T.C.
HİTİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONTAKT MANİFOLDLAR, SASAKİAN MANİFOLDLAR VE EĞRİLİK

Sibel SUBAŞI ÖZEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Doç. Dr. Belgin KORKMAZ

TEMMUZ 2018
ÇORUM

Sibel SUBAŞI ÖZEL tarafından hazırlanan "Kontakt Manifoldlar, Sasakian Manifoldlar ve Eğrilik" adlı tez çalışması 13/07/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Hitit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Aysel VANLI ....

Doç. Dr. Belgin KORKMAZ BELGİN KORKMAZ

Doç. Dr. Elif DALYAN ....

Hitit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 17/08/2018 tarih ve 2018/200 sayılı kararı ile Sibel SUBAŞI ÖZEL Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesi alması onanmıştır.

Doç. Dr. Cengiz BAYKASOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BEYANI

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını beyan ederim.

Sibel SUBAŞI ÖZEL

KONTAKT MANİFOLDLAR, SASAKİAN MANİFOLDLAR

VE EĞRİLİK

Sibel SUBAŞI ÖZEL

HİTİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2018

ÖZET

Bu tezde diferansiyel geometrinin temel kavramları örnekleriyle verilmiştir. Riemann eğriliği tanımlanmış ve sabit Riemann eğriliğine sahip örnekler verilmiştir. Kontakt manifoldlar tanımlanmış, karakteristik vektör alanının varlığının kanıtı verilmiş, örnek verildikten sonra kontakt metrik yapı tensörleri ve örnekleri verilmiştir. Sasakian manifoldlar tanımlanmıştır. Bir kontakt metrik manifoldun Sasakian olması için gerekli ve yeterli bir koşul elde edilmiştir. Bu koşul kullanılarak R^{2n+1}üzerindeki standart kontakt metrik yapının Sasakian olduğu gösterilmiştir. Sasakian manifoldlar için φ-kesitsel eğriliği tanımlanmış ve bu eğriliğin kesitsel eğriliği tamamiyle belirlediğinin kanıtı verilmiştir. Ayrıca sabit φ-kesitsel eğriliğine sahip bir örnek verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Türevlenebilir manifoldlar, Türevlenebilir fonksiyonlar, Teğet uzayı, Vektör alanları, Riemann eğriliği, Kesitsel eğrilik, Tensörler, Formlar, Diferansiyel, Kontakt manifold, Sasakian manifold, φ-kesitsel eğriliği

KONTAKT MANIFOLD, SASAKIAN MANIFOLD AND CURVATURE

Sibel SUBAŞI ÖZEL

HITIT UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
July 2018

ABSTRACT

In this thesis, the fundamental concepts of differential geometry are given with examples. Riemannian curvature is defined and examples of constant Riemannian curvature are given. Contact manifolds are defined and a proof of the existence of the characteristic vector field is given. Contact metric tensors are defined and examples are given. Sasakian manifolds are defined. A necessary and sufficient condition for a contact metric manifold to be Sasakian is obtained. Using this condition, it is proved that the standard contact metric structure on R^{2n+1} is Sasakian. φ-sectional curvature for Sasakian manifolds is defined and a proof is given of the fact that this curvature determines the sectional curvature completely. In addition, an example of constant φ-sectional curvature is given.

Keywords: Differentiable manifolds, Differentiable functions, Tangent space, Vector fields, Riemannian curvature, Sectional curvature, Tensors, Forms, Differential, Contact manifold, Sasakian manifold, φ- sectional curvature

TEŞEKKÜR

Bu seminer çalışmasında kontakt manifold, Sasakian manifold ve eğrilikten bahsedilmiştir.

Çalışmam sırasında ilgi ve sabrının yanında, bilimsel anlamda bilgisinden ve tecrübelerinden de faydalandığım, anlayışını ve desteğini eksik etmeyen kıymetli tez danışmanım Doç. Dr. Belgin KORKMAZ'a ve tez yazma aşamaları da dahil olmak üzere her konuda desteğini esirgemeyerek yardımcı olan Doç. Dr. Elif DALYAN ve Yrd. Doç. Dr. Hüseyin ALTUNDAĞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Akademik hayata başlangıç sürecimde dahil olmak üzere tüm hayatım boyunca her daim yanımda olan, her türlü fedakarlığını esirgemeyerek beni teşvik eden ve bundan sonra da her daim kalbimde olacak olan örnek aldığım tek insan canım anneme, enerjileriyle ve sabırlarıyla bana hayat veren çocuklarım Burak Emin ve Melis'e sonsuz teşekkür ediyorum.

Sibel SUBAŞI ÖZEL

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

M	manifold
$\mathbf{C}^{\infty}$	sonsuz kere türevlenebilir
$\mathbf{T_pM}$	p noktasındaki teğet vektör uzayı
X	vektör alanı
∂**x**	x e göre kısmi türev
$\mathfrak{X}$**(M)**	C^{∞} sınıfından vektör alanlarının kümesi
D(M)	türevlenebilir fonksiyonlar
[X,Y]	Lie Çarpımı
∇	Riemann (Levi-Civita) konneksiyonu
∇_X	X vektör alanına göre kovaryant türev (konneksiyon)
$\nabla_X Y$	Y nin X e göre kovaryant türevi
Γ	Christoffel sembolü
g	Riemann metrik
R	eğrilik
K**(X,Y)**	kesitsel eğrilik
J	hemen hemen karmaşık yapı
T	Nijenhuis torsiyonu
ξ	karakteristik (Reeb) vektör alanı
H	yatay alt demet (kontakt alt demet)
H(X)	φ-kesitsel eğriliği

1. GİRİŞ

Kontakt Riemann manifoldlar farklı bilim alanlarında da uygulamaları olan ve matematik camiasında geniş bir kitle tarafından çalışılan bir konudur. Konu hakkındaki en önemli kaynak, David E. Blair' in Riemannian Geometry of contact and symplectic manifolds adlı kitabıdır (Blair, 2010). Konu, simplektik geometri ve karmaşık geometri ile de yakından ilgilidir. Kontakt formun sıfır olduğu yatay alt demet üzerinde, kontakt formun diferansiyeli simplektik form verir. Kontakt Riemann yapıdaki tensör, yine yatay alt demet üzerinde hemen hemen karmaşık yapı verir. Kontakt manifold tanımladıktan sonra, genel yaklaşım hemen hemen kontakt yapıları çalışmaktır. Ancak bu tezde yalnızca kontakt metrik manifoldlar çalışılmış ve konu hakkındaki en temel genel bilgiler ayrıntılarıyla verilmiştir. Kontakt yapı üzerine fazladan koşullar konularak farklı yapılar elde edilebilir. Bunların içinde en önemlisi Sasakian yapılardır. Kontakt metrik manifold M ise, $M \times R$ üzerinde bir hemen hemen karmaşık yapı tanımlanabilir. Bu yapı karmaşık ise, kontakt manifoldumuz Sasakian olur. Bir kontakt metrik manifoldun Sasakian olup olmadığını belirleyen, kontakt metrik tensörünün türevinin sağlaması gereken bir denklemdir. Bu denklemle ilgili teoremin kanıtı ayrıntılarıyla verilmiştir. Sasakian yapıları tamamiyle belirleyen denklem elde edildikten sonra belirli eğrilik koşullarını sağlayan Sasakian yapılar düşünülebilir. Sasakian yapılar için φ-kesitsel eğriliği tanımlanmış ve bu eğriliğin kesitsel eğriliği tamamiyle belirlediğinin kanıtı verilmiştir. Son olarak sabit φ-kesitsel eğriliğine sahip bir örnek verilmiştir. Buradaki temel kaynağımız, Blair (2010) dir. Sasakian manifoldlar hakkındaki çalışmalara örnek olarak Tanno (1969), Takahashi (1977) ve Alegre, Blair ve Carriazo (2004) verilebilir.

Kontakt manifold tanımlamak için diferansiyel geometrideki manifold, teğet uzayı, metrik, tensör, form gibi kavramlara ihtiyaç duyarız. Bu kavramlar ikinci bölümde verilmiştir. Üçüncü bölümde Riemann eğriliği tanımlanmış, sabit Riemann eğriliğine sahip yapılara örnekler verilmiştir. Dördüncü bölümde kontakt manifoldlar ve kontakt metrik manifoldlar tanımlanmış ve örnekler verilmiştir. Beşinci bölümde Sasakian manifoldlar tanımlanmış, Sasakian yapıları belirleyen denklem ile ilgili teoremin kanıtı verilmiş, belirli eğrilik koşullarına sahip Sasakian yapılara örnek verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanacağımız bazı temel kavramların tanımlarından bahsedeceğiz.

2.1. Türevlenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1. M Hausdorff ve ikinci sayılabilir (sayılabilir bir tabana sahip olan) bir topolojik uzay olsun. Eğer $\mathbb{R}^n$ nin açık $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ kümelerinden M nin açık $V_\alpha \subset M$ kümelerine $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ homeomorfizmalarından oluşan ve aşağıdaki şartları sağlayan bir aile varsa M kümesi **n boyutlu türevlenebilir bir manifold** olarak adlandırılır:

(1) $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha (U_\alpha) = M;$

(2) $\mathbf{x}_\alpha (U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta (U_\beta) = W \neq \emptyset$ olan her α, β çifti için,

$$\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha : \mathbf{x}_\alpha^{-1}(W) \longrightarrow \mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$$

dönüşümü türevlenebilirdir;

(3) $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ ailesi (1) ve (2) koşullarına göre maksimaldir.

Bir $p \in \mathbf{x}_\alpha (U_\alpha)$ noktası için $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ çifti, M nin p noktasındaki paremetrelemesi veya koordinat sistemi olarak adlandırılır. $\mathbf{x}_\alpha (U_\alpha)$ kümesi de p noktasındaki koordinat komşuluğu olarak adlandırılır. (1) ve (2) koşullarına göre $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ ailesi M de türevlenebilir yapıdır. Tanımdaki (3) koşulu tamamen teknik nedenlerden dolayı dahil edilmiştir. (2) koşuluna göre aslında M üzerinde türevlenebilir bir yapıyı aldığımızda verilen yapıdaki paremetrelemelerden herhangi biriyle uyuşan ((2) koşulunu sağlayan) tüm paremetrelemelerin birleşimi olarak maksimum düzeye kadar tamamlayabiliriz. Manifoldlar büyük harflerle, boyutlarını ise manifoldu gösteren harfin üzerine küçük harf veya rakam yazarak gösterilir. S^4, M^5, $\mathbb{R}^n$ gibi.

Örnek 2.1. $M = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ birim küresi olsun. Kürenin topolojisi, $\mathbb{R}^3$ ün topolojisinden indirgenen alt küme topolojisidir. Kürenin açık yarı kürelerle örtülmesi için örnek bir parametreleme yapalım.

Küre 6 tane açık yarı küre ile örtülmektedir. Örneğin,

$$U=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2, u^2+v^2<1\right\}\subset\mathbb{R}^2$$

ve $\mathbf{x}_1:U\to S^2$ fonksiyonunu $\mathbf{x}_1(u,v)=\left(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2}\right)$ olarak tanımlarsak, $V_1=\mathbf{x}_1(U)=\{(x,y,z)\in S^2, z>0\}$ açık üst yarı küresi olur.

$$\mathbf{x}_1:U\to V_1$$

fonksiyonu süreklidir, bire-birdir ve $\mathbf{x}_1^{-1}:V_1\to U$ fonksiyonu $\mathbf{x}_1^{-1}(x,y,z)=(x,y)$ olarak verildiği için süreklidir. Sonuç olarak $\mathbf{x}_1$ bir homeomorfizmadır.

Benzer biçimde, $\mathbf{y}_1:U\to S^2$ fonksiyonunu $\mathbf{y}_1(u,v)=\left(\sqrt{1-u^2-v^2},u,v\right)$ olarak tanımlarsak, $V_2=\mathbf{y}_1(U)=\{(x,y,z)\in S^2, x>0\}$ açık ön yarı küresidir ve $\mathbf{y}_1$ fonksiyonu da bir homeomorfizmadır. $\mathbf{y}_1^{-1}(x,y,z)=(y,z)$ olur.

Şimdi, $W=V_1\cap V_2=\{(x,y,z)\in S^2, x>0, z>0\}$ için,

$$\mathbf{x}_1^{-1}(W)=\{(u,v)\in U, u>0\}=U_1$$

ve

$$\mathbf{y}_1^{-1}(W)=\{(u,v)\in U, v>0\}=U_2$$

olur.

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{y}_1^{-1}\circ\mathbf{x}_1\right)(u,v) &= \mathbf{y}_1^{-1}\left(\mathbf{x}_1(u,v)\right)=\mathbf{y}_1^{-1}\left(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2}\right)\\ &= \left(v,\sqrt{1-u^2-v^2}\right)\end{aligned}$$

elde ederiz. $\mathbf{y}_1^{-1}\circ\mathbf{x}_1:U_1\to U_2$ fonksiyonunun türevlenebilir olması için

$$1-u^2-v^2>0$$

olmalıdır. U üzerinde $u^2+v^2<1$ olduğu için bu koşul sağlanır.

Kürenin tümünü örtmek için, yine U kümesi üzerinde $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ fonksiyonlarını

$$\mathbf{x}_2(u,v)=(u,v,-\sqrt{1-u^2-v^2}),$$

$$\mathbf{y}_2(u,v) = (-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v),$$

$$\mathbf{z}_1(u,v) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v),$$

$$\mathbf{z}_2(u,v) = (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v)$$

olarak tanımlarız. Bu fonksiyonların görüntüleri küreyi açık yarı kürelerle örter. Boş kümeden farklı kesişimlerde koordinat değişimi fonksiyonlarının türevlenebilir olduğu yukarıdaki gibi gösterilebilir. Böylece küre üzerinde türevlenebilir yapı elde ederiz ve S^2 birim küresi, 2 boyutlu türevlenebilir manifold olur.

2.2. Türevlenebilir Fonksiyonlar

Tanım 2.2. Türevlenebilir M manifoldu üzerinde tanımlı bir $f : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $p \in M$ noktasında türevlenebilir diyebilmemiz için, $p \in \mathbf{x}(U)$ olacak biçimde bir $(\mathbf{x}, U)$ koordinat komşuluğu için $f \circ \mathbf{x} : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun türevlenebilir olması gereklidir.

M üzerinde Türevlenebilir fonksiyonların kümesini $D(M)$ ile göstereceğiz.

En genel şekli ile, türevlenebilir M ve N manifoldları arasındaki

$$f : M \longrightarrow N$$

fonksiyonunun $p \in M$ noktasında türevlenebilir olması için, $p \in \mathbf{x}(U)$ ve $f(p) \in \mathbf{y}(V)$ olacak biçimde $(\mathbf{x}, U)$ ve $(\mathbf{y}, V)$ koordinat komşulukları için

$$\mathbf{y}^{-1} \circ f \circ \mathbf{x} : U \to V$$

fonksiyonunun türevlenebilir olması gerekir.

2.3. Teğet Uzayı

Tanım 2.3. M türevlenebilir bir manifold olsun. Türevlenebilir bir $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ eğrisinin $\alpha(0) = p \in M$ koşulu için $\alpha'(0) : D(M) \to \mathbb{R}$ teğet vektörü

$$\alpha'(0)(f) = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0}, f \in D(M)$$

olarak tanımlanır. p noktasındaki teğet vektörü, $\alpha(0) = p \in M$ olan bir eğrinin $\alpha'(0)$ teğet vektörüdür. p noktasında M ye teğet vektörlerin kümesi T_pM ile gösterilir.

