T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI GRUP GENİŞLEMELERİNİN ÖZEL DURUMLAR İLE İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Mehtap YILMAZ

131650

Balıkesir, Şubat - 2003

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI GRUP GENİŞLEMELERİNİN ÖZEL DURUMLAR İLE İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Mehtap YILMAZ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

Sınav Tarihi : 07.02.2003

Jüri üyeleri : Doç. Dr. İsmail Naci CANGÜL (U.Ü.)
Yrd. Doç. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK (Danışman – Ba.Ü.)
Yrd. Doç. Dr. Osman BİZİM
Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR
Yrd. Doç. Dr. Recep ŞAHİN (Ba.Ü.)

Balıkesir, Şubat - 2003

ÖZET

BAZI GRUP GENİŞLEMELERİNİN
ÖZEL DURUMLAR İLE İNCELENMESİ

Mehtap YILMAZ

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

(Doktora Tezi / Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. A. Sinan ÇEVİK)

Balıkesir, 2003

Bu tez, bazı sonlu grup genişlemelerinin nilpotentliğini ve çözülebilirliğini inceler. Bunu yapmak için, bu grupların sunuşları kullanılmıştır. Diğer bir deyişle, bu sunuşlar üzerine bazı cebirsel özellikler uygulayarak, bu sunuşlarla temsil edilen grupların nilpotentlik ve çözülebilirliği verilmiştir.

Bu doktora tezi dört bölüm içerir.

Birinci bölümde genel anlamıyla gruplar, sunuşlar ve grup genişlemeleri üzerinde bazı temel cebirsel özellikler tekrar tanımlandı. Bu bölümün amacı, bu temel verileri tezin diğer bölümlerinde kullanmaktır.

İkinci bölümde serbest çarpımlar, birleştirilmiş serbest çarpımlar, HNN genişlemeler ile elde edilen grupları çalıştık ve sonra grupların bu türlerinin nilpotentliği ve çözülebilirliği hakkında bazı orijinal sonuçlar verdik.

Bölüm 3' te, grup genişlemelerinin bir örneği olan iki sonlu grubun yarı-direkt çarpımını çalıştık ve sonra bu tezin amaçları doğrultusunda bu bölümün ana sonuçlarını verdik.

Son bölümde, yarı-direkt çarpımın anlamının ayrık genişleme olmasının doğal bir sonucu olan iki sonlu grubun standart wreath çarpımı üstünde çalıştık. Daha sonra, önceki bölümlerde elde edilen sonuçların genişlemesi olan, bu wreath çarpım hakkında bazı ana sonuçlar elde ettik.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Nilpotentlik / *p*-nilpotentlik / (süper) çözülebilirlik / grup sunuşu / grup genişlemeleri / (birleştirilmiş) serbest çarpım / HNN genişlemeleri / yarı-direkt çarpım / (standart) wreath çarpım / Reidemeister-Schreier Metodu / Tietze Dönüşümleri

ABSTRACT

THE EXAMINATION OF SOME GROUP EXTENSIONS UNDER THE SPECIAL CASES

Mehtap YILMAZ

Balikesir University, Institute of Science, Department of Mathematic

(Ph. D. Thesis / Supervisor : Yrd. Doç. Dr. A.Sinan ÇEVİK

Balikesir – Turkey, 2003

This thesis examines the nilpotentency and solvability of some finite group extensions. To do that, the presentation of these groups. has been used. In other words, by applying some algebraic properties on these presentations, the nilpotentency and solvability of the groups represented by these presentation has been given.

This Ph.D thesis contains four chapters.

In the first chapter, in general some fundamental algebraic properties on groups, presentations and extensions of groups are recalled. The aim of this chapter is to use these fundamental data through the other chapters of the thesis.

In the second chapter, we studied the groups obtained by free products, amalgamated free products, HNN extensions and then gave some original results about the nilpotentency and solvability of these types of groups.

In Chapter 3, we studied the semi-direct product of two finite groups which is an example of group extensions and then gave the main results of this chapter in line with the aim of this thesis.

In the final chapter, we worked on the (standard) wreath product of two finite groups which is a natural consequence of the semi-direct product. Then, we obtained some main results about this wreath product, that are extensions of the results obtained in the previous chapters.

KEY WORDS : Nilpotentency / *p*-nilpotentency / (super) solvability / group presentations / group extensions / (amalgamated) free product / HNN extensions / semi-direct product / (standard) wreath product / Reideimeister-Schreier Method / Tietze Transformations

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Bir bilim insanının hayatında doktora aşaması çok önemlidir. Konusu için gerekli olan bilgilerin yanı sıra, kendisine olan güveni de başarısını önemli ölçüde etkileyen faktörlerden biridir. Bana doktora aşaması boyunca öncelikle kendime olan güvenimi kazanmamı sağladığı ve daha sonra da konusundaki bilgi ve tecrübelerini benimle paylaştığı için danışmanım sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK' e sonsuz teşekkürler ediyorum.

Hayatımın her aşamasında yanımda olan ve beni asla yalnız bırakmayan canım anneme ve babama da teşekkürü bir borç biliyorum.

Bu süre içinde her zaman bana destek olan, sıkıntılarımı paylaşan sevgili eşime binlerce teşekkür...

Ve sevgisiyle annesine ne kadar güç verdiğini bilmeyen sevgili oğluma, birtaneme "iyi ki varsın" diyorum.

Ayrıca gerekli kaynaklar konusunda yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. İ. Naci CANGÜL' e de teşekkür ediyorum.

Mehtap YILMAZ

Balıkesir, 2003

SEMBOL LİSTESİ

S_n	: $n!$ mertebeli simetrik grup
A_n	: $\frac{n!}{2}$ mertebeli alterne grup
$A \leq G$	: A grubu G grubunun alt grubudur
$\lvert G \rvert$	: G grubunun mertebesi
$o(a)$	: a elemanının mertebesi
$A \lhd G$	: A grubu G grubunun normal alt grubudur
$Z(G)$	: G grubunun merkezi
$A \times B$	: A ve B gruplarının direkt çarpımı
G'	: G grubunun komütatör alt grubu
$[a,b]$	: a ve b elemanlarının komütatör elemanı
$\mathbf{Z}$	: tam sayılar kümesi
$\mathbf{Z}_m$	: m mertebeli devirli grup
$[x]$	: x elemanının denklik sınfı
$\bar{x}$	: x elemanına ait yan cümle temsilcisi
P_G	: G grubunun sunuşu
$< \mathbf{x}; \mathbf{r} >$	: $\mathbf{x}$ üreteçli ve $\mathbf{r}$ bağıntılı grubun sunuşu
$< x >$	: x elemanı ile üretilen sonsuz devirli grup
$< x; x^m >$	: x elemanı ile üretilen m mertebeli devirli grup
$A * B$	: A ve B gruplarının serbest çarpımı
$A *_\theta B$	: A ve B gruplarının birleştirilmiş serbest çarpımı
G_0	: HNN genişlemenin taban grubu
G^*	: G_0 grubunun HNN genişlemesi
$A >\!\lhd_\theta B$	: A ile B gruplarının yarı-direkt çarpımı
D_n	: $2n$ mertebeli dihedral grup

$A \cong B$	: A grubu B grubuna izomorftur
$A \wr B$	: A grubu ile B grubunun standart wreath çarpımı
$\theta(x)$	: $\theta : A \to B$, $x \mapsto \theta(x)$ olacak şekilde grup homomorfizması

1. BAZI CEBİRSEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde verilen bilgiler standart olup, [1, 2, 5, 6, 11, 12, 13, 18, 19, 22, 23] gibi kaynaklarda bulunabilir. Buradaki amaç 2., 3. ve 4. Bölümler için gerekli olan temel bazı cebirsel tanım ve teoremleri tanımlamaktır.

1.1 Çözülebilir Gruplar

1.1.1 Tanım Bir G grubunun $H_0, H_1, ..., H_n$ alt gruplarını düşünelim. $H_0 = \{1_G\}$ ve $H_n = G$ olmak üzere, her bir $i = 1,2,...,n$ için $H_i \lhd H_{i+1}$ özelliğini sağlayan

$$\{1_G\} = H_0 \lhd H_1 \lhd ... \lhd H_n = G$$

serisine, G grubunun **alt normal serisi** denir.

1.1.2 Tanım 1.1.1 Tanım' daki alt normal seride eğer her H_{i+1}/H_i bölüm grubu değişmeli ise, bu seriye G grubunun **değişmeli serisi** denir.

1.1.3 Tanım G grup ve $H_0, H_1, ..., H_n$ de G grubunun alt grupları olsun. Eğer G grubu, H_{i+1}/H_i bölüm grubu değişmeli olacak şekilde bir alt normal seriye sahipse, G grubuna **çözülebilir grup** denir.

1.1.4 Örnek S_3 grubunun çözülebilir olduğunu gösterelim. Bu grup, $\{(1_{S_3}),(123),(132),(12),(13),(23)\}$ elemanlarından oluşur ve

$$\{1_{S_3}\} = H_0 \lhd \{(1),(123),(132)\} \lhd H_2 = S_3$$

alt normal serisi vardır. Bu serideki $\left|{}^{H_1}\!\big/_{\{1_{S_3}\}}\right| = 3$ ve $\left|{}^{H_2}\!\big/_{H_1}\right| = 2$ olduğundan bölüm grupları devirli ve dolayısıyla değişmelidir. Bu nedenle alt normal seri değişmeli seri olduğundan S_3 grubu çözülebilirdir. ///

1.1.5 Tanım G çözülebilir bir grup ise, G grubunun en kısa değişmeli serisinin uzunluğuna G grubunun **türetilmiş uzunluğu** denir. Eğer G grubunun türetilmiş uzunluğu 0 ise grup aşikardır, 1 ise grup değişmelidir, 2 ise grup **metabeliyandır** denir. 1.1.4 Örnek' te verilen S_3 grubu metabeliyan bir gruptur.

1.1.6 Teorem Çözülebilir bir G grubunun herhangi bir M alt grubu da çözülebilirdir.

İspat: G çözülebilir bir grup ve M grubu da G grubunun alt grubu olsun. O zaman G grubunun,

$$\{1_G\} = H_0 \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_n = G$$

şeklinde bir değişmeli serisi vardır. Bu durumda her bir $i = 0,1,2,\ldots,n$ için $M_i = M \cap H_i$ alalım. İspatı tamamlamak için M grubunun,

$$\{1_G\} = M_0 \lhd M_1 \lhd \ldots \lhd M_n = M$$

biçiminde bir değişmeli serisi bulunmalıdır.

İlk olarak $M_i \lhd M_{i+1}$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için, $a \in M \cap H_i$ ve $b \in M \cap H_{i+1}$ alınırsa, $b^{-1}ab \in M \cap H_i$ olduğunu göstermek kolaydır. Böylece $M \cap H_i \lhd M \cap H_{i+1}$ ve dolayısıyla $M_i \lhd M_{i+1}$ olur.

Ayrıca her bir $i = 0,1,2,\ldots,n$ için ${}^{M_{i+1}}\!\big/_{M_i}$ bölüm gruplarının değişmeli olduğu gösterilmelidir. Burada ${}^{M_{i+1}}\!\big/_{M_i} = {}^{M \cap H_{i+1}}\!\big/_{M \cap H_i}$ eşitliği sağlanır. 2. İzomorfizma Teoremi' nden dolayı bu grup, ${}^{(M \cap H_{i+1})H_i}\!\big/_{H_i}$ bölüm grubuna izomorftur. Gerçekten,

$$(M \cap H_{i+1})H_i \big/ H_i \cong M \cap H_{i+1} \big/ (M \cap H_{i+1}) \cap H_i = M \cap H_{i+1} \big/ M \cap (H_{i+1} \cap H_i)$$

olur. Ayrıca $H_i \leq H_{i+1}$ olduğundan bu grup, $M \cap H_{i+1} \big/ M \cap H_i$ olur ki bu, $M_{i+1} \big/ M_i$ bölüm grubu demektir. Böylece,

$$(M \cap H_{i+1})H_i \big/ H_i \cong M_{i+1} \big/ M_i$$

elde edilir. [1]' deki Karşılık Gelme Teoremi'nden $(M \cap H_{i+1})H_i \big/ H_i \leq H_{i+1} \big/ H_i$ olur. Hipotezden, $H_{i+1} \big/ H_i$ bölüm grupları değişmeli olduğundan, $M_{i+1} \big/ M_i$ bölüm grupları da değişmelidir. Böylece M grubunun,

$$\{1_G\} = M_0 \lhd M_1 \lhd \ldots \lhd M_n = M$$

biçiminde değişmeli serisi elde edildiğinden, M grubu çözülebilir bir gruptur. □

Aşağıdaki ön teorem [22]' de bulunabilir.

1.1.7 Ön Teorem (Dedekind Kuralı) G bir grup ve A, B ve C grupları da $B \leq A$ olacak şekilde G grubunun alt grupları olsun. Bu durumda,

$$A \cap (BC) = B(A \cap C)$$

eşitliği sağlanır. Burada BC ve $B(A \cap C)$ gruplarının G grubunun alt grubu olmasına gerek yoktur.

