

T.C  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

112623

GRAFLARI NUMARALAMA YÖNTEMLERİ

DOKTORA TEZİ

112623

Sevinç MERT UYANGÖR

BALIKESİR  
Ağustos, 2001

T.C  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

GRAFLARI NUMARALAMA YÖNTEMLERİ

DOKTORA TEZİ

Sevinç MERT UYANGÖR

T.C. YÖKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Danışman

Prof. Dr. Mehmet ARISOY

Sınav Tarihi : 27 Ağustos 2001

Jüri Üyeleri :

Prof. Dr. Mehmet ARISOY (Danışman, Balıkesir Üniversitesi)

Prof. Dr. Mehmet SEZER (Dokuz Eylül Üniversitesi)

Prof. Hasan SOYDAN (Balıkesir Üniversitesi)

Yrd.Doç.Dr. Fatma AYZAZ (Balıkesir Üniversitesi)

Yrd.Doç.Dr Ahmet DELİL (Celal Bayar Üniversitesi)

BALIKESİR

Ağustos, 2001

## ÖZET

### GRAFLARI NUMARALAMA YÖNTEMLERİ

Sevinç MERT UYANGÖR

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,  
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

(Doktora Tezi/ Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet ARISOY)

Balıkesir, 2001

$\Gamma$ ; birleştirilmiş, buklesiz, katlı ayrıtsız, sonlu ve yönlendirilmemiş tüm grafların kümesini gösterebilir. Tepeler kümesi  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $n \geq 3$  ve ayrıtlar kümesi  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ,  $m \geq 2$  olmak üzere  $\Gamma$  kümesine ait bir graf  $G=(V,E)$  ile gösterilsin.  $G$  grafının ayrıtları  $1, 2, \dots, m$  sayıları ile numaralanabilirse öyle ki her tepeye bağlantılı olan ayrıtların toplamı,  $a, d \in \mathbb{N}^+$  olmak üzere  $(a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d)$  biçiminde  $n$  terimli bir aritmetik dizi oluşturuyorsa bu grafa  $(a,d)$ -terssihirli graf denir. Bu tezde,  $P_n$  yolunun,  $C_n$  çevresinin,  $P(n)$  prizma grafının doğrusal diyofant denklemleri kullanılarak  $(a,d)$ -terssihirli numaralanmalarının var olduğu ispatlanmış ve tek dereceli tepelere sahip tarak graflar için  $(a,d)$ -yarı-terssihirli numaralanma tanımlanmıştır. Bunlarla birlikte,

grafların  $(a,d)$ -yarı-terssihirli ve  $(a,d)$ -terssihirli numaralanmaları ile Mısırsal numaralanmaları arasındaki bağıntılar ortaya konulmuştur.



**ANAHTAR SÖZCÜKLER:** Graf/ $(a,d)$ -yarı-terssihirli numaralanma/ $(a,d)$ -terssihirli numaralanma/Mısırsal numaralanma.

## ABSTRACT

### LABELLING METHODS OF GRAPHS

Sevinç MERT UYANGÖR

Balıkesir University, Institute of Science,  
Department of Mathematics Education

(Ph. D. Thesis/ Supervisor: Prof. Dr. Mehmet ARISOY)

Balıkesir, TURKEY, 2001

Let  $\Gamma$  denote the set of all connected, finite and undirected graphs without loops and multiple edges. A graph which is belong to  $\Gamma$  has been shown as  $G=(V,E)$  with vertex set  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $n \geq 3$  and edges set  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ,  $m \geq 2$ . if  $G=(V,E)$  is a connected graph of order  $n=|V| \geq 3$  and size  $m=|E| \geq 2$ , then  $G$  is said to be  $(a,d)$ -antimagic iff there exist a bijection  $f: E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m\}$  and two positive integers,  $a, d \in \mathbb{N}^+$  such that the induced mapping  $g_f$  defined by

$$g_f : \{V \rightarrow \mathbb{N}^+ : v \rightarrow g_f(v) = \sum_{e \in I(v)} f(e)$$

is injective and has image set  $g_f(V)=\{a, a+d, a+2d, \dots, a + (n-1)d\}$ , where  $I(v)=\{e \in E \mid e \text{ is incident to } v\}$ , for  $v \in V$ .

In this thesis,  $(a,d)$ -antimagic labellings of the path  $P_n$ , the cycle  $C_n$  and the prism graph  $P(n)$  are proved, and the comb  $T_n$  which degree of its vertex is odd have been defined  $(a,d)$ -semi-antimagic labelling. However, the relations of between antimagic labellings and Egyptian labelling of graphs have been given.



**KEYWORDS:** Graph /  $(a,d)$ -semi-antimagic labelling /  $(a,d)$ -antimagic labelling / Egyptian labelling.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET, ANAHTAR SÖZCÜKLER	ii
ABSTRACT, KEYWORDS	iv
İÇİNDEKİLER	vi
SEMBOL LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
ÖNSÖZ	xii
1. GİRİŞ	1
2. TANIMLAR VE ÖNBİLGİLER	2
2.1 Graf	2
2.2 Katlı Ayrıt	2
2.3 Bukle	2
2.4 Bir Tepenin Derecesi	2
2.5 Regüler Graf	2
2.6 n-uzunluklu Ayrıt Katarı	2
2.7 Yol ve Çevre	3
2.8 Birleştirilmiş Graf	3
2.9 Tam Graf	
2.10 Prizma Graflar	3
2.11 Tarak Graf	4
2.12 Yarı Sihirli Tarak Graf	4
2.13 Sihirli Graf	4
2.14 Süper Sihirli Graf	5
2.15 Zayıf-Ters Sihirli Graf	5
2.16 Yarı Terssihirli Tarak Graf	5
2.17 Terssihirli Graf	5
2.18 (a,d)-Yarı Terssihirli Tarak Graf	6
2.19 (a,d)-Terssihirli Graf	6
2.20 Kesirsel Numaralama Fonksiyonları	6
2.21 Mısırsal Numaralama	7

2.22 Mısırsal Sihirli Numaralama	7
2.23 Mısırsal (a,d)-terssihirli Numaralama	8
2.24 Mısırsal (a,d)-yarı-terssihirli Tarak Graf	8
2.25 k ile Geniştirilme	9
2.26 Doğrusal Diyofant Denklemi	9
3. GRAF NUMARALANMALARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER	10
4. $T_n$ TARAK GRAFININ (a,d)-YARI-TERSSİHİRLİ NUMARALANMASI	18
5. $P_n$ YOLU ve $C_n$ ÇEVRESİNİN (a,d)-TERSSİHİRLİ NUMARALANMASI	30
6. P(n) PRİZMA GRAFININ (a,d)-TERSSİHİRLİ NUMARALANMASI	36
7. ÇEŞİTLİ GRAF SINIFLARININ MISIRSAL NUMARALANMASI	50
7.1 $T_n$ Tarak Graflarının Mısırsal (a,d)-yarı-terssihirli Numaralanması	50
7.1.1 $V_{der(1)} = \{1,2,\dots,n+1,2n+1\}$ İçin $T_n$ Tarak Graflarının Mısırsal (a,d)- yarı-terssihirli Numaralanması	50
7.1.2 $V_{der(1)} = \{1,n+1,n+2,\dots,2n+1\}$ İçin $T_n$ Tarak Graflarının Mısırsal (a,d)-yarı-terssihirli Numaralanması	53
7.2 $P_n$ Yolu ve $C_n$ Çevresinin Mısırsal (a,d)-terssihirli Numaralanması	55
7.2.1 $P_n$ Yolunun Mısırsal (a,d)-terssihirli Numaralanması	55
7.2.2 $C_n$ Çevresinin Mısırsal (a,d)-terssihirli Numaralanması	57
7.3 P(n) Prizma Grafinin Mısırsal (a,d)-terssihirli Numaralanması	58
8. YÖNTEM	61
9. SONUÇ ve TARTIŞMA	63
KAYNAKLAR	65



## SEMBOL LİSTESİ

Simge Adı	Tanımı
$V$	Grafın Tepeler Kümesi
$E$	Grafın Ayrıtlar Kümesi
$G=(V,E)$	$G$ grafi
$T_n$	$n$ -Tarak Grafi
$P_n$	$n$ -ayrıtli Yol
$C_n$	$n$ -ayrıtli Çevre
$P(n)$	$n$ -prizma Grafi
$\Sigma$	Toplam Sembolü
$F$	Ayrıtl Numaralama Fonksiyonu
$g_f$	Tepe Numaralama Fonksiyonu
$I(v)$	$v$ Tepesi ile Bağlantılı ayrıtlar Kümesi
$\Gamma$	Buklesiz, Katlı Ayrıtlı, yönlendirilmemiş ve Sonlu Tüm Grafların Lümesi
$U$	Payı 1 olan Kesirlerin Kümesi
$f^{(k)}$	$f$ Ayrıtl Numaralama Fonksiyonunun $k$ ile Genişletilmesi
$V_{\text{der}(1)}$	$G$ grafının Tek Dereceli Tepelerinin Numaralarının kümesi

## ŞEKİL LİSTESİ

Şekil No	Adı	Sayfa
Şekil 2.1	$K_1, K_2$ ve $K_3$ tam grafları	3
Şekil 2.2	$P(4)$ prizma grafi	3
Şekil 2.3	$T_6$ Tarak Grafi	4
Şekil 2.4	$T_3$ tarak grafinin yarı-sihirli numaralanması	4
Şekil 2.5	$G(6,8)$ sihirli graf	4
Şekil 2.6	$G(6,8)$ süper sihirli Graf	4
Şekil 2.7	$T_4$ tarak grafinin yarı terssihirli numaralanması	5
Şekil 2.8	$C_4$ çevresinin terssihirli numaralanması	5
Şekil 2.9	$T_4$ tarak grafinin $(11,2)$ -yarı terssihirli numaralanması	6
Şekil 2.10	$G(8,12)$ grafinin $(9,3)$ -terssihirli numaralanması	6
Şekil 2.11	$C_4$ çevresinin Mısırsal numaralanması	7
Şekil 2.12	$G(6,8)$ grafinin Mısırsal sihirli numaralanması	8
Şekil 2.13	$P_4$ yolunun Mısırsal $(1/30, 1/60)$ -terssihirli numaralanması	8
Şekil 2.14	$T_2$ tarak grafinin Mısırsal $(1/45, 1/360)$ -yarı terssihirli numaralanması	8
Şekil 3.1	$C_5$ çevresinin zayıf terssihirli numaralanması ve bu numaralanmanın 2 ile genişletilmesi.	11
Şekil 3.2	$G(6,8)$ grafinin sihirli numaralanması ve onun 3 ile genişletilmesi	12
Şekil 3.3	$C_4$ çevresinin Mısırsal numaralanması ve onun $k=1/2$ genişletilmesi	13
Şekil 3.4	$G(6,8)$ grafinin sihirli ve onun Mısırsal sihirli numaralanması	14
Şekil 3.5	$C_4$ çevresinin zayıf terssihirli numaralanması ve onun $k=72$ genişletilmesi	15
Şekil 4.1	$T_2$ tarak grafinin $(9,1)$ -yarı-terssihirli numaralanması	20
Şekil 4.2	$T_5$ tarak grafinin $(18,1)$ -yarı-terssihirli numaralanması	20
Şekil 4.3	$T_8$ tarak grafinin $(27,1)$ -yarı-terssihirli numaralanması	20
Şekil 4.4	$T_3$ tarak grafinin $(11,2)$ -yarı-terssihirli numaralanması	21
Şekil 4.5	$T_5$ tarak grafinin $(16,2)$ -yarı-terssihirli numaralanması	21
Şekil 4.6	$T_9$ tarak grafinin $(26,2)$ -yarı-terssihirli numaralanması	21
Şekil 4.7	$T_2$ tarak grafinin $(8,3)$ -yarı-terssihirli numaralanması	22
Şekil 4.8	$T_5$ tarak grafinin $(14,3)$ -yarı-terssihirli numaralanması	22
Şekil 4.9	$T_{10}$ tarak grafinin $(24,3)$ -yarı-terssihirli numaralanması	22

Şekil 4.10	$T_3$ tarak grafinin (9,4)-yarı-terssihirli numaralanması	23
Şekil 4.11	$T_2$ tarak grafinin (7,5)-yarı-terssihirli numaralanması	23
Şekil 4.12	$T_2$ tarak grafinin (8,1)-yarı-terssihirli numaralanması	26
Şekil 4.13	$T_5$ tarak grafinin (14,1)-yarı-terssihirli numaralanması	26
Şekil 4.14	$T_8$ tarak grafinin (20,1)-yarı-terssihirli numaralanması	26
Şekil 4.15	$T_3$ tarak grafinin (9,2)-yarı-terssihirli numaralanması	27
Şekil 4.16	$T_5$ tarak grafinin (12,2)-yarı-terssihirli numaralanması	27
Şekil 4.17	$T_9$ tarak grafinin (18,2)-yarı-terssihirli numaralanması	27
Şekil 4.18	$T_2$ tarak grafinin (7,3)-yarı-terssihirli numaralanması	28
Şekil 4.19	$T_5$ tarak grafinin (10,3)-yarı-terssihirli numaralanması	28
Şekil 4.20	$T_{10}$ tarak grafinin (15,3)-yarı-terssihirli numaralanması	28
Şekil 4.21	$T_3$ tarak grafinin (7,4)-yarı-terssihirli numaralanması	29
Şekil 4.22	$T_2$ tarak grafinin (6,5)-yarı-terssihirli numaralanması	29
Şekil 5.1	$P_2$ yolunun (1,1)-terssihirli numaralanması	32
Şekil 5.2	$P_4$ yolunun (2,1)-terssihirli numaralanması	32
Şekil 5.3	$P_8$ yolunun (4,1)-terssihirli numaralanması	32
Şekil 5.4	$P_{12}$ yolunun (6,1)-terssihirli numaralanması	32
Şekil 5.5	$C_3$ çevresinin (3,1)-terssihirli numaralanması	35
Şekil 5.6	$C_5$ çevresinin (4,1)-terssihirli numaralanması	35
Şekil 5.7	$C_9$ çevresinin (6,1)-terssihirli numaralanması	35
Şekil 5.8	$C_{13}$ çevresinin (8,1)-terssihirli numaralanması	35
Şekil 6.1	$P(4)$ prizma grafinin (16,1)-terssihirli numaralanması	39
Şekil 6.2	$P(12)$ prizma grafinin (44,1)-terssihirli numaralanması	39
Şekil 6.3	$P(6)$ prizma grafinin (23,1)-terssihirli numaralanması	41
Şekil 6.4	$P(14)$ prizma grafinin (51,1)-terssihirli numaralanması	41
Şekil 6.5	$P(3)$ prizma grafinin (10,2)-terssihirli numaralanması	43
Şekil 6.6	$P(9)$ prizma grafinin (25,2)-terssihirli numaralanması	43
Şekil 6.7	$P(4)$ prizma grafinin (9,3)-terssihirli numaralanması	45
Şekil 6.8	$P(12)$ prizma grafinin (21,3)-terssihirli numaralanması	46
Şekil 6.9	$P(6)$ prizma grafinin (12,3)-terssihirli numaralanması	47
Şekil 6.10	$P(14)$ prizma grafinin (24,3)-terssihirli numaralanması	48
Şekil 6.11	$P(5)$ prizma grafinin (6,4)-terssihirli numaralanması yoktur	49
Şekil 7.1	$T_2$ tarak grafinin Mısırsal $(1/20,1/180)$ -yarı-terssihirli numaralanması	51
Şekil 7.2	$T_5$ tarak grafinin Mısırsal $(1/29260,1/526680)$ -yarı-terssihirli numaralanması	51
Şekil 7.3	$T_3$ tarak grafinin Mısırsal $(1/5460,1/60060)$ -yarı-terssihirli numaralanması	51
Şekil 7.4	$T_3$ tarak grafinin Mısırsal $(1/3465,1/55440)$ -yarı-terssihirli numaralanması	52
Şekil 7.5	$T_2$ tarak grafinin Mısırsal $(1/165,1/1320)$ -yarı-terssihirli numaralanması	52

Şekil 7.6	$T_5$ tarak grafinin Mısırsal (1/10064340,1/140900760)-yarı-terssihirli numaralanması	52
Şekil 7.7	$T_2$ tarak grafinin Mısırsal (1/45,1/360)-yarı-terssihirli numaralanması	53
Şekil 7.8	$T_5$ tarak grafinin Mısırsal (1/67320,1/942480)-yarı-terssihirli numaralanması	54
Şekil 7.9	$T_3$ tarak grafinin Mısırsal (1/20020,1/90090)-yarı-terssihirli numaralanması	54
Şekil 7.10	$T_5$ tarak grafinin Mısırsal (1/4620,1/27720)-yarı-terssihirli numaralanması	54
Şekil 7.11	$T_2$ tarak grafinin Mısırsal (1/120,1/280)-yarı-terssihirli numaralanması	55
Şekil 7.12	$T_5$ tarak grafinin Mısırsal (1/1369368,1/4564560)-yarı-terssihirli numaralanması	55
Şekil 7.13	$P_2$ yolunun Mısırsal (1/6,1/6)-terssihirli numaralanması	56
Şekil 7.14	$P_8$ yolunun Mısırsal (1/6930,1/27720)-terssihirli numaralanması	56
Şekil 7.15	$C_3$ çevresinin Mısırsal (1/20,1/60)-terssihirli numaralanması	57
Şekil 7.16	$C_9$ çevresinin Mısırsal (1/60060,1/360360)-terssihirli numaralanması	58
Şekil 7.17	$P(4)$ prizma grafinin Mısırsal (1/25741485,1/411863760)-terssihirli numaralanması	59
Şekil 7.18	$P(3)$ prizma grafinin Mısırsal (1/504,1/2520)-terssihirli numaralanması	59
Şekil 7.19	$P(4)$ prizma grafinin Mısırsal (1/9240,1/27720)-terssihirli numaralanması	60

## ÖNSÖZ

İnsanlığın en büyük arzusu hiç kuşkusuz iyiyi, güzeli, doğruyu bulmaktır. İnsanoğlu daima çoğunluğun kabul ettiği, mükemmele yaklaşan ilke ve bilgilerin peşinde koşmuştur. Evinde, işyerinde, çevresinde iyi ilişkiler içinde olan birey bu büyük hedefe önemli ölçüde yaklaşmıştır denilebilir. Ancak bir çırpıda söylenildiği kadar kolay değildir iyiyi, güzeli, doğruyu bulmak. Her şeyden önemlisi emek ister, sevgi ister, fedakarlık ister.

Yukarıdaki paragrafta aktardıklarım tüm çalışma hayatım boyunca bana rehberlik etti ve amacım daha iyiyi, daha güzeli ve daha bilimsel çalışmaları ortaya çıkarmak oldu. Ancak bunları bir insanın tek başına yapması ise çok zor. Bu nedenle bilim bir birikim ve yardımlaşma ile gelişmekte ve gittikçe daha bilimsel bilgi ile donanık toplumlar oluşmaktadır.

Çalışmalarım esnasında beni yönlendiren danışman hocam Prof.Dr. Mehmet ARISOY'a, yaşamımın her aşamasında benim için hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan anneme ve tanıdığım andan itibaren yanımda olup beni destekleyen çok sevdiğim eşim Nihat UYANGÖR'e teşekkürler.

Balıkesir, 2001

Sevinç MERT UYANGÖR

## 1. GİRİŞ

Birleştirilmiş bir  $G=(V,E)$  grafinin, tepe sayısı  $|V|=n \geq 3$  ve ayrıt sayısı  $|E|=m \geq 2$  olsun. Bu grafin ayrıtları 1, 2, 3, ..., m sayıları ile numaralanabilirse öyle ki derecesi 1'den farklı olan p tane tepenin her birine bağlantılı olan ayrıt numaralarının toplamı  $a, d \in \mathbb{N}^+$  olmak üzere  $(a, a+d, a+2d, \dots, a+(p-1)d)$  biçiminde p terimli bir aritmetik dizi oluşturuyorsa; böyle grafa *(a,d)-yarı terssihirli graf* denir. m ayrıtlı  $G=(V,E)$  grafinin ayrıtları 1, 2, 3, ..., m sayıları ile numaralanabilirse öyle ki her bir tepeye bağlantılı olan ayrıt numaralarının toplamı  $a, d \in \mathbb{N}^+$  olmak üzere  $(a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d)$  biçiminde n terimli bir aritmetik dizi oluşturuyorsa böyle bir grafa *(a,d)-terssihirli graf* denir.

Literatürde görülen bazı graf numaralamaları; yarı-sihirli [1], sihirli[2,3], süper sihirli [4,5], zayıf terssihirli [1], terssihirli [1], (a,d)-terssihirli [6] ve Mısırsal sihirli [7,8] numaralamalardır.

(a,d)-terssihirli numaralama yöntemi ile, m ayrıtlı bir grafin ayrıtları  $\{1,2,3,\dots,m\}$  ile numaralanırken bu ayrıt numaralama ile elde edilecek tepe numaraları;  $(a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d)$  şeklinde bir aritmetik dizinin elemanları olur. Benzer yöntem izlenerek, derecesi 1 olan tepeleri de bulunan tarak grafların (a,d)-yarı-terssihirli numaralanması gösterilecektir. Aynı zamanda grafların (a,d)-yarı-terssihirli ve (a,d)-terssihirli numaralanmaları ile Mısırsal numaralandırma arasındaki ilişkiler ortaya konulacaktır.

## 2. TANIMLAR VE ÖN BİLGİLER

**Tanım 2.1** Graf:  $V$  ile  $E$  ayrık iki küme ve  $V \neq \emptyset$  olsun.  $v_i \in V$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) tepeler ve  $e_k \in E$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) ayrıtlar olmak üzere, her bir  $e_k$  ayrıtlarını bir  $\{v_i, v_j\}$  tepe çiftine eşleyen bir  $g$  bağıntısı varsa;  $(V,E)$  ikilisine bir *graf* denir ve  $G=(V,E)$  ile gösterilir.  $v_i, v_j$  tepelerine  $e_k$  ayrıtlarının son noktaları denir.  $e_k = \{v_i, v_j\}$  ayrıtlar son noktaları ile bağlantılıdır. Bir  $G$  grafindeki tepelerin sayısı  $n=|V|$  ve ayrıtların sayısı da  $m=|E|$  ile gösterilerek,  $n$  tepeli  $m$  ayrıtlı bir graf kısaca  $G(n,m)$  biçiminde de belirtilir.

**Tanım 2.2** Katlı Ayrıt: Herhangi iki tepe çifti arasında birden fazla ayrıtlar varsa, böyle ayrıtlara *katlı ayrıtlar* denir.