$\alpha^{'}(0), \beta^{'}(0) \in T_pM$ ise

$$(\alpha^{'}(0) + \beta^{'}(0))(f) = \alpha^{'}(0)(f) + \beta^{'}(0)(f) \text{ ve}$$

$$(c\alpha^{'}(0))(f) = c\alpha^{'}(0)(f), \; c \in \mathbb{R},$$

olarak tanımlanır. Bu işlemler altında T_pM bir vektör uzayıdır ve p noktasındaki **teğet uzayı** olarak adlandırılır.

$\mathbf{x} : U \to M, p = \mathbf{x}(0)$ parametrelemesini seçersek f fonksiyonu ve α eğrisini şu şekilde ifade edebiliriz. $f \circ \mathbf{x} = \hat{f}$ ve $\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned} \alpha^{'}(0)(f) &= \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(f \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha\right)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\hat{f} \circ \left(\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha\right)\right)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\hat{f}(x_1(t), \ldots, x_n(t))\right)|_{t=0} \quad \text{zincir kuralından} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0) \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}(0) \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

$(\partial x_i)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_pM$ teğet vektörü şöyle tanımlanır:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}(0).$$

Bu tanıma göre,

$$\alpha^{'}(0)(f) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0)(\partial x_i)_p(f)$$

olur. Bunu,

$$\alpha^{'}(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0)(\partial x_i)_p \in T_pM$$

biçiminde ifade edebiliriz. Böylece $\left\{(\partial x_1)_p, (\partial x_2)_p, \ldots, (\partial x_n)_p\right\}$ kümesi T_pM uzayının bir tabanı olur.

Yukarıdaki ifade p noktasındaki α eğrisinin teğet vektörünün yalnızca $\mathbf{x}$ koordinat fonksiyonunun türevine bağlı olduğunu gösterir. T_pM olağan fonksiyon operasyonları ile birlikte n boyutlu bir vektör uzayı oluşturur. Bu doğrusal yapı, $\mathbf{x}$ paremetrelemesine bağlı değildir.

2.4. Vektör Alanı

Tanım 2.4. M deki her $p \in M$ noktasına bir $X_p \in T_pM$ teğet vektörü karşılık getirirsek X dönüşümüne, M üzerinde bir **vektör alanı** denir.

Bir $(U, \mathbf{x})$ koordinat komşuluğunda,

$$\partial x_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \partial x_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \partial x_n = \frac{\partial}{\partial x_n}$$

vektör alanları vardır. $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koordinatları, $U \subset \mathbb{R}^n$ üzerindeki standart koordinatlardır. $\mathbf{x}(U) \subset M$ üzerinde

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p)\,\partial x_i(p)$$

olarak yazılabilir. $a_i : U \to \mathbb{R}$, a_i ler $\mathbf{x}(U)$ üzerinde fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar C^∞ sınıfındansa, X de C^∞ sınıfındandır denir.

$$\mathfrak{X}(M) = \{M \text{ üzerinde } C^\infty \text{ sınıfından vektör alanları}\}$$

olarak gösterilir. Biz "C^∞ sınıfından ” yerine kısaca ”türevlenebilir” diyeceğiz.

2.5. Lie Çarpımı ve Özellikleri

Tanım 2.5. Türevlenebilir bir manifold M üzerinde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$[X, Y] = XY - YX$$

vektör alanı, X ve Y vektör alanlarının **Lie çarpımı** olarak adlandırılır. Burada $XY \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanı $XY(f) = X(Y(f))$ ile verilir.

Önerme 2.1. $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, a, b gerçel sayılar ve f, g türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar.

(a) $[X, Y] = -[Y, X]$, (ters değişim kuralı)

(b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$, (doğrusallık)

(c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$, (Jacobi özdeşliği)

(d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

olur.

Kanıt. a ve b nin kanıtı tanımdan dolayı açıktır. Şimdi c yi kanıtlayalım.

$$\begin{aligned} [[X,Y],Z] &= [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX \\ [[Y,Z],X] &= [YZ - ZY, X] = YZX - ZYX - XYZ + XZY \\ [[Z,X],Y] &= [ZX - XZ, Y] = ZXY - XZY - YZX + YXZ \end{aligned}$$

özdeşlikleri taraf tarafa toplandığında $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ olur.

Şimdi d yi kanıtlayalım.

$$\begin{aligned} [fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) \\ &= fgXY + fX(g)Y - gfYX - gY(f)X \\ &= fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X \text{ olur.} \end{aligned}$$

□

2.6. Riemann Metriği

Tanım 2.6. Türevlenebilir bir M manifoldunda her $p \in M$ için T_pM teğet uzayı üzerinde bir iç çarpım g, M üzerinde bir **Riemann metrik** olur. $X_p, Y_p \in T_pM$ ise $g(X_p, Y_p) \in \mathbb{R}$ dir. Buradaki g nin metrik olabilmesi için aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır.

(1) $g(X,Y) = g(Y,X)$, (simetrik)

(2) $g(fX + hY, Z) = fg(X,Z) + hg(Y,Z)$, (ikili doğrusal)

(3) $g(X,X) \geq 0$ *ve* $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

x $: U \to M$, $U \subset \mathbb{R}^n$, p nin koordinat komşuluğunda $g(\partial x_i, \partial x_j) = g_{ij}$ olarak tanımlanan fonksiyonlar, türevlenebilir fonksiyonlardır.

2.7. Levi-Civita Konneksiyonu

Tanım 2.7. M, n boyutlu türevlenebilir bir Riemann manifoldu, g Riemann metriği olsun. $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa **Levi-Civita konneksiyonu** olarak adlandırılır ve $\nabla(X,Y) = \nabla_X Y$ ile gösterilir. Konneksiyon olabilmesi için, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ve $f, g \in D(M)$ için

(1) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$

(2) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

(3) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

olmalıdır. Levi-Civita konneksiyonu için de ∇ konneksiyonuna ek olarak,

(4) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$

(5) $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

koşulları sağlanmalıdır.

Bu özellikleri sağlayan tek bir Levi-Civita konneksiyonu vardır. Bu 5 koşuldan, Levi-Civita (Riemann) konneksiyonunun formülü aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2}\{Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g([Z,Y],X)\} \end{aligned}$$

2.8. Tensörler Ve Formlar

Türevlenebilir bir M manifoldunun teğet vektör uzayı T_pM üzerinde

$$\{(\partial x_1)_p, \ldots, (\partial x_n)_p\}$$

yerel bazını alalım. Dual vektör uzayı T_p^*M üzerindeki dual baz,

$$\{(dx_1)_p, \ldots, (dx_n)_p\}$$

ile gösterilir. Bu durumda $(dx_i)_p(\partial x_j)_p = \delta_{ij}$ olur.

Tanım 2.8. Türevlenebilir bir M manifoldunda aldığımız her $p \in M$ için, T_p^*M dual vektör uzayında türevlenebilir olarak bir eleman karşılık getiren fonksiyonlara 1 **form** denir. Yerel olarak ω, 1 form ise

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_i \quad , \quad \omega_i \in D(M),$$

olarak yazılır. Burada ω_i fonksiyonları, türevlenebilir fonksiyonlardır.

Her $p \in M$ noktasında bir $\omega_p \in T_p^*M$ elemanı $\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}$ doğrusal dönüşümdür. Yani $X_p \in T_pM$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise

$$\omega_p\left(cX_p\right) = c\omega_p\left(X_p\right)$$

olur. Bu durumda yerel olarak

$$\begin{aligned}\left(\omega\left(fX\right)\right)_p &= \omega_p\left(f\left(p\right)X_p\right)\\ &= f\left(p\right)\omega_p\left(X_p\right)\\ &= \left(f\omega\left(X\right)\right)_p\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak, $\omega\left(fX\right) = f\omega\left(X\right)$ elde edilir.

Tanım 2.9. Türevlenebilir bir M manifoldu üzerinde $(0, r)$ **t**ensör, her $f \in D(M)$ ve her $i = 1, \ldots, n$ için

$$T\left(X_1, \ldots, fX_i, \ldots, X_r\right) = fT\left(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_r\right) \quad (2.9)$$

koşulunu sağlayan, türevlenebilir ve r-doğrusal

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M) \to D(M)$$

fonksiyonudur. Benzer şekilde (s, r) tensör, her $f \in D(M)$ ve her $i = 1, \ldots, n$ için

$$T\left(X_1, \ldots, fX_i, \ldots, X_r\right) = fT\left(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_r\right)$$

koşulunu sağlayan, türevlenebilir ve r-doğrusal

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{r\ \ tane} \to \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{s\ \ tane}$$

fonksiyonudur.

Örnek 2.2. Türevlenebilir 1-formlar, $(0, 1)$ tensörlerdir. Özel durumda, yerel olarak dx_i olarak tanımlanan 1-form, $(0, 1)$ tensördür.

Örnek 2.3. Türevlenebilir bir M manifoldu üzerindeki $(U, \mathbf{x})$ koordinat komşuluğunda, her i, j için $dx_i \otimes dx_j$ tensörü, her $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\left(dx_i \otimes dx_j\right)\left(X, Y\right) = dx_i\left(X\right)dx_j\left(Y\right)$$

olarak tanımlanan $(0,2)$ tensörüdür. Bu biçimde tanımlanan $dx_i \otimes dx_j$ nin tensör olduğunu göstermek için

$$\begin{aligned}(dx_i \otimes dx_j)(fX, Y) &= dx_i(fX)\, dx_j(Y) \\ &= f dx_i(X)\, dx_j(Y) \\ &= f(dx_i \otimes dx_j)(X, Y)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(dx_i \otimes dx_j)(X, fY) &= dx_i(X)\, dx_j(fY) \\ &= dx_i(X)\, f dx_j(Y) \\ &= f(dx_i \otimes dx_j)(X, Y)\end{aligned}$$

olur. 2-doğrusal olduğu açıktır çünkü her i için dx_i, bir doğrusal dönüşümdür.

Aynı şekilde her $r \in \mathbb{N}$ sayısı için $dx_{i_1} \otimes dx_{i_2} \otimes \ldots \otimes dx_{i_r}$ $(0, r)$ tensörü tanımlanabilir. $dx_i \otimes dx_i$ yerine kısaca dx_i^2 yazabiliriz.

Örnek 2.4. Türevlenebilir bir M manifoldu üzerindeki g Riemann metriği de $(0,2)$ tensördür.

$\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart metrik $g = (dx)^2 + (dy)^2$ olarak yazılabilir. Burada (x, y), $\mathbb{R}^2$ deki koordinatlardır.

$$\begin{aligned}X &= a\partial x + b\partial y \\ Y &= c\partial x + d\partial y \quad a, b, c, d \in D\left(\mathbb{R}^2\right)\end{aligned}$$

ise,

$$\begin{aligned}g(a\partial x + b\partial y, c\partial x + d\partial y) &= ac + bd \\ &= (dx \otimes dx)(X, Y) + (dy \otimes dy)(X, Y) \\ &= (dx)^2 (X, Y) + (dy)^2 (X, Y)\end{aligned}$$

olur.

Tanım 2.10. $r \in \mathbb{N}$ için bir r**-form** ω,

$$\omega\left(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_r\right) = -\omega\left(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_r\right)$$

koşulunu sağlayan $(0, r)$ tensörüdür.

Bu tanıma göre eğer $i \neq j$ için $X_i = X_j$ olursa

$$\omega\left(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_i, \ldots, X_r\right) = 0$$

olur. $\mathrm{boy}M = n$ ve $r > n$ ise tüm $r-$formlar sıfırdır. Çünkü $r > n$ tane vektör alanı bağımsız olamaz. Bu durumda örneğin $X_2 = fX_1$ ise

$$\begin{aligned} \omega\left(X_1, X_2, \ldots, X_r\right) &= \omega\left(X_1, fX_1, \ldots, X_r\right) \\ &= f\omega\left(X_1, X_1, \ldots, X_r\right) \\ &= 0 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Aşağıdaki tanım, Kobayashi ve Nomizu (1963) sayfa 7 de verilmiştir.

Tanım 2.11. Eğer r tane 1 form $\omega_1, \ldots, \omega_r$ varsa $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r$ r formu

$$\left(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r\right)\left(X_1, \ldots, X_r\right) = \frac{1}{r!} \det\left(\omega_i\left(X_j\right)\right)$$

olarak tanımlanır. Bu formül $r = 2$ için

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(X_1, X_2) = \frac{1}{2}\left\{\omega_1(X_1)\omega_2(X_2) - \omega_1(X_2)\omega_2(X_1)\right\}$$

olur.

ω bir r form, $(x_1, \ldots, x_n)$ yerel koordinatlar olarak alıp, $\omega\left(\partial x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_r}\right) = f_{i_1 \ldots i_r}$ ve $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n$ diyelim. Gösterim kolaylığı açısından $f_{i_1 \ldots i_r}$ yerine kısaca f_I kullanabiliriz. Bu durumda $f^j_{i_k} \in D(M)$ için

$$\begin{aligned} \omega\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\right) &= \omega\left(\sum_{i_1=1}^{n} f^1_{i_1}\partial x_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} f^2_{i_2}\partial x_{i_2}, \ldots, \sum_{i_r=1}^{n} f^r_{i_r}\partial x_{i_r}\right) \\ &= \sum_{i_1, \ldots, i_r=1}^{n} f^1_{i_1} \ldots f^r_{i_r}\omega\left(\partial x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_r}\right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} a_{i_1 \ldots i_r}\omega\left(\partial x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_r}\right) \\ &= \sum_{I} a_I \omega\left(\partial x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_r}\right) \end{aligned}$$

olur.

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \left(\partial x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_r}\right) \;=\; \frac{1}{r!} \det\left(I_{n \times n}\right) = \frac{1}{r!}$$

olduğundan,

$$\omega\left(\partial x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_r}\right) = r! f_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \left(\partial x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_r}\right)$$

olarak yazabiliriz. Sonuç olarak

$$\omega \;=\; \sum_{I} b_I dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$$

olur. Yani $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$, $b_{i_1 \ldots i_r} \in D(M)$ foksiyonları için $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$ elemanları tüm r formlar uzayı için bir taban oluşturur. r formlar uzayı $\Omega^r(M)$ ile gösterilir.

$$\mathrm{boy}(\Omega^{\mathrm{r}}(\mathrm{M})) = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{r}} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

ve özel olarak $\mathrm{boy}(\Omega^0(\mathrm{M})) = 1$, $\mathrm{boy}(\Omega^1(\mathrm{M})) = n$, $\mathrm{boy}(\Omega^{\mathrm{n}}(\mathrm{M})) = 1$ dir. $r > n$ ise $\Omega^r(M) = 0$ olur.

ω bir r form, η bir s form ise,

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{I} \omega_I dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \\
\eta &= \sum_{J} \eta_J dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_s} \\
\omega \wedge \eta &= \sum_{I,J} \omega_I \eta_J dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_s}
\end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda

(i) $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$

$\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$

$(f\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (f\eta) = f\,(\omega \wedge \eta)$

(ii) $\omega \wedge \eta = (-1)^{rs}\, \eta \wedge \omega$ olur.

2.9. Diferansiyel

Tanım 2.12. Türevlenebilir $f : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için df diferansiyeli, $p \in M$ ve $X_p \in T_pM$ için $(df)_p\,(X_p) = X_p f$ olarak tanımlanan $1-$formdur.

Bu tanıma göre $(x_1, \ldots, x_n)$ yerel koordinatlarında

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

yazabiliriz.

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a_i\,(\partial x_i)_p \text{ ise}$$

$$X_p(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p (dx_i)_p(X_p)$$

olur.

Tüm formlar üzerindeki d diferansiyeli aşağıdaki koşulları sağlayan operatördür.

(1) (i) ω bir r form ise, $d\omega$ bir $r+1$ formdur.

(ii) ω_1, ω_2 formları r formlar ise $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$ olur.

(iii) c sabit, ω bir r form ise $d\,(c\omega) = cd(\omega)$ olur.

(iv) $d^2 = 0$ dır.