1.1.8 Teorem G grubu çözülebilir ve $K \lhd G$ ise, $G \big/ K$ bölüm grubu da çözülebilirdir.

İspat: Hipotezden G grubu çözülebilir grup olduğundan,

$$\{1_G\} = H_0 \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_n = G$$

şeklinde bir değişmeli serisi vardır. İspat için önce $K \lhd G$ ve $H_i \lhd H_{i+1}$ ($i = 0,1,2,\ldots,n$) iken $KH_i \lhd KH_{i+1}$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için, $y \in KH_i$ ve $x \in KH_{i+1}$ alınırsa bu durumda, $y = k_1 h_i$ olacak şekilde $k_1 \in K$, $h_i \in H_i$ ve $x = k_2 h_{i+1}$ olacak şekilde $k_2 \in K$, $h_{i+1} \in H_{i+1}$ vardır. Bu durumda $x^{-1}yx \in KH_i$ olduğunu göstermek kolaydır. Bu $KH_i \lhd KH_{i+1}$ olduğu anlamına gelir. Böylece,

$$K \lhd KH_1 \lhd \ldots \lhd KH_n = G$$

serisi elde edilir. Bu durumda,

$$\{1_G\} = K/K \lhd KH_1/K \lhd \ldots \lhd KH_n/K = G/K \tag{1.1}$$

serisi bulunur. Bundan sonra (1.1) serisindeki bölüm gruplarının değişmeli olduğu gösterilmelidir. Bunun için, $0 \le i < n$ olacak şekilde $\dfrac{KH_{i+1}/K}{KH_i/K}$ bölüm grubunu alalım. 3. İzomorfizma Teoremi'nden dolayı bu grup, KH_{i+1}/KH_i bölüm grubuna izomorftur. Son bölüm grubunun $(KH_i)H_{i+1}/KH_i$ olduğu açıktır. 2. İzomorfizma Teoremi'nden dolayı bu grup, $H_{i+1}/(KH_i) \cap H_{i+1}$ bölüm grubuna izomorftur. 1.1.7 Ön Teorem' den bu grup, $H_{i+1}/H_i(K \cap H_{i+1})$ olur.

Hipotezden $H_i \lhd H_{i+1}$ ve H_{i+1}/H_i değişmelidir. Bu durumda $H_i \le H_i(K \cap H_{i+1}) \le H_{i+1}$ olacağından $H_i(K \cap H_{i+1})/H_i \le H_{i+1}/H_i$ elde edilir ve H_{i+1}/H_i bölüm grubu değişmeli olduğundan $H_i(K \cap H_{i+1})/H_i \lhd H_{i+1}/H_i$ bulunur. 3.İzomorfizma Teoremi' nden dolayı,

$$\frac{H_{i+1}/H_i}{H_i(K \cap H_{i+1})/H_i} \cong H_{i+1}/H_i(K \cap H_{i+1})$$

değişmeli olduğundan, $\dfrac{KH_{i+1}/K}{KH_i/K}$ bölüm grubu da değişmelidir. Böylece G/K grubunun değişmeli serisi elde edildiğinden dolayı bu grup, çözülebilir bir gruptur. □

1.1.9 Teorem $M \lhd G$ olsun. Eğer M ve G/M çözülebilir ise, G grubu da çözülebilirdir.

İspat: Hipotezden G/M çözülebilir olduğundan,

$$M/M = G_0/M \lhd G_1/M \lhd \ldots \lhd G_n/M = G/M \tag{1.2}$$

değişmeli serisi vardır. 3. İzomorfizma Teoremi'nden dolayı $\dfrac{G_{i+1}/M}{G_i/M}$ grubu, G_{i+1}/G_i grubuna izomorftur ve bu grup da değişmeli olur.

Diğer taraftan, M çözülebilir olduğundan $\{1_G\} = M_0 \lhd M_1 \lhd \ldots \lhd M_s = M$ değişmeli serisi vardır. (1.2) değişmeli serisi var olduğundan Karşılaştırma Teoremi gereğince,

$$M = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$$

değişmeli serisi de vardır. Böylece,

$$\{1_G\} = M_0 \lhd M_1 \lhd \ldots \lhd M_s = M = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$$

olur. Bu durumda, G grubu için bölüm grupları değişmeli olan bir seri elde edilir. Bu nedenle G çözülebilir bir gruptur. □

1.1.10 Tanım H ve K grupları, birim elemanları sırasıyla 1_H ve 1_K olan gruplar olsun. Bu grupların $H \times K$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde tanımlı ikili işlem ise,

$$(a,b)(a_1,b_1) = (aa_1, bb_1) \quad (a, a_1 \in H \text{ ve } b, b_1 \in K)$$

şeklinde tanımlansın. Bu ikili işleme göre $H \times K$ kümesi bir grup yapısı oluşturur. Bu grubun birimi $(1_H, 1_K)$ elemanıdır ve (a, b) elemanlarının tersi (a^{-1}, b^{-1}) şeklindedir. Bu gruba H ile K gruplarının **direkt çarpımı** denir ve mertebesi,

$$|H \times K| = |H||K|$$

şeklindedir. Direkt çarpım grubunda, hem H hem de K grubu $H \times K$ grubunun normal alt grubudur. Ayrıca 1.7 Bölüm' de açıklanacağı gibi,

$$1 \to H \to H \times K \to K \to 1$$

olduğundan bu grup bir genişlemedir.

1.1.11 Sonuç H ve K çözülebilir ise, $H \times K$ çözülebilirdir.

İspat: $G = H \times K$ ise $H \lhd G$ ve $G/H \cong K$ dır. Bu nedenle, 1.1.9 Teorem' den G grubu çözülebilirdir. □

1.1.12 Sonuç Sonlu her p-grubu çözülebilirdir.

İspat: $|G|$ üzerinden tümevarım uygulayalım. [23]' de G sonlu p-grubu olmak üzere, eğer G grubu birden fazla elemana sahipse, Z(G) grubu da birden fazla elemana sahip olduğundan $|Z(G)| \neq 1$ olur. Bu durumda $G/Z(G)$ mertebesi G grubunun mertebesinden küçük olan bir p-grubudur. Çünkü her G grubu çözülebilir olduğundan $G/Z(G)$ bölüm grubu da çözülebilirdir. Z(G) grubunun çözülebilirliği de açıktır. $Z(G) \lhd G$, $G/Z(G)$ ile Z(G) çözülebilir olduğundan, 1.1.9 Teorem' den G grubu çözülebilirdir. □

1.2 Komütatör Alt Gruplar ve Türetilmiş Seriler

Çözülebilir gruplara bir diğer yaklaşım, komütatör alt gruplar ile olur.

1.2.1 Tanım G bir grup ve $a,b \in G$ olsun. G grubunun $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ ile gösterilen elemanına, a ile b elemanlarının **komütatörü** denir. G grubunun bütün komütatörleri tarafından üretilen alt gruba, **komütatör alt grup** denir ve $G^{'}$ ile gösterilir. Yani $G^{'} = [G,G]$ olur.

1.2.2 Teorem G grubunun bütün $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ komütatörlerinin kümesi $G^{'}$ normal alt grubunu üretir ve de $G/G^{'}$ değişmelidir. Ayrıca $N \lhd G$ olmak üzere G/N bölüm grubunun değişmeli olması için gerekli ve yeterli koşul $G^{'} \leq N$ olmasıdır.

İspat: $G^{'} = [G,G] = \langle [h,k] : h \in G, k \in G \rangle$ şeklinde gösterilir. $G^{'}$ grubunun G grubunun normal alt grubu olduğunu göstermek için $a \in G^{'}$ alalım. Bu durumda $a = [h,k] = hkh^{-1}k^{-1}$ olacak şekilde $h \in G$ ve $k \in G$ vardır. Herhangi bir $g \in G$ alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} g^{-1}ag &= g^{-1}(hkh^{-1}k^{-1})g = (g^{-1}hkh^{-1})(1_G)(k^{-1}g) = (g^{-1}hkh^{-1})(gg^{-1})(k^{-1}g) \\ &= (g^{-1}hkh^{-1})(gk^{-1}kg^{-1})(k^{-1}g) = [(g^{-1}h)k(g^{-1}h)^{-1}k^{-1}](kg^{-1}k^{-1}g) \end{aligned}$$

olduğundan, $g^{-1}ag \in G^{'}$ bulunur. Böylece, $G^{'} \lhd G$ olur.

Ayrıca $G/G^{'}$ 'nün değişmeli olduğunu göstermek için $x, y \in G/G^{'}$ alınırsa, bu durumda, $x = aG^{'}$ ve $y = bG^{'}$ olacak şekilde $a, b \in G$ vardır. Buradan $G^{'} \lhd G$ olduğu kullanılarak,

$$xy = (aG^{'})(bG^{'}) = (ab)G^{'} = (ab)(1_G)G^{'} = (ab)(b^{-1}a^{-1}ba)G^{'} = (ba)G^{'} = yx$$

olduğu açıktır ve böylece $G/G^{'}$ değişmelidir.

$N \lhd G$ ve G/N değişmeli olsun. Bu durumda, $(a^{-1}N)(b^{-1}N) = (b^{-1}N)(a^{-1}N)$ ve buradan $(aba^{-1}b^{-1})N = N$ olduğundan $aba^{-1}b^{-1} \in N$ elde edilir ki bu, $G^{'} \leq N$ demektir.

Tersine, $G' \leq N$ olsun.

$$(a\mathrm{N})(b\mathrm{N}) = (ab)N = (ab)(b^{-1}a^{-1}ba)N = (ba)N = (bN)(aN)$$

olduğundan, G/N değişmelidir. □

1.2.3 Tanım G grubunun,

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \ldots \text{ ve } G^{(i+1)} = (G^{(i)})'$$

şeklindeki azalan normal serisine **türetilmiş serisi** denir. Bu serinin 1' e ulaşmasına ya da sona erdirilmesine gerek yoktur. Bütün $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ bölüm grupları değişmeli gruplardır. Bunların ilki G/G' olur. Bu en geniş değişmeli bölüm grubudur ve G_{ab} olarak da gösterilir.

Aşağıdaki sonuç [23]' de gösterilmiştir.

1.2.4 Teorem Eğer G grubu $\{1_G\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$ değişmeli serisine sahip çözülebilir grup ise, her i için $G^{(i)} \leq G_{n-i}$ olur.

İspat: i üzerinden tümevarım uygulayarak ispat yapılır.

- $i = 0$ için $G^{(0)} = G = G_n$ olduğundan $G^{(0)} \leq G_n$ elde edilir ve ifade doğrudur.
- $i = k$ için $G^{(k)} \leq G_{n-k}$ olsun. $G^{(k+1)} \leq G_{n-(k+1)}$ olduğu gösterilmelidir.

$G_{n-k}/G_{n-(k+1)}$ değişmeli olduğundan, 1.2.4 Ön Teorem' den $(G_{n-k})' \leq G_{n-(k+1)}$ olduğu açıktır. Böylece,

$$G^{(k+1)} = (G^{(k)})' \leq (G_{n-k})' \leq G_{n-(k+1)}$$

olur. □

1.2.5 Teorem Bir G grubunun çözülebilir olması için gerekli ve yeterli koşul herhangi bir n tamsayısı için $G^{(n)} = \{1_G\}$ olmasıdır.

İspat: $\{1_G\} = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$ çözülebilir bir seri olsun. 1.2.5 Teorem' den dolayı $G^{(n)} \leq G_{n-n} = G_0 = \{1_G\}$ olduğundan, $G^{(n)} = \{1_G\}$ olur.

Tersine herhangi bir n tamsayısı için $G^{(n)} = \{1_G\}$ ise $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq ... \geq G^{(n)} = \{1_G\}$ olduğundan bu seri, G için çözülebilir bir seridir. □

Aşağıdaki sonuçların ispatları [1, 13]' de bulunabilir.

1.2.6 Ön Teorem A_n alterne grubunun basit olması için gerekli ve yeterli koşul $n \neq 4$ olmasıdır.

1.2.7 Ön Teorem Çözülebilir basit gruplar asal mertebeye sahiptirler.

Yukarıdaki sonuçlara bağlı olarak 1.2.8 Teorem çözülebilirlikle ilgili önemli bir özelliktir.

1.2.8 Teorem $n \geq 5$ için S_n çözülebilir grup değildir.

İspat: Olmayana ergi yöntemini kullanalım ve $n \geq 5$ için S_n çözülebilir grup olsun. 1.1.6 Teorem' den A_n grubu çözülebilir olmalıdır. Bu durumda A_n grubu değişmeli bir seriye sahiptir ve bu seri,

$$\{(1_{S_n})\} = H_0 \lhd H_1 \lhd ... \lhd H_k = A_n$$

olsun. Bu serideki bütün H_{i+1}/H_i bölüm grupları değişmelidir. Ayrıca $H_k = A_n$ ve $0 \leq i < k$ için $H_i \neq A_n$ olur. Bu durumda $H_{k-1} \neq H_k = A_n$ olduğu açıktır. Burada $H_{k-1} \lhd H_k$ olduğundan $H_{k-1} \lhd A_n$ elde edilir. 1.2.7 Ön Teorem' den A_n basit grup olduğundan, $H_{k-1} = \{(1_{S_n})\}$ olur. Fakat H_k/H_{k-1} bölüm grubu değişmeli ve ayrıca,

$$H_k/H_{k-1} = A_n/H_{k-1} = A_n/\{(1_{S_n})\} \cong A_n$$

olduğundan A_n grubu da değişmelidir. A_n değişmeli olmadığından bu bir çelişkidir. Ayrıca 1.2.7 Ön Teorem' de de belirtildiği gibi, mertebesi asal sayı olmayan sonlu değişmeli grup basit değildir. Böylece $n \geq 5$ için S_n çözülebilir grup değildir. □

1.2.9 Tanım G bir grup olsun. Eğer G grubu G/H devirli olacak şekilde H devirli bir normal alt grubuna sahipse, G grubuna **metacyclic grup** denir. Bu grupların çözülebilir olduğu tanımından açıktır.