**Tanım 2.3** Bukle: Başlangıç ve son noktaları çakışık olan ayrıtlara *bukle* denir.

**Tanım 2.4** Bir Tepenin Derecesi: Bir  $G$  grafinin bir  $v_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) tepesine bağlantılı olan  $G$  nin ayrıtlarının sayısına  $v_i$  tepesinin  $G$  grafına göre *derecesi* denir ve bu  $d(v_i,G)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.5** Regüler Graf: Her  $v_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) tepesinin derecesi eşit olan grafa *regüler graf* denir[9].

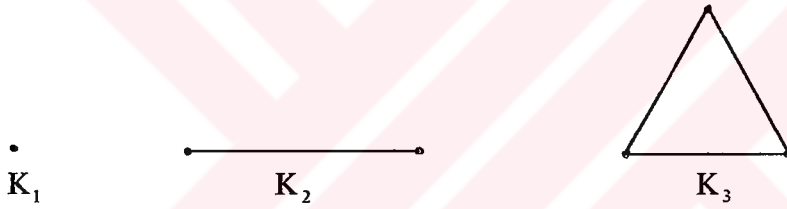
**Tanım 2.6**  $n$ -uzunluklu Ayrıt Katarı: Bir  $G$  grafindan  $i \neq j$  için  $e_i \neq e_j$  ve  $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) olmak üzere alınan  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  ayrıtlar dizisinin oluşturduğu altgrafa  $G$  nin  *$n$ -uzunluklu ayrıtlar katarı* denir.  $v_1$  ve  $v_{n+1}$  tepelerine bu ayrıtların son noktaları,  $v_2, v_3, \dots, v_n$  tepelerinden her birine de birer iç tepe denir. Son noktaları çakışık olan ayrıtların katarına *kapalı ayrıtlar katarı*, aksi durumdaki ayrıtların katarına da *açık ayrıtlar katarı* denir[10].

**Tanım 2.7** Yol ve Çevre: Her bir iç tepesinin derecesi iki olan  $n$  ayrıtlı açık ayrıt katarına *yol* denir ve bu  $P_n$  ile gösterilir. Her bir iç tepesinin derecesi iki olan  $n$  ayrıtlı kapalı ayrıt katarına *çevre* denir ve bu da  $C_n$  ile gösterilir [10].

**Tanım 2.8** Birleştirilmiş Graf: Her tepe çifti arasında en az bir yol bulunan grafa *birleştirilmiş(bağlantılı) graf* denir

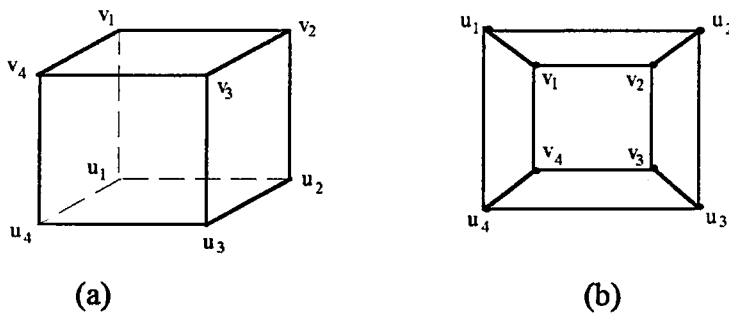
Bu çalışmada; birleştirilmiş, buklesiz, katlı ayrıtsız ve yönlendirilmemiş grafların numaralanmaları incelenecektir. Bir graf denildiğinde, bu özellikteki graflar anlaşılacaktır. Aşağıda referanssız olarak verilen tanımlar tarafımızdan sunulmuştur.

**Tanım 2.9** Tam Graf: birbirinden farklı her tepe çifti arasında bir ayrıt bulunan grafa *tam graf* denir ve  $n$  tepeli bir tam graf  $K_n$  ile gösterilir[11]. Şekil 2.1’ de  $K_1, K_2$  ve  $K_3$  tam grafları gösterilmiştir.



Şekil 2.1  $K_1, K_2$  ve  $K_3$  tam grafları

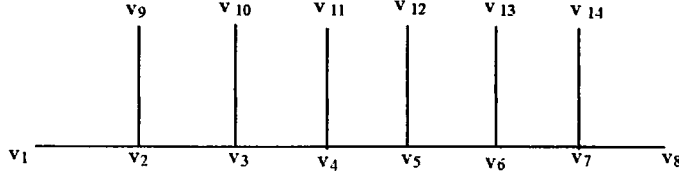
**Tanım 2.10** Prizma Graflar: Tepeleri  $u_1, u_2, \dots, u_n$  ve  $v_1, v_2, \dots, v_n$  olmak üzere  $2n$  tepeli ve 3. dereceden regüler grafa bir  $n$ -prizma grafi ( $n \geq 3$ ) denir ve bu  $P(n)$  ile gösterilir.  $u_1, u_2, \dots, u_n$  tepeleri  $n$  uzunluklu bir çevre oluştururlar, benzer şekilde  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tepeleri de  $n$  uzunluklu bir diğer çevre oluştururlar ve prizmanın geriye kalan ayrıtları  $\{u_i v_i\}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) şeklindedir [10]. Şekil 2.2 de  $P(4)$  prizma grafinin a)  $R^3$ ’te b)  $R^2$ ’de gösterilişi verilmiştir.



Şekil 2.2  $P(4)$  prizma grafi

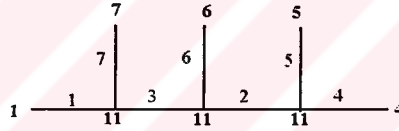


**Tanım 2.11** Tarak Graf:  $(n+1)$  uzunluklu  $P_{n+1}$  yolunun  $v_1$  başlangıç ve  $v_{n+2}$  son tepesi dışında arada kalan  $n$  tane  $v_2, v_3, \dots, v_{n+1}$  tepesine birer ayrıt eklenmesiyle oluşan grafa *tarak graf* denir ve  $T_n$  ile gösterilir.  $T_n$  tarak grafi  $2n+2$  tepeli ve  $2n+1$  ayrıtlıdır[1]. Şekil 2.3 de  $T_6$  tarak grafi gösterilmiştir.



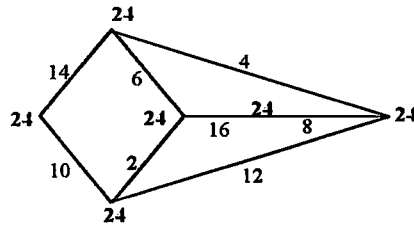
Şekil 2.3  $T_6$  Tarak Grafi

**Tanım 2.12** Yarı Sihirli Tarak Graf:  $2n+1$  ayrıtlı bir  $T_n$  tarak grafının ayrıtları eğer  $1, 2, 3, \dots, 2n+1$  sayıları ile numaralanabilirse öyle ki derecesi 1' den farklı olan her tepedeki ayrıt numaralarının toplamı aynı ise böyle bir  $T_n$  grafına *yarı-sihirli tarak graf* denir. Şekil 2.4 te  $T_3$  tarak grafının yarı-sihirli numaralanması gösterilmiştir.



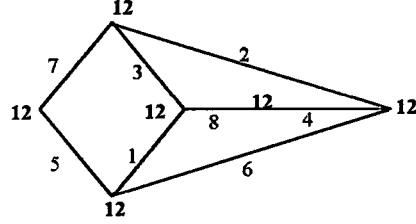
Şekil 2.4  $T_3$  tarak grafının yarı-sihirli numaralanması

**Tanım 2.13** Sihirli Graf:  $m$  ayrıtlı bir grafın ayrıtları eğer pozitif doğal sayılar ile numaralanabilirse öyle ki her tepedeki ayrıt numaralarının toplamı aynı ise böyle grafa *sihirli graf* denir[2,3]. Şekil 2.5' de  $G(6,8)$  grafının sihirli numaralanması gösterilmiştir.



Şekil 2.5  $G(6,8)$  sihirli graf

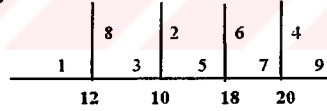
**Tanım 2.14** Süper Sihirli Graf:  $m$  ayrıtlı bir grafın ayrıtları eğer  $1,2,\dots,m$  sayıları ile numaralanabilirse öyle ki her tepedeki ayrıt numaralarının toplamı aynı ise böyle grafa *süper sihirli graf* denir[4,5]. Şekil 2.6’ da  $G(6,8)$  grafının sihirli numaralanması gösterilmiştir.



Şekil 2.6  $G(6,8)$  süper sihirli graf

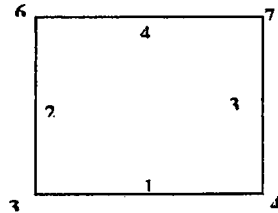
**Tanım 2.15** Zayıf-Ters Sihirli Graf: :  $m$  ayrıtlı bir grafın ayrıtları eğer pozitif doğal sayılar ile numaralanabilirse öyle ki her tepedeki ayrıt numaralarının toplamı birbirinden farklı ise böyle grafa *zayıf ters-sihirli graf* denir[1].

**Tanım 2.16** Yarı Terssihirli Tarak Graf:  $2n+1$  ayrıtlı bir  $T_n$  tarak grafının ayrıtları eğer  $1,2,3,\dots,2n+1$  sayıları ile numaralanabilirse öyle ki derecesi 1 den farklı olan her tepedeki ayrıt numaralarının toplamı birbirinden farklı ise böyle bir  $T_n$  grafına *yarı-terssiherli tarak graf* denir. Şekil 2.7’ de  $T_4$  tarak grafının yarı terssiherli numaralanması gösterilmiştir.



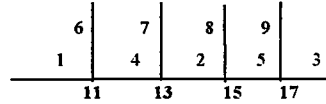
Şekil 2.7  $T_4$  tarak grafının yarı terssiherli numaralanması

**Tanım 2.17** Terssihirli Graf:  $m$  ayrıtlı bir grafın ayrıtları eğer  $1, 2, 3, \dots, m$  sayıları ile numaralanabilirse öyle ki her tepedeki ayrıt numaralarının toplamı birbirinden farklı ise böyle grafa *terssiherli graf* denir[1]. Şekil 2.8’ de  $C_4$  çevresinin terssiherli numaralanması gösterilmiştir.



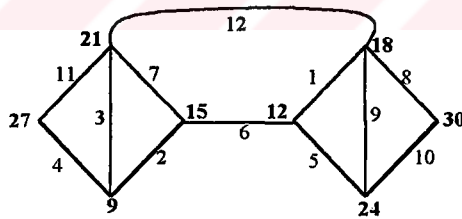
Şekil 2.8  $C_4$  çevresinin terssiherli numaralanması

**Tanım 2.18**  $(a,d)$ -Yarı Terssihirli Tarak Graf:  $n=|V| \geq 3$  ve  $m=|E| \geq 2$  olan bir  $T_n$  tarak grafının ayrıtları  $1, 2, 3, \dots, 2n+1$  sayıları ile numaralanabilirse öyle ki derecesi 1'den farklı olan  $p$  tane tepenin her birine bağlantılı olan ayrıt numaralarının toplamı  $a, d \in \mathbb{N}^+$  olmak üzere  $(a, a+d, a+2d, \dots, a+(p-1)d)$  biçiminde  $p$  terimli bir aritmetik dizi oluşturuyorsa böyle grafa  $(a,d)$ -yarı terssihirli tarak graf denir. Şekil 2.9' da  $T_4$  tarak grafının  $(11,2)$ -yarı terssihirli numaralanması gösterilmiştir.



Şekil 2.9  $T_4$  tarak grafının  $(11,2)$ -yarı terssihirli numaralanması

**Tanım 2.19**  $(a,d)$ -Terssihirli Graf:  $n=|V| \geq 3$  ve  $m=|E| \geq 2$  olan birleştirilmiş bir  $G=(V,E)$  grafının ayrıtları  $1, 2, 3, \dots, m$  sayıları ile numaralanabilirse öyle ki her tepeye bağlantılı olan ayrıt numaralarının toplamı  $a, d \in \mathbb{N}^+$  olmak üzere  $(a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d)$  biçiminde  $n$  terimli bir aritmetik dizi oluşturuyorsa böyle grafa  $(a,d)$ -terssihirli graf denir[6]. Şekil 2.10' da  $G(8,12)$  grafının  $(9,3)$ -terssihirli numaralanması gösterilmiştir.



Şekil 2.10  $G(8,12)$  grafının  $(9,3)$ -terssihirli numaralanması

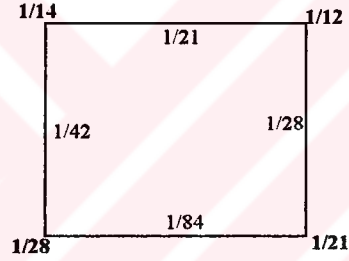
**Tanım 2.20** Kesirsel Numaralama Fonksiyonları:  $U = \left\{ \frac{1}{a} \mid a \in \mathbb{N}^+, a > 1 \right\}$  payı

1 olan özel birim kesirlerin bir kümesini ve  $\Gamma$  da buklesiz, katlı ayrıtsız, sonlu ve yönlendirilmemiş tüm grafların kümesini göstermek üzere  $G=(V,E) \in \Gamma$  de tepe sayısı 2' den büyük olan birleştirilmiş bir graf olsun. Bu grafın,  $U$  nun elemanları olan özel birim kesirlerle bir ayrıt numaralaması  $f:E \rightarrow U$  bire-bir içine fonksiyonuyla tanımlansın. Bu durumda  $f$  ayrıt numaralamasının  $V$  tepeler kümesi üzerinde doğurduğu  $g_f$  fonksiyonu

$$g_f : V \rightarrow Q^+ : v \rightarrow g_f(v) = \sum_{e \in I(v)} f(e) \quad (2.1)$$

şeklinde olsun. Burada  $e \in I(v)$ ;  $v$  tepesi ile bağlantılı olan  $e$  ayrıtlarının kümesini ve  $f(e)$ ;  $e$  ayrıtlarının özel birim kesirlerle bir ayrıt numaralamasını ifade eder.  $U$  ya birim kesirler kümesi,  $f$  ve  $g_f$  fonksiyonlarına da kesirsel numaralama fonksiyonları denir [12].

**Tanım 2.21** Mısırsal Numaralama: Birleştirilmiş bir graf  $G=(V,E) \in \Gamma$  olsun. Bu grafın özel birim kesirlerle bir  $f$  ayrıt numaralaması göz önüne alınsın. Bu  $f$  ayrıt numaralamasının doğurduğu  $g_f$  tepe numaralamasının;  $V=V(G)$  tepeler kümesi üzerinde tanımlanan bire-bir içine fonksiyon olmasından dolayı  $g_f(V) \subseteq U$  bağıntısını sağlar ve  $g_f(V) = \text{Im } g_f$  ile gösterilir. Böylece özel birim kesirlerle  $f$  ayrıt numaralamasına  $G$  grafının bir *Mısırsal numaralanması* denir[12]. Şekil 2.11’ de  $C_4$  çevresinin Mısırsal numaralanması gösterilmiştir.



Şekil 2.11  $C_4$  çevresinin Mısırsal numaralanması.

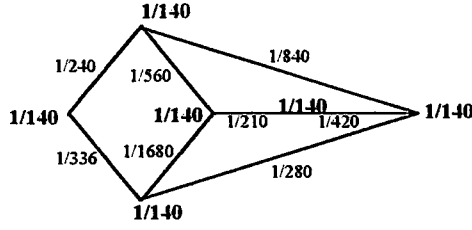
**Tanım 2.22** Mısırsal Sihirli Numaralama:  $G=(V,E) \in \Gamma$  birleştirilmiş bir graf olsun.  $G$  grafının bire-bir içine  $f$  ayrıt numaralaması

$$f : E \rightarrow U : e \rightarrow f(e) \quad (2.2)$$

olsun ve bu  $f$  fonksiyonunun doğurduğu  $g_f$  tepe numaralaması

$$g_f : V \rightarrow Q^+ : v \rightarrow g_f(v) = \sum_{e \in I(v)} f(e) \quad (2.3)$$

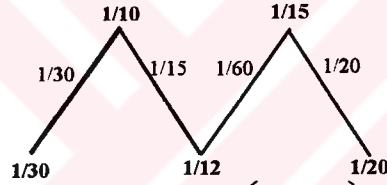
$\text{Im } g_f \subseteq U$  ile sabit bir fonksiyon oluyorsa;  $f$  ayrıt numaralamasına  $G$  grafının *Mısırsal sihirli numaralanması* denir[7,8]. Şekil 2.12’ de  $G(6,8)$  grafının Mısırsal sihirli numaralanması gösterilmiştir.



Şekil 2.12  $G(6,8)$  grafinin Mısırsal sihirli numaralanması

**Tanım 2.23** Mısırsal  $(a,d)$ -terssihirli Numaralama:  $n=|V|\geq 3$  ve  $m=|E|\geq 2$  olan birleştirilmiş  $G=(V,E)$  grafinin ayrıtları  $U$  birim kesirler kümesinin elemanlarıyla numaralansın. Burada  $a,d \in U$  olmak üzere her tepede elde edilecek ayrıtların toplamı;  $n$  terimli  $(a,a+d,a+2d,\dots,a+(n-1)d)$  aritmetik dizi oluşturuyorsa böyle grafa *Mısırsal  $(a,d)$ -terssihirli graf* denir. Şekil 2.13’ de  $P_4$

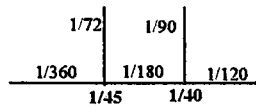
yolunun Mısırsal  $\left(\frac{1}{30}, \frac{1}{60}\right)$ -terssihirli numaralanması gösterilmiştir.



Şekil 2.13  $P_4$  yolunun Mısırsal  $\left(\frac{1}{30}, \frac{1}{60}\right)$ -terssihirli numaralanması

**Tanım 2.24** Mısırsal  $(a,d)$ -yarı-terssihiirli Tarak Graf:  $n=|V|\geq 3$ ,  $m=|E|\geq 2$  olan  $2n+1$  ayrıtlı  $T_n$  tarak grafinin ayrıtları;  $a,d \in U$  olmak üzere  $U$  birim kesirler kümesinin elemanlarıyla numaralanabilirse öyle ki derecesi 1’ den farklı olan  $p$  tane tepenin her birine bağlantılı olan ayrıtların toplamı;  $(a,a+d,a+2d,\dots,a+(p-1)d)$  biçiminde bir aritmetik dizi oluşturuyorsa böyle bir grafa *Mısırsal  $(a,d)$ -yarı-terssihiirli tarak graf* denir. Şekil 2.14’ de  $T_2$  tarak grafinin

Mısırsal  $\left(\frac{1}{45}, \frac{1}{360}\right)$ -yarı terssihiirli numaralanması gösterilmiştir.



Şekil 2.14  $T_2$  tarak grafinin Mısırsal  $\left(\frac{1}{45}, \frac{1}{360}\right)$ -yarı terssihiirli numaralanması

**Tanım 2.25**  $k$  ile Genişletilme:  $G=(V,E) \in \Gamma$  bağlantılı bir graf ve  $f:E \rightarrow Q^+$ ,  $G$  grafının bir ayrit numaralaması olsun.  $k \in U \cup N^+$  olmak üzere  $G$  grafının

$$f^{(k)} : E \rightarrow Q^+ : e \rightarrow k.f(e) \quad (2.4)$$

ayrit numaralamasına,  $f$  ayrit numaralamasının  $k$  ile genişletilmesi denir[12].

**Tanım 2.26**  $n \geq 3$ ,  $m \geq 2$  olmak üzere birleştirilmiş bir  $G=(V,E) \in \Gamma$  grafının  $(a,d)$ -terssihirli olduğunu varsayalım.  $g_f(V) \in \{a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d\}$  için  $n$  tepenin değerleri toplanırsa

$$a + a + d + a + 2d + \dots + a + (n-1)d = 2(1 + 2 + 3 + \dots + m) \quad (2.5)$$

her iki tarafı 2 ile çarpılırsa

$$2na + n(n-1)d = 2m(m+1) \quad (2.6)$$

elde edilir. Yukarıdaki (2.6) denklemin bilinmeyenleri  $a, d \in N^+$  olan doğrusal diyofant (Linear Diophantine) denklemi denir.

**Teorem 2.1** İki değişkenli  $ax+by=c$  şeklindeki bir doğrusal diyofant denkleminin çözümünün olması için gerek ve yeter koşul;  $d=o.b.e.b.(a,b)$  olmak üzere  $d$  nin  $c$  yi bölmesidir[13].

**Teorem 2.2**  $d=o.b.e.b.(a,b)$  ve  $d|c$  olmak üzere  $ax+by=c$  şeklindeki bir doğrusal diyofant denklemi verilsin. Eğer  $x_0$  ve  $y_0$  bu denklemin bir çözümü ise, denklemin her  $x$  ve  $y$  çözümü  $t \in Z$  olmak üzere

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t \quad \text{ve} \quad y = y_0 - \frac{a}{d}t \quad (2.7)$$

şeklindedir[13].

### 3. GRAF NUMARALAMALARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER

**Yardımcı Teorem 3.1.**  $G=(V,E) \in \Gamma$  bir graf ve  $f : E(G) \rightarrow Q^+ : e \rightarrow f(e)$  fonksiyonu,  $G$  grafının pozitif rasyonel sayılarla bir ayrıt numaralanması olsun. Bu  $f$  ayrıt numaralanması yardımıyla tanımlanan tepe numaralanması

$$g_f : V(G) \rightarrow Q^+ : v \rightarrow g_f(v) = \sum_{e \in I(v)} f(e)$$

olsun. Herhangi bir  $k \in U \cup N^+$  için  $f$  fonksiyonunun  $k$  ile genişletilmesi olan  $f^{(k)}$  fonksiyonu dikkate alınsın,  $f^{(k)}$  fonksiyonu yardımıyla tanımlanan  $g_{f^{(k)}}$  tepe numaralanması her  $v \in V(G)$  için

$$g_{f^{(k)}}(v) = k.g_f(v) \quad (3.1)$$

eşitliğini sağlar[11].