(2) $f \in \Omega^0(M)$ türevlenebilir fonksiyonu için df yukarıdaki tanımlanan diferansiyeldir.

(3) $\omega \in \Omega^r(M), \eta \in \Omega^s(M)$ ise $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r\,\omega \wedge d\eta$ dır.

$f \in \Omega^0(M)$, $\omega \in \Omega^r(M)$için $f\omega \in \Omega^r(M)$ formunu $f \wedge \omega$ olarak düşünebiliriz. Bu durumda $d(f\omega) = df \wedge \omega + fd\omega$ olur.

Yerel koordinatlarda

$$\omega = \sum_I f_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$$

ise,

$$d\omega = \sum_I df_{i_1 \ldots i_r} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$$

olur.

Aşağıdaki önerme Kobayashi ve Nomizu (1963) Sayfa 36 da verilmiştir.

Önerme 2.2. ω bir r form ise

$$d\omega(X_0, X_1, \ldots, X_r) = \frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i(\omega(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_r))$$
$$+\frac{1}{r+1}\sum_{0\leq i<j\leq r}(-1)^{i+j}\omega\left([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_r\right)$$

dir. Bu formül $r = 1$ için

$$d\omega(X, Y) = \frac{1}{2}\left(X\left(\omega\left(Y\right)\right) - Y\left(\omega\left(X\right)\right) - \omega\left([X, Y]\right)\right)$$

ve $r = 2$ için

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= \frac{1}{3}(X(\omega(Y, Z)) - Y(\omega(X, Z)) + Z(\omega(X, Y)) \\ &\quad -\omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X)) \end{aligned}$$

verir.

3. EĞRİLİK

3.1. Riemann Eğriliği

Tanım 3.1. M türevlenebilir bir Riemann manifoldu, ∇ Riemann konneksiyonu olmak üzere her $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

olarak tanımlanan $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, fonksiyonuna **Riemann Eğriliği** denir.

Örnek 3.1. Eğer $M = \mathbb{R}^n$ ve $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ için $R(X,Y)Z = 0$ olur. $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ şeklinde verilen Z vektör alanının bileşenleri $\mathbb{R}^n$ nin doğal koordinatlarından geliyorsa, $\nabla_X Z = (X[z_1], \ldots, X[z_n])$ elde edilir. Böylece,

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YX[z_1], \ldots, YX[z_n])$$

ve buradan da başta belirtildiği gibi

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = 0$$

elde edilir.

Eğriliğin tanımını göstermenin başka bir yolu da $p \in M$ etrafında $\{x_i\}$ koordinat sistemini göz önüne aldığımızda $\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}\right] = 0$ olduğu için

$$R\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}\right)\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}}\right)\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k}$$

elde ederiz. Bu da eğriliğin, kovaryant türevin değişmezliğini ölçtüğünü gösterir. Başka bir deyişle eğrilik, manifoldun $\mathbb{R}^n$ öklidiyen manifoldundan ne kadar farklı olduğunu ölçer.

Önerme 3.1. Riemann manifoldunun R eğriliği $(1,3)$ tensördür. Başka bir deyişle,

(i) her $f, g \in D(M)$, $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1), \\ R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2) \end{aligned}$$

ve

(ii) her $f \in D(M)$, $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Z+W) &= R(X,Y)Z + R(X,Y)W, \\ R(X,Y)fZ &= fR(X,Y)Z \end{aligned}$$

dir.

Kanıt. (i) Doğrudan tanımın sonucudur.

(ii) yi kanıtlayalım. (ii) nin ilk kısmı açıktır. İkinci kısımda ise

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y fZ &= \nabla_X (f\nabla_Y Z + (Yf)Z) \\ &= f\nabla_X\nabla_Y Z + (Xf)\nabla_Y Z + (Yf)\nabla_X Z + X(Yf)Z \end{aligned}$$

dir. Bu yüzden

$$\nabla_X\nabla_Y(fZ) - \nabla_Y\nabla_X(fZ) = f(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X)Z + ((XY - YX)f)Z$$

ve böylece

$$\begin{aligned} R(X,Y)fZ &= f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z + ([X,Y]f)Z \\ &\quad - f\nabla_{[X,Y]}Z - ([X,Y]f)Z \\ &= fR(X,Y)Z \end{aligned}$$

olur. □

Açıklama 3.1. Yukarıda gösterilen kanıtın analizinden görüleceği gibi eğriliğin tanımındaki $\nabla_{[X,Y]}Z$ teriminin varlığı, eğriliğin bir tensör olmasını sağlar.

Önerme 3.2. (Bianchi Özdeşliği) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ dır.

Kanıt. Riemann konneksiyonunun simetrisinden

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &\quad + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X \\ &\quad + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y \\ &= \nabla_Y[Z,X] + \nabla_Z[X,Y] + \nabla_X[Y,Z] \\ &\quad - \nabla_{[Z,X]}Y - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X \\ &= [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] + [X,[Y,Z]] \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik vektör alanları için Jacobi özdeşliğidir.

□

Bundan sonra, $g(R(X,Y)Z,T) = (X,Y,Z,T)$ şeklinde göstereceğiz.

Önerme 3.3. *(a)* $(X,Y,Z,T) + (Y,Z,X,T) + (Z,X,Y,T) = 0$

(b) $(X,Y,Z,T) = -(Y,X,Z,T)$

(c) $(X,Y,Z,T) = -(X,Y,T,Z)$

(d) $(X,Y,Z,T) = (Z,T,X,Y)$

Kanıt. (a) Bianchi özdeşliğidir.

(b) Tanımdan gelir.

(c) şıkkına gelince

$$(X,Y,Z,Z) = g\left(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, Z\right).$$

Fakat

$$Xg(\nabla_Y Z, Z) = g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z)$$

olduğu için

$$g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) = Xg(\nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z)$$

ve Levi - Civita konneksiyonunun özelliğinden

$$g\left(\nabla_{[X,Y]} Z, Z\right) = \frac{1}{2}[X,Y]\, g(Z,Z)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} (X,Y,Z,Z) &= Xg(\nabla_Y Z, Z) - Yg(\nabla_X Z, Z) - \frac{1}{2}[X,Y]\, g(Z,Z) \\ &= \frac{1}{2}X(Yg(Z,Z)) - \frac{1}{2}Y(Xg(Z,Z)) - \frac{1}{2}[X,Y]\, g(Z,Z) \\ &= \frac{1}{2}[X,Y]\, g(Z,Z) - \frac{1}{2}[X,Y]\, g(Z,Z) = 0 \end{aligned}$$

olur. $(X,Y,Z+T,Z+T) = 0$ olarak alırsak,

$$(X,Y,Z,Z) + (X,Y,Z,T) + (X,Y,T,Z) + (X,Y,T,T) = 0$$

ve böylece $(X,Y,Z,T) = -(X,Y,T,Z)$ olur. Bu da (c) yi kanıtlar.

(d) yi kanıtlamak için (a) yı kullanırız.

$$\begin{aligned}
(X,Y,Z,T)+(Y,Z,X,T)+(Z,X,Y,T) &= 0 \\
(Y,Z,T,X)+(Z,T,Y,X)+(T,Y,Z,X) &= 0 \\
(Z,T,X,Y)+(T,X,Z,Y)+(X,Z,T,Y) &= 0 \\
(T,X,Y,Z)+(X,Y,T,Z)+(Y,T,X,Z) &= 0
\end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemleri topladığımızda

$$\begin{aligned}
2(Z,X,Y,T)+2(T,Y,Z,X) &= 0 \text{ ve} \\
(Z,X,Y,T) &= (Y,T,Z,X) \text{ olur.}
\end{aligned}$$

□

3.2. Kesitsel Eğrilik

Şimdi tanımlayacağımız kesitsel (ya da Riemann) eğriliği, eğrilik operatörüyle yakından ilişkilidir. Bundan sonra aşağıdaki gösterimi kullanmak daha uygun olur. $X,Y \in T_pM$ vektörleri verilsin.

$$\|X \wedge Y\| = \sqrt{\|X\|^2 \|Y\|^2 - g(X,Y)^2}$$

$$\|X\|^2 = g(X,X), \quad \|Y\|^2 = g(Y,Y)$$

şeklinde gösterilir.

Önerme 3.4. $\sigma \subset T_pM$, T_pM teğet uzayının iki boyutlu bir alt uzayı ve $X,Y \in \sigma$ iki doğrusal bağımsız vektör olsun. Bu durumda

$$K(X,Y) = \frac{(X,Y,Y,X)}{\|X \wedge Y\|^2}$$

olarak tanımlanan $K(X,Y)$ kesitsel eğriliği, $X,Y \in \sigma$ nın seçiminden bağımsızdır.

Kanıt. $\sigma = \operatorname{span}(X,Y) = \operatorname{span}(Z,W)$ olsun. O zaman $a,b,\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$Z = aX + bY, \quad W = \lambda X + \mu Y$$

olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
(Z,W,W,Z) &= (aX+bY,\lambda X+\mu Y,\lambda X+\mu Y,aX+bY) \\
&= ab\mu\lambda\,(X,Y,X,Y)+a^2\mu^2(X,Y,Y,X) \\
&\quad +b^2\lambda^2(Y,X,X,Y)+ba\lambda\mu(Y,X,Y,X) \\
&= (a^2\mu^2+b^2\lambda^2-2ab\lambda\mu)(X,Y,Y,X) \\
&= (a\mu-b\lambda)^2(X,Y,Y,X)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|Z\wedge W\|^2 &= \|Z\|^2\|W\|^2-g\,(Z,W)^2 \\
&= g\,(aX+bY,aX+bY)\,g(\lambda X+\mu Y,\lambda X+\mu Y) \\
&\quad -g(aX+bY,\lambda X+\mu Y)^2 \\
&= (a^2g(X,X)+2abg(X,Y)+b^2g(Y,Y))(\lambda^2g(X,X) \\
&\quad +2\lambda\mu g(X,Y)+\mu^2g(Y,Y)) \\
&\quad -(a\lambda g(X,X)+(a\mu+b\lambda)g(X,Y)+b\mu g(Y,Y))^2 \\
&= a^2\lambda^2g(X,X)^2+2(a^2\lambda\mu+\lambda^2ab)g(X,X)g(X,Y) \\
&\quad +(a^2\mu^2+b^2\lambda^2)g(X,X)g(Y,Y)+4ab\lambda\mu g(X,Y)^2 \\
&\quad +2(ab\mu^2+b^2\lambda\mu)g(X,Y)g(Y,Y)+b^2\mu^2g(Y,Y)^2 \\
&\quad -a^2\lambda^2g(X,X)^2-2a\lambda(a\mu+b\lambda)g(X,X)g(X,Y) \\
&\quad -2ab\lambda\mu g(X,X)g(Y,Y)-(a\mu+b\lambda)^2g(X,Y)^2 \\
&\quad -2b\mu(a\mu+b\lambda)g(X,Y)g(Y,Y)-b^2\mu^2g(Y,Y)^2 \\
&= (a^2\mu^2+b^2\lambda^2-2ab\lambda\mu)g(X,X)g(Y,Y) \\
&\quad +(4ab\lambda\mu-(a\mu+b\lambda)^2)g(X,Y)^2 \\
&= (a\mu-b\lambda)^2(\|X\|^2\|Y\|^2-g(X,Y)^2)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
K(Z,W) &= \frac{(Z,W,W,Z)}{\|Z\wedge W\|^2} \\
&= \frac{(a\mu-b\lambda)^2\,(X,Y,Y,X)}{(a\mu-b\lambda)^2\,\|X\wedge Y\|^2} \\
&= K(X,Y)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak kesitsel eğriliğimiz $X, Y \in \sigma$ nın seçiminden bağımsız olur. $\square$

Örnek 3.2. Standart metrik ile düşündüğümüzde $\mathbb{R}^n$ Riemann manifoldunun eğriliği 0 olduğu için tüm kesitsel eğrilikleri de 0 dır.

Örnek 3.3. Eğriliği sıfır olmayan bir örnek verecek olursak $M = \mathbb{R}^3$ türevlenebilir manifoldunu

$$g = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

metriği ile düşünelim.Bu durumda Levi-Civita konneksiyonunu hesaplayalım.

$\nabla_{\partial x}\partial x = \Gamma_{11}^1 \partial x + \Gamma_{11}^2 \partial y + \Gamma_{11}^3 \partial z$ olarak alırsak,

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_{\partial x}\partial x, \partial x\right) &= \Gamma_{11}^1 g_{11} + \Gamma_{11}^2 g_{21} + \Gamma_{11}^3 g_{31} \\ &= \frac{(1+y^2)}{4}\Gamma_{11}^1 + \left(-\frac{y}{4}\right)\Gamma_{11}^3 \end{aligned}$$

elde ederiz. Öte yandan,

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_{\partial x}\partial x, \partial x\right) &= \frac{1}{2}\left\{\partial x g\left(\partial x, \partial x\right) + \partial x g\left(\partial x, \partial x\right) - \partial x g\left(\partial x, \partial x\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\partial x g_{11} = 0 \end{aligned}$$

olduğu için,

$$\begin{aligned} \frac{(1+y^2)}{4}\Gamma_{11}^1 + \left(-\frac{y}{4}\right)\Gamma_{11}^3 &= 0 \\ \left(1+y^2\right)\Gamma_{11}^1 - y\Gamma_{11}^3 &= 0 \end{aligned}$$

denklemini elde ederiz.

Şimdi $g\left(\nabla_{\partial x}\partial x, \partial y\right)$ terimini önce

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_{\partial x}\partial x, \partial y\right) &= \Gamma_{11}^1 g_{12} + \Gamma_{11}^2 g_{22} + \Gamma_{11}^3 g_{32} \\ &= \frac{1}{4}\Gamma_{11}^2 \end{aligned}$$

sonra da

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_{\partial x}\partial x, \partial y\right) &= \frac{1}{2}\left\{\partial x g\left(\partial x, \partial y\right) + \partial x g\left(\partial y, \partial x\right) - \partial y g\left(\partial x, \partial x\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{-\frac{2y}{4}\right\} = -\frac{y}{4} \end{aligned}$$

olarak hesaplayınca, $\frac{1}{4}\Gamma_{11}^{2} = -\frac{y}{4}$ ve böylece $\Gamma_{11}^{2} = -y$ olur.

Son olarak $g\left(\nabla_{\partial x}\partial x, \partial z\right)$ terimini önce

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_{\partial x}\partial x, \partial z\right) &= \Gamma_{11}^{1} g_{13} + \Gamma_{11}^{2} g_{23} + \Gamma_{11}^{3} g_{33} \\ &= \left(-\frac{y}{4}\right)\Gamma_{11}^{1} + \frac{1}{4}\Gamma_{11}^{3} \end{aligned}$$

sonra da

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_{\partial x}\partial x, \partial z\right) &= \frac{1}{2}\left\{\partial x g\left(\partial x, \partial z\right) + \partial x g\left(\partial z, \partial x\right) - \partial z g\left(\partial x, \partial x\right)\right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak hesaplayınca,

$$\begin{aligned} -\frac{y}{4}\Gamma_{11}^{1} + \frac{1}{4}\Gamma_{11}^{3} &= 0 \\ \Gamma_{11}^{3} &= y\Gamma_{11}^{1} \end{aligned}$$

denklemini elde ederiz. Daha önce elde ettiğimiz

$$\left(1 + y^{2}\right)\Gamma_{11}^{1} - y\Gamma_{11}^{3} = 0$$

denklemiyle birlikte çözünce, $\Gamma_{11}^{1} = \Gamma_{11}^{3} = 0$ elde ederiz. Böylece

- $\nabla_{\partial x}\partial x = -y\partial y$

olur.