[13]' de metacylic grupların 1.5 Bölüm' de belirtilecek olan sunuş kavramıyla gösterimi aşağıdaki gibidir.

1.2.10 Teorem A ve B grupları sırasıyla a ve b ile üretilen, p ve q mertebeli devirli gruplar olmak üzere, $p > q$ olsun ve q asalı (p-1) sayısını bölsün. Bu durumda A ve B gruplarından oluşan ab mertebeli metacyclic grubun sunuşu,

$$\langle a, b; a^p, b^q, ba = a^s b \ (s \not\equiv 1 \,(\text{mod}\, p) \text{ ve } s^q \equiv 1 \,(\text{mod}\, p)) \rangle \tag{1.3}$$

şeklindedir.

1.3 Nilpotent Gruplar

Bir G grubunun alt gruplarının,

$$\gamma_1(G) = G \text{ ve } \gamma_{i+1} G = [\gamma_i(G), G] \tag{1.4}$$

olacak şekilde bir zinciri $\gamma_i(G)$ olsun. (1.4)' ün tanımına göre $\gamma_{i+1}(G) \subset \gamma_i(G)$ olduğu elde edilir. Bu zincire bağlı olarak aşağıdaki tanımlar verilebilir.

1.3.1 Tanım G grubunun $G = \gamma_1(G) \supset \gamma_2(G) \supset \ldots$ normal serisine **azalan merkez serisi** denir.

Yine G grubunun alt gruplarının,

$$Z^0(G) = \{1_G\} \text{ ve } Z^{i+1}(G) \subset Z\left(G/_{Z^i(G)} \right)$$

şeklindeki $Z^i(G)$ zincirine G grubunun **i. en yüksek merkezi** denir. [1]' deki Karşılık Gelme Teoremi' nden, her bir i için, $Z^i(G) \subset Z^{i+1}(G)$ ve $Z^i(G) \lhd G$ olduğunu görmek kolaydır.

1.3.2 Tanım G grubunun $\{1_G\} = Z^0(G) \subset Z^1(G) \subset ...$ şeklindeki serisine **artan merkez serisi** denir.

G grubunun azalan merkez serisi ile artan merkez serisi arasındaki ilişki, aşağıda 1.3.5 Teorem' de belirtilmiştir. Bu teoremin ispatı için öncelikle aşağıdaki ön teoremler gereklidir. Bu ön teoremlerin ispatları [23]' de bulunabilir.

1.3.3 Ön Teorem G bir grup, K ve H bunun $K \lhd G$ ve $K \subset H \subset G$ olacak şekilde alt grupları olsun. $[H,G] \subset K$ olması için gerekli ve yeterli koşul, $H/K \subset Z(G/K)$ olmasıdır.

1.3.4 Ön Teorem $f : G \to H$ örten homomorfizma olmak üzere, $A \subset Z(G)$ ise $f(A) \subset Z(H)$ dır.

1.3.5 Teorem Herhangi bir G grubu için $m \in \mathbf{Z}$ olmak üzere, $Z^m(G) = G \Leftrightarrow \gamma_{m+1}(G) = \{1_G\}$ dir. Ayrıca her bir i için $\gamma_{i+1}(G) \subset Z^{m-i}(G)$ olur.

İspat: $Z^m(G) = G$ olsun. i üzerinden tümevarım uygulanırsa, $i = 0$ için $\gamma_1(G) \subset Z^m(G)$ olduğu açıktır. $\gamma_{i+1}(G) \subset Z^{m-i}(G)$ olsun. 1.3.3 Ön Teorem kullanılarak,

$$\gamma_{i+2}(G) = [\gamma_{i+1}(G), G] \subset [Z^{m-i}(G), G] \subset Z^{m-i-1}$$

olduğu gösterilir. Bütün i tamsayıları için bu sağlandığından, $i = m$ alınırsa,

$$\gamma_{m+1}(G) \subset Z^{m-m} = Z^0 = \{1_G\}$$

olduğundan $\gamma_{m+1}(G) \subset \{1_G\}$ bulunur ki bu, $\gamma_{m+1}(G) = \{1_G\}$ eşitliğini verir.

Tersine $\gamma_{m+1}(G)=\{1_G\}$ olsun. İspatı tamamlamak için $\gamma_{m+1-j}(G)\subset Z^j(G)$ olduğu gösterilmelidir. j üzerinden tümevarım uygulanırsa;

$j=0$ için $\gamma_{m+1}(G)=\{1_G\}\subset\{1_G\}=Z^0(G)$ bulunur. $\gamma_{m+1-j}(G)\subset Z^j(G)$ olsun. O zaman, doğal epimorfizmanın kısıtlaması olan,

$$G/\gamma_{m+1-j}(G)\to G/Z^j(G)$$

örten homomorfizması vardır. 1.3.3 Ön Teorem' den $[\gamma_{m-j}(G),G]\subset\gamma_{m+1-j}(G)$ olduğundan, $\gamma_{m-j}(G)/\gamma_{m+1-j}(G)\subset Z\left(G/\gamma_{m+1-j}(G)\right)$ olur. 1.3.4 Ön Teorem' den $\gamma_{m-j}(G)Z^j(G)/Z^j(G)\subset Z\left(G/Z^j(G)\right)=Z^{j+1}(G)/Z^j(G)$ elde edilir. Bundan başka, $Z^{j+1}(G)\supset\gamma_{m-j}(G)Z^j(G)\supset\gamma_{m-j}(G)$ bulunur. Böylece bu durum bütün j sayıları için sağlandığından, $j=m$ için de sağlanır. Bu durumda, $G=\gamma_1(G)\subset Z^m(G)$ olur ki buradan $Z^m(G)=G$ eşitliği çıkar. □

1.3.6 Tanım Eğer $\gamma_{m+1}(G)=\{1_G\}$ olacak şekilde bir $m\in\mathbf{Z}$ varsa, G grubuna **nilpotent grup** denir. Buradaki m tamsayısına G grubunun **nilpotentlik sınıfı** denir. Eğer G, 0. sınıftan nilpotent ise $G=\{1_G\}$, 1. sınıftan nilpotent ise $G\neq\{1_G\}$ ve değişmeli, 2. sınıftan nilpotent ise **metabeliyan** olur. Değişmeli olmayan ve (p asal) p^3 mertebeli her grup metabeliyandır [23].

Nilpotent grupların bazı özellikleri

1) [23]' e göre G grubunun azalan merkez serisi $\{1_G\}$' ye ulaşıyorsa veya artan merkez serisi G grubuna ulaşıyorsa nilpotenttir.

2) Değişmeli her grup nilpotent ve nilpotent her grup çözülebilirdir. Bu nedenle nilpotent gruplara p-gruplarının bir genellemesi gözüyle bakılabilir.

3) Her bir i için $G^{(i)}\subset\gamma_i(G)$ olur.

İspat: • $i=1$ için $G^{(1)}=[G,G]$ ve $\gamma_1(G)=G$ olduğu 1.2.1 Tanım ve (1.4)' den açıktır.

• $i=2$ için ispatlayalım. 1.2.1 Tanım' dan $G^{(2)}=[G^{(1)},G^{(1)}]$ ve (1.4)' den $\gamma_2(G)=[\gamma_1(G),G]$ olduğu açıktır.

$a\in G^{(2)}$ alalım. Bu durumda, $a=[g_1,g_2]$ olacak şekilde $g_1\in G^{(1)}$ ve $g_2\in G^{(1)}$ vardır. Böylece $g_1=[b_1,b_2]$ ve $g_2=[c_1,c_2]$ olacak şekilde $b_1,b_2,c_1,c_2\in G$ vardır. Buradan $g_1\in\gamma_1(G)$ ve $g_2\in G$ olur. Bu da $a\in\gamma_2(G)$ demektir.

Bu şekilde devam edilerek $G^{(i)}\subset\gamma_i(G)$ olduğu görülür. □

4) Eğer $\gamma_m(G)=\{1_G\}$ ise $G^m=\{1_G\}$ olur.

İspat: (3)' den $G^m\subset\gamma_m(G)=\{1_G\}$ olduğundan $G^m=\{1_G\}$ olduğu da açıktır.

5) [22]' de nilpotent her grup aşikar olmayan bir merkeze sahiptir.

6) Çözülebilir her grubun nilpotent olmasına gerek yoktur. Örneğin 1.1.4 Örnek' te S_3 grubunun çözülebilirdir, fakat nilpotent değildir. Çünkü aşikar bir merkeze sahiptir.

1.3.7 Teorem Nilpotent bir G grubunun her alt grubu da nilpotenttir.

İspat: $H\leq G$ ve nilpotent olsun. İspat için tümevarım yöntemini kullanalım. $a\in\gamma_1(H)$ alalım. $H\leq G$ ve nilpotent olduğundan, $i=1$ için $\gamma_1(H)\subset\gamma_1(G)$ olduğu açıktır. $\gamma_i(H)\subset\gamma_i(G)$ olsun ve $c\in\gamma_{i+1}(H)$ alalım. Bu durumda $s\in\gamma_i(H)$ ve $t\in H$ olacak şekilde $c=[s,t]$ vardır. Böylece $c\in\gamma_{i+1}(G)$ ve her bir i için $\gamma_{i+1}(H)\subset\gamma_{i+1}(G)$ olduğu kolayca görülür. G nilpotent olduğundan $\gamma_{i+1}(G)=\{1_G\}$ dir ve tümevarım ispatından dolayı $\gamma_{i+1}(G)=\{1_G\}$ olduğu açıktır. Bu ise H alt grubunun nilpotent olması demektir. □

1.3.8 Teorem G nilpotent bir grup ve $H\lhd G$ ise, G/H bölüm grubu da nilpotenttir.

İspat: $f:G\to L$ örten homomorfizma olsun. Tümevarım ile her bir i için $\gamma_i(L)\subset f(\gamma_i(G))$ olduğunu gösterelim. $i=1$ için $\gamma_1(L)=L$ ve örtenlikten $f(G)=L$ olduğundan $f(\gamma_1(G))=L$ olur ve buradan $\gamma_1(L)\subset f(\gamma_1(G))$ olduğu açıktır. $\gamma_i(L)\subset f(\gamma_i(G))$ olsun. Hipotez kullanılarak,

$$\gamma_{i+1}(L)=[\gamma_i(L),\mathrm{L}]\subset[\mathrm{f}(\gamma_i(G)),\mathrm{f}(G)]=\mathrm{f}(\gamma_{i+1}(G))$$

olduğu gösterilebilir. Böylece her bir i için $\gamma_i(L)\subset f(\gamma_i(G))$ olduğu gösterilmiş olur.

$H\lhd G$ olduğundan G/H bölüm grubunu tanımlayabiliriz. $f:G\to G/H$ doğal epimorfizmadır ve homomorfizma olmasını kullanarak, her i için,

$$\gamma_i(G/H)\subset f(\gamma_i(G))=f(\{1_G\})=\{1_{G/H}\}$$

olduğu görülür. Böylece, $\gamma_i(G/H)=\{1_{G/H}\}$ olur ki bu G/H bölüm grubunun nilpotent olduğu anlamına gelir. □

1.3.9 Uyarı 1.1.9 Teorem' i düşünelim. Bu teorem nilpotentlik için doğru değildir. Yani, $K\lhd G$ ve K ile G/K bölüm grubu nilpotent ise G grubu nilpotent olmayabilir. Örneğin S_3 simetrik grubu düşünülürse, $A_3\lhd S_3$ ve A_3 ile S_3/A_3 değişmeli ise 1.1.9 Teorem gereği S_3 grubunun da nilpotent olması gerekir ancak, S_3 nilpotent değildir.

Direkt çarpımlarla ilgili aşağıdaki ön teorem [22]' de bulunabilir.

1.3.10 Ön Teorem $G=H\times K$ olsun. Bu durumda,

a) Eğer $h_1,h_2\in H$ ve $k_1,k_2\in K$ ise, $[(h_1,k_1),(h_2,k_2)]=([h_1,h_2],[k_1,k_2])$ olur.

b) Eğer H_1 ile H_2 grupları H' nin ve K_1 ile K_2 grupları K grubunun alt grupları ise, $[H_1\times K_1,\ H_2\times K_2]=[H_1,\ H_2]\times[K_1,\ K_2]$ olur.

İspat: a) $h_1, h_2 \in H$ ve $k_1, k_2 \in K$ alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}[(h_1,k_1),(h_2,k_2)] &= (h_1,k_1)(h_2,k_2)(h_1,k_1)^{-1}(h_2,k_2)^{-1} \\ &= (h_1,k_1)(h_2,k_2)(h_1^{-1},k_1^{-1})(h_2^{-1},k_2^{-1}) \\ &= (h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1}, k_1k_2k_1^{-1}k_2^{-1}) \\ &= ([h_1,h_2],[k_1,k_2])\end{aligned}$$

elde edilir.

b) $[(h_1,k_1),(h_2,k_2)] \in [H_1 \times K_1,\ H_2 \times K_2]$ alınırsa, (a)' dan dolayı $[(h_1,k_1),(h_2,k_2)] \in [H_1,\ H_2] \times [K_1,\ K_2]$ dır. Tersine $([h_1,h_2],[k_1,k_2]) \in [H_1,\ H_2] \times [K_1,\ K_2]$ alınırsa yine (a)' dan $([h_1,h_2],[k_1,k_2]) \in [H_1 \times K_1,\ H_2 \times K_2]$ bulunur. □

1.3.11 Teorem G grubu sonlu sayıda nilpotent grubun direkt çarpımı ise G grubu da nilpotenttir.

İspat: Öncelikle iki nilpotent grup için bunun doğruluğu ispatlanırsa, tümevarım yoluyla sonlu sayıdaki grubun direkt çarpımına genişletilebilir. Bunun için $G = H \times K$ olsun ve

$$\gamma_i(H \times K) = \gamma_i(H) \times \gamma_i(K)$$

olduğunu gösterelim. İspat için i üzerinden tümevarım uygulayalım.

- $i = 1$ için (1.4)' den,

$$\gamma_1(H \times K) = H \times K = \gamma_1(H) \times \gamma_1(K)$$

olduğu açıktır.

- $i = n$ için $\gamma_n(H \times K) = \gamma_n(H) \times \gamma_n(K)$ olsun. (1.4), hipotez ve 1.3.10 Ön Teorem kullanılarak,

$$\gamma_{n+1}(H \times K) = [\gamma_n(H \times K), H \times K] \subset [\gamma_n(H) \times \gamma_n(K), H \times K]$$

$$= [\gamma_n(H), H] \times [\gamma_n(K), K] = \gamma_{n+1}(H) \times \gamma_{n+1}(K)$$

bulunur. Böylece,

$$\gamma_{n+1}(H \times K) \subset \gamma_{n+1}(H) \times \gamma_{n+1}(K) \tag{1.5}$$

bulunur. Artık H ve K alt grupları sırasıyla m. ve n. sınıflardan nilpotent olsun. Bu durumda 1.3.6 Tanım' dan $\gamma_{m+1}(H) = \{1_H\}$ ve $\gamma_{n+1}(K) = \{1_K\}$ olur. $M = \max\{m+1, n+1\}$ alırsak (1.5) kullanılarak,

$$\gamma_M(H \times K) = \{1_G\}$$

bulunur. Bu ise G grubunun M+1 sınıfından nilpotent olması demektir. □

p-grup ve nilpotent grubun bağlantısını açıklaması açısından aşağıdaki teorem önemlidir.

1.3.12 Teorem Her sonlu p-grubu nilpotenttir.

İspat: [23]' den biliyoruz ki G sonlu p-grubu olmak üzere $G \neq \{1_G\}$ ise, $Z(G) \neq \{1_G\}$ dir. Bazı i' ler için $Z^i(G) \neq G$ ise $Z^i(G) \subsetneq Z^{i+1}(G)$ olur. G sonlu olduğundan, eşitsizlik bütün i' ler için sağlanır. Ancak bazı i' ler için 1.3.5 Teorem ile $Z^i(G) = G$ olur. Bu ise $\gamma_{i+1}(G) = \{1_G\}$ demektir. 1.3.6 Tanım' dan G nilpotenttir. □

Sylow Teoremi' nin sonlu grup teorinin en önemli teoremlerinden biri olduğu iyi bilinir. Bu teoremden, p bir asal sayı ve $(p,m) = 1$ olmak üzere, $p^a m$ mertebeli herhangi bir sonlu grubun p^a mertebeli alt grubu vardır. Bu alt gruba da **Sylow p-alt grubu** denir. G grubunun Sylow p-alt gruplarının sayısı $n_p = n_p(G)$ ile gösterilir ve G grubunu karakteristik olarak incelemesi bakımından önemlidir. Eğer n sayısı p asalı için Sylow p-sayısı ise, bu sayı p moduna göre 1' e denktir.

Sylow Teoremleri, eğer p-grupları biliniyorsa herhangi bir sonlu grup hakkında bilgi verir. Bundan başka, p-grupları normal alt grupların pek çok uygulamasına sahiptir. Normal seriler ise çalışmalarımız için güçlü araçlardır.

[1]' de bir grubun Sylow p-alt grupları ile nilpotentliği arasındaki ilgi aşağıdaki teoremlerle verilmiştir.

1.3.13 Teorem H grubu G grubunun Sylow p-alt grubu olsun. Bu durumda,

a) H grubunun G grubunun Sylow p-alt grubu olması için gerekli ve yeterli koşul $|H| = p^n$ olmasıdır.

b) Bir Sylow p-alt grubunun eşleniği de yine bir Sylow p-alt grubudur.

c) G grubunun sadece bir tane P Sylow p-alt grubu varsa P, G grubunda normaldir.

1.3.14 Teorem Sonlu bir G grubu için aşağıdaki koşullar denktir.

a) G grubunun her Sylow alt grubu G grubunda normaldir.

b) G grubu Sylow alt gruplarının direkt çarpımıdır.

c) G grubunun her maksimal alt grubu G grubunda normaldir.

Yukarıdaki iki teoremin birleşiminden görülüyor ki, 1.3.13 Teorem' deki şartlar aslında bir G grubunun nilpotentlik şartlarıdır.

Nilpotentlik için *P.Hall kriteri* ise şöyledir. Detaylar için [21]' e bakılabilir.

1.3.15 Teorem G bir grup ve N grubu da bunun normal alt grubu olsun. Eğer N ve ${G}/{N}$ nilpotent ise, G grubu da nilpotenttir.

1.4 Serbest Gruplar ve Reidemeister – Schreier Metodu

Bu kısımdaki bilgilerin detayları [11]' de bulunabilir.

Gruplar sunuşlarla ifade edilebilip, sunuşların literatürde çok önemli bir yeri vardır. Grup sunuşu fikri aslında, üreteçleri de üreteçlerin sağlamasını istediğimiz bağıntıları alarak bir grup oluşturmaktır.

Sunuş kavramını açıklamak için öncelikle indirgenmiş kelime kavramının verilmesi gerekmektedir.

X boş olmayan bir küme olsun. Bu küme ile $x \leftrightarrow x^{-1}$ $(x \in X)$ eşlemesinden yararlanarak X^{-1} kümesini tanımlayalım ve $X^{\pm} = X \cup X^{-1}$ olsun.

1.4.1 Tanım $X^{\pm}$ kümesinin her bir elemanına **harf** denir. $n \in \mathbf{N}$, $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$$

ifadesine X üzerinde bir **kelime** denir. X üzerinde herhangi bir kelime, $x^{\varepsilon} x^{-\varepsilon}$ $(x \in X$, $\varepsilon = \pm 1)$ çifti içermiyorsa bu kelimeye **indirgenmiş kelime** denir. Ayrıca, verilen bir kelime için $x_1^{\varepsilon_1} \neq x_n^{-\varepsilon_n}$ ise bu kelimeye **devirsel indirgenmiş kelime** denir. Her bir $\varepsilon_i = 0$ özelliğindeki kelimeyi **boş kelime** olarak adlandıracağız.

$w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ ve $u = y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \dots y_m^{\varepsilon_m}$ kelimeleri X üzerinde iki kelime ise, bu iki kelimenin çarpımı,

$$wu = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n} \; y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \dots y_m^{\varepsilon_m}$$

olarak tanımlanır.

1.4.2 Tanım X üzerindeki w ve u kelimeleri indirgenerek ya da ekleme yapılarak birbirlerinden elde edilebiliyorsa, bu iki kelimeye **serbest olarak denktir** denir ve $w \sim u$ ile gösterilir.

Serbest olarak denk olma bağıntısı, bir denklik bağıntısıdır ve w kelimesinin denklik sınıfı $[w]$ ile gösterilir. Denklik sınıflarının çarpımı ise

$$[w][u] = [wu] \tag{1.6}$$

ile gösterilir ve bu çarpım iyi tanımlıdır.

1.4.3 Tanım (1.6) ile tanımlanan çarpıma göre denklik sınıflarının kümesi bir grup oluşturur [15]. Bu gruba **serbest grup** denir ve $F(X)$ ile gösterilir. Serbest gruplar $X_0 = \{[x] : x \in X\}$ kümesi ile üretilir ve bu küme ile X kümesi arasında bire-bir eşleme yapılabilir.

Aşağıdaki sonucun ispatı [15]' de bulunabilir.

1.4.4 Teorem (UMP) G herhangi bir grup olmak üzere, herhangi bir $\theta_0 : X_0 \to G$ fonksiyonu bir tek $\theta : F(X) \to G$ homomorfizmasına genişletilir.

Bu teorem, serbest grubun bir başka tanımını vermeye imkan sağlar.

1.4.5 Tanım X, bir $F(X)$ grubunun alt kümesi ve G bir grup olsun. Eğer her $f : X \to G$ dönüşümü bir tek $f : F(X) \to G$ homomorfizmasına genişletilebiliyorsa, $F(X)$ grubu, X üzerinde **serbesttir** denir. X kümesine $F(X)$ grubunun **serbest tabanı** denir. Genellikle bir serbest grup, serbest bir tabanı olan gruptur [11].

Serbest bir $F(X)$ grubunun serbest tabanının eleman sayısı olan $|X|$ tektir ve $F(X)$ serbest grubunun **rankı** olarak adlandırılır. Eğer rank sonlu ise, serbest grup sonlu ranklıdır.

İki serbest grubun izomorf olması için gerekli ve yeterli koşul, bunların ranklarının aynı olmasıdır [17]. Ayrıca, rankı 0 olan serbest grup aşikar gruptur ve rankı 1 olan serbest grup sonsuz devirli bir gruptur.

[11]' de serbest grupların en önemli özellikleri ise aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

1.4.6 Teorem Her grup bir serbest grubun homomorfik görüntüsüdür.

1.4.7 Teorem (Normal Form Teoremi) Her denklik sınıfı bir tek indirgenmiş eleman içerir.

1.4.8 Teorem Bir serbest grubun her alt grubu da serbest gruptur.

1.4.9 Teorem Serbest grupta etkisiz eleman dışında sonlu mertebeli eleman yoktur.

Serbest grupların yukarıdaki özelliklerinin en önemli kullanılma amaçları, grup sunuşlarını tanımlamaya imkan vermeleridir.

1.4.10 Tanım X bir küme ve X kümesi üzerindeki devirsel indirgenmiş kelimelerden oluşan boştan farklı bir küme R olsun. Bu durumda $P = \langle X; R \rangle$ ikilisine bir **grup sunuşu** denir. Buradaki X kümesi, üreteç ve sembollerin kümesi ve R kümesi ise bağıntı kelimelerinin kümesidir. X ve R kümelerinin her ikisi de sonlu ise P sunuşu da sonludur [15].

Örneğin, bir dikdötgenin simetrilerinin grubunu V_4 ile gösterelim. Bu grubun elemanları,

1_{V_4} ; birim eleman,

a ; x ekseni için öteleme,

b ; y ekseni için öteleme,

c ; merkez etrafında 180^0' lik dönme,

olarak alınırsa, $a^2 = b^2 = c^2 = 1_{V_4}$, $ab = ba$, $bc = cb$, $ac = ca$ bulunur. Bu durumda V_4 grubunun üreteçleri a, b, c ve bağıntıları,

$$a^2 = b^2 = c^2 = 1_{V_4},\ ab = ba,\ bc = cb,\ ac = ca$$

olur. Böylece V_4 grubunun sunuşu,

$$P = \left\langle a,b,c; a^2, b^2, c^2, ab = ba, ac = ca, bc = cb \right\rangle$$

olarak verilir.

Sunuşu verilen bir grubun, alt gruplarının sunuşlarını belirleme yöntemi de vardır. Bu yöntem, Reidemeister- Schreier alt grup sunuşu belirleme yöntemidir. Bu yöntemi anlatırken, X üzerindeki $F(X)$ serbest grubunu F ile gösterelim.

1.4.11 Tanım F, X üzerinde serbest grup ve H de bunun alt grubu olsun. $T = \{t_\alpha\}$ kümesi F grubunun H moduna göre yan cümle temsilcilerinin aşağıda verilen özellikleri sağlayan bir tam kümesi olsun. Eğer $t_\alpha = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n} \in T$ ise 1, $x_1^{\varepsilon_1}$, $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2}$, ... gibi parçalarının hepsi de T kümesindedir. Yan cümle temsilcilerinin grubu da bunun alt grubu olsun. Eğer T kümesi F için H moduna göre bir Schreier sistemi ise, o zaman H,

$$\{S_{tx} : t \in T, x \in X, S_{tx} \neq 1\}$$

kümesi üzerinde serbesttir.

1.4.12 Örnek F, $\{a,b\}$ üzerinde serbest grup ve $H = F(x^2)$ olsun. Yani H, F' deki tüm elemanların kareleri ile üretilen normal alt gruptur. O zaman $F/F(x^2) = \langle a,b; a^2, b^2, (ab)^2 \rangle = Z_2 \times Z_2$ olur. Böylece, F için H moduna göre bir Schreier sistemi $\{1, a, b, ab\}$ olarak bulunur. $\overline{a} = a$, $\overline{b} = b$, $\overline{ba} = ab$ olur. Buradan H,

$$x_1 = a^2 \;,\; x_2 = bab^{-1}a^{-1} \;,\; x_3 = b^2 \;,\; x_4 = aba^{-1}b^{-1} \;,\; x_5 = ab^2a^{-1}$$

üreteç kümesi üzerinde serbesttir. ///

1.4.11 Tanım, F serbest grubunun rankı ve indeksi verildiğinde H grubunun rankının hesaplanmasını sağlar. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir ve bu sonuç [11]' de bulunabilir.

1.4.13 Sonuç F rankı n olan serbest grup ve $|F : H| = k$ ise, H grubu rankı nk-k+1 olan serbest gruptur.

Mesela, Örnek 1.4.13' de H, rankı 2 olan serbest gruptur.

1.4.11 Tanım, Reidemeister – Schreier metodunun temelini oluşturur. Burada bu metod ile ilgili özet bilgi verilecektir. Ayrıntılar için [18]' e bakılabilir.

G, sunuşu $\langle a_1,...,a_n; R_1,...,R_k \rangle$ olan bir grup olsun. H grubu G grubunun bir alt grubu ve T, G grubunun H moduna göre bir Schreier sistemi olsun. G grubunun üreteçleri üzerindeki kelimeler üzerinde τ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

Eğer $\varepsilon_i = \pm 1$ olmak üzere $w = a_{v_1}^{\varepsilon_1} a_{v_2}^{\varepsilon_2} ... a_{v_l}^{\varepsilon_l}$ ise, $\tau(w) = S_{t_1,a_{v_1}}^{\varepsilon_1} S_{t_2,a_{v_2}}^{\varepsilon_2} ... S_{t_l,a_{v_l}}^{\varepsilon_l}$ olur. Burada, eğer $\varepsilon_i = 1$ ise t_i, w' nin a_{v_i} ' den önce gelen parçasının yan cümle temsilcisidir. Eğer $\varepsilon_i = -1$ ise t_i, w' nin $a_{v_i}^{-1}$ ' den önce gelen parçasının $a_{v_i}^{-1}$ de dahil olmak üzere yan cümle temsilcisidir. Bu dönüşüm, Reidemeister **yeniden yazma yöntemi** olarak adlandırılır.

O halde Reidemeister – Schreier metodu aşağıdaki gibi verilebilir:

G, H ve T yukarıdaki gibi olsun. O zaman H grubu,

$$\{S_{ta_v} : t \in T, a_v \in \{a_1, ..., a_n\}, S_{ta_v} \neq 1\}$$

kümesi ile üretilmiştir. Tanımlama bağıntılarının bir tam kümesi $\{\tau(tR_i t^{-1})\}$ dir. Burada $t \in T$ dir ve R_i, G' deki tüm bağıntılar üzerinde değer alır.

1.4.14 Örnek $G = A_4$ alterne grubunu alalım. G grubunun sunuşu,

$$G = A_4 = \langle a, b; a^2, b^3, (ab)^3 \rangle$$

şeklindedir. Yukarıdaki metotla, $H = A_4^{'}$ komütatör alt grubunun sunuşunu bulalım.

$$G/H = A_4 / A_4^{'} = \langle a, b; a^2, b^3, (ab)^3, [a,b] \rangle$$

dir ve $|A_4 : A_4^{'}| = 3$ olur. Bu durumda Schreier sistemi $\{1, b, b^2\}$ kümesidir. $H = A_4^{'}$ grubunun üreteçleri,

$$x_1 = S_{1_a} = a \ , \ x_2 = S_{ba} = bab^{-1} \ , \ x_3 = S_{b^2 a} = b^2 ab$$

ve bağıntıları,

$$\tau(aa) = x_1^2$$

$$\tau(baab^{-1}) = x_2^2$$

$$\tau(b^2 aab^{-2}) = x_3^2$$

$$\tau(bbb) = \tau(bbbbb^{-1}) = \tau(b^2 bbbb^{-2}) = 1$$

$$\tau(ababab) = S_{1_a} S_{ba} S_{b^2a} = x_1 x_2 x_3$$

$$\tau(babababb^{-1}) = S_{ba} S_{b^2a} S_{1_a} = x_2 x_3 x_1$$

$$\tau(b^2 abababb^{-2}) = S_{b^2a} S_{1_a} S_{ba} = x_3 x_1 x_2$$

olarak bulunur. Burada 1 olan bağıntılar silinerek ve $x_3 = x_1 x_2$ alınarak $H = A_4'$ grubunu sunuşu,

$$\langle x_1, x_2 ; x_1^2, x_2^2, (x_1 x_2)^2 \rangle$$

şeklinde elde edilir. ///

1.5 Sonlu Grupların p-Nilpotentliği ve Süperçözülebilirliği

Sylow sayılarının grup yapıları üzerinde etkileri vardır. Bu etkiler ile ilgili detaylı bilgiler, [25]' de bulunabilir.

Sylow p-sayısı G grubunun bazı özelliklerini ortaya çıkarır. Mesela, P.Hall çözülebilirlikle ilgili olarak aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

1.5.1 Teorem Herhangi bir n sonlu çözülebilir grubun Sylow p-sayısı olması için gerekli ve yeterli koşul, $i = 1, 2, ..., t$ için p_i' ler birbirinden farklı asal sayılar ve a_i' ler pozitif tam sayılar ve $p_i^{a_i} \equiv 1 \pmod p$ olmak üzere, $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_t^{a_t}$ olmasıdır.

Bu teoreme göre, her n tek tamsayısı Sylow 2-sayısıdır. Daha özel bir örnek olarak, $2n$ mertebeli dihedral grup, n sylow 2-sayısına sahiptir

[25]' de, nilpotentlikle ilgili olarak aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.

1.5.2 Teorem Bir sonlu grubun p-nilpotent olması için gerekli ve yeterli koşul p sayısının G grubunun her Sylow sayısı ile aralarında asal olmasıdır.

1.5.3 Teorem Sadece Sylow sayıları herhangi bir sayının karesi olmayan çözülebilir gruplar süperçözülebilirdir.

1.5.4 Teorem Sonlu bir G grubunun bazı p asalı için p-nilpotent olması için gerekli ve yeterli koşul p asalının G' nin herhangi bir Sylow sayısını bölmemesidir.

Buradan aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

1.5.5 Teorem Sonlu bir G grubunun bazı p asalı için p-nilpotent olması için gerekli ve yeterli koşul, p asalının G' nin bütün Sylow sayıları ile aralarında asal olmasıdır.

Böylece süperçözülebilirlikle ilgili olarak aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

1.5.6 Sonuç G sonlu grubunun her Sylow sayısı asal ise, o zaman G süperçözülebilirdir.

[22]'de p-nilpotent grupların nilpotentlikle ilgisi aşağıdaki teoremde verilmiştir.

1.5.7. Teorem G grubunun nilpotent olması için gerekli ve yeterli koşul bütün p asalları için G grubunun p-nilpotent olmasıdır.

1.6 Tietze Dönüşümleri

Herhangi bir G grubu farklı sunuşlara sahiptir. Bu kısımda G grubunun bir sunuşundan diğerini elde etme yollarından biri olan *Tietze Dönüşümleri* açıklanacaktır. Bu dönüşümler ile ilgili detaylı bilgiler [17,18]' de bulunabilir.

Herhangi bir G grubunun sunuşu,

$$\langle a,b,...;P,Q,R,...\rangle \tag{1.7}$$

olsun. G grubunun diğer sunuşu, (1.7)' ye aşağıdaki operasyonlar uygulanarak bulunabilir.

T1) Eğer S, T, ... kelimeleri P, Q, R, ... den türetilebiliyorsa, bu durumda S, T, ... (1.7)' de tanımlanan bağıntılara eklenir. Bu operasyona **bağıntı ekleme** denir.

T2) Eğer P, Q, R, ... olarak tanımlanan bağıntılar arasından sıralanan bazı S,T, ... bağıntıları diğerlerinden türetilebiliyorsa, o zaman S, T, ... (1.7)' deki bağıntılardan silinir. Bu operasyona **bağıntı silme** denir.

T3) Eğer a, b, c, ... içindeki herhangi kelimeler K, M, ... ise, o zaman x, y, ... sembolleri (1.7)' deki üreteç sembollerine bitişiktir ve $x = K$, $y = M$, ... bağıntıları, (1.7)' de tanımlanan bağıntılara bitişiktir. Bu operasyona **üreteç ekleme** denir.

T4) Eğer, p, q, ... (1.7)' de üreteçler ve V, W, ... bu üreteçlerden başka üreteçlerde kelimeler olmak üzere, (1.7)' deki bağıntılardan bazıları $p = V$, $q = W$, ... şeklinde alınırsa p, q, ... üreteçlerden silinir. Bu durumda $p = V$, $q = W$, ... yeni üreteçler tanımlar. Bu operasyona **üreteç silme** denir.

1.6.1 Teorem (Tietze Teoremi) P ve P' şeklinde iki grup sunuşunun aynı grubu temsil etmesi için gerekli ve yeterli koşul P sunuşundan (veya P' sunuşundan) P' sunuşunun (veya P sunuşunun) sonlu sayıda Tietze Dönüşümleriyle elde edilmesidir.

1.6.2 Örnek Tietze dönüşümlerini uygulayarak,

$$P = \langle a,b;a^3,b^2,ab = ba^2 \rangle \tag{1.8}$$

sunuşuna sahip grubun diğer sunuşunu bulalım. Bunun için (1.8)' e aşağıdaki Tietze dönüşümlerini uygulayalım.

(T3) $P_1 = \langle a,b,c,d;a^3,b^2,ab = ba^2, c = b, d = ab \rangle$ (c ve d üreteçleri ile $c = b$ ve $d = ab$ bağıntıları eklendi).

(T3) $P_2 = \langle a,b,c,d;a^3,b^2,ab = ba^2, c = b, d = ab, a = cd \rangle$ ($a = b^{-1}d$ ve b' nin mertebesi 2 olduğundan $a = bd$ elde edilir. Daha sonra $c = b$ olduğu için de $a = cd$ bulunur).

(T4) $P_3 = \langle c,d;(cd)^3,c^2,cdc = c(cd)^2,\ c = cdc \rangle$ ($b = c$ olduğu için ve a üreteci c ve d' den elde edilebildiği için a ve b silinir).

(T4) $P_4 = \langle c,d;c^2,d^2,(cd)^3 \rangle$ ($ab = ba^2$ bağıntısını alalım. Burada a ve b elemanlarının mertebeleri göz önünde bulundurularak $(ab)^2 = 1$ bulunur). ///

1.6.3 Örnek $\mathbf{Z}_6$ grubu $< y,z; y^3, z^2, yz = zy >$ sunuşu ile de gösterilebilir. Bunu Tietze dönüşümleri uygulayarak gösterelim. $\mathbf{Z}_6$ grubunun sunuşu $< a; a^6 >$ olsun.

(T3) $P_1 = < a,y;\ a^6, y = a^2 >$ (y üreteci ve $y = a^2$ bağıntısı eklendi).

(T3) $P_2 = < a,y,z;\ a^6, y = a^2, z = a^3 >$ (z üreteci ve $z = a^3$ bağıntısı eklendi).

(T1) $P_3 = < a,y,z;\ a^6, y = a^2, z = a^3, y^3, z^2 >$ ($a^6 = 1$ olduğundan; $y = a^2 \Rightarrow y^3 = (a^2)^3 = a^6 = 1$ ve $z = a^3 \Rightarrow z^2 = (a^3)^2 = a^6 = 1$ elde edilir. Bu nedenle y^3 ve z^2 eklendi. Ayrıca y^3 ve z^2, a^6' dan türetilebilir).

(T1) $P_4 = < a,y,z;\ a^6, y = a^2, z = a^3, y^3, z^2, yz = zy >$ ($y = a^2$, $z = a^3$ olduğundan $yz = a^2a^3 = a^{2+3} = a^{3+2} = a^3.a^2 = zy$ olur. Bu nedenle $yz = zy$ eklendi).

(T2) $P_5 = < a,y,z;\ y = a^2, z = a^3, y^3, z^2, yz = zy >$ ($z = a^3 \Rightarrow z^2 = (a^3)^2 = a^6 = 1$ olduğundan a^6 silindi).

(T1) $P_6 = < a,y,z;\ y = a^2, z = a^3, y^3, z^2, yz = zy, a = y^{-1}z >$ ($(2,3) = 1$ ise $2m + 3n = 1$ olur. Buradan $a^{2m+3n} = a \Rightarrow (a^2)^m (a^3)^n = a \Rightarrow y^m z^n = a$ olur. Eğer m= -1, n =1 alırsak $a = y^{-1}z$ elde edilir. Böylece $a = y^{-1}z$ bağıntısı eklendi).

(T4) $P_7 = < y,z;\ y = (y^{-1}z)^2, z = (y^{-1}z)^3, y^3, z^2, yz = zy >$ (a üreteci ve bunun $a = y^{-1}z$ bağıntısı silindi.)

(T2) $P_8 = < y,z;\ z = (y^{-1}z)^3, y^3, z^2, yz = zy >$ ($yz = zy \Rightarrow yzy^{-1}z^{-1} = 1$ elde edilir. Buradan $zy^{-1} = y^{-1}z$ olur. Böylece $y = (y^{-1}z)^2 \Rightarrow y^{-1}(y^{-1}z)^2 = 1 \Rightarrow y^{-1}y^{-1}zy^{-1}z = 1 \Rightarrow y^{-1}y^{-1}y^{-1}zz = 1 \Rightarrow (y^3)^{-1}z^2 = 1$ olduğundan $y = (y^{-1}z)^2$ bağıntısı silinir.)

(T2) $P_9 = < y,z; y^3, z^2, yz = zy >$ ($z = (y^{-1}z)^3 \Rightarrow z^{-1}(y^{-1}z)^3 = 1 \Rightarrow (y^3)^{-1}z^2 = 1$ olduğundan $z = (y^{-1}z)^3$ bağıntısı silindi.) ///

1.7 Grup Genişlemeleri ve Bu Genişlemelerin Sunuşu

Bu kısımdaki ayrıntılı bilgiler [15]' de bulunabilir.

1.7.1 Tanım Bir G grubunun, bir A grubu tarafından genişlemesi,

$$A \cong N \quad \text{ve} \quad \widetilde{G}/N \cong G \tag{1.9}$$

şeklindeki N normal alt grubuna sahip $\widetilde{G}$ grubu şeklinde tanımlanır. (1.9)' daki bu gösterim, genel grup genişlemesi gösterimidir.

Aşağıdaki durumları her biri bir genişleme verir:

i) Verilen bir $\iota : A \to \widetilde{G}$ gömmesi, $\operatorname{Im}\iota \lhd \widetilde{G}$ ve $\widetilde{G}$ grubu $\widetilde{G}/\operatorname{Im}\iota$ grubunun A tarafından genişlemesi olacak şekildeki bir monomorfizmadır.

ii) Verilen bir $\nu : \widetilde{G} \to G$ epimorfizması, $\widetilde{G}$ grubu G grubunun $Ker\nu$ tarafından bir genişlemesi olacak şekilde bir epimorfizmadır.

Amacımız olan grup genişlemesinin resmi ise aşağıdaki diyagramdaki gibidir.

$$A \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{inc} \widetilde{G}, \quad \widetilde{G} \xrightarrow{doğ.epi.} \widetilde{G}/N \xrightarrow{\beta} G \tag{1.10}$$

(1.10)' da, (1.9)' daki izomorfizmalar sırasıyla α ve β ile adlandırılırlar. Böylece $Ker\iota = A$, $\operatorname{Im}\iota = Ker\nu$ ve $\operatorname{Im}\nu = G$ olacak şekilde,

$$A \xrightarrow{\iota} \widetilde{G} \xrightarrow{\nu} G \tag{1.11}$$

diyagramı elde edilir.

1.7.2 Tanım Grupların,

$$A_0 \xrightarrow{\alpha_0} A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} A_n \tag{1.12}$$

serisinde eğer,

$$\operatorname{Im}\alpha_{i-1} = Ker\alpha_i \quad (1 \le i \le (n-1))$$

oluyorsa, (1.12) homomorfizmalarına **tamdır** denir. Eğer $A_0 = A_n = \{1\}$ ve $n = 4$ ise, (1.12) serisine **grupların kısa tam serisi** denir. Burada aşikar grup $\{1\}$ ile gösterilirse, bu durumda *grupların kısa tam serisi*,

$$1 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_3 \longrightarrow 1$$

şeklinde olur. Bu seride α_0 ve α_3 aşikar olduğundan yazılmamıştır. Tamlık durumunda A_1, A_2 ve A_3 için kesinlikle,

$$Ker\alpha_1 = 1, \quad \operatorname{Im}\alpha_1 = Ker\alpha_2, \quad \operatorname{Im}\alpha_2 = A_3 \quad (\alpha_1 \text{ bire-bir ve } \alpha_2 \text{ örten})$$

olduğu söylenebilir. *Grup genişlemesi* kavramı ile *grupların kısa tam serisi* kavramı aynıdır ve genişleme,

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \widetilde{G} \xrightarrow{\nu} G \longrightarrow 1$$

olarak düşünülebilir.

1.7.3 Tanım G_1, G_2 ve G_3 birer grup ve

$$\gamma_1 : G_1 \to G_2, \quad \gamma_2 : G_2 \to G_3$$

homomorfizmalar olsun. Eğer $\gamma_3 : G_1 \to G_3$ homomorfizması varsa bir diyagram elde edilir ve bu diyagram, $\gamma_2\gamma_1 = \gamma_3$ şartını sağlarsa **değişmeli** adını alır.

Aşağıdaki ön teoremin ispatı [19]' da bulunabilir.

1.7.4 Ön Teorem Aşağıdaki diyagram tam satırlı değişmeli bir diyagramdır.

$$\begin{array}{ccccccccc} A_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 \\ \downarrow_{\phi_0} & & \downarrow_{\phi_1} & & \downarrow_{\phi_2} & & \downarrow_{\phi_3} & & \downarrow_{\phi_4} \\ B_0 & \xrightarrow{\beta_0} & B_1 & \xrightarrow{\beta_2} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \longrightarrow & B_4 \end{array} \qquad (1.13)$$

(1.13) diyagramda eğer ϕ_0, ϕ_1, ϕ_3 ve ϕ_4 izomorfizma ise ϕ_2 de izomorfizma olur.

Şimdi $\widetilde{G}$ grubunun sunuşunu bulalım. Bunun için önce $1 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \widetilde{G} \xrightarrow{\nu} G \longrightarrow 1$ genişlemesi ile G ve A grupları için,

$$G = < X; R > \text{ ve } A = < Y; S >$$

şunuşları verilsin. İlk olarak, $\widetilde{Y} = \{\widetilde{y} : \widetilde{y} = \iota(y), y \in Y\}$ ve $\widetilde{S} = \{\widetilde{s} : s \in S\}$ de y' nin $\widetilde{y}$ görüntüsü tarafından S' den elde edilen $\widetilde{Y}$ ' deki kelimelerin kümesi olsun. Ayrıca $\widetilde{X} = \{\widetilde{x} : x \in X\}$ kümesi, her bir $x \in X$ için $\nu(\widetilde{x}) = x$ olacak şekilde $\widetilde{G}$ grubunda $\operatorname{Im}\iota$ için yan cümlenin elemanları olsun. Bundan başka, her bir $r \in R$ için $\widetilde{r}$, x' in $\widetilde{x}$ tarafından r' den elde edilen $\widetilde{X}$ ' deki kelime olsun. Burada ν her bir $\widetilde{r}$ için yok edilir ve bu nedenle her bir $r \in R$ için $Ker\nu = \operatorname{Im}\iota$ ve $\operatorname{Im}\iota$, $\widetilde{Y}$ kümesi tarafından üretildiğinden, her bir $\widetilde{r}$ $\widetilde{y}$ ' de bir kelime gibi (buna ν_r denir) yazılabilir.

$$\widetilde{R} = \{\widetilde{r}\,\nu_r^{-1} : r \in R\}$$

alalım. Sonuç olarak, $\operatorname{Im}\iota \lhd \widetilde{G}$ olduğundan her bir

$$\widetilde{x}^{-1}\widetilde{y}\,\widetilde{x}\,, \quad \widetilde{x} \in \widetilde{X}\,, \quad \widetilde{y} \in \widetilde{Y}$$

eşleniği $\operatorname{Im}\iota$ ' ye aittir ve bu yüzden $\widetilde{y}$ ' de bir $w_{x,y}$ kelimesidir. Böylece,

$$\widetilde{T} = \{\widetilde{x}^{-1}\widetilde{y}\,\widetilde{x}w_{x,y}^{-1} : x \in X, y \in Y\}$$

alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir ve ispatı [15]' de bulunabilir.

1.7.5 Teorem Yukarıdaki notasyonlarla $\widetilde{G}$ grubu,

$$\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y}; \widetilde{R}, \widetilde{S}, \widetilde{T} \rangle$$

sunuşuna sahiptir.

1.7.5 Teorem' in birer uygulaması olarak, 3.Bölüm' de yarı-direkt çarpım ve 4.Bölüm'de de (standard) wreath çarpım sunuşları tanımlanmıştır.

2. SERBEST ÇARPIMLAR, BİRLEŞTİRİLMİŞ SERBEST ÇARPIMLAR ve HNN GENİŞLEMELERİN NİLPOTENTLİĞİ

2.1 Giriş

Bu bölümde amaç, G_1 ve G_2 nilpotent gruplar olmak üzere, G_1 ve G_2 gruplarının serbest çarpımlarının, birleştirilmiş serbest çarpımlarının ve HNN genişlemelerinin nilpotentliğini ispatlamaktır.

Grup birleştirmeleri grup teoride anahtar yapılardır. Grup birleştirme teorisinde genel düşünce, eğer mümkünse sonsuz bir G grubunu bazı alt gruplarının birleşimlerine ayrıştırmaktır. Bu alt gruplara G grubunun **çarpanları** denir. Bu çarpanlara karşılık gelen bilgilerden faydalanarak, G grubu hakkında bilgi elde edilebilir [18].

Grup birleştirmelerinin **birleştirilmiş serbest çarpım** ve **HNN genişlemeler** olmak üzere iki farklı tipi vardır. Bu gruplara geçmeden önce, serbest çarpımları inceleyelim.

2.2 Serbest Çarpımlar

Grup birleştirme teorilerinin çoğuna serbest grup teorileriyle varılır. Hatırlanacağı gibi, serbest gruplar üzerine önemli kavramlar ve sonuçlar 1.4 Bölüm' de açıklanmıştır. Biçim ve özellik olarak serbest gruplara en yakın gruplar, grupların serbest çarpımıdır. Çünkü bir serbest grup, sonsuz devirli grupların serbest çarpımıdır [23].

2.2.1 Tanım Sırasıyla $\langle a_1,\ldots,a_n\,;R_1,\ldots,R_k\rangle$ ve $\langle b_1,..,b_m;S_1,\ldots,S_t\rangle$ sunuşlarına sahip A ve B grupları için,

$$A * B = \langle a_1,...a_n, b_1,..., b_m; R_1,..., R_k, S_1,..., S_t \rangle$$

sunuşu ile gösterilen $G = A * B$ grubuna, A ve B gruplarının **serbest çarpımı** denir. A ve B gruplarına ise G grubunun **çarpanları** denir. Burada G grubunun üreteçleri A ve B üreteçlerinin ayrık bileşiminden, bağıntıları ise A ve B gruplarının bağıntılarının ayrık bileşiminden oluşur. Yukarıda iki grup için verilen bu tanım, grupların keyfi bir ailesine genişletilebilir [21].

2.2.2 Örnek $\langle a,b; a^4, b^6 \rangle$ sunuşuna sahip G grubu, a ile üretilen ve mertebesi 4 olan devirli grup ile, b ile üretilen ve mertebesi 6 olan devirli grubun serbest çarpımıdır.

2.2.3 Örnek $\langle a,b; a^4, b^6, a^2 = b^3 \rangle$ sunuşuna sahip M grubu ise, bir serbest çarpım değildir. Sunuşta a^2 elemanı hem a ile, hem de $a^2 = b^3$ olduğundan b ile yer değiştirebilir. Böylece a^2 elemanı, M grubunun merkezindedir. a^2 elemanının birim olmadığını gösterelim. Bunun için $a \mapsto x^3$ ve $b \mapsto x^2$ alarak, M grubunu homomorfik olarak $\langle x; x^{12} \rangle$ devirli grubuna gönderelim. $a^2 \mapsto x^6$ olur ve birim değildir. Böylece M grubu serbest çarpım değildir.

Aşağıda serbest çarpım kavramı için temel olan iki teorem [11, 21]' de verilmiştir.

2.2.4 Teorem $G = A * B$ olsun. O zaman $A \to G$ ve $B \to G$ bire-bir dönüşümlerdir. A grubunun üreteçleri ile üretilen G grubunun alt grubu $\langle \ddot{u}r\ A; ba\breve{g}\ A \rangle$ sunuşuna sahiptir. Benzer durum B için de geçerlidir. Böylece A ve B, G grubunun alt grubu olarak göz önüne alınabilir. A ve B aşikar değilse, $A * B$ de aşikar değildir.

2.2.5 Teorem $G = A * B$ olsun. A ve B, G grubunu üretiyorlarsa ve $f_1 : A \to H$ ile $f_2 : B \to H$ homomorfizmaları varsa, f_1 ve f_2 bir tek $f : G \to H$ homomorfizmasına genişletilebilir.

Serbest çarpımın her elemanı, serbest grubun indirgenmiş kelimelerine bağlı olarak normal forma sahiptir.

2.2.6 Tanım $G = A * B$ ve $g_1 g_2 ... g_n \in G$ olsun. Her $i = 1, 2, ..., n$ için $g_i \neq 1$ (her bir g_i ya A ya da B grubunun elemanıdır) ve g_i ile g_{i+1} aynı *çarpanda* değil ise $g_1 g_2 ... g_n$ kelimesine, G grubunda **indirgenmiş kelime** ya da **indirgenmiş seri** denir.

Her bir $g \in G = A * B$ indirgenmiş seri olarak bir tek sunuşa sahiptir. Buradaki n sayısına **hece uzunluğu** denir ve özdeşlik için $n = 0$ dır. $n \leq 1$ ya da $n \geq 1$ ve g_1 ile g_n farklı çarpanlarda ise, $g_1 g_2 ... g_n \in G$ indirgenmiş kelimesine **devirli indirgenmiş kelime** denir. G grubunun her elemanı, devirli indirgenmiş bir kelimeye eşleniktir. Böylece, serbest çarpımların çok önemli pek çok özelliğine ulaşabiliriz. Bu da bizi daha genel grup birleştirmelerine taşımaktadır [17].

Aşağıdaki teorem, serbest grupların nasıl karakterize edildiğini verir ve ispatı [20]' de bulunabilir.

2.2.7 Teorem G grubunun A ve B alt gruplarının serbest çarpımı olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki iki koşulun sağlanmasıdır.

a) A ve B alt grupları G grubunu üretir ve her elemanı $a_1 b_1 ... a_n b_n$ şeklindeki seriye eşittir ve,

b) $w = a_1 b_1 ... a_n b_n$ ve $w = 1_G$ ise ya $a_i = 1_A$ ya da $b_i = 1_B$ dir.

Aşağıdaki üç teoremin ispatı ve bir takım sonuçları [11, 21]' de bulunabilir.

2.2.8 Teorem Serbest çarpımda sonlu mertebeli bir eleman, çarpanların birinde sonlu mertebeli bir elemana eşleniktir. Özel olarak, serbest çarpımın sonlu bir alt grubu çarpanın birinin eşleniğinde tamamen içerilir.

2.2.9 Teorem Serbest çarpımın iki elemanı değişebiliyorsa, o zaman bunlar hem tek elemanın kuvvetidirler, hem de çarpanın birinin değişmeli alt grubunun eşleniğinde içerilirler.

2.2.10 Teorem $A \neq \{1_A\}$ ve $B \neq \{1_B\}$ olmak üzere $G = A * B$ olsun. Bu durumda $[A, B]$ grubu, $1 \neq a \in A$ ile $1 \neq b \in B$ olmak üzere, $[a, b]$ elemanlarının kümesi üzerinde bir serbest gruptur.

Böylece aşağıdaki teorem verilir.

2.2.11 Teorem $A \neq \{1_A\}$ ve $B \neq \{1_B\}$ olmak üzere $G = A * B$ olsun. Bu durumda G grubunun merkezi aşikardır.

İspat: Olmayana ergi yöntemini kullanalım. O halde $Z(G) \neq \{1_G\}$ olsun. Bu durumda, $A * B$ grubunun her b elemanı için $ab = ba$ olacak şekilde bir $1 \neq a$ elemanı vardır. Böylece, a elemanı 1 elemanı ile değişmeli olduğundan, $b \neq 1$ alalım. Bu durumda, 1.4.7 Teorem' den, $a = h_1 k_1 ... h_n k_n$ ve $b = s_1 r_1 ... s_m r_m$ şeklinde indirgenmiş kelimeler olarak yazılır ($1 \leq i \leq n$ için $h_i \neq 1_A$, $k_i \neq 1_B$ ve $1 \leq j \leq m$ için $s_j \neq 1_A$, $r_j \neq 1_B$). Buradan, $a^{-1} b^{-1} ab = 1_G$ olur. Yani,

$$(k_n^{-1} h_n^{-1} ... k_1^{-1} h_1^{-1}) \, (r_m^{-1} s_m^{-1} ... r_1^{-1} s_1^{-1}) \, (h_1 k_1 ... h_n k_n) \, (s_1 r_1 ... s_m r_m) = 1_G \qquad (2.1)$$

şeklindedir. Böylece, 2.2.7 Teorem' den dolayı, $h_i \neq 1_A$ veya $k_i \neq 1_B$ veya $s_j \neq 1_A$ veya $r_j \neq 1_B$ olmalıdır. Bu ise çelişkidir. Çünkü 2.2.10 Teorem' den, $[A, B]$ grubu $[a,b]$ elemanlarının kümesi üzerinde bir serbest gruptur ve (2.1) kelimesi için, $h_i \neq 1_A$ ve $k_i \neq 1_B$ ve $s_j \neq 1_A$ ve $r_j \neq 1_B$ olmalıdır.

2.2.12 Sonuç $A \neq \{1_A\}$ ve $B \neq \{1_B\}$ olmak üzere $G = A * B$ ise, G grubu nilpotent değildir.

İspat: 1.3 Bölüm' de nilpotent grupların bir özelliği olarak, merkezi aşikar olan grupların nilpotent olmadığı belirtilmişti. 2.2.11 Teorem' den G grubunun merkezi aşikardır ve bu nedenle nilpotent değildir.

2.3 Birleştirilmiş Serbest Çarpımlar

Bu kısımda, grup birleştirmelerinin ilki olan birleştirilmiş serbest çarpımları inceleyeceğiz.

2.3.1 Tanım $A = \langle a_1, ... a_n ; R_1, ..., R_k \rangle$ ve $B = \langle b_1, .., b_m ; S_1, ..., S_t \rangle$ sunuşlarıyla verilen A ve B gruplarını düşünelim. Ayrıca $H \subset A$, $K \subset B$ öz alt gruplar ve $\theta : H \to K$ izomorfizma olsun. Buna göre,

$$A *_{0} B = \langle a_1,...a_n, b_1,..., b_m; R_1,..., R_k, S_1,..., S_t, H = \theta(H) \rangle$$

sunuşu ile verilen $G = A *_{0} B$ grubuna, A ve B gruplarının H grubunu K grubuna birleştirerek elde edilen **birleştirilmiş serbest grubu** denir. Özel olarak, $H = \{1_H\}$ alınırsa serbest çarpım elde edilir. Dolayısıyla, serbest çarpımlar birleştirilmiş serbest çarpımların özel halleridir. Serbest çarpımda olduğu gibi, çarpanlar G ye bire-bir olarak resmedilirler ve ara kesitleri H alt grubu olur.

2.3.2 Örnek 2.2.3 Örnek' teki $\langle a, b; a^4, b^6, a^2 = b^3 \rangle$ sunuşuna sahip M grubunun birleştirilmiş serbest çarpım olduğunu gösterelim. Bunun için $A = \langle a; a^4 \rangle$ ve $B = \langle b; b^6 \rangle$ olsun. Ayrıca H, A grubunun mertebesi 2 olan devirli alt grubu ve K, B grubunun mertebesi 2 olan devirli alt grubu olsun. H ve K, $a^2 \mapsto b^3$ dönüşümü altında birleştirilebilirler. Böylece M grubu H ve K birleştirilmiş gruplu serbest çarpım olur.

Aşağıdaki teoremler [11]' de belirtilmiştir.

2.3.3 Teorem $G = A *_{0} B$ olsun. O zaman $A \to G$ ve $B \to G$ bire-bir dönüşümlerdir. A grubunun üreteçleri ile üretilen G grubunun alt grubu $\langle \textit{ür } A; \textit{bağ } A \rangle$ sunuşuna sahiptir. Benzer durum B için de geçerlidir. Böylece A ve B, G grubunun alt grubu olarak göz önüne alınabilir ve H grubu A grubunun alt grubu olmak üzere $A \cap B = H$ dır.

Bu teoremin ispatı, birleştirilmiş serbest grubun elemanları için, normal form kavramına bağlıdır. Bu kavram için H ile K sırasıyla A ile B gruplarının alt grupları ve L_1 ile L_2 de sırasıyla A ile B için *modH*' ye göre sol yan cümle gösterimleri olsun. $G = A *_{0} B$' de **normal form** ya da **indirgenmiş kelime** (ya da indirgenmiş dizi) $g_1 g_2 ... g_n$, $A * B$ serbest çarpımında $g_j \in L_i$ ve $g_{j+1} \notin L_i$ olacak şekilde indirgenmiş kelime olmak üzere,

$$g_1 g_2 ... g_n h \quad, h \in H, \; 1 \neq g_i \in L_1 \cup L_2$$

şeklinde tanımlanan kelimedir.

2.3.4 Teorem (Birleştirilmiş Serbest Çarpım için Normal Form Teoremi) $G = A *_\theta B$ olmak üzere G grubunun her elemanı, indirgenmiş kelime olarak bir tek gösterime sahiptir.

$G = A *_\theta B$' de $g_1 g_2 ... g_n h$ indirgenmiş kelimesi eğer ya $n \leq 1$ ya da $n \geq 2$ ve g_1 ile g_n birbirinden farklı çarpanlarda ise, bu kelimeye **devirli indirgenmiş kelime** denir. G grubunun her elemanı, devirli indirgenmiş bir kelimeye eşleniktir [17].

2.3.5 Teorem a) Sonlu mertebeli $G = A *_\theta B$ grubunun her elemanı, çarpanların birinde sonlu mertebeli bir elemana eşlenik olmalıdır.

b) $G = A *_\theta B$ değişmeli alt grubu;

i) A ya da B grubunun değişmeli bir alt grubuna eşleniktir ya da,

ii) H grubunun alt gruplarının eşleniklerinin sayılabilir bileşimidir ya da,

iii) Sonsuz devirli bir grubun direkt çarpımıdır ve H grubunun bir alt grubunun eşleniğidir [11].

Birleştirilmiş serbest grup kavramı, doğrudan doğruya, ikiden fazla çarpana genişletilebilir.

2.3.6 Teorem G bir grup, G_1 ile G_2 alt gruplar ve A grubu,

$$\theta_1 : A \to G_1, \quad \theta_2 : A \to G_2$$

homomorfizmalarının bire-bir olmasını sağlayacak şekilde bir alt grup olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $G = G_1 *_{\theta_1} G_2$ ve $G = G_1 *_{\theta_2} G_2$ olur. Her M grubu ve her $f_1 : G_1 \to M$ ile $f_2 : G_2 \to M$ homomorfizma çifti, aşağıdaki diyagramı sağlar. Ayrıca, f_1 ve f_2' nin bir tek $F : G \to M$ homomorfizma genişlemesi vardır [11].

$$
\begin{tikzcd}
& G_1 \arrow[d, dash] \arrow[dr, "f_1"] & \\
A \arrow[ur, "\theta_1"] \arrow[dr, "\theta_2"'] & G \arrow[r, dashed] & H \\
& G_2 \arrow[u, dash] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

2.3.7 Sonuç $A \neq \{1_A\}$ ve $B \neq \{1_B\}$ olmak üzere $G = A *_\theta B$ olsun. Bu durumda G grubunun merkezinin aşikar olması gerekmez.

2.3.8 Örnek 2.3.2 Örnek' te $\langle a,b; a^4, b^6, a^2 = b^3 \rangle$ sunuşuna sahip M grubunun birleştirilmiş serbest çarpım olduğu gösterildi. Sunuştaki a^2 elemanı hem a ile, hem de $a^2 = b^3$ olduğundan b ile yer değiştirebilir. Gerçekten, $a^2 a = a^3 = aa^2$ ve $a^2 b = b^3 b = b^4 = bb^3 = ba^2$ olur. Ayrıca a^2 birim eleman değildir. Eğer $a \mapsto x^3$ ve $b \mapsto x^2$ alınarak, M grubu homomorfik olarak $\langle x; x^{12} \rangle$ devirli grubuna gönderilirse $a^2 \mapsto x^6$ olur ve birim değildir. Böylece a^2 elemanı G grubunun merkezindedir.

2.4 Birleştirilmiş Serbest Çarpımların Nilpotentliği ve Çözülebilirliği

Bu kısımda, birleştirilmiş serbest çarpımların nilpotentliği incelenmiştir.

2.4.1 Teorem A ve B sırasıyla m ve n mertebeli devirli gruplar olsun. Eğer $(m,n) = 1$ ise $A *_\theta B$ grubu nilpotent değildir.

İspat: A ve B sırasıyla m ve n mertebeli devirli gruplar olduğundan, $A \cong \mathbf{Z}_m$ ve $B \cong \mathbf{Z}_n$ olduğu açıktır. Hipotezden $(m,n) = 1$ olduğundan, m ve n tam sayılarının tüm çarpanları da aralarında asal olmak zorundadır. Böylece izomorfizma kurabileceğimiz H ve K alt grupları sadece aşikar alt gruplardır. Yani izomorfizma,

$$\theta : \{1_A\} \to \{1_B\}, \quad \theta(1_A) = 1_B \tag{2.2}$$

olur. Bu durumda, $A *_\theta B \cong \mathbf{Z}_m *_\theta \mathbf{Z}_n \cong \mathbf{Z}_m * \mathbf{Z}_n$ elde edilir. Böylece, 2.2.12 Sonuç' tan grup nilpotent değildir. □

2.4.2 Sonuç $\mathbf{Z}_2 *_{\theta_1} \mathbf{Z}_n$ ve $\mathbf{Z}_n *_{\theta_2} \mathbf{Z}_2$ birleştirilmiş serbest çarpımları sadece n çift ise nilpotenttir.

İspat: $G = \mathbf{Z}_2 *_{\theta_1} \mathbf{Z}_n$ ve n çift tam sayı olsun. 2.3.1 Tanım' daki A grubu olarak $\mathbf{Z}_2$ grubunu ve A grubunun H alt grubu olarak da yine $\mathbf{Z}_2$ grubunu alalım. A ve H gruplarının sunuşu $< x; x^2 >$ olsun. Ayrıca B grubu olarak $\mathbf{Z}_n$ grubunu ve B grubunun K alt grubu olarak da n çift olduğundan $\mathbf{Z}_2$ grubunu alalım. Bu grupların sunuşları ise sırasıyla $< y; y^n >$ ve $< y^{n/2}; y^n >$ olsun. Böylece, H ve K alt grupları arasında,

$$\theta_1 : \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}_2, \quad x \mapsto y^{n/2} \tag{2.3}$$

izomorfizması kurulabilir. Buradan $\theta_1(x) = y^{n/2}$ olur. Böylece, 2.3.1 Tanım' dan $\mathbf{Z}_2 *_{\theta_1} \mathbf{Z}_n$ grubunun sunuşu,

$$\mathbf{Z}_2 *_{\theta_1} \mathbf{Z}_n = \langle x, y; x^2, y^n, \theta_1(x) = x \rangle = \langle x, y; x^2, y^n, y^{n/2} = x \rangle \tag{2.4}$$

olarak bulunur. (2.4)' deki sunuşa Tietze dönüşümleri uygulanırsa, sunuş $\langle y; (y^{n/2})^2, y^n \rangle = \langle y; y^n \rangle \cong \mathbf{Z}_n$ bulunur. $\mathbf{Z}_n$ grubu devirli olduğundan nilpotenttir. Dolayısıyla, $\mathbf{Z}_2 *_{\theta_1} \mathbf{Z}_n$ grubu nilpotenttir.

Eğer n tek tam sayı ise, (2.3) izomorfizmasını sadece $H = \{1_H\}$ ve $K = \{1_K\}$ aşikar alt grupları için kurabiliriz. Yani,

$$\theta_1 : \{1_A\} \to \{1_B\}, \quad \theta_1(1_A) = 1_B$$

olur. Bu durumda $\mathbf{Z}_2 *_{\theta_1} \mathbf{Z}_n$ grubunun sunuşu,

$$\mathbf{Z}_2 *_{\theta_1} \mathbf{Z}_n = \langle x, y; x^2, y^n,\ \theta_1(1) = 1 \rangle = \langle x, y; x^2, y^n,\ 1 \rangle = \langle x, y; x^2, y^n \rangle = \mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_n$$

olarak elde edilir. Bu grup ise, 2.2.12 Sonuç' tan nilpotent değildir. □

Not: 2.4.2 Sonuç' un ispatı $\mathbf{Z}_n *_{\theta_2} \mathbf{Z}_2$ grubu için, $A = \mathbf{Z}_n$ ve $B = \mathbf{Z}_2$ alınarak, aynı şekilde tekrarlanırsa, sadece n çift tam sayı olduğunda grup nilpotent olur. Yine, n tek tam sayı olduğunda ise grubun nilpotent olmadığı görülür.

2.4.3 Örnek $\mathbf{Z}_2 *_{\theta} \mathbf{Z}_4$ birleştirilmiş serbest çarpımının nilpotentliğini inceleyelim. Bunun için, A grubu olarak $\mathbf{Z}_2$ grubunu ve A grubunun H alt grubu olarak da yine $\mathbf{Z}_2$ grubunu alalım. A ve H gruplarının sunuşu $< x; x^2 >$ olsun. Ayrıca B grubu olarak $\mathbf{Z}_4$ grubunu ve B grubunun K alt grubu olarak da $\mathbf{Z}_2$ grubunu alalım. Bu grupların sunuşları ise sırasıyla $< y; y^4 >$ ve $< y^2; (y^2)^2 >$ olsun. Böylece, H ve K alt grupları arasında,

$$\theta_1 : \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}_2, \quad x \mapsto y^2$$

izomorfizması kurulabilir. Buradan $\theta(x) = y^2$ olur. Böylece, 2.3.1 Tanım' dan $\mathbf{Z}_2 *_{\theta} \mathbf{Z}_4$ grubunun sunuşu,

$$\mathbf{Z}_2 *_{\theta} \mathbf{Z}_4 = \langle x, y; x^2, y^4, \theta(x) = x \rangle = \langle x, y; x^2, y^4, y^2 = x \rangle$$

olarak bulunur. Bu sunuşa Tietze dönüşümleri uygulanırsa, $\langle y; (y^2)^2, y^4 \rangle = \langle y; y^4 \rangle \cong \mathbf{Z}_4$ olarak bulunur. Böylece, $\mathbf{Z}_4$ grubu devirli olduğundan nilpotenttir. Dolayısıyla, $\mathbf{Z}_2 *_{\theta} \mathbf{Z}_4$ grubu nilpotenttir.

$\mathbf{Z}_2 *_{\theta} \mathbf{Z}_3$ grubunu alalım. Bu durumda alt gruplar arasındaki izomorfizma, sadece aşikar alt gruplar arasında kurulabilir. Bu nedenle, 2.2.12 Sonuç' tan $\mathbf{Z}_2 *_{\theta} \mathbf{Z}_3$ nilpotent değildir. ///

2.4.4 Örnek 2.4.3 Örnek' teki $\mathbf{Z}_2 *_{\theta} \mathbf{Z}_3$ grubunu alalım. Bu grupta $(2,3) = 1$ dir. 2.4.1 Teorem' deki adımlar uygulanırsa, grubun nilpotent olmadığı bir kez daha görülür. ///

2.4.5 Teorem A ve B sırasıyla m ve n mertebeli devirli gruplar olsun. Bu durumda $1 \neq H \leq A$ ve $1 \neq K \leq B$ olmak üzere, eğer $(m, n) = k \neq 1$ olacak şekilde k tam sayısı varsa , $A *_{\theta} B$ grubu nilpotenttir.

İspat: A ve B sırasıyla m ve n mertebeli devirli gruplar olduğundan, $A \cong \mathbf{Z}_m$ ve $B \cong \mathbf{Z}_n$ olduğu açıktır. Bu grupların sunuşları sırasıyla $< x; x^m >$ ve $< y; y^n >$ olsun. Hipotezden $(m,n) = k$ olduğundan, $m = kr$ ve $n = ks$ olacak şekilde r ve s tam sayıları vardır. Bu durumda A ve B gruplarının k mertebeli H ve K alt gruplarının sunuşları ise sırasıyla $\langle x^{m/r}; (x^{m/r})^k \rangle$ ve $\langle y^{n/s}; (y^{n/s})^k \rangle$ olur. Böylece, H ve K alt grupları arasında,

$$\theta : \mathbf{Z}_k \to \mathbf{Z}_k, \quad x^{m/r} \mapsto y^{n/s}$$

otomorfizması kurulabilir. Böylece $A *_\theta B$ grubunun sunuşu,

$$\langle x, y; x^m, y^n, \theta(x^{m/r}) = x^{m/r} \rangle = \langle x, y; x^m, y^n, y^{n/s} = x^{m/r} \rangle$$

olarak bulunur. Aslında,

$$x^{m/r} = y^{n/s} \quad \Rightarrow \quad x^m = y^{(n/s)r} \quad \Rightarrow \quad x = y^{(n/s)(r/m)}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak, yine Tietze dönüşümleriyle, grubun sunuşu $\langle y; y^{n(r/s)}, y^n \rangle \cong \mathbf{Z}_n$ olarak bulunur. Böylece $A *_\theta B$ grubu nilpotenttir. □

Not: Eğer H ile K alt grupları aşikar alt gruplar ise, $A *_\theta B$ grubu nilpotent değildir. Çünkü H ile K alt grupları arasında sadece (2.2) şeklinde bir izomorfizma oluşturulabilir. Böylece 2.2.12 Sonuç' tan grup nilpotent değildir.

2.4.6 Sonuç $\mathbf{Z}_m *_\theta \mathbf{Z}_n$ birleştirilmiş serbest çarpımı, $H = \{1_{\mathbf{Z}_m}\}$ durumunda nilpotent değildir.

2.4.7 Sonuç Nilpotent her G grubu için $\mathbf{Z}_n *_\theta G$ (ya da $G *_\theta \mathbf{Z}_n$) birleştirilmiş serbest çarpımının nilpotent olması gerekmez.

2.4.8 Örnek $G = \mathbf{Z}_4 >\!\!\lhd_{\phi} \mathbf{Z}_2$ yarı-direkt çarpımı, $\langle a,b; a^4, b^2,\ ba = a^{-1}b \rangle$ sunuşuna sahiptir ve nilpotent olduğu 3.3.11 Örnek' te açıklanacaktır. Bu grup ile $\mathbf{Z}_3 = \langle x; x^3 \rangle$ devirli grubunun birleştirilmiş serbest çarpımını bulalım. $\mathbf{Z}_3$ grubu ile $\mathbf{Z}_4 >\!\!\lhd_{\phi} \mathbf{Z}_2$ grubunun izomorfizma kurabileceğimiz, aşikar alt gruplarından başka alt grubunu bulamayız. Böylece, 2.4.6 Sonuç' tan $\mathbf{Z}_3 *_{\theta} (\mathbf{Z}_4 >\!\!\lhd_{\phi} \mathbf{Z}_2)$ birleştirilmiş serbest çarpımı nilpotent değildir. ///

2.4.9 Teorem $G = \mathbf{Z}_p *_{\theta} (\mathbf{Z}_{m_1} \times \mathbf{Z}_{m_2} \times ... \times \mathbf{Z}_{m_n})$ grubunu alalım. Eğer,

a) p asal sayısı her bir i = 1, 2, ... , n için m_i tam sayılarını bölmüyorsa, G nilpotent değildir.

b) $(m_1, m_2, ..., m_n) = 1$ ve herhangi bir $1 \le i_0 \le n$ için p asalı m_{i_0} tam sayısını bölüyorsa, G grubu nilpotenttir.

c) $(m_1, m_2, ..., m_n) = p$ olacak şekilde bir p asalı varsa, G grubu nilpotenttir.

İspat: a) Bu durumda, $\mathbf{Z}_p$ ile $\mathbf{Z}_{m_1} \times \mathbf{Z}_{m_2} \times ... \times \mathbf{Z}_{m_n}$ gruplarının arasında izomorfizma kurabileceğimiz aşikar alt gruplarından başka alt grubu yoktur. Böylece, 2.4.6 Sonuç' tan G grubu nilpotent değildir.

b) $\mathbf{Z}_p$ grubunun sunuşu $\langle x; x^p \rangle$ ve $\mathbf{Z}_{m_1} \times \mathbf{Z}_{m_2} \times ... \times \mathbf{Z}_{m_n}$ grubunun sunuşu, $\langle y_1, ..., y_n; y_1^{m_1}, ..., y_n^{m_n}, [y_i, y_j], i \ne j \rangle$ olsun. Eğer p asalı $1 \le i_0 \le n$ için m_{i_0} tam sayısını bölüyorsa, $m_{i_0} = pk$ olacak şekilde bir k tam sayısı vardır. $\mathbf{Z}_p$ grubunun H alt grubu olarak kendisini, $\mathbf{Z}_{m_1} \times \mathbf{Z}_{m_2} \times ... \times \mathbf{Z}_{m_n}$ grubunun p mertebeli olan K alt grubu olarak da $\langle y_{i_0}; (y_{i_0})^{m_{i_0}/k} \rangle$ devirli grubunu alalım. Bu durumda,

$$\theta : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p, \quad x \mapsto y_{i_0} \tag{2.5}$$

izomorfizması kurulabilir. Böylece G grubunun sunuşu,

$$\langle x, y_1, ..., y_{i_0}, ..., y_n; x^p, y_1^{m_1}, ..., y_{i_0}^{m_{i_0}}, ..., y_n^{m_n}, [y_i, y_j], i \ne j, x = y_{i_0} \rangle \tag{2.6}$$

olarak elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, (2.6) sunuşu $\mathbf{Z}_{m_1} \times \mathbf{Z}_{m_2} \times ... \times \mathbf{Z}_{m_n}$ grubuna izomorftur. Buradan $(m_1, m_2, ..., m_n) = 1$ olduğundan bu grup da $\mathbf{Z}_{m_1 m_2 ... m_n}$ grubuna izomorf olur. Böylece, G grubu nilpotenttir.

c) $(m_1, m_2, ..., m_n) = p$ olacak şekilde bir p asalı olsun. Bu durumda $\mathbf{Z}_{m_1} \times \mathbf{Z}_{m_2} \times ... \times \mathbf{Z}_{m_n}$ grubunun p mertebeli alt grubu vardır ve K alt grubu olarak $\