**İspat:**  $G$  grafının rasyonel sayılarla bir  $f$  ayrıt numaralanmasının  $k$  ile genişletilmesi; herhangi bir  $k \in U \cup N^+$  sayısı için  $f^{(k)}$  ise  $f^{(k)}$  nın tanımından ve  $f^{(k)}$  yardımıyla tanımlanan  $g_{f^{(k)}}$  tepe numaralanması  $\forall v \in V(G)$  için

$$g_{f^{(k)}}(v) = \sum_{e \in I(v)} f^{(k)}(e) = \sum_{e \in I(v)} k.f(e) = k \sum_{e \in I(v)} f(e) = k.g_f(v)$$

olur. Buradan  $g_{f^{(k)}}$  tepe numaralanmasının da  $V(G)$ 'den  $Q^+$  ya bir fonksiyon olduğu ve bu fonksiyonun  $\forall v \in V(G)$  için

$$g_{f^{(k)}}(v) = k.g_f(v)$$

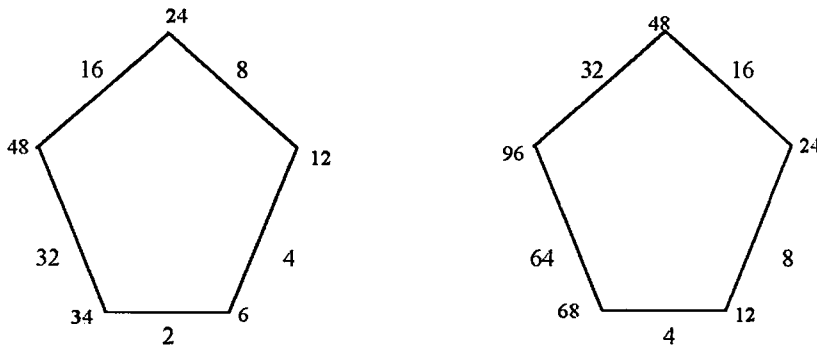
eşitliğini sağladığı görülür.  $\square$

**Teorem 3.2**  $G=(V,E) \in \Gamma$  mertebesi  $\geq 3$  olan birleştirilmiş bir graf olsun.

- (a) Eğer  $f:E(G) \rightarrow N^+$ ,  $G$  nin zayıf-terssihirli numaralanması ise,  $\forall k \in N^+$  için  $f$  nin  $f^{(k)}$  genişletilmesi de zayıf terssihirli bir numaralanmadır[11].
- (b) Eğer  $f:E(G) \rightarrow N^+$ ,  $G$  nin sihirli numaralanması ise,  $\forall k \in N^+$  için  $f$  nin  $f^{(k)}$  genişletilmesi de sihirli bir numaralanmadır[11].
- (c) Eğer  $f:E(G) \rightarrow U$ ,  $G$  nin Mısırsal numaralanması ise,  $\forall k \in U$  için  $f$  nin  $f^{(k)}$  genişletilmesi de Mısırsal bir numaralanmadır[11].

**İspat:**

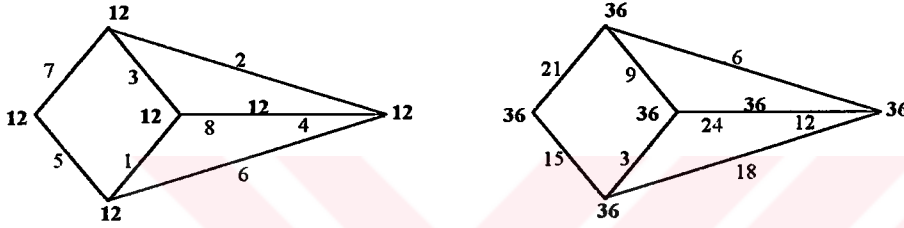
- (a)  $G$  grafının zayıf-terssihirli numaralanması  $f:E(G) \rightarrow N^+$  ve  $k \in N^+$  olsun.  $f$  nin  $f^{(k)}:E(G) \rightarrow N^+ : f^{(k)}(e)=k.f(e)$  biçiminde tanımlanan  $f^{(k)}$  genişletilmesinin bire-bir ve içine fonksiyon olduğu açıktır. Yardımcı Teorem 3.1 'den  $\forall v \in V(G)$  için  $g_{f^{(k)}}(v) = k.g_f(v)$  eşitliğinin sağlandığı ve buradan  $g_{f^{(k)}}(V) \subseteq N^+$  olduğu görülür ki bunun anlamı  $g_{f^{(k)}}:V(G) \rightarrow N^+ : v \rightarrow g_{f^{(k)}}(v) = kg_f(v)$  fonksiyonunun da bire-bir içine fonksiyon olduğudur(Şekil 3.1).  $\square$



Şekil 3.1  $C_5$  çevresinin zayıf terssihirli numaralanması ve bu numaralanmanın 2 ile genişletilmesi.

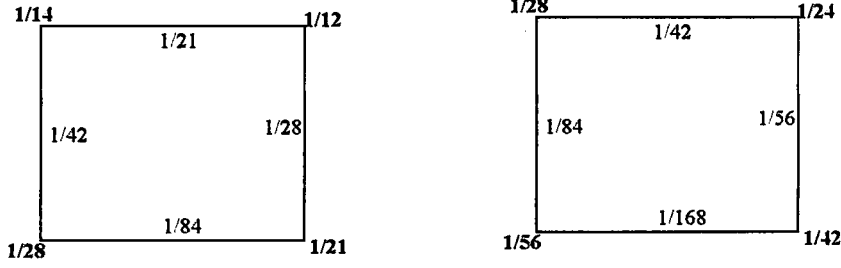


(b)  $G$  grafının sihirli numaralanması  $f: E(G) \rightarrow \mathbb{N}^+$  ve  $k \in \mathbb{N}^+$  olsun. Tanım.2.13 te bu  $f$  ayrıt numaralanması yardımıyla tanımlanan  $g_f: V(G) \rightarrow \mathbb{N}^+ : v \rightarrow g_f(v) = \sum_{e \in I(v)} f(e)$  tepe numaralanmasının sabit bir fonksiyon olduğu belirtilmiştir.  $f^{(k)}: E(G) \rightarrow \mathbb{N}^+ : e \rightarrow f^{(k)}(e) = k \cdot f(e)$  biçiminde tanımlanan  $f^{(k)}$  genişletilmesinin bire-bir içine bir fonksiyon olduğu açıktır. Bu  $f^{(k)}$  ayrıt numaralanması yardımıyla  $g_{f^{(k)}}: V(G) \rightarrow \mathbb{N}^+ : v \rightarrow g_{f^{(k)}}(v) = k \cdot g_f(v)$  biçiminde tanımlanan  $g_{f^{(k)}}$  tepe numaralanması da sabit fonksiyon olur, yani  $g_{f^{(k)}}(V) = c$  dir(Şekil 3.2).  $\square$



Şekil 3.2  $G(6,8)$  grafının sihirli numaralanması ve onun 3 ile genişletilmesi.

(c)  $G$  grafının Mısırsal numaralanması  $f: E(G) \rightarrow U$  olsun. Böylece  $f$  ayrıt numaralanması yardımıyla tanımlanan  $g_f: V(G) \rightarrow U$  tepe numaralanması bire-bir içine fonksiyondur ve  $\text{Im } g_f \subseteq U$  dir. Keyfi bir  $k \in U$  için,  $f^{(k)}: E(G) \rightarrow U : e \rightarrow f^{(k)}(e) = k \cdot f(e)$  biçiminde tanımlanan  $f^{(k)}$  genişletilmesinin de bire-bir içine fonksiyon olduğu açıktır ve  $\text{Im } f^{(k)} \subseteq U$  dir. Buradan  $G$  grafının basit birim kesirlerle genişletilmesi  $f^{(k)}$  dır denir. Yardımcı Teorem 3.1 den  $v \in V(G)$  için  $g_{f^{(k)}}(v) = k \cdot g_f(v)$  eşitliğinin sağlandığı biliniyor. Madem ki  $g_f$  bire-bir içine fonksiyondur o zaman  $g_{f^{(k)}}$  da bire-bir içine fonksiyon olacaktır. Buradan  $\forall k \in U$  sayısı için Mısırsal numaralanmanın  $f^{(k)}$  genişletilmesinin de bir Mısırsal numaralanma olduğu sonucuna varılır. Şekil 3.3 de  $C_4$  çevresinin Mısırsal numaralanması ve onun  $k = \frac{1}{2}$  genişletilmesi gösterilmiştir.  $\square$



Şekil 3.3  $C_4$  çevresinin Mısırsal numaralanması ve onun  $k=\frac{1}{2}$  genişletilmesi

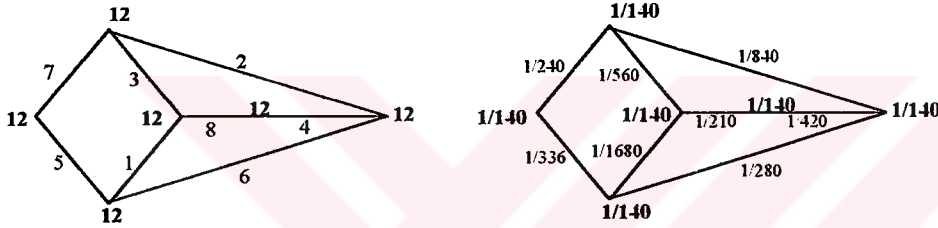
**Teorem 3.3**  $G=(V,E) \in \Gamma$  mertebesi  $\geq 3$  olan birleştirilmiş bir graf olsun.  $G$  nin Mısırsal sihirli numaralanmaya sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul  $G$  nin sihirli numaralanmaya sahip olmasıdır[11].

**İspat:**  $G$  sihirli bir graf olsun. Bu durumda  $G$  için  $f:E(G) \rightarrow N^+$  biçiminde tanımlanan bire-bir içine fonksiyonu vardır öyle ki bu  $f$  ayrıt numaralanması yardımıyla tanımlanan tepe numaralanması  $g_f: V \rightarrow N^+ : g_f(v) = \sum_{e \in I(v)} f(e)$  şeklindedir ve sabit bir fonksiyondur. Uygun bir  $k$  genişletilmesi yapmak için

$$k' = 2\text{gcm}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_m), g_f(v_1)) \quad (3.2)$$

şeklinde bir  $k'$  sayısı tanımlansın. O zaman  $k'$  yardımıyla tanımlanan  $k = \frac{1}{k'} \in U$  sayısı kullanılarak yapılan  $f^{(k)}$  genişletilmesi  $G$  nin basit birim kesirlerle bir ayrıt numaralanması olacaktır öyle ki  $g_{f^{(k)}}$  fonksiyonu da sabit olur ve  $\text{Im}g_{f^{(k)}} \subseteq U$ 'dır.  $k'$  nün seçimine dikkat edilecek olunursa  $f^{(k)}: E(G) \rightarrow Q^+$  olduğu açıktır.  $f^{(k)}(E) \subseteq Q^+$  olur, yani  $f^{(k)}$ ;  $G$  nin basit birim kesirlerle bir ayrıt numaralanmasıdır.  $k'$  nün seçimine göre  $g_{f^{(k)}}: V(G) \rightarrow Q^+$  için  $g_{f^{(k)}} \subseteq U$  olur. Madem ki  $g_f$  nin sabit bir fonksiyon olduğu biliniyor o halde  $g_{f^{(k)}} = k \cdot g_f$  de sabit olacaktır. Buradan  $G$  grafi Mısırsal numaralanmaya sahip olur.

Şimdi  $G$  nin Mısırsal numaralanmaya sahip olduğu farz edilsin. O zaman  $G$  nin basit birim kesirlerle  $f : E(G) \rightarrow U$  ayrıt numaralanması vardır öyle ki  $g_f : V(G) \rightarrow Q^+$  fonksiyonu,  $\text{Img}_f \subseteq U$  olan sabit bir fonksiyondur. Bu durumda ise  $k = \text{gcm}\left(\frac{1}{f(e_1)}, \frac{1}{f(e_2)}, \dots, \frac{1}{f(e_m)}, \frac{1}{g_f(v_1)}\right)$  olarak seçilsin.  $f$  bire-bir içine fonksiyon olduğundan  $f^{(k)} = k.f$  şeklinde tanımlanan  $f^{(k)}$  genişletilmesi de bire-bir içine olacaktır.  $k$  nın seçimine göre  $\text{Im}f^{(k)} \subseteq N^+$  dır. Madem ki  $g_f$  sabit bir fonksiyondur  $g_{f^{(k)}} = k.g_f$  ile tanımlanan  $g_{f^{(k)}} \subseteq N^+$  sabittir ve  $G$  grafi da sihirli numaralanmaya sahip olur. Şekil 3.4 de  $G(6,8)$  grafinin sihirli ve onun Mısırsal sihirli numaralanması gösterilmiştir.  $\square$



Şekil 3.4  $G(6,8)$  grafinin sihirli ve onun Mısırsal sihirli numaralanması

**Teorem 3.4**  $G \neq K_2$  olmak üzere her bir birleştirilmiş graf zayıf terssihirli numaralanmaya sahiptir[11].

**İspat:**  $G \neq K_2$  olmak üzere  $G=(V,E)$  birleştirilmiş bir graf ve  $|E|=m$  ve  $|V|=n \geq 3$  olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan  $f$  ayrıt numaralanmasının

$$f : E \rightarrow N^+ : e_i \rightarrow f(e_i) = 2^{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.3)$$

bire-bir içine olduğu açıktır. Bu  $f$  fonksiyonu yardımıyla tanımlanan tepe numaralaması

$$g_f : V \rightarrow N^+ : v \rightarrow g_f(v) = \sum_{e \in I(v)} f(e) \quad (3.4)$$

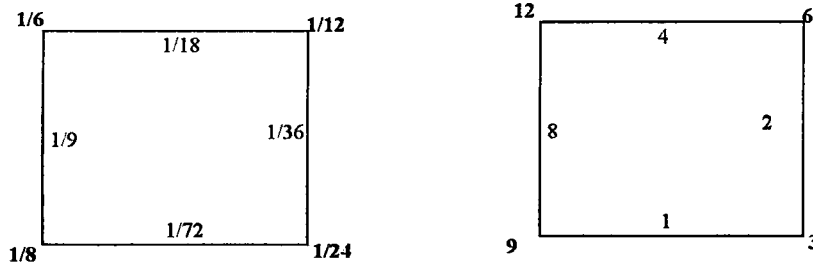
da bire-bir olacaktır. Çünkü,  $V$  tepeler kümesindeki her tepenin  $g_f(v)$  tepe numarası 2 nin farklı kuvvetlerinin toplamıdır ve buradan  $g_f(v)$  doğal sayıların ikili temsilleri gibi yorumlanabilir ve tektir.  $\square$

**Teorem 3.5**  $K_2$  'den farklı her birleştirilmiş  $G=(V,E)$  grafi Mısırsal numaralanmaya sahiptir[ 11].

**İspat:**  $G \neq K_2$  ve  $G=(V,E)$  bağlantılı graf olsun.  $G$  grafi için Teorem 3.4 ile verilen zayıf terssihirli numaralanması seçilsin ve onun tepe numaralanması göz önüne alınsın.

$$k' = 2\text{gcm}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_m), g_f(v_1), g_f(v_2), \dots, g_f(v_n)) \quad (3.5)$$

şeklinde  $k'$  sayısı seçilsin. O zaman  $k'$  yardımıyla tanımlanan  $k = \frac{1}{k'} \in U$  sayısı kullanılarak yapılan  $f^{(k)}$  genişletilmesi  $G$  nin basit birim kesirlerle bir ayrıt numaralanması olacaktır. Madem ki  $f$  bire-bir içine fonksiyondur  $f^{(k)}=k.f$  de bire-bir içine fonksiyon olacaktır.  $k'$  nün seçimi  $f^{(k)}(E) \subseteq U$  ya bağlıdır. Yardımcı Teorem 3.1 den  $g_{f^{(k)}}(v) = k.g_f(v)$  olduğu bilinmektedir. Madem ki  $g_f$  bire-bir dir,  $g_{f^{(k)}}$  da bire-bir olacaktır.  $k$  nün seçimine göre  $\text{Img}_{f^{(k)}} \subseteq U$  olacaktır ve  $f^{(k)}$ ,  $G$  grafının Mısırsal numaralanmasıdır. Şekil 3.5 de  $C_4$  çevresinin zayıf terssihirli numaralanması ve onun  $k=72$  genişletilmesi gösterilmiştir.



Şekil 3.5  $C_4$  çevresinin zayıf terssihirli numaralanması ve onun  $k=72$  genişletilmesi

Aşağıdaki iki teorem tarafımızdan sunulmuş ve ispatlanmıştır.

**Teorem 3.6**  $G=(V,E) \in \Gamma$ , mertebesi  $\geq 3$  olan birleştirilmiş bir graf olsun ve  $G$  grafının  $(a,d)$ -yarı-terssihirli numaralanması var olsun.  $(a,d)$ -yarı-terssihirli numaralanmaya sahip her  $G$  grafının aynı zamanda bir Mısırsal  $(a,d)$ -yarı-terssihirli numaralanması da vardır.

**İspat:**  $m$  ayrıtlı,  $n$  tepeli  $G$  grafının  $(a,d)$ -yarı-terssihirli numaralanabilmesi için  $f:E(G) \rightarrow \{1,2,\dots,m\}$  bire-bir örten fonksiyonu olmalıdır öyle ki derecesi 1'den farklı olan  $p$  tane tepedeki ayrıt numaralarının toplamı;  $a,d \in \mathbb{N}^+$  olmak üzere  $(a,a+d,a+2d,\dots,a+(p-1)d)$  biçiminde  $p$  terimli bir aritmetik dizi oluşturmalıdır. Uygun bir  $k$  genişletilmesi yapmak için

$$k' = \text{o.k.e.k}(1,2,3,\dots,m, a, a+d, a+2d, \dots, a+(p-1)d) \quad (3.6)$$

şeklinde seçilen  $k'$  sayısı alınsın. O zaman  $k'$  yardımıyla tanımlanan  $k = \frac{1}{k'} \in U$  sayısı kullanılarak yapılan  $f^{(k)}$  genişletilmesi  $G$  nin basit birim kesirlerle bir ayrıt numaralanması olacaktır.  $f^{(k)}(E) \subseteq U$  olduğu açıktır.  $k'$ 'nün seçimine göre;  $g_{f^{(k)}} : V(G) \rightarrow Q$  için  $g_{f^{(k)}}(V) \subseteq U$  olur. Buradan,  $(a,d)$ -yarı-terssihirli numaralanmaya sahip  $G$  grafi Mısırsal  $(a,d)$ -yarı-terssihirli olduğu sonucu ortaya çıkar.  $\square$

**Teorem 3.7**  $G=(V,E) \in \Gamma$  mertebesi  $\geq 3$  olan birleştirilmiş bir graf ve  $G$  grafının  $(a,d)$ -terssihirli numaralanması var olsun.  $(a,d)$ -terssihirli numaralanmaya sahip her  $G$  grafının aynı zamanda bir Mısırsal  $(a,d)$ -terssihirli numaralanması vardır.

**İspat:**  $m$  ayrıtlı,  $n$  tepeli  $G$  grafının  $(a,d)$ -terssihirli numaralanmasının olması için  $f:E(G) \rightarrow \{1,2,\dots,m\}$  bire-bir örten ve  $a,d \in \mathbb{N}^+$  pozitif tamsayılarının olmasıdır öyle ki  $f$  ayrıt numaralaması yardımıyla tanımlanan  $g_f$  tepe numaralaması

$$g_f : V \rightarrow N^+ : v \rightarrow g_f(v) = \sum_{e \in I(v)} f(e)$$

da bire-birdir örten ve görüntü kümesi  $g_f(V) = \{a + a + 2d, \dots, a + (n-1)d\}$  dir.

Uygun bir  $k$  genişletilmesi yapmak için

$$k' = \text{o.k.e.k}(1, 2, 3, \dots, m, a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n-1)d) \quad (3.7)$$

şeklinde seçilen  $k'$  sayısı alınsın. O zaman  $k'$  yardımıyla tanımlanan  $k = \frac{1}{k'} \in U$

sayısı kullanılarak yapılan  $f^{(k)}$  genişletilmesi  $G$  nin basit birim kesirlerle bir ayrıt numaralanması olacaktır.  $f^{(k)}(E) \subseteq U$  olduğu açıktır.  $k'$  nün seçimine göre;

$g_{f^{(k)}} : V(G) \rightarrow Q$  için  $g_{f^{(k)}}(V) \subseteq U$  olur. Buradan  $(a, d)$ -terssihirli numaralanmaya sahip  $G$  grafi Mısırsal  $(a, d)$ -terssihirli olduğu sonucuna varılır.  $\square$

#### 4. $T_n$ TARAK GRAFININ (a,d)-YARI-TERSSİHİRLİ NUMARALANMASI

$n \geq 2$  olmak üzere  $T_n$  tarak grafi  $2n+1$  ayrıtlı ve  $2n+2$  tepelidir. Bu grafın tek dereceli tepelerinin sayısı ise  $n+2$  dir ve bu tepelerin numaraları  $T_n$  tarak grafının yarı-terssihirli numaralanmalarını bulabilmek için oluşturulan doğrusal diyofant denkleminde yer almaz.  $T_n$  tarak grafının  $2n+1$  ayrıtıdan  $n+2$  tane ayrıt numarasının seçimi  $C \binom{2n+1}{n+2} = \frac{(2n+1)!}{(2n+1-(n+2))!(n+2)!} = \frac{(2n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}$  farklı şekilde yapılabilir. Dolayısıyla  $T_n$  tarak grafının yarı-terssihirli numaralanmalarından bir kısmını bulabilmek için bu seçimler keyfi olarak yapılır. Seçilen tek dereceleri tepelerin kümesi  $V_{\text{der}(1)}$  ile gösterilir.

**Teorem 4.1**  $V_{\text{der}(1)} = \{1, 2, \dots, n+1, 2n+1\}$  olmak üzere  $1 \leq d \leq 3$  için  $T_n$  tarak grafının (a,d)-yarı-terssihirli numaralanması vardır.