Benzer şekilde

- $\nabla_{\partial x}\partial y = \nabla_{\partial y}\partial x = \frac{y}{2}\partial x + \frac{y^{2}-1}{2}\partial z$
- $\nabla_{\partial x}\partial z = \nabla_{\partial z}\partial x = \frac{1}{2}\partial y$
- $\nabla_{\partial y}\partial y = 0$
- $\nabla_{\partial z}\partial y = \nabla_{\partial y}\partial z = -\frac{1}{2}\partial x - \frac{y}{2}\partial z$
- $\nabla_{\partial z}\partial z = 0$

Şimdi taban vektörlerine göre eğriliklerimizi hesaplayalım.

- $$\begin{aligned} g\left(R\left(\partial x,\partial y\right)\partial x,\partial y\right) &= g\left(\nabla_{\partial x}\nabla_{\partial y}\partial x-\nabla_{\partial y}\nabla_{\partial x}\partial x-\nabla_{[\partial x,\partial y]}\partial x,\partial y\right)\\ g\left(R\left(\partial x,\partial y\right)\partial x,\partial y\right) &= g\left(\nabla_{\partial x}\frac{y}{2}\partial x+\left(\frac{y^2-1}{2}\right)\partial z-\nabla_{\partial y}\left(-y\right)\partial y,\partial y\right)\\ &= g\left(\frac{y}{2}\nabla_{\partial x}\partial x+\left(\frac{y^2-1}{2}\right)\nabla_{\partial x}\partial z+\partial y+y\nabla_{\partial y}\partial y,\partial y\right)\\ &= g\left(-\frac{y^2}{2}\partial y+\left(\frac{y^2-1}{4}\right)\partial y+\partial y,\partial y\right)\\ &= g\left(\frac{3-y^2}{4}\partial y,\partial y\right)\\ &= \left(\frac{3-y^2}{4}\right)g\left(\partial y,\partial y\right)\\ &= \frac{3-y^2}{16}\end{aligned}$$

Benzer şekilde

- $g\left(R\left(\partial x,\partial y\right)\partial x,\partial y\right)=\dfrac{3-y^2}{16}$
- $g\left(R\left(\partial x,\partial y\right)\partial y,\partial z\right)=-\dfrac{y}{16}$
- $g\left(R\left(\partial x,\partial y\right)\partial x,\partial z\right)=0$
- $g\left(R\left(\partial x,\partial z\right)\partial x,\partial z\right)=-\dfrac{1}{16}$
- $g\left(R\left(\partial y,\partial z\right)\partial x,\partial z\right)=0$
- $g\left(R\left(\partial y,\partial z\right)\partial y,\partial z\right)=-\dfrac{1}{16}$

Diğer eğrilikler de bunlara eşit ya da 0 olur.

Şimdi $X=a_1\partial x+a_2\partial y+a_3\partial z$ ve $Y=b_1\partial x+b_2\partial y+b_3\partial z$ olarak aldığımızda,

$$\begin{aligned} g\left(R\left(X,Y\right)Y,X\right) &= \frac{y^2-3}{16}\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2+\frac{y}{8}\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\\ &\quad+\frac{1}{16}\left(\left(a_1b_3-a_3b_1\right)^2+\left(a_2b_3-a_3b_2\right)^2\right)\\ &= \frac{a_2^2}{16}\left(yb_1-b_3\right)^2+\frac{b_2^2}{16}\left(ya_1-a_3\right)^2\\ &\quad-\frac{a_2b_2}{8}\left(a_3-ya_1\right)\left(b_3-yb_1\right)\\ &\quad-\frac{3}{16}\left[\frac{1}{2}\left(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-\left(b_1-a_2\right)^2-\left(b_2+a_1\right)^2\right)\right]^2\\ &\quad+\frac{1}{16}\left[a_1\left(b_3-yb_1\right)+b_1\left(ya_1-a_3\right)\right]^2\end{aligned}$$

buluruz.

$$\|X\|^2 = g\left(X, X\right) = \frac{1}{4}\left[a_1^2\left(1+y^2\right) - 2ya_1a_3 + a_2^2 + a_3^2\right]$$

ve

$$\|Y\|^2 = g\left(Y, Y\right) = \frac{1}{4}\left[b_1^2\left(1+y^2\right) - 2yb_1b_3 + b_2^2 + b_3^2\right]$$

dür.

$$g\left(X, \partial z\right) = 0 \ \text{ ve } \ \|X\| = 1 \Leftrightarrow a_3 = ya_1, \ \ a_1^2 + a_2^2 = 4$$

olduğundan, eğer $X = a_1\partial x + a_2\partial y + ya_1\partial z$ ve $Y = a_2\partial x - a_1\partial y + ya_2\partial z$ olarak alırsak, $g\left(X, \partial z\right) = g\left(Y, \partial z\right) = g(X, Y) = 0$ olur. Bu durumda X ve Y bağımsızdır. Buna ek olarak $a_1^2 + a_2^2 = 4$ alırsak, $\|X\|^2 = \|Y\|^2 = 1$ elde ederiz. Böylece

$$\left(X, Y, Y, X\right) = \frac{-3}{16}\left(a_1^2 + a_2^2\right)^2 = -3$$

ve

$$K\left(X, Y\right) = \frac{\left(X, Y, Y, X\right)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - g\left(X, Y\right)^2} = -3$$

elde edilir.

4. KONTAKT MANİFOLD

Tanım 4.1. Boyutu $2n+1$ olan türevlenebilir bir M manifoldu üzerinde, $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ koşulunu sağlayan η $1-$ formu varsa, M manifolduna **kontakt manifold**, η formuna da **kontakt form** denir.

Kontakt manifoldun boyutu $2n+1$ ve $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ olduğu için, $\eta \wedge (d\eta)^n$ formu M üzerinde bir hacim formudur ve böylece M kontakt manifoldu yönlendirilebilirdir.

Kontakt (M, η) manifoldu üzerinde $\eta(X) = 0$ koşulunu sağlayan X vektör alanlarının oluşturduğu alt demet, *yatay alt demet* veya *kontakt alt demet* olarak adlandırılır ve $\mathcal{H}$ ile gösterilir.

Örnek 4.1. $M = \mathbb{R}^3$ ve $\eta = dz - ydx$ olarak alalım ve η nın kontakt form olduğunu göstermek için $\eta \wedge d\eta \neq 0$ olduğunu göstermeye çalışalım.

$$\begin{aligned} d\eta &= -dy \wedge dx = dx \wedge dy \\ \eta \wedge d\eta &= (dz - ydx) \wedge (dx \wedge dy) \\ &= dz \wedge dx \wedge dy - ydx \wedge dx \wedge dy \\ &= dx \wedge dy \wedge dz \neq 0 \end{aligned}$$

Bu durumda (M, η) ikilisi 3 boyutlu bir kontakt manifolddur.

Teorem 4.1. Kontakt (M^{2n+1}, η) manifoldu üzerinde, her X vektör alanı için $d\eta(\xi, X) = 0$ ve $\eta(\xi) = 1$ olan tek bir ξ vektör alanı vardır.

Kanıt. Önce böyle bir vektör alanının var olduğunu göstermemiz gerekir. Yerel olarak kontakt alt demetin aşağıdaki koşulu sağlayan bir $\{X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots, X_n, Y_n\}$ tabanını bulabiliriz: Her $1 \leq i, j \leq n$ için

$$d\eta(X_i, Y_i) \neq 0, \;\; d\eta(X_i, X_j) = d\eta(Y_i, Y_j) = 0$$

ve her $1 \leq i \neq j \leq n$ için

$$d\eta(X_i, Y_j) = 0.$$

Bunun nedeni $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ olmasıdır. Bu tabandaki vektör alanlarından bağımsız bir Z vektör alanı için

$$d\eta(Z, X_i) = a_i, \;\; d\eta(Z, Y_i) = b_i$$

olsun.

$$Y = Z - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i}{d\eta(X_i, Y_i)} X_i + \frac{a_i}{d\eta(Y_i, X_i)} Y_i \right)$$

olarak alırsak, her X vektör alanı için $d\eta(Y, X) = 0$ olur.

Şimdi bu koşulu sağlayan tek bir vektör alanının olduğunu göstereceğiz.
$d\eta\,(Y, X) = d\eta\,(Z, X) = 0$ koşulunu her X vektör alanı için sağlayan iki bağımsız Y, Z vektör alanı varsa, tüm $X_1, X_2, \ldots, X_{2n-1}$ vektör alanları için

$$\eta \wedge (d\eta)^n\,(Y, Z, X_1, X_2, \ldots, X_{2n-1}) = 0$$

olur. Bu da η nın kontakt form olmasıyla çelişir. Sonuç olarak her X vektör alanı için $d\eta\,(Y, X) = 0$ koşulunu sağlayan tek bir Y doğrultusu vardır. Bu doğrultuda $\eta\,(Y) \neq 0$ olur. Çünkü $\eta\,(Y) = 0$ olursa, tüm $X_1, X_2 \ldots X_{2n}$ vektör alanları için

$$\eta \wedge (d\eta)^n\,(Y, X_1, X_2, \ldots, X_{2n}) = 0$$

olur ve bu da η nın kontakt form olmasıyla çelişir.

$$\xi = \tfrac{1}{\eta(Y)} Y$$

olarak alırsak,

$$\eta\,(\xi) = \eta\left(\tfrac{1}{\eta(Y)} Y\right) = \tfrac{1}{\eta(Y)} \eta\,(Y) = 1$$

olur ve $\xi = \frac{Y}{\eta(Y)}$ vektör alanı, istediğimiz vektör alanını verir.

$\square$

Tanım 4.2. Kontakt (M, η) manifoldu üzerinde, yukarıdaki teoremin verdiği ξ vektör alanı, **karakteristik vektör alanı** veya **Reeb vektör alanı** olarak adlandırılır.

Örnek 4.2. $\mathbb{R}^3$ üzerinde $\eta = dz - ydx$ kontakt formu için karakteristik vektör alanının $\xi = \partial z$ olduğunu gösterelim. $\eta\,(\xi) = \eta\,(\partial z) = (dz - ydx)\,(\partial z) = 1$ olur.

$d\eta = dx \wedge dy$ olduğundan, $X = a\partial x + b\partial y + c\partial z$ vektör alanı için

$$\begin{aligned} 2d\eta\,(\xi, X) &= 2dx \wedge dy\,(\xi, X) = dx\,(\xi)\,dy\,(X) - dy\,(\xi)\,dx\,(X) \\ &= 0.b - 0.a = 0 \\ d\eta\,(\xi, X) &= 0 \end{aligned}$$

olur.

Aşağıdaki teorem Blair (2010) Sayfa 24 de verilmiştir.

Teorem 4.2. Kontakt (M, η) manifoldunun her noktasının etrafında

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i$$

olacak biçimde $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z)$ yerel koordinatları vardır.

Tanım 4.3. Kontakt manifold olarak (M, η) ve karakteristik vektör alanı olarak ξ alalım. M üzerinde her X, Y vektör alanları için aşağıdaki koşulları sağlayan bir g metriği ve φ $(1,1)$ tensörü var ise $(M, \eta, \xi, g, \varphi)$ yapısına **kontakt metrik yapı** adı verilir.

(i) $\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi$,

(ii) $\varphi\xi = 0$,

(iii) $g(X, \xi) = \eta(X)$,

(iv) $g(X, \varphi Y) = -g(\varphi X, Y)$,

(v) $d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y)$.

Sonuç 4.1. $(M, \eta, \xi, g, \varphi)$ bir kontakt metrik yapı ise,

(i) $\eta(\varphi X) = 0$,

(ii) $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$ olur.

Kanıt. $\eta(\varphi X) = 0$ olduğunu gösterelim. Tanım 4.3.; madde (iii) de X yerine φX alıp, madde (ii) ve madde (iv) ü de kullandığımızda,

$$\begin{aligned} \eta(\varphi X) &= g(\varphi X, \xi) \\ &= -g(X, \varphi\xi) \\ &= -g(X, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur.

$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$ olduğunu gösterelim.

Tanım 4.3.; madde (i), madde (iii) ve madde (iv) ü de kullandığımızda,

$$\begin{aligned} g(\varphi X, \varphi Y) &= -g(X, \varphi^2 Y) \\ &= -g(X, -Y + \eta(Y)\xi) \\ &= -\left[g(X, -Y) + g(X, \eta(Y)\xi)\right] \\ &= g(X, Y) - \eta(Y) g(X, \xi) \\ &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

elde ederiz. □

Örnek 4.3. $M = \mathbb{R}^3$ üzerinde $\eta = \frac{1}{2}(dz - ydx)$, kontakt formunun karakteristik vektör alanı $\xi = 2\partial z$ olur.

$\varphi(\partial x) = -\partial y,\ \ \varphi(\partial y) = \partial x + y\partial z,\ \varphi(\partial z) = 0$
ve

$$g = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak alıp $(\mathbb{R}^3, \eta, \xi, g, \varphi)$ yapısının kontakt metrik yapı olduğunu gösterelim.
$X = a_1\partial x + b_1\partial y + c_1\partial z$
$Y = a_2\partial x + b_2\partial y + c_2\partial z$
olarak alalım. O zaman
$\varphi X = \varphi(a_1\partial x + b_1\partial y + c_1\partial z) = b_1\partial x - a_1\partial y + b_1 y\partial z$

$$\begin{aligned} \eta(X) &= \frac{1}{2}(dz - ydx)(a_1\partial x + b_1\partial y + c_1\partial z) \\ &= \frac{1}{2}(c_1 - ya_1) \end{aligned}$$

$$\eta(X)\xi = \frac{1}{2}(c_1 - ya_1)(2\partial z) = (c_1 - ya_1)\partial z \tag{4.1}$$

olur.

(i)

$$\begin{aligned}
\varphi^2 X = \varphi(\varphi X) &= \varphi(b_1\partial x - a_1\partial y + b_1 y\partial z) \\
&= b_1(-\partial y) - a_1(\partial x + y\partial z) \\
&= -(a_1\partial x + b_1\partial y + c_1\partial z) + (c_1 - ya_1)\partial z
\end{aligned}$$

ve böylece denklem (4.1) den,

$$= -X + \eta(X)\xi \quad \text{elde ederiz.}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
g(X,\xi) &= g(a_1\partial x + b_1\partial y + c_1\partial z, 2\partial z) \\
&= 2a_1 g(\partial x,\partial z) + 2b_1 g(\partial y,\partial z) + 2c_1 g(\partial z,\partial z) \\
&= \frac{1}{4}(2a_1(-y) + 2c_1) \\
&= \frac{1}{2}(c_1 - ya_1) \\
&= \eta(X)
\end{aligned}$$

olur.

(iii)

$$\begin{aligned}
g(X,\varphi Y) &= g(a_1\partial x + b_1\partial y + c_1\partial z, a_2(-\partial y) + b_2(\partial x + y\partial z)) \\
&= g(a_1\partial x + b_1\partial y + c_1\partial z, b_2\partial x - a_2\partial y + b_2 y\partial z) \\
&= \frac{1}{4}\left(a_1b_2\left(1+y^2\right) + a_1b_2y(-y) - b_1a_2 + c_1b_2(-y) + c_1b_2y\right) \\
&= \frac{1}{4}(a_1b_2 - b_1a_2) \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\varphi X, Y) &= g(b_1\partial x - a_1\partial y + b_1y\partial z, a_2\partial x + b_2\partial y + c_2\partial z) \\
&= \frac{1}{4}\left(b_1a_2\left(1+y^2\right) + b_1c_2(-y) - a_1b_2 + b_1ya_2(-y) + b_1yc_2\right) \\
&= -\frac{1}{4}(a_1b_2 - b_1a_2)
\end{aligned}$$

denklem (4.2) den; $g(X,\varphi Y) = -g(\varphi X, Y)$ olur.

(iv)

$$\begin{aligned}
\varphi(X) &= a_1\varphi(\partial x) + b_1\varphi(\partial y) + c_1\varphi(\partial z) \\
\varphi(\xi) &= 2\varphi(\partial z) = 2.0 = 0
\end{aligned}$$

olur.

