaya çalışmaktır. Bu alanda Berkovic [1-3] ve Breuer-Gotlieb [20] tarafından önemli çalışmalar yapılmıştır.
Yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemleri çözmek için, sabit katsayılı denklemlerdeki gibi genel yöntemler yoktur. Bazı özel hallere uygulanabilecek özel yöntemler vardır. [10-12] Bunlardan bazıları "Mertebe düşürme, Parametrelerin değişimi, Sabit katsayılı hale düşürme ve Bazı özel yöntemler" olarak sıralanabilir. [10,11,29,33]

Bu çalışmada, genellikle uygulamalı bilim dallarında karşımıza çıkan yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin çözüm metotları incelecek ve değişik alanlardan örnekler sunulacaktır.

1.2. YÜKSEK MERTEBEDEN DEĞİŞKEN KATSAYILI LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

n. mertebeden lineer diferansiyel denklem

$$b_n(x)y^{(n)} + b_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + b_{n-2}(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x) \quad (1.2.1)$$

biçiminde yazılabilen bir denklemdir. Burada $b_j(x)$, ($j = n, n-1, n-2, ..., 2, 1, 0$) katsayıları ve g(x) fonksiyonu bir I aralığında x'in sürekli ve tek değerli fonksiyonları farz edilecektir. $g(x) = 0$ olması halinde (1.2.1) denklemi homogen veya indirgenmiş denklem ismini alır. (1.2.1) denklemi için varlık teoremi şu şekilde ifade edilebilir.

Teorem 1.1.

$b_n(x), b_{n-1}(x),...,b_2(x), b_1(x), b_0(x)$ ve g(x) fonksiyonları bir I aralığında sürekli ve tek değerli fonksiyonlar olmak üzere, (1.2.1) denkleminin öyle bir (ve yalnız bir) $y = y(x)$ çözümü vardır ki, bunun kendisi ve ilk (n-1) türevi I aralığında süreklidirler ve I aralığında bir $x = x_0$ değeri için [12]

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{1.2.2}$$

değerini alırlar.

Teoremin ifadesindeki $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ sayıları verilmiş değerlerdir ve başlangıç şartlarını teşkil ederler.

n. mertebeden bir diferansiyel denklemi elde etmek için n tane keyfi sabit ihtiva eden bir fonksiyon ile bu fonksiyonun ilk n türevi arasında keyfi sabitlerin yok edilmesi gerekir. Tersine olarak n. mertebeden bir diferansiyel denklemi gerçekleyen ve n keyfi sabit ihtiva eden bir fonksiyona bu diferansiyel denklemin genel çözümü denir. [12] Buradaki keyfi sabitlere verilen n özel değer yardımıyla elde edilen çözüm bir ÖZEL ÇÖZÜM ismini taşır. Böyle olmakla beraber; diferansiyel denklemin her çözümüne mutlaka genel çözümüne dahil bulunduğunu veya diğer bir deyimle genel çözümün ihtiva ettiği n keyfi sabite özel değerler vermek suretiyle diferansiyel denklemin bütün çözümlerinin elde olunabileceği zannedilmemelidir. Genel çözüme dahil bulunmayan çözümler de mevcut olabilir; bunlara "SİNGULER ÇÖZÜM" adı verilir. Bunun bir örneği Clairaut denkleminde görülebilir.

(1.2.1) denkleminin her iki yanını $b_n(x)$ ($b_n(x) \neq 0$) ile bölelim:

$$a_j(x) = \frac{b_j(x)}{b_n(x)} \quad (j = n, n-1, ..., 2, 1, 0) \ ve \ f(x) = \frac{g(x)}{b_n(x)}$$

(1.2.3)

olmak üzere

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)\, y^{(n-2)} + ... + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x) \qquad (1.2.4)$$

şeklinde yazılabileceği görülür. İkinci mertebeden lineer diferansiyel denklemin,

$$b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x), \qquad b_2(x) \neq 0 \qquad (1.2.5)$$

biçiminde yazılabileceğinden başka;

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad (1.2.6)$$

biçiminde de yazılabileceği görülür.

$$f(x) = 0 \qquad (1.2.7)$$

olması halinde denkleme ikinci mertebeden indirgenmiş (homogen) denklem denilir.

$$b_n(x)\, y^{(n)} + b_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + b_{n-2}(x)\, y^{(n-2)} + ... + b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x)$$

denkleminde [10]
$g(x)=0$ olmak üzere,

$$L_n = b_n(x)y^{(n)} + b_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + b_{n-2}(x)\, y^{(n-2)} + ... + b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y$$

$$L_n\, y = 0 \qquad (1.2.8)$$

in n- lineer bağımsız çözümü $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ ise genel çözüm

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \ldots + c_n y_n + y_ö \tag{1.2.9}$$

olur.

1.3. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖR

$a_j(x)$ ($j = n, n-1, \ldots, 2, 1, 0$) katsayıları I aralıkta sürekli fonksiyonlar olmak üzere, L ile gösterilen Lineer diferansiyel operatör

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)\, y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y \tag{1.3.1}$$

biçimlerinde yazılır. Yukarıdaki tanımdan sonra, homogen olmayan denklem;

$$L(y) = f(x) \tag{1.3.2}$$

ile ifade edilebilir. $f(x) = 0$ alınırsa, yani

$$L(y) = 0 \tag{1.3.3}$$

ise indirgenmiş (homogen) diferansiyel denklemi gösterebilecektir.

Şimdi önemli olan şu sonuçları verelim:

i) Eğer $u = u_1(x)$ fonksiyonu,

$L(y) = 0$

homogen denkleminin bir çözümü ise, C keyfi bir sabit olmak üzere

$u = Cu_1(x)$

elde edilir. Bu da $C.u_1(x)$ in,

$L(y) = 0$

denkleminin çözümü olduğunu gösterir.

ii) Eğer $u = u_1$, $u = u_2$, ..., $u = u_n$ fonksiyonları (1.3.3) denkleminin n çözümü ise, $C_1, C_2, ..., C_n$ keyfi sabitler olmak üzere,

$$u = C_1.u_1 + C_2.u_2 + ... + C_n u_n \tag{1.3.4}$$

fonksiyonu da bu denklemin bir çözümüdür.

Gerçekten (1.3.3) ün birinci tarafına u fonksiyonunu uygularsak;

$$L(C_1.u_1+C_2.u_2+...+C_n u_n) = C_1 L(u_1)+C_2 L(u_2)+...+C_n L(u_n) \tag{1.3.5}$$

$$C_1(0)+C_2(0)+... +C_n(0) \tag{1.3.6}$$

$$L(C_1u_1+C_2u_2+...+C_nu_n) = 0+0+...+0 = 0 \tag{1.3.7}$$

bulunur. Bu da fonksiyonunun homogen denklemin çözümü olduğunu verecektir.

iii) Homogen denklemin genel çözümü $u = u(x)$ fonksiyonu ise, $y = y_ö$ fonksiyonu da ikinci taraflı (1.2.1) denkleminin bir özel çözümü ise, (1.2.1)denkleminin genel çözümü;

$$y(x) = u(x) + y_ö(x) \tag{1.3.8}$$

dir.

Gerçekten (1.2.1) denkleminin birinci tarafında y yerine

$$y(x) = u(x) + y_ö(x)$$

$$L[y] = L[u+y_ö] = L[u] + L[y_ö] = f(x) \tag{1.3.9}$$

$$L[u] + L[y_ö] = f(x) \tag{1.3.10}$$

$$L(u) = 0 \text{ ve } L(y_ö) = f(x)$$

olduğundan

$$L(u) + L(y_ö) = f(x) \tag{1.3.11}$$

$$0 + f(x) = f(x)$$

olduğundan,

$$f(x) = f(x)$$

bulunur. [12]

Görülüyor ki, (1.2.1) şeklinde ikinci taraflı bir denklemin genel çözümünün aranması iki ayrı problem olarak ortaya çıkmaktadır. Birincisi, ikinci tarafsız veya indirgenmiş (homogen) denklemin genel çözümünün bulunması; ikincisi de ikinci taraflı denklemin özel çözümünün bulunmasıdır.

1.4. LİNEER BAĞIMLILIK ve BAĞIMSIZLIK

1.4.1. Wronskian [10]

$y_1, y_2, ..., y_n$ ler ortak I aralığında tanımlı ise ve (n-1) kez türevleri alınabilir n tane reel fonksiyonlar olsun.

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (1.4.2.)$$

determinantına n fonksiyonunun Wronki' si denir.

$W(y_1, y_2, ..., y_n)$ I aralığında tanımlı bir reel fonksiyondur ve x deki değeri $W(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.

(1.3.3) homojen denkleminin $y_1, y_2, ..., y_n$ çözümleri ancak ve ancak bu çözümlerin Wronskian' si I da bazı x ler için sıfırdan farklı ise Lineer bağımsızdırlar. Yani bazı x için;

$W(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) \neq 0$ ise $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ lineer bağımsızdır.

Tanım

$y_1, y_2, ..., y_n$ fonksiyonları lineer bağımsız çözümler olmak üzere $W(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) \neq 0$ ise $T = \{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$ kümesine temel çözüm kümesi denir.

Genel Çözüm

$T = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ temel çözüm kümesi ve c_i i=1,2,3,..., n keyfi sabitler olmak üzere

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) \tag{1.4.3.}$$

ifadesine (1.3.3) ün genel çözümü denir.

Teorem 1.3 v, n. Mertebeden (1.2.1) homojen olmayan denklemin bir çözümü, u ise bunun homojen kısmının bir çözümü olsun. O zaman

$$y = u + v$$

(1.2.1) in çözümüdür.

İspat

(1.2.1)denkleminde y = u + v koyalım.

$$b_0 \frac{d^n}{dx^n}(u+v) + b_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(u+v) + \ldots + b_{n-1}\frac{d}{dx}(u+v) + b_n(u+v) = g(x)$$

(1.4.4.)

$$\left[b_0 \frac{d^n u}{dx^n} + b_1 \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \ldots + b_n u\right] + \left[b_0 \frac{d^n v}{dx^n} + b_1 \frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \ldots + b_n v\right] = g(x)$$

u + v denklemin çözümüdür.

Y_h homojen kısmın genel çözümü, $y_ö$ (1.2.1) denkleminin özel çözümü (özel integrali) ise

$y = y_h + y_ö$ genel çözümdür.

Diferansiyel Denklemin Kurulması [10]

Teorem 1.4.

$W[y_1, y_2, ..., y_n] \neq 0$ ise $T = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ olan n ci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklem vardır.

$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), y] = 0$ yazılabilir.

İspat

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) & y' \\ & & & & \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.4.5.)$$

olarak açıp yazarsak;

$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)\, y = 0$

lineer denklemi elde edilir.

Böyle n.mertebeden homojen bir diferansiyel denklemin genel çözümü $T=\{y_1, y_2, y_3, ..., y_n\}$ temel çözüm kümesi olduğuna göre ,

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$

şeklindedir. Keyfi sabitlerin yok edilmesi koşulu ,yani $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ fonksiyonların lineer bağımlı olması koşulu

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$

$y' = c_1 y'_1 + c_2 y'_2 + ... + c_n y'_n$

.

.

.

$y^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} + ... + c_n y_n^{(n)}$

sisteminden (1.4.1) koşulunun gerçekleşmesidir.

Teorem 1.5. [10]

Abel özdeşliği (Liouville formülü): $y_1, y_2, ..., y_n$ I aralığında (1.3.3) homojen lineer denkleminin n lineer bağımsız çözümleri olsun. W bu çözümlerin Wronski' sini göstersin. $x_0 \in I$ olsun. O zaman $\forall x \in I$ için;

$$W_{(x)} = W_{(x_0)} \exp\left[-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right] \text{ eşitliği var.} \tag{1.4.6.}$$

İspat

Lineer Bağımsız Çözümlerin Wronskian' sı

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & .. & y'_n(x) \\ & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ & & \cdot & \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \qquad (1.4.7)$$

$$y_1^{(n)}(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} y_1^{(n-1)}(x) - \dots - \frac{a_n(x)}{a_0(x)} y_1(x)$$

$$y_2^{(n)}(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} y_2^{(n-1)}(x) - \dots - \frac{a_n(x)}{a_0(x)} y_2(x)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad (1.4.8.)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$y_n^{(n)}(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} y_n^{(n-1)}(x) - \dots - \frac{a_n(x)}{a_0(x)} y_n(x)$$

W'(x) determinantının son satırında yerlerine konulup düzenlenirse;

$$W'(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} W(x) \quad \text{veya} \quad \frac{dw}{dx} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} W = 0 \qquad (1.4.9.)$$

$$W(x) = c \, \exp\left[-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)}\, dt\right]$$

$x = x_0$ alınırsa $c = W(x_0)$ olduğu görülür.

$$W(x) = W(x_0)\, \exp\left[-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)}\, dt\right] \qquad (1.4.10.)$$

1.5. GRAMİYENLER

Yukarıda kurulan teoremlerden şu önemli sonuç çıkmaktadır. n fonksiyonun Wronskian'ının özdeş olarak sıfıra eşitliği bu fonksiyonların Lineer bağımlılığı için gerek bir şarttır; dolayısıyla Wronskian'ın sıfırdan farklı olması bu fonksiyonların Lineer bağımsızlığı için yeter şarttır.

$u_1, u_2, ..., u_n$ gibi n fonksiyonun lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart, GRAMİYEN ismi verilen determinant yardımı ile ifade edilebilir. Bir kapalı (a, b) aralığında sürekli olan $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ fonksiyonlarının Gramiyeni [12]

$$G = \begin{vmatrix} \int_a^b u_1^2 dx & \int_a^b u_1 u_2 dx & \dots & \int_a^b u_1 u_n dx \\ \int_a^b u_2 u_1 dx & \int_a^b u_2^2 dx & \dots & \int_a^b u_2 u_n dx \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ \int_a^b u_n u_1 dx & \int_a^b u_n u_2 dx & \dots & \int_a^b u_n^2 dx \end{vmatrix} \quad (1.5.1.)$$

determinantından ibarettir.

Aşağıdaki teoremin ifadesini vermekle yetineceğiz. İspatı determinantlar teorisine dayanır.

Teorem 1.6.

$u_1, u_2, ..., u_n$ fonksiyonlarının I aralığında Lineer bağımlı olmaları için gerek ve yeter şart

G = 0 olmasıdır.