**İspat:**  $2n+1$  ayrıtlı ve  $2n+2$  tepeli  $T_n$  in her ayrıt numarası iki tepede görünseydi o zaman  $2n+2$  tepede elde edilecek toplam

$$2(1 + 2 + \dots + 2n+1) \quad (4.1)$$

olurdu. Ancak  $V_{\text{der}(1)} = \{1, 2, \dots, n+1, 2n+1\}$  şeklinde seçilen tek dereceli tepelerinin numarası (4.1) toplamında yer almaz. Bu durumda,  $T_n$  tarak grafının doğrusal diyofant denklemi

$$2(1+2+\dots+2n+1)-((1+2+\dots+n+1)+2n+1)= a+a+d+\dots+a+(n-1)d$$

ve buradan

$$2\left(\frac{(2n+1)(2n+1+1)}{2}\right) - \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} + (2n+1)\right) = na + \frac{(n-1)n}{2}d \quad (4.2)$$

ve buradan da

$$\frac{7n^2 + 5n}{2} = na + \frac{n(n-1)}{2}d \quad (4.3)$$

olur. Teorem 2.1 den, (4.3) doğrusal diyofant denkleminde o.b.e.b $\left(n, \frac{n(n-1)}{2}\right) = n$

ve  $n \mid \frac{7n^2 + 5n}{2}$  olduğu için bu denklemin çözümü vardır. (4.3) eşitliğinin her iki

tarafı  $n$  ( $n \neq 0$ ) ile sadeleştirilerek

$$\frac{7n+5}{2} = a + \frac{(n-1)}{2}d \quad (4.4)$$

elde edilir. Teorem 2.2 den, (4.4) denkleminin  $d=7$  için bir özel çözümü  $(a,d)=(6,7)$

dir ve genel çözümü de  $a_g = 6 + \frac{(n-1)}{2}t$  ve  $d_g = 7 - t$  dir. Elde edilen bu

sonuçlarda,  $(a,d)$ -yarı-terssihirli graf tanımındaki  $a,d \in \mathbb{N}^+$  göz önüne alınır ve ayrıca

$T_n$  tarak grafının 3.dereceden regüler kısmı (4.4) doğrusal diyofant denkleminde yer

aldığından, bu regüler kısımda elde edilecek en küçük tepe numarası  $1+2+3=6$  olur,

yani  $a \geq 6$  dır. Tüm bu verilenlerden

$$a_g = 6 + \frac{(n-1)}{2}t \geq 6 \quad \text{ve} \quad d_g = 7 - t > 0 \quad (4.5)$$

eşitsizlikleri bulunur.  $T_n$  tarak grafının tanımından,  $n \geq 2$  olduğu göz önüne alınarak

buradaki ilk eşitsizlikten  $t \geq 0$  ve ikinci eşitsizlikten de  $t < 7$  sonucu elde edilir.

Böylece  $t \in [0,7)$  olur. Teorem 2.2 den, (4.4) denkleminin genel çözümü için

$t=0,1,2,3,4,5,6$  tamsayıları kullanılırsa sırasıyla  $(a,d)$  ikilileri  $(6,7)$ ,  $\left(\frac{n+11}{2}, 6\right)$ ,

$(n+5,5)$ ,  $\left(\frac{3n+9}{2}, 4\right)$ ,  $(2n+4,3)$ ,  $\left(\frac{5n+7}{2}, 2\right)$  ve  $(3n+3,1)$  olur. Elde edilen  $(a,d)$

ikililerine dikkat edilirse  $(a,d)$  yarı-terssihirli graf tanımı gereği,  $d=2,4,6$  için sırasıyla

bulunan  $a = \frac{5n+7}{2}, \frac{3n+9}{2}, \frac{n+11}{2}$  sayılarının tamsayı olabilmesi için  $n$  in tek sayı



olması gerekir. Tüm bu bilgiler kullanılarak yukarıdaki durumları içeren  $T_n$  tarak grafinin  $(a,d)$  yarı-terssihirli numaralanması aşağıdaki gibidir:

a)  $T_n$  Tarak Grafinin  $(a,d)=(3n+3,1)$ -yarı-terssihirli Numaralanması:

$T_n$  tarak grafinin  $f$  ayrıt numaralanması

$$f: \begin{cases} e_i \rightarrow n+1, n+2, n+3, \dots, 2n, 2n+1 & i = 1, 2, 3, \dots, n, n+1 \\ e_i \rightarrow n, n-1, n-2, n-3, \dots, 3, 2, 1 & i = n+2, n+3, n+4, \dots, 2n, 2n+1 \end{cases} \quad (4.6)$$

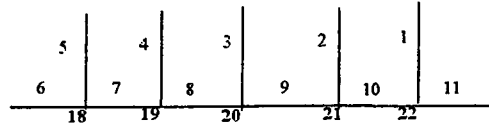
ve bu ayrıt numaralanması yardımıyla elde edilen tepe numaralanması

$$g_f(V) = \{3n+3, (3n+3)+1.1, (3n+3)+2.1, \dots, 3n+3+(n-1).1\} \quad (4.7)$$

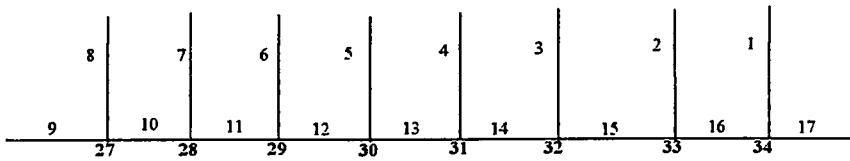
olur. Aşağıda  $T_2, T_3$  ve  $T_8$  tarak graflarının sırasıyla  $(9,1)$ ,  $(18,1)$  ve  $(27,1)$  yarı terssihirli numaralanması verilmiştir.



Şekil 4.1  $T_2$  tarak grafinin  $(9,1)$ -yarı-terssihirli numaralanması



Şekil 4.2  $T_3$  tarak grafinin  $(18,1)$ -yarı-terssihirli numaralanması



Şekil 4.3  $T_8$  tarak grafinin  $(27,1)$ -yarı-terssihirli numaralanması

b)  $n$  tek sayı olmak üzere,  $T_n$  Tarak Grafının  $(a,d)=\left(\frac{5n+7}{2},2\right)$ -yarı-terssihirli

Numaralanması:

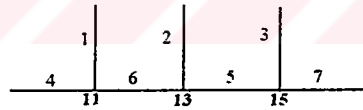
$T_n$  tarak grafının f ayrıt numaralanması

$$f: \begin{cases} e_i \rightarrow n+1, (n+\frac{n+1}{2})+1, n+2, (n+\frac{n+1}{2})+2, n+3, (n+\frac{n+1}{2})+3, \dots, (n+\frac{n+1}{2}), 2n+1 & i=1,2,\dots,n+1 \\ e_i \rightarrow 1,2,3,\dots,n-1,n & i=n+2,n+3,n+4,\dots,2n,2n+1 \end{cases} \quad (4.8)$$

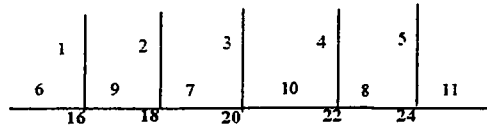
ve bu ayrıt numaralanması yardımıyla elde edilen tepe numaralanması

$$g_f(V) = \left\{ \frac{5n+7}{2}, \frac{5n+7}{2}+1.2, \frac{5n+7}{2}+2.2, \dots, \frac{5n+7}{2}+(n-1).2 \right\} \quad (4.9)$$

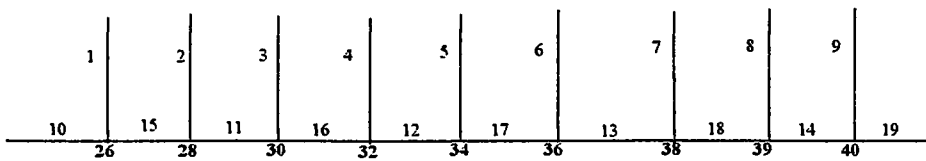
olur. Aşağıda  $T_3, T_5$  ve  $T_9$  tarak graflarının sırasıyla  $(11,2), (16,2)$  ve  $(26,2)$  yarı terssihirli numaralanması verilmiştir.



Şekil 4.4  $T_3$  tarak grafının  $(11,2)$ -yarı-terssihirli numaralanması



Şekil 4.5  $T_5$  tarak grafının  $(16,2)$ -yarı-terssihirli numaralanması



Şekil 4.6  $T_9$  tarak grafının  $(26,2)$ -yarı-terssihirli numaralanması

c)  $T_n$  Tarak Grafının  $(a,d)=(2n+4,3)$  -yarı-terssihirli Numaralanması:

$T_n$  tarak grafının f ayrıt numaralanması

$$f: \begin{cases} e_i \rightarrow n+1, n+2, n+3, n+4, \dots, 2n+1 & i=1, 2, \dots, n+1 \\ e_i \rightarrow 1, 2, 3, \dots, n-1, n & i=n+2, n+3, n+4, \dots, 2n, 2n+1 \end{cases} \quad (4.10)$$

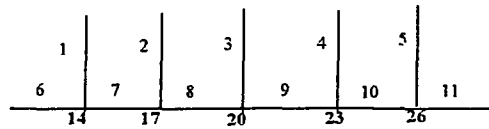
ve bu ayrıt numaralanması yardımıyla elde edilen tepe numaralanması

$$g_r(V) = \{2n+4, (2n+4)+1.3, (2n+4)+2.3, \dots, (2n+4)+(n-1).3\} \quad (4.11)$$

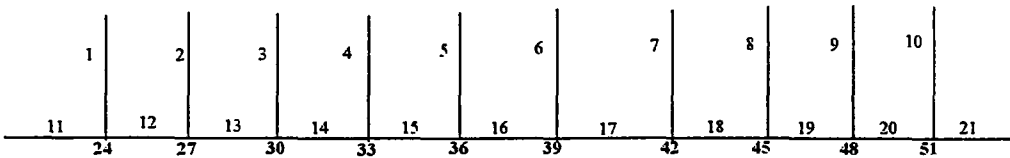
olur. Aşağıda  $T_2, T_5$  ve  $T_{10}$  tarak graflarının sırasıyla  $(8,3)$ ,  $(14,3)$  ve  $(24,3)$  yarı terssihirli numaralanması verilmiştir.



Şekil 4.7  $T_2$  tarak grafının  $(8,3)$ -yarı-terssihirli numaralanması



Şekil 4.8  $T_5$  tarak grafının  $(14,3)$ -yarı-terssihirli numaralanması



Şekil 4.9  $T_{10}$  tarak grafının  $(24,3)$ -yarı-terssihirli numaralanması

d)  $n$  tek sayı olmak üzere,  $T_n$  Tarak Grafının  $(a,d)=\left(\frac{3n+9}{2},4\right)$ -yarı-terssihirli

Numaralanması:

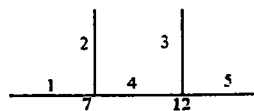
$V_{\text{der}(1)} = \{1, 2, \dots, n+1, 2n+1\}$  olmak üzere  $T_n$  tarak grafının  $(a,d)$ -yarı-terssihirli numaralanmasında elde edilebilen en küçük ve en büyük tepe numarası sırasıyla  $n+5$  ve  $5n+2$  dir, yani  $a \geq n+5$  ve  $a+(n-1).d \leq 5n+2$  olur. Buradaki eşitsizliklerde  $a = \frac{3n+9}{2}$ ,  $d = 4$  sayıları yerlerine yazılırsa; ilk eşitsizlikten  $n \geq 1$  ve ikinci eşitsizlikten  $n \leq 3$  bulunur, bulunan bu iki eşitlikten de  $1 \leq n \leq 3$  elde edilir.  $T_n$  tarak grafi tanımından  $n \geq 2$  olduğu ve numaralama yönteminde  $n$  nin tek sayı olduğu göz önüne alınır;  $T_n$  için  $(a,d)=\left(\frac{3n+9}{2},4\right)$ -yarı-terssihirli numaralanması yalnızca  $n=3$  için bulunabilir. Bu durum Şekil.4.10 da gösterilmiştir.



Şekil 4.10  $T_3$  tarak grafının  $(9,4)$ -yarı-terssihirli numaralanması

e)  $T_n$  Tarak Grafının  $(a,d)=(n+5,5)$ -yarı-terssihirli Numaralanması:

$V_{\text{der}(1)} = \{1, 2, \dots, n+1, 2n+1\}$  olmak üzere  $T_n$  tarak grafının  $(a,d)$ -yarı-terssihirli numaralanmasında elde edilebilecek en küçük ve en büyük tepe numarası sırasıyla  $n+5$  ve  $5n+2$  dir, yani  $a \geq n+5$  ve  $a+(n-1).d \leq 5n+2$  olur. Buradaki eşitsizliklerde  $a = n+5$ ,  $d = 5$  sayıları yerlerine yazılırsa; ilk eşitsizlikten  $n+5 \geq n+5$  (ki bu durum her  $n$  için sağlanacaktır) ve ikinci eşitsizlikten  $n \leq 2$  bulunur,  $T_n$  tarak grafi tanımından  $n \geq 2$  olduğu bilindiğine göre;  $T_n$  için  $(a,d)=(n+5,5)$  -yarı-terssihirli numaralama yalnızca  $n=2$  için bulunabilir. Bu durum Şekil.4.11 de gösterilmiştir.



Şekil 4.11  $T_2$  tarak grafının  $(7,5)$ -yarı-terssihirli numaralanması

f)  $T_n$  Tarak Grafının  $(a,d)=(6,7)$ -yarı-terssihirli Numaralanması:

$V_{\text{der}(1)} = \{1, 2, \dots, n+1, 2n+1\}$  olmak üzere  $T_n$  tarak grafının  $(a,d)$ -yarı-terssihirli numaralanmasında elde edilebilecek en küçük ve en büyük tepe numarası sırasıyla  $n+5$  ve  $5n+2$  dir, yani  $a \geq n+5$  ve  $a+(n-1)d \leq 5n+2$  olur. Buradaki eşitsizliklerde  $a=6$ ,  $d=7$  sayıları yerlerine yazılırsa; ilk eşitsizlikten  $n \leq 1$  bulunur ki bu  $T_n$  tarak grafının tanımına aykırıdır. Dolayısıyla  $T_n$  tarak grafının  $(6,7)$ -yarı-terssihirli numaralanması yoktur.

**Teorem 4.2**  $V_{\text{der}(1)} = \{1, n+1, n+2, \dots, 2n+1\}$  olmak üzere  $1 \leq d \leq 3$  için  $T_n$  tarak grafının  $(a,d)$ -yarı-terssihirli numaralanması vardır.

**İspat:**  $2n+1$  ayrıtlı ve  $2n+2$  tepeli  $T_n$  tarak grafının her ayrıt numarası iki tepede görünseydi o zaman  $2n+2$  tepede elde edilecek toplam (4.1) den  $2(1+2+\dots+2n+1)$  olurdu. Ancak  $V_{\text{der}(1)} = \{1, n+1, n+2, \dots, 2n+1\}$  şeklinde seçilen tek dereceli tepelerinin numarası (4.1) toplamında yer almaz. Bu durumda,  $T_n$  tarak grafının doğrusal diyofant denklemi

$$2(1+2+\dots+2n+1)-(1+n+1+n+2+\dots+2n+1) = a+a+d+\dots+a+(n-1)d$$

ve buradan

$$\frac{5n^2 + 7n}{2} = na + \frac{n(n-1)}{2}d \quad (4.12)$$

olur. Teorem 2.1 den, (4.12) doğrusal diyofant denkleminde  $\text{o.b.e.b}\left(n, \frac{n(n-1)}{2}\right) = n$

ve  $n \mid \frac{5n^2 + 7n}{2}$  olduğu için bu denklemin çözümü vardır. (4.12) eşitliğinin her iki

tarafı  $n$  ( $n \neq 0$ ) ile sadeleştirilerek

$$\frac{5n+7}{2} = a + \frac{(n-1)}{2}d \quad (4.13)$$

elde edilir. Teorem 2.2 den, (4.13) denkleminin  $d=5$  için bir özel çözümü  $(a,d)=(6,5)$  dir ve genel çözümü de  $a_g = 6 + \frac{(n-1)}{2}t$  ve  $d_g = 5 - t$  dir.  $(a,d)$ -yarı-terssihirli graf tanımından  $a,d \in \mathbb{N}^+$  olduğu biliniyor. Ayrıca  $T_n$  tarak grafının 3.dereceden regüler kısmı (4.13) doğrusal diyofant denkleminde yer aldığından bu regüler kısımda elde edilecek en küçük tepe numarası  $1+2+3=6$  olur, yani  $a \geq 6$  dır. Tüm bu verilenlerden

$$a_g = 6 + \frac{(n-1)}{2}t \geq 6 \quad \text{ve} \quad d_g = 5 - t > 0 \quad (4.14)$$

eşitsizlikleri elde edilir.  $T_n$  tarak grafi tanımından,  $n \geq 2$  olduğu göz önüne alınırsa, buradaki ilk eşitsizlikten  $t \geq 0$  ve ikinci eşitsizlikten de  $t < 5$  sonucu bulunur. Böylece  $t \in [0,5)$  olur. Teorem 2.2 den, (4.14) denkleminin genel çözümü için  $t=0,1,2,3,4$  tamsayıları kullanılırsa sırasıyla  $(a,d)$  ikilileri  $(6,5)$ ,  $\left(\frac{n+11}{2}, 4\right)$ ,  $(n+5,3)$ ,  $\left(\frac{3n+9}{2}, 2\right)$  ve  $(2n+4,1)$  olur. Elde edilen  $(a,d)$  ikililerine dikkat edilirse,  $(a,d)$ -yarı-terssihirli graf tanımı gereği  $d=2,4$  için sırasıyla bulunan  $a = \frac{3n+9}{2}, \frac{n+11}{2}$  sayılarının tamsayı olabilmesi için  $n$  in tek sayı olması gerekmektedir. Tüm bu bilgiler kullanılarak yukarıdaki durumları içeren  $T_n$  tarak grafının  $(a,d)$  yarı-terssihirli numaralanması aşağıdaki gibidir:

**a)  $T_n$  Tarak Grafının  $(a,d)=(2n+4,1)$ -yarı-terssihirli Numaralanması:**

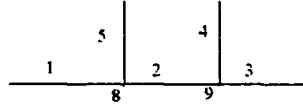
$T_n$  tarak grafının  $f$  ayrıt numaralanması

$$f: \begin{cases} e_i \rightarrow 1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1 & i = 1, 2, 3, \dots, n, n+1 \\ e_i \rightarrow 2n+1, 2n, 2n-1, \dots, n+3, n+2 & i = n+2, n+3, n+4, \dots, 2n, 2n+1 \end{cases} \quad (4.15)$$

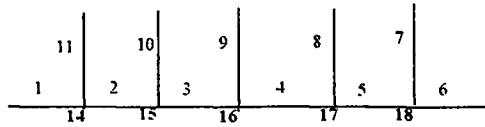
ve bu ayrıt numaralanması yardımıyla elde edilen tepe numaralanması

$$g_f(V) = \{2n + 4, (2n + 4) + 1.1, (2n + 4) + 2.1, \dots, 2n + 4 + (n - 1).1\} \quad (4.16)$$

olur. Aşağıda  $T_2, T_3$  ve  $T_8$  tarak graflarının sırasıyla  $(8,1)$ ,  $(14,1)$  ve  $(20,1)$  yarı terssihirli numaralanması verilmiştir.



Şekil 4.12  $T_2$  tarak grafinin  $(8,1)$ -yarı-terssihirli numaralanması



Şekil 4.13  $T_3$  tarak grafinin  $(14,1)$ -yarı-terssihirli numaralanması



Şekil 4.14  $T_8$  tarak grafinin  $(20,1)$ -yarı-terssihirli numaralanması

b)  $n$  tek sayı olmak üzere,  $T_n$  Tarak Grafinin  $(a,d) = \left(\frac{3n+9}{2}, 2\right)$ -yarı-terssihirli

**Numaralanması:**

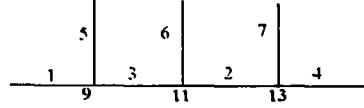
$T_n$  tarak grafinin  $f$  ayrıt numaralanması

$$f : \begin{cases} e_i \rightarrow 1, \frac{n+1}{2} + 1, 2, \frac{n+1}{2} + 2, 3, \frac{n+1}{2} + 3, \dots, \frac{n+1}{2} - 1, n, \frac{n+1}{2}, n+1 & i = 1, 2, \dots, n+1 \\ e_i \rightarrow n+2, n+3, \dots, 2n-1, 2n, 2n+1 & i = n+2, n+3, \dots, 2n, 2n+1 \end{cases} \quad (4.17)$$

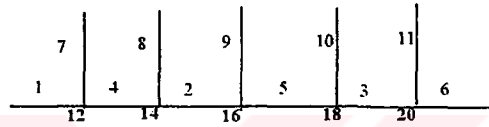
ve bu ayrıt numaralanması yardımıyla elde edilen tepe numaralanması

$$g_r(V) = \left\{ \frac{3n+9}{2}, \frac{3n+9}{2} + 1.2, \frac{3n+9}{2} + 2.2, \dots, \frac{3n+9}{2} + (n-1).2 \right\} \quad (4.18)$$

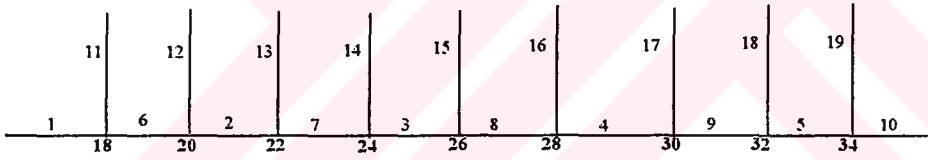
olur. Aşağıda  $T_3, T_5$  ve  $T_9$  tarak graflarının sırasıyla  $(9,2)$ ,  $(12,2)$  ve  $(18,2)$  yarı terssihirli numaralanması verilmiştir.



Şekil 4.15  $T_3$  tarak grafinin  $(9,2)$ -yarı-terssiherli numaralanması



Şekil 4.16  $T_5$  tarak grafinin  $(12,2)$ -yarı-terssiherli numaralanması



Şekil 4.17  $T_9$  tarak grafinin  $(18,2)$ -yarı-terssiherli numaralanması

### c) $T_n$ Tarak Grafinin $(a,d)=(n+5,3)$ -yarı-terssiherli Numaralanması:

$T_n$  tarak grafinin  $f$  ayrıt numaralanması

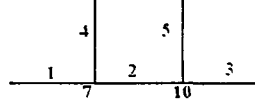
$$f: \begin{cases} e_i \rightarrow 1, 2, 3, \dots, n, n+1 & i = 1, 2, \dots, n+1 \\ e_i \rightarrow n+2, n+3, \dots, 2n, 2n+1 & i = n+2, n+3, n+4, \dots, 2n, 2n+1 \end{cases} \quad (4.19)$$

ve bu ayrıt numaralanması yardımıyla elde edilen tepe numaralanması

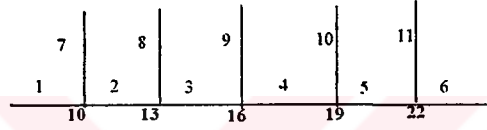


$$g_f(V) = \{n+5, (n+5)+1.3, (n+5)+2.3, \dots, (n+5)+(n-1).3\} \quad (4.20)$$

olur. Aşağıda  $T_2, T_5$  ve  $T_{10}$  tarak graflarının sırasıyla  $(7,3)$ ,  $(10,3)$  ve  $(15,3)$  yarı terssihirli numaralanması verilmiştir.