(v)

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{2}\left(dz - ydx\right), \\ d\eta &= \frac{1}{2}\left(-dy \wedge dx\right) = \frac{1}{2}\left(dx \wedge dy\right)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}d\eta\left(X,Y\right) &= \frac{1}{2}\left(dx \wedge dy\right)\left(X,Y\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left[dx\left(X\right)dy\left(Y\right) - dx\left(Y\right)dy\left(X\right)\right]\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[dx\left(a_1\partial x + b_1\partial y + c_1\partial z\right)dy\left(a_2\partial x + b_2\partial y + c_2\partial z\right)\right. \\ &\quad \left. - dx\left(a_2\partial x + b_2\partial y + c_2\partial z\right)dy\left(a_1\partial x + b_1\partial y + c_1\partial z\right)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(a_1b_2 - b_1a_2\right)\end{aligned}$$

Denklem (4.2) den; $d\eta\left(X,Y\right) = g\left(X,\varphi Y\right)$ elde edilir.

5. SASAKİAN MANİFOLDLAR

Tanım 5.1. $2n$ boyutlu M manifoldu üzerinde $J^2 = -I$, $(J^2X = -X)$ olan $(1,1)$ tensör J, hemen hemen karmaşık yapı olarak adlandırılır.

Eğer M karmaşık manifold ve $\text{boy}_{\mathbb{C}} M = n$ ise M aynı zamanda gerçel manifold olur ve $\text{boy}_{\mathbb{R}} M = 2n$ olur. Bu durumda M üzerinde $J : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, $JX = iX$, $(J^2X = i^2X = -X)$ olarak tanımlarsak, $J^2 = -I$ olur. Böylece karmaşık manifoldlar üzerindeki karmaşık yapı, hemen hemen karmaşıktır.

Tanım 5.2. Türevlenebilir bir M manifoldu üzerindeki $(1,1)$ tensör alanı T nin , $(1,2)$ tensör alanı Nijenhuis torsiyonu $[T,T]$,

$$[T,T](X,Y) = T^2[X,Y] + [TX,TY] - T[TX,Y] - T[X,TY]$$

olarak tanımlanır.

Hemen hemen karmaşık yapıların karmaşık yapı olması için gerekli ve yeterli koşulla ilgili problemi Newlander ve Nirenberg (1957) çözmüşler ve aşağıdaki ünlü teoremi kanıtlamışlardır.

Teorem 5.1. $2n$ boyutlu M gerçel manifoldu üzerinde $J^2 = -I$ olan J varsa, J nin karmaşık yapı olması için gerekli ve yeterli koşul, $[J,J] = 0$ olmasıdır. Bu durumda J ye integrallenebilir denir.

Teorem 5.2. $2n+1$ boyutlu (M,η,ξ,g,φ) kontakt metrik manifoldu için $K^{2n+2} = M \times \mathbb{R}$ üzerinde $J(X,fdt) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)dt)$ olarak tanımlanan J tensörü $J^2 = -I$ dir.

Kanıt. $J(X,fdt) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)dt)$ olduğu için,

$$\begin{aligned}
J^2(X,fdt) &= J(\varphi X - f\xi, \eta(X)dt) \\
&= (\varphi(\varphi X - f\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\varphi X - f\xi)\,dt) \\
&= (\varphi^2 X - \eta(X)\xi, -fdt) \\
&= (-X + \eta(X)\xi - \eta(X)\xi, -fdt) \\
&= (-X, -fdt) \\
&= -(X, fdt) \\
J^2 &= -I
\end{aligned}$$

olur. □

Tanım 5.3. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ kontakt metrik manifoldu olmak üzere, yukarıdaki teoremde tanımlanan J tensörü integrallenebilir ise M manifolduna **Sasakian manifold** denir.

Tanım 5.4. Riemann (M, g) manifoldu üzerinde $(1, 1)$ tensör φ nin Levi-Civita konneksiyonuna göre türevi

$$(\nabla_X \varphi)Y = \nabla_X \varphi Y - \varphi \nabla_X Y$$

olarak tanımlanan $(1, 1)$ tensördür.

Teorem 5.3. M nin Sasakian olması için gerekli ve yeter koşul

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X$$

olmasıdır.

Kanıt. Bu kanıtta, ifade kolaylığı açısından, (X, fdt) yerine (X, f) yazacağız. Önce $[J, J]((X, 0), (Y, 0))$ için bir ifade elde edelim.

$$\begin{aligned}
[J, J]((X, 0), (Y, 0)) &= J^2 \left[(X, 0), (Y, 0)\right] + \left[J(X, 0), J(Y, 0)\right] \\
&\quad - J\left[J(X, 0), (Y, 0)\right] - J\left[(X, 0), J(Y, 0)\right] \\
&= -\left([X, Y], 0\right) + \left[(\varphi X, \eta(X)), (\varphi Y, \eta(Y))\right] \\
&\quad - J\left[(\varphi X, \eta(X)), (Y, 0)\right] - J\left[(X, 0), (\varphi Y, \eta(Y))\right] \\
&= -\left([X, Y], 0\right) + \left([\varphi X, \varphi Y], \varphi X(\eta(Y)) - \varphi Y(\eta(X))\right) \\
&\quad - J\left([\varphi X, Y], -Y(\eta(X))\right) - J\left([X, \varphi Y], X(\eta(Y))\right) \\
&= -\left([X, Y], 0\right) + \left([\varphi X, \varphi Y], \varphi X(\eta(Y)) - \varphi Y(\eta(X))\right) \\
&\quad - \left(\varphi[\varphi X, Y] + Y(\eta(X))\xi, \eta([\varphi X, Y])\right) \\
&\quad - \left(\varphi[X, \varphi Y] - X(\eta(Y))\xi, \eta([X, \varphi Y])\right) \\
&= \left(-[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]\right. \\
&\quad \left(-Y(\eta(X)) + X(\eta(Y))\right)\xi, \varphi X(\eta(Y)) - \varphi Y(\eta(X)) \\
&\quad \left. - \eta([\varphi X, Y]) - \eta([X, \varphi Y])\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\varphi,\varphi](X,Y) &= \varphi^2[X,Y]+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y] \\
&= -[X,Y]+\eta([X,Y])\xi+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y] \\
&\quad -\varphi[X,\varphi Y] \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2d\eta(X,Y) &= X(\eta(Y))-Y(\eta(X))-\eta([X,Y]) \\
X(\eta(Y))-Y(\eta(X)) &= 2d\eta(X,Y)+\eta([X,Y]) \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Denklem (5.1) ve (5.2) den;

$$\begin{aligned}
[J,J]((X,0),(Y,0)) &= ([\varphi,\varphi](X,Y)+2d\eta(X,Y)\xi,\varphi X(\eta(Y)) \\
&\quad -\varphi Y(\eta(X))-\eta([\varphi X,Y])-\eta([X,\varphi Y]))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2d\eta(\varphi X,Y) &= \varphi X(\eta(Y))-Y(\eta(\varphi X))-\eta([\varphi X,Y])\,;\;\; \eta(\varphi(X))=0 \\
&= \varphi X(\eta(Y))-\eta([\varphi X,Y]) \\
2d\eta(X,\varphi Y) &= X(\eta(\varphi Y))-\varphi Y(\eta(X))-\eta([X,\varphi Y])\,;\;\; \eta(\varphi(Y))=0 \\
&= -\varphi Y(\eta(X))-\eta([X,\varphi Y])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[J,J]((X,0),(Y,0)) &= ([\varphi,\varphi](X,Y)+2d\eta(X,Y)\xi,2d\eta(\varphi X,Y) \\
&\quad +2d\eta(X,\varphi Y))
\end{aligned}$$

olur. Kontakt metrik olduğu için $d\eta(X,Y)=g(X,\varphi Y)$ dir.

$d\eta(\varphi X,Y)=g(\varphi X,\varphi Y)$
$d\eta(X,\varphi Y)=g(X,\varphi^2 Y)=-g(\varphi X,\varphi Y)$

$$d\eta(\varphi X,Y)+d\eta(X,\varphi Y)=0$$

olur. Böylece

$$[J,J]((X,0),(Y,0))=([\varphi,\varphi](X,Y)+2d\eta(X,Y)\xi,0)$$

elde ederiz.

M Sasakian olsun. O zaman $[J,J]=0$ dır. Özel olarak

$$[J,J]((X,0),(Y,0)) = ([\varphi,\varphi](X,Y)+2d\eta(X,Y)\xi,0)=0$$

olduğundan

$$[\varphi,\varphi](X,Y)+2d\eta(X,Y)\xi \;=\; 0 \tag{5.3}$$

olur.

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= \nabla_X Y-\nabla_Y X,\\
[\varphi,\varphi](X,Y) &= \varphi^2[X,Y]+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]\\
&= -[X,Y]+\eta([X,Y])\xi+\nabla_{\varphi X}\varphi Y-\nabla_{\varphi Y}\varphi X\\
&\quad -\varphi\nabla_{\varphi X}Y+\varphi\nabla_Y\varphi X-\varphi\nabla_X\varphi Y+\varphi\nabla_{\varphi Y}X,\\
d\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}\left(X(\eta(Y))-Y(\eta(X))-\eta([X,Y])\right).
\end{aligned}$$

Ayrıca Levi-Civita konneksiyonunun özelliklerinden,

$$\begin{aligned}
2g((\nabla_X\varphi)Y,Z) &= 2g(\nabla_X\varphi Y-\varphi\nabla_X Y,Z)\\
&= 2g(\nabla_X\varphi Y,Z)+2g(\nabla_X Y,\varphi Z)\\
&= Xg(\varphi Y,Z)+\varphi Yg(X,Z)-Zg(X,\varphi Y)\\
&\quad +g([X,\varphi Y],Z)+g([Z,X],\varphi Y)+g([Z,\varphi Y],X)\\
&\quad +Xg(Y,\varphi Z)+Yg(X,\varphi Z)-\varphi Zg(X,Y)\\
&\quad +g([X,Y],\varphi Z)+g([\varphi Z,X],Y)+g([\varphi Z,Y],X)
\end{aligned}$$

olur. Şimdi $\Phi=d\eta$ alırsak, $d\Phi=0$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned}
0=3d\Phi(X,Y,Z) &= X\Phi(Y,Z)+Y\Phi(Z,X)+Z\Phi(X,Y)\\
&\quad -\Phi([X,Y],Z)-\Phi([Z,X],Y)-\Phi([Y,Z],X)\\
&= Xd\eta(Y,Z)+Yd\eta(Z,X)+Zd\eta(X,Y)\\
&\quad -d\eta([X,Y],Z)-d\eta([Z,X],Y)-d\eta([Y,Z],X)\\
&= Xg(Y,\varphi Z)+Yg(Z,\varphi X)+Zg(X,\varphi Y)\\
&\quad -g([X,Y],\varphi Z)-g([Z,X],\varphi Y)-g([Y,Z],\varphi X)
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}
g(\varphi[Y,Z],X) &= Xg(Z,\varphi Y)+Yg(X,\varphi Z)-Zg(X,\varphi Y)\\
&\quad +g([X,Y],\varphi Z)+g([Z,X],\varphi Y)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitlikte Y yerine φY ve Z yerine φZ alırsak,

$$\begin{aligned} Xg(Y,\varphi Z) + \varphi Y g(X,Z) - \varphi Z g(X,Y) + g([X,\varphi Y],Z) + g([\varphi Z,X],Y) = \\ -g(\varphi[\varphi Y,\varphi Z],X) + \varphi Y(\eta(X)\eta(Z)) - \varphi Z(\eta(X)\eta(Y)) \\ +\eta(Z)\eta([X,\varphi Y]) + \eta(Y)\eta([\varphi Z,X]) \end{aligned}$$

buluruz. Bu iki ifadeyi $2g\left(\left(\nabla_X\varphi\right)Y,Z\right)$ ifadesinde kullanırsak,

$$\begin{aligned} 2g\left(\left(\nabla_X\varphi\right)Y,Z\right) &= g([Z,\varphi Y] + [\varphi Z,Y] + \varphi[Y,Z] - \varphi[\varphi Y,\varphi Z],X) \\ &\quad +\varphi Y(\eta(X)\eta(Z)) - \varphi Z(\eta(X)\eta(Y)) \\ &\quad +\eta(Z)\eta([X,\varphi Y]) + \eta(Y)\eta([\varphi Z,X]) \\ &= g([\varphi,\varphi](Y,Z),\varphi X) \\ &\quad -\eta(X)\eta([\varphi Y,Z]) - \eta(X)\eta([Y,\varphi Z]) \\ &\quad +\eta(X)\varphi Y(\eta(Z)) + \eta(Z)\varphi Y(\eta(X)) \\ &\quad -\eta(X)\varphi Z(\eta(Y)) - \eta(Y)\varphi Z(\eta(X)) \\ &\quad +\eta(Z)\eta([X,\varphi Y]) + \eta(Y)\eta([\varphi Z,X]) \end{aligned}$$

olur. M Sasakian olduğu için $[\varphi,\varphi](Y,Z) = -2d\eta(Y,Z)\xi$ ve dolayısıyla

$$g([\varphi,\varphi](Y,Z),\varphi X) = 0$$

dır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \eta(X)(\varphi Y(\eta(Z)) - \eta([\varphi Y,Z])) &= 2\eta(X)d\eta(\varphi Y,Z) \\ &= 2\eta(X)g(\varphi Y,\varphi Z) \\ &= 2\eta(X)g(Y,Z) - 2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$2g\left(\left(\nabla_X\varphi\right)Y,Z\right) = 2\eta(Z)g(X,Y) - 2\eta(Y)g(X,Z)$$

ve dolayısıyla

$$\left(\nabla_X\varphi\right)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$$

olur.

Şimdi $(\nabla_X \varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$ olsun. M nin Sasakian olduğunu gösterebilmek için $[J,J] = 0$ olduğunu göstermeye çalışalım.

$$\begin{aligned}
[J,J]\left((X,f),(Y,g)\right) &= [J,J]\left((X,0),(Y,0)\right) + [J,J]\left((X,0),(0,g)\right) \\
&\quad + [J,J]\left((0,f),(Y,0)\right) + [J,J]\left((0,f),(0,g)\right) \\
&= [J,J]\left((X,0),(Y,0)\right) + g[J,J]\left((X,0),(0,1)\right) \\
&\quad + f[J,J]\left((0,1),(Y,0)\right) + fg[J,J]\left((0,1),(0,1)\right)
\end{aligned}$$

olduğu için,

$$[J,J]\left((X,0),(Y,0)\right), [J,J]\left((X,0),(0,1)\right), [J,J]\left((0,1),(Y,0)\right), [J,J]\left((0,1),(0,1)\right)$$

terimlerinin sıfır olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
[\varphi,\varphi](X,Y) &= \varphi^2[X,Y] + [\varphi X,\varphi Y] - \varphi[\varphi X,Y] - \varphi[X,\varphi Y] \\
&= -[X,Y] + \eta([X,Y])\xi + \nabla_{\varphi X}\varphi Y - \nabla_{\varphi Y}\varphi X \\
&\quad -\varphi\nabla_{\varphi X}Y + \varphi\nabla_Y\varphi X - \varphi\nabla_X\varphi Y + \varphi\nabla_{\varphi Y}X \\
&= -\nabla_X Y + \nabla_Y X + \eta([X,Y])\xi + (\nabla_{\varphi X}\varphi)Y \\
&\quad +\varphi\nabla_{\varphi X}Y - (\nabla_{\varphi Y}\varphi)X - \varphi\nabla_{\varphi Y}X + \varphi(\nabla_Y\varphi)X \\
&\quad +\varphi^2\nabla_Y X - \varphi(\nabla_X\varphi)Y - \varphi^2\nabla_X Y \\
&= -\nabla_X Y + \nabla_Y X + \eta([X,Y])\xi + g(\varphi X,Y)\xi - \eta(Y)\varphi X \\
&\quad -g(\varphi Y,X)\xi + \eta(X)\varphi Y + \varphi(g(X,Y)\xi - \eta(X)Y) - \nabla_Y X \\
&\quad +\eta(\nabla_Y X)\xi - \varphi(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + \nabla_X Y - \eta(\nabla_X Y)\xi \\
&= 2g(\varphi X,Y)\xi = -2g(X,\varphi Y)\xi = -2d\eta(X,Y)\xi
\end{aligned}$$

olduğundan, $[\varphi,\varphi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi = 0$ ve böylece $[J,J]\left((X,0),(Y,0)\right) = (0,0)$ olur.