1.6. SABİTLERİN DEĞİŞİM METODU

n. mertebeden değişken katsayılı ve ikinci taraflı Lineer

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x) \qquad (1.6.1.)$$

denklemini gözönüne alalım. Homogen denklemin n tane Lineer bağımsız $u_1,u_2,\ldots,u_n$ çözümünün bilindiğini farz edelim. İkinci mertebeden denklemler halinde yaptığımız gibi sabitlerin (parametrelerin) değişimi metodu ile ikinci taraflı denklemin özel bir çözümünü ve dolayısıyla bu denklemin genel çözümünü arayacağız. Homogen denklemin genel çözümü [12]

$$y = C_1.u_1+C_2.u_2+\ldots+C_n.u_n \qquad (1.6.2.)$$

olsun. C_i (i=1, 2,...,n) sabitlerini x in fonksiyonları gibi düşünerek bu C_1 sabitlerine şu şartları yüklüyoruz.

$$\begin{aligned}
&u_1.C_1' + u_2.C_2' + \ldots + u_n.C_n' = 0\\
&u_1'.C_1' + u_2'.C_2' + \ldots + u_n'.C_n' = 0\\
&\ldots\\
&\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1.6.3.)\\
&\ldots\\
&u_1^{(n-2)}.C_1' + u_2^{(n-2)}.C_2' + \ldots + u_n^{(n-2)}.C_n' = 0\\
&u_1^{(n-1)}.C_1' + u_2^{(n-1)}.C_2' + \ldots + u_n^{(n-1)}.C_n' = f(x)
\end{aligned}$$

Diğer taraftan (1.6.2.) den türev alarak (1.6.3.) şartlarını gözönünde bulundurarak

$$
\begin{aligned}
&y' = C_1.u_1' + \ldots + C_n.u_n' \\
&y'' = C_1.u_1'' + \ldots + C_n.u_n'' \\
&\ldots \\
&\ldots \\
&\ldots \\
&y^{(n-1)} = C_1.u_1^{(n-1)} + \ldots + C_n.u_n^{(n-1)} \\
&y^{(n)} = C_1.u_1^{(n)} + \ldots + C_n.u_n^{(n)} + u_1^{(n-1)}C_1' + \ldots + u_n^{(n-1)}.C_n'
\end{aligned}
\tag{1.6.4.}
$$

denklemleri yazalım. Şimdi y'nin (1.6.2) değeri ile türevlerinin (1.6.4) değerlerini (1.6.1) denklemine götürelim. Elde edilecek denklemde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ li terimlerin bulunmayacağı aşikardır. Çünkü u_i (i=1, 2, ..., n) fonksiyonları (1.6.1) in çözümleridir ve sadece

$$u_1^{(n-1)}C_1' + \ldots + u_n^{(n-1)}C_n' = f(x) \tag{1.6.5.}$$

kalacaktır. Diğer taraftan (1.6.3.) ve (1.6.5.)'den ibaret sistem $C_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ lere lineer sistem olup, bunların katsayıları determinantı yanı $W(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ determinantı hipotez gereğince sıfırdan farklıdır. O halde bu sistem çözülebilir ve $C_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ için;

$$C_1' = f_1(x) \;,\; C_2' = f_2(x) \ldots C_n' = f_n(x)$$

gibi değerleri verir; buradan f_i (i = 1, 2, ..., n) fonksiyonları $u_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ nin ve bunların n-1 inci mertebeye kadar türevlerinin yani X in belli fonksiyonlarıdır. Bu değerler, integrasyondan sonra, (1.6.2.) eşitliğine götürülerek

$$y = u_1 \int f_1(x)\,dx + u_2 \int f_2(x)\,dx + \ldots + u_n . \int f_n(x)\,dx \tag{1.6.6.}$$

elde edilir. Aranılan özel integralin bulunması işi böylece n kuadratüre indirgenmiş olur.

1.7. LİNEER BİR DENKLEMİN MERTEBESİNİN DÜŞÜRÜLMESİ

Bu yöntem hem sabit ve hem de değişken katsayılı denklemlere uygulanabilir. Çözüm için ancak $L_n y = 0$ homogen kısmının bir özel çözümünün bilinmesi gerekir.

Teorem 1.7.

$L_n y = 0$ homogen denkleminin bir özel çözümü $y_1 = f(x)$ ise $y = f(x)\, u(x)$ dönüşümü ile denklem $v = u'(x)$ bağımlı değişkenli (n-1).mertebeden bir denkleme dönüşür.

Bu yöntem 3. ve daha yüksek mertebeden denklemler için elverişli değildir. Çünkü dönüşüm sonucu elde edilecek denklem yine 2 veya daha fazla yüksek mertebeli olacağından yine sorunla karşılaşılacaktır. Halbuki 2.mertebe diferansiyel denklemlere bu yöntemi uyguladığımızda denklem 1.mertebeye dönüşeceği için çözüm kolayca bulunabilir.

Yukarıdaki teoremi 2.mertebeden değişken katsayılı homogen denkleme uygulayalım;

$$L_2 y = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (1.7.1.)$$

Homogen denkleminin bir çözümü

$y_1 = f(x)$

olarak bilindiğine göre

$y = f(x)\, u(x)$

dönüşümü yapalım.

O halde $y = f.u$ ve

$$y' = fu' + f'u$$

$$y'' = fu'' + 2f'u' + f''u$$

türevlerini (1.7.1.)'de yerine koyarsak;

$$a_0 fu''+[2a_0 f'+a_1 f]u'+[a_0 f''+a_1 f'+a_2 f]\, u = 0 \tag{1.7.2.}$$

denklemi elde edilir. f , (1.7.1) nin bir çözümü olduğundan u' nun katsayısı sıfırdır ve böylece son denklem;

$a_0 fu''+[2a_0\ f'+ a_1\ f\,]\,u' = 0$ haline indirgenir.

v = u' alarak bu denklem;

$$a_0\ f\,v'+[2a_0 f' + a_1 f\ ]\,v=0 \tag{1.7.3.}$$

birinci mertebeden homogen lineer denklemine dönüşür. Bunun genel çözümü;

$$\frac{dv}{v} = -\left[2\ \frac{f'\ (x)}{f(x)} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right] dx \tag{1.7.4.}$$

$$\ln v = -\ln\,[f(x)]^2 - \int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx + \ln c$$

olur.

$$v = -\frac{c\exp\left[-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right]}{f(x)^2}$$

Burada özel çözümü seçerek (c=1) özel halini ve v = u' olduğunu hatırlayarak tekrar integralin sonucu;

$$u = \int\frac{\exp\left[-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right]}{[f(x)]^2}dx + k \quad (k=0) \tag{1.7.5.}$$

elde ederiz. y=f(x) u olduğundan;

$$y = g(x) = f(x).\int \frac{\exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right]}{[f(x)]^2}dx \tag{1.7.6.}$$

sonucuna varırız. Bu ifade (1.7.1.) denkleminin bir çözümüdür. O halde f ve g wronskian determinantı [10]

$$W\,[f,g]\,(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = [f(x)]^2.u'$$

$$= \exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right] \neq 0 \tag{1.7.7.}$$

olduğundan $y_1=f(x)$ ve $y_2=g(x)$ çözümleri lineer bağımsızdırlar. Sonuç olarak (1.7.1.) homogen denkleminin genel çözümü

$$y = c_1 f + c_2 g = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

olur.

Sonuç

$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y = 0$ homogen denkleminin bir lineer bağımsız çözümü y_1 verilmişse diğer y_2 lineer bağımsız çözümü;

$$y_2 = y_1\left\{\int \frac{\exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right]}{y_1^2}dx\right\} \tag{1.7.8.}$$

formülünden bulunur.

$$y = y_1 \left\{ \int \frac{\exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right]}{y_1^2} dx + k \right\} \tag{1.7.9.}$$

$$y = c\ y_1 \int \frac{\exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right]}{y_1^2} dx + k y_1 \tag{1.7.10.}$$

ifadesiyle verilir. Burada y_1 verilen çözümdür.

Teorem 1.8.

Homogen olmayan 2.mertebeden lineer;

$$L_2 y = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = B(x) \tag{1.7.11.}$$

diferansiyel denkleminin $L_2 y = 0$ homogen kısmının bir çözümü
$y_1 = f(x)$
ise denklem
$y = f(x).\ u\ (x)$
dönüşümü ile birinci mertebeden bir lineer denkleme dönüşür. (1.7.11.) denkleminde,

$$y = f\ u$$

$$y' = fu' + f'u$$

$$y'' = fu'' + 2f'u' + f''u$$

ifadeleri yerine koyup gerekli düzenlemeyi yaparsak

$L_2y = 0$

için yapılan işlemler gibi ve

$v = u'$ alırsak

$$a_0(x)f(x)v' + [2a_0(x)f'(x) + a_1(x)f(x)]v = B(x) \qquad (1.7.12.)$$

veya

$$v' + \left[2\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right]v = \frac{Bx}{a_0(x)f(x)} \qquad (1.7.13.)$$

1.mertebe lineer denklemini elde ederiz. Buradan hareketle genel çözüme ulaşılır.

Uyarı : (1.7.11.) denkleminin homogen kısmının genel çözümü

$y_n = c_1 y_1 + c_2 y_2$

bulunursa (1.7.11) ün $y_ö$ özel çözümü parametrelerin değişimi yöntemiyle de bulunabilir.

1.8. İNTEGRASYON ÇÖZÜMLERİ

1. $$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x) \qquad (1.8.1.)$$

tipindeki bir denklem ardışık n integrasyon yardımıyla çözülür.

Örneğin: x_0 değişkenin keyfi bir değeri olmak üzere;

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_0$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_0(x - x_0) + C_1$$

$$\ldots \qquad (1.8.2.)$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)dx + \frac{C_0(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)} + \frac{C_1(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)} + \ldots + C_{n-1}$$

elde edilir. Burada C_0, C_1, ..., C_{n-1} integralin ve ilk (n-1) türevinin $x = x_0$ da aldığı değerlere eşit olan keyfi sabitlerdir.

2. y' yi ihtiva etmeyen denklemler;

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1<k<n) \qquad (1.8.3.)$$

Bu denklemde $y^{(k)} = u$ konulursa mertebesi n-k ya düşer. Eğer elde edilen u' lu denklemin integrasyonu yapılabilirse, y'nin değeri ardışık integrasyonlarla bulunabilir. [12]

Eğer x ve $u = y^{(k)}$ bir yardımcı t parametresi cinsinden ifade olunabilirse;

$x = f(t)$; $y^{(k)} = 0\ (t)$

denklemleriyle y fonksiyonu t parametresi cinsinden bulunabilir.

3. Bağımsız değişkeni ihtiva etmeyen denklemler;

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1.8.4.)$$

tipindeki bir denklemde y bağımsız değişken ve x bilinmeyen fonksiyon olarak alınır.

4. $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ (1.8.5.)

ye nazaran homogen denklemler; Homogenlik derecesi m olmak üzere, böyle bir denklem;

$$y^{m} F\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0$$

şeklindedir.

$y = e^{\int u.dx}$ *farzedilirse denklemin mertebesi bir düşer. Gerçekten,*

(1.8.6.)

$$y' = u.\, e^{\int u.dx}; \quad y'' = (u + u^2)e^{\int u.dx}; \ldots$$

olduğundan genel bir tarzda $y^{(k)}$ türevi $u, u', \ldots, u^{(k-1)}$ e nazaran bir polinom ile $e^{\int u.dx}$ in çarpımına eşittir. Bu değerler verilen denkleme nakledilerek mertebesi bir düşürülmüş olur. [37]

2. RİCCATİ DENKLEMİ ve ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI

2.1. Riccati Denklemi

Analitik çözümü kolayca bulunmayan;

$$A(x)y' + B(x)y + C(x)y^2 = D(x) \qquad a \leq x \leq b \tag{2.1.1.}$$

Riccati denklemini ve genel

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y(b) + \gamma_1 y(c) + \alpha_2 y^2(a) + \beta_2 y^2(b) + \gamma_2 y^2(c) = \lambda \tag{2.1.2.}$$

koşulunun verildiğini kabul edelim. Önce aşağıdaki yöntemle bu tip problemlerin çözümlerini araştıralım.

Bu tip denklemlerin analitik çözümlerinin bulunabilmesi için en az bir özel çözümün bilinmesi gerektiğini (dolayısıyla Lineer veya Bernoulli denklemlerine dönüştürülerek çözülebildiğini) biliyoruz. [11].

2.2. Dönüşüm Yöntemi

(2.1.1.) Riccati denklemini lineer hale dönüştürmek için

$$y = u^p v^q , \quad y' = p\, u^{p-1} v^q u' + q\, u^p v^{q-1} v' \tag{2.2.1.}$$

dönüşümünü yapalım. O zaman (2.1.1.) denklemi

$$A\, p\, u^{p-1} v^q u' + A\, q\, u^p v^{q-1} v' + B\, u^p v^q + C\, u^{2p} v^{2q} = D$$

haline gelir. Burada

$$A\,q\,u^p\,v^{q-1}\,v' + C\,u^{2p}\,v^{2q} = 0$$
$$A\,p\,u^{p-1}\,v^q\,u' + B\,u^p\,v^q = D$$

seçelim ve

$$u^p v^q = -\frac{Aqv'}{Cv}$$
$$pu^{p-1}v^q u' = \frac{D}{A} + \frac{Bqv'}{Cv}$$

alalım. Bunları kullanarak

$$qv' = -\frac{C}{A}u^p v^{q+1}$$

$$qv'' = \left(\frac{C}{A}\right)'\frac{A}{C}qv' - \frac{CD}{A^2}v - \frac{B}{A}qv' + (q+1)q\frac{(v')^2}{v}$$

elde ederiz. Burada q = -1 seçilerek, denklemin non-lineerliği ortadan kaldırılabilir. O zaman Riccati denklemi

$$v'' + \left(\frac{B}{A} - \frac{C'}{C} + \frac{A'}{A}\right)v' + \frac{CD}{A^2}\,v = 0 \qquad (2.2.2.)$$

ikinci mertebe lineer homojen diferansiyel denklemine dönüşür. Ayrıca

$$u^p = \frac{A}{C}v'$$

olur.

Böylece, gerekli dönüşüm, q = -1 için $y = u^p\, v^{-1}$ olduğundan;

$$y = \frac{A}{C}\frac{v'}{v} \qquad (2.2.3.)$$

olur.

(2.2.3.) ifadesindeki v fonksiyonu, ikinci mertebeden lineer (2.2.2) diferansiyel denkleminin genel çözümüdür. Eğer (2.2.2.) denkleminin genel çözümü, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere,

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 \tag{2.2.4}$$

olarak bulunmuşsa, o zaman (2.1.1.) Riccati denkleminin genel çözümü, (2.2.3.) ve (2.2.4.)' den;

$$y = \frac{Av_1' + kv_2'}{Cv_1 + kv_2} \quad \left(k = \frac{c_1}{c_2}\right) \tag{2.2.5.}$$

olarak elde edilir.

2.3.Tam Olmayan (axy + b)dx + (αxy + β)dy = 0 Denkleminin Riccati Denklemine Dönüştürülmesi

$$(axy + b)dx + (\alpha xy + \beta)dy = 0,$$

$$a, b, \alpha, \beta \neq 0 \quad ; \quad \frac{a}{\alpha} \neq \frac{b}{\beta} \tag{2.3.1.}$$

diferansiyel denkleminde;

$$\frac{\partial(axy+b)}{\partial y} = ax \quad , \quad \frac{\partial(\alpha xy+\beta)}{\partial x} = \alpha y$$

ve $ax \neq \alpha y$ koşulu sağlandığından (2.3.1) denklemi tam olmayan bir diferansiyel denklemdir. Bunun analitik çözümünü bulmak pek mümkün değildir. Bu amaçla, denklemi önce;

$$xy(a\,dx + \alpha\,dy) + (b\,dx + \beta\,dy) = 0 \tag{2.3.2.}$$

haline getirelim.

(2.3.1.) denkleminde ax + αy = t dönüşümünü yaparsak, denklem x bağımlı t bağımsız değişkenli

$$(a\beta - b\alpha)\frac{dx}{dt} - tx + ax^2 = \beta \tag{2.3.3.}$$

Riccati denklemine veya y bağımlı t bağımsız değişkenli;

$$(a\beta - b\alpha)\frac{dy}{dt} - ty + \alpha y^2 = -b \tag{2.3.4.}$$

Riccati denklemine dönüşür.