Şekil 4.18  $T_2$  tarak grafinin  $(7,3)$ -yarı-terssiherli numaralanması



Şekil 4.19  $T_5$  tarak grafinin  $(10,3)$ -yarı-terssiherli numaralanması



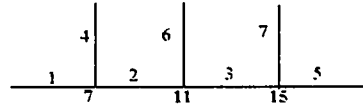
Şekil 4.20  $T_{10}$  tarak grafinin  $(15,3)$ -yarı-terssiherli numaralanması

d)  $n$  tek sayı olmak üzere,  $T_n$  Tarak Grafinin  $(a,d)=\left(\frac{n+11}{2},4\right)$ -yarı-terssiherli

Numaralanması:

$V_{\text{der}(1)} = \{1, n+1, n+2, \dots, 2n+1\}$  olmak üzere  $T_n$  tarak grafinin  $(a,d)$ -yarı-terssiherli numaralanmasında elde edilebilecek en küçük ve en büyük tepe numarası sırasıyla  $n+4$  ve  $5n+1$  dir, yani  $a \geq n+4$  ve  $a+(n-1).d \leq 5n+1$  olur. Buradaki eşitsizliklerde  $a = \frac{n+11}{2}, d = 4$  sayıları yerlerine yazılırsa; ilk eşitsizlikten  $n \leq 3$  ve ikinci eşitsizlikten  $n \geq 1$  bulunur,  $T_n$  tarak grafi tanımından  $n \geq 2$  olduğu bilindiğine

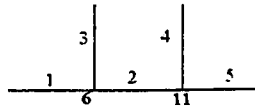
göre ikinci eşitsizlikten bulunan  $n \geq 1$  sonucu 2 den büyük veya 2 ye eşit olan her  $n$  için sağlanır. Böylece ilk eşitsizlikten bulunan sonuçla  $T_n$  tarak grafi tanımından,  $2 \leq n \leq 3$  elde edilir,  $n$  nin tek sayı olduğu göz önünde alındığında  $(a,d) = (\frac{n+11}{2}, 4)$  - yarı-terssihirli numaralama yalnızca  $n=3$  için bulunabilir. Bu durum Şekil.4.21 de gösterilmiştir.



Şekil 4.21  $T_3$  tarak grafinin  $(7,4)$ -yarı-terssihirli numaralanması

**e)  $T_n$  Tarak Grafinin  $(a,d)=(6,5)$ -yarı-terssihirli Numaralanması:**

$V_{\text{der}(1)} = \{1, n+1, n+2, \dots, 2n+1\}$  olmak üzere  $T_n$  tarak grafinin  $(a,d)$ -yarı-terssihirli numaralanmasında elde edilebilecek en küçük ve en büyük tepe numarası sırasıyla  $n+4$  ve  $5n+1$  dir, yani  $a \geq n+4$  ve  $a+(n-1).d \leq 5n+1$  olur. Buradaki eşitsizliklerde  $a = 6, d = 5$  sayıları yerlerine yazılırsa; ilk eşitsizlikten  $n \leq 2$  ve ikinci eşitsizlikten  $1 \geq 1$  (ki her durumda  $1=1$  dir) bulunur,  $T_n$  tarak grafi tanımından  $n \geq 2$  olduğu bilindiğine göre ilk eşitsizlikten bulunan sonuçla yalnızca  $n=2$  için  $T_n$  tarak grafinin  $(a,d)=(6,5)$  -yarı-terssihirli numaralanması elde edilir. Bu durum Şekil.4.22 de gösterilmiştir.



Şekil 4.22  $T_2$  tarak grafinin  $(6,5)$ -yarı-terssihirli numaralanması

## 5. $P_n$ YOLU ve $C_n$ ÇEVRESİNİN $(a,d)$ -TERSİHİRLİ NUMARALANMASI

**Teorem 5.1**  $n \geq 2$  ve  $n$  çift sayı olmak üzere, her  $P_n$  yolunun  $\left(\frac{n}{2}, 1\right)$ -terssihirli numaralanması vardır.

**İspat:**  $n$ -ayrıklı,  $n+1$  tepeli  $P_n$  yolunun doğrusal diyofant denklemi;

$$2.(1 + 2 + \dots + n) = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + nd) \quad (5.1)$$

burada

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n.(n+1)}{2} \quad (5.2)$$

eşitliğinden faydalanarak ve gerekli sadeleştirmeleri yaparak

$$2n(n+1) = 2(n+1)a + n(n+1)d \quad (5.3)$$

bulunur. Teorem 2.1 den (5.3) doğrusal diyofant denkleminin çözümü için o.b.e.b( $2(n+1), n(n+1)$ )  $| 2n(n+1)$  olmalıdır. o.b.e.b( $2(n+1), n(n+1)$ )= $n+1$  ve  $n+1 | 2n(n+1)$  olduğundan (5.3) denkleminin çözümü vardır. (5.3) eşitliğinin her iki tarafı  $n+1$  ( $n \neq 0$  ve  $n+1 \neq 0$ ) ile sadeleştirilerek bu denklem

$$2n = 2a + nd \quad (5.4)$$

şeklinde yazılır. Teorem 2.2 den, (5.4) denkleminin çözümü  $(a,d) = \left(\frac{n}{2}, 1\right)$  dir ve

tektir:  $a = \frac{n}{2}$  ve  $d=1$  (5.4) denklemini sağlar. Bu denklemin genel çözümü ise

$a_g = \frac{n}{2} + nt$  ve  $d_g = 1 - 2t$  olur,  $(a,d)$ -terssihirli graf tanımından  $a, d \in \mathbb{N}^+$  dir, o halde

$$\frac{n}{2} + nt > 0 \quad \text{ve} \quad 1 - 2t > 0 \quad (5.5)$$

olmalıdır. Burada ilk eşitsizlikten  $t > -\frac{1}{2}$  ve ikinci eşitsizlikten  $t < \frac{1}{2}$  olur, yani  $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$  dir. Bu eşitsizliği sağlayan bir tek  $t \in \mathbb{Z}$  tamsayısı vardır ve bu tamsayı  $t=0$  dir. Bu sonuç  $a_g$  ve  $d_g$  de yerine yazılırsa :  $a = \frac{n}{2}$  ve  $d=1$  in tek olduğu görülür.  $(a,d)$ -terssihirli graf tanımı gereği  $a,d \in \mathbb{N}^+$  olması için  $a = \frac{n}{2}$  nin tamsayı olması yani  $n$  in çift tamsayı olması gerekir.

Böylece  $n$  çift sayı olmak üzere  $P_n$  yolunun  $\left(\frac{n}{2}, 1\right)$ -terssihirli numaralanması aşağıdaki gibidir:

$P_n$  yolunun f ayrıt numaralanması

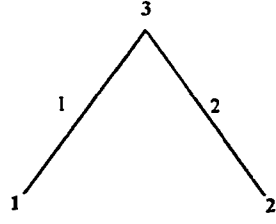
$$f : \begin{cases} e_i \rightarrow \frac{n}{2}, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}-2, \frac{n}{2}-3, \dots, 2, 1 & i = 1, 3, 5, \dots \\ e_i \rightarrow n, n-1, n-2, n-3, \dots, \frac{n}{2}+2, \frac{n}{2}+1 & i = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (5.6)$$

ve bu ayrıt numaralanması yardımıyla elde edilen tepe numaralanması ise

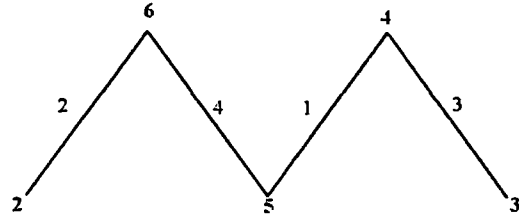
$$g_f(V) = \left\{ \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1, 1, \frac{n}{2}+1, 2, \dots, \frac{n}{2} + ((n+1)-1), 1 \right\} = \left\{ \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, \frac{n}{2}+n \right\} \quad (5.7)$$

olur.

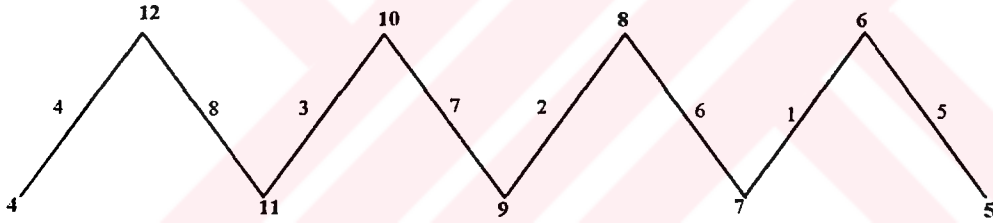
Aşağıda  $P_2$ ,  $P_4$ ,  $P_8$  ve  $P_{12}$  yollarının sırasıyla  $(1,1)$ ,  $(2,1)$ ,  $(4,1)$  ve  $(6,1)$  terssihirli numaralanmaları verilmiştir:



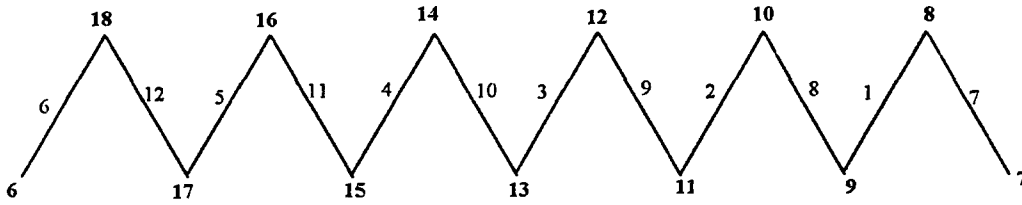
Şekil 5.1  $P_2$  yolunun (1,1)-terssihirli numaralanması



Şekil 5.2  $P_4$  yolunun (2,1)-terssihirli numaralanması



Şekil 5.3  $P_8$  yolunun (4,1)-terssihirli numaralanması



Şekil 5.4  $P_{12}$  yolunun (6,1)-terssihirli numaralanması

**Teorem 5.2**  $n \geq 3$  ve  $n$  tek sayı olmak üzere, her  $C_n$  çevresinin  $\left(\frac{n+3}{2}, 1\right)$ -

terssihirli numaralanması vardır.

**İspat:**  $n$ -ayrıklı,  $n$  tepeli  $C_n$  çevresinin doğrusal diyofant denklemi;

$$2.(1 + 2 + \dots + n) = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a+(n-1)d) \quad (5.8)$$

burada (5.2) eşitliğinden faydalanarak ve gerekli sadeleştirmeleri yaparak

$$n(n+1) = na + \frac{(n-1)n}{2}d \quad (5.9)$$

bulunur. Teorem 2.1 den, o.b.e.b( $n, \frac{(n-1)n}{2}$ )= $n$  ve  $n | n(n+1)$  olduğundan (5.9)

doğrusal diyofant denkleminin çözümü vardır. (5.9) eşitliğinin her iki tarafı  $n$  ( $n \neq 0$ )

ile sadeleştirilerek elde edilen denklemin bir özel çözümü Teorem 2.2 den,  $d=2$  için

$(a,d)=(2,2)$  dir. Bu denklemin genel çözümü ise;  $a_g = 2 + \frac{(n-1)}{2}t$  ve  $d_g = 2-t$  olur,

$(a,d)$ -terssihirli graf tanımından  $a,d \in \mathbb{N}^+$  dir, o halde

$$2 + \frac{(n-1)}{2}t > 0 \quad \text{ve} \quad 2-t > 0 \quad (5.10)$$

bulunur. Buradaki ilk eşitsizlikten  $t > -\frac{4}{n-1}$  ve ikinci eşitsizlikten  $t < 2$  elde edilir.

$C_n$  çevresinin tanımından  $n \geq 3$  olduğu ilk eşitsizlikte yerine yazılırsa  $t > -2$  bulunur.

Böylece  $t \in (-2, 2)$  olur. Teorem 2.2 den (5.9) denkleminin genel çözümü için

$t = -1, 0, 1$  tamsayıları kullanılırsa sırasıyla  $(a,d)$  ikilileri  $\left(\frac{5-n}{2}, 3\right)$ ,  $(2,2)$  ve  $\left(\frac{n+3}{2}, 1\right)$

olarak bulunur.

$(a,d)$  terssihirli numaralanma tanımında  $f:E \rightarrow \{1,2,\dots,n\}$  olmak üzere  $C_n$

çevresinin her tepesinin derecesi birbirine eşit ve  $\text{der}(v_i) = 2$   $i=1,2,\dots,n$  dir.

Numaralama işlemi ile herhangi bir tepede elde edilebilecek en küçük numara  $1+2=3$

Numaralama işlemi ile herhangi bir tepede elde edilebilecek en küçük numara  $1+2=3$  olur yani  $a \geq 3$  tür. Bu ise  $t = -1, 0$  durumlarıyla çelişmektedir (  $t = -1$  için  $\frac{5-n}{2} \geq 3$  ise buradan  $n \leq -1$  olur.  $t = 0$  ise  $a = 2$  dir, yani  $a = 2 \geq 3$  olamaz). Sonuç olarak  $t = -1, 0$  için  $C_n$  çevresinin  $(a, d)$ -terssihirli numaralanması yoktur.

$C_n$  çevresinin  $\left(\frac{n+3}{2}, 1\right)$ -terssihirli numaralanması vardır. Ancak  $(a, d)$  terssihirli numaralanma tanımı gereği  $a = \frac{n+3}{2} \in \mathbb{N}^+$  olacağından;  $n$  tek sayı olmalıdır. Böylece  $n$  tek sayı olmak üzere,  $C_n$  çevresinin  $\left(\frac{n+3}{2}, 1\right)$  terssihirli numaralanması aşağıdaki gibi olur:

$C_n$  çevresinin  $f$  ayrıt numaralanması;

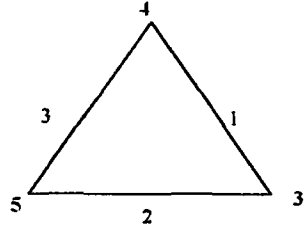
$$f : \begin{cases} e_i \rightarrow 1, 2, 3, \dots, \frac{n+3}{2} - 2, \frac{n+3}{2} - 1 & i = 1, 3, 5, \dots \\ e_i \rightarrow \frac{n+3}{2}, \frac{n+3}{2} + 1, \frac{n+3}{2} + 2, \dots, n - 1, n & i = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (5.12)$$

ve bu ayrıt numaralanmasının yardımıyla elde edilen tepe numaralanması ise

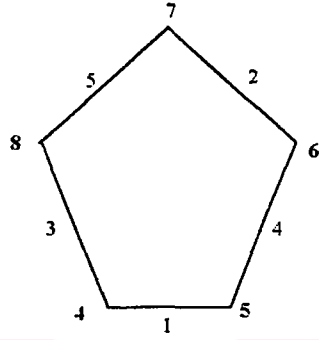
$$g_f(V) = \left\{ \frac{n+3}{2}, \frac{n+3}{2} + 1.1, \frac{n+3}{2} + 1.2, \dots, \frac{n+3}{2} + (n-1).1 \right\} \quad (5.13)$$

olur.

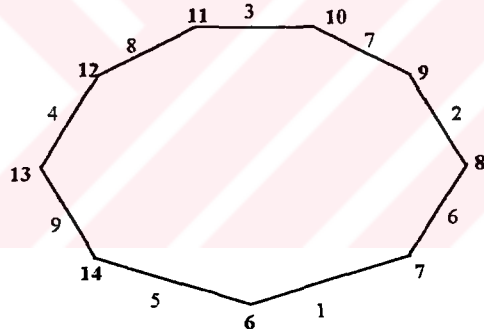
Aşağıda  $C_3$ ,  $C_5$ ,  $C_7$  ve  $C_{13}$  çevrelerinin sırasıyla  $(3, 1)$ ,  $(4, 1)$ ,  $(6, 1)$  ve  $(8, 1)$  terssihirli numaralanmaları verilmiştir:



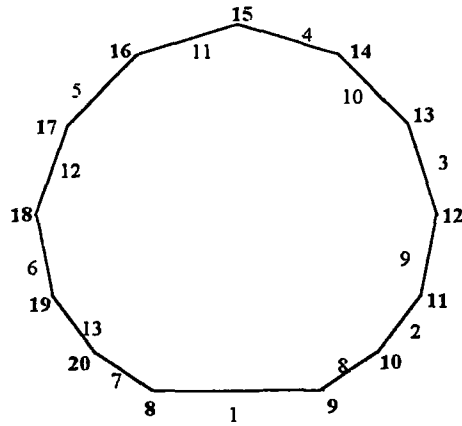
Şekil 5.5  $C_3$  çevresinin (3,1)-terssihirli numaralanması



Şekil 5.6  $C_5$  çevresinin (4,1)-terssihirli numaralanması



Şekil 5.7  $C_9$  çevresinin (6,1)-terssihirli numaralanması



Şekil 5.8  $C_{13}$  çevresinin (8,1)-terssihirli numaralanması



## 6. P(n) PRİZMA GRAFININ (a,d)-TERSSİHİRLİ NUMARALANMASI

**Teorem 6.1**  $n \geq 3$  olmak üzere, her P(n) prizma grafinin (a,d)-terssihirli numaralanması vardır.

**İspat:**  $|V|=2n$  tepeli ve  $|E|=3n$  ayrıtlı P(n) prizma grafinin doğrusal diyofant denklemi;

$$2.(1+2+\dots+3n)=a+a+d+a+2d+a+3d+\dots+a+(2n-1)d \quad (6.1)$$

dir ve burada  $1+2+3+\dots+3n = \frac{3n.(3n+1)}{2}$  eşitliğinden faydalanarak, gerekli sadeleştirmeleri yaparak

$$3n(3n+1)=2na+n(2n-1)d \quad (6.2)$$

elde edilir. Teorem 2.1 den (6.2) doğrusal diyofant denkleminin çözümü için o.b.e.b(2n,n(2n-1)) | 3n(3n+1) olmalıdır. o.b.e.b(2n,n(2n-1))=n ve  $n | 3n(3n+1)$  olduğundan (6.2) denkleminin çözümü vardır. (6.2) eşitliğinin her iki tarafı önce n ( $n \neq 0$ ) ile sadeleştirilerek ve sonra 2 ile bölünerek

$$\frac{3}{2}(3n+1)=a+\frac{2n-1}{2}d$$

şeklinde yazılır. Yazılan bu eşitlikten ve Teorem 2.2 den (6.2) denkleminin  $d=4$  için bir özel çözümü  $(a,d)=\left(\frac{n+7}{2},4\right)$  dir ve genel çözümü de  $a_g = \frac{n+7}{2} + \frac{2n-1}{2}t$  ve  $d_g = 4-t$  olarak bulunur. P(n) prizma grafinin tanımından P(n) nin 3.dereceden regüler graf olduğu biliniyor ve dolayısıyla P(n) de elde edilebilecek en küçük tepe numarası  $1+2+3=6$  olur. Ayrıca (a,d) terssihirli graf tanımından  $a,d \in \mathbb{N}^+$  olduğu da dikkate alınır

$$\frac{n+7}{2} + \frac{2n-1}{2}t \geq 6 \text{ ve } 4-t > 0 \quad (5.3)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (5.3) deki ilk eşitsizlikten  $t \geq \frac{5-n}{2n-1}$  ve ikinci eşitsizlikten  $t < 4$  bulunur. Hipotezde  $n \geq 3$  olduğundan, bulunan ilk eşitsizlikte  $n \rightarrow \infty$  için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5-n}{2n-1} \text{ ve } t \geq -\frac{1}{2}$$

bulunur. Böylece  $t \in \left[-\frac{1}{2}, 4\right)$  olur. Teorem 2.2 den (6.2) denkleminin genel çözümü

için  $t=0,1,2,3$  tamsayıları kullanılırsa, sırasıyla  $(a,d)$  ikilileri  $\left(\frac{n+7}{2}, 4\right), \left(\frac{3n+6}{2}, 3\right),$

$\left(\frac{5(n+1)}{2}, 2\right)$  ve  $\left(\frac{7n+4}{2}, 1\right)$  olarak bulunur. Burada;  $\frac{n+7}{2}, \frac{5(n+1)}{2}$  rasyonel

kesirlerinin tamsayı olması için  $n$  nin tek sayı olması gerekir ve  $\frac{3n+6}{2}, \frac{7n+4}{2}$

rasyonel kesirlerinin tamsayı olması için de  $n$  nin çift sayı olması gerekir. Yani,  $P(n)$  prizma grafi için; eğer  $n$  çift sayı ise  $d$  tek sayıdır, eğer  $n$  tek sayı ise  $d$  çift sayıdır sonucuna ulaşılır. Yukarıdaki durumları içeren  $P(n)$  prizma grafinin  $(a,d)$ -terssihirli numaralanmaları aşağıda verilmiştir.