Şimdi $[J,J]\left((X,0),(0,1)\right)$ terimini hesaplamak için önce $[(X,0),(0,1)] = (0,0)$ olduğunu gözlemleyelim. Ayrıca $(\nabla_X\varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$ varsayımından ötürü,

$$\varphi[X,\xi] - [\varphi X,\xi] = \varphi\nabla_X\xi - \varphi\nabla_\xi X - \nabla_{\varphi X}\xi + \nabla_\xi\varphi X$$

$$\begin{aligned}
&= -(\nabla_X\varphi)\xi + (\nabla_\xi\varphi)X - \nabla_\xi\varphi X + \varphi^2\nabla_{\varphi X}\xi + \nabla_\xi\varphi X \\
&= -g(X,\xi)\xi + \eta(\xi)X + g(\xi,X)\xi - \eta(X)\xi - \varphi(\nabla_{\varphi X}\varphi)\xi \\
&= -\eta(X)\xi + X - \varphi(g(\varphi X,\xi)\xi - \eta(\xi)\varphi X) \\
&= -\varphi^2X + \varphi^2X = 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
[J,J]\left((X,0),(0,1)\right) &= J^2\left[(X,0),(0,1)\right] + \left[J(X,0),J(0,1)\right] \\
&\quad -J\left[J(X,0),(0,1)\right] - J\left[(X,0),J(0,1)\right] \\
&= \left[(\varphi X,\eta(X)),(-\xi,0)\right] - J\left[(\varphi X,\eta(X)),(0,1)\right] \\
&\quad -J\left[(X,0),(-\xi,0)\right] \\
&= \left([\varphi X,-\xi],\xi(\eta(X))\right) - J(0,0) - J\left([X,-\xi],0\right) \\
&= \left(-[\varphi X,\xi],\xi(\eta(X))\right) - J\left(-[X,\xi],0\right) \\
&= \left(-[\varphi X,\xi],\xi(\eta(X))\right) + \left(\varphi[X,\xi],\eta([X,\xi])\right) \\
&= \left(\varphi[X,\xi] - [\varphi X,\xi],\xi(\eta(X)) + \eta([X,\xi])\right) \\
&= \left(\varphi[X,\xi] - [\varphi X,\xi],-2d\eta(X,\xi)\right) \\
&= \left(\varphi[X,\xi] - [\varphi X,\xi],0\right) \\
&= (0,0)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Benzer biçimde, $[(0,1),(Y,0)] = (0,0)$ ve

$$-[\xi,\varphi Y] + \varphi[\xi,-Y] = \varphi[\xi,-Y] - [\varphi(-Y),\xi] = 0$$

olmasını kullanarak,

$$\begin{aligned}
[J,J]\left((0,1),(Y,0)\right) &= J^2\left[(0,1),(Y,0)\right] + \left[J(0,1),J(Y,0)\right] \\
&\quad -J\left[J(0,1),(Y,0)\right] - J\left[(0,1),J(Y,0)\right] \\
&= \left[(-\xi,0),(\varphi Y,\eta(Y))\right] - J\left[(-\xi,0),(Y,0)\right] \\
&\quad -J\left[(0,1),(\varphi Y,\eta(Y))\right] \\
&= \left([-\xi,\varphi Y],-\xi(\eta(Y))\right) - J\left([-\xi,Y],0\right) - J(0,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ([-\xi, \varphi Y], -\xi(\eta(Y))) - (\varphi[-\xi, Y], \eta[-\xi, Y]) \\
&= ([-\xi, \varphi Y] - \varphi[-\xi, Y], -\xi(\eta(Y)) - \eta[-\xi, Y]) \\
&= ([-\xi, \varphi Y] - \varphi[-\xi, Y], 2d\eta(Y, \xi)) \\
&= ([-\xi, \varphi Y] - \varphi[-\xi, Y], 0) \\
&= (0, 0)
\end{aligned}$$

buluruz.

Son olarak,

$$\begin{aligned}
[J, J]((0,1),(0,1)) &= J^2[(0,1),(0,1)] + [J(0,1), J(0,1)] \\
&\quad - J[J(0,1),(0,1)] - J[(0,1), J(0,1)] \\
&= -J[J(0,1),(0,1)] - J[(0,1), J(0,1)] \\
&= -J[(-\xi,0),(0,1)] - J[(0,1),(-\xi,0)] \\
&= -J([-\xi, dt], 0) - J(0, -[-\xi, dt]) \\
&= -(\varphi[-\xi, dt], \eta[-\xi, dt]) - (-[-\xi, dt]\xi, 0) \\
&= (-\varphi[-\xi, dt] + [-\xi, dt]\xi, -\eta[-\xi, dt]) \quad ; \quad [-\xi, dt] = 0 \\
&= (0, 0)
\end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak $[J, J] = 0$ olur ve M Sasakiandır. $\square$

Örnek 5.1. $\mathbb{R}^5(x_1, x_2, y_1, y_2, z)$ de $\eta = \frac{1}{2}(dz - y_1 dx_1 - y_2 dz)$ ve $\xi = 2\partial z$ olarak aldığımızda $(\nabla_X \varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$ olduğunu gösterelim.

$$g = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+y_1^2 & y_1 y_2 & 0 & 0 & -y_1 \\ y_1 y_2 & 1+y_2^2 & 0 & 0 & -y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -y_1 & -y_2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 & y_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\nabla_{\partial x_1}\partial x_1 = \Gamma_{11}^1\partial x_1 + \Gamma_{11}^2\partial x_2 + \Gamma_{11}^3\partial y_1 + \Gamma_{11}^4\partial y_2 + \Gamma_{11}^5\partial z$

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\partial x_1}\partial x_1, \partial x_1) &= \Gamma_{11}^1 g_{11} + \Gamma_{11}^2 g_{21} + \Gamma_{11}^3 g_{31} + \Gamma_{11}^4 g_{41} + \Gamma_{11}^5 g_{51} \\ &= \left(\frac{1+y_1^2}{4}\right)\Gamma_{11}^1 + \frac{y_1 y_2}{4}\Gamma_{11}^2 - \frac{y_1}{4}\Gamma_{11}^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\partial x_1}\partial x_1, \partial x_1) &= \frac{1}{2}\left\{\partial x_1 g\left(\partial x_1, \partial x_1\right) + \partial x_1 g\left(\partial x_1, \partial x_1\right) - \partial x_1 g\left(\partial x_1, \partial x_1\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\partial x_1 g\left(\partial x_1, \partial x_1\right) = 0 \end{aligned}$$

$(1+y_1^2)\,\Gamma_{11}^1 + y_1 y_2\Gamma_{11}^2 - y_1\Gamma_{11}^5 = 0$

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\partial x_1}\partial x_1, \partial x_2) &= \Gamma_{11}^1 g_{12} + \Gamma_{11}^2 g_{22} + \Gamma_{11}^3 g_{32} + \Gamma_{11}^4 g_{42} + \Gamma_{11}^5 g_{52} \\ &= \frac{y_1 y_2}{4}\Gamma_{11}^1 + \left(\frac{1+y_2^2}{4}\right)\Gamma_{11}^2 - \frac{y_2}{4}\Gamma_{11}^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\partial x_1}\partial x_1, \partial x_2) &= \frac{1}{2}\left\{\partial x_1 g\left(\partial x_1, \partial x_2\right) + \partial x_1 g\left(\partial x_2, \partial x_1\right) - \partial x_2 g\left(\partial x_1, \partial x_1\right)\right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$y_1 y_2\Gamma_{11}^1 + (1+y_2^2)\,\Gamma_{11}^2 - y_2\Gamma_{11}^5 = 0$

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\partial x_1}\partial x_1, \partial y_1) &= \Gamma_{11}^1 g_{13} + \Gamma_{11}^2 g_{23} + \Gamma_{11}^3 g_{33} + \Gamma_{11}^4 g_{43} + \Gamma_{11}^5 g_{53} \\ &= \frac{1}{4}\Gamma_{11}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\partial x_1}\partial x_1, \partial y_1) &= \frac{1}{2}\left\{\partial x_1 g\left(\partial x_1, \partial y_1\right) + \partial x_1 g\left(\partial y_1, \partial x_1\right) - \partial y_1 g\left(\partial x_1, \partial x_1\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{2y_1}{4}\right) = -\frac{y_1}{4} \end{aligned}$$

$\Gamma_{11}^3 = -y_1$

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\partial x_1}\partial x_1, \partial y_2) &= \Gamma_{11}^1 g_{14} + \Gamma_{11}^2 g_{24} + \Gamma_{11}^3 g_{34} + \Gamma_{11}^4 g_{44} + \Gamma_{11}^5 g_{54} \\ &= \frac{1}{4}\Gamma_{11}^4 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_{\partial x_1}\partial x_1, \partial y_2) &= \frac{1}{2}\left\{\partial x_1 g\left(\partial x_1, \partial y_2\right) + \partial x_1 g\left(\partial y_2, \partial x_1\right) - \partial y_2 g\left(\partial x_1, \partial x_1\right)\right\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\Gamma_{11}^4 = 0$

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_{\partial x_1}\partial x_1, \partial z) &= \Gamma_{11}^1 g_{15} + \Gamma_{11}^2 g_{25} + \Gamma_{11}^3 g_{35} + \Gamma_{11}^4 g_{45} + \Gamma_{11}^5 g_{55} \\
&= -\frac{y_1}{4}\Gamma_{11}^1 - \frac{y_2}{4}\Gamma_{11}^2 + \frac{1}{4}\Gamma_{11}^5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_{\partial x_1}\partial x_1, \partial z) &= \frac{1}{2}\left\{\partial x_1 g\left(\partial x_1, \partial z\right) + \partial x_1 g\left(\partial z, \partial x_1\right) - \partial z g\left(\partial x_1, \partial x_1\right)\right\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$-y_1\Gamma_{11}^1 - y_2\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^5 = 0$ olur.

$$
\begin{aligned}
\left(1 + y_1^2\right)\Gamma_{11}^1 + y_1 y_2 \Gamma_{11}^2 - y_1\Gamma_{11}^5 &= 0 \\
y_1 y_2 \Gamma_{11}^1 + \left(1 + y_2^2\right)\Gamma_{11}^2 - y_2\Gamma_{11}^5 &= 0 \\
-y_1\Gamma_{11}^1 - y_2\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^5 &= 0
\end{aligned}
$$

denklemleri çözüldüğünde, $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{11}^5 = 0$ olur.

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\partial x_1}\partial x_1 &= \Gamma_{11}^1 \partial x_1 + \Gamma_{11}^2 \partial x_2 + \Gamma_{11}^3 \partial y_1 + \Gamma_{11}^4 \partial y_2 + \Gamma_{11}^5 \partial z \\
\bullet\nabla_{\partial x_1}\partial x_1 &= -y_1 \partial y_1
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$
\begin{gathered}
\bullet\nabla_{\partial x_1}\partial x_2 = \nabla_{\partial x_2}\partial x_1 = -\frac{y_2}{2}\partial y_1 - \frac{y_1}{2}\partial y_2 \\
\bullet\nabla_{\partial x_1}\partial y_1 = \nabla_{\partial y_1}\partial x_1 = \frac{y_1}{2}\partial x_1 + \left(\frac{y_1^2 - 1}{2}\right)\partial z \\
\bullet\nabla_{\partial x_1}\partial y_2 = \nabla_{\partial y_2}\partial x_1 = \frac{y_1}{2}\partial x_2 + \frac{y_1 y_2}{2}\partial z \\
\bullet\nabla_{\partial x_1}\partial z = \nabla_{\partial z}\partial x_1 = \frac{1}{2}\partial y_1 \\
\bullet\nabla_{\partial x_2}\partial x_2 = -y_2 \partial y_2 \\
\bullet\nabla_{\partial x_2}\partial y_1 = \nabla_{\partial y_1}\partial x_2 = \frac{y_2}{2}\partial x_1 + \frac{y_1 y_2}{2}\partial z \\
\bullet\nabla_{\partial x_2}\partial y_2 = \nabla_{\partial y_2}\partial x_2 = \frac{y_2}{2}\partial x_2 + \frac{y_2^2 - 1}{2}\partial z
\end{gathered}
$$

$$\bullet\nabla_{\partial x_2}\partial z = \nabla_{\partial z}\partial x_2 = \frac{1}{2}\partial y_2$$

$$\bullet\nabla_{\partial y_1}\partial y_1 = 0$$

$$\bullet\nabla_{\partial y_1}\partial y_2 = \nabla_{\partial y_2}\partial y_1 = 0$$

$$\bullet\nabla_{\partial y_1}\partial z = \nabla_{\partial z}\partial y_1 = -\frac{1}{2}\partial x_1 - \frac{y_1}{2}\partial z$$

$$\bullet\nabla_{\partial y_2}\partial y_2 = 0$$

$$\bullet\nabla_{\partial y_2}\partial z = \nabla_{\partial z}\partial y_2 = -\frac{1}{2}\partial x_2 - \frac{y_2}{2}\partial z$$

$$\bullet\nabla_{\partial z}\partial z = 0$$

olur.

$$\begin{aligned} e_1 &= 2\partial y_1 \\ \varphi e_1 &= 2(\partial x_1 + y_1\partial z) \\ e_2 &= 2\partial y_2 \\ \varphi e_2 &= 2(\partial x_2 + y_2\partial z) \\ \xi &= 2\partial z \end{aligned}$$

olarak alırsak, $\{e_1, e_2, \varphi e_1, \varphi e_2, \xi\}$ bir ortonormal taban olur.