Eğer (2.3.1.) diferansiyel denkleminde

$$\begin{aligned} ax + \alpha y &= u \\ bx + \beta y &= v \end{aligned} \tag{2.3.5.}$$

dönüşümü yaparsak

$$x = \frac{\beta u - \alpha v}{a\beta - b\alpha} \ , \ y = \frac{av - bu}{a\beta - b\alpha} \tag{2.3.6.}$$

olduğuna göre, denklem v bağımlı u bağımsız değişkenli

$$(a\beta - b\alpha)^2 \frac{dv}{du} + (a\beta + b\alpha)uv - a\alpha v^2 = b\beta u^2 \tag{2.3.7.}$$

lineer denklemine dönüşür. Uygun çözüm aranır.

3. LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ [12,13,26]

Doğrusal diferansiyel denklemler, integral dönüşümleri yardımıyla da çözülebilir. Verilen bir f fonksiyonunun bir integral yardımıyla yeni bir fonksiyon tanımlanması, bir integral dönüşümüdür. Örneğin, f bilinen bir fonksiyon olmak üzere,

$$F(s) = \int_a^b K(s,t)\,f(t)\,dt \qquad (3.1.)$$

biçiminde tanımlanan F fonksiyonu f nin dönüşümüdür. K fonksiyonuna dönüşümün çekirdeği denir Dönüşümden amaç, f bilinmeyen fonksiyonuna bağlı olan bir diferansiyel denklemi, daha kolay çözülebilen ve F ye bağlı olan bir probleme dönüştürmektir. Bu bölümde integral dönüşümlerinden Laplace dönüşümü incelenecektir. Bu amaçla önce Laplace dönüşümlerin özellikleri verilecek ve bazı uygulamaları incelenecektir.

t > 0 için tanımlanan f(t) fonksiyonunun L{f(t)} veya F(s) ile gösterilen Laplace dönüşümü;

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \quad (s > 0) \qquad (3.2.)$$

denklemi ile tanımlanır. Laplace dönüşümü, sonsuza uzanan bir aralık üzerinde bir integral ile tanımlandığından, genelleştirilmiş integrallerin temel özelliklerini hatırlamak yararlı olacaktır. Sınırsız bir aralık üzerindeki genelleştirilmiş integral, sonlu bir aralık üzerindeki integrallerin limiti olarak tanımlanır. A pozitif bir gerçel sayı olmak üzere

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(t)dt \quad (a < A) \qquad (3.3.)$$

dır.

Sağdaki limit varsa, genelleştirilmiş integral yakınsaktır. Yakınsak değilse ıraksaktır denir.

Bir I aralığı üzerindeki sonlu sayıdaki sonlu sıçramaları dışında sürekli olan bir f fonksiyonuna, I aralığı üzerinde kısmî süreklidir, denir. F fonksiyonu I aralığı üzerinde kısmî sürekli ise,

$$\int_a^A f(t)\,dt \tag{3.4.}$$

integrali vardır. Buna rağmen,

$$\int_a^\infty f(t)\,dt \tag{3.5.}$$

integralinin yakınsak olmadığına örnekler verilebilir.

Bir f(t) fonksiyonu için,

$$e^{-\alpha t}|f(t)| < M \quad (t \geq T) \tag{3.6.}$$

gerçekleşmek üzere α, M ve T sabitleri (M>0, T>0) bulunabilirse, f fonksiyonuna $t \to \infty$ için α. Mertebeden üstel mertebelidir, denir ya da kısaca üstel mertebelidir, denir α<β iken

$$e^{-\beta t}|f(t)| < M \quad (t \geq T) \tag{3.7.}$$

Teorem 3.1.

f(t) kısmî sürekli ve üstel mertebeli ise,

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt \tag{3.8.}$$

ile tanımlanan F(s) Laplace dönüşümü var ve mutlak yakınsaktır.

İspat

Teoremin ispatı için,

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \left|e^{-st} f(t)\right| dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b |f(t)|\, e^{-st} dt \tag{3.9.}$$

integralinin varlığı gösterilmelidir. f(t) üstel mertebeli olduğundan, M_1, T keyfi pozitif sabitleri ve keyfi bir α sayısı, her $t > T$ için,

$$e^{-\alpha t} |f(t)| < M_1 \tag{3.10.}$$

gerçekleşmek üzere vardır. f(t) kısmî sürekli olduğundan, $0 \le t \le T$ sonlu aralığı üzerinde sınırlıdır. Böylece, $0 \le t \le T$ için,

$$|f(t)| < M_2 \equiv (M_2 e^{-\alpha t}) e^{\alpha t} \tag{3.11.}$$

eşitsizliğini gerçekleyen bir M_2 pozitif sayısı vardır.

$$\max(M_1, M_2, M_2\, e^{-\alpha T}) = M$$

ise her $t \ge 0$ için,

$$|\, f(t)\, | < M e^{\alpha t} \tag{3.12.}$$

gerçeklenir ve

$$I=\int_0^b |f(t)| e^{-st}\,dt \le \int_0^b M e^{\alpha t} e^{-st}\,dt = M\int_0^b e^{-(s-\alpha)t}\,dt \tag{3.13.}$$

$$=\frac{M}{s-\alpha}(1-e^{-(s-\alpha)b})$$

olur. I integrali b nin artan bir fonksiyonudur. s > α ise, son ifade artandır ve $b \to \infty$ için M / (s-α) değerine yakınsar. Bu nedenle,

$$I \le \frac{M}{s-\alpha}$$

dır ve $b \to \infty$ için I sonlu bir limite yakınsar. Elde edilen sonuca göre,

$$\left|\int_0^b f(t)e^{-st}dt\right| \le \int_0^b |f(t)|e^{-st}dt \le \frac{M}{s-\alpha} \tag{3.14.}$$

olur. Teorem3.1 in sonucu olarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir.[13]

Teorem 3.2.

f(t) kısmî sürekli ve üstel mertebeli ise, her s ve α için;

$$|L\{f(t)\}| \le \frac{M}{s-\alpha} \quad (s>\alpha) \tag{3.15.}$$

dır. Buradaki M sabiti s ye bağlı değildir.

Sonuç

f(t) kısmî sürekli ve üstel mertebeli ise

$\lim\limits_{s\to\infty} L\{f(t)\} = 0$ dır.

Laplace dönüşümünün doğrusallığını ifade eden aşağıdaki teoremin ispatı, integral hesabın temel özelliklerinden çıkar.

Teorem 3.3.

f_1 ve f_2 sırasıyla

$s > \alpha_1$ ve $s > \alpha_2$

için Laplace dönüşümleri var olan iki fonksiyon olsun.

$s > \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$

ve c_1 ve c_2 keyfi sabitleri için

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 L\{f_1(t)\} + c_2 L\{f_2(t)\} \qquad (3.16.)$$

dır.[13]

Çizelge 1. Laplace Dönüşüm Çizelgesi

f(x)	F(s)
1	$\frac{1}{s}$
X^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, n bir doğal sayıdır.
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$
$x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, n bir doğal sayıdır.
$e^{ax}\cos bx$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$a^{ax}\sin bx$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
chax	$\frac{s}{s^2-a^2}$
shax	$\frac{a}{s^2-a^2}$
F(x)/x	$\int_s^\infty F(u)du$
$f^{(n)}(x)$	$s^n F(s)-s^{n-1} f(0)-s^{n-2} f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$

Laplace Dönüşümünün Diferensiyel Denklemlere Uygulaması [12,26]

Laplace dönüşümünü;

$$b_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+b_{n-1}(x)\cdot\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+b_1(x)\cdot\frac{dy}{dx}+b_0(x)y=g(x)$$

(3.17.)

diferensiyel denklemi ve

$y(0)=C_0, y'(0)=C_1, \ldots, y^{(n-1)}(0)=C_{n-1}$

başlangıç şartları ile verilen bir başlangıç değer problemin çözümünde uygulamak suretiyle ayrı bir yöntem olarak verilebilir.

$L\{y(x)\}=Y(s)$

ile gösterilmek üzere eğer y(x) ve (n-1) türevleri $x\geq 0$ İçin sürekli ve üstel mertebeden ise;

$L\{y(x)\}=s^n.Y(s)-s^{n-1}.y(0)-s^{n-2}y'(0)-s^{n-3}.y''(0)-...-y(^{n-1})(0)$

yazılabilir. Yukarıda verilen başlangıç şartları uygulanırsa

$$L\left\{\frac{d^n y}{dx^n}\right\}=s^n.Y(s)-s^{n-1}.C_0-s^{n-2}.C_1-s^{n-3}.C_2-...-C_{n-1} \quad (3.18.)$$

bulunur. Bu şekilde diferansiyel denklemde bulunan türevler hesaplanarak ve {Lg(x)} ile birlikte diferansiyel denklemde yerlerine götürülerek Y(s) fonksiyonu bulunur. Daha sonrada

$$y(x)=L^{-1}\{g(x)\} \quad (3.19.)$$

dönüşümü ile diferansiyel denklemin çözümü elde edilir.

İkinci mertebeden bir diferansiyel denklem göz önüne alınırsa başlangıç değerleri ile verilirse;

$y''+a_1 \cdot y'+a_0 \cdot y=g(x)$,$y(0)=C_0$, $y'(0)=C_1$

denklemine Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$L\{y\}=Y(s)$, $L\{y'\}=s\,.Y(s)-y(0)$, $L\{y''\}=s^2.Y(s)-sy(0)-y'(0)$

ve $L\{g(x)\}=G(s)$ değerleri yerlerine yazarsak.

$L\{y''\}+a_1.L\{y'\}+a_0.L\{y\}=L\{g(x)\}$

elde edilir. Başlangıç değer şartlarının uygulanması ile

$s^2.Y(s)-s.C_0-C_1+a_1(sY(s)-C_0)+a_0.Y(s)=G(s)$

bulunur. Buradan;

$s^2.Y(s)-s.C_0-C_1+a_1sY(s)-a_1C_0+a_0Y(s)=G(s)$

$$Y(s)=\frac{G(s)+sC_0+a_1C_0+C_1}{s^2+a_1s+a_0}$$

$$Y(z)=L^{-1}\left\{\frac{G(s)+sC_0+a_1C_0+C_1}{s^2+a_1s+a_0}\right\} \qquad (3.20.)$$

çözümü elde edilir.[12]

4. CAUCHY-EULER DENKLEMİ

4.1. Denklem ve Çözüm Metodu

Değişken katsayılı n. mertebeden genel lineer denklemler sabit katsayılılara göre çok daha değişik bir konudur. Buna rağmen bazı özel durumlarda kapalı formda yaklaşık çözümleri çıkartılabilir. Dikkate değer pratik öneme sahip özel bir durum Cauchy-Euler denklemi (eşit boyutlu denklem) dir. Bu tür denklemler,bir bağımsız değişken değiştirilmesiyle sabit katsayılı bir denkleme indirgenir.

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = F(x) \qquad (4.1.1.)$$

şeklindeki denklemlere Cauchy Euler denklemi denir.

Burada a_0, a_1, a_2, ..., a_n sabitlerdir. Bu denklemin karakteristik özelliği şudur: Sol taraftaki her bir terim

$$x^k y^{(k)} \qquad (4.1.2.)$$

formundaki ifadenin bir sabitle çarpımıdır.

Tanım

(Cauchy-Euler denklemi) Her bir terimi $x^k y^{(k)}$ ifadesinin bir sabitle çarpımı şeklinde olan

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} xy' + a_n y = b(x) \qquad (4.1.3.)$$

tipindeki n. mertebeden değişken katsayılı diferansiyel denklemlere Cauchy-Euler denklemi denir. Burada a_0, a_1,..., a_n ler sabitlerdir. Değişken katsayılı lineer denklemlerin özel bir hali olan bu tip denklemler bir bağımsız değişken değişimi ile sabit katsayılı hale indirgenerek çözülür. [9 - 15]

Teorem 4.1.

(4.1.3) ile verilen Cauchy-Euler denklemi $x = e^t$ t>0 bağımsız değişken değişimi ile sabit katsayılı bir lineer denkleme dönüşür.

İspat:

$x=e^t$, $t=\ln x$ dönüşümü ile (4.1.1.) denkleminin her bir terimini bağımsız değişkenine göre yazalım.

a) $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\Rightarrow x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt} \qquad (4.1.4.)$$

b)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dt^2}.\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dt}.\frac{d^2t}{dx^2}$$

$$=\left(\frac{1}{x}\right)^2.\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$$

(4.1.5)

c)

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt} \qquad (4.1.6.)$$

Aynı şekilde x^k (d^ky/dx^k)terimleri bulunur. kolay olması açısından $d^k/dt^k = D^k$ türev operatörünü kullanırsak (4.1.4.), (4.1.5.), (4.1.6.) ve devamı şu şekilde olur;

$$x\frac{dy}{dx} = Dy$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D^2y - Dy = (D^2 - D)y = (D-1)Dy$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = D^3y - 3D^2y + 2Dy = (D-2)(D-1)Dy \qquad (4.1.7.)$$

...

...

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} = (D-n+1)(D-n+2)\ \dots\ (D-2)(D-1)Dy$$

Bunlar (1) denkleminde yerine konacak olursa;

$$[a_0 D(D-1)\dots(D-n+1)+a_1 D(D-1)\ \dots\ (D-n+2) + \dots + a_{n-1} D+a_n]\ y(t) = B(t) \qquad (4.1.8.)$$

sabit katsayılı lineer denklemi elde edilir.

4.2. Legendre Lineer Diferansiyel Denklemi [10, 12]

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$, c, d sabitler olmak üzere

$$a_n(cx+d)^n\ \frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(cx+d)^{n-1}\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(cx+d)\frac{dy}{dx} + a_0(cx+d)y = q(x) \qquad (4.2.1.)$$

biçimindeki denklemlere Legendre denklemi denir.

$cx+d = e^z$

dönüşümü yapılırsa ve gerekli türevlere geçilirse

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx},\frac{dy}{dx}=\frac{c}{cx+d}.\frac{dy}{dz},(cx+d)Dy=c\frac{dy}{dz}=cD\ y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right),\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{c^2}{(cx+d)^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)=(cx+d)^2D^2y=c^2D(D-1)y$$

...

...

...

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\ldots\ .=.(cx+d)^nD^ny=c^nD\ (D\ -1)\cdot\ldots\cdot(D-n+1)y$$

(4.2.2.)

olarak olur. Bu türev değerleri Legendre denkleminde yerlerine götürülürse

$$\left[a_nc^nD(D\ -1).(D-n+1)+a_{n-1}c^{n-1}D(D\ -1).(D-n+2)+\ldots+a_0\right]y=q\left(\frac{e^z-d}{c}\right)$$

(4.2.3)

biçiminde sabit katsayılı diferansiyel denklemine dönüşür.

5. BAZI PRATİK ve ÖZEL YÖNTEMLER

İkinci mertebeden değişken katsayılı Lineer denklemler eğer homogen kısmının bir çözümü bilinirse birinci mertebeye indirgenerek çözülebilir. Daha yüksek mertebeden denklemler de çözüm yöntemi bilinen bir düşük mertebeden denklemlere indirgenerek çözülebilir. Bu nedenle verilen bir denklemin homogen kısmını sağlayan bir çözüm gerekli olur. Burada bu tip özel çözümleri bulmak için bazı pratik yollar verip bunları genel çözümü elde etmek için kullanacağız. Aynı zamanda bazı özel duruma sahip denklemler için özel yöntemleri vereceğiz. [10]

Değişken katsayılı lineer homogen olmayan

$$L_n y = a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x)$$

denklemini gözönüne alalım.