**a)  $n$  çift sayı olmak üzere,  $P(n)$  Prizma Grafinin  $\left(\frac{7n+4}{2}, 1\right)$ -terssihirli**

**Numaralanması:**

$P(n)$  prizma grafinin  $\left(\frac{7n+4}{2}, 1\right)$ -terssihirli numaralanması  $n \equiv 0 \pmod{4}$  ve

$n \equiv 2 \pmod{4}$  olmak üzere iki durumda incelenir:

**1.Durum.  $n \equiv 0 \pmod{4}$  olsun:**

$P(n)$  prizma grafinin  $n$  uzunluklu iç çevresinin  $\{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_nv_1\}$  ayrıtlar kümesinin elemanları  $v_1, v_2$  den başlayarak pozitif yönde

$$2n + \frac{n}{2}, 2n + (\frac{n}{2} - 1), 2n + (\frac{n}{2} - 2), \dots, 2n + 2, 2n + 1, \frac{3n}{2} + 1, \frac{3n}{2} + 2, \dots, \frac{3n}{2} + (\frac{n}{2} - 1), \frac{3n}{2} + \frac{n}{2}$$

şeklinde numaralansın.  $P(n)$  prizma grafinin  $n$  uzunluklu dış çevresinin  $\{u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_nu_1\}$  ayrıtlar kümesinin elemanları  $u_1, u_2$  den başlayarak pozitif yönde

$$\frac{n}{2}, \frac{5n}{2} + 2, \frac{n}{2} - 2, \frac{5n}{2} + 4, \frac{n}{2} - 4, \frac{5n}{2} + 6, \frac{n}{2} - 6, \dots, 2, 3n - 1, 3, 3n - 3, 5, \dots, \frac{n}{2} - 5, \frac{5n}{2} + 5, \frac{n}{2} - 3, \frac{5n}{2} + 3, \frac{n}{2} - 1, \frac{5n}{2} + 1$$

şeklinde numaralansın.  $P(n)$  prizma grafinin iç ve dış çevresini birleştiren  $\{u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n\}$  ayrıtlar kümesinin elemanları ise  $u_1, v_1$  den başlayarak pozitif yönde

$$\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 3, \dots, \frac{n}{2} + \frac{n}{2}, n + \frac{n}{2}, n + (\frac{n}{2} - 1), n + (\frac{n}{2} - 2), \dots, n + 2, n + 1$$

şeklinde numaralansın. Böyle bir numaralama işlemi ile  $P(n)$  prizma grafinin tepelerinde

$$v_{\frac{n}{2}+2} = \frac{7n+4}{2} + n.1, v_{\frac{n}{2}+3} = \frac{7n+4}{2} + (n+1).1, v_{\frac{n}{2}+4} = \frac{7n+4}{2} + (n+2).1, \dots,$$

$$v_3 = \frac{7n+4}{2} + (2n-2).1, v_2 = \frac{7n+4}{2} + (2n-1).1, \dots, v.b.$$

ve

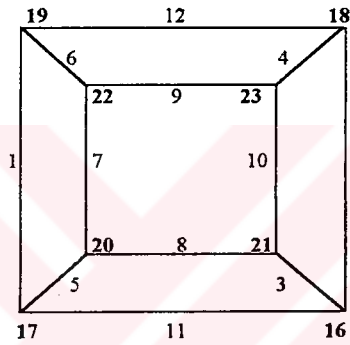
$$u_1 = \frac{7n+4}{2}, u_2 = \frac{7n+4}{2} + 2, u_3 = \frac{7n+4}{2} + 1, u_4 = \frac{7n+4}{2} + 4, \dots,$$

$$u_{\frac{n}{2}+1} = \frac{7n+4}{2} + (n-1).1, u_{\frac{n}{2}+2} = \frac{7n+4}{2} + (n-3).1, \dots, v.b$$

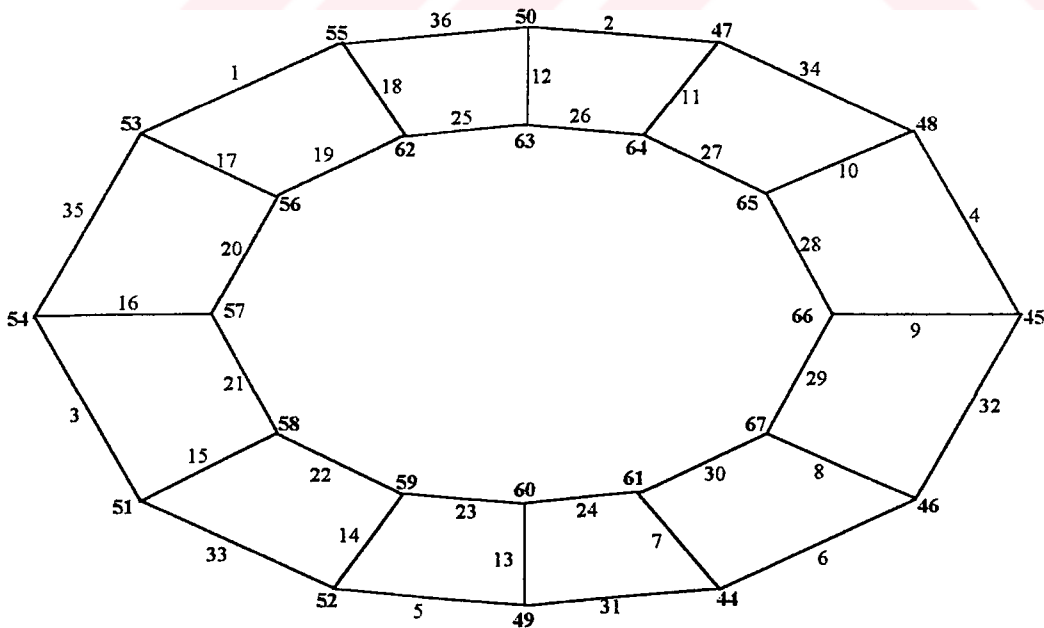
toplamları elde edilir ki bu toplamlar  $n$  çift sayı ve  $n \equiv 0 \pmod{4}$  olmak üzere  $P(n)$

prizma grafinin  $\left(\frac{7n+4}{2}, 1\right)$ -terssihirli numaralandığını gösterir.

Şekil 6.1 ve Şekil 6.2 de sırasıyla  $P(4)$  prizma grafinin  $(16,1)$ -terssihirli ve  $P(12)$  prizma grafinin  $(44,1)$ -terssihirli numaralanması gösterilmiştir.



Şekil 6.1  $P(4)$  prizma grafinin  $(16,1)$ -terssihirli numaralanması



Şekil 6.2  $P(12)$  prizma grafinin  $(44,1)$ -terssihirli numaralanması

## 2.Durum. $n \equiv 2 \pmod{4}$ olsun:

$P(n)$  prizma grafinin  $n$  uzunluklu iç çevresinin  $\{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_nv_1\}$  ayrıtlar kümesinin elemanları  $v_1v_2$  den başlayarak pozitif yönde

$$\frac{n}{2}+2n, \frac{n}{2}+(2n-1), \frac{n}{2}+(2n-2), \dots, \frac{n}{2}+[2n-(n-2)], \frac{n}{2}+[2n-(n-1)]$$

şeklinde numaralansın.  $P(n)$  prizma grafinin  $n$  uzunluklu dış çevresinin  $\{u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_nu_1\}$  ayrıtlar kümesinin elemanları  $u_1u_2$  den başlayarak pozitif yönde

$$\frac{n}{2}, \frac{5n}{2}+2, \frac{n}{2}-2, \frac{5n}{2}+4, \frac{n}{2}-4, \dots, 3, 3n-1, 1, 3n, 2, 3n-2, 4, \dots, \frac{5n}{2}+3, \frac{n}{2}-1, \frac{5n}{2}+1$$

şeklinde numaralansın.  $P(n)$  prizma grafinin iç ve dış çevresini birleştiren  $\{u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n\}$  ayrıtlar kümesinin elemanları ise  $u_1v_1$  den başlayarak pozitif yönde

$$\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \frac{n}{2}+3, \dots, \frac{n}{2}+(n-2), \frac{n}{2}+(n-1), \frac{n}{2}+n$$

şeklinde numaralansın. Böyle bir numaralama işlemi ile  $P(n)$  prizma grafinin tepelerinde

$$v_2 = \frac{7n+4}{2} + (2n-1).1, v_3 = \frac{7n+4}{2} + (2n-2).1, v_4 = \frac{7n+4}{2} + (2n-3).1, \dots,$$

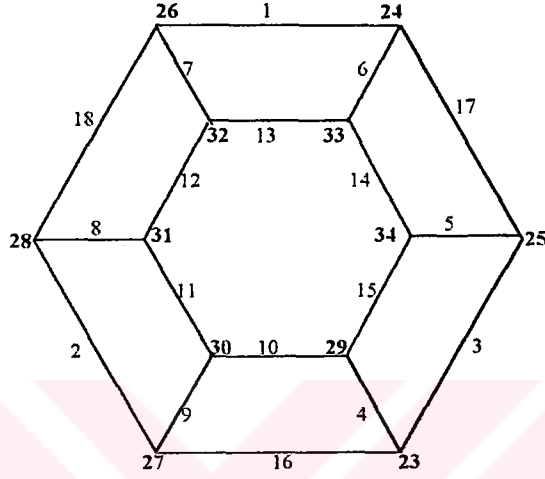
$$v_n = \frac{7n+4}{2} + [2n-(n-1)].1, v_1 = \frac{7n+4}{2} + (2n-n).1$$

$$u_1 = \frac{7n+4}{2}, u_2 = \frac{7n+4}{2} + 2, u_3 = \frac{7n+4}{2} + 1, \dots,$$

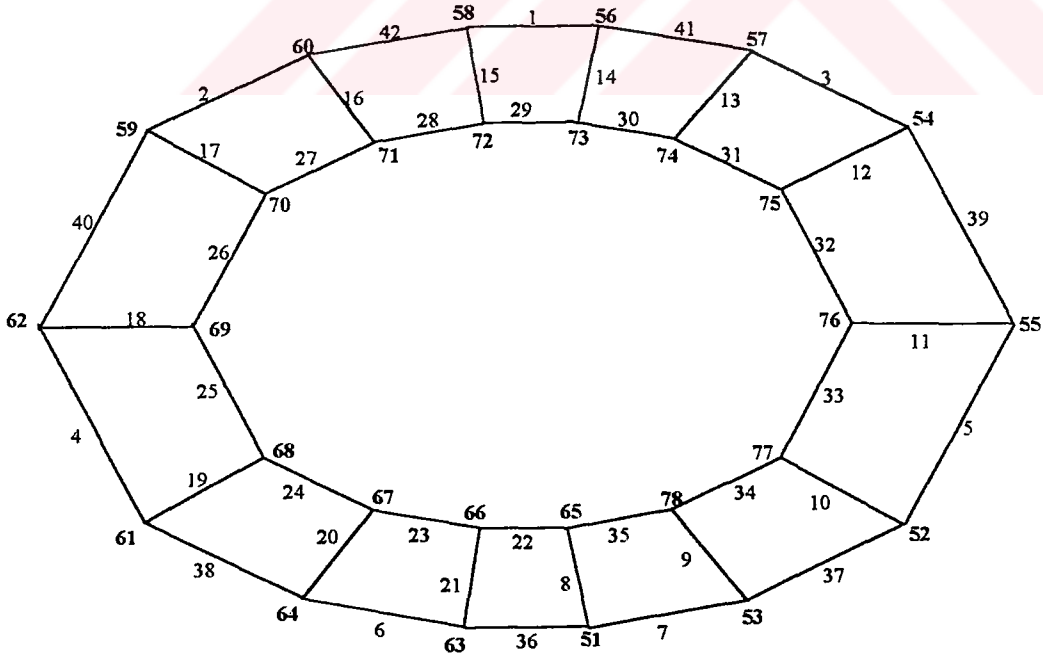
$$u_{n-1} = \frac{7n+4}{2} + (n-1).1, u_n = \frac{7n+4}{2} + (n-2).1.$$

toplamları elde edilir ki bu toplamlar  $n$  çift sayı ve  $n \equiv 2 \pmod{4}$  olmak üzere  $P(n)$  prizma grafının  $\left(\frac{7n+4}{2}, 1\right)$ -terssihirli numaralandığını gösterir.

Şekil 6.3 ve Şekil 6.4 de sırasıyla  $P(6)$  prizma grafının  $(23,1)$ -terssihirli ve  $P(14)$  prizma grafının  $(51,1)$ -terssihirli numaralanması gösterilmiştir.



Şekil 6.3  $P(6)$  prizma grafının  $(23,1)$ -terssihirli numaralanması



Şekil 6.4  $P(14)$  prizma grafının  $(51,1)$ -terssihirli numaralanması

b)  $n$  tek sayı olmak üzere,  $P(n)$  Prizma Grafının  $\left(\frac{5(n+1)}{2}, 2\right)$ -terssihirli

Numaralanması:

$P(n)$  prizma grafının  $n$  uzunluklu iç çevresinin  $\{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_nv_1\}$  ayrıtlar kümesinin elemanları  $v_1v_2$  den başlayarak pozitif yönde

$$1, \frac{n+1}{2}+1, 2, \frac{n+1}{2}+2, 3, \frac{n+1}{2}+3, \dots, \frac{n+1}{2}-1, n, \frac{n+1}{2}$$

şeklinde numaralansın.  $P(n)$  prizma grafının  $n$  uzunluklu dış çevresinin  $\{u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_nu_1\}$  ayrıtlar kümesinin elemanları  $u_1u_2$  den başlayarak pozitif yönde

$$n+1, n+1+\frac{n+1}{2}, n+2, n+2+\frac{n+1}{2}, n+3, n+3+\frac{n+1}{2}, \dots, n-1+\frac{n+1}{2}, 2n, n+\frac{n+1}{2}$$

şeklinde numaralansın.  $P(n)$  prizma grafının iç ve dış çevresini birleştiren  $\{u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n\}$  ayrıtlar kümesinin elemanları ise  $u_1v_1$  den başlayarak pozitif yönde

$$2n+1, 2n+2, 2n+3, \dots, 3n-3, 3n-2, 3n-1, 3n$$

şeklinde numaralansın. Böyle bir numaralama ile  $P(n)$  prizma grafının tepelerinde

$$v_1 = \frac{5(n+1)}{2}, v_2 = \frac{5(n+1)}{2} + 2, v_3 = \frac{5(n+1)}{2} + 2.2, v_4 = \frac{5(n+1)}{2} + 3.2, \\ \dots, v_n = \frac{5(n+1)}{2} + (n-1).2$$

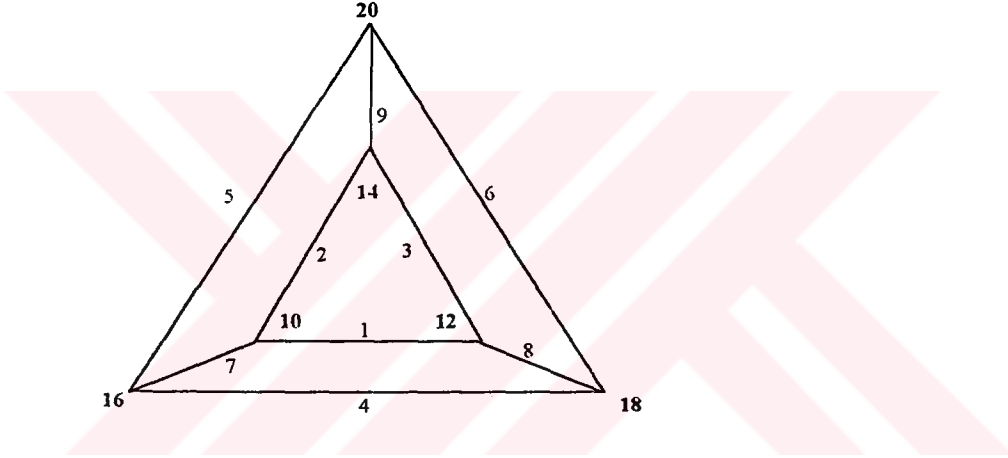
ve

$$u_1 = \frac{5(n+1)}{2} + n \cdot 2, \quad u_2 = \frac{5(n+1)}{2} + (n+1) \cdot 2, \quad u_3 = \frac{5(n+1)}{2} + (n+2) \cdot 2,$$

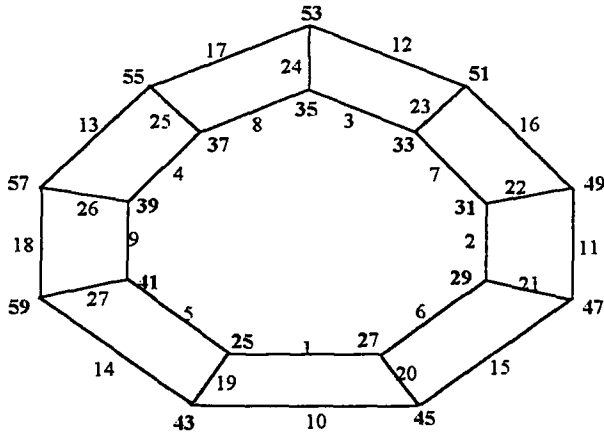
$$\dots, u_{n-1} = \frac{5(n+1)}{2} + (2n-2) \cdot 2, \quad u_n = \frac{5(n+1)}{2} + (2n-1) \cdot 2$$

toplamları elde edilir ki bu toplamlar  $P(n)$  prizma grafinin  $\left(\frac{5(n+1)}{2}, 2\right)$ -terssihirli numaralandığını gösterir.

Şekil 6.5 ve Şekil 6.6 da sırasıyla  $P(3)$  prizma grafinin  $(10,2)$ -terssihirli ve  $P(9)$  prizma grafinin  $(25,2)$ -terssihirli numaralanması gösterilmiştir.



Şekil 6.5  $P(3)$  prizma grafinin  $(10,2)$ -terssihirli numaralanması



Şekil 6.6  $P(9)$  prizma grafinin  $(25,2)$ -terssihirli numaralanması



c)  $n$  çift sayı olmak üzere,  $P(n)$  Prizma Grafının  $\left(\frac{3n+6}{2}, 3\right)$ -terssihirli

Numaralanması:

$P(n)$  prizma grafının  $\left(\frac{3n+6}{2}, 3\right)$ -terssihirli numaralanması  $n \equiv 0 \pmod{4}$  ve  $n \equiv 2$

$\pmod{4}$  olmak üzere iki durumda incelenir:

**1.Durum.  $n \equiv 0 \pmod{4}$  olsun:**

$P(n)$  prizma grafının  $n$  uzunluklu iç çevresinin  $\{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_nv_1\}$  ayrıtlar kümesinin elemanları  $v_1v_2$  den başlayarak pozitif yönde

$3n-1, 3n-3, 3n-5, \dots, 3n-(n-1), 3n-(n-2), 3n-(n-4), \dots, 3n-4, 3n-2, 3n$

şeklinde numaralansın.  $P(n)$  prizma grafının  $n$  uzunluklu dış çevresinin  $\{u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_nu_1\}$  ayrıtlar kümesinin elemanları  $u_1u_2$  den başlayarak pozitif yönde

$\frac{3n}{2}-1, \frac{3n}{2}-3, \frac{3n}{2}-5, \dots, \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \frac{n}{2}+4, \dots, \frac{3n}{2}-2, \frac{3n}{2}$

şeklinde numaralansın.  $P(n)$  prizma grafının iç ve dış çevresini birleştiren  $\{u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n\}$  ayrıtlar kümesinin elemanları ise  $u_2v_2$  den başlayarak pozitif yönde

$\frac{3n}{2}+1, 2, \frac{3n}{2}+3, 4, \frac{3n}{2}+5, 6, \dots, \frac{3n}{2}+(\frac{n}{2}-1), \frac{n}{2}, 2n, \frac{n}{2}-1, 2n-2, \frac{n}{2}-3, \dots, 5,$

$\frac{3n}{2}+4, 3, \frac{3n}{2}+2, 1$

şeklinde numaralansın. Böyle bir numaralama işlemi ile  $P(n)$  prizma grafının dış çevresinin tepelerinde

$$\frac{3n+6}{2}, \frac{3n+6}{2} + 1.3, \frac{3n+6}{2} + 2.3, \frac{3n+6}{2} + 3.3, \dots, \frac{3n+6}{2} + (n-1).3$$

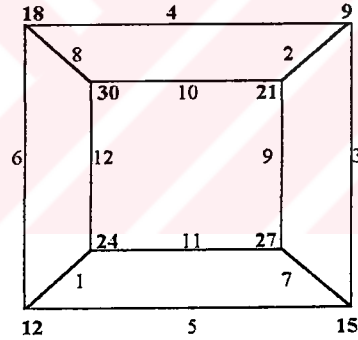
toplamları ve P(n) prizma grafinin iç çevresinin tepelerinde

$$\frac{3n+6}{2} + n.3, \frac{3n+6}{2} + (n+1).3, \frac{3n+6}{2} + (n+2).3, \frac{3n+6}{2} + (n+3).3, \dots, \frac{3n+6}{2} + (2n-1).3$$

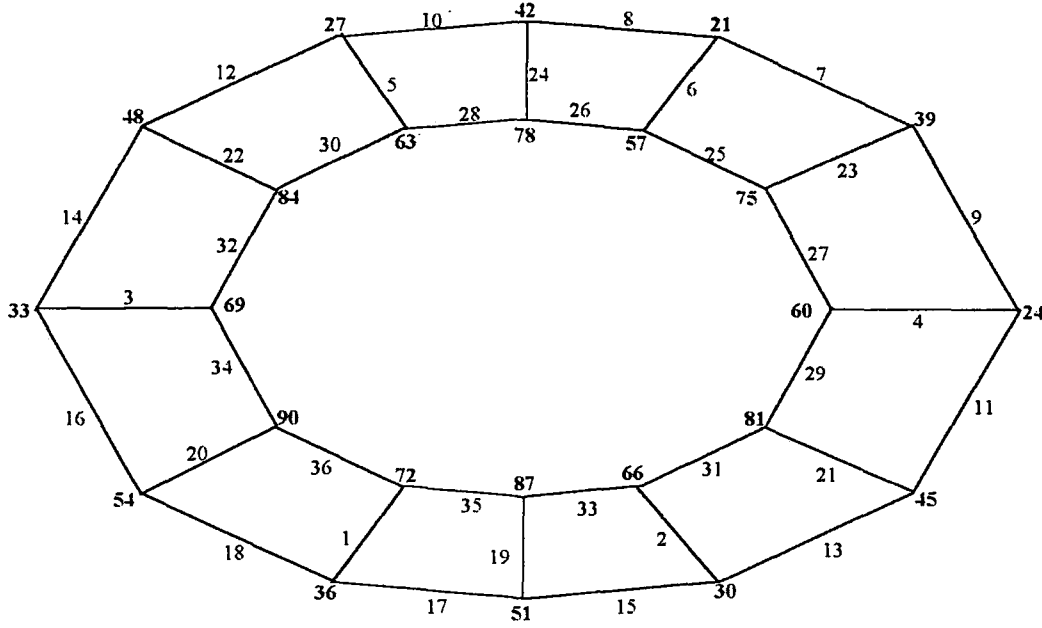
toplamları elde edilir ki bu sonuçlar n çift sayı ve  $n \equiv 0 \pmod{4}$  olmak üzere P(n)

prizma grafinin  $\left(\frac{3n+6}{2}, 3\right)$ -terssihirli numaralandığını gösterir.

Şekil 6.7 ve Şekil 6.8 de sırasıyla P(4) prizma grafinin (9,3)-terssihirli ve P(12) prizma grafinin (21,3)-terssihirli numaralanması gösterilmiştir.