$$\nabla_{e_1}e_1 = \nabla_{2\partial y_1}2\partial y_1 = 4\nabla_{\partial y_1}\partial y_1 = 0$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1}e_1 &= \nabla_{e_1}e_2 = \nabla_{e_1}\varphi e_2 = \nabla_{e_2}e_1 = \nabla_{e_2}\varphi e_1 = \nabla_{e_2}e_2 = 0 \\ \nabla_{\varphi e_1}\varphi e_1 &= \nabla_{\varphi e_1}e_2 = \nabla_{\varphi e_1}\varphi e_2 = \nabla_{\varphi e_2}e_1 = \nabla_{\varphi e_2}\varphi e_1 = \nabla_{\varphi e_2}\varphi e_2 = \nabla_\xi\xi = 0 \\ \nabla_{e_1}\varphi e_1 &= \nabla_{e_2}\varphi e_2 = \xi \\ \nabla_{e_1}\xi &= \nabla_\xi e_1 = -\varphi e_1 \\ \nabla_{e_2}\xi &= \nabla_\xi e_2 = -\varphi e_2 \\ \nabla_{\varphi e_1}e_1 &= \nabla_{\varphi e_2}e_2 = -\xi \\ \nabla_{\varphi e_1}\xi &= \nabla_\xi\varphi e_1 = e_1 \\ \nabla_{\varphi e_2}\xi &= \nabla_\xi\varphi e_2 = e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= a_1e_1 + a_2e_2 + b_1\varphi e_1 + b_2\varphi e_2 + \eta\left(X\right)\xi \\ Y &= A_1e_1 + A_2e_2 + B_1\varphi e_1 + B_2\varphi e_2 + \eta\left(Y\right)\xi \end{aligned}$$

olarak alırsak,

$$\begin{aligned} \varphi X &= -b_1e_1 - b_2e_2 + a_1\varphi e_1 + a_2\varphi e_2 \\ \varphi Y &= -B_1e_1 - B_2e_2 + A_1\varphi e_1 + A_2\varphi e_2 \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} g(X,Y)\xi - \eta\left(Y\right)X &= g(a_1e_1 + a_2e_2 + b_1\varphi e_1 + b_2\varphi e_2 + \eta(X)\xi, A_1e_1 + A_2e_2 \\ &\quad +B_1\varphi e_1 + B_2\varphi e_2 + \eta(Y)\xi)\xi \\ &\quad -\eta(Y)(a_1e_1 + a_2e_2 + b_1\varphi e_1 + b_2\varphi e_2 + \eta(X)\xi) \\ &= (a_1A_1 + a_2A_2 + b_1B_1 + b_2B_2 + \eta(X)\eta(Y))\xi \\ &\quad -\eta(Y)(a_1e_1 + a_2e_2 + b_1\varphi e_1 + b_2\varphi e_2 + \eta(X)\xi) \\ &= (-a_1e_1 - a_2e_2 - b_1\varphi e_1 - b_2\varphi e_2)\eta(Y) \\ &\quad +(a_1A_1 + a_2A_2 + b_1B_1 + b_2B_2)\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla_X\varphi)Y &= \nabla_X\varphi Y - \varphi\nabla_X Y \\ \nabla_X\varphi Y &= \nabla_{(a_1e_1+a_2e_2+b_1\varphi e_1+b_2\varphi e_2+\eta(X)\xi)}(\varphi Y) \\ &= a_1\nabla_{e_1}\varphi Y + a_2\nabla_{e_2}\varphi Y + b_1\nabla_{\varphi e_1}\varphi Y + b_2\nabla_{\varphi e_2}\varphi Y + \eta(X)\nabla_\xi\varphi Y \\ &= a_1(-B_1\nabla_{e_1}e_1 - B_2\nabla_{e_1}e_2 + A_1\nabla_{e_1}\varphi e_1 + A_2\nabla_{e_1}\varphi e_2) \\ &\quad +a_2(-B_1\nabla_{e_2}e_1 - B_2\nabla_{e_2}e_2 + A_1\nabla_{e_2}\varphi e_1 + A_2\nabla_{e_2}\varphi e_2) \\ &\quad +b_1(-B_1\nabla_{\varphi e_1}e_1 - B_2\nabla_{\varphi e_1}e_2 + A_1\nabla_{\varphi e_1}\varphi e_1 + A_2\nabla_{\varphi e_1}\varphi e_2) \\ &\quad +b_2(-B_1\nabla_{\varphi e_2}e_1 - B_2\nabla_{\varphi e_2}e_2 + A_1\nabla_{\varphi e_2}\varphi e_1 + A_2\nabla_{\varphi e_2}\varphi e_2) \\ &\quad +\eta(X)(-B_1\nabla_\xi e_1 - B_2\nabla_\xi e_2 + A_1\nabla_\xi\varphi e_1 + A_2\nabla_\xi\varphi e_2) \\ &= a_1A_1\xi + a_2A_2\xi + b_1B_1\xi + b_2B_2\xi + \eta(X)B_1\varphi e_1 \\ &\quad +\eta(X)B_2\varphi e_2 + \eta(X)A_1e_1 + \eta(X)A_2e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi\nabla_X Y &= \varphi\nabla_{(a_1e_1+a_2e_2+b_1\varphi e_1+b_2\varphi e_2+\eta(X)\xi)}Y \\
&= \varphi(a_1\nabla_{e_1}Y + a_2\nabla_{e_2}Y + b_1\nabla_{\varphi e_1}Y + b_2\nabla_{\varphi e_2}Y + \eta(X)\nabla_\xi Y) \\
&= \varphi[a_1(A_1\nabla_{e_1}e_1 + A_2\nabla_{e_1}e_2 + B_1\nabla_{e_1}\varphi e_1 + B_2\nabla_{e_1}\varphi e_2 + \eta(Y)\nabla_{e_1}\xi) \\
&\quad +a_2(A_1\nabla_{e_2}e_1 + A_2\nabla_{e_2}e_2 + B_1\nabla_{e_2}\varphi e_1 + B_2\nabla_{e_2}\varphi e_2 + \eta(Y)\nabla_{e_2}\xi) \\
&\quad +b_1(A_1\nabla_{\varphi e_1}e_1 + A_2\nabla_{\varphi e_1}e_2 + B_1\nabla_{\varphi e_1}\varphi e_1 + B_2\nabla_{\varphi e_1}\varphi e_2 + \eta(Y)\nabla_{\varphi e_1}\xi) \\
&\quad +b_2(A_1\nabla_{\varphi e_2}e_1 + A_2\nabla_{\varphi e_2}e_2 + B_1\nabla_{\varphi e_2}\varphi e_1 + B_2\nabla_{\varphi e_2}\varphi e_2 + \eta(Y)\nabla_{\varphi e_2}\xi) \\
&\quad +\eta(X)(A_1\nabla_\xi e_1 + A_2\nabla_\xi e_2 + B_1\nabla_\xi\varphi e_1 + B_2\nabla_\xi\varphi e_2 + \eta(Y)\nabla_\xi\xi)] \\
&= \varphi[a_1B_1\xi - a_1\eta(Y)\varphi e_1 + a_2B_2\xi - a_2\eta(Y)\varphi e_2 - b_1A_1\xi \\
&\quad +b_1\eta(Y)e_1 - b_2A_2\xi + b_2\eta(Y)e_2 - \eta(X)A_1\varphi e_1 - \eta(X)A_2\varphi e_2 \\
&\quad +\eta(X)B_1e_1 + \eta(X)B_2e_2] \\
&= \varphi[(b_1\eta(Y) + B_1\eta(X))e_1 + (b_2\eta(Y) + B_2\eta(X))e_2 \\
&\quad -(a_1\eta(Y) + A_1\eta(X))\varphi e_1 - (a_2\eta(Y) + A_2\eta(X))\varphi e_2 \\
&\quad +(a_1B_1 + a_2B_2 - b_1A_1 - b_2A_2)\xi] \\
&= (a_1\eta(Y) + A_1\eta(X))e_1 + (b_1\eta(Y) + B_1\eta(X))\varphi e_1 \\
&\quad +(A_2\eta(X) + a_2\eta(Y))e_2 + (b_2\eta(Y) + B_2\eta(X))\varphi e_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_X\varphi Y - \varphi\nabla_X Y &= -a_1\eta(Y)e_1 - a_2\eta(Y)e_2 - b_1\eta(Y)\varphi e_1 - b_2\eta(Y)\varphi e_2 \\
&\quad +(a_1A_1 + a_2A_2 + b_1B_1 + b_2B_2)\xi \\
&= (-a_1e_1 - a_2e_2 - b_1\varphi e_1 - b_2\varphi e_2)\eta(Y) \\
&\quad +(a_1A_1 + a_2A_2 + b_1B_1 + b_2B_2)\xi
\end{aligned}$$

$$g(X,Y)\xi - \eta(Y)X = \nabla_X\varphi Y - \varphi\nabla_X Y$$

olur.

Bu örnekteki kontakt form η, karakteristik vektör alanı ξ, metrik g ve $(1,1)$ tensör φ kolaylıkla $\mathbb{R}^{2n+1}$ manifolduna genişletilebilir. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z\}$ koordinatlarında

$e_1 = 2\partial y_1$, $e_2 = 2\partial y_2, \ldots, e_n = 2\partial y_n$

$\varphi e_1 = 2(\partial x_1 + y_1\partial z)$, $\varphi e_2 = 2(\partial x_2 + y_2\partial z)$, . . . ,$\varphi e_n = 2(\partial x_n + y_n\partial z)$

$\xi = 2\partial z$

alırsak yine bir ortonormal taban elde ederiz.

$\nabla_{e_i} e_j = 0$, $\nabla_{e_i} \varphi e_i = \xi$, $i \neq j$ için $\nabla_{e_i} \varphi e_j = 0$, $\nabla_{e_i} \xi = -\varphi e_i$, $\nabla_{\varphi e_i} \varphi e_j = 0$, $\nabla_{\varphi e_i} e_i = -\xi$, $i \neq j$ için $\nabla_{\varphi e_i} e_j = 0$, $\nabla_\xi e_i = -\varphi e_i$ $\nabla_{\varphi e_i} \xi = e_i$, , $\nabla_\xi \varphi e_i = e_i$, $\nabla_\xi \xi = 0$, $1 \leq i, j \leq n$

$$\begin{aligned}
X &= \sum_{i=1}^{n} (a_i e_i + b_i \varphi e_i) + \eta(X)\xi \\
\varphi X &= \sum_{i=1}^{n} (-b_i e_i + a_i \varphi e_i) \\
Y &= \sum_{i=1}^{n} (A_i e_i + B_i \varphi e_i) + \eta(Y)\xi \\
\varphi Y &= \sum_{i=1}^{n} (-B_i e_i + A_i \varphi e_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_X \varphi Y &= \eta(X) \sum_{i=1}^{n} (A_i e_i + B_i \varphi e_i) + \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i A_i + b_i B_i) \right) \xi \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} (-X(B_i) e_i + X(A_i) \varphi e_i) \\
\varphi \nabla_X Y &= \sum_{i=1}^{n} \left[(A_i \eta(X) + a_i \eta(Y)) e_i + (B_i \eta(X) + b_i \eta(Y)) \varphi e_i \right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} (-X(B_i) e_i + X(A_i) \varphi e_i)
\end{aligned}$$

$$\nabla_X \varphi Y - \varphi \nabla_X Y = -\eta(Y) \sum_{i=1}^{n} (a_i e_i + b_i \varphi e_i) + \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i A_i + b_i B_i) \right) \xi$$

$$\begin{aligned}
g(X,Y)\xi - \eta(Y)X &= -\eta(Y) \sum_{i=1}^{n} (a_i e_i + b_i \varphi e_i) + \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i A_i + b_i B_i) \right) \xi \\
&= (\nabla_X \varphi) Y
\end{aligned}$$

olur. Böylece bu yapı Sasakian olur.

5.1. φ Kesitsel Eğriliği

Bir $(M, \eta, \xi, g, \varphi)$ kontakt metrik manifold üzerinde bir $p \in M$ noktası alalım. $g(X, \xi) = 0$ olacak biçimde bir $X \in T_pM$ vektörü için X ve φX tarafından gerilen kesitin eğriliğine φ kesitsel eğrilik denir ve $H(X)$ ile gösterilir.

$$H(X) = K(X, \varphi X)$$

şeklindedir. Sasakian manifoldlar üzerinde φ kesitsel eğriliğinin eğrilik tensörünü belirlediğini göstereceğiz (Moskal, 1966), (Blair, 2010).

Bunu yapmak için $g(X, \xi) = 0$ olan bir X için

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= g(R(X,Y)Y,X) \\ D(X) &= B(X,\varphi X) \\ P(X,Y,Z,W) &= d\eta(X,Z)g(Y,W) - d\eta(X,W)g(Y,Z) \\ &\quad -d\eta(Y,Z)g(X,W) + d\eta(Y,W)g(X,Z) \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım.

Önsav 5.1. M Sasakian ise $\nabla_X \xi = -\varphi X$ olur.

Kanıt. M Sasakian olduğu için

$$\begin{aligned} (\nabla_X \varphi) Y &= g(X,Y)\xi - \eta(Y)X \\ (\nabla_X \varphi)\xi &= g(X,\xi)\xi - \eta(\xi)X \\ &= \eta(X)\xi - X \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\nabla_X \varphi)\xi &= \nabla_X \varphi\xi - \varphi\nabla_X \xi \\ &= -\varphi\nabla_X \xi \end{aligned}$$

olur.

$$-\varphi\nabla_X \xi = \eta(X)\xi - X$$

Her iki tarafa φ uygularsak,

$$\begin{aligned} -\varphi^2\nabla_X \xi &= -\varphi X \ , \ (\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi \ \text{ olduğundan}) \\ -(-\nabla_X \xi + \eta(\nabla_X \xi)\xi) &= -\varphi X \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\eta(\nabla_X \xi) &= g(\nabla_X \xi, \xi) = -g(\nabla_X \xi, \xi) \ , \ (g(\xi,\xi)=1) \\
g(\nabla_X \xi, \xi) &= 0 \ , \ \text{ve} \\
\eta(\nabla_X \xi) &= 0 \ , \ \text{olduğu için}
\end{aligned}$$

$$\nabla_X \xi = -\varphi X$$

olur. □

Önsav 5.2. Sasakian manifold üzerinde

$a)$ $g(R(X,Y)Z,\varphi W) + g(R(X,Y)\varphi Z, W) = -P(X,Y,Z,W)$
olur.

$$g(X,\xi) = g(Y,\xi) = g(Z,\xi) = g(W,\xi) = 0$$

için
$b)$ $g(R(\varphi X, \varphi Y)\varphi Z, \varphi W) = g(R(X,Y)Z,W)$
ve
$c)$ $g(R(X,\varphi X)Y,\varphi Y) = g(R(X,Y)X,Y) + g(R(X,\varphi Y)X,\varphi Y) - 2P(X,Y,X,\varphi Y)$
olur.

Kanıt. a) Önce,

$$\begin{aligned}
X(\eta(Y)) &= Xg(Y,\xi) \\
&= g(\nabla_X Y, \xi) + g(Y, \nabla_X \xi) \\
&= \eta(\nabla_X Y) + g(Y, -\varphi X) \\
&= \eta(\nabla_X Y) - g(Y, \varphi X)
\end{aligned}$$

ve $d\eta(X,Y) = g(X,\varphi Y)$ olduğunu gözlemleyelim. Ayrıca manifoldumuz Sasakian olduğu için, $(\nabla_X \varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$ özdeşliğini kullanarak $R(X,Y)\varphi Z$ eğriliğindeki terimleri hesaplayalım.

$$\nabla_X \nabla_Y \varphi Z = \nabla_X((\nabla_Y \varphi)Z + \varphi \nabla_Y Z)$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_X(g(Y,Z)\xi - \eta(Z)Y) + (\nabla_X\varphi)(\nabla_Y Z) + \varphi\nabla_X\nabla_Y Z \\
&= Xg(Y,Z)\xi + g(Y,Z)\nabla_X\xi - X(\eta(Z))Y - \eta(Z)\nabla_X Y \\
&\quad + g(X,\nabla_Y Z)\xi - \eta(\nabla_Y Z)X + \varphi R(X,Y)Z \\
&= (g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z) + g(X,\nabla_Y Z))\xi \\
&\quad - g(Y,Z)\varphi X - (\eta(\nabla_X Z) - g(Z,\varphi X))Y \\
&\quad - \eta(Z)\nabla_X Y - \eta(\nabla_Y Z)X + \varphi R(X,Y)Z
\end{aligned}$$

ve X ile Y nin yerini değiştirerek,

$$\begin{aligned}
\nabla_Y\nabla_X\varphi Z &= (g(\nabla_Y X,Z) + g(X,\nabla_Y Z) + g(Y,\nabla_X Z))\xi \\
&\quad - g(X,Z)\varphi Y - (\eta(\nabla_Y Z) - g(Z,\varphi Y))X \\
&\quad - \eta(Z)\nabla_Y X - \eta(\nabla_X Z)Y + \varphi R(Y,X)Z
\end{aligned}$$

elde ederiz. Son terim de

$$\begin{aligned}
\nabla_{[X,Y]}\varphi Z &= (\nabla_{[X,Y]}\varphi)Z + \varphi\nabla_{[X,Y]}Z \\
&= g([X,Y],Z)\xi - \eta(Z)[X,Y] + \varphi\nabla_{[X,Y]}Z \\
&= g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z)\xi - \eta(Z)(\nabla_X Y - \nabla_Y X) + \varphi\nabla_{[X,Y]}Z
\end{aligned}$$

olur. Şimdi bu üç terimi birleştirerek

$$\begin{aligned}
R(X,Y)\varphi Z &= g(Z,\varphi X)Y - g(Y,Z)\varphi X - g(Z,\varphi Y)X + g(X,Z)\varphi Y \\
&\quad + \varphi R(X,Y)Z \\
&= d\eta(Z,X)Y - g(Y,Z)\varphi X - d\eta(Z,Y)X + g(X,Z)\varphi Y \\
&\quad + \varphi R(X,Y)Z
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}
g(R(X,Y)\varphi Z, W) &= d\eta(Z,X)g(Y,W) - g(Y,Z)g(\varphi X,W) \\
&\quad - d\eta(Z,Y)g(X,W) + g(X,Z)g(\varphi Y,W) \\
&\quad + g(\varphi R(X,Y)Z,W) \\
&= d\eta(Z,X)g(Y,W) + g(Y,Z)g(X,\varphi W) \\
&\quad - d\eta(Z,Y)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,\varphi W) \\
&\quad - g(R(X,Y)Z,\varphi W)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -d\eta(X,Z)g(Y,W)+g(Y,Z)d\eta(X,W) \\
&\quad +d\eta(Y,Z)g(X,W)-g(X,Z)d\eta(Y,W) \\
&\quad -g(R(X,Y)Z,\varphi W) \\
&= -P(X,Y,Z,W)-g(R(X,Y)Z,\varphi W)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Bu da bize istediğimiz eşitliği verir.