5.1. $a_{n-1}(x) + x\, a_n(x) = 0$ ise $y_1 = x$

fonksiyonu $L_n\, y = 0$ homogen denkleminin bir çözümüdür.

$y = y_1 u$ dönüşümü ile $Lny = b(x)$ denklemi bir mertebe düşürülür ve çözülebilir.

5.2. $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ ise $y_1 = e^x$,

$L_n y = 0$ denkleminin bir çözümüdür.

Diğer yol: $y_1 = e^x$ homogen kısmın bir çözümü olduğuna göre verilen denklem

$y = y_1 u = e^x u$,

$u' = v$

dönüşümü ile birinci mertebeye indirgenir ve genel çözüm bulunur.

5.3. $a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{2k} = a_1 + a_3 + ... + a_{2k-1}$ **ise yani çift mertebeli ve tek mertebeli türevlerin katsayıları eşit ise** $y_1 = e^{-x}$ **homogen kısmın lineer bağımsız çözümlerinden biridir.**

5.4. $y = x^m$ **ve türevleri** $Lny = 0$ **homogen denkleminde yerine konulduğunda bu denklemi sağlayan** $m \in R$ **değeri bulunabilirse, yani** $L_n (x^m) = 0$ **yapan** $m \in R$ **değeri varsa**
$y = x^m$ **homogen denkleminin çözümüdür.**

5.5. $y = e^{mx}$ **ve türevleri verilen denklemin** $L_n y = 0$ **homogen kısmında yerine konulduğunda bu homogen denklemi sağlayacak m sabiti bulunursa** $y = e^{mx}$ $L_n y = 0$ **denkleminin bir çözümüdür.**

5.6. Bir lineer diferansiyel denklem y-bağımlı değişkenini veya y ile beraber küçük mertebeli bazı türevlerini içermezse yani denklem;

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + a_k(x)\, y^{(k)} = b(x) \qquad k = 1, 2, 3, ..., n-1$$

şeklinde ise
$y = x^{k-1}$ **homogen kısmın bir çözümüdür.**

Denklem $y^{(k)} = p$ dönüşümü ile p bağımlı değişkenli (n-k) mertebeli bir denkleme indirgenip çözülebilir. Özel olarak k = n ise yani;
$a_0(x)\, y^{(n)} = b(x)$, $y^{(n)} = b(x)/a_0(x)$ şeklinde ise genel çözüm, n defa ardışık integral alarak

$$y = \iint ... \int \frac{b(x)}{a_0(x)} dx\, dx ... dx$$

şeklinde bulunur.

5.7. $a_0(x)\ y'' + a_1(x)\ y' + a_2(x)\ y = 0$

ikinci mertebe denkleminde $(a_0/a_2)' = 2(a_1/a_2)$ koşulunu sağlıyorsa

$t = \int e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} dx$ *veya* $t = \int \left(\frac{a_2(x)}{a_0(x)} \right)^{\frac{1}{2}} dx$ *bağımsız değişken değişimi ile denklem sabit katsayılı hale dönüşür.*

İspat

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\exp\left[-\int \frac{a_1}{a_0}dx \right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\exp\left[-2\int \frac{a_1}{a_0}dx \right] - \frac{a_1}{a_0}\exp\left[-\int \frac{a_1}{a_0}dx \right]\frac{dy}{dt}$$

Bu ifadeleri denklemde yerine koyarsak;denklem

$$a_0 \exp\left[-2\int \frac{a_1}{a_0}dx \right]\frac{d^2y}{dt^2} + a_2 y = 0 \quad \textit{haline gelir.}$$

$$a_1 = \frac{a_2}{2}\left(\frac{a_0}{a_2} \right)' \qquad \textit{kullanarak;}$$

$$a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_2 y = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + y = 0 \quad a_2 \neq 0 \textit{ elde edilir. Bunun çözümü}$$

$y = c_1 Cos t + c_2 S\text{int}$ *verilen denklemin genel çözümü*

$$y = c_1 Cos\left[\int \exp\left(-\int \frac{a_1}{a_0}dx \right) dx \right] + c_2 Sin \int \exp\left(-\int \frac{a_1}{a_0}dx \right) dx \qquad \textit{olur.}$$

Not: Eğer denklem homogen değilse parametrelerin değişim yöntemi kullanarak özel çözüm aranır.

5.8. $a_0(x)\ y'' + a_1(x)\ y' + a_2(x)\ y = 0$ diferansiyel denkleminde;

$$\frac{a_2}{a_0} - \frac{1}{4}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)' = k \ \ sabit \ \ ise \ \ denklem;$$

$$y = u \exp\left[-\frac{1}{2}\int \frac{a_1}{a_0}dx\right] \ bağımlı \ \ değişken \ \ değişimi \ \ ile;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ku = 0$$

sabit katsayılı hale gelir.

Genel olarak;

$$y = \exp\left[-\frac{1}{2}\int \frac{a_1}{a_0}dx\right]\left[Ae^{-\sqrt{-k}x} + Be^{+\sqrt{-k}x}\right]$$

5.9. Çarpanlara Ayırma Yöntemi [26]

$$[P(x)\ D^2 + R(x)\ D + S(x)]y = Q(x)$$

ifadesinin sol tarafını, $F_1(D)$ ve $F_2(D)$ şeklinde iki lineer operatöre ayırmak mümkün olabilir:

$$[F_1(D)\ .\ F_2(D)]y = F_1(D)\ [F_2(D)y] = [P(x)\ D^2 + R(x)\ D + S(x)]y = Q(x)$$

Bundan sonra, $F_2(D)y = v$ konulursa, denklem $F_1(D)\ v = Q(x)$ gibi birinci mertebeden lineer bir denklem şekline dönüştürülmüş olur.

Bu bölümdeki çarpanlara ayırma, bir kere buradaki çarpanlar x- bağımsız değişkenini ihtiva etmektedirler. Ayrıca komütatif değildirler (yani çarpanların yerleri değiştirilemez) ve çarpanlara ayırma D nin bir değişken olarak düşünülmesi halinde farklıdır. Mesela;

[xD²-(x²+2)D+x]y = [(xD-2)(D-x)]y,

çünkü;

$$[(xD-2)(D-x)]y = (xD-2)\left(\frac{d}{dx}-x\right)y = (xD-2)(y'-xy) = \left(x\frac{d}{dx}-2\right)(y'-xy)$$

$$= x(y'-y-xy') - 2(y'-xy) = xy'' - (x^2+2)y' + xy = [xD^2-(x^2+2)D+x]y.$$

Çarpanların yerleri değiştirilemez. Çünkü;

$[(D-x)(xD-2)]y = (D-x)(xy'-2y) = xy''+y'-2y'-x^2y'+2xy=$

$= xy''-(x^2+1)y'+2xy = [xD^2-(x^2+1)D+2x]y.$

Nihayet, D bir operatörden ziyade bir değişken olarak nazarı itibare alınırsa;

$[(xD-2)(D-x)]y=[xD^2-(x^2+2)D+2x]y.$

5.10. $L_n = a_0(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x)$

Değişken katsayılı bir lineer diferansiyel operatörü olduğuna göre bir $L_n y=b(x)$
diferansiyel denklemi (n-1). mertebeden bir
$F_n y = B(x)+c$ denkleminin türevlerinin alınmasıyla elde edilebiliyorsa böyle denklemlere tam diferansiyel denklemi denir.

Yani;

$$\frac{d f_{n-1} y}{dx} = \frac{d}{dx}(B(x)+c) \Rightarrow L_n y = b(x) \ ise$$

$L_n y=b(x)$

tam diferansyel denklemdir.

Bu tip denklemlerde

$$a_n - a'_{n-1} + a''_{n-2} + \ldots + (-1)^n a_0^{(n)} = 0$$

koşulunu sağlar. [10]

5.11. Tam (Exact) Denklemler [31]

Eğer sadece

$$P_4 - P_3' + P_2'' - P_1''' + P_0^{IV} = 0$$

ise

$$P_0(x)y^{IV} + P_1(x)y''' + P_2(x)y'' + P_3(x)y' + P_4(x)y = 0$$

ın tam olduğunu gösterebiliriz.

Verilen diferansiyel denklem, aşağıdaki ifadenin türevi alınarak elde edilmiş olsun.

$$R_0(x)y''' + R_1(x)y'' + R_2(x)y' + R_3(x)y = C_1$$

Türev işlemi yapılırsa;

$$R_0 y^{IV} + (R_0' + R_1)y''' + (R_1' + R_2)y'' + (R_2' + R_3)y' + R_3' y = 0$$

bulunur. Dolayısıyla;

$$P_0 = R_0,$$

$$P_1 = R_0' + R_1,$$

$$P_2 = R_1' + R_2,$$

$$P_3 = R_2' + R_3 \text{ ve}$$

$$P_4 = R_3'$$

Buna göre;

$$\mathrm{P}_4 - \mathrm{P}_3' + \mathrm{P}_2'' - \mathrm{P}_1''' + \mathrm{P}_0^{IV} = \mathrm{R}_3' - (\mathrm{R}_2'' + \mathrm{R}_3') + (\mathrm{R}_1''' + \mathrm{R}_2'') - (\mathrm{R}_0^{IV} + \mathrm{R}_1''') + \mathrm{R}_0^{IV} = 0$$

olur. Buna mukabil;

$$P_4 - P_3' + P_2'' - P_1''' + P_0^{IV} = 0 \textit{ kabul olunsun.}$$

$$\frac{d}{dx}\left[P_0 y''' + \left(P_1 - P_0'\right)y'' + \left(P_2 - P_1' + P_0''\right)y' + \left(P_3 - P_2' + P_1'' - P_0'''\right)y\right] =$$

$$P_0 y^{IV} + P_1 y''' + P_2 y'' + P_3 y' - \left(-P_3' + P_2'' + P_1''' + P_0^{IV}\right)y =$$

$$= P_0 y^{IV} + P_1 y''' + P_2 y'' + P_3 y' + P_4 y$$

olduğundan verilen diferansiyel denklem tamdır.

6. LİNEER ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SABİT KATSAYILI DENKLEME İNDİRGENMESİ

Bu çalışmada, n. Mertebeden lineer homogen adi diferansiyel denklemlerin bir bağımsız değişken değişimi ile sabit katsayılı bir denkleme dönüştürülecek şekilde katsayıları üzerine gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir.

Dönüşüm tayin edilmiş ve çözümler açıkça verilmiştir. Daha ileri uygulamalar salınım teoremleri ıle ilgili konularda karşılaşılır.

6.1. Giriş

$y''+f(x)y = 0$ basit diferansiyel denklemin genellikle kapalı formda çözülemez. Belli koşullar altında açık olarak çözümüne yol gösteren çeşitli dönüşümleri aramaya götürür. Burada genel çözüm yöntemleri açık olarak mevcut değildir. Probleme açık bir yaklaşım, verilen denklemi sabit katsayılara sahip yeni bir denkleme dönüştürecek olan bir bağımsız değişken dönüşümü bulmayı denemektir.

Teşebbüs edilen yaklaşım (özellikle yazılan Berkoviç Raporları Serisi [1], [2] ve [3]) orijinal denklem n lineer operatörün bir çarpımına dönüştürmek ve bu çarpımı çeşitli bilinmeyen incelikleri sunarak sabit katsayılı n lineer operatörün bir çarpımına çevirmeyi denemektir. Fakat yöntem hiçbir belirli formüllere yol göstermez ve başarısı çok küçük n için bile iyi tahmine bağlıdır.

6.2. Denklemlerin Temel Özellikleri

Burada ilgileneceğimiz denklem

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x) \quad y_{(x)}^{(k)} = 0 \tag{6.1.1}$$

formundadır. Reel eksen üzerindeki bir $[x_1, x_2]$ aralığının varlığını kabul edeceğiz ki bu aralıkta $P_k(x)$' ler reel ve süreklidir. Genelliğinden bir şey kaybetmeksizin bu aralığın her tarafında $P_0(x) \neq 0$ ve $P_n(x) > 0$ kabul edebiliriz. Ayrıca $[x_1, x_2]$ aralığında n-1 defa sürekli olarak diferansiyellenebilir olacak olan

$\left[\frac{P_0(x)}{P_n(x)}\right]^{\frac{1}{n}}$ fonksiyonuna gerek duyarız.

Bu n .kökünün herhangi bir tayini biri diğerinden en çok birimin n. kökünün bir kuvveti kadar fark eder . n-defa sürekli diferansiyellenebilir olan ve (6.1.1)'i sağlayan bir $y = y(x)$ fonksiyonunu (6.1.1)' in çözümü olarak düşünebiliriz.

Şimdi aşağıdaki tanımları yapacağız.

Tanım 6.2.1.

(6.1.1) tipindeki denklem ,eğer bir $J \subset [x_1, x_2]$ alt aralığında

$$\xi = \int a(x)\,dx \tag{6.1.2}$$

formundaki bir x bağımsız değişken değişimi yardımı ile sabit katsayılı bir denkleme dönüştürülebiliyorsa A özelliğine sahip olduğu söylenebilecektir; burada a(x), J' de n-1 defa sürekli diferansiyellenebilirdir.

Tanım 6.2.2.

(6.1.1) tipindeki bir denklem denklemin eğer $[x_1, x_2]$ de,

$$y_i(x) = [f(x)]^{\alpha_i} \qquad i=1, 2, 3, ..., n \tag{6.1.3}$$

formundaki n lineer bağımsız çözümlere sahipse B özelliğine sahip olacağı söylenebilecektir. Burada f(x) bir fonksiyonda ve α_i reel olması gerekmeyen farklı sabitlerdir.

Şimdi de A ve B özellikleri arasındaki ilgiyi göstereceğiz.

Teorem 6.1.

(6.1.1) denklemi B özelliğine sahip olsun. O zaman bu denklem A özelliğine sahip olur.

İspat

Tanım 6.2.2.' den (6.1.1)' in (6.1.3) formunda n lineer bağımsız çözümü vardır Süreklilikten $j \subset [x_1, x_2]$ ve f(x)>0 olmak üzere (6.1.3) denklemini;

$$y_i(x) = \exp\left[\alpha i \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx\right] \qquad (6.1.4)$$

formunda yazabiliriz.
Şimdi

$$a(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (6.1.5)$$

tanımlarız ve a(x)'i (6.1.5)' de tanımlandığı gibi kullanarak (6.1.2) dönüşümünü uygularız. Bu dönüşüm (6.1.1) denklemini (6.1.4)' e göre çözümlerin açıkça lineer bağımsız olan $y_i(\xi) = e^{\alpha_i \xi}$ i = 1, 2, 3, ...,n ile verilen bir denkleme dönüşür. Böyle bir denklem sabit katsayılı denkleme eşittir. Bu da ispatı tamamlar. Genelde açıktır ki teo. (6.1) in tersi doğru değildir. Bu da ispatı tamamlar.

$$\xi = \int \frac{dx}{x} = \ln x \; dönüşümü$$
$$x^2 y'' - xy' + y = 0 \qquad (6.1.6)$$

denklemini;

$$Y''_{(\xi)} - 2\,Y'_{(\xi)} + Y = 0 \qquad (6.1.7)$$

denklemine dönüştürür. (6.1.7) sabit katsayılara sahiptir; fakat (6.1.6),

$y_1(x) = x$,

$y_2 = x \ln x$

Lineer bağımsız çözümlerine sahiptir. Bunların hiçbir kombinasyonu (6.1.3) formunda ifade edilemez.

6.3. n. Mertebeden Denklemler

Bizim bu bölümdeki amacımız, (6.1.1)' in A ve B özelliklerine sahip olacak şekilde $P_k(x)$ katsayıları ile ilgili gerek ve yeter koşulları türetmektir. Bunun için Faade Bruno formülü olarak bilinen aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Yardımcı teorem

$$\xi = \int a(x)\,dx \qquad (6.1.8)$$

olsun. a(x) ,bir aralıkta k-1 defa sürekli diferansiyellenebilir ise k≥1 için

$$\frac{d^k}{dx^k} = \sum_{j=1}^{k} \Phi_{kj}(x) \quad \frac{d^j}{d\xi^j} \qquad (6.1.9)$$

$$\Phi_{kj}(x)=\sum_{ni}^{n}\frac{k!}{n_1!n_2!\,...\,n_k!}\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{a^{(i-1)}(x)}{i!}\right]^{n_i} \tag{6.1.10}$$

(n_i negatif olmayan bir tamsayılar),

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = j \tag{6.1.11}$$

$$\sum_{i=1}^{k} in_i = k \tag{6.1.12}$$

koşulları sağlanıyor.

Bundan sonraki sonuç , Yardımcı Teorem 3.1.' den açıkça çıkar.

Yardımcı Teorem 3.2bi . $\phi_{k,k}(x)$, (6.1.10) daki gi tanımlansın. O zaman

$$\phi_{k,k}(x) = [a(x)]^k \tag{6.1.13}$$

$$\Phi_k(k-1)^{(x)} = \frac{k}{2}\frac{d}{dx}\left[a(x)\right]^{k-1} \tag{6.1.14}$$

olur.

İspat

(6.1.11)' de j = k koyalım ve (6.1.12)' den çıkaralım.

$$\sum_{i=2}^{k} (i-1)_{n_i} = 0 \tag{6.1.15}$$

elde edilir. Burada ni>0 olduğunda $n_2 = n_3 = ...=n_k = 0$ a sahip oluruz ve böylece (6.1.12)' den n_1=k olur. Bu sonucu (6.1.10) içinde koyarsak (6.1.13) elde edilir.(6.1.14) ispat etmek için j=k-1 yazalım. (6.1.11)' de bu sonucu (6.1.12)' den çıkararak

$$\sum_{i=2}^{k}(i-1)_{n_i}=1 \tag{6.1.16}$$

elde edilir.

Önceki gibi n_2=1, n_3= ... = n_k = 0 olduğu ve (6.1.12) den n_i=k-2' olduğu sonucunu çıkarırız. n_i' in bu değerlerini (6.1.10).denkleminde yerine yazarsak (6.1.14) ü elde ederiz. Şimdi A ve B özellikleri için koşulları vermek durumundayız. İlk olarak A özelliğini tartışalım.

Teorem 6.3.1.

(6.1.1)' in A özelliğine sahip olması gerek ve yeter koşulu $P_{(k)}(x)$ katsayılarının aşağıdaki n denklemini sağlamasıdır:

$$\sum_{k=j}^{n}\Phi_{k,j}(x)P_{(k)}(x)=\beta_j P_0(x),\ \ j=1,2,...,n \tag{6.1.17}$$

Burada β_j *sabitlerdir,* $P_n=1$ *ve*

$$a(x)=\left[\frac{P_0(x)}{P_n(x)}\right]^{\frac{1}{n}} \tag{6.1.18}$$

denklemidir. $P_k(x)$ katsatılıdır.

İspat

(6.1.1) Denklemi A özelliğine sahip olsun. O zaman (6.1.1)' i sabit katsayılı bir denkleme götüren bir (6.1.2) dönüşümü vardır. Y(ξ)=y(x) tanımlarız ve Yardımcı teorem 3.1 kullanarak (6.1.2)' yi (6.1.1)' e koyalım. Sonuç

$$0=\sum_{k=0}^{n}P_k(x)\;y^{(k)}(x)=\sum_{k=1}^{n}P_k(x)\sum_{j=1}^{k}\Phi_{k,j}(x)Y^{(j)}(\xi)+P_o(x)Y(\xi)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=j}^{n}P_k(x).\Phi_{k,j}(x)\right]Y_j^{(j)}(\xi)+P_0(x)Y(\xi)=0 \qquad (6.1.19)$$

(6.1.19)un sağındaki bütün ifadeler sabit katsayılı bir denkleme eşit olmalıdır ve böylece (6.1.17), β_j katsayılı çıkar. Dolayısıyla genelliği bozmaksızın $\beta_n=1$ koyarak j = n için (6.1.17),

$$\Phi_{n,n}=P_n(x)=P_0(x) \qquad (6.1.20)$$

ye dönüşür.

Böylece Y.Teo.(3,2) yardımıyla (6.1.1) i elde ederiz. İspatın gereklilik şartını tamamlar. Yeter şart ispatlamak için (6.1.1) denklemine (6.1.2) dönüşümünü uygularız. a(x), (6.1.18) denklemi ile verilmiştir. (6.1.1) e, (6.1.21) dönüşümünü uygulayarak (6.1.22)' ye dönüşecektir:

$$\xi=\int\left[\frac{P_0(x)}{P_n(x)}\right]^{\frac{1}{n}}dx \qquad (6.1.21)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=j}^{n}P_k(x).\Phi_{k,j}(x)\right]Y^{(j)}(\xi)+P_0(x)Y(\xi)=0 \qquad (6.1.22)$$

Burada;

$\Phi_{k,j}$ (6.1.10) ile verilmiştir. Fakat (6.1.17)' den ve $P_0(x)\neq 0$ olduğu için (6.1.22) denklemi

$$Y^{(n)}(\xi)+\sum_{j=1}^{n-1}Pj\,Y^{(j)}(\xi)+Y(\xi)=0 \qquad (6.1.23)$$

denklemine indirgenir.

Burada β_j' ler sabittir. Bu Teorem (3,1) in ispatını tamamlar. Açıktır ki $P_0(x)$ ve $P_n(x)$ in istenilen ve işaret gereksinimlerine göre seçilebildiği açıktır. O zaman (6.1.18) a(x)' i oluşturur. $P_0(x)$, $P_n(x)$ ve a(x) fonksiyonlarına (6.1.10) ve (6.1.13)' ü kullanarak ve (6.1.17)' in yapısına dikkat ederek (6.1.17)' de yerine koyarak ve J=n-1, n-2,...,3,2,1 için (6.1.17)' yi hesaplayarak sırası ile $P_{n-1}(x)$, $P_{n-2}(x)$, ..., $P_1(x)$ elde ederiz.

Şimdi B özelliğine dönelim.

Teorem 6.3.2.

(6.1.1)' in B özelliğine sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşullar;

i) $P_k(x)$ katsayıları (6.1.10)-(6.1.17)-(6.1.18) i sağlar.

ii) $$m^n + \sum_{J=1}^{n-1} \beta_j m^j + 1 = 0 \qquad (6.1.24)$$

denklemi n farklı m_i; köküne sahiptir. β_j' ler (6.1.17)' de verilmiştir.

İspat

Teorem 2.1 den, B özelliği A özelliğini sağlar.
Teorem 6.3.1.'e göre (i)' nin A özelliği için gerekli koşulları gösterdiğini ve böylece B özelliği için gerek koşulları sağladığını görürüz. Bununla birlikte (ii) koşulu tutarlı olmadıysa sağlaması çıkmamış (6.1.24), $m = \overline{m}$ iki katlı köke sahip olacak ve (6.1.23), bir $\overline{Y}(\xi) = \xi e^{m\xi}$ çözümüne sahip olacaktır. Fakat o zaman (6.1.1) B özelliğine sahip olamazdı. Bu gereklilik ispatı tamamlar. Yeterliliği ispatlamak için (6.1.17) tutarlı ise (6.1.21) dönüşümünün (6.1.1)'i (6.1.23)' e dönüştürdüğüne dikkat ederiz ki bunun çözümleri $Y_i(\xi) = e^{m_i\xi}$ ile verilir. m_i ,Teorem 6.3.2.' nin (ii)' ye göre (6.1.24)' ün farklı kökleridir. Şimdi (6.1.1)' in çözümlerini (6.1.21) sayesinde

$$y_i(x)=\exp\left[m_i\int\left[\frac{P_0(x)}{P_n(x)}\right]^{\frac{1}{n}}dx\right] \qquad i=1,2,3,\dots\ \dots \qquad (6.1.25)$$

olarak ifade edebiliriz.

Açıktır ki, (6.1.25)' deki y $_i$(x) lineer bağımsız ve(.6.1.3) formundadır. Gerektiği gibi bu da Teo6.3.2.nin ispatını tamamlar.

Sonuç 6.3.1.(6.1.1) B özelliğine sahipse, bunun tek temel çözümleri (6.1.3) formuna sahip olan (6.1.25) ile verilir.

Bu B özelliğinin A özelliğini ifade etmesinden Teorem 6.2.1.' den ve (6.1.21) dönüşümünün tek olmasından çıkar.

Sonuç 6.3.2.Eğer (6.1.1), A özelliğine sahip ise fakat B özelliğine sahip değilse, o zaman (6.1.24)' ün k_i katları herhangi bir m_i köküne karşılık (6.1.1);

$$y_i(x)=\exp\left[m_i\int\left[\frac{P_0(x)}{P_n(x)}\right]^{\frac{1}{n}}dx\right]\sum_{j=0}^{k_i-1}A_j\left\{\int\left[\frac{P_0(x)}{P_n(x)}\right]^{\frac{1}{n}}dx\right\}^j \qquad (6.1.26)$$

çözümüne sahip olur. Burada A_j keyfi sabitlerdir. Böyle bir m_i' ye karşılık (6.1.23),

$$Y_i(\xi)=e^{m_i\xi}\sum_{j=0}^{k_i-1}A_j\xi^j \qquad (6.1.27)$$

çözümüne sahip olur ve (6.1.21); (6.1.27)' yi (6.1.26)' ya götürür.

Sonuç 6.3.3. (6.1.1) denklemi A özelliğine sahip olsun. $\beta(n-1)\neq 0$. β_j' ler (6.1.17). denklemde tarif edilmiştir. Bununla birlikte,$P_n(x)$ ve $P_{(n-1)}(x)$ katsayıları

$$P_{n-1}(x) = \frac{n}{2} P_n'(x) \tag{6.1.28}$$

i sağlasın. O zaman (6.1.1) denklemi B özelliğine sahiptir. (6.1.25) denklemi;

$$y_i(x) = \left\{ P_n(x) P_0^{n-1}(x) \right\}^{m_i/2\beta_{n-1}} \qquad i=1, 2, 3, \ldots \tag{6.1.29}$$

denklemine indirgenir.

(6.1.1), B özelliğine sahip değilse (6.1.26) denklemi;

$$y_i(x) = \left\{ P_n(x). P_0^{n-1}(x) \right\}^{mi/2\beta_{n-1}} \sum_{j=0}^{k_i-1} B_j \left\{ \log \left| P_n(x). P_0^{n-1}(x) \right| \right\}^j \tag{6.1.30}$$

ye dönüşür. B_j' ler sabit katsayılardır.

İspat

Belirtilen koşullar altında

$$\int \left[\frac{P_0(x)}{P_n(x)} \right]^{\frac{1}{n}} dx = \frac{1}{2\beta_{n-1}} \log \left| P_n(x) . P_0^{n-1}(x) \right| \tag{6.1.31}$$

ye sahip olduğumuzu göstermek açıkça yeterdir. Buna göre J=n-1 için (6.1.17)' yi hesaplarız.

$$\Phi_{n,n-1}(x)\, P_n(x) + \Phi_{n-1,\,n-1}(x)\, P_{n-1}(x) = \beta_{n-1}\, P_0(x) \tag{6.1.32}$$

elde ederiz. Fakat (6.1.13) ile k=n-1, (6.1.14) ile k=n için (6.1.32) denklemi;

$$\frac{n}{2}P_n(x).[a^{n-1}(x)]^1 + P_{n-1}(x).a^{n-1}(x) = \beta_{n-1}P_0(x) \tag{6.1.33}$$

denklemine indirgenir. (6.1.28)' i kullanarak (6.1.33);

$$\frac{n}{2}[P_0(x)a^{n-1}(x)]' = \beta_{n-1}P_0(x) \tag{6.1.34}$$

ye indirgenir. (6.1.18)' den a(x)' i (6.1.34)' de yerine koyarak;

$$\frac{d}{dx}\left[P_n(x)P_0^{n-1}(x)\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{n}\beta_{n-1}P_0(x) \tag{6.1.35}$$

elde edilir.

Sonuç olarak;

$$\int\left[\frac{P_0(x)}{P_n(x)}\right]^{\frac{1}{n}}dx = \int\frac{P_0(x)}{\left[P_n(x)P_0^{n-1}(x)\right]^{\frac{1}{n}}}dx$$

$$= \frac{n}{2\beta_{n-1}}\int\frac{\frac{2}{n}\beta_{n-1}P_0(x)dx}{\left[P_n(x)P_0^{n-1}(x)\right]^{\frac{1}{n}}} \tag{6.1.36}$$

$$= \frac{n}{2\beta_{n-1}}\log\left[P_n(x)P_0^{n-1}(x)\right]^{\frac{1}{n}}$$

olur. Fakat (6.1.36) , (6.1.35)' e eşdeğerdir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 6.3.4. Sonuç 6.3.3 şartlarını kabul edelim. β_{n-1}=0 olması hariç ve D sonradan tanımlanacak bir sabit olsun. O zaman eğer (6.1.1), B özelliğine sahip ise (6.1.25);

$$y_i(x) = \exp\left[Dm_i\int P_0(x)dx\right], \quad i = 1,2,3,\ldots,n \tag{6.1.37}$$

e indirgenir. Bu esnada (1), B özelliğine sahip değilse (6.1.26);

$$y_i(x) = \exp\left[Dm_i \int P_0(x)\,dx\right] \sum_{j=0}^{k_i-1} A_j \left\{D.\int P_0(x)\,dx\right\}^j \qquad (6.1.38)$$

e indirgenir.

İspat

Sonuç (3,4) için koşulların;

$$\left[\frac{P_0(x)}{P_n(x)}\right]^{\frac{1}{n}} = DP_0(x) \qquad (6.1.39)$$

olduğunu göstermek açıkça yeterlidir.

Burada D sabittir. Açıkça;

$$\left[\frac{\mathrm{P_0(x)}}{\mathrm{P_n(x)}}\right]^{\frac{1}{n}} = \mathrm{P_0(x)}\left[\mathrm{P_n(x)}.\mathrm{P_0^{n-1}(x)}\right]^{-\frac{1}{n}} \qquad (6.1.40)$$

olduğu doğrudur. Bununla birlikte B_{n-1}=0 ı, (6.1.35)' de yerine yerleştirerek

$$P_n(x) \,.\, Po^{n-1}(x) = D^{-n} \qquad (6.1.41)$$

D sabiti tanımlanır. (6.1.41)' i (6.1.40)' da yerine koyarak (6.1.39)' a ulaşılır. Açıkça (6.1.38) toplamındaki D sabiti, A_j' de yutulur. Fakat bu simetri nedenleri için burada bırakılmaktadır.