Şekil 6.7 P(4) prizma grafinin (9,3)-terssihirli numaralanması



Şekil 6.8 P(12) prizma grafının (21,3)-terssihirli numaralanması

**2.Durum.  $n \equiv 2 \pmod{4}$  olsun:**

P(n) prizma grafının n uzunluklu iç çevresinin  $\{v_1, v_2, v_2, v_3, \dots, v_n, v_1\}$  ayrıtlar kümesinin elemanları  $v_1, v_2$  den başlayarak pozitif yönde

$$3n-1, 3n-3, 3n-5, \dots, 3n-(n-1), 3n-(n-2), 3n-(n-4), \dots, 3n-4, 3n-2, 3n$$

şeklinde numaralansın. P(n) prizma grafının n uzunluklu dış çevresinin  $\{u_1, u_2, u_2, u_3, \dots, u_n, u_1\}$  ayrıtlar kümesinin elemanları  $u_1, u_2$  den başlayarak pozitif yönde

$$\frac{3n}{2}-1, \frac{3n}{2}-3, \frac{3n}{2}-5, \dots, \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \frac{n}{2}+4, \dots, \frac{3n}{2}-2, \frac{3n}{2}$$

şeklinde numaralansın. P(n) prizma grafının iç ve dış çevresini birleştiren  $\{u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n\}$  ayrıtlar kümesinin elemanları ise  $u_2, v_2$  den başlayarak pozitif yönde

$$\frac{3n}{2}+1, 2, \frac{3n}{2}+3, 4, \frac{3n}{2}+5, 6, \dots, \frac{n}{2}-1, 2n, \frac{n}{2}, 2n-1, \frac{n}{2}-2, 2n-3, \frac{n}{2}-4, \dots, 3, \frac{3n}{2}+2, 1$$

şeklinde numaralansın. Böyle bir numaralama işlemi ile  $P(n)$  prizma grafinin dış çevresinin tepelerinde

$$\frac{3n+6}{2}, \frac{3n+6}{2}+1.3, \frac{3n+6}{2}+2.3, \frac{3n+6}{2}+3.3, \dots, \frac{3n+6}{2}+(n-1).3$$

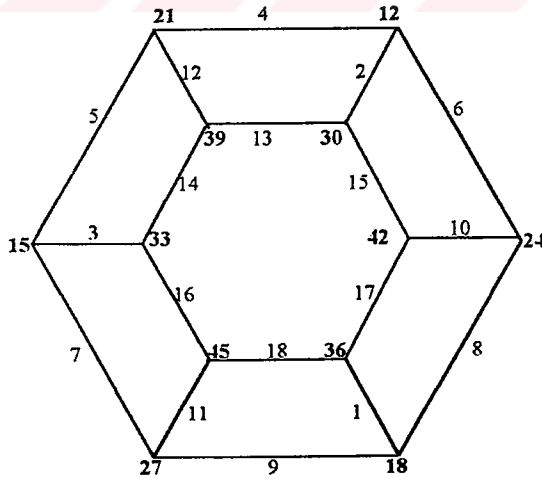
toplamları ve  $P(n)$  prizma grafinin iç çevresinin tepelerinde

$$\frac{3n+6}{2}+n.3, \frac{3n+6}{2}+(n+1).3, \frac{3n+6}{2}+(n+2).3, \frac{3n+6}{2}+(n+3).3, \dots, \frac{3n+6}{2}+(2n-1).3$$

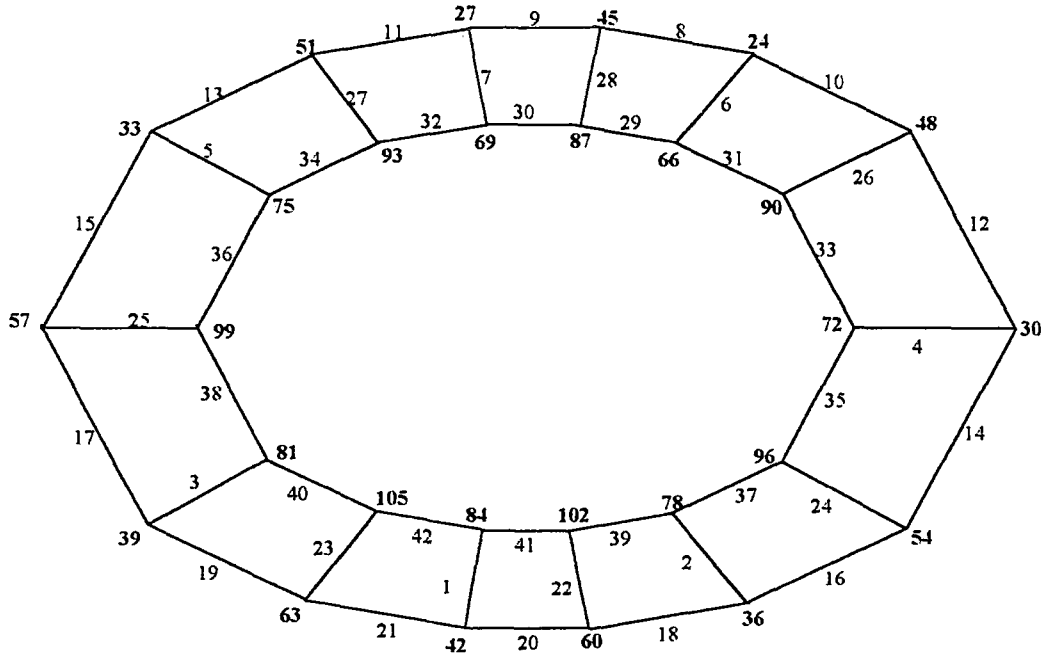
toplamları elde edilir ki bu sonuçlar  $n$  çift sayı ve  $n \equiv 2 \pmod{4}$  olmak üzere  $P(n)$

prizma grafinin  $\left(\frac{3n+6}{2}, 3\right)$ -terssihirli numaralandığını gösterir.

Şekil 6.9 ve Şekil 6.10 da sırasıyla  $P(6)$  prizma grafinin  $(12,3)$ -terssihirli ve  $P(14)$  prizma grafinin  $(24,3)$ -terssihirli numaralanması gösterilmiştir.



Şekil 6.9  $P(6)$  prizma grafinin  $(12,3)$ -terssihirli numaralanması



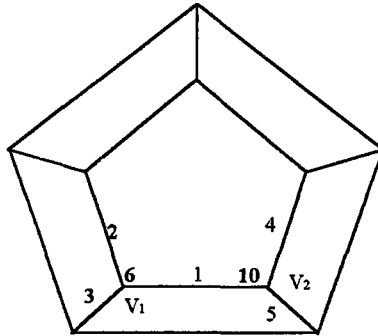
Şekil 6.10 P(14) prizma grafının (24,3)-terssihirli numaralanması

d)  $n$  tek sayı olmak üzere, P(n) Prizma Grafının  $\left(\frac{n+7}{2}, 4\right)$ -terssihirli Numaralanması:

Teorem 6.1 den P(n) prizma grafının (a,d)-terssihirli numaralanmasında a için elde edilebilen değerlerin  $a \geq 6$  olduğu biliniyor. Bu değer  $(a,d) = \left(\frac{n+7}{2}, 4\right)$  de yerine yazıldığında;  $\frac{n+7}{2} \geq 6$  ve buradan  $n \geq 5$  için her P(n) grafının  $\left(\frac{n+7}{2}, 4\right)$ -terssihirli numaralanabileceği sonucu çıkar.  $n=5$  için P(5) grafının (6,4)-terssihirli numaralama yöntemi aşağıdaki şekilde yürütülür:

P(5) grafının ayrıtlar kümesi  $E(P(5)) = \{1,2,3,\dots,15\}$  tir ve bu grafın (6,4)-terssihirli numaralamasında elde edilen tepe numaralarının kümesi de  $V(P(5)) = \{6,10,14,18,22,26,30,34,38,42\}$  olur. O halde ilk tepe numarası  $a=6$  yı elde etmenin bir tek yolu; ayrıtlar kümesinin en küçük elemanları olan 1,2 ve 3 sayılarının kullanılmasıdır. Böylece  $a=1+2+3=6$  tepe numarası elde edilir. Bu sayılar P(5)

grafının  $v_1$  tepesinde elde edilmek üzere, bu tepeye bağlı 3 tane ayrıta yazılır.  $P(5)$  prizmasının 10 sayısı ile numaralı tepesini elde etmek için grafın ayrıtlarından 3 tanesi, tepeler kümesinde geriye kalan  $\{4,5,6,\dots,15\}$  elemanlar veya bu kümedeki elemanlarla daha önce  $v_1$  tepesine bağlantılı ayrıtlara yazılan 1, 2, 3 ile numaralı ayrıtlar kullanılır.  $\{4,5,6,\dots,15\}$  kümesindeki elemanlarla elde edilebilen en küçük tepe numarası  $4+5+6=15$  tir, o halde 1,2,3 ile numaralı ayrıtlarla bağlantılı tepelerde 10 sayısı elde edilebilir. Bunun ise bir tek yolu ; 1 ile numaralı ayrıtın bulunduğu tepeye bağlantılı diğer iki ayrıtın 4 ve 5 ile numaralanmasıdır. Böylece  $v_2$  tepesinde 10 numarası da elde edilir.  $P(5)$  grafının 14 ile numaralı tepesini elde etmek için tepeler kümesinden geriye kalan  $\{6,7,8,\dots,15\}$  kümesinin elemanları ile Şekil 6.11 den de görüldüğü gibi 2,3,4 ve 5 sayılarından biri kullanılmalıdır.  $\{6,7,8,\dots,15\}$  kümesinin elemanları ve 2,3,4,5 sayılarından birisi ile elde edilebilen en küçük tepe numarası 15 tir yani bu grafta 14 numaralı tepeyi elde etmek mümkün değildir. Böylece  $P(5)$  grafının (6,4)-terssihirli numaralaması yoktur. Teorem 6.1 de prizma grafların diyofant denkleminin çözümünden  $n$  tek sayı olmak üzere her  $P(n)$  grafının  $\left(\frac{n+7}{2},4\right)$ -terssihirli numaralanabildiği elde edildi, numaralama yöntemi ile  $P(5)$  in bu duruma uymadığı bulunur. Sonuç olarak;(6.2) diyofant denkleminin bir çözümü olmasına rağmen  $\left(\frac{n+7}{2},4\right)$ -terssihirli numaralamaya sahip olmayan en az bir tane prizma graf vardır. O halde her  $P(n)$  prizma graflarının  $\left(\frac{n+7}{2},4\right)$ -terssihirli numaralaması için genel numaralama yöntemi yoktur.



Şekil 6.11  $P(5)$  prizma grafının (6,4)-terssihirli numaralanması yoktur

## 7. ÇEŞİTLİ GRAF SINIFLARININ MISIRSAL NUMARALANMASI

Teorem 3.6 da  $(a,d)$ -yarı-terssihirli grafların aynı zamanda Mısırsal  $(a,d)$ -yarı-terssihirli ve Teorem 3.7 de  $(a,d)$ -terssihirli grafların da Mısırsal  $(a,d)$ -terssihirli numaralamaya sahip olduğu ispatlandı. Bu bölümde, Teorem 3.6 nın  $T_n$  tarak graflarına uygulanması ve Teorem 3.7 nin de  $P_n$  yoluna,  $C_n$  çevresine ve  $P(n)$  prizma graflarına uygulanması incelenmiştir.

### 7.1 $T_n$ Tarak Graflarının Mısırsal $(a,d)$ -yarı-terssihirli Numaralanması

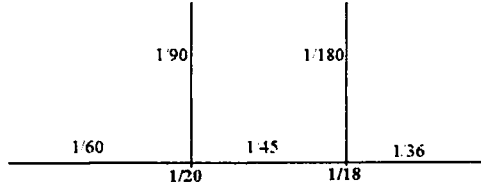
**7.1.1  $V_{\text{der}(1)} = \{1, 2, \dots, n+1, 2n+1\}$  İçin  $T_n$  Tarak Grafının Mısırsal  $(a,d)$ -yarı-terssihirli Numaralanması:**

$V_{\text{der}(1)} = \{1, 2, \dots, n+1, 2n+1\}$  olmak üzere  $1 \leq d \leq 3$  için  $2n+1$  ayrıtlı ve  $2n+2$  tepeli  $T_n$  tarak grafının  $(3n+3,1)$ ,  $n$  tek sayı ise  $\left(\frac{5n+7}{2}, 2\right)$  ve  $(2n+4,3)$  yarı-terssihirli numaralanmaları 4.Bölümde Teorem 4.1 ile ispatlandı ve örneklerle gösterildi.  $T_n$  tarak grafında uygun bir  $k$  genişlemesi yapmak için (3.6) eşitliğini kullanarak

$$k' = \text{o.k.e.k}(1,2,3,\dots,2n+1,a,a+d,a+2d,\dots,a+(n-1)d)$$

şeklinde seçilen  $k'$  sayısı alınır. O zaman  $k'$  yardımıyla tanımlanan  $k = \frac{1}{k'} \in U$  sayısı kullanılarak yapılan  $f^{(k)}$  genişletilmesi  $T_n$  tarak grafının basit birim kesirlerle bir ayrıtlı numaralanması olur ve  $f^{(k)}(E(T_n)) \subseteq U$  olduğu açıktır. Böyle bir ayrıtlı numaralanması yardımıyla elde edilen tepe numaralanması ise  $g_{f^{(k)}} : V(T_n) \rightarrow Q$  için  $g_{f^{(k)}}(V(T_n)) \subseteq U$  olur. Buradan  $(a,d)$ -yarı-terssihirli numaralanmaya sahip  $T_n$  tarak grafının Mısırsal  $(a,d)$ -yarı-terssihirli olduğu sonucu ortaya çıkar.

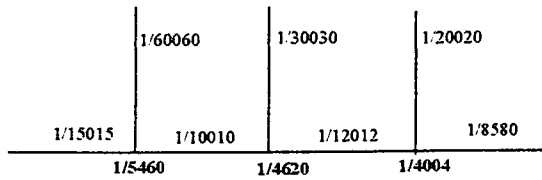
Şekil 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5 ve 7.6 da, 4.Bölümde; sırasıyla Şekil 4.1, 4.2, 4.4, 4.5, 4.7 ve 4.8 de (a,d)-yarı-terssihirli numaralanmaları gösterilen tarak graflarının, uygun bir k genişletilmesiyle elde edilen Mısırsal (a,d)-yarı-terssihirli numaralanmaları verilmiştir:



Şekil 7.1  $T_2$  tarak grafinin; (9,1)-yarı-terssihirli numaralanmasında  $k = \frac{1}{180}$  genişletilmesi yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{20}, \frac{1}{180}\right)$ -yarı-terssihirli numaralanması

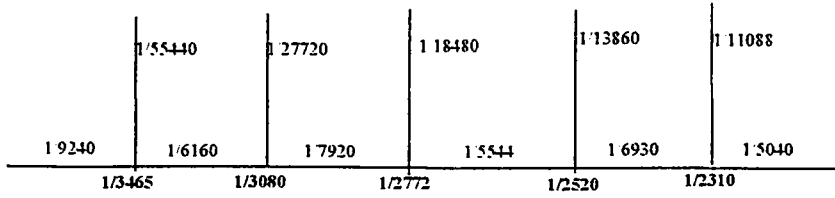


Şekil 7.2  $T_5$  tarak grafinin (18,1)-yarı-terssihirli numaralanmasında  $k = \frac{1}{526680}$  genişletilmesi yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{29260}, \frac{1}{526680}\right)$ -yarı-terssihirli numaralanması



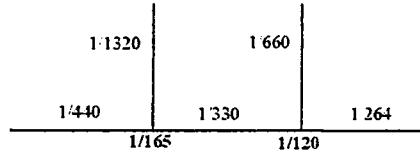
Şekil 7.3  $T_3$  tarak grafinin (11,2)-yarı-terssihirli numaralanmasında  $k = \frac{1}{60060}$  genişletilmesi yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{5460}, \frac{1}{60060}\right)$ -yarı-terssihirli numaralanması





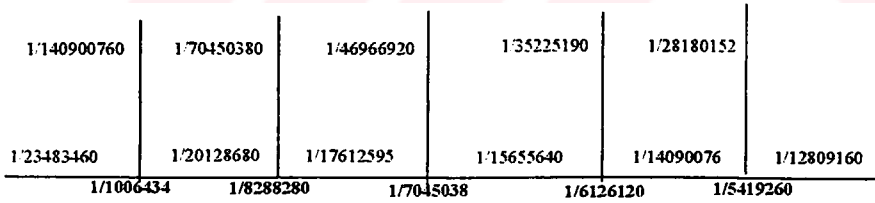
Şekil 7.4  $T_5$  tarak grafının (16,2)-yarı-terssihirli numaralanmasında  $k = \frac{1}{55440}$

genişletilmesi yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{3465}, \frac{1}{55440}\right)$ -yarı-terssihirli numaralanması



Şekil 7.5  $T_2$  tarak grafının (8,3)-yarı-terssihirli numaralanmasında  $k = \frac{1}{1320}$

genişletilmesi yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{165}, \frac{1}{1320}\right)$ -yarı-terssihirli numaralanması



Şekil 7.6  $T_5$  tarak grafının (14,3)-yarı-terssihirli numaralanmasında  $k = \frac{1}{140900760}$

genişletilmesi yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{10064340}, \frac{1}{140900760}\right)$ -yarı-terssihirli numaralanması

### 7.1.2 $V_{\text{der}(1)} = \{1, n+1, n+2, \dots, 2n+1\}$ için $T_n$ Tarak Grafının Mısırsal

(a,d)-yarı-terssihirli Numaralanması:

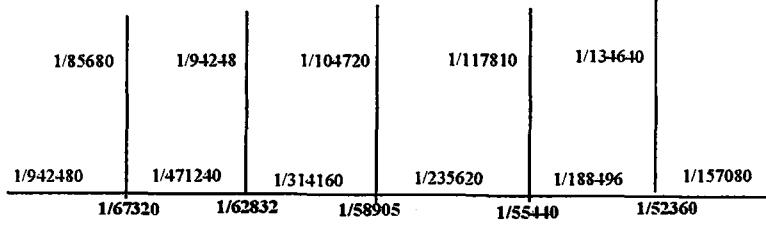
$V_{\text{der}(1)} = \{1, n+1, n+2, \dots, 2n+1\}$  olmak üzere  $1 \leq d \leq 3$  için  $2n+1$  ayrıtlı ve  $2n+2$  tepeli  $T_n$  tarak grafının  $(2n+4,1)$ ,  $n$  tek sayı ise  $\left(\frac{3n+9}{2}, 2\right)$  ve  $(n+5,3)$  yarı-terssihirli numaralanmaları 4.Bölümde, Teorem 4.4 ile ispatlandı ve örneklerle gösterildi.  $T_n$  tarak grafında uygun bir  $k$  genişlemesi yapmak için (3.6) eşitliğiyle verilen  $k'$  sayısı alınır. O zaman  $k'$  yardımıyla tanımlanan  $k = \frac{1}{k'} \in U$  sayısı kullanılarak yapılan  $f^{(k)}$  genişletilmesi  $T_n$  tarak grafının basit birim kesirlerle bir ayrıtlı numaralanması olur ve  $f^{(k)}(E(T_n)) \subseteq U$  olduğu açıktır. Böyle bir ayrıtlı numaralanması yardımıyla elde edilen tepe numaralanması ise  $g_{f^{(k)}} : V(T_n) \rightarrow Q$  için  $g_{f^{(k)}}(V(T_n)) \subseteq U$  olur. Buradan (a,d)-yarı-terssihirli numaralanmaya sahip  $T_n$  tarak grafının Mısırsal (a,d)-yarı-terssihirli olduğu sonucu bulunur.

Şekil 7.7, 7.8, 7.9, 7.10, 7.11 ve 7.12 de 4.Bölümde, sırasıyla Şekil 4.12, 4.13, 4.15, 4.16, 4.18 ve 4.19 da (a,d)-yarı-terssihirli numaralanmaları gösterilen tarak graflarının, uygun bir  $k$  genişletilmesiyle elde edilen Mısırsal (a,d)-yarı-terssihirli numaralanmaları verilmiştir:

$$\begin{array}{c} \frac{1/72}{1/360} \quad \frac{1/90}{1/180} \\ \hline \frac{1/45}{1/40} \end{array}$$

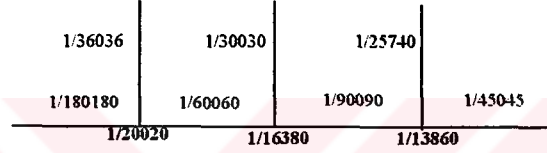
Şekil 7.7  $T_2$  tarak grafının (8,1)-yarı-terssihirli numaralanmasında  $k = \frac{1}{360}$

genişletilmesi yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{45}, \frac{1}{360}\right)$ -yarı-terssihirli numaralanması



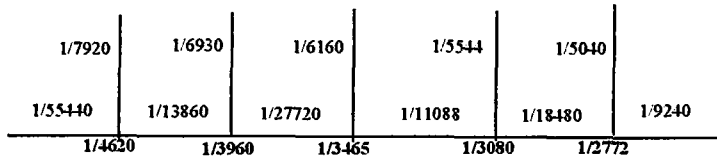
Şekil 7.8  $T_5$  tarak grafının (14,1)-yarı-terssihirli numaralanmasında  $k = \frac{1}{942480}$

genişletilmesi yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{67320}, \frac{1}{942480}\right)$ -yarı-terssihirli numaralanması



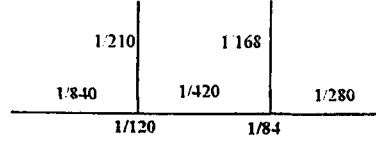
Şekil 7.9  $T_3$  tarak grafının (9,2)-yarı-terssihirli numaralanmasında  $k = \frac{1}{180180}$

genişletilmesi yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{20020}, \frac{1}{90090}\right)$ -yarı-terssihirli numaralanması



Şekil 7.10  $T_5$  tarak grafının (12,2)-yarı-terssihirli numaralanmasında  $k = \frac{1}{55440}$

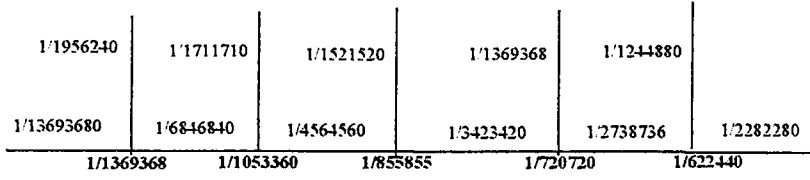
genişletilmesi yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{4620}, \frac{1}{27720}\right)$ -yarı-terssihirli numaralanması



Şekil 7.11  $T_2$  tarak grafinin (7,3)-yarı-terssihirli numaralanmasında  $k = \frac{1}{840}$

genişletilmesi yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{120}, \frac{1}{280}\right)$ -yarı-terssihirli

numaralanması



Şekil 7.12  $T_5$  tarak grafinin (10,3)-yarı-terssihirli numaralamasında  $k = \frac{1}{13693680}$

genişletilmesi yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{13693680}, \frac{1}{4564560}\right)$ -yarı-terssihirli

numaralanması

## 7.2 $P_n$ Yolu ve $C_n$ Çevresinin Mısırsal (a,d)-terssihirli

Numaralanması

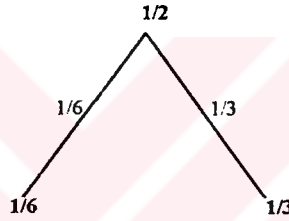
### 7.2.1 $P_n$ Yolunun Mısırsal (a,d)-terssihirli Numaralanması

Teorem 3.7 de (a,d)-terssihirli grafların Mısırsal (a,d)-terssihirli numaralanmaya sahip olduğu ispatlandı.  $n$  uzunluklu  $n+1$  tepeli  $P_n$  yolunun  $\left(\frac{n}{2}, 1\right)$ -terssihirli olduğu Teorem 5.1 de elde edildi ve 5.Bölümde örneklerle gösterildi.  $P_n$  yolunda uygun bir  $k$  genişlemesi yapmak için Teorem 3.7 de verilen (3.7) eşitliği kullanılarak

$$k' = \text{o.k.e.k}\left(1, 2, 3, \dots, n, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, 1, \frac{n}{2} + 3, 1, \dots, \frac{n}{2} + n, 1\right)$$

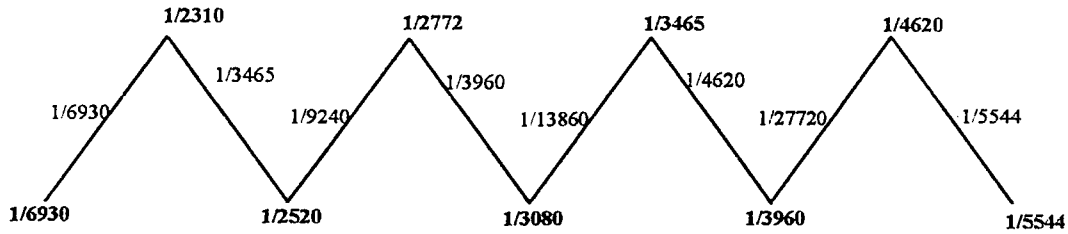
şeklinde seçilen  $k'$  sayısı alınır. O zaman  $k'$  yardımıyla tanımlanan  $k = \frac{1}{k'} \in U$  sayısı ile yapılan  $f^{(k)}$  genişletilmesi  $P_n$  yolunun basit birim kesirlerle bir ayrıt numaralanması olur ve  $f^{(k)}(E(P_n)) \subseteq U$  olduğu açıktır. Böyle bir ayrıt numaralanması yardımıyla elde edilen tepe numaralanması ise  $g_{f^{(k)}} : V(P_n) \rightarrow Q$  için  $g_{f^{(k)}}(V(P_n)) \subseteq U$  olur. Buradan  $(a,d)$ -terssihirli numaralanmaya sahip  $P_n$  yolunun Mısırsal  $(a,d)$ -terssihirli olduğu sonucu ortaya çıkar.

Şekil 7.13 ve Şekil 7.14 te 5.Bölümde sırasıyla Şekil 5.1 ve 5.3 de  $(a,d)$ -terssihirli numaralanmaları gösterilen  $P_2$  ve  $P_8$  yollarının, uygun bir  $k$  seçilerek elde edilen Mısırsal  $(a,d)$ -terssihirli numaralanmaları verilmiştir:



Şekil 7.13  $P_2$  yolunun  $(1,1)$ -terssihirli numaralanmasında  $k = \frac{1}{6}$  genişletilmesi

yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ -terssihirli numaralanması



Şekil 7.14  $P_8$  yolunun  $(4,1)$  terssihirli numaralanmasında  $k = \frac{1}{27720}$  genişletilmesi

yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{6930}, \frac{1}{27720}\right)$ -terssihirli numaralanması

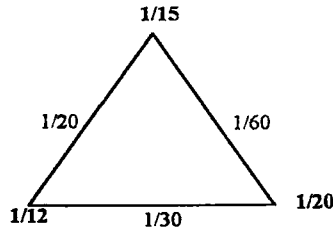
### 7.2.2 $C_n$ Çevresinin Mısırsal (a,d)-terssihirli Numaralanması

Teorem 3.7 de (a,d)-terssihirli grafların Mısırsal (a,d)-terssihirli numaralanmaya sahip olduğu ispatlandı.  $n$  uzunluklu  $n$  tepeli  $C_n$  çevresinin  $n$  tek sayı olmak üzere  $\left(\frac{n+3}{2}, 1\right)$ -terssihirli olduğu Teorem 5.2 de elde edildi ve 5.Bölümde örneklerle gösterildi.  $C_n$  çevresinde uygun bir  $k$  genişlemesi yapmak için Teorem 3.7 de verilen (3.6) eşitliği kullanılarak

$$k' = \text{o.k.e.k}\left(1, 2, 3, \dots, n, \frac{n+3}{2}, \frac{n+3}{2}+1, \frac{n+3}{2}+2, 1, \dots, \frac{n+3}{2}+(n-1), 1\right)$$

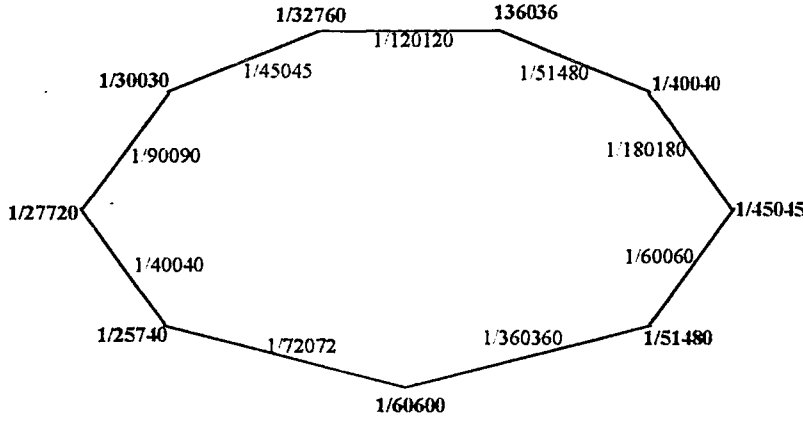
şeklinde seçilen  $k'$  sayısı alınır. O zaman  $k'$  yardımıyla tanımlanan  $k = \frac{1}{k'} \in U$  sayısı ile yapılan  $f^{(k)}$  genişletilmesi  $C_n$  çevresinin basit birim kesirlerle bir ayrıt numaralanması olur ve  $f^{(k)}(E(C_n)) \subseteq U$  olduğu açıktır. Böyle bir ayrıt numaralanması yardımıyla elde edilen tepe numaralanması ise  $g_{f^{(k)}} : V(C_n) \rightarrow Q$  için  $g_{f^{(k)}}(V(C_n)) \subseteq U$  olur. Buradan (a,d)-terssihirli numaralanmaya sahip  $C_n$  çevresinin Mısırsal (a,d)-terssihirli olduğu sonucu ortaya çıkar.

Şekil 7.15 ve Şekil 7.16 te 5.Bölümde, sırasıyla Şekil 5.5 ve 5.7 de (a,d)-terssihirli numaralamaları gösterilen  $C_3$  ve  $C_9$  çevrelerinin, uygun bir  $k$  genişletilmesi ile elde edilen Mısırsal (a,d)-terssihirli numaralanmaları verilmiştir:



Şekil 7.15  $C_3$  çevresinin (3,1) terssihirli numaralanmasında  $k = \frac{1}{60}$  genişletilmesi

yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{20}, \frac{1}{60}\right)$ -terssihirli numaralanması



Şekil 7.16  $C_9$  çevresinin  $(6,1)$  terssihirli numaralanmasında  $k = \frac{1}{360360}$

genişletilmesi yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{60060}, \frac{1}{360360}\right)$ -terssihirli

numaralanması

### 7.3 $P(n)$ Prizma Grafının Mısırsal $(a,d)$ -terssihirli Numaralanması

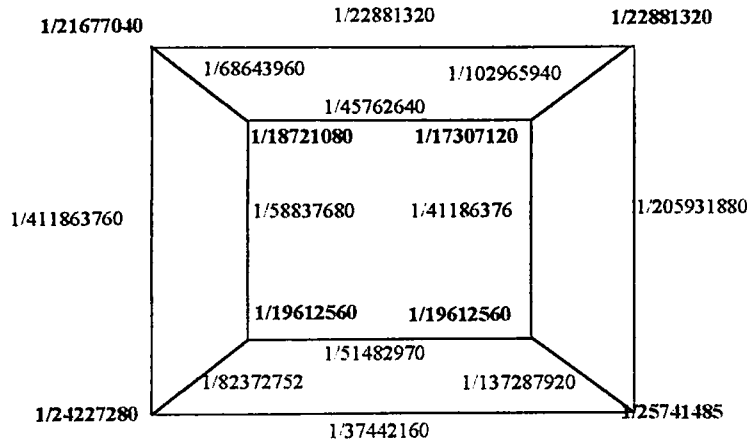
Teorem 3.7 de  $(a,d)$ -terssihirli grafların Mısırsal  $(a,d)$ -terssihirli numaralanmaya sahip olduğu ispatlandı.  $2n$  tepeli ve  $3n$  ayrıtlı  $P(n)$  prizma grafının  $1 \leq d \leq 3$  için  $(a,d)$ -terssihirli olduğu Teorem 6.1 de elde edildi ve 6.Bölümde örneklerle gösterildi.  $P(n)$  prizma grafında uygun bir  $k$  genişlemesi yapmak için Teorem 3.7 de verilen (3.6) eşitliği kullanılarak

$$k' = \text{o.k.e.k}(1,2,3,\dots,3n,a+1.d,a+2.d, \dots, a+(n-1).d)$$

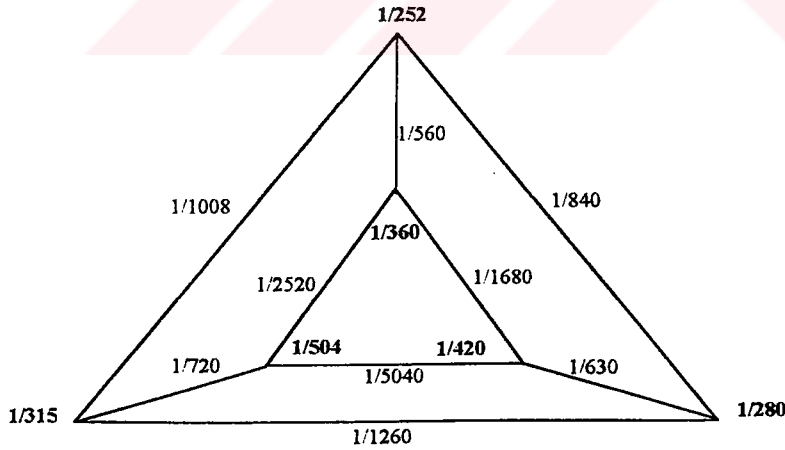
şeklinde seçilen  $k'$  sayısı alınır. O zaman  $k'$  yardımıyla tanımlanan  $k = \frac{1}{k'} \in U$  sayısı

ile yapılan  $f^{(k)}$  genişletilmesi  $P(n)$  prizma grafının basit birim kesirlerle bir ayrıtlı numaralanması olur ve  $f^{(k)}(E(P(n))) \subseteq U$  olduğu açıktır. Böyle bir ayrıtlı numaralanması yardımıyla elde edilen tepe numaralanması ise  $g_{f^{(k)}} : V(P(n)) \rightarrow Q$  için  $g_{f^{(k)}}(V(P(n))) \subseteq U$  olur. Buradan  $(a,d)$ -terssihirli numaralanmaya sahip  $P(n)$  prizma grafının Mısırsal  $(a,d)$ -terssihirli olduğu sonucu ortaya çıkar.

Şekil 7.17, Şekil 7.18 ve Şekil 7.19 te 6.Bölümde, sırasıyla Şekil 6.1, 6.5 ve 6.7 de (a,d)-terssihirli numaralanmaları gösterilen prizma graflarının uygun bir k genişletilmesiyle elde edilen Mısırsal (a,d)-terssihirli numaralanmaları verilmiştir:

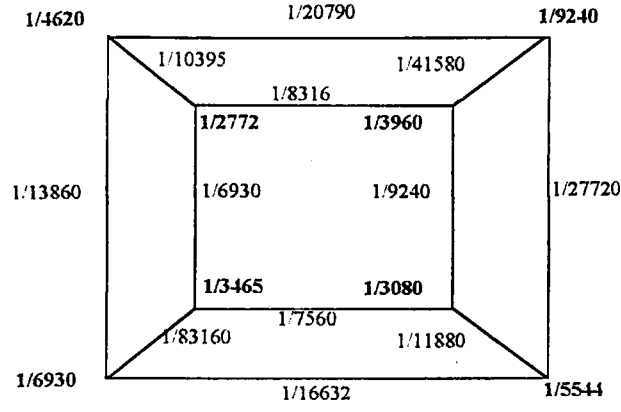


Şekil 7.17 P(4) prizma grafinin (16,1)-terssihirli numaralanmasında  $k = \frac{1}{411863760}$  genişletilmesi yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{25741485}, \frac{1}{411863760}\right)$ -terssihirli numaralanması



Şekil 7.18 P(3) prizma grafinin (10,2)-terssihirli numaralanmasında  $k = \frac{1}{5040}$  genişletilmesi yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{504}, \frac{1}{2520}\right)$ -terssihirli numaralanması





Şekil 7.19  $P(4)$  prizma grafının  $(9,3)$ -terssihirli numaralanmasında  $k = \frac{1}{83160}$

genişletilmesi yapılarak elde edilen Mısırsal  $\left(\frac{1}{9240}, \frac{1}{27720}\right)$ -terssihirli numaralanması

## 8. YÖNTEM

Grafların (a,d)-yarı-terssihirli ve (a,d)-terssihirli numaralanması için ortaya atılan teoremlerin ispatlanmasında, numaralanacak grafların doğrusal diyofant denklemlerinin çözümlerinin var olup olmadığı araştırıldı.

$2n+1$  ayrıtlı ve  $2n+2$  tepeli  $T_n$  tarak grafinin, (a,d)-yarı-terssihirli numaralanmasını araştırırken, Tanım 2.18 gereği bu grafın tek dereceli tepelerinin ihmal edilmesi gerekir. İhmal edilecek tepe numaralarını belirlemenin  $C\binom{2n+1}{n+2} = \frac{(2n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}$  tane farklı yolu olabileceği ortaya konuldu. Bulunan bu sayının oldukça büyük olması dolayısıyla,  $T_n$  tarak grafinin (a,d)-yarı-terssihirli numaralanmalarının bir kısmını bulabilmek için tek dereceli tepelerin seçimi keyfi olarak yapıldı. Bu durumlar için, tarafımızdan Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 ifade ve ispat edilerek bulunan sonuçlar örneklerle gösterildi.

$P_n$  yolunun (a,d)-terssihirli numaralanması için, oluşturulan doğrusal diyofant denkleminin bir tek çözüme sahip olduğu bulundu ve  $n \geq 2$  ve  $n$  çift sayı olmak üzere her  $P_n$  yolunun  $\left(\frac{n}{2}, 1\right)$ -terssihirli numaralanmasının var olduğu Teorem 5.1 ile ispatlandı. Benzer yöntem izlenerek,  $n \geq 3$  ve  $n$  tek sayı olmak üzere, her  $C_n$  çevresinin de  $\left(\frac{n+3}{2}, 1\right)$ -terssihirli numaralanmasının varlığı Teorem 5.2 ile ispatlandı.

$n \geq 3$  olmak üzere, her  $P(n)$  prizma grafinin;  $n$  tepeli iki çevre ve bu çevrelerin karşılıklı tepelerini birbirine bağlayan  $n$  tane ayrıttan oluştuğu göz önüne alındı. Buradan  $P(n)$  prizma grafinin tüm (a,d)-terssihirli numaralanmalarını bulabilmek için tarafımızdan ifade edilen Teorem 6.1 ile doğrusal diyofant denkleminin çözümleri

elde edildi ve  $C_n$  çevresinin  $(a,d)$ -terssihirli numaralanması temel alınarak  $P(n)$  prizma graflarının,  $\left(\frac{3n+6}{2},3\right)$ ,  $\left(\frac{5(n+1)}{2},2\right)$  ve  $\left(\frac{7n+4}{2},1\right)$ -terssihirli numaralanmaları örneklerle şekiller çizilerek gösterildi. Ancak doğrusal diyofant denkleminin çözümü olmasına rağmen  $P(n)$  prizma grafinin  $\left(\frac{n+7}{2},4\right)$ -terssihirli numaralanmaya sahip olmadığı karşıt bir örnek verilerek gösterildi.

$(a,d)$ -yarı-terssihirli grafların aynı zamanda Mısırsal  $(a,d)$ -yarı-terssihirli ve  $(a,d)$ -terssihirli grafların da Mısırsal  $(a,d)$ -terssihirli numaralamaya sahip olduğunu göstermek için, R.Bodendiek ve G.Walther'in "On The Relations Between Certain Graph Labelings" adlı makalesinde kullanılan yöntemlere benzer yöntemleri kullanarak,  $T_n$  tarak graflarına,  $P_n$  yoluna,  $C_n$  çevresine ve  $P(n)$  prizma graflarına uygulanması örneklerle gösterildi.

## 9. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, herhangi bir grafin  $(a,d)$ -yarı-terssihirli ve  $(a,d)$ -terssihirli numaralanmaya sahip olabilmesi için öncelikle, bu grafin doğrusal diyofant denkleminin çözümünün olması gerektiği görüldü.

Tek dereceli tepelere sahip grafların en geniş sınıfını oluşturan tarak graflar için;  $V_{\text{der}(1)} = \{1, 2, \dots, n+1, 2n+1\}$  ve  $V_{\text{der}(1)} = \{1, n+1, n+2, \dots, 2n+1\}$  şeklinde seçilerek;  $1 \leq d \leq 3$  için  $T_n$  tarak grafinin,  $(a,d)$ -yarı-terssihirli numaralandığını gösteren iki teorem ispatlandı. Bu yöntem; tek dereceli tepelere sahip diğer graf sınıflarına da uygulanabilir.

$n \geq 2$  ve  $n$  çift sayı olmak üzere her  $P_n$  yolunun  $\left(\frac{n}{2}, 1\right)$ -terssihirli numaralandığı,  $n \geq 3$  ve  $n$  tek sayı olmak üzere, her  $C_n$  çevresinin de  $\left(\frac{n+3}{2}, 1\right)$ -terssihirli numaralandığı ispatlandı.

$n \geq 3$  olmak üzere, her  $P(n)$  prizma grafinin,  $\left(\frac{3n+6}{2}, 3\right)$ ,  $\left(\frac{5(n+1)}{2}, 2\right)$  ve  $\left(\frac{7n+4}{2}, 1\right)$ -terssihirli numaralanmalarının var olduğu ispatlandı. Ayrıca doğrusal

diyofant denkleminin çözümü olmasına rağmen  $P(n)$  prizma graflarının  $\left(\frac{n+7}{2}, 4\right)$ -terssihirli numaralanmasının olmadığı karşıt bir örnekle ispatlandı.  $P(n)$  prizma grafinin doğrusal diyofant denklemi aynı zamanda, tüm  $2n$  tepeli ve  $3n$  ayrıtlı grafların da doğrusal diyofant denklemidir. Bu yüzden, Petersen grafları ve çevresel kübik graf gibi  $2n$  tepeli ve  $3n$  ayrıtlı graf sınıflarının da  $(a,d)$ -terssihirli numaralanmaları bulunabilir.

Tarak grafların  $(a,d)$ -yarı-terssihirli, yollar, çevreler ve prizma grafların  $(a,d)$ -terssihirli numaralanmaları doğrusal diyofant denklemlerinin çözümlerinden faydalanılarak bulundu. Yani, bir grafin  $(a,d)$ -yarı ve ya  $(a,d)$ -terssihirli numaralanabilmesi için doğrusal diyofant denkleminin çözümünün olması gerek koşuldur. Çarklar ve yelpaze graflarının doğrusal diyofant denklemlerinin çözümü olmadığı için, bu grafların  $(a,d)$ -terssihirli numaralanmaları yoktur.

Uygun bir  $k$  genişletilmesi yapılarak;  $(a,d)$ -yarı-terssihirli grafların aynı zamanda Mısırsal  $(a,d)$ -yarı-terssihirli ve  $(a,d)$ -terssihirli grafların da Mısırsal  $(a,d)$ -terssihirli numaralamaya sahip olduğu iki teoreme ispatlandı. Böylece herhangi bir numaralanmaya sahip graflarda, uygun bir  $k$  genişletilmesi yapılarak, bu grafların aynı zamanda Mısırsal numaralanmaya da sahip oldukları gösterilir.



## KAYNAKLAR

- [1] Hartsfield, N. , and Ringel, G. , Supermagic and Antimagic Graphs, J. Recreational Mathematics, Vol 21(2), 107-115 (1989).
  
- [2] Arısoy, M., Antimagic Labellings of the Complete Graphs with a Common Vertex, International journal of Mathematical Education in Science and Technology , Volume 29, No.2, 301-305, U.K., (1998).
  
- [3] Stewart, B. M. , Magic Graphs, Canadian Journal of Mathematics, 18, 1031-1059, Canada, (1966).
  
- [4] Stewart, B. M. , Supermagic Complete Graphs, Canadian Journal of Mathematics, 19, 427-438, (1967).
  
- [5] Hartsfield, N. , and Ringel, G. , Pearls in Graph Theory, Academic Press inc. , p.15, (1990).
  
- [6] Bodendiek, R. , and Walther, G., On number Theoretical Methods in Graph Labellings. Arithmetisch Antimagische Graphen , K.Wagner and R.Bodendiek : Graphentheorie III, Mannheim, (1993).
  
- [7] Hartsfield, N. , Egyption Graphs, İn: R. Bodendiek ed. Contemporary Methods in Graph Theory , BI-Verlang, Mannheim, 369-370, (1990).
  
- [8] Bodendiek, R. , and Burosch, G. , The Class of All Egyption Graphs, Bulletin, V.6., pt.1, of the ICA, Volume 5, 100-101, (1992).

- [9] Arısoy , M., Karakteristik Polinomials and Spectrums of Boolean Graphs, International Journal of Mathematical Education in Science on Techonology, U.K. , (1996).
- [10] Arısoy , M. ,  $M_3$ -Cordial Labellings of Cubic Graphs, Journal of Yıldız Technical University, 4, 21-26, İstanbul, (1995).
- [11] Gibbons , A., Algorithmic Graph Theory, Cambridge University Press, p.3, (1989)
- [12] Bodendiek, R. , and Walther, G., On the Relations Between Certain Graph Labellings, Discrete Mathematics, Elsevier science, 134, pp. 9-16, Amsterdam, (1994).
- [13] Bayraktar , M. , Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi , s. 38-40Bursa , (1997).