b) $\eta(X)=\eta(Y)=\eta(Z)=\eta(W)=0$ ise,

$$
\begin{aligned}
g(R(\varphi X,\varphi Y)\varphi Z,\varphi W) &= -g(R(\varphi X,\varphi Y)\varphi^2 Z,W)-P(\varphi X,\varphi Y,\varphi Z,W) \\
&= g(R(\varphi X,\varphi Y)Z,W)-d\eta(\varphi X,\varphi Z)g\left(\varphi Y,W\right) \\
&\quad +d\eta\left(\varphi X,W\right)g\left(\varphi Y,\varphi Z\right)+d\eta\left(\varphi Y,\varphi Z\right)g\left(\varphi X,W\right) \\
&\quad -d\eta\left(\varphi Y,W\right)g\left(\varphi X,\varphi Z\right) \\
&= g\left(R\left(Z,W\right)\varphi X,\varphi Y\right)+g\left(\varphi X,Z\right)g\left(\varphi Y,W\right) \\
&\quad +g\left(X,W\right)g\left(Y,Z\right)-g\left(\varphi Y,Z\right)g\left(\varphi X,W\right) \\
&\quad -g\left(Y,W\right)g\left(X,Z\right) \\
&= g\left(R\left(Z,W\right)X,Y\right)-d\eta\left(Z,\varphi X\right)g\left(W,Y\right) \\
&\quad +d\eta\left(Z,Y\right)g\left(W,\varphi X\right)+d\eta\left(W,\varphi X\right)g\left(Z,Y\right) \\
&\quad -d\eta\left(W,Y\right)g\left(Z,\varphi X\right)+g\left(Z,\varphi X\right)g\left(W,\varphi Y\right) \\
&\quad +g\left(X,W\right)g\left(Y,Z\right)-g\left(Z,\varphi Y\right)g\left(W,\varphi X\right) \\
&\quad -g\left(Y,W\right)g\left(X,Z\right) \\
&= g(R(X,Y)Z,W)+g(Z,X)g(W,Y) \\
&\quad +g(Z,\varphi Y)g(W,\varphi X)-g(W,X)g(Z,Y) \\
&\quad -g(W,\varphi Y)g\left(Z,\varphi X\right)+g\left(Z,\varphi X\right)g\left(W,\varphi Y\right) \\
&\quad +g\left(X,W\right)g\left(Y,Z\right)-g\left(Z,\varphi Y\right)g\left(W,\varphi X\right) \\
&\quad -g\left(Y,W\right)g\left(X,Z\right) \\
&= g(R(X,Y)Z,W)
\end{aligned}
$$

olur.

c) Bianchi özdeşliğinden,

$$
g(R(X,\varphi X)Y,\varphi Y)+g(R(Y,X)\varphi X,\varphi Y)+g(R(\varphi X,Y)X,\varphi Y)=0
$$

olur. (a) şıkkını da kullanırsak,

$$\begin{aligned} g(R(X,\varphi X)Y,\varphi Y) &= -g(R(Y,X)\varphi X,\varphi Y) - g(R(\varphi X,Y)X,\varphi Y) \\ &= -g(R(Y,X)\varphi X,\varphi Y) - g(R(X,\varphi Y)\varphi X,Y) \\ &= -g\left(R\left(Y,X\right)X,Y\right) + P\left(Y,X,\varphi X,Y\right) \\ &\quad +g\left(R\left(X,\varphi Y\right)X,\varphi Y\right) + P\left(X,\varphi Y,X,Y\right) \end{aligned}$$

$d\eta(Y,Y) = d\eta(X,X) = 0$ olduğunu kullanarak,

$$\begin{aligned} P\left(Y,X,\varphi X,Y\right) &= d\eta\left(Y,\varphi X\right)g\left(X,Y\right) - d\eta\left(Y,Y\right)g\left(X,\varphi X\right) \\ &\quad -d\eta\left(X,\varphi X\right)g\left(Y,Y\right) + d\eta\left(X,Y\right)g\left(Y,\varphi X\right) \\ &= g(Y,\varphi^2 X)g(X,Y) - g(X,\varphi^2 X)g(Y,Y) \\ &\quad +g(X,\varphi Y)g(Y,\varphi X) \\ &= -g(X,Y)^2 + g(X,X)g(Y,Y) - g(X,\varphi Y)^2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} P\left(X,\varphi Y,X,Y\right) &= d\eta(X,X)g\left(\varphi Y,Y\right) - d\eta\left(X,Y\right)g\left(\varphi Y,X\right) \\ &\quad -d\eta\left(\varphi Y,X\right)g\left(X,Y\right) + d\eta\left(\varphi Y,Y\right)g\left(X,X\right) \\ &= -g(X,\varphi Y)^2 - g(\varphi Y,\varphi X)g(X,Y) \\ &\quad +g(\varphi Y,\varphi y)g(X,X) \\ &= -g(X,\varphi Y)^2 - g(X,Y)^2 + g(X,X)g(Y,Y) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bunları birleştirdiğimizde

$$\begin{aligned} P\left(Y,X,\varphi X,Y\right) + P\left(X,\varphi Y,X,Y\right) &= -2g(X,Y)^2 + 2g(X,X)g(Y,Y) \\ &\quad -2g(X,\varphi Y)^2 \end{aligned}$$

olur. Şimdi,

$$\begin{aligned} P(X,Y,X,\varphi Y) &= d\eta(X,X)g(Y,\varphi Y) - d\eta(X,\varphi Y)g(Y,X) \\ &\quad -d\eta(Y,X)g(X,\varphi Y) + d\eta(Y,\varphi Y)g\left(X,X\right) \\ &= g(X,Y)^2 + g(X,\varphi Y)^2 - g(Y,Y)g(X,X) \end{aligned}$$

denklemini yerine yazarsak

$$P\left(Y,X,\varphi X,Y\right)+P\left(X,\varphi Y,X,Y\right)=-2P(X,Y,X,\varphi Y)$$

olur ve böylece,

$$g(R(X,\varphi X)Y,\varphi Y)=g(R(X,Y)X,Y)+g(R(X,\varphi Y)X,\varphi Y)-2P(X,Y,X,\varphi Y)$$

denklemi elde edilir. □

Önerme 5.1. Bir Sasakian manifold üzerinde $g(X,\xi)=g(Y,\xi)=0$ ise

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= \frac{1}{32}(3D(X+\varphi Y)+3D(X-\varphi Y)-D(X+Y)-D(X-Y) \\ &\quad -4D(X)-4D(Y)-24P(X,Y,X,\varphi Y)) \end{aligned}$$

olur.

Kanıt. Eşitliğin sağ tarafındaki ifadeyi $A(X,Y)$ ile gösterelim.

$$\begin{aligned} D(X+\varphi Y) &= B((X+\varphi Y,\varphi(X+\varphi Y)) \\ &= B(X+\varphi Y,\varphi X-Y)\ ,(\varphi^2 Y=-Y) \\ &= g(R(X+\varphi Y,\varphi X-Y)\varphi X-Y,X+\varphi Y) \end{aligned}$$

Bu şekilde devam ettiğimizde,

$D(X-\varphi Y)=g(R(X-\varphi Y,\varphi X+Y)\varphi X+Y,X-\varphi Y)$,

$D(X+Y)=g(R(X+Y,\varphi X+\varphi Y)\varphi X+\varphi Y,X+Y)$,

$D(X-Y)=g(R(X-Y,\varphi X-\varphi Y)\varphi X-\varphi Y,X-Y)$,

$D(X)=g(R(X,\varphi X)\varphi X,X)$,

$D(Y)=g(R(Y,\varphi Y)\varphi Y,Y)$,

şeklinde olur. Denklemleri yerine yazıp Riemann eğriliğini uyguladığımızda,

$$\begin{aligned} A(X,Y) &= \frac{1}{32}(6g(R(X,Y)Y,X)+6g(R(\varphi X,\varphi Y)\varphi Y,\varphi X)+8g(R(X,\varphi X)\varphi Y,Y) \\ &\quad +12g(R(X,Y)\varphi Y,\varphi X)-2g(R(X,\varphi Y)\varphi Y,X)-2g(R(\varphi X,Y)Y,\varphi X) \\ &\quad +4g(R(X,\varphi Y)Y,\varphi X)-24P(X,Y,X,\varphi Y)) \end{aligned}$$

olur. Önsav 5.2 den

$$A(X,Y)=g(R(X,Y)Y,X)=B(X,Y)$$

olur. □

Önerme 5.2. Sasakian manifold M üzerinde ortonormal ve yatay (horizantal) X, Y vektörleri için $c = g(X, \varphi Y)$ olarak alırsak kesitsel eğriliğimiz $K(X, Y)$,

$$\begin{aligned} K(X,Y) &= \frac{1}{8}(3(1+c)^2 H(X+\varphi Y) + 3(1-c)^2 H(X-\varphi Y) \\ &\quad -H(X+Y) - H(X-Y) - H(X) - H(Y) + 6(1-c^2)) \end{aligned}$$

olur.

Kanıt. X ve Y ortonormal vektörler olduğu için,

$$\begin{aligned} K(X,Y) &= B(X,Y) \\ H(X+\varphi Y) &= K(X+\varphi Y, \varphi X - Y) \\ &= \frac{B(X+\varphi Y, \varphi X - Y)}{g(X+\varphi Y, X+\varphi Y) g(\varphi X - Y, \varphi X - Y) - g(X+\varphi Y, \varphi X - Y)^2} \\ &= \frac{B(X+\varphi Y, \varphi X - Y)}{4(1+c)^2} \end{aligned}$$

$D(X + \varphi Y) = B(X + \varphi Y, \varphi X - Y)$ olduğu için,
$D(X + \varphi Y) = 4(1 + c^2)H(X + \varphi Y)$ olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} P(X,Y,X,\varphi Y) &= d\eta(X,X)g(Y,\varphi Y) - d\eta(X,\varphi Y)g(Y,X) \\ &\quad -d\eta(Y,X)g(X,\varphi Y) + d\eta(Y,\varphi Y)g(X,X) \\ &= -g(Y,\varphi X)c - g(Y,Y)g(X,X) \\ &= c^2 - 1 \end{aligned}$$

dir. Böylece bir önceki önermeyi kullanarak sonucu elde ederiz.

□

Böylece Sasakian manifoldlarda yatay vektör alanları için kesitsel eğriliğin $\varphi-$kesitsel eğriliği tarafından belirlendiğini göstermiş olduk. Tüm kesitsel eğriliklerde bu sonucu elde etmek için $g(R(X,Y)Z,\xi)$ ve $g(R(X,\xi)Y,\xi)$ eğriliklerini elde etmemiz gerekir. Sasakian manifold üzerinde $(\nabla_X \varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$ ve $\nabla_X \xi = -\varphi X$ olmasını kullanırsak,

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi \\ &= -\nabla_X \varphi Y + \nabla_Y \varphi X + \varphi[X,Y] \\ &= -(\nabla_X \varphi)Y - \varphi \nabla_X Y + (\nabla_Y \varphi)X + \varphi \nabla_Y X + \varphi(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &= -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X + g(X,Y)\xi - \eta(X)Y = \eta(Y)X - \eta(X)Y \end{aligned}$$

elde ederiz.
Burada $Y = \xi$ alırsak,

$$R(X,\xi)\xi = X - \eta(X)\xi = -\varphi^2 X$$

buluruz. Böylece Sasakian manifoldlarda kesitsel eğriliğin $\varphi-$kesitsel eğriliği tarafından belirlendiğini göstermiş olduk.

$\varphi-$kesitsel eğriliği sabit olan Sasakian manifoldlar Sasakian uzay formu olarak adlandırılır.

Örnek 5.2. Örnek 5.1. de $\mathbb{R}^{2n+1}$ üzerindeki kontakt metrik yapının Sasakian olduğunu göstermiştik. Örnek 3.3 de ise, $n = 1$ için aldığımız X vektör alanı yataydır ve $Y = \varphi X$ dir. Sonuç olarak $\mathbb{R}^3$ Sasakian manifoldunun $\varphi-$kesitsel eğriliği sabittir ve -3 e eşittir. Aynı şey her n için $\mathbb{R}^{2n+1}$ için de doğrudur.

KAYNAKLAR

Alegre, P., Blair, D. E., Carriazo, A., 2004. Generalized Sasakian Space Forms. Israel Journal of Mathematics, 141, 157-184.

Blair, D.E., 2010. Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds. Second Edition. Birkhauser, Boston, USA, 360 p.

Do Carmo, M.P., 1992. Riemannian Geometry. Birkhauser, Boston, USA, 300 p.

Do Carmo, M.P., Çeviren Korkmaz, B., 2012. Diferansiyel Geometri: Eğriler ve Yüzeyler, TÜBA Yayınları, 587 s.

Kobayashi, S., Nomizu, K., 1963. Foundations of Differential Geometry Volume 1. Interscience Publishers, 329 p.

Moskal,E., 1966. Contact Manifolds Of Positive Curvature. Doktora Tezi, Matematik, University of Illinois.

Newlander, A., Nirenberg, L., 1957. Complex Analytic Coordinates in Almost Complex Manifolds. Annals of Mathematics, 65, 391-404.

Spivak, M., 1999. A Comprehensive Introduction To Differential Geometry Volume One. Third Edition. Publish or Perish, Houston, USA, 508 p.

Tanno, S., 1969. Sasakian Manifolds with Constant φ-Holomorphic Sectional Curvature. Tohoku Mathematics Journal, 21, 501-507.

Takahashi, T., 1977. Sasakian φ-Symmetric Spaces. Tohoku Mathematics Journal, 29, 91-113.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: SUBAŞI ÖZEL, Sibel
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 04.06.1979 - Çorum
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 532 7157757
e-mail	: sibelsubasiozel@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Ön Lisans	Hitit Üniversitesi Bilgisayar Teknolojileri	2018
Lisans	Gazi Üniversitesi Matematik Eğitimi	2001
Lise	Çorum Anadolu Öğretmen Lisesi	1997

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2001-2002	Osmancık Kız Meslek Lisesi	Matematik Öğretmeni
2002-2010	Çorum Eskice İlköğretim Okulu	Matematik Öğretmeni
2010-2013	Hasanpaşa Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni
2013-	Hitit Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce