T.C
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER İNTEGRODİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN TAYLOR SIRALAMA YÖNTEMİ

DOKTORA TEZİ

Ayşen KARAMETE

BALIKESİR

Mayıs, 2001

T.C
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER İNTEGRODİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN TAYLOR SIRALAMA YÖNTEMİ

DOKTORA TEZİ

Ayşen KARAMETE

Danışman
Prof. Dr. Mehmet SEZER

Sınav Tarihi : 25. 06. 2001
Jüri Üyeleri :

Prof. Dr. Mehmet SEZER (Dokuz Eylül Üniversitesi)
Prof. Dr. Aydın OKÇU (Üniversitesi)
Prof. Dr. Mehmet ARISOY (Balıkesir Üniversitesi)
Yrd. Doç. Dr. Ahmet DELİL (Celal Bayar Üniversitesi)
Yrd. Doç. Dr. Hülya GÜR (Balıkesir Üniversitesi)

BALIKESİR
Mayıs, 2001

ÖZET

YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER İNTEGRODİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN TAYLOR SIRALAMA YÖNTEMİ

Ayşen KARAMETE

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Eğitimi Ana bilim Dalı

Doktora Tezi / Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet SEZER

Balıkesir, 2001

Bu çalışmada, diferansiyel denklemlerin ve integral denklemlerin çözümü için [1,2] de verilen "Taylor Sıralama Yöntemi"; yüksek mertebeden, değişken katsayılı integrodiferansiyel denklem sistemlerinin verilen karışık koşullara göre Taylor polinomları cinsinden yaklaşık çözümlerini bulmak için geliştirilmiştir. Yöntemin ilk aşamasında verilen sistemler matris denklemine dönüştürülür; ardından da Taylor sıralama noktaları yardımıyla bilinmeyeni sadece Taylor katsayılar matrisi olan yeni bir matris denklemi oluşturulur. Daha sonra koşulların matris formu Taylor katsayılarına bağlı olarak elde edilir ve iki sonuç birleştirilerek yeni bir denklem sistemine ulaşılır. Bu sistem doğrusal cebirsel bir denklem sistemine karşılık gelir. Buradan Taylor katsayıları kolayca bulunarak Sonlu Taylor Seri Yaklaşımı elde edilir.

Çalışmanın ilk bölümünde, konunun anlaşılmasını sağlayan temel kavramlar ve konuyla ilgili daha önce yapılan çalışmalar verilmiştir. İlerleyen bölümlerde sırasıyla diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri için Taylor sıralama yöntemi sunulmuştur. Son bölümde ise bunlarla ilgili örnekler verilmiş ve sonuçlar tartışılmıştır.

Anahtar kelimeler: Sıralama noktaları, Taylor polinomları, Diferansiyel denklem sistemleri, İntegral denklem sistemleri, İntegrodiferansiyel denklem sistemleri

ABSTRACT

A TAYLOR COLLOCATION METHOD FOR APROXIMATELY SOLUTIONS OF SYSTEMS OF HIGHER ORDER LINEAR INTEGRODIFFERENTIAL EQUATIONS

Ayşen KARAMETE

Balıkesir University, Institute of Science,
Department of Mathematics Education

Ph. D. Thesis/ Supervisor: Prof. Dr. Mehmet SEZER
Balıkesir, 2001

In this study, "Taylor Collocation Method", which is given for the solutions of differential and integral equations in [1,2], is developed, in order to find the aproximate solutions of higher order linear systems of integrodifferential equations with variable coefficients, in terms of Taylor polynomials, with respect to given mixed conditions. In the first step of this method, given systems are transformed into the matrix equations, and then, by means of Taylor collacation points, a new matrix equation, whose parameter is a Taylor coefficients matrix, is formed. Following this, depending on the Taylor coefficients, the matrix form of the conditions is obtained, and so is a new equation system is combining these two results. The system corresponds to a system of linear algebraic equation. Hence, by finding the Taylor coefficients , the finite Taylor series approach is obtained.

In the first chapter of this study, some basic concepts and literature review studies on the same topic are revised. In the following chapters: Taylor collocation method has been submitted for the solution of differential, integral and integrodifferential equations respectively. In the final chapter, examples about those have been given and results are discussed.

KEY WORDS: Collocation Points, Taylor Polynomials, System of Differential Equations, System of Integral Equations, System of Integrodifferential Equations.

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ÖNSÖZ

Akademik çalışmalarım sırasında beni yönlendiren, karşılaştığım problemlerle yakından ilgilenen ve bu konuda yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyerek her zaman daha iyisi için destekleyen danışman hocam *Mehmet SEZER*' e, aynı şekilde her zaman her konuda destek olarak yanımda olduğunu hissettiren bölüm başkanım *Aydın OKÇU* hocama, bildiği her şeyi paylaşmaktan hiç yorulmayan, bu yüzden de kendisinden çok şey öğrendiğim arkadaşım *Emin*' e, her zaman pozitif motivasyonlarıyla yanımda olduklarını hissettiren *Gülcan* ve *Dilek*' e ve çalışmalarım süresince emeği geçen *Matematik* ve *Matematik Eğitimi* Bölümündeki arkadaşlarıma bu vesileyle teşekkür ediyorum

Her zaman sevgi, sabır ve teşvikini esirgemeyerek, yeri geldiğinde kendilerine ait olan zaman ve ilgiden fedakarlık eden ailem, *Fatma-Ahmet KARAMETE* ve *Handan*' a, hayatıma kattığınız anlam için "iyi ki varsınız" diyorum... Ve *Can* bebek, "hoş geldin dünyama"...

Mayıs 2001 *Ayşen KARAMETE*

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 GİRİŞ

Değişken katsayılı, lineer diferansiyel denklemler, integral denklemler ve integrodiferansiyel denklemler, mühendislik ve matematiğin birçok dalında bir matematiksel model olarak karşımıza çıkmaktadır. Özellikle, başlangıç ve sınır-değer problemlerinde sık sık bu denklemlerle karşılaşılmaktadır. Birçok uygulamalı bilim dallarında bazı problemler tek bir denklem ile ifade edilemezler. Bunlar çok sayıda bilinmeyen fonksiyon içeren diferansiyel, integral ya da integrodiferansiyel denklemlerin bir kombinasyonu olarak ifade edilirler. Bu şekildeki denklem sistemleri birçok fizik ve mühendislik dalında görülmektedir.

Örneğin diferansiyel denklem sistemleri; Elastikiyet teorisi [3], Dinamik [4], Akışkanlar mekaniği [5], Devre problemleri [6], Salınım problemleri [7,8], Kuantum dinamiği [9] gibi konularda, integral ve integrodiferansiyel denklem sistemleri ise Elektromanyetik teori [10], Termoelastikiyet [11], Biyoloji [12], Mekanik [13,14], Dalga Kırınımı [15], gibi alanlarda karşımıza çıkar.

Sistemlerin çözümü için şu ana kadar sunulmuş genel bir yöntem yoktur. Sabit katsayılı diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü bulunabilmekte; ancak değişken katsayılı diferansiyel denklem sistemleri, integral ve integrodiferansiyel denklem sistemlerinin çözümü ile ilgili literatürde pek fazla çalışma yoktur. Bu nedenle fizik ve mühendislik alanlarında önemli bir yeri olan bu tip sistemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasının yararlı olacağı düşünülmüştür.

İkinci ve daha yüksek mertebeden değişken katsayılı diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin bulunması oldukça güçtür. Bu yüzden yaklaşık çözümlere gerek duyulmuştur. Bu tip denklemler normal formdaki diferansiyel denklem sistemlerine dönüştürülerek çözümler araştırılmıştır. Bu nedenle sistemler konusunda yapılan çalışmaların hemen hepsi birinci mertebeden sistemlere ilişkindir. Bunların çözümü için Runge-Kutta, Euler gibi birkaç standart yöntem mevcuttur. Ancak yüksek mertebeden diferansiyel denklem, integral ve integrodiferansiyel denklem sistemleri ile ilgili çözüm yöntemleri mevcut değildir. Bu tür sistemler için yapılan araştırmada yüksek mertebeden integrodiferansiyel denklem sistemlerinin incelendiğine rastlanmamıştır. Genellikle birinci mertebeden sistemler incelenmiş olup, bunlarda da çözümlerin asimptotik davranışları [16,17], kararlılık [18,19], periyodik çözümler [20], çözümlerin varlığı [21,22], gibi teorik konular ele alınmıştır. Sadece birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemleri için sayısal yöntemlerden bahsedilmiştir. Son olarak, yüksek mertebeden integrodiferansiyel denklem sistemlerinin Chebyshev polinomları yardımıyla yaklaşık çözümleri için bir yöntem [23] tarafından verilmiştir.

1.2 PROBLEM

Bu çalışmadaki amaç, daha önce diferansiyel denklemler ve integral denklemlerde kullandığımız Taylor Sıralama Yönteminin [1,2] genel olarak

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{i=0}^{k} p_{ji}^{n}(x)y_i^{(n)}(x) = f_j(x) + \int_a^b K_{ji}(x,t)y_i(t)dt;\ \ j=1,2,...,k$$

şeklinde tanımlanan yüksek mertebeden lineer değişken katsayılı sistemlerin

$$\sum_{j=0}^{m-1}\left[a_{ij}y_i^{(j)}(a) + b_{ij}y_i^{(j)}(b) + c_{ij}y_i^{(j)}(c)\right] = \lambda_i \quad a \le c \le b,\ i=1,2,...,m\text{-}1$$

koşullarına göre, x=c noktası civarında

$$y_i(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{y_i^{(j)}(c)}{j!}(x-c)^j;\ \ i=1,2,...,k$$

sonlu Taylor serisi formunda yaklaşık çözümleri için geliştirilmesi, uygulanması ve önemli özelliklerinin belirlenmesidir. Yöntem sıralama noktaları yardımıyla sistemin bir matris denklemine dönüştürülmesine dayanır. Bu matris denklemi bilinmeyen Taylor katsayılarından oluşan bir cebirsel sisteme karşılık gelir. Böylece cebirsel sistemin çözümünden bulunan Taylor katsayıları kullanılarak, verilen integrodiferansiyel denklem sisteminin sonlu Taylor seri formunda yaklaşık çözümü bulunmuş olur.

1.3 TAYLOR SIRALAMA NOKTALARI

Problemin tanım aralığı olarak verilen $a \leq x \leq b$ aralığının,

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$$

olmak üzere, $t_0, t_1, \ldots, t_N$ noktaları ile N eşit parçaya bölündüğünde elde edilen

$$t_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i=0,1,\ldots,N \tag{1.1}$$

noktalarına, "sıralama (collocation) noktaları" denir [1,2].

BÖLÜM 2

LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN TAYLOR SIRALAMA YÖNTEMİ İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

2.1 GİRİŞ

Burada ilk olarak *k* bilinmeyenli normal formdaki diferansiyel denklem sistemlerinin, daha sonra da ikinci mertebeden *k* bilinmeyenli standart formdaki sistemlerin çözümü Taylor sıralama yöntemi ile bulunmaya çalışılacaktır.

Bu bölümde incelenecek olan tüm sistemlerin çözüm fonksiyonlarının $a \le t \le b$ aralığında t=c noktası civarında (N serinin kesme sınırı olmak üzere)

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^{N} \frac{y_i^{(j)}(c)}{j!}(t-c)^j; \quad i = 1,2,\ldots,k \tag{2.1}$$

formunda sonlu Taylor açılımının varolduğu kabul edilecektir.

2.2 TEMEL MATRİS GÖSTERİMLERİ

Burada, bazı fonksiyonların temel matris gösterimleri sunulmuştur.

2.2.1 Bir f(t) Fonksiyonunun Matris Gösterimi

Bir f(t) fonksiyonunun t=c noktası civarında kesilmiş Taylor serisi formunda yazılışı

$$f(t) = \sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(c)}{j!}(t-c)^j$$

şeklindedir. Bu fonksiyonun matris gösterimini bulmak için

$$
\mathbf{A}=\begin{bmatrix} y^{(0)}(c) \\ y^{(1)}(c) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{(N)}(c) \end{bmatrix}, \mathbf{T}(t)=\begin{bmatrix}1 & t-c & (t-c)^2 & \dots & (t-c)^N\end{bmatrix}, \mathbf{M}_0=\begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \frac{1}{N!} \end{bmatrix}
$$

matrislerini tanımlayalım. Burada **A** (N+1)x1, **T**(t) 1x(N+1) ve $\mathbf{M}_0$ (N+1)x(N+1) tipindeki matrislerdir. Böylece, yukarıda kesilmiş Taylor seri formunda yazılan f(t) fonksiyonu

$$
\mathbf{f}(t)=\mathbf{T}(t)\mathbf{M}_0\mathbf{A} \tag{2.2}
$$

gibi matris formunda yazılabilir.

2.2.2 Bir $\mathbf{f}^{(m)}(t)$ Fonksiyonunun Matris Gösterimi

Benzer şekilde f(t) fonksiyonunun türevleri de matris formunda yazılabilir. Bu fonksiyonun *m*. mertebeden türevinin kesilmiş Taylor seri açılımı

$$
f^{(m)}(t)=\sum_{j=0}^{N}\frac{f^{(j)}(c)}{(j-m)!}(t-c)^{j-m}
$$

biçimindedir. Burada $f^{(j)}(c)$ bilinmeyen Taylor katsayılarıdır. Bunların meydana getirdiği sütun matrisine $\mathbf{A}^{(m)}$ denildiğinde, türev fonksiyonu

$$
\mathbf{f}^{m}(t)=\mathbf{T}(t)\mathbf{A}^{(m)} \tag{2.3}
$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $\mathbf{A}^{(m)}$ matrisi ile (2.2) de yer alan **A** matrisi arasında

$$
\mathbf{A}^{(m)}=\mathbf{M}_m\mathbf{A}
$$

bağıntısı vardır. $\mathbf{M}_m$ aşağıdaki gibi tanımlanan (N+1) boyutlu bir kare matristir.

$$
\mathbf{M}_m = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \dots & \frac{1}{0!} & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{1!} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(N-m)!} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{bmatrix}
$$

Bu bağıntı yardımıyla (2.3) düzenlenirse;

$$\mathbf{f}^{m}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{M}_m\mathbf{A} \tag{2.4}$$

elde edilir. [1,2]

2.2.3 Bir y(t) Matrisinin A Matrisi Cinsinden İfadesi

Benzer düşünceyle (2.1) de verilen fonksiyonlar, (2.2) bağıntısı kullanılarak

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{M}_0\mathbf{A}_i, \quad i = 1,2,\dots,k \tag{2.5}$$

matris formuna dönüştürülebilir; burada $\mathbf{A}_i$ matrisi

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} y_i^{(0)}(c) & y_i^{(1)}(c) & \dots & y_i^{(N)}(c) \end{bmatrix}^T$$

olup, $\mathbf{T}(t)$ matrisi ise (2.2) deki gibidir.