7. FRENET-BENZERİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

7.1. Frenet-Benzeri Diferansiyel Denklemler

Normal formdaki diferansiyel denklem sistemleri sık sık diferansiyel geometride karşımıza çıkmaktadır. Bunlardan birisi E^4 de küresel eğrileri karakterize eden diferansiyel denklem sistemidir ve

$$\frac{dp}{ds} = \tau f; \quad \frac{df}{ds} = -\tau p + \mu g, \quad \frac{dg}{ds} = -\mu f \tag{7.1.1.}$$

formunda verilmektedir. [16, 17] Burada, s eğrinin yay elemanı, $p(s)=1/\chi(s)$ eğrilik yarıçapı; χ, τ ve μ eğrilikler ve f(s), g(s) fonksiyonları C^2 sınıfından fonksiyonlardır.

E^3' de sabit genişlikli eğrileri karakterize eden sistemler de bu tiptedir ve

$$\frac{d\lambda}{d\theta} = \mu, \quad \frac{d\mu}{d\theta} = -\lambda + p\tau\delta, \quad \frac{d\delta}{d\theta} = -p\tau\mu \tag{7.1.2.}$$

olarak verildiği bilinmektedir. [18, 19] Burada $\theta(s) = \int_0^s \chi(s)\,ds$dir ve $\lambda(\theta)$, $\mu(\theta)$ ve $\delta(\theta)$ fonksiyonları eğriyi belirleyen katsayılardır. Ayrıca,

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \chi\vec{n}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -\chi\vec{t} + \tau\vec{b}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = \tau\vec{n} \tag{7.1.3.}$$

Frenet-Serret formülleri,

$$\vec{t} = \sum_{i=1}^{3} t_i \vec{e}_i, \ \vec{n} = \sum_{i=1}^{3} n_i \vec{e}_i, \ \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i \vec{e}_i$$

Koordinat dönüşümleriyle, (t_1, n_1, b_1), (t_2, n_2, b_2), (t_3, n_3, b_3) lineer bağımsız çözümler olmak üzere,

$$\frac{d\varphi_1}{ds} = \chi\varphi_2, \quad \frac{d\varphi_2}{ds} = -\chi\varphi_1 + \tau\varphi_3, \quad \frac{d\varphi_3}{ds} = -\tau\varphi_2 \qquad (7.1.4.)$$

diferansiyel denklemler sistemi kurulabilir. [21].

Bu, bir uzay eğrisinin kapalılığı (periyodikliği) ile ilgili bir kriteri ortaya çıkarmakta kullanılır.

Yukarıda bahsettiğimiz (7.1.1), (7.1.2) ve (7.1.3) normal sistemlerin hepsi de aynı tip olduğuna göre, bunları genel olarak,

$$\frac{dx}{dt} = a(t)y, \quad \frac{dy}{dt} = -a(t)x + b(t)z, \quad \frac{dz}{dt} = -b(t)y \qquad (7.1.5.)$$

formunda yazabiliriz. Bu tip bir sisteme Frenet-Benzeri diferansiyel denklemler sistemi adını vereceğiz. Burada a, b, x, y, z fonksiyonları ve türevlerinin kapalı bir aralıkta sürekli olduğu kabul edilmektedir. Buradaki amaç, (7.1.4) sisteminin çözüm kümelerinin integral bağıntısı formunda bulunabileceğini ve sonuçların (7.1.1), (7.1.2), (7.1.3) gibi sistemlere uygulanabileceğini göstermektedir.

7.2. Diferansiyel Denklemlerin ve İntegral Bağıntıların Kurulması

Önce (7.1.5.) sistemini gözönüne alalım. Burada;

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0 \qquad (7.2.1.)$$

olduğundan bunun çözümü;

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \text{(R keyfi sabit)} \tag{7.2.2.}$$

olarak elde edilir. Buradan, (7.1.5.) sisteminin {x(t), y(t), z(t)} çözüm kümesinin gösterdiği eğrilerin, yani $\forall t \in I$ için (I bir aralık) tüm (x, y, z) noktalarının, xyz-koordinat sistemindeki (7.2.2.) küresi üzerinde olduğu gözlenir.

Şimdi (7.1.4.) ve (7.1.5.) denklemlerini ele alalım ve z' yi keyfi alarak {x, y, z} çözüm kümesini bulalım. Bu durumda, y' yi yok ederek elde edilen;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a}\frac{dx}{dt}\right) + ax = bz \tag{7.2.3.}$$

diferansiyel denklemini, [20] de verilen $\varepsilon = \int a\, dt$ bağımsız değişken değişimi ile, sabit katsayılı hale getiririz. Bunun çözümü,

$$x = [A - \int bz \text{Sin} \int adt\, dt] \text{ Cos} \int adt + [B + \int bz \text{ Cos} \int adt\, dt] \text{ Sin} \int adt \tag{7.2.4.}$$

olarak bulunur. Aynı yolu izleyerek,

$$y = [B + \int bz \text{Cos} \int adt\, dt] \text{ Cos} \int adt - [A - \int bz \text{ Sin} \int adt\, dt] \text{ Sin} \int adt \tag{7.2.5.}$$

bağıntısını elde ederiz. Bulunan (7.2.4.) ve (7.2.5.) bağıntılarını (7.2.3.)' de yerine koyduğumuzda, yalnız z' ye bağlı olan

$$[A - \int bz \text{ Sin} \int adt\, dt]^2 + [B + \int bz \text{ Cos} \int adt\, dt]^2 + z^2 = R^2 \tag{7.2.6.}$$

integral bağıntısını elde ederiz. Burada A, B ve R keyfi sabitlerdir. Eğer. z. (7.2.6.) bağıntısını sağlayacak şekilde seçilirse (7.2.4.), (7.2.5.) ve (7.2.6.) beraberce (7.2.3.) sisteminin bir çözüm kümesini oluşturur. Diğer yandan, (7.2.3.)' de x ve y' yi yok edersek aşağıdaki 3.mertebeden lineer diferansiyel denklemini elde ederiz:

$$\left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b}z'\right)' + \frac{b}{a}z\right]' + \frac{a}{b}z' = 0 \tag{7.2.7.}$$

veya

$$P_0 z''' + P_1 z'' + P_2 z' + P_3 z = 0 ; \qquad (7.2.8.)$$

$$P_0 = \frac{1}{b},$$

$$P_1 = \left(\frac{1}{a}\right)'\left(\frac{1}{b}\right) + 2\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)',$$

$$P_2 = \left(\frac{1}{a}\right)'\left(\frac{1}{b}\right)' + \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)'' + \frac{a^2 + b^2}{ab}, \qquad (7.2.9.)$$

$$P_3 = \left(\frac{b}{a}\right)'$$

Aynı zamanda, (7.2.8.) denklemi, (7.2.7.) integral bağıntısından A, B ve R keyfi sabitlerinin yok edilmesiyle elde edilen diferansiyel denklem olduğundan, (7.2.7.) integral bağıntısının (7.2.8.) denkleminin kapalı formdaki bir çözümü olduğunu görürüz. Ayrıca (7.2.5.), (7.2.6.) ve (7.2.7.) takımının (7.2.3.) sistemini sağladığını ve böylece buna eşdeğer olduğunu gözleriz.

(7.1.2.) ve (7.1.3.) denklemler çiftinden, yukarıdaki paragraftaki yol izlenerek;

$$y = [C - \int ax \mathrm{Cos} \int b dt\, dt]\, \mathrm{Cos} \int b dt + [D - \int ax \mathrm{Sin} \int b dt\, dt]\, \mathrm{Sin} \int b dt \qquad (7.2.10)$$

$$z = [D - \int ax \mathrm{Sin} \int b dt\, dt]\, \mathrm{Cos} \int b dt + [C - \int ax \mathrm{Cos} \int b dt\, dt]\, \mathrm{Sin} \int b dt \qquad (7.2.11)$$

$$x^2 = [C - \int ax \mathrm{Cos} \int b dt\, dt]^2 + [D - \int ax \mathrm{Sin} \int b dt\, dt]^2 = R^2 \qquad (7.2.12)$$

elde ederiz. Burada C, D ve R keyfi sabitlerdir.

(7.2.3.)' den y ve z' nin yok edilmesiyle x bilinmeyenli aşağıdaki 3.mertebeden lineer denklem elde edilir:

$$\left[\frac{1}{b}\left(\frac{1}{a}x'\right)' + \frac{a}{b}x\right]' + \frac{b}{a}x' = 0$$

veya

$$Q_0\, x''' + Q_1\, x'' + Q_2\, x' + Q_3\, x = 0; \qquad (7.2.13)$$

$$Q_0 = \frac{1}{ab},$$

$$Q_1 = 2\left(\frac{1}{a}\right)'\left(\frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)'$$

$$Q_2 = \left(\frac{1}{a}\right)'\left(\frac{1}{b}\right)' + \left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}\right)'' + \frac{a^2+b^2}{ab},$$

$$Q_3 = \left(\frac{a}{b}\right)'$$

Diğer yandan, (7.2.12)' den C, D ve R keyfi sabitlerini yok edersek (7.2.13) diferansiyel denkleminin elde edildiğini ve böylece (7.2.12)' nin (7.2.13)' ün kapalı formda bir çözümü olduğunu gözleriz. O halde (7.2.3.) sistemine eşdeğer olan diğer bir takımın (7.2.10), (7.2.11) ve (7.2.12) üçlüsü ile verilebileceğini söyleyebiliriz.

Şimdi özel olarak (o, y, 0) noktasındaki durumu inceleyelim. O halde (7.2.5.), (7.2.6.) ve (7.2.7.)' den

$$A \operatorname{Cos} \int a dt + B \operatorname{Sin} \int a dt = 0$$

$$B \operatorname{Cos} \int a dt - A \operatorname{Sin} \int a dt = y\ (R) \qquad (7.2.14)$$

$A^2 + B^2 = R^2$ ve

$$tg \int adt = -A/B \; ; \; A^2 + B^2 = R^2 \tag{7.2.15}$$

Ayrıca (7.2.10), (7.2.11) ve (7.2.12)' den

$$D \, Cos \int bdt - C \, Sin \int bdt = 0$$

$$C \, Cos \int bdt - D \, Sin \int bdt = y \, (R) \tag{7.2.16}$$

$C^2 + D^2 = R^2$ ve

$$tg \int bdt = D/C \; ; \; C^2 + D^2 = R^2 \tag{7.2.17}$$

Bu noktada ya A = C, B = D ya da A = D, B = C' dir.

A = C, B = D iken (7.2.15) ve (7.2.17) den

$$tg \int adt, \, tg\int bdt = -1 \text{ veya } \int adt - \int bdt = k\pi + \pi/2; \tag{7.2.18}$$

A = D, B = C iken,

$$tg \int adt + tg \int bdt = 0 \text{ veya } \int adt + \int bdt = \pi + k\pi \tag{7.2.19}$$

O halde adı geçen noktada (7.2.18) veya (7.2.19) bağıntıları mevcuttur.

8. UYGULAMALAR

1.

$y''+p_{(x)}y'+q_{(x)}y = 0$ denkleminin $y_1^2 + y_2^2 = 1$ koşulunu sağlayan iki lineer bağımsız çözümünün olabilmesi için p ve q fonksiyonları arasındaki bağıntıyı bulunuz.

$y_1 = \text{Cos}x$ ve $y_2=\text{Sin}x$ alalım. Bunların denklemi sağlaması koşulu θ için;

$\theta^2 = q(x)$, $-\theta''/\theta' = p(x)$ bulunur.

Bu ikisi arasında θ yok edilirse, $2\,p(x)\,q(x) + q'(x) = 0$ çıkar. Aranan koşul budur.

Bu koşul varsa $Q(x) = \int\sqrt{q(x)}dx$ olup genel çözüm;

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$= c_1 Sin\left[\left(\int\sqrt{q(x)}dx\right)\right] + c_2 Cos\left[\left(\int\sqrt{q(x)}dx\right)\right] \ olur.$$

Not: $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$ denklemi için şu sonuçlar elde edilir.

$$2\frac{a_1a_2}{a_0^2} + \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^1 = 0 \ \text{ve genel çözüm;}$$

$$y = c_1\text{Sin}\left[\int\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}dx\right] + c_2\text{Cos}\left[\int\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}dx\right]$$

2.

p(x) fonksiyonunu öyle belirtiniz ki $y''=y'/x + p(x)$ denkleminin $y_1.y_2 = 1$ koşulunu sağlayan iki çözümü mevcut olsun.

Bu halde genel çözümü;y_1 ve y_2 için yazılacak denklemlerden birincisi y_2 ikincisi y_1 ile çarpılıp toplanırsa

$y_1.y_2=1$,

$(y_1.y_2)' = 0$ olduğundan

$y_2y_1''+y_2''.y_1 = 2p$, $(y_1.y_2)'' = 0$ karşılaştırılmasından
$y_1'.y_2' = p$ olduğu görülür.
$p'=2p/x$ olur. $p(x) = cx^2$

Genel Çözüm;

$$y = c_1 \exp\left[-\int\sqrt{-p(x)}dx\right] + c_2 \exp\int\sqrt{-p(x)}dx$$ olarak elde edilir.

$p(x)\, y'' + q(x)y'+y = 0$ denkleminin $t = f(x)$ gibi dönüşümle sabit katsayılı bir denklem haline gelebilmesi için $p(x)$ ve $q(x)$ arasındaki bağıntı;
$t = f(x)$

$p(x)\,(f_1)^2\, d^2y/dt^2 + [p(x)f'' + q(x)f']\, dy/dt + y = 0$

$p(x)\,(f')^2 = \text{sabit} = k_1$

$p(x)\, f'' + q(x)\, f' = \text{sabit} = k_2$

Birincisi türetilerek ikincisinde yerine yazılırsa;

$$q(x) = \frac{p(x)}{2} + \frac{k_2}{k_1}\sqrt{p(x)}$$

$$\frac{q(x) - \dfrac{p'(x)}{2}}{\sqrt{p(x)}} = \frac{k_2}{k_1}$$ koşulu sağlanır. (k = sabit)

$$t = f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \text{arc Sinx} & |x| < 1 \\ \text{arc chx} & |x| > 1 \end{array}\right\} t = f(x) = \frac{1}{x}$$

$$y = \left\{\begin{array}{lll} c_1 \text{Cos}at & + c_2 \text{ Sin } at & |x| < 1 \\ c_1 \text{Ch}at & + c_2 \text{ Sinh } at & |x| > 1 \end{array}\right\} y = (c_1 + c_2)e^t$$

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ denkleminin iki çözümü $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ olsun. c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $y = c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ fonksiyonunun bir çözüm olduğunu ispatlayınız.

$$y''+\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y'+\frac{a_2(x)}{a_0(x)}y=0$$

$$\left(D^2+\frac{a_1(x)}{a_0(x)}D+\frac{a_2(x)}{a_0(x)}\right)y=0$$

$$\left(\alpha^2+\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right)\left(\alpha+\frac{a_2(x)}{a_0(x)}\right)=(\alpha-y_1(x))(\alpha-y_2(x))=0$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y' \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y'' \end{vmatrix}=0$$

$y_1(x)$=y, $y_2(x)$=y çözüm ise bunlar denklemi sağlar.

$$y_1''(x)+\frac{a_2(x)}{a_0(x)}y_1'(x)+\frac{a_2(x)}{a_0(x)}y_1(x)=0$$

$$\left.\begin{aligned} y&=c_1y_1 \\ y'&=c_1y_1^1 \\ y''&=c_1y_1'' \end{aligned}\right\}\ c_1y_1''+\frac{a_1(x)}{a_0(x)}c_1y_1' + \frac{a_2(x)}{a_0(x)}.c_1y_1+c_1y_1=0 \ \textit{olmalı,}$$

$$c_1\left(y_1''(x)+\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y_1'(x)+\frac{a_2(x)}{a_0(x)}y_1(x)\right)=0$$

$$c_1.0=0$$

$$0=0$$

$$c_1\neq 0$$

Aynen c_2y_2 için çözülür.

4.

Aşağıdaki denklemin genel çözümünü bulunuz.

$$xy''-y'=\frac{4}{x}$$
$$y'=p, y''=p'$$
$$y=c_1+c_2x^2-2\ln x$$
$$xp'-p=\frac{4}{x}$$
$$p'-\frac{1}{x}p=\frac{4}{x^2}$$
$$p=e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\int e^{\int \frac{1}{x}dx}.\frac{4}{x^2}dx$$
$$p=x.4\left(\frac{x}{-2}\right)+k_1$$
$$p=-2x^{-1}+k_1x$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{x}+k_1x$$
$$dy=-2\ln x+k_{1,2}x^2+k_2$$
$$y=c_1x^2+c_2-2\ln x$$

5.

$y''+f(x)y'+g(x)y=F(x)$ denkleminin genel çözümünü araştırınız.

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

$$y=c_1(x)\,y_1(x)+c_2(x)\,y_2(x)$$

$$y'=c_1(x)\,y_1'(x)+c_2(x)\,y_2'(x)+c_1'(x)\,y_1(x)+c_2'(x)\,y_2(x)$$

$$c_1'(x)\,y_1(x)+c_2'(x)\,y_2'(x)=0$$

$$y'=c_1(x)\,y_1'(x)+c_2(x)\,y_2'(x)$$

$$y''=c_1(x)\,y_1''(x)+c_2(x)\,y_2''(x)+c_1'(x)\,y_1'(x)+c_2'(x)\,y_2'(x)$$

veya

$c_1(y_1'' + fy_1'+gy_1) + c_2(y_2''+fy_2'+gy_2) + c_1'+y_1' + c_2'y_2' = F(x)$

$y_1'' + f(x)y_1'+g(x)y_1 = 0$ ve $y_2''+f(x)y_2' + g(x)y_2 = 0$

$c_1'y_1+c_2'y_2 = 0$

$c_1'y_1' + c_2'y_2' = F(x)$

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ F(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_2 F(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & F(x) \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = \frac{y_1 F(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}$$

$$c_1(x) = -\int \frac{y_2(x)F(x)dx}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)} + c_1$$

$$c_2(x) = -\int \frac{y_1(x)F(x)dx}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)} + c_2$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_2 \int \frac{y_1 F}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dx - \int \frac{y_2 F}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dx$$

şeklinde bulunur.

6.

Aşağıda verilen diferansiyel denklemi çözünüz.

$x^3y'' + xy' - y = e^{1/x}, \quad x > 0$

$x^3y'' + xy' - y = 0$

$y(x) = xu(x)$

$y' = xu' + u$

$y'' = xu'' + 2u'$

$x^3(xu'' + 2u') + x(xu' + u) - xu = x^4u'' + (2x^3 + x^2)u' = 0$

$x^4w' = -(2x^3 + x^2)w,$

$$\frac{w'}{w} = \frac{-(2x^3 + x^2)}{x^4} = -\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$\ln|w| = -2\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|C_1|$$

$$u = C_1 \int e^{1/x} x^{-2} dx = -C_1 e^{1/x} + C_2$$

$$x = xv_1(x) + xe^{1/x} v_2(x)$$

$$xv_1' \ + xe^{1/x} v_2' \ = 0$$

$$v_1' \ + \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{1/x} v_2' \ = x^{-3} e^{1/x}$$

$$W\left[x, xe^{1/x}\right] = \begin{vmatrix} x & xe^{1/x} \\ 1 & \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{1/x} \end{vmatrix} = -e^{1/x}$$

$$v_1' \ = \frac{1}{-e^{1/x}} \begin{vmatrix} x & xe^{1/x} \\ x^{-3} e^{1/x} & \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{1/x} \end{vmatrix} = \frac{-x^{-3} e^{3/x}}{-e^{1/x}} = x^{-3} e^{1/x}$$

$v_2' = -e^{-1/x} v_1'$

$= -x^{-2}$

$y_p(x) = x(-e^{1/x}) + xe^{1/x}(x^{-1}) = (1-x)e^{1/x}$

$y(x) = C_1 x + C_2 x e^{1/x} + (1-x)e^{1/x}$

7.

x"(t)-x'(t)-6x(t) = -2

x(0)=1,   x'(0)=0

yukarıda verilen koşullara bağlı kalarak diferansiyel denklemi çözümleyiniz.

s^2≤{x(t)} – sx(0) – x'(0) - s≤{x(t)} + x(0) - 6≤{x(t)} = -2/s

(s^2-s-6)≤{x(t)} – s+1 = -2/s

(s^2-s-6)≤{x(t)}= s^2-s-2/s

≤{x(t)} = s^2-s-2 / s(s^2-s-6)

$$\frac{s^2 - s - 2}{s(s^2 - s - 6)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+2}$$

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = \frac{4}{15}, \qquad C = \frac{2}{5}$$

$$\frac{s^2-s-2}{s(s^2-s-6)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s}\right)+\frac{4}{15}\left(\frac{1}{s-3}\right)+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$x(t)=\Im^{-1}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s}\right)\right\}+\Im^{-1}\left\{\frac{4}{15}\left(\frac{1}{s-3}\right)\right\}+\Im^{-1}\left\{\frac{2}{5}\left(\frac{1}{s+2}\right)\right\}$$

$$x(t)=\frac{1}{3}+\frac{4}{15}e^{3t}+\frac{2}{5}e^{-2t}$$

$$\Im\{x(t)\}=X(s)$$

8. $(x^2+x)y'''-(x^2+3x+1)y''+\left(x+4+\frac{2}{x}\right)y'-\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)y=3x^2(x+1)^2$

değişken katsayılı diferansiyel denklemin çözüm kümesini bulunuz.

$(x^2+x)v'''-(x^2-2)v''-(x+2)v'=3x(x+1)^2$

$(x^2+x)u''-(x^2-2)u'-(x+2)u=3x(x+1)^2$

$u=e^xw$, $u'=e^x$, $w'+e^xw$, $u''=e^xw''+2e^xw'+e^xw$

$(x^2+x)w''+(x^2+2x+2)w' = 3xe^{-x}(x+1)^2$

$(x^2+x)z'+(x^2+2x+2)z = 3xe^{-x}(x+1)^2$

$$\frac{dz}{dx}+\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}\right)z=3e^{-x}(x+1)$$

$$z\frac{x^2e^x}{x+1}\int 3x^2dx=x^3+K_1$$

$$\frac{dw}{dx}=z=x(x+1)e^{-x}+K_1\frac{x+1}{x^2}e^{-x}$$

$$\frac{u}{e^x}=w=-x^2e^{-x}-3e^{-x}+C_1\frac{e^{-x}}{x}+C_2$$

$$\frac{dv}{dx}=u=-x^2-3x-3+\frac{C_1}{x}+C_2e^x$$

$$y=xv=-\frac{x^4}{3}-\frac{3}{2}x^3-3x^2+C_1x\ln x+C_2xe^x+C_3x$$

9.

$x^3y'''+5x^2y''+(2x-x^3)y'-(2+x^2)y=40x^3-4x^5$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

x^m şeklinde bir entegrasyon çarpanına sahip olup olmadığını anlamak için x^m ile çarpalım.

$x^{m+3}y'''+5x^{m+2}y''+(2x^{m+1}-x^{m+3})y'-(2x^m+x^{m+2})y=(40x^3-4x^5)x^m$

$-(2x^m+x^{m+2})-2(m+1)x^m+(m+3)x^{m+2}+5(m+2)(m+1)x^m-(m+3)(m+2)(m+1)x^m=$ $(m+2)x^{m+2}+(m+2)(m-m^2)x^m=0$ (x' in bütün değerleri için) x^{-2} bir entegrasyon çarpandır. Bunu kullanarak,

$$\begin{array}{ll}
 & xy''' + 5y'' + \left(\frac{2}{x} - x\right)y' - \left(\frac{2}{x^2} + 1\right)y = 40x - 4x^3 \\
xy'' & xy''' + y'' \\
 & 4y'' + \left(\frac{2}{x} - x\right)y' - \left(\frac{2}{x^2} + 1\right)y \\
4y' + \left(\frac{2}{x} - x\right)y & 4y'' + \left(\frac{2}{x} - x\right)y' - \left(\frac{2}{x^2} + 1\right)y \\
 & xy'' + 4y' + \left(\frac{2}{x} - x\right)y = 20x^2 - x^6 + K
\end{array}$$

$y = \dfrac{v}{x^2}$ *ile denklem*

$v'' - v = (D^2 - 1)v = 20x^3 - x^5 + Kx$

şekline indirgenir ve tam çözüm :

$v = x^2 y = C_1 e^x C_2 e^{-x} - (1 + D^2 + D^4 + D^6 + ...)(20x^3 - x^5 + Kx)$

$C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x + x^5$

10.

$(x^3D^3+6x^2D^2+7xD+1)y = \ln x$

denklemini sabit katsayılı denkleme indirgeyiniz ve genel çözümünü bulunuz.

$x = e^t \qquad t = \ln x$

$xDy(x) = D_1y(t), ..., x^3D^3y(x) = D_1(D_1-1)(D_1-2)y(t)$

$(D_1+1)^3 y = t$

$u = (c_0 + c_1 t + c_2 t^2)e^{-t}$

$$v = \frac{1}{1+3D_1+3D_1^2+D_1^3} t = [1-(3D_1+3D_1^2+D_1^3)+...]t = t-3$$

$$y = (c_0 + c_1 t + c_2 t^2)e^{-t} + t - 3$$

$$y = [c_0 + c_1 \ln x + c_2 (\ln x)^2]x^{-1} + \ln x - 3$$

11.

$x(x+1)y''+(2-x^2)y' - (2+x)y = (x+1)^2$ denkleminin tamamlayıcı fonksiyonu $y = c_1e^x + c_2x^{-1}$ olduğuna göre özel çözümünü bulunuz.

$y' = c_1e^x + c_2x^{-2}$

$y' = c_1e^x - c_2x^{-2} + c_1'e^x + c_1'x^{-1}$

$c_1'e^x+c_2'x^{-1} = 0$

$y'' = c_1e^x + 2c_2x^{-3} + c_1'e^x - c_2'x^{-2}$

$c_1'e^x - c_2'x^{-2} = x+1/x$

$c_1' = e^{-x}$, $\qquad$ $c_2 = -x$

$c_1 = e^{-x}$, $\qquad$ $c = -x^2/2$

$v = -(x+2)/2$

12. Aşağıda verilen değişken katsayılı difaransiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

$$2xy''+(1-4x)y'+(2x-1)y = e^x$$

$$y' = e^x(u+u'), \qquad y'' = e^x(u+2u'+u'')$$

$$2xu''+u' = 1$$

$$2xv'+v = 1$$

$$\frac{dv}{v-1} = \frac{dx}{2x}$$

$$\ln(v-1) = \frac{1}{2}\ln x + \ln c_1$$

$$v = c_1\sqrt{x}+1$$

$$u' = c_1\sqrt{x}+1$$

$$u = \int (c_1\sqrt{x}+1)dx + c_2 = \frac{2}{3}c_1\sqrt{x^3}+x+c_2$$

13.

$ty''+(t-1)y'-y=0,$

$y(0)=5$, $y'(0)=\alpha$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Denklemin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$L\{ty''\}+L\{ty'\}-L\{y'\}-L\{y\}=0$ olur.

$L\{y''\}=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)-5s-\alpha$ ve (D) özelliğinden

$L\{ty''\}=-\frac{d}{ds}(s^2Y(s)-5s-\alpha)=-2sY-s^2Y'+5$

Elde edilir. Benzer halde ,

$L\{y'\}=sY(s)-y(0)=sY-5$

$L\{ty'\}=-\frac{d}{ds}(sY-5)=-Y-sY'$ bulunur. Buradan ,Y(s) ye göre birinci basamaktan

$$Y' + \frac{3s+2}{s(s+1)} Y = \frac{10}{s(s+1)}$$

doğrusal denklemi elde edilir . Bu denklemin çözümü ,

$$Y(s) = \frac{5+c_1}{s+1} + c_1\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)$$

dir. Böylece verilen denklemin genel çözümü,

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = (5+c_1)L^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} + c_1L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\} - c_1L^{-1}\{\frac{1}{s}\}$$

$$y(t) = (5+c_1)e^{-t} + c_1(t-1)$$

biçiminde bulunur.

14.

7. bölümde elde edilen sonuçları önce E^4' de küresel eğrileri karakterize eden (7.1.1) sistemine uygulayalım. Bu sistem, (7.1.4)' ün $x = p$, $y = f$, $z = g$, $a = \tau$, $b = \mu$, $t = s$ konulması halidir. O halde (7.1.5), (7.1.10), (7.1.11), (7.1.12) ve (7.1.13)' den,

$$p^2 + f^2 + g^2 = R^2$$

$$f = [C - \int \tau p \, Cos \int \mu ds \, ds] \, Cos \int \mu \, ds + (D - \int \tau p \, Sin \int \mu ds \, ds) \, Sin \int \mu \, ds$$

$$g = [D - \int \tau p \, Sin \int \mu ds \, ds] \, Cos \int \mu \, ds - (C - \int \tau p \, Sin \int \mu ds \, ds) \, Sin \int \mu \, ds$$

ve

$$p^2 + [C - \int \tau p \, Cos \int \mu ds \, ds]^2 + [D - \int \tau p \, Sin \int \mu ds \, ds]^2 = R^2$$

$$\left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{\tau}p'\right)' + \frac{\tau}{\mu}p\right]' + \frac{\mu}{\tau}p' = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak bu denklem, R yarıçaplı küre üzerinde bulunan ve yukarıdaki integral bağıntısını gerçekleyen E^4 küresel eğrilerini karakterize eden diferansiyel denklemdir. Ayrıca buna ,E^4 küresel eğrilerinin integral karakterizasyonu denir. [17].

Şimdi de uzayda sabit genişlikli eğrileri karakterize eden (7.1.2) sistemini gözönüne alalım. Bu sistem, (7.1.4) sisteminin
$x = \lambda$, $y = \mu$, $z = \delta$, $a = 1$, $t = \theta$, $b = p\tau$ konulması hali olduğundan, (7.1.4) için elde edilen (7.1.5), (7.1.6), (7.1.7), (7.1.8) ve (7.1.9) bağıntılarından aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \delta^2 = R^2$$

$$\lambda = [A - \int p\tau\delta \, \mathrm{Sin}\theta \, d\theta] \, \mathrm{Cos}\theta + [B + \int p\tau\delta \, \mathrm{Cos}\theta \, d\theta] \, \mathrm{Sin}\theta,$$
$$\mu = [B - \int p\tau\delta \, \mathrm{Cos}\theta \, d\theta] \, \mathrm{Cos}\theta - [A - \int p\tau\delta \, \mathrm{Sin}\theta \, d\theta] \, \mathrm{Sin}\theta,$$
$$[A - \int p\tau\delta \, \mathrm{Sin}\theta \, d\theta]^2 + [B + \int p\tau\delta \, \mathrm{Cos}\theta \, d\theta]^2 + \delta^2 = R^2$$
$$\left[\left(\frac{1}{p\tau}\delta'\right)' + p\tau\delta\right] + \frac{1}{p\tau}\delta' = 0$$

Böylece, yukarıdaki denklemi sağlayacak şekilde seçilen δ için λ; μ ve R bulunarak sabit genişlikli eğri belirlenebilir. Ayrıca, gerektiğinde (7.1.5), (7.1.10), (7.1.11), (7.1.12) ve (7.1.13) bağıntıları da kullanılarak eğri belirlenebilir.

15.

Basit gibi görünen $y'=x^2+y^2$, $y(0) = 1$ Başlangıç-değer problemini çözelim.

(Dönüşüm Yöntemi)

Kesim (2.2). de verilen yöntemle aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$y = u^p v^q$$

dönüşümünü yaparız ve $q = -1$ seçerek denklemi

$$v'' + x^2 v = 0 \tag{1}$$

lineer hale getiririz ve y çözümünü de;

$$y = -v'/v \tag{2}$$

olarak elde ederiz; burada v, (1) denkleminin çözümüdür.

Şimdi v yi $v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formunda bir seri çözümü olarak aradığımızda lineer bağımsız çözümleri;

$$v_1 = 1 - \frac{1}{4.3}x^4 + \frac{1}{8.7.4.3}x^8 + \ldots$$
$$v_2 = x - \frac{1}{5.4}x^5 + \frac{1}{9.8.5.4}x^9 + \ldots$$

olarak elde ederiz ki bunlar $0 \le x \le 1$ için yakınsaktırlar. Genel çözüm, v için,

$v_1 = c_1 v_1 + c_2 v_2$ (c_1 ve c_2 keyfi sabit) olur. Böylece y için genel çözüm;

$$y = -\frac{v'}{v} = -\frac{c_1 v_1' + c_2 v_2'}{c_1 v_1 + c_2 v_2} \quad \text{veya} \quad k = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{olmak üzere} \quad y = -\frac{v_1' + kv_2'}{v_1 + kv_2}$$

olarak elde edilir. $y(0) = 1$ koşuluna göre $k = -1$ olur. Böylece,

$$y = \frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = \frac{1}{1 - x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5} + \ldots..} \tag{3}$$

elde edilir. $x \to 1$ iken $y \to \infty$ olduğu elde edilebilir[7]. Bu açıklama x' in 1' e yakın değerleri için önceki yöntemlerin hatalı davranışını gösterir.

16.

Fizikte yörünge hesabında karşımıza çıkan;

$$(xy + 1)dx + (xy - 1)\, dy = 0$$

diferansiyel denklemini gözönüne alalım ve çözümünü araştıralım.

Bu denklemin analitik çözümünü bulmak mümkün olmamıştır. Dönüşüm yolu izleyerek denklemi Riccati denklemine dönüştürüp çözümünü araştırabiliriz.

Şimdi kesim 2.2 deki yöntemi kullanalım.

$q = -1$ olmak üzere $v = U^pV^{-1}$ dönüşümü ile Riccati denklemi ikinci mertebeden, V bağımlı u bağımsız değişkenli;

$$16\frac{d^2V}{du^2} + u^2V = 0$$

lineer diferansiyel denklemine dönüşür. Bu denklemin $u = 0$ civarında;

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n \text{ formunda}$$

$$V_1 = 1 - \frac{u^4}{3.4..16} + \frac{u^8}{3.4.7.8..16^2} - \frac{u^{12}}{3.4.7.8.11.12..16^3} + \ldots\ldots\ldots$$

$$V_2 = u - \frac{u^5}{4.5..16} + \frac{u^9}{4.5.8.9..16^2} - \frac{u^{13}}{4.5.8.9.12.13..16^3} + \ldots\ldots\ldots$$

gibi iki tane lineer bağımsız seri çözümünü elde ederiz. Genel çözüm ise;

$$V = c_1V_1 + c_2V_2$$

olacaktır.

$$v = -4\frac{v_1' + kv_2'}{v_1 + kv_2}, \quad \left(k = \frac{c_1}{c_2} \text{ keyfi sabit}\right)$$

olur. Buradan sonuçlandırılır.

17.

Aşağıdaki denklemi özel yöntemlerden yararlanarak çözünüz.

$$(x+1)y''-(x-1)y'-2xy=\frac{e^{-x}}{x+1} \qquad \textit{denkle}\,\mathrm{min}\,\textit{de}$$

$$a_0+a_2=x+1-2x=1-x$$

$$a_1=-(x-1)$$

$$a_0+a_2=a_1$$

olduğundan $y_1=e^{-x}$ homogen kısmın bir çözümüdür.

$y=e^{-x}.u$ dönüşümü ile verilen denklem

$$[(x+1)u''+(-3x-1)u']e^{-x}=\frac{e^{-x}}{x+1} \text{ veya}$$

$u'=v$, $u''=v'$ alınarak

$$(x+1).v'-(3x+1)v=\frac{1}{x+1}$$

$$v'-\frac{3x+1}{x+1}v=\frac{1}{(x+1)^2} \text{ lineer denkle min e indirgenir ve çözülür.}$$

$$v=\frac{e^{3x}}{(x+1)^2}.\left[\int e^{-3x}dx+c_1\right]$$

$$=\frac{e^{3x}}{(x+1)^2}\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}+c_1\right]$$

$$u'=v=-\frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^2}+c_1\frac{e^{3x}}{(x+1)^2}$$

$$u=\int\left[-\frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^2}+c_1\frac{e^{3x}}{(x+1)^2}\right]dx+c^2$$

Genel çözüm;

$$y=e^{-x}\left\{\int\left[-\frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^2}+c_1\frac{e^{3x}}{(x+1)^2}\right]dx+c_2\right\}$$

18.

$(x-2)\,y'' - (4x-7)\,y' + (4x-6)y = (x-2)^2$ denkleminin homogen kısmının $y = e^{mx}$ formunda çözümlerini arayınız.

$y=e^{mx}$ $\qquad$ $y'=m\,e^{mx}$ $\qquad$ $y''=m^2\,e^{mx}$

ifadelerini homogen denklemde yerine koyalım.

$(x-2)m^2\,e^{mx} - (4x-7)\,m\,e^{mx} + (4x-6)e^{mx} = 0 \qquad e^{mx}\neq 0$

$(m^2-4m+4)x + (-2m^2+7m-6) = 0$

$m^2-4m+4=0 \qquad (m-2)^2 = 0$

$-2m^2+7m-6=0 \qquad (m-2)\,(2m-3) = 0$ sistemini aynı anda sağlayan m değerleri için

yeni m=2 için sağlanır. O halde lineer bağımsız çözümlerden birisi $y_1=e^{2x}$ tir.

$y_n = c_1e^{2x}+c_2(x-2)\,e^{2x}$

$y_ö = e^{2x}\,(x^2/3 - x^2)$ şeklinde elde edilir.

9. SONUÇ ve TARTIŞMA

Bu çalışmada, tam çözümleri bulunabilen yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemler ve bunların çözüm yöntemleri uygulamaları ile birlikte gözönüne serilmiştir. Ayrıca, daha ileri çalışmalarda ve mühendislik problemlerinde ortaya çıkan, çözülemeyen diferansiyel denklemlere yardımcı olabilecek dönüşüm yöntemleri de sunulmuştur.

Fen ve mühendislikte sıkça karşımıza çıkan "Tam Olmayan ve Riccati Denklemi" gibi lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri bulunamamakta ya da zorluklar bulunmaktadır. Bu çalışmada, bu tür denklemler değişken katsayılı diferansiyel denkleme dönüşüm yöntemleri ile indirgenip çözülebilmektedir. Fizikte yörüngelerin bulunmasında ortaya çıkan analitik olarak çözülemeyen diferansiyel denklemlerin bazı dönüşümlerle Riccati denklemine ve bunun da 2. Mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemine dönüştüğü ve dolayısıyla verilen yöntemlerle sayısal olarak çözülebilir hale geldiği görülmektedir.

Diferansiyel geometride karşımıza çıkan çoğu yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin açık bir çözümü henüz bulunamamıştır. Ancak, kapalı formda çözümleri olan, (7.1.8)ve (7.1.12) de olduğu gibi, integral bağıntıları olarak elde edilebilmiştir. Eğer, a sabit, b sabit ise ya da a/b oranı sabit ise, bağımsız değişken değişimleri ile sabit katsayılı hale getirilerek açık çözümler bulunabilir [20] Bölüm 7 de verilen yöntemler, bazı sınırlamalar getirildiğinden (yani x, y veya z üzerine bazı koşullar konulmak zorunda olduğundan) özel durumlar için dolayısıyla bazı özel eğriler için, oldukça yararlıdır. Örneğin, uygulama kesiminde verilen küresel eğriler ve sabit genişlikli eğrilerin yanısıra, sabit genişli eğrilerin bir özel hali olan Bertrand eğrileri için de (7.1.14)-(7.1.19) bağıntıları yararlı olabilir. Özellikle, x, y veya z' nin biri için bir koşul verilmesi halinde işlemler oldukça kolaylaşır.

Kesim 7.3' de E^4 küresel eğrileri için verilen formüllerde, $g = 0$ (ve aynı zamanda $\mu = 0$) alınırsa $p^2 + [C - \int p\tau\, ds]^2 = R^2 - D^2$ ($=K^2$, K keyfi sabit) integral bağıntısı elde edilir. Bunun diferansiyel denklemi, $(1/\tau\ p')' + \tau p = 0$ dir ki bu, uzayda küresel eğrileri karakterize eden diferansiyel denklemdir. [6] O halde $p^2[C - \int p\tau \, ds]^2 = K^2$ bağıntısı, uzayda küresel eğriler için bir integral özelliktir. Aynı zamanda, bilinen $p = A \cos \int \tau \, ds + B \int \tau \, ds$ açık .çözümü ise (7.1.6) bağıntısından kolayca elde edilir.

Kesim 7 2' de karşılaşılan R, $\int a dt$, $\int b dt$ ile küresel kutup koordinatları arasında bir ilginin var olduğunu sezgisel olarak söyleyebiliriz. Diğer yandan, burada sunulan ve diferansiyel geometride önemli bir yer tutan , üçüncü mertebeden değişken katsayılı bir denklem olan, sabit genişlikli eğrilerin ve küresel eğrilerin diferansiyel denklemleri henüz analitik olarak çözülememiştir.

KAYNAKLAR

[1] BERKOVİÇ, L. M. Factorization of ordinary differantial operators that can be transformed into operators with consant coefficients, Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Mat. 47 (1965), 8-16.

[2] BERKOVİÇ, L. M. Factorization of ordinary linear differantial operators that can be transformed into operators with consant coefficients II, Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Mat. 67 (1967), 3-14.

[3] BERKOVİÇ, L. M. The reduction of ordinary linear differantial operators that can be transformed into operators with consant coefficients, Volz. Mat. Sb. 5 (1966), 38-44.

[4] INCE, E. L. "Ordinary Differantial Equations," Dover, New York, 1956.

[5] JORDAN, C. "Calculus of Finite Differences," Chelsea, New York, 1960.

[6] ERKİP, A. Introduction to Theoretical Aspects of Ordinary Differantial Equations, METU-Ankara, 1992.

[7] FU, W.B. A comparison of Numerical and analiytical methods for the solution of a Riccati Equation, İnt. J. Math.Educ.Sci.Technol., 20, 3, 421-427, 1989.

[8] NAS, Ş. Lineer diferansiyel, İntegral ve İntegro diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için Taylor Matris yöntemi ve fizikte uygulamaları, Uludağ Ünv. Fen Bil.Ens., Doktora Tezi, 1997.

[9] OKÇU, A. Diferansiyel Denklem Uygulamaları, Balıkesir, 1989.

[10] SEZER, M. Diferansiyel Denklemler-II, İzmir, 1995.

[11] ROSS, S. L. Introduction to Ordinary Differantial Equations, University of New Hampshire. Newyork.1974.

[12] YAŞAR, İ.B. Diferansiyel Denklem Uygulamaları, Ankara, 1997.

[13] DERNEK, A.N. Diferansiyel Denklemler, İstanbul, 1995.

[14] MARK, J., LEMAN D.Differantial Equations, University of Arizona, 1988.

[15] AYDIN, M. GÜZİN, G. KURYEL, B. GÜNDÜZ, G. Diferansiyel Denklem Uygulamaları, İzmir, 1990.

[16] DANNON, V. Integral Characterizations and Theory of Curves, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 81, Num. 4, 600-603, 1981.

[17] SEZER, M. Differential Equations and Integral Characterizations for E^4 – Sphrical Curves, DOĞA. TU J. Math. 1989 (Basımda).

[18] KÖSE, Ö. On Space Curves of Constant Breadth, DOĞA Tr. J.Math., 10, 1, 11-14, 1986.

[19] SEZER, M. Differential Equations Characterizing Space Curves of Constant Breadth and A Criterion for These Curves, DOĞA TU J.Math. 1989 (Basımda).

[20] BREUER, S. GOTTLIEB, D.:The Roduction of Linear Ordinary Differential Equations to Equations with Constant Coefficients, J.Math.Anal.Appl. 31, 62-76, 1970.

[21] CHUNG, H.C.: A Differential – Geometric Criterion for a Space Curve to be Closed, Proc. Amer.Mat.Soc., Vol. 83, 2, 357-361, 1981.

[22] Bell's Mathematical Series
An Elementary Treatise On Diffential Equations and Their Applucations

[23] TÜRKER, E.S Diferansiyel Denklemler, İ. T. Ü. Sakarya üniversitesi matbaası 1990.

[24] LEIGHTON, W. Ordinary Differantial Equations, London, 1963.

[25] BREUER, S.G. D.The reduction of Lineer Ordinary Differantial Equations to Equations with costant coeffiecient, Tel-Aviv, 1970.

[26] BEDİENT, P. Elementary Differential Equations, Earl D. Poin vilee, Newyork, 1989.
[27] Apostol, T.M., Calculus, Volume II, Blaisdel Publishing Company, New York, 1965.
[28] Aydın, M., Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, E.Ü. Müh.Fak. Ders Kitapları Yayınları No.14, İzmir 1987.
[29] Ayres, F., Differantial Equations, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill Book Comp., 1972.
[30] Boas, M.L., Mathematical Methods in the Physical Sciences, John Wiley and Sons., Inc., 1966.
[31] Çelebi, O., Çelebi, O., Diferansiyel Denklemler, Milli Eğitim Basımevi, No.126, İstanbul, 1980.
[32] Dağ, İ., Bayağı Diferansiyel Denklemler, Atatürk Ünv. Basımevi, No.611, Erzurum 1983.
[33] Hidebrand, F.B., Advanced Calculus for Applications, Prentice-Hall International Inc. 1962.
[34] İdemen, M., Adi Diferansiyel Denklemler, İ.T.Ü. Yayın No. 731, 1968.
[35] Karadeniz, A., Yüksek Matematik, Cilt 3, Çağlayan Basımevi, İstanbul, 1979.
[36] Kells, L.M., Elementary Differantial Equations, Mc Graw-Hill Book Comp., 1965.

[37] AYRES,F. Diferansiyel denklemler. İstanbul, 1952.