Bu fonksiyonların oluşturduğu matris bulunmaya çalışıldığında

$$
\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t)\mathbf{M}_0\mathbf{A}_1 \\ \mathbf{T}(t)\mathbf{M}_0\mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{T}(t)\mathbf{M}_0\mathbf{A}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{T}(t) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{M}_0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \end{bmatrix}
$$

y(t) matrisi

$$\mathbf{y}(t) = \mathfrak{T}(t)\mathcal{M}_0\mathbf{A} \tag{2.6}$$

biçiminde **A** bilinmeyen Taylor katsayılar matrisi cinsinden yazılabilir. Buradaki $\mathfrak{T}(t)$, $\mathcal{M}_0$ ve **A** matrisleri

$$\mathfrak{T}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{T}(t) \end{bmatrix}_{kXk}, \mathcal{M}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{M}_0 \end{bmatrix}_{kXk},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \end{bmatrix}_{kX1}$$

şeklinde tanımlanır.

2.2.4 $\mathbf{y}'(t)$ Türev Matrisinin A matrisi Cinsinden İfadesi

$y_i(t)$ fonksiyonlarının birinci mertebeden türevlerinin matris gösterimi (2.4) de m=1 alınarak

$$\mathbf{y}_i'(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{M}_1\mathbf{A}_i \tag{2.7}$$

biçiminde bulunur. Burada $y'(t)$ türev fonksiyonlarının oluşturduğu matris

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1'(t) \\ \mathbf{y}_2'(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_k'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t)\mathbf{M}_1\mathbf{A}_1 \\ \mathbf{T}(t)\mathbf{M}_1\mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{T}(t)\mathbf{M}_1\mathbf{A}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{T}(t) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{M}_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \end{bmatrix}$$

A katsayılar matrisi cinsinden

$$\mathbf{y}'(t) = \mathfrak{T}(t)\mathcal{M}_1\mathbf{A} \tag{2.8}$$

bulunmuş olur. Burada $\mathcal{M}_1$ matrisi

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{M}_1 \end{bmatrix}_{kXk}$$

olarak alınmıştır.

2.2.5 $\mathbf{y}^{(m)}(t)$ Türev Matrisinin A matrisi Cinsinden İfadesi

$y_i^{(m)}(t)$ türev fonksiyonlarının sonlu Taylor seri açılımları

$$y_i^{(m)}(t) = \sum_{j=0}^{N} \frac{y_i^{(j)}(c)}{(j-m)!}(t-c)^{j-m}, \quad i = 0,1,\dots,k\,, \; a \le t \le b$$

biçiminde yazılabilir. (2.4) denklemi yardımıyla

$$\mathbf{y}_i^{(m)}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{M}_m\mathbf{A}_i \tag{2.9}$$

matris denklemi elde edilir. Bilinmeyen fonksiyonların *m.* mertebeden türevlerinin oluşturduğu matris, (2.9) ifadesi kullanılarak elde edilebilir. Dolayısıyla,

$$\mathcal{M}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{M}_m \end{bmatrix}_{kXk}$$

olmak üzere $\mathbf{y}^{(m)}(t)$ matrisi

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathcal{T}(t)\mathcal{M}_m\mathbf{A} \tag{2.10}$$

olarak bulunur.

2.3 NORMAL FORMDAKİ DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN TEMEL MATRİS BAĞINTISI

Bu kısımda $y_1, y_2, ..., y_k$ bilinmeyen fonksiyonlardan meydana gelen

$$\begin{aligned} y_1' &= r_{11}(t)y_1 + r_{12}(t)y_2 + ... + r_{1k}(t)y_k + f_1(t) \\ y_2' &= r_{21}(t)y_1 + r_{22}(t)y_2 + ... + r_{2k}(t)y_k + f_2(t) \\ &... \\ y_k' &= r_{k1}(t)y_1 + r_{k2}(t)y_2 + ... + r_{kk}(t)y_k + f_k(t) \end{aligned}$$

lineer diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Burada i,j=1,2,...,k olmak üzere $f_i(t)$ ve $r_{ij}(t)$ bilinen fonksiyonların [a,b] aralığında tanımlı oldukları kabul edilmiştir.

Yukarıda tanımlanan diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ . \\ . \\ . \\ y_k'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & ... & r_{1k}(t) \\ r_{21}(t) & r_{22}(t) & ... & r_{2k}(t) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ r_{k1}(t) & r_{k2}(t) & ... & r_{kk}(t) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ y_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ f_k(t) \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Böylelikle normal formdaki bir diferansiyel denklem sistemi;

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ y_k(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & ... & r_{1k}(t) \\ r_{21}(t) & r_{22}(t) & ... & r_{2k}(t) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ r_{k1}(t) & r_{k2}(t) & ... & r_{kk}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ f_k(t) \end{bmatrix}$$

gösterimleri kullanılarak

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{r}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t) \tag{2.11}$$

matris formunda yazılabilir.

Şimdi bu sistemin [a,b] aralığında Taylor polinomları cinsinden yaklaşık çözümlerini bulmaya çalışalım. Bunun için, bir önceki kısımda $\mathbf{y}(t)$ ve $\mathbf{y}'(t)$ nin Taylor katsayılar matrisi cinsinden bulunan (2.6) ve (2.8) denklemleri (2.11) de yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\left(\mathcal{T}(t)\mathcal{M}_1 - \mathbf{r}(t)\mathcal{T}(t)\mathcal{M}_0\right)\mathbf{A} = \mathbf{f}(t) \tag{2.12}$$

matris denklemi elde edilir. Burada bilinmeyen sadece **A** matrisidir, parantez içindeki ifade ise t' nin fonksiyonudur. Parantezdeki ifadeye **W**(t) denilirse denklem

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{A} = \mathbf{f}(t) \tag{2.13}$$

haline gelir. **W**(t) k(N+1)xk(N+1) tipinde bir kare matristir.

Amaç, **A** matrisini bulmak olduğundan (2.13) denkleminde Taylor sıralama noktaları yerleştirildiğinde;

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(t_0) \\ \mathbf{W}(t_1) \\ \\ \mathbf{W}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t_0) \\ \mathbf{f}(t_1) \\ \\ \mathbf{f}(t_N) \end{bmatrix}$$

$\mathcal{W}$, k(N+1) boyutlu bir kare matris ve $\mathcal{F}$, k(N+1)X1 lik bir matris olmak üzere

$$\mathcal{W}\mathbf{A} = \mathcal{F} \tag{2.14}$$

ifadesini elde edilir. Buradan **A** matrisini bulmak oldukça kolaydır.

(2.14) ifadesini daha açık bulmak için sıralama noktaları (2.12) de yerleştirildiğinde,

$$\left(\mathcal{T}(t_0)\mathcal{M}_1 - \mathbf{r}(t_0)\mathcal{T}(t_0)\mathcal{M}_1\right)\mathbf{A} = \mathbf{f}(t_0)$$
$$\left(\mathcal{T}(t_1)\mathcal{M}_1 - \mathbf{r}(t_1)\mathcal{T}(t_1)\mathcal{M}_1\right)\mathbf{A} = \mathbf{f}(t_1)$$
$$\ldots$$
$$\left(\mathcal{T}(t_N)\mathcal{M}_1 - \mathbf{r}(t_N)\mathcal{T}(t_N)\mathcal{M}_1\right)\mathbf{A} = \mathbf{f}(t_N)$$

elde edilir. Bu ifade tekrar matris formunda yazılmak istendiğinde, tanımlanan

$$
\mathcal{T}=\begin{bmatrix}\mathcal{T}(t_0)\\ \mathcal{T}(t_1)\\ \\ \mathcal{T}(t_N)\end{bmatrix},\quad \mathcal{R}=\begin{bmatrix}\mathbf{r}(t_0) & 0 & \dots & 0\\ 0 & \mathbf{r}(t_1) & \dots & 0\\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{r}(t_N)\end{bmatrix}
$$

matrislerini yardımıyla sistem,

$$
\left(\mathcal{T}\mathcal{M}_1-\mathcal{R}\mathcal{T}\mathcal{M}_0\right)\mathbf{A}=\mathcal{F} \tag{2.15}
$$

biçimini alır. Bu ifade (2.14)'e denktir. Burada yer alan $\mathcal{T}$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_0$ ve $\mathcal{R}$ matrisleri k(N+1) boyutlu kare matrisler, **A** ve $\mathcal{F}$ ise k(N+1)X1 tipindeki matrislerdir.

2.4 İKİNCİ MERTEBEDEN STANDART FORMDAKİ DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN TEMEL MATRİS BAĞINTISI

Bu kısımda göz önüne alınan 2. mertebeden *k* bilinmeyenli denklem sistemi

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} p_{1i}(t)y_i''(t)+q_{1i}(t)y_i'(t)+r_{1i}(t)y_i(t)=f_1(t)\\
&\sum_{i=1}^{k} p_{2i}(t)y_i''(t)+q_{2i}(t)y_i'(t)+r_{2i}(t)y_i(t)=f_2(t)\\
&\dots\\
&\sum_{i=1}^{k} p_{ki}(t)y_i''(t)+q_{ki}(t)y_i'(t)+r_{ki}(t)y_i(t)=f_k(t)
\end{aligned}
$$

biçiminde verilebilir. Bu sistemin matris formunda yazılışı;

$$
\mathbf{p}(t)\mathbf{y}''(t)+\mathbf{q}(t)\mathbf{y}'(t)+\mathbf{r}(t)\mathbf{y}(t)=\mathbf{f}(t) \tag{2.16}
$$

dır. Burada yer alan matrisler

$$
\mathbf{p}(t)=\begin{bmatrix}p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & p_{1k}(t)\\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots & p_{2k}(t)\\ . & . & . & .\\ . & . & . & .\\ . & . & . & .\\ p_{k1}(t) & p_{k2}(t) & \dots & p_{kk}(t)\end{bmatrix},\quad \mathbf{q}(t)=\begin{bmatrix}q_{11}(t) & q_{12}(t) & \dots & q_{1k}(t)\\ q_{21}(t) & q_{22}(t) & \dots & q_{2k}(t)\\ . & . & . & .\\ . & . & . & .\\ . & . & . & .\\ q_{k1}(t) & q_{k2}(t) & \dots & q_{kk}(t)\end{bmatrix},
$$

$$\mathbf{r}(t)=\begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & \dots & r_{1k}(t) \\ r_{21}(t) & r_{22}(t) & \dots & r_{2k}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1}(t) & r_{k2}(t) & \dots & r_{kk}(t) \end{bmatrix},\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{bmatrix},\ \mathbf{y}'(t)=\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_k'(t) \end{bmatrix}\ \mathbf{y}''(t)=\begin{bmatrix} y_1''(t) \\ y_2''(t) \\ \vdots \\ y_k''(t) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. (2.16) denklemi katsayılar matrisi cinsinden

$$\left(\mathbf{p}(t)\mathfrak{T}(t)\mathcal{M}_2+\mathbf{q}(t)\mathfrak{T}(t)\mathcal{M}_1+\mathbf{r}(t)\mathfrak{T}(t)\mathcal{M}_0\right)\mathbf{A}=\mathbf{f(t)}$$

formunda yazılabilir. Burada sıralama noktaların denklemde yerleştirildiğinde temel denklem bulunur. (2.16) denklemine sıralama noktalarını yerleştirelim:

$$\mathbf{p}(t_0)\mathbf{y}''(t_0)+\mathbf{q}(t_0)\mathbf{y}'(t_0)+\mathbf{r}(t_0)\mathbf{y}(t_0)=\mathbf{f}(t_0)$$
$$\mathbf{p}(t_1)\mathbf{y}''(t_1)+\mathbf{q}(t_1)\mathbf{y}'(t_1)+\mathbf{r}(t_1)\mathbf{y}(t_1)=\mathbf{f}(t_1)$$
$$\dots$$
$$\mathbf{p}(t_N)\mathbf{y}''(t_N)+\mathbf{q}(t_N)\mathbf{y}'(t_N)+\mathbf{r}(t_N)\mathbf{y}(t_N)=\mathbf{f}(t_N)$$

Bunun matris formunda yazılışı;

$$\mathcal{P}\Upsilon^{(2)}+\mathcal{Q}\Upsilon^{(1)}+\mathcal{R}\Upsilon=\mathcal{F} \qquad (2.17)$$

dir. Buradaki matrisler;

$$\mathcal{P}=\begin{bmatrix} \mathbf{p}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{p}(t_1) & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{p}(t_N) \end{bmatrix}\ \mathcal{Q}=\begin{bmatrix} \mathbf{q}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{q}(t_1) & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{q}(t_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}=\begin{bmatrix} \mathbf{r}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{r}(t_1) & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{r}(t_N) \end{bmatrix},\Upsilon=\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t_0) \\ \mathbf{y}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(t_N) \end{bmatrix},\ \Upsilon^{(1)}=\begin{bmatrix} \mathbf{y}'(t_0) \\ \mathbf{y}'(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}'(t_N) \end{bmatrix},$$

$$\Upsilon^{(2)}=\begin{bmatrix} \mathbf{y}''(t_0) \\ \mathbf{y}''(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}''(t_N) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Şimdi $\Upsilon, \Upsilon^{(1)}$ ve $\Upsilon^{(2)}$ matrislerinin Taylor katsayılar matrisi **A** cinsinden ifade etmeye çalışalım. Bunun için (2.2) de bulduğumuz (2.6), (2.8) ve (2.10) ifadelerini kullanalım.

$$\Upsilon=\begin{bmatrix} y(t_0)\\ y(t_1)\\ \vdots\\ y(t_N)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathfrak{T}(t_0)\mathrm{M}_0\mathbf{A}\\ \mathfrak{T}(t_1)\mathcal{M}_0\mathbf{A}\\ \vdots\\ \mathfrak{T}(t_N)\mathcal{M}_0\mathbf{A}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathfrak{T}(t_0)\\ \mathfrak{T}(t_1)\\ \vdots\\ \mathfrak{T}(t_N)\end{bmatrix}\mathcal{M}_0\mathbf{A}\Rightarrow \Upsilon=\mathfrak{T}\mathcal{M}_0\mathbf{A} \tag{2.18}$$

$$\Upsilon^{(1)}=\begin{bmatrix} y'(t_0)\\ y'(t_1)\\ \vdots\\ y'(t_N)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathfrak{T}(t_0)\mathcal{M}_1\mathbf{A}\\ \mathfrak{T}(t_1)\mathcal{M}_1\mathbf{A}\\ \vdots\\ \mathfrak{T}(t_N)\mathcal{M}_1\mathbf{A}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathfrak{T}(t_0)\\ \mathfrak{T}(t_1)\\ \vdots\\ \mathfrak{T}(t_N)\end{bmatrix}\mathcal{M}_1\mathbf{A}\Rightarrow \Upsilon^{(1)}=\mathfrak{T}\mathcal{M}_1\mathbf{A} \tag{2.19}$$

$$\Upsilon^{(2)}=\begin{bmatrix} y''(t_0)\\ y''(t_1)\\ \vdots\\ y''(t_N)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathfrak{T}(t_0)\mathcal{M}_2\mathbf{A}\\ \mathfrak{T}(t_1)\mathcal{M}_2\mathbf{A}\\ \vdots\\ \mathfrak{T}(t_N)\mathcal{M}_2\mathbf{A}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathfrak{T}(t_0)\\ \mathfrak{T}(t_1)\\ \vdots\\ \mathfrak{T}(t_N)\end{bmatrix}\mathcal{M}_2\mathbf{A}\Rightarrow \Upsilon^{(2)}=\mathfrak{T}\mathcal{M}_2\mathbf{A} \tag{2.20}$$

Bu ifadeleri (2.17) de yazılıp düzenlendiğinde;

$$\left(\mathcal{P}\mathfrak{T}\mathcal{M}_2+\mathcal{Q}\mathfrak{T}\mathcal{M}_1+\mathcal{R}\mathfrak{T}\mathcal{M}_0\right)\mathbf{A}=\mathfrak{F} \tag{2.21}$$

denklemini elde edilir.

2.5. *m.* MERTEBEDEN *k* BİLİNMEYENLİ DOĞRUSAL DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN TEMEL MATRİS BAĞINTISI

m. mertebeden *k* bilinmeyenli doğrusal değişken katsayılı standart formdaki diferansiyel denklem sistemi

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{i=0}^{k} p_{ji}^{(n)}(t)\,y_i^{(n)}(t)=f_j(t),\quad j=1,2,\ldots,k \tag{2.22}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade biraz daha açıldığında;

$$\sum_{i=0}^{k} p_{ji}(t)\,y_i(t)+p_{ji}^{(1)}(t)\,y_i^{(1)}(t)+p_{ji}^{(2)}(t)\,y_i^{(2)}(t)+\ldots+p_{ji}^{(m)}(t)\,y_i^{(m)}(t)=f_j(t)$$

yazılabilir. Buradan (2.22) sisteminin matris formunda yazılışı;

$$\mathbf{p}(t)\mathbf{y}(t)+\mathbf{p}_1(t)\mathbf{y}'(t)+\mathbf{p}_2(t)\mathbf{y}''(t)+\ldots+\mathbf{p}_m(t)\mathbf{y}^{(m)}(t)=\mathbf{f}(t)$$

şeklinde elde edilir. Biraz daha kısa olarak

$$\sum_{i=1}^{m}\mathbf{p}_i(t)\mathbf{y}^{(i)}(t)=\mathbf{f}(t) \tag{2.23}$$

biçiminde yazılabilir. Burada yer alan matrisler;

$$\mathbf{p}_i(t)=\begin{bmatrix} p_{11}^i(t) & p_{12}^i(t) & \cdots & p_{1k}^i(t) \\ p_{21}^i(t) & p_{22}^i(t) & \cdots & p_{2k}^i(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1}^i(t) & p_{k2}^i(t) & \cdots & p_{kk}^i(t) \end{bmatrix},\quad \mathbf{y}^{(i)}(t)=\begin{bmatrix} y_1^i(t) \\ y_2^i(t) \\ \vdots \\ y_k^i(t) \end{bmatrix},\quad \mathbf{f}(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_k(t) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır.

(2.6), (2.8) ve (2.10) da verilen sonuçlar (2.23) de yerine yazıldığında, denklemin Taylor katsayılar matrisi cinsinden ifadesi

$$\sum_{i=0}^{m}\mathbf{p}_i(t)\mathcal{T}(t)\mathcal{M}_i\mathbf{A}=\mathbf{f}(t) \tag{2.24}$$

bulunur.

(2.22) denklemine ait temel matris bağıntısını bulabilmek için (2.23) denklemine sıralama noktalarını yerleştirelim:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{p}(t_0)\mathbf{y}(t_0)+\mathbf{p}_1(t_0)\mathbf{y}'(t_0)+\mathbf{p}_2(t_0)\mathbf{y}''(t_0)+\ldots+\mathbf{p}_m(t_0)\mathbf{y}^{(m)}(t_0)=\mathbf{f}(t_0)\\
&\mathbf{p}(t_1)\mathbf{y}(t_1)+\mathbf{p}_1(t_1)\mathbf{y}'(t_1)+\mathbf{p}_2(t_1)\mathbf{y}''(t_1)+\ldots+\mathbf{p}_m(t_1)\mathbf{y}^{(m)}(t_1)=\mathbf{f}(t_1)\\
&\ldots\\
&\mathbf{p}(t_N)\mathbf{y}(t_N)+\mathbf{p}_1(t_N)\mathbf{y}'(t_N)+\mathbf{p}_2(t_N)\mathbf{y}''(t_N)+\ldots+\mathbf{p}_m(t_N)\mathbf{y}^{(m)}(t_N)=\mathbf{f}(t_N)
\end{aligned}$$

Böylece, (2.17) de olduğu gibi

$$\mathcal{P}\Upsilon+\mathcal{P}_1\Upsilon^{(1)}+\ldots+\mathcal{P}_m\Upsilon^{(m)}=\sum_{i=0}^{m}\mathcal{P}_i\Upsilon^{(i)}=\mathcal{F} \tag{2.25}$$

ifadesi elde edilir. Burada;

$$\mathcal{P}_i=\begin{bmatrix} p_i(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_i(t_1) & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & p_i(t_N) \end{bmatrix}, \quad \Upsilon^{(i)}=\begin{bmatrix} y^{(i)}(t_0) \\ y^{(i)}(t_1) \\ \vdots \\ y^{(i)}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}=\begin{bmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_N) \end{bmatrix}$$

dir. Burada yer alan $\Upsilon, \Upsilon^{(1)}$ ve $\Upsilon^{(2)}$ matrislerinin **A** matrisi cinsinden ifadesi (2.18), (2.19) ve (2.20) de bulunmuştu. Benzer biçimde (2.10) kullanılarak $\Upsilon^{(i)}$ nin **A** matrisi cinsinden ifadesi,

$$\Upsilon^{(i)}=\mathcal{T}\mathcal{M}_i\mathbf{A} \tag{2.26}$$

biçiminde bulunur. Bu ifadeler (2.25) de yerine yazılırsa;

$$\sum_{i=0}^{m}\mathcal{P}_i\mathcal{T}\mathcal{M}_i\mathbf{A}=\mathcal{F} \tag{2.27}$$

temel matris bağıntısı elde edilir.

2.6. ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Diferansiyel denklem sistemlerinin [a,b] aralığındaki çözümü için bulunan (2.21) ve bunun genişletilmişi olan (2.27) temel matris bağıntılarını (2.14) denkleminde olduğu gibi kısaca

$$\mathcal{W}\mathbf{A}=\mathcal{F} \tag{2.28}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu k(N+1) bilinmeyenli k(N+1) denklemden oluşan bir cebirsel denklem sistemidir. Bilinmeyen **A** matrisi ile gösterilmiş ve $\mathcal{F}$ daha önceki kısımlarda tanımlanmıştır. $\mathcal{W}$ matrisi ise genel biçimde (2.22) de verilen denklem sistemi için

$$\mathcal{W}=\sum_{i=0}^{m}\mathcal{P}_i\mathcal{T}\mathcal{M}_i=[w_{ij}],\ i,j=0,1,\dots,k(N+1)$$

şeklinde gösterilebilir. $\mathcal{W}$, k(N+1)X k(N+1) tipinde bilinen bir matris olduğundan (2.28) denkleminin çözümünü bulmak oldukça kolaydır. Eğer $|\mathcal{W}|\neq 0$ ise

$$\mathbf{A}=\mathcal{W}^{-1}\mathcal{F}$$

denkleminden **A** elde edilir ya da doğrusal denklem sisteminin çözümü

$$[\mathcal{W};\mathcal{F}]=\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1,k(N+1)} & ; & f_1(t_0) \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2,k(N+1)} & ; & f_2(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{k,1} & w_{k,2} & \cdots & w_{k,k(N+1)} & ; & f_k(t_0) \\ w_{(k+1),1} & w_{(k+1),2} & \cdots & w_{(k+1),k(N+1)} & ; & f_k(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{k(N+1),1} & w_{k(N+1),2} & \cdots & w_{k(N+1),k(N+1)} & ; & f_k(t_N) \end{bmatrix}$$

artırılmış matrisi kullanılarak bulunabilir. Böylece (2.22) diferansiyel denklem sisteminin çözümü için gereken Taylor katsayılar matrisi bulunmuş olur. Bu (2.6) da yerine yazılırsa, **y**(t) bilinmeyen fonksiyonların oluşturduğu matris elde edilir. Eğer diferansiyel denklem sistemi homojen, yani $\mathcal{F}$**=0,** ise bulunan çözüm keyfi sabitlere bağlı olarak bulunan genel çözümdür. Eğer homojen olmayan bir sistem ise **y**(t) matrisi özel çözümü gösterir.

Genellikle diferansiyel denklem sistemlerinin belli koşullar altında çözümleri aranır. Bu koşulları sağlayan bir çözüm takımı bulmamız istenir. Böyle bir durumda (2.28) den faydalanarak bulunan çözüm bu koşulları sağlamaz. Bunun için verilen koşulların matris formları bulunarak (2.28) denklemi ile birleştirilir. Böylece oluşturulan yeni sistemden istenilen çözüm elde edilir.

Öncelikle (2.11) formunda verilen birinci mertebeden denklem sisteminin

$$\mathbf{y}(0)=\boldsymbol{\lambda} \tag{2.29}$$

koşulu altında çözümünü arandığını düşünelim. Burada,

$$\mathbf{y}(0)=\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \vdots \\ y_k(0) \end{bmatrix}_{kX1}, \quad \boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}_{kX1}$$

dır. İlk olarak (2.29) un Taylor katsayılar matrisi cinsinden ifadesini bulmaya çalışalım. Bunun için (2.6) denkleminde $t = 0$ alındığında

$$y(0)=\mathfrak{T}(0)\,\mathcal{M}_0\,\mathbf{A} \tag{2.30}$$

olur. Burada

$$\mathfrak{T}(0)=\begin{bmatrix} \mathbf{T}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{T}(0) \end{bmatrix}_{kXk}, \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \end{bmatrix}_{kX1}, \quad \mathrm{T}(0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{1X(N+1)}$$

şeklindedir.

Şimdi bulunan (2.30) koşulunu (2.14) denklemi ile birleştirelim. Bunu da $\mathcal{W}$ matrisinin son k satırı yerine T(0) matrisi ve $\mathfrak{F}$ nin son k satırı yerine de λ matrisini yerleştirerek yapabiliriz. Böylece yeni bir doğrusal denklem sistemi elde edilir. Sistemin çözümü de bize (2.11) denkleminin $y(0) =\lambda$ koşulu altındaki özel çözümü verir.

Benzer şekilde (2.30) koşulunu (2.14) denklemi ile birleştirelim.

$$y(0)=\lambda, \; y(1)=\mu$$

koşulları verildiğini düşünelim. y(1) ve μ matrisleri aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\mathbf{y}(1)=\begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \\ \vdots \\ y_k(1) \end{bmatrix}_{kX1}, \quad \mu=\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{bmatrix}_{kX1}$$

(2.30) da olduğu gibi t=1 için

$$y(1)=\mathfrak{T}(1)\,\mathcal{M}_0\,\mathbf{A} \tag{2.31}$$

yazabiliriz. Daha sonra (2.11) sisteminin çözümünde olduğu gibi (2.21) denklemi için bulunan $\mathcal{W}$ matrisinin son 2k satırı silinerek yerlerine T(0) ve T(1) matrislerinin elemanlarını, $\mathfrak{F}$ matrisinin son 2k satırı silinerek de yerlerine λ ve μ matrislerinin elemanları yazılır. Böylece elde edilen yeni sistemden özel çözüm için gerekli olan **A** matrisi bulunur.

Bu durumu (2.22) formunda verilen *m.* mertebeden denklem sistemlerini inceleyelim. Önce koşulların genel ifadesini yazalım.

m. mertebeden *k* bilinmeyenli denklem sisteminde en çok mk tane koşul bulunur. Bunlar her bir bilinmeyen fonksiyon için ayrı ayrı karışık formda koşullar olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilirler.

$$\sum_{j=0}^{m-1}\left[a_{ij}^{1}y_1^{(j)}(a)+b_{ij}^{1}y_1^{(j)}(b)+c_{ij}^{1}y_1^{(j)}(c)\right]=\lambda_{1i}$$
$$\sum_{j=0}^{m-1}\left[a_{ij}^{2}y_2^{(j)}(a)+b_{ij}^{2}y_2^{(j)}(b)+c_{ij}^{2}y_2^{(j)}(c)\right]=\lambda_{2i}$$
$$\ldots$$
$$\sum_{j=0}^{m-1}\left[a_{ij}^{k}y_k^{(j)}(a)+b_{ij}^{k}y_k^{(j)}(b)+c_{ij}^{k}y_k^{(j)}(c)\right]=\lambda_{ki}$$

$a<c<b$, $i=1,2,\ldots,m-1$

Bu ifadeleri matrisler haline getirmeye çalışalım.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{m-1}\left[a_{j}^{1}y_1^{(j)}(a)+b_{j}^{1}y_1^{(j)}(b)+c_{j}^{1}y_1^{(j)}(c)\right]=\lambda_{1}\\
&\sum_{j=0}^{m-1}\left[a_{j}^{2}y_1^{(j)}(a)+b_{j}^{2}y_1^{(j)}(b)+c_{j}^{2}y_1^{(j)}(c)\right]=\lambda_{2}\\
&\ldots\\
&\sum_{j=0}^{m-1}\left[a_{j}^{k}y_1^{(j)}(a)+b_{j}^{k}y_1^{(j)}(b)+c_{j}^{k}y_1^{(j)}(c)\right]=\lambda_{k}
\end{aligned}\tag{2.32}$$

burada yer alan matrisler i=1,2,...,k olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$\lambda_i=\begin{bmatrix}\lambda_{i0}\\ \lambda_{i1}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_{i,m-1}\end{bmatrix}_{mX1},\ \mathbf{a}_j^i=\begin{bmatrix}a_{0j}^i\\ a_{1j}^i\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{m-1,j}^i\end{bmatrix}_{mX1},\ \mathbf{b}_j^i=\begin{bmatrix}b_{0j}^i\\ b_{1j}^i\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ b_{m-1,j}^i\end{bmatrix}_{mX1},\ \mathbf{c}_j^i=\begin{bmatrix}c_{0j}^i\\ c_{1j}^i\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ c_{m-1,j}^i\end{bmatrix}_{mX1}$$

(2.32) sistemi matris denklemi olarak

$$\sum_{j=0}^{m-1}\left[a_j y^{(j)}(a)+b_j y^{(j)}(b)+c_j y^{(j)}(c)\right]=\lambda \tag{2.33}$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\mathbf{a}_j=\begin{bmatrix} a_j^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_j^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_j^k \end{bmatrix}_{kXk},\ \mathbf{b}_j=\begin{bmatrix} b_j^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_j^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_j^k \end{bmatrix}_{kXk},$$

$$\mathbf{c}_j=\begin{bmatrix} c_j^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_j^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_j^k \end{bmatrix}_{kXk},\ \mathbf{y}^{(j)}(c)=\begin{bmatrix} y_1^{(j)}(c) \\ y_2^{(j)}(c) \\ \\ y_k^{(j)}(c) \end{bmatrix}_{kX1}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Böylece karışık koşul ile problemimiz kısaca,

$$\sum_{i=0}^{m} p_i(t)y^{(i)}(t)=f(t)$$
$$\sum_{j=0}^{m-1}\left[a_j y^{(j)}(a)+b_j y^{(j)}(b)+c_j y^{(j)}(c)\right]=\lambda$$

şeklinde yazılabilir. Sistemimizi (2.28) de olduğu gibi

$$\mathcal{W}\mathbf{A}=\mathcal{F}$$

formunda yazmış olduk. İkinci adım olarak yukarıda verilen koşulların **A** katsayılar matrisi cinsinden ifadesi

$$\mathcal{V}\mathbf{A}=\lambda$$

şeklinde bulunmaya çalışılacaktır. Buradaki $\mathcal{V}$ matrisini araştıralım.

$$y^{(m)}(t)=\mathcal{T}(t)\,\mathcal{M}_m\,\mathbf{A}$$

burada t yerine a, b, c alınarak $\mathbf{y}^{(j)}(a)$, $\mathbf{y}^{(j)}(b)$, $\mathbf{y}^{(j)}(c)$ matrislerinin Taylor katsayılar matrisi cinsinden ifadesi bulunur. Bulunan bu ifadeler (2.33) de yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\sum_{j=0}^{m-1}\left[a_j\mathcal{T}(a)+b_j\mathcal{T}(b)+c_j\mathcal{T}(c)\right]\mathcal{M}_j\mathbf{A}=\lambda \tag{2.34}$$

elde edilir. Parantezin içine $\mathbf{U}_j$ denildiğinde

$$\sum_{j=0}^{m-1}\mathbf{U}_j\mathcal{M}_j\mathbf{A}=\lambda \tag{2.35}$$

haline dönüşür. Böylece yukarıda bahsedilen $\mathcal{V}$ matrisi

$$\mathcal{V}=\sum_{j=0}^{m-1}\mathbf{U}_j\mathcal{M}_j$$

biçiminde bulunur. Burada $\mathcal{V}$, mkXk(N+1) ve λ, mkX1 tipindeki matrislerdir.

Son olarak, önceden ifade edildiği gibi, bulunan $\mathcal{V}$ matrisinin elemanları $\mathcal{W}$ matrisinin son mk satırı ile λ matrisinin elemanları da $\mathcal{F}$ matrisinin son mk satırı ile yer değiştirildiğinde,

$$\tilde{\mathcal{W}}\mathbf{A}=\tilde{\mathcal{F}} \tag{2.36}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada

$$\tilde{\mathcal{W}}=\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1,k(N+1)} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2,k(N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{k1} & w_{k2} & \cdots & w_{k,k(N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{k(N-m+1),1} & w_{k(N-m+1),2} & \cdots & w_{k(N-m+1),k(N+1)} \\ v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1,k(N+1)} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2,k(N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{mk,1} & v_{mk,2} & \cdots & v_{mk,k(N+1)} \end{bmatrix}_{k(N+1)Xk(N+1)} \qquad \tilde{\mathcal{F}}=\begin{bmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_k) \\ \vdots \\ f(t_{N-m}) \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Yeni elde edilen (2.36) sisteminin çözümünden bulunacak **A** matrisi

$$\mathbf{y}(t) = \mathcal{T}(t)\mathcal{M}_0\mathbf{A}$$

denkleminde yerleştirildiğinde, çözüm matrisini elde edilmiş olur. Ya da Taylor katsayılar matrisi **A** nın elemanları, (2.1) de tanımlanan her bir fonksiyonda yerine yazıldığında, çözüm fonksiyonlarının Taylor polinomları cinsinden yaklaşık çözümleri

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^{N} \frac{y_i^{(j)}(c)}{j!}(t-c)^j; \quad i = 1,2,\ldots,k, \quad a \le t \le b$$

elde edilir. Buradaki N pozitif tamsayısı için bir sınırlama olup olmadığına bakalım.

m. mertebeden *k* bilinmeyenli denklemde en çok mk tane koşul olabiliyordu. Dolayısıyla silinen en fazla satır sayısı mk tane olur. Toplam k(N+1) satır olduğundan

$$k(N+1)-mk>0$$

olmalıdır. Buradan

$$N>m-1$$

olması gerektiği sonucu çıkar.

BÖLÜM 3

LİNEER İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİNİN TAYLOR SIRALAMA YÖNTEMİ İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

İntegral denklemler, sınırlarına göre Fredholm ve Volterra olmak üzere iki tür denklemden oluşmaktadırlar. Bu iki denklem arasında fark; Fredholm integral denkleminde integralin sınırlarının sabit, Volterra denkleminde üst sınırın değişken olmasıdır.Bu bölümde Fredholm integral denklem sisteminin sonlu Taylor seri çözümlerini elde edebilmek için Taylor sıralama yöntemi sunulacaktır.

3.1 FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMİ İÇİN TAYLOR SIRALAMA YÖNTEMİ

k bilinmeyenli *k* denklemden oluşan doğrusal Fredholm integral denklem sistemi

$$p_{11}(x)y_1(x)+p_{12}(x)y_2(x)+\dots+p_{1k}(x)y_k(x)=f_1(x)+\int_a^b\left(K_{11}(x,t)y_1(t)+K_{12}(x,t)y_2(t)+\dots+K_{1k}(x,t)y_k(t)\right)dt$$

$$p_{21}(x)y_1(x)+p_{22}(x)y_2(x)+\dots+p_{2k}(x)y_k(x)=f_2(x)+\int_a^b\left(K_{21}(x,t)y_1(t)+K_{22}(x,t)y_2(t)+\dots+K_{2k}(x,t)y_k(t)\right)dt$$

...

$$p_{k1}(x)y_1(x)+p_{k2}(x)y_2(x)+\dots+p_{kk}(x)y_k(x)=f_k(x)+\int_a^b\left(K_{k1}(x,t)y_1(t)+K_{k2}(x,t)y_2(t)+\dots+K_{kk}(x,t)y_k(t)\right)dt$$

şeklinde tanımlanır. Bu sistem kısaca,

$$\sum_{i=1}^{k}p_{ji}(x)y_i(x)=f_j(x)+\int_a^b K_{ji}(x,t)y_i(t)dt;\ j=1,2,\dots,k \qquad (3.1)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada çekirdek fonksiyonları $K_{ji}(x,t)$, katsayı fonksiyonları $p_{ji}(x)$ ve $f_j(x)$ fonksiyonları bilinen fonksiyonlardır. Bu bölümde (3.1) probleminin

$$y_i(t)=\sum_{j=0}^{N}\frac{y_i^{(j)}(c)}{j!}(t-c)^j;\quad i=1,2,\dots,k \qquad (3.2)$$

formunda sonlu Taylor yaklaşımı araştırılacaktır. Bunu yaparken, $K_{ji}(x,t)$ fonksiyonlarının Taylor seri açılımlarının var olduğu farz edilecektir.

(3.1) denklem sisteminin matris formunda yazılışı:

$$\mathbf{p}(x)\mathbf{y}(x)=\mathbf{f}(x)+\int_a^b \mathbf{K}(x,t)\mathbf{y}(x)dt \tag{3.3}$$

dir. Burada yer alan matrisler

$$\mathbf{y}(x)=\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_k(x) \end{bmatrix},\ \mathbf{p}(x)=\begin{bmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) & \dots & p_{1k}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) & \dots & p_{2k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1}(x) & p_{k2}(x) & \dots & p_{kk}(x) \end{bmatrix},\ \mathbf{f}(x)=\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}(x,t)=\begin{bmatrix} K_{11}(x,t) & K_{12}(x,t) & \dots & K_{1k}(x,t) \\ K_{21}(x,t) & K_{22}(x,t) & \dots & K_{2k}(x,t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{k1}(x,t) & K_{k2}(x,t) & \dots & K_{kk}(x,t) \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Şimdi bu sistemin integral kısmına

$$\mathbf{I}(x)=\int_a^b \mathbf{K}(x,t)\mathbf{y}(x)dt$$

denilirse, (3.3) sistemi

$$\mathbf{p}(x)\mathbf{y}(x)=\mathbf{f}(x)+\mathbf{I}(x)$$

şeklini alır. Şimdi bu sisteme (1.1) de tanımlanan Taylor sıralama noktalarını yerleştirelim:

$$\mathbf{p}(x_0)\mathbf{y}(x_0)=\mathbf{f}(x_0)+\mathbf{I}(x_0)$$

$$\mathbf{p}(x_1)\mathbf{y}(x_1)=\mathbf{f}(x_1)+\mathbf{I}(x_1)$$

$$\dots$$

$$\mathbf{p}(x_N)\mathbf{y}(x_N)=\mathbf{f}(x_N)+\mathbf{I}(x_N)$$

Bu sistem de

$$\mathcal{P}=\begin{bmatrix} p(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(x_1) & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & p(x_N) \end{bmatrix},\ \Upsilon=\begin{bmatrix} y(x_0) \\ y(x_1) \\ \vdots \\ y(x_N) \end{bmatrix},\ \mathcal{F}=\begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix},\ \mathbf{I}=\begin{bmatrix} I(x_0) \\ I(x_1) \\ \vdots \\ I(x_N) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathcal{P}\Upsilon=\mathcal{F}+\mathbf{I} \tag{3.4}$$

biçiminde yazılabilir. Bu denklem (2.18) kullanılarak

$$\mathcal{P}\mathcal{T}\mathcal{M}_0=\mathcal{F}+\mathbf{I} \tag{3.5}$$

şeklini alır. Burada yer alan **I** matrisini de **A** cinsinden yazmaya çalışalım. (3.3) sistemi için tanımlanan **I(x)** matrisinin satır elemanları

$$I_j(x)=\int_a^b\sum_{i=1}^{k}K_{ji}(x,t)y_i(t)\,dt\,,\quad j=1,2,...,k$$

şeklinde olacaktı. Şimdi bu denkleme x_s, s=0,1,...,N şeklindeki Taylor sıralama noktalarını yerleştirelim:

$$I_j(x_s)=\int_a^b\sum_{i=1}^{k}K_{ji}(x_s,t)y_i(t)\,dt\,,\quad j=1,2,...,k \tag{3.6}$$

Buradaki $K_{ji}(x_s,t)$ fonksiyonu artık sadece t' ye bağlıdır. Dolayısıyla,

$$K_{ji}(x_s,t)=\sum_{m=0}^{N}\frac{K_{ji}^{(m)}(x_s,t)(c)}{m!}(t-c)^m\,;\quad m=1,2,...,k \tag{3.7}$$

tek değişkenli Taylor serisine açılabilir. Böylece (3.7) ifadesinin matris formunda yazılışı

$$\mathbf{K}_{ji}(x_s,t)=\mathbf{K}_{ji}(x_s)\mathbf{T}(t)^T \tag{3.8}$$

olur. Burada

$$\mathbf{K}_{ji}(x_s)=\begin{bmatrix}k_0^{ji}(x_s) & k_1^{ji}(x_s) & k_2^{ji}(x_s) & \dots & k_N^{ji}(x_s)\end{bmatrix}$$

şeklindedir. $k_r^{ji}(x_s)$ elemanları ise,

$$k_r^{ji}(x_s) = \frac{1}{r!}\frac{dK_{ji}^{(r)}}{dt^r}\bigg|_{x=x_s} \quad , r=0,1,...,N$$

şeklinde hesaplanmıştır.

$y_i(t)$ için de daha önceden belirlenen matris gösterimini kullanacak olursak, (3.6) denklemi

$$\mathbf{I}_j(x_s) = \int_a^b \sum_{i=1}^{k} \mathbf{K}_{ji}(x_s)\mathbf{T}^T\mathbf{T}\mathbf{M}_0\mathbf{A}_i dt, \ j=1,2,...,k$$

haline gelir. İntegral toplamın içine alınırsa;

$$\mathbf{I}_j(x_s) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{K}_{ji}(x_s)\int_a^b \mathbf{T}^T\mathbf{T}\, dt\, \mathbf{M}_0\mathbf{A}_i, \ j=1,2,...,k$$

şeklini alır. Buradaki integral

$$H = \int_a^b T^T T\, dt = \left[\int_a^b T_i T_j\, dt\right] = [h_{ij}], \ i,j=0,1,...,N$$

olarak yazılabilir [24,25]. Bu matrisin elemanları da

$$h_{ij} = \frac{(b-c)^{i+j+1} - (a-c)^{i+j+1}}{i+j+1}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece (3.6) ifadesi

$$\mathbf{I}_j(x_s) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{K}_{ji}(x_s)\mathbf{H}\,\mathbf{M}_0\mathbf{A}_i, \ j=1,2,...,k \tag{3.9}$$

halini alır. Bunu açık olarak yazalım:

$$\mathbf{I}_1(x_s) = \mathbf{K}_{11}(x_s)\mathbf{H}\mathbf{M}_0\mathbf{A}_1 + \mathbf{K}_{12}(x_s)\mathbf{H}\mathbf{M}_0\mathbf{A}_2 + ... + \mathbf{K}_{1k}(x_s)\mathbf{H}\mathbf{M}_0\mathbf{A}_k$$

$$\mathbf{I}_2(x_s) = \mathbf{K}_{21}(x_s)\mathbf{H}\mathbf{M}_0\mathbf{A}_1 + \mathbf{K}_{22}(x_s)\mathbf{H}\mathbf{M}_0\mathbf{A}_2 + ... + \mathbf{K}_{2k}(x_s)\mathbf{H}\mathbf{M}_0\mathbf{A}_k$$

...

$$\mathbf{I}_k(x_s) = \mathbf{K}_{k1}(x_s)\mathbf{H}\mathbf{M}_0\mathbf{A}_1 + \mathbf{K}_{k2}(x_s)\mathbf{H}\mathbf{M}_0\mathbf{A}_2 + ... + \mathbf{K}_{kk}(x_s)\mathbf{H}\mathbf{M}_0\mathbf{A}_k$$

Böylece (3.9) denkleminin matris gösterimi

$$\mathbf{I}(x_s) = \mathbf{K}(x_s)\mathcal{H}\mathcal{M}_0\mathbf{A} \tag{3.10}$$

olur. Burada yer alan matrisler

$$\mathbf{I}(x_s) = \begin{bmatrix} I_1(x_s) \\ I_2(x_s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_k(x_s) \end{bmatrix}, \mathbf{K}(x_s) = \begin{bmatrix} K_{11}(x_s) & K_{12}(x_s) & \cdots & K_{1k}(x_s) \\ K_{21}(x_s) & K_{22}(x_s) & \cdots & K_{2k}(x_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{k1}(x_s) & K_{k2}(x_s) & \cdots & K_{kk}(x_s) \end{bmatrix}_{kxk},$$

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{H} \end{bmatrix}_{kxk}, \quad \mathcal{M}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{M}_0 \end{bmatrix}_{kxk}.$$

şeklinde tanımlanır. **A** ise (2.6) daki gibidir.

(3.4) ifadesinde yer alan **I** matrisinin Taylor katsayılar matrisi cinsinden ifadesini bulmak için, (3.10) ifadesi I matrisinde yerine yazılırsa;

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}(x_0) \\ \mathbf{I}(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{I}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(x_0)\mathcal{H}\mathcal{M}_0\mathbf{A} \\ \mathbf{K}(x_1)\mathcal{H}\mathcal{M}_0\mathbf{A} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{K}(x_N)\mathcal{H}\mathcal{M}_0\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(x_0) \\ \mathbf{K}(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{K}(x_N) \end{bmatrix} [\mathcal{H}\mathcal{M}_0\mathbf{A}] \Rightarrow \mathbf{I} = \mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{M}_0\mathbf{A},$$

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(x_0) \\ \mathbf{K}(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{K}(x_N) \end{bmatrix}$$

ve bulunan ifade (3.5) denklemine yerleştirilirse;

$$\mathcal{P}\mathcal{T}\mathcal{M}_0\mathbf{A} = \mathcal{F} + \mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{M}_0\mathbf{A}$$

sonucu elde edilir. Bu ifade düzenlendiğinde;

$$\left(\mathcal{P}\mathcal{T}\mathcal{M}_{o} - \mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{M}_{o}\right)\mathbf{A} = \mathcal{F} \qquad (3.11)$$

(3.1) de tanımlanan Fredholm integral denklem sistemi için temel matris bağıntısı bulunur.

(3.11) ifadesindeki parantez içindeki matris değerleri bilinmektedir ve işlemler sonucunda k(N+1) boyutlu bir kare matris elde edilir. Bu matris Bölüm 2' deki gibi $\mathcal{W}$ ile gösterilirse (3.11) sistemi kısaca;

$$\mathcal{W}\mathbf{A} = \mathcal{F} \qquad (3.12)$$

şeklini alır. Bu k(N+1) bilinmeyenli k(N+1) denklemden oluşan lineer bir sistemdir. Bu sistemin çözümü Taylor katsayılarını verir. Bu katsayılar (3.2) de yerleştirildiğinde Fredholm integral sisteminin Taylor polinomları cinsinden yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

BÖLÜM 4

LİNEER İNTEGRODİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN TAYLOR SIRALAMA YÖNTEMİ İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

İntegrodiferansiyel denklem; bilinmeyen fonksiyonun hem türevlerinden hem de integralinden oluşan bir denklemdir. Yani, diferansiyel ve integral denklemin toplamından oluşur. Benzer şekilde integrodiferansiyel denklem sistemi de bilinmeyen sayısı birden fazla olan integral, diferansiyel ve integrodiferansiyel denklemlerin bir karışımı olarak düşünülebilir. Bu bölümde Fredholm integral denklem sistemlerinden bahsedilecektir. Bölüm 2 ve Bölüm 3' teki sonuçlar birleştirilerek integrodiferansiyel denklem sistemlerinin

$$y_i(x)=\sum_{j=0}^{N}\frac{y_i^{(j)}(c)}{j!}(x-c)^j;\quad i=1,2,\ldots,k\,,\; a\leq x\leq b$$

formunda çözümleri araştırılacaktır.

4.1 FREDHOLM İNTEGRODİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİ İÇİN TAYLOR SIRALAMA YÖNTEMİ

m. mertebeden *k* bilinmeyenli lineer Fredholm integrodiferansiyel denklem sisteminin genel hali

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}p_{ji}^{n}(x)y_i^{(n)}(x)=f_j(x)+\int_a^b K_{ji}(x,t)y_i(t)dt;\; j=1,2,\ldots,k \tag{4.1}$$

şeklinde verilebilir. Burada $p_{ji}^{(n)}(x)$, $f_j(x)$, ve $K_{ji}(x,t)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında tanımlı, $y_i(x)$ ise Taylor serisine açılabilen bilinmeyen fonksiyonlardır. Ayrıca $K_{ji}(x,t)$ fonksiyonlarının da Taylor açılımlarının var olduğu kabul edilmiştir.

Yukarıda tanımlanan sistem;

$$\sum_{i=0}^{m} \mathbf{p}_i(x)\mathbf{y}^{(i)}(x) = \mathbf{f}(x) + \int_a^b \mathbf{K}(x,t)\mathbf{y}(t)\,dt \tag{4.2}$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. Burada yer alan $\mathbf{p}_i(x)$, $\mathbf{y}^{(i)}(x)$ ve $\mathbf{f}(x)$ matrisleri (2.23) denkleminde, $\mathbf{K}(x,t)$ matrisi de (3.3) denkleminde tanımlanmıştır.

(4.2) Fredholm integrodiferansiyel denklem sisteminin

$$\sum_{i=0}^{m-1}\left[a_i y^{(i)}(a) + b_i y^{(i)}(b) + c_i y^{(i)}(c)\right] = \lambda$$

koşullarıyla birlikte verildiğini düşünelim. Bu matrisler (2.33) de tanımlanmıştır.

(4.1) sisteminin çözümü için gereken temel matris bağıntısı, (4.2) sistemine sıralama noktaları yerleştirilip düzenlendiğinde bulunabilir. Gereken düzenleme yapıldığında

$$\sum_{i=0}^{m} \mathcal{P}_i \Upsilon^{(i)} = \mathcal{F} + \mathbf{I} \tag{4.3}$$

denklemi elde edilir. Burada $\mathbf{I}$ integral kısmı temsil etmektedir. $\Upsilon^{(i)}$ ve $\mathbf{I}$ matrislerinin Taylor katsayılar matrisi $\mathbf{A}$ cinsinden ifadeleri sırasıyla (2.26) ve (3.11) denklemlerinde verilmiştir. Bu ifadeler (4.3) denklemine yerleştirildiğinde (4.2) sistemine ait temel matris bağıntısı

$$\left(\sum_{i=0}^{m} \mathcal{P}_i \mathcal{T}\mathcal{M}_i - \mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{M}_o\right)\mathbf{A} = \mathcal{F} \tag{4.4}$$

olarak bulunur. Burada yer alan matrisler, koşulların tanımlanmasından sonra elde edilmiştir.

Yukarıda tanımlanan koşullar için ise (2.35)' te bulunan

$$\sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{U}_i \mathcal{M}_i \mathbf{A} = \lambda \tag{4.5}$$

ifadesi geçerlidir. Burada yer alan $\mathbf{U}_i$ matrisi ise şu şekildedir:

$$\mathbf{U}_i = a_i \mathcal{T}(a) + b_i \mathcal{T}(b) + c_i \mathcal{T}(c)$$

Son olarak (4.4) temel matris bağıntısı ile, koşulların Taylor katsayılar matrisine bağlı ifadesi olan (4.5) bağıntısı birleştirilirse, (4.1) sisteminin çözümü bulunur. Temel matris bağıntısındaki matrisler açık olarak aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır.

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix}
T_0(t_0)\ T_0(t_0) \dots T_N(t_0) & 0 & \dots & 0 \\
0 & T_0(t_0)\ T_0(t_0) \dots T_N(t_0) & \dots & 0 \\
 & & & \\
0 & 0 & \dots & T_0(t_0)\ T_0(t_0) \dots T_N(t_0) \\
T_0(t_1)\ T_0(t_1) \dots T_N(t_1) & 0 & \dots & 0 \\
0 & T_0(t_1)\ T_0(t_1) \dots T_N(t_1) & \dots & 0 \\
 & & & \\
0 & 0 & \dots & T_0(t_1)\ T_0(t_1) \dots T_N(t_1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
T_0(t_N)\ T_0(t_N) \dots T_N(t_N) & 0 & \dots & 0 \\
0 & T_0(t_N)\ T_0(t_N) \dots T_N(t_N) & \dots & 0 \\
 & & & \\
0 & 0 & \dots & T_0(t_N)\ T_0(t_N) \dots T_N(t_N)
\end{bmatrix}_{k(N+1)xk(N+1)}$$

Aşağıda tanımlanan $\mathcal{K}$ matrisinin, $K_{ji}(x_s)$ elemanları denklem (3.8) de 1x(N+1)' lik matrisler olarak ifade edilmişti.

$$
\mathcal{K}=\begin{bmatrix}
K_{11}(x_0) & K_{12}(x_0) & \cdots & K_{1k}(x_0) \\
K_{21}(x_0) & K_{22}(x_0) & \cdots & K_{2k}(x_0) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
K_{k1}(x_0) & K_{k2}(x_0) & \cdots & K_{kk}(x_0) \\
K_{11}(x_1) & K_{12}(x_1) & \cdots & K_{1k}(x_1) \\
K_{21}(x_1) & K_{22}(x_1) & \cdots & K_{2k}(x_1) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
K_{k1}(x_1) & K_{k2}(x_1) & \cdots & K_{k2}(x_1) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
K_{11}(x_N) & K_{12}(x_N) & \cdots & K_{1k}(x_N) \\
K_{21}(x_N) & K_{22}(x_N) & \cdots & K_{2k}(x_N) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
K_{k1}(x_N) & K_{k2}(x_N) & \cdots & K_{kk}(x_N)
\end{bmatrix}_{k(N+1)xk},\quad
\mathbf{A}=\begin{bmatrix}
a_{10} \\ a_{11} \\ \vdots \\ a_{1N} \\ a_{20} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{2N} \\ \vdots \\ a_{k0} \\ a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kN}
\end{bmatrix}_{k(N+1)x1},\quad
\mathcal{F}=\begin{bmatrix}
f_1(t_0) \\ f_2(t_0) \\ \vdots \\ f_k(t_0) \\ f_1(t_1) \\ f_2(t_1) \\ \vdots \\ f_k(t_1) \\ \vdots \\ f_1(t_N) \\ f_2(t_N) \\ \vdots \\ f_k(t_N)
\end{bmatrix}_{k(N+1)x1}
$$

$$
\mathcal{P}_i = \begin{bmatrix}
\begin{matrix} p^i_{11}(t_0) & p^i_{12}(t_0) & \cdots & p^i_{1k}(t_0) \\ p^i_{21}(t_0) & p^i_{22}(t_0) & \cdots & p^i_{2k}(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p^i_{k1}(t_0) & p^i_{k2}(t_0) & \cdots & p^i_{kk}(t_0) \end{matrix} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \begin{matrix} p^i_{11}(t_1) & p^i_{12}(t_1) & \cdots & p^i_{1k}(t_1) \\ p^i_{21}(t_1) & p^i_{22}(t_1) & \cdots & p^i_{2k}(t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p^i_{k1}(t_1) & p^i_{k2}(t_1) & \cdots & p^i_{kk}(t_1) \end{matrix} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \begin{matrix} p^i_{11}(t_N) & p^i_{12}(t_N) & \cdots & p^i_{1k}(t_N) \\ p^i_{21}(t_N) & p^i_{22}(t_N) & \cdots & p^i_{2k}(t_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p^i_{k1}(t_N) & p^i_{k2}(t_N) & \cdots & p^i_{kk}(t_N) \end{matrix}
\end{bmatrix}_{k(N+1)xk(N+1)}
$$

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} h_{00} & h_{01} & \cdots & h_{0N} \\ h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{N0} & h_{N1} & \cdots & h_{NN} \end{matrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \begin{matrix} h_{00} & h_{01} & \cdots & h_{0N} \\ h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{N0} & h_{N1} & \cdots & h_{NN} \end{matrix} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \begin{matrix} h_{00} & h_{01} & \cdots & h_{0N} \\ h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{N0} & h_{N1} & \cdots & h_{NN} \end{matrix} \end{bmatrix}_{k(N+1)xk(N+1)}$$

$$
\mathcal{M}_m = \begin{bmatrix}
\begin{matrix}
0 & 0 & \cdots & \frac{1}{0!} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{1!} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(N-m)!} \\
0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{matrix} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \begin{matrix}
0 & 0 & \cdots & \frac{1}{0!} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{1!} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(N-m)!} \\
0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{matrix} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & \begin{matrix}
0 & 0 & \cdots & \frac{1}{0!} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{1!} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(N-m)!} \\
0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{matrix}
\end{bmatrix}
$$

BÖLÜM 5

UYGULAMALAR

Bu çalışmada sunulan Taylor sıralama yöntemi; diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmakta kullanılır. Yöntemin uygulanabilir olduğunu göstermek için bazı örnekler verilmiştir. Yöntem uygulanırken işlemler Mathcad 7 Professional ve Derive programları yardımıyla yapılmıştır.

5.1 SABİT KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİ İÇİN ÖRNEKLER

Burada, iki ve üç bilinmeyenli homojen ve homojen olmayan diferansiyel denklem sistemleri için örnek uygulamalar yapılmıştır.

Örnek 5.1.1 Başlangıçta, normal formda verilen

$$\begin{aligned} x' &= 3x - y \\ y' &= 9x - 3y \end{aligned} \tag{5.1}$$

homojen denklem sistemini ele alalım. Böyle bir sistemin nasıl çözüleceği Bölüm 2' de anlatılmıştı. Buna göre bu sistem için temel matris bağıntısı

$$\left(\mathcal{T}\mathcal{M}_1 - \mathcal{R}\mathcal{T}\mathcal{M}_0\right)\mathbf{A} = \mathcal{F}$$

biçiminde (2.15) de verilmişti.

(5.1) sisteminin çözümüne t=0 noktası civarında 2. dereceden kesilmiş Taylor serisiyle yaklaşalım: N=2 olup,

$$x(t) = \sum_{j=0}^{2} \frac{x^{(j)}(0)}{j!} t^j; \quad y(t) = \sum_{j=0}^{2} \frac{y^{(j)}(0)}{j!} t^j$$

ve (2.15) denkleminde yer alan matrisler N=2 için aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\mathcal{T}=\begin{bmatrix}1&-1&1&0&0&0\\0&0&0&1&-1&1\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}_{6X6},\ \mathcal{R}=\begin{bmatrix}3&-1&0&0&0&0\\9&-3&0&0&0&0\\0&0&3&-1&0&0\\0&0&9&-3&0&0\\0&0&0&0&3&-1\\0&0&0&0&9&-3\end{bmatrix},\ \mathcal{F}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix},\ \mathcal{M}_1=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Buradan, oluşturulan matrisler (2.15) de yerine yazılır ve gereken işlemler yapılırsa

$$\mathcal{W}=\begin{bmatrix}-3&4&-2.5&1&-1&0.5\\-9&9&-4.5&3&-2&0.5\\-3&1&0&1&0&0\\-9&0&0&3&1&0\\-3&-2&-0.5&1&1&0.5\\-9&-9&-4.5&3&4&2.5\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Burada $\mathcal{W}$ tekil bir matristir. Gereken elemanter operasyonlar yapıldığında

$$\mathcal{W}=\begin{bmatrix}1&0&0&-1/3&-1/9&0\\0&1&0&0&-1/3&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan elde edilen sistem;

$$a_{10} - \frac{1}{3}a_{20} - \frac{1}{9}a_{21} = 0$$
$$a_{11} - \frac{1}{3}a_{21} = 0$$
$$a_{12} = 0$$
$$a_{22} = 0$$

şeklinde, 6 bilinmeyenli 4 denklemden oluşan lineer bir sistemdir. Çözüm iki keyfi sabite bağlı olacaktır.

$$a_{10} = c_1,\ a_{20} = c_2$$

olarak alınırsa, çözüm

$$x(t) = c_1 + (3c_1 - c_2)t$$
$$y(t) = c_2 + (9c_1 - 3c_2)t$$

şeklinde bulunur. Bulunan çözümler denklem sistemini sağlamaktadır.

Örnek 5.1.2 Birinci mertebeden standart formda verilen

$$\begin{aligned} x' - x + y' &= 2t + 1 \\ 2x' + x + 2y' &= t \end{aligned} \tag{5.2}$$

diferansiyel denklem sisteminin

x(-1)=1/3, y(0)=0

koşulları altında çözümünü arayalım. Bu (2.16) formunda bir sistemdir. Burada;

$$\mathbf{q(t)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{r(t)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{f(t)} = \begin{bmatrix} 2t+1 \\ t \end{bmatrix}$$

biçimindedir. (5.2) sistemi için temel matris bağıntısı

$$\left(\mathcal{Q}\mathcal{T}\mathcal{M}_1 + \mathcal{R}\mathcal{T}\mathcal{M}_o\right)\mathbf{A} = \mathcal{F}$$

dir. Bu sistemin çözümünü N=2 için inceleyelim. Buradaki $\mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{T}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_o, \mathcal{F}$ matrisleri

$$\mathcal{Q}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0\\2&2&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&2&2&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&2&2\end{bmatrix},\ \mathcal{R}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{T}=\begin{bmatrix}1&-1&1&0&0&0\\0&0&0&1&-1&1\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1\end{bmatrix},\ \mathcal{M}_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{M}_1=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\ \mathcal{F}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\\3\\1\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan

$$\mathcal{W}=\begin{bmatrix}-1&2&-1.5&0&1&-1\\1&1&-1.5&0&2&-2\\-1&1&0&0&1&0\\1&2&0&0&2&0\\-1&0&0.5&0&1&1\\1&3&2.5&0&2&2\end{bmatrix}$$

bulunur. Bu sistemin verilen koşullar altında çözümünü bulabilmek için (2.36) ile ifade edilen denklem sistemini elde etmeliyiz. Bunun için koşulların matris formları bulunarak $\mathcal{W}$ ve $\mathcal{F}$ matrislerinin son iki satırına yerleştirilir.

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1.5 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1.5 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathfrak{F}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

matrislerini elde ederiz. Aradığımız **A** matrisini

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathcal{W}}^{-1} \tilde{\mathfrak{F}}$$

bağıntısı yardımıyla

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde buluruz. Bu katsayıları Taylor serisinde yerine yazarak,

$$x(t) = -\frac{2}{3} - t$$

$$y(t) = \frac{4}{3} t + \frac{1}{2} t^2$$

tam çözümünü elde ederiz.

Örnek 5.1.3 Başlangıç koşulları ile verilen

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = t - e^{-t} \qquad x(0) = 1$$

$$\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + x = 1 + 2e^{-t} \qquad y(0) = 0$$

diferansiyel denklem sisteminin Lablace Yöntemi kullanılarak elde edilen tam çözümü

$$x(t) = e^{-t} + 3e^{-\frac{t}{3}} - 3$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} + \frac{3}{2} e^{-\frac{t}{3}} - 1 + t$$

şeklindedir. Bölüm 2.4 de sunulan yöntem izlenerek bu sistemin N=2, 3, 4 için sistemin Taylor polinomları cinsinden bulunan yaklaşık çözümünün Chebyshev sıralama yöntemi [23] ve tam çözümün karşılaştırılması Tablo 1' de yapılmıştır.

TABLO 1: Örnek 5.1.3 $x(t_i)$ün sayısal çözümü ve tam çözümü ile karşılaştırılması

t_i	$x(t_i)$				
	N=2	**N=3**	**N=4**	Chebysev Sıralama (N=5)	Gerçek
0.1	0.81012	0.809	0.8064	0.806574	0.806486
0.2	0.64048	0.63	0.6249	0.625573	0.625252
0.5	0.253	0.152	0.1446	0.147333	0.145976
0.8	0.04768	-0.271	-0.2525	-0.250841	-0.252886
1	0.012	-0.542	-0.475	-0.480167	-0.4852527

TABLO 2: Örnek 5.1.3 $y(t_i)$ün sayısal çözümü ve tam çözümü ile karşılaştırılması

t_i	$y(t_i)$				
	N=2	**N=3**	**N=4**	Chebysev Sıralama (N=5)	Gerçek
0.1	0.09694	0.097	0.0984	0.098383	0.098405
0.2	0.18776	0.192	0.1940	0.193739	0.193895
0.5	0.42350	0.464	0.4671	0.465793	0.466457
0.8	0.60416	0.732	0.7238	0.723221	0.724228
1	0.69400	0.918	0.8869	0.889690	0.890857

Örnek 5.1.4 Üç bilinmeyenden meydana gelen standart formdaki

$$\begin{array}{ll} x'+y'=2t+2 & x(0)=0 \\ x'-z'=2t+1 & y(0)=0 \\ x'+z=t & z(0)=0 \end{array}$$

diferansiyel denklem sisteminin N=2 için çözümünü bulmaya çalışalım Burada k=3 olduğundan $\mathbf{W}$ matrisi 9X9 luk bir matris olacaktır. Verilen sistem için

$$\mathbf{q(t)}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{r(t)}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{f(t)}=\begin{bmatrix}2t+2\\ 2t+1\\ t\end{bmatrix}$$

biçimindedir. N=2 için Taylor sıralama noktaları

$t_0 = -1, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 1$

dir. Bu değerler yardımıyla $\mathfrak{F}$ ve $\mathcal{W}$ kolayca hesaplanabilir. Koşulların matris formları bulunur ve bu matrislerin son üç satırı bulunan değerlerle değiştirilerek

$$\left[\tilde{\mathcal{W}};\tilde{\mathfrak{F}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & ; & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0.5 & ; & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

sistemi elde edilir. Buradan aranan **A** matrisi

$$\mathbf{A} = [0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0]^T$$

olarak bulunur. Böylece sistemin çözümü

$$x(t) = t^2$$
$$y(t) = 2t$$
$$z(t) = -t$$

bulunur ki bu tam çözümdür.

5.2 DEĞİŞKEN KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİ İÇİN ÖRNEKLER

Burada, değişken katsayılı iki ve üç değişkenden meydana gelen değişik formlarda verilen diferansiyel denklem sistemi örnekleri incelenmiştir.

Örnek 5.2.1 Aşağıdaki şekilde verilen değişken katsayılı

$$-tx'+y'=1$$
$$-tx+y=0$$

[26] denklem sistemini N=2 için çözmeye çalışalım. Bu sistemin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix}-t & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ -t & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

biçimindedir. Ve sıralama noktaları

$$t_0=-1,\quad t_1=0,\quad t_2=1$$

olacaktır. Sistem için temel matris bağıntısı

$$\left(\mathcal{Q}\mathcal{T}\mathcal{M}_1+\mathcal{R}\mathcal{T}\mathcal{M}_0\right)\mathbf{A}=\mathcal{F}$$

olur. Sıralama noktaları yardımıyla bu matrisler hesaplanır ve yapılan işlemler sonucunda

$$\mathcal{W}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0.5 & 1 & -1 & 0.5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -0.5 & 1 & 1 & 0.5\end{bmatrix},\ \mathcal{F}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan aranan **A** matrisi

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$$

şeklinde bulunur. Böylece

x(t)=1
y(t)=t

çözümünü elde ederiz ki bu tam çözümdür. Hiçbir koşul verilmediği halde, çözümün keyfi sabitlere bağlı olmadan tek bir çözümün bulunabilmesi ve bunun sunulan yöntemle de aynı şekilde bulunması ilginç bir noktadır.

Örnek 5.2.2 Değişken katsayılı homojen

$$\begin{aligned} &2tx' - 3x + y = 0 \\ &2ty' + x - 3y = 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi

$$x(1) = 1, \;\; y(1) = -1$$

koşulları altında çözülmek istenirse, N=2 için temel matris bağıntısı

$$\left(\mathcal{Q}\mathfrak{T}\mathcal{M}_1 + \mathcal{R}\mathfrak{T}\mathcal{M}_o\right)\mathbf{A} = \mathfrak{F}$$

olur. Gereken işlemler yapılıp, koşulları matris formu yerleştirildiğinde; bulunan

$$\left[\tilde{\mathcal{W}};\tilde{\mathfrak{F}}\right] = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0.5 & 1 & -1 & 0.5 & ; & 0 \\ 1 & -1 & 0.5 & -3 & 1 & 0.5 & ; & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & ; & -1 \end{bmatrix}$$

artırılmış matrisi yardımıyla

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T$$

Taylor katsayıları bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} &x = t^2 \\ &y = -t^2 \end{aligned}$$

özel çözümü elde edilir.

Örnek 5.2.3

$$-3x'' + 3y'' = te^{-t} - 3\cos t$$
$$tx'' - y' = \sin t$$

diferansiyel denklemini ve $x(0) = -1$, $x'(0) = 2$, $y(0) = 4$, $y'(1) = 0.3692359$ koşullarını göz önüne alalım. Bu sistemin tam çözümünün

$$x = \frac{2t^2 + 5t - 2 - e^{-t}}{3}$$
$$y = \frac{2t^2 + 8 + e^{-t} + te^{-t} + 3\cos t}{3}$$

olduğu biliniyor [27]. Bu çözüm ile, Bölüm 2' deki yöntemin N=2, 3, 4, 5 için uygulama sonucu elde edilen değerler, tam sonuç değerleriyle ve [23] ile Tablo 3 ve Tablo 4 de karşılaştırılmıştır.

TABLO 3: Örnek 5.2.3 x(t) çözümü için sayısal çözümü

t_i	$x(t_i)$					
	N=2	N=3	N=4	N=5	Chebysev Sıralama (N=5)	Gerçek
-1	-2.4205	-2.66417	-2.4868	-2.582	-2.593337	-2.572761
-½	-1.8551	-1.9	-1.8682	-1.885	-1.885943	-1.882907
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
½	0.1449	0.1208	0.1473	0.126	0.130388	0.131156
1	1.5795	1.515	1.6374	1.515	1.542318	1.54404

TABLO 4: Örnek 5.2.3 y(t) çözümü için sayısal çözümü

t_i	$y(t_i)$					
	N=2	N=3	N=4	N=5	Chebysev Sıralama (N=5)	Gerçek
-1	4.3616	3.9048	3.9625	3.895	3.860595	3.873636
-½	4.1199	4.0214	4.0019	3.991	3.981051	3.985703
0	4	4	4	4	4	4
½	4.0019	3.9678	4.0242	4.016	4.014222	4.0114181
1	4.1255	4.0522	4.1408	4.113	4.118903	4.118889

Örnek 5.2.4 Üç bilinmeyenli, homojen, değişken katsayılı normal formda verilen

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{2}{t}y_1 + \left(1 - \frac{2}{t}\right)y_2 - y_3 \qquad y_1(1) = 0$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{t}y_1 + \left(1 - \frac{1}{t}\right)y_2 - y_3 \qquad y_2(1) = 1$$

$$\frac{dy_3}{dt} = \frac{2}{t}y_1 - \frac{1}{t}y_2 \qquad y_3(1) = 1$$

diferansiyel denklem sisteminin çözümünü araştıralım. Bu sistemin genel çözümü daha aşağı bir sisteme indirgenerek bulunmuştur [27].

Görüldüğü gibi t=0 noktası katsayı fonksiyonlarını tanımsız yapmaktadır. Bu yüzden N seçimine dikkat edilmelidir. Çünkü temel matris bağıntısında yer alan $\mathcal{R}$ matrisi sıralama noktalarına bağlıdır. N' nin çift değerleri için sıralama noktalarında mutlaka sıfır değeri yer alacağından, N' yi tek sayı olarak almalıyız.

N=3 için çözümü araştıralım. Bu durumda sıralama noktaları

$$t_0 = -1, \quad t_1 = -\frac{1}{3}, \quad t_2 = \frac{1}{3}, \; t_2 = 1$$

olur. Sistem için temel matris bağıntısı

$$\left(\mathcal{T}\mathcal{M}_1 - \mathcal{R}\mathcal{T}\mathcal{M}_0\right)\mathbf{A} = \mathcal{O}$$

biçimindedir. Burada $\mathcal{O}$ sıfır matrisidir. Gereken matris değerleri hesaplanıp işlemler yapıldığında ve bulunan $\mathcal{W}$ matrisinin son üç satırı silinip yerine koşulların matris formları yerleştirildiğinde

$$
\widetilde{W} = \begin{bmatrix}
2 & -1 & 0 & 0.167 & -3 & 3 & -1.5 & 0.5 & 1 & -1 & 0.5 & -0.167 \\
1 & -1 & 0.5 & -0.167 & -2 & 3 & -2 & 0.833 & 1 & -1 & 0.5 & -0.167 \\
1 & -1 & 0.5 & -0.167 & -1 & 1 & -0.5 & 0.167 & 0 & 1 & -1 & 0.5 \\
6 & -1 & 0 & 0.019 & -7 & 2.333 & -0.389 & 0.043 & 1 & -0.333 & 0.056 & -6.173.10^{-3} \\
3 & -1 & 0.167 & -0.019 & -4 & 2.333 & -0.556 & 0.08 & 1 & -0.333 & 0.056 & -6.173.10^{-3} \\
3 & -1 & 0.167 & -0.019 & -3 & 1 & -0.167 & 0.019 & 0 & 1 & -0.333 & 0.056 \\
-6 & -1 & 0 & 0.019 & 5 & 1.667 & 0.278 & 0.031 & 1 & 0.333 & 0.056 & -6.173.10^{-3} \\
-3 & -1 & -0.167 & -0.019 & 2 & 1.667 & 0.444 & 0.068 & 1 & 0.333 & 0.056 & -6.173.10^{-3} \\
-3 & -1 & -0.167 & -0.019 & 3 & 1 & 0.167 & 0.019 & 0 & 1 & 0.333 & 0.056 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}
\end{bmatrix}
$$

olarak elde edilir. Buna göre bulunan Taylor katsayıları

$$
\begin{aligned}
&a_{10} = 2, \ a_{11} = -2, \ a_{12} = 0, \ a_{13} = 0 \\
&a_{20} = 2, \ a_{21} = -1, \ a_{22} = 0, \ a_{23} = 0 \\
&a_{30} = 2, \ a_{31} = -1, \ a_{32} = 0, \ a_{13} = 0,
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır. Ve bu değerler kesilmiş Taylor serisinde yerine yazılarak

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 2 - 2t \\
y_2 &= 2 - t \\
y_3 &= 2 - t
\end{aligned}
$$

çözümü elde edilir. Bulunan bu çözüm sistemin verilen koşullar altındaki çözümüdür.

Örnek 5.2.5

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= \frac{y_2}{e^t + 1} \qquad y_1(0) = 0 \\
\frac{dy_2}{dt} &= y_1 \qquad y_2(0) = 1
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

diferansiyel denklem sistemini çözelim. Bu sistemin matris formu;

$$
\Upsilon' = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{e^x + 1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Upsilon
$$

biçimindedir. 2.3 deki yöntem probleme kolaylıkla uygulanabilir. N= 4 için yöntem uygulandığında çözümler;

$$x(t) = 0.5t - 0.122t^2 + 0.04284t^3 - 0.020458t^4$$
$$y(t) = 1 + 0.2475t^2 - 0.424t^3 - 0.01875t^4$$

bulunur.

Diferansiyel denklem sisteminin Euler Yöntemi yardımıyla h=0.1 alındığında elde edilen yaklaşık çözümünün [28], N=2, 3 ve 4 alınarak bulunan sonuçlar Tablo 5 da verilmiştir.

TABLO 5: Örnek 5.2.5'in sayısal çözümü

t_i	$y_1(t_i)$					$y_2(t_i)$				
	N=2	N=3	N=4	Chebyshev Sıralama (N=8)	Euler	N=2	N=3	N=4	Chebyshev Sıralama (N=8)	Euler
0	0.000	0.000	0.000	0.0000	0.0000	1.000	1.000	1.000	1.0000	1.0000
0.1	0.047	0.048	0.049	0.0488	0.0500	1.004	1.003	1.002	1.0025	1.0000
0.2	0.090	0.093	0.095	0.0953	0.0977	1.015	1.011	1.010	1.0097	1.0050
0.3	0.127	0.137	0.140	0.1395	0.1434	1.034	1.023	1.021	1.0215	1.0148
0.4	0.159	0.180	0.183	0.1819	0.1872	1.060	1.039	1.037	1.0376	1.0291
0.5	0.187	0.222	0.224	0.2226	0.2293	1.094	1.058	1.058	1.0579	1.0478
0.6	0.209	0.263	0.263	0.2617	0.2697	1.136	1.080	1.082	1.0821	1.0708
0.7	0.226	0.304	0.300	0.2993	0.3086	1.184	1.105	1.111	1.1102	1.0977
0.8	0.238	0.346	0.335	0.3354	0.3460	1.241	1.132	1.143	1.1420	1.1286
0.9	0.245	0.388	0.369	0.3702	0.3821	1.305	1.161	1.180	1.1774	1.1632
1	0.247	0.432	0.400	0.4040	0.4168	1.376	1.191	1.221	1.2161	1.2014

5.3 İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMİ İÇİN ÖRNEKLER

Burada, Bölüm 3' te anlatılan yöntemin daha iyi anlaşılabilmesi için Fredholm integral denklem sistemleri ile ilgili örnekler verilmiştir.

Örnek 5.3.1 İki bilinmeyenli, homojen

$$\int_{-1}^{1} y_1(t)\,dt = 0$$

$$\int_{-1}^{1} t.y_1(t)\,dt - \int_{-1}^{1} y_2(t)\,dt = 0$$

Fredholm integral denklem sistemini göze alalım. Bu, (3.3) ile verilen formda bir sistemdir. Bu sistemi

$$\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde de ifade edebiliriz. Burada yer alan matrislerin

$$p(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; K(x,t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & -1 \end{bmatrix}, \; f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olduğu açıkça görülmektedir. Bu sistem için temel matris bağıntısı

$$\left(\mathcal{P}\mathcal{J}\mathcal{M}_0 - \mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{M}_0\right)\mathbf{A} = \mathcal{F}$$

şeklindedir. Burada $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{F}$ sıfır matrisidir. Böylece denklemimiz

$$\mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{M}_0\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

şeklini alır. N=2 için sıralama noktaları,

$$x_0 = -1, \;\; x_1 = 0, \;\; x_2 = 1$$

olacaktır. Yöntem,

$$\mathcal{K}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0\end{bmatrix},\ \mathcal{H}=\begin{bmatrix}2&0&\frac{2}{3}&0&0&0\\0&\frac{2}{3}&0&0&0&0\\\frac{2}{3}&0&\frac{2}{5}&0&0&0\\0&0&0&2&0&\frac{2}{3}\\0&0&0&0&\frac{2}{3}&0\\0&0&0&\frac{2}{3}&0&\frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

matrisleri hazırlanarak uygulandığında ve gereken işlemler yapıldığında

$$\mathcal{W}=\begin{bmatrix}2&0&\frac{1}{3}&0&0&0\\0&\frac{2}{3}&0&-2&0&-\frac{1}{3}\\2&0&\frac{1}{3}&0&0&0\\0&\frac{2}{3}&0&-2&0&-\frac{1}{3}\\2&0&\frac{1}{3}&0&0&0\\0&\frac{2}{3}&0&-2&0&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

matrisi hesaplanmış olur. İşlemler sonucunda

$$2a_{10}+\frac{1}{3}a_{12}=0$$
$$\frac{2}{3}a_{11}-2a_{20}-\frac{1}{3}a_{22}=0$$

sistemi elde edilir. Buradan Taylor katsayıları

$$a_{10}=c_1,\ \ a_{11}=c_2,\ \ a_{12}=-6c_1$$
$$a_{20}=c_3,\ \ a_{21}=c_4,\ \ a_{22}=2c_2-6c_3$$

olarak bulunur. Bu katsayılar yardımıyla sistemin çözümü

$$y_1(t)=c_1+c_2t-3c_1t^2$$
$$y_2(t)=c_3+c_4t+(c_2-3c_3)t^2$$

elde edilir. Bulunan çözümler denklem sistemini sağlamaktadır.

Örnek 5.3.2

$$xy_1+y_2=x^2+\frac{1}{3}+\int_{-1}^{1}\left[ty_1-t^3y_2\right]dt$$

$$y_1-x^2y_2=-x^2+x-\frac{2}{3}+\int_{-1}^{1}\left[(t+2)y_1-ty_2\right]dt$$

değişken katsayılı Fredholm İntegral denklem sisteminin çözümünü arayalım. Sistemin matris formunda yazılışı

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & -x^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + \frac{1}{3} \\ -x^2 + x - \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} t & -t^3 \\ t+2 & -t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} dt$$

şeklindir. Bu sistemin N=2 ve N=3 için çözümleri yapılmıştır. N=3 için yapılan işlemleri gözden geçirelim. Bunun için (3.11) temel matris bağıntısındaki matrisleri,

$$x_0 = -1,\ x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = 1,$$

sıralama noktalarından faydalanarak hesaplayabiliriz. dır. $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{F}$ matrisleri

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},\quad \mathcal{F} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -8/3 \\ 4/9 \\ -10/9 \\ 4/9 \\ -4/9 \\ 4/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Diğer matrisler ise

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{bmatrix},\quad \mathcal{M}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} T(x_0) & 0 \\ 0 & T(x_0) \\ T(x_1) & 0 \\ 0 & T(x_1) \\ T(x_2) & 0 \\ 0 & T(x_2) \\ T(x_3) & 0 \\ 0 & T(x_3) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K} = \begin{bmatrix} K_{11}(x_0) & K_{12}(x_0) \\ K_{21}(x_0) & K_{22}(x_0) \\ K_{11}(x_1) & K_{12}(x_1) \\ K_{21}(x_1) & K_{22}(x_1) \\ K_{11}(x_2) & K_{12}(x_2) \\ K_{21}(x_2) & K_{22}(x_2) \\ K_{11}(x_3) & K_{12}(x_3) \\ K_{21}(x_3) & K_{22}(x_3) \end{bmatrix}$$

$$T(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad K_{11}(x_i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(x_1) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \left(-\frac{1}{3}\right)^2 & \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \end{bmatrix} \qquad K_{12}(x_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T(x_2) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3^2} & \frac{1}{3^3} \end{bmatrix} \qquad K_{21}(x_i) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad K_{22}(x_i) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır ve

$$\left(\mathcal{P}\mathcal{T}\mathcal{M}_0 - \mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{M}_0\right)\mathbf{A} = \mathcal{F}$$

denkleminde yerlerine yazılırsa $\mathcal{W}$ ve **A** matrisleri

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} -1 & -0.3333 & -0.5 & 0.1 & 1 & -0.6 & 0.5 & -0.119 \\ -3 & -1.6667 & -0.1667 & -0.2333 & -1 & 1.667 & -0.5 & 0.233 \\ -0.3333 & -0.5556 & -0.0199 & -0.065 & 1 & 0.067 & 0.056 & 0.041 \\ -3 & -1 & -0.6111 & -0.0073 & -0.1111 & 0.704 & -0.0061 & 0.067 \\ -0.3333 & -0.5556 & -0.0199 & -0.065 & 1 & 0.733 & 0.056 & 0.054 \\ -3 & -0.3333 & -0.6111 & -0.06 & -0.1111 & 0.63 & -0.0061 & 0.066 \\ 1 & -0.3333 & 0.5 & 0.1 & 1 & 1.4 & 0.5 & 0.214 \\ -3 & -0.3333 & -0.1667 & 0.1 & -1 & -0.333 & -0.5 & -0.1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -8.549.10^{-4} \\ 1 \\ 5.121.10^{-3} \\ -8.697.10^{-3} \\ 1 \\ 8.639.10^{-4} \\ -3.497.10^{-4} \\ -0.015 \end{bmatrix}$$

bulunur. Denklemin [23]de verilen çözümü

$y_1(t) = t$
$y_2(t) = 1$

şeklindedir. N=2, N=3 bulunan çözümlerin tam çözümle karşılaştırılması Tablo 6 de verilmiştir.

TABLO 6: Örnek 5.3.2' nin sayısal ve tam çözümlerinin karşılaştırılması

t_i	N=2		N=3		Chebyshev Sıralama	
	$y_1(t_i)$	$y_2(t_i)$	$y_1(t_i)$	$y_2(t_i)$	$y_1(t_i)$	$y_2(t_i)$
0	$-2.858.\,10^{-4}$	1	$-8.549.10^{-4}$	1	0	1
0.1	0.1	1	0.0999	1	0.1	1
0.2	0.2	1	0.1999	1	0.2	1
0.3	0.3	1	0.2999	1	0.3	1
0.4	0.4	1	0.3999	1	0.4	1
0.5	0.5	1	0.5	1.001	0.5	1
0.6	0.6	1	0.6	1.001	0.6	1
0.7	0.7	1	0.7	1.001	0.7	1
0.8	0.8	1	0.8	1.001	0.8	1
0.9	0.9	1	0.9	1	0.9	1
1	1	1	1	1	1	1

Örnek 5.3.3 Değişken katsayılı, doğrusal

$$y_1(x) - 2xy_2(x) = 22x + 3 + 3\int_{-1}^{1}(x+t)y_1(t)\,dt + 3\int_{-1}^{1}(x-t)y_2(t)\,dt$$

$$5y_1(x) + y_2(x) = -x + 9 + 3\int_{-1}^{1}x^2 y_1(t)\,dt + 3\int_{-1}^{1}(xt + t^2)y_2(t)\,dt$$

Fredholm integral denkleminin N= 2 için çözümünü araştıralım. Temel matris bağıntısındaki

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{F} = \begin{bmatrix} -19 \\ 10 \\ 3 \\ 9 \\ 25 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri ve

$$K_{11}(x_i)=[3x_i \quad 3 \quad 0] \quad K_{12}(x_i)=[3x_i \quad -3 \quad 0]$$

$$K_{21}(x_i)=[3x_i^{\,2} \quad 0 \quad 0] \quad K_{12}(x_i)=[0 \quad 3x_i \quad 3]$$

matrisleri yardımıyla

$$\mathcal{K}=\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisi bulunur. $\mathcal{H}$ ve $\mathcal{M}_0$ matrisleri Örnek 5.3.1' deki gibidir. Bundan sonra

$$\left(\mathcal{P}\mathcal{T}\mathcal{M}_0 - \mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{M}_0\right)\mathbf{A}=\mathcal{F}$$

denkleminde işlemler yapıldığında **A** bilinmeyen Taylor katsayılar matrisi

$$A=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \\ 3.1\ 10^{-14} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Yaklaşık çözümler ise,

$$y_1(x)=1+2x^2$$
$$y_2(x)=-4+x+1.55\ 10^{-14}\ x^2$$

şeklinde elde edilir.

5.4 İNTEGRODİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİ İÇİN ÖRNEK

Bu kısımda, Fredholm integrodiferansiyel denklem sistemi için bir örnek sunulmuştur.

Örnek 5.4.1

$$y_1'(x)+xy_2'(x)+3y_2(x)=24x^3+2x^2+\frac{4}{3}x+3+\int_{-1}^{1}\left[(x-t)y_1(t)+x^2y_2(t)\right]dt$$

$$x^2y_1'(x)-y_2'(x)+xy_1(x)+y_2(x)=7x^3-6x^2-8x-\frac{19}{3}+\int_{-1}^{1}\left[3ty_1(t)+\left(t^2-4x\right)y_2(t)\right]dt$$

Fredholm integrodiferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. İntegral sınırları a=-1, b= 1 olarak verilmiştir. Ve sistemin c=0 noktası civarında çözümü aranmaktadır. Bu sistemi (4.2) formunda yazacak olursak burada yer alan matrisler

$$\mathbf{p}_1(x)=\begin{bmatrix}1 & x\\ x^2 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{p}_0(x)=\begin{bmatrix}0 & 3\\ x & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{K}(x,t)=\begin{bmatrix}x-t & x^2\\ 3t & t^2-4x\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}(x)=\begin{bmatrix}24x^3+2x^2+\frac{4}{3}x+3\\ 7x^3-6x^2-8x-\frac{19}{3}\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu sistem için temel matris bağıntısı ise

$$\left(\mathcal{P}_1\mathcal{T}\mathcal{M}_1+\mathcal{P}_0\mathcal{T}\mathcal{M}_0-\mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{M}_0\right)\mathbf{A}=\mathcal{F}$$

olacaktır. Bu matrislerin nasıl hesaplanacağı Bölüm 4.1 de verilmişti. Sistemin çözümüne t=0 noktası civarında N=3 alarak, 3. dereceden Taylor serisiyle yaklaşalım. Bu durumda sıralama noktaları;

$$x_0=-1,\ x_1=-\frac{1}{3},\ x_2=\frac{1}{3},\ x_3=1$$

olacaktır. Bu sıralama noktaları yardımıyla, temel matris bağıntısında yer alan matrisler hesaplanıp gerekli işlemler yapıldığında **A** Taylor katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} -6.799.10^{-3} \\ 3.004 \\ 2.015 \\ -0.016 \\ -1.002 \\ -4.696.10^{-3} \\ 1.426.10^{-3} \\ 23.995 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Aranan çözüm fonksiyonları

$$y_1(x) = 0.006799 + 3.004\,x + 1.0075\,x^2 - 0.002667\,x^3$$

$$y_2(x) = -1.002 + 0.004696\,x + 7.14.10^{-4}\,x^2 + 3.9991\,x^3$$

şeklindedir. Tablo 7' de bulunan çözümlerin Chebyshev Sıralama Yöntemiyle karşılaştırılması verilmiştir.

TABLO 7: Örnek 5.4.1 in sayısal ve Chebyshev Sıralama Yöntemiyle bulunan çözümünün karşılaştırılması

t_i	**N=3**		**Chebyshev Sıralama**	
	$y_1(t_i)$	$y_2(t_i)$	$y_1(t_i)$	$y_2(t_i)$
0	$-6.799.10^{-3}$	-1.002	0	-1
0.1	0.3037	-0.9985	0.31	-0.996
0.2	0.6343	-0.9709	0.64	0.968
0.3	0.985	-0.8954	0.99	-0.892
0.4	1.3558	-0.7478	1.36	-0.744
0.5	1.7467	-0.5043	1.75	-0.5
0.6	2.1577	-0.1408	2.16	-0.136
0.7	2.5888	0.3668	2.59	0.372
0.8	3.0398	1.0422	3.04	1.048
0.9	3.5109	1.9097	3.51	1.916
1	4.002	2.9931	4	3

SONUÇLAR

Bu çalışmada, yüksek mertebeden, lineer, değişken katsayılı diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklem sistemlerinin [a, b] aralığındaki çözümlerini bulabilmek için bir yöntem sunulmuştur. Yöntemde, bilinmeyen fonksiyonların verilen aralıkta Taylor seri açılımlarının var olduğu kabul edilip, bu açılımdaki bilinmeyen Taylor katsayılarının bulunması amaçlanmıştır.

Bölüm 2' de değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemleri için geliştirilen Taylor sıralama yöntemi normal ve standart formdaki sabit katsayılı denklem sistemlerine de uygulanmıştır . Burada hem genel hem de tam çözümlerin bulunmasıyla ilgili örnekler verilmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Bölüm 2' de değişken katsayılı denklemler için verilen Taylor sıralama yönteminin oldukça iyi sonuçlar verdiği 5.2' deki örneklerden açıkça görülmektedir. Tablo 3, Tablo 4, Tablo 5 de yaklaşık çözümler, gerçek çözümler ile karşılaştırılmıştır.

Bölüm 3 ve 4 de Fredholm İntegral ve integrodiferansiyel denklem sistemleri için geliştirilen yöntemin, yaklaşık çözümlerin bulunmasında önemli rol oynadığı 5.3 ve 5.4 deki örneklerden anlaşılmaktadır.

Taylor Sıralama yöntemi hem genel hem de özel çözümlerin bulunmasında kullanılan bir yöntemdir. Verilen sistemler homojen ise, hiçbir koşul gerekmeden genel çözüm bulunabilmektedir.

Çözüm fonksiyonunun polinom olduğu durumlarda, N kesme sınırı çözümdeki en yüksek dereceli polinomun derecesi (ya da daha büyük) alındığında analitik çözüme ulaşılmaktadır.

Bölüm 4 de integrodiferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde verilen yöntem, aslında hem diferansiyel hem de integral denklem sistemlerinin çözümünü kapsamaktadır. Genel olarak

$$\sum_{i=1}^{m} p_i(x)y^{(i)}(x) + p(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y_i(t)dt$$

sistemini düşünelim. Burada λ sabit, diğerleri matris fonksiyonlarıdır. Bu şekilde bir sistem için geliştirilen yöntem, birçok problem türünün çözümünü içerir. Türev fonksiyonlarının katsayısı $\mathbf{p}_i(x) = 0$ alındığında sistem integral denklem sistemine, $\lambda=0$ alındığında diferansiyel denklem sistemine dönüşmektedir.

Yöntem, $p_i(x)$, ve f(x) fonksiyonlarının [a,b] aralığında tanımlı, $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonlarının bu aralıkta Taylor seri açılımlarının varolduğu durumda geçerlidir. Ayrıca çekirdek fonksiyonlarının hızlı yakınsaması durumunda yöntem daha iyi sonuçlar vermektedir.

Sistemin en iyi yaklaşık çözümünü elde etmek için, Taylor açılımındaki N kesme sınırının, dolayısıyla sıralama noktalarının sayısının tayini çok önemlidir. Yukarıda da belirtildiği gibi eğer çözüm, polinom şeklindeyse, N' nin polinomun en yüksek derecesi olarak seçilmesi durumunda, yöntem bizi tam çözüme götürmektedir. N' nin seçimi $y_i(x)$ (i=1,2,...,k) fonksiyonlarının hassaslığını belirler. N 'in küçük alınması durumunda bulunan çözüm, çözümü istenilen doğrulukta temsil etmeyebilir. N sayısı ne kadar büyük alınırsa çözüme o kadar iyi yaklaşılmış olur. Fakat N büyüdükçe (N+1)x(N+1) boyutundaki matrislerle işlem yapmak gerektiğinden veri girişinde hata yapma olasılığı artmaktadır.

Yukarıda belirtilen dezavantajı ortadan kaldırmak için, Pascal, C gibi programlama dillerinden yararlanarak, Taylor katsayılarını tanımlanan şekilde hesaplayan programlar yapılması düşünülmektedir. Tasarlanan programlar yapıldığında, N sayısının büyük seçilmesi durumunda yapılabilecek işlem hataları olmayacaktır.

Yöntem Volterra türü integral ve integrodiferansiyel denklem sistemlerine, kısmi diferansiyel ve integrodiferansiyel denklem sistemlerine, lineer olmayan integrodiferansiyel denklemlere ve integrodiferansiyel denklem sistemlerine, tekil integral ve integrodiferansiyel denklemlere ve denklem sistemlerine geliştirilebilir. Bunları daha sonraki araştırmalarımıza bırakıyoruz.

KAYNAKÇA

[1] Karamete, A., "Lineer Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi", Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir, (1996).

[2] Karamete, A., & Sezer, M., "Bazı İntegrodiferansiyel Denklemlerin Taylor Polinom Çözümleri için Taylor Sıralama Yöntemi", Balıkesir Üniversitesi Matematik Sempozyumu "Altınoluk' ta Matematik Günleri", (1996).

[3] Ezachias, J., "Contribution to the calculation of thick arc with respect to shearing strain and extension of the centroid axis", *Computers & Structures*, **29**, **4**, 645-656, (1988).

[4] Kant, T., Varaiya, J., & Arora H C.P., "Finite element transient analysis of composite ans sandwich plates based on a refined theory and implicit time integration schemes", *Computers & Structures*, **36**, **3**, 401-420, (1990).

[5] Agarwal, R.S., Bhargava R., & Balaji, A.V.S., "Finite element solution of nonsteady three-dimensional micropolar fluid flow at a stagnation-point", *İnt. J., Engng Sci.*, **28**, **8** , 851-857, (1990).

[6] Zimmerman, W. R., " Time domain solutions to partial differential equations using spice", *IEEE Transactions on Education"*, **39**, **4**, 563-11p, (1996).

[7] Pesterev, A.V., &Bergman, L. A., "Response of elastic continuum carrying moving linear oscillator", *Journal of Engineering Mechanics*, **123**, **8**, **878-8p**, (1997)

[8] Gürgöze, M., "On some series occuring in the theory of vibrations", *İnt. J., Math. Educ. Sci. Technol*, **23**, **3** , 493-496, (1992).

[9] Greenspan, D., “Dynamical simulation of the simplest hydrides”, *Computers Math. Applic.*, **35**, **10** , 55-62, (1998).

[10] Bloom, F., “Asymtotik bounds for solutions to a system of damped integrodifferential equations of eloctomanyetic theory”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **73**, **2**, 524-542, (1980).

[11] Kopeikin, I., D. & Shishkin, V.P., “Integral form of the general solutions of equations of steady-state thermoeelasticity”, *Journal of Applied Mathematics Mechanics (PMM U.S.S.R),* **48**, **1**, 117-119, (1984).

[12] Holmaker, K., “Global asymptotic stability for a stationary solution of a system of integro-differential equations describing the formation of liver zones”, *SIAM J., Math. Anal*., **24**, **1**, 116-128, (1993).

[13] Yue, Z. Q., & Selvadurai, A. P. S., “Contact problem for saturated poroelastic solid”, *Journal of Engineering Mechanics*, **121**, **4**, 502-512, (1995).

[14] Abahzadeh, F., & Pak, R. Y. S., “Horizontal translation and rocking rotation of a rigid tubular foundation”, *Geotechnique*, **45**, **1**, 83-94, (1995).

[15] Büyükaksoy, A., & Alkumru, A., “Multiple diffraction of plane waves by a soft/hard strip”. *Journal of Engineering Mathematics*, **29**, **2**, 105-120, (1995).

[16] Grimmer, R., & Seifert, G., “Stability properties of Volterra integrodifferential equations”, *Journal of Differential Equations*, **19**, 142-166, (1975).

[17] Pucci, P., & Serrin, J., “Asymptotic stability for ordinary differential system with time-dependent restoring potentials”, *Arch.Rational Mech. Anal.*, **132**, **3**, 207-232, (1995).

[18] Miller, R. K., "Asymptotic stability properties of linear Volterra integrodifferential equations", *Journal of Differential Equations*, **10**, 485-506, (1971).

[19] Hino, Y., & Murakami, S., "Total stability and uniform asymptotic stability for linear Volterra integrodifferential equations", *J.London Math. Soc*, **43**, **2**, 305-312, (1991).

[20] Ortega, R., & Tineo, A., "On the number of positive periodic solutions for planar competing Lotka-Volterra systems", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **193**, 975-978, (1995).

[21] Rzepecki, B., "On the existence of solutions of infinite systems of differential and integro-differential equations", *Demonstratio Mathematica*, **15**, **4**, 1087-1099, (1982).

[22] Andres, J., & Krajc, B., "Bounded solutions in a given set of differential systems", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **113**, 73-82, (2000).

[23] Akyüz Daşcıoğlu, A., " Doğrusal integrodiferansiyel denklem sistemlerinin Chebyshev sıralama yöntemi ile yaklaşık çözümü", Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir, (Aralık-2000).

[24] Sezer, M., "A method for the approximate solution of the second order linear differential equations in terms of Taylor polynomials", *Int. J. Math. Educ. Sci. Techonology,* (1996)

[25] Sezer, M., & Doğan S., "A Taylor polynomial approximation for solving linear Fredholm integral equations", *D.E.Ü. Eğitim Fakültesi, Eğitim Bilimleri Dergisi*, **2**, **2**, 39-49, (1993).

[26] Campbell, S. L., "Least squares completions for nonlinear differential algebraic equations", *Numer. Math.*, **55**, 77-79, (1993).

[27] Tuncer, T., *Diferansiyel Denklemler (2. Basım)*, Alfa Basım Dağıtım, İstanbul, (1996).

[28] Aydın, M., Gökmen, G., Kuryel, B., & Gündüz, F., "*Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları (2. Baskı)*, Barış Yayınları, İzmir, (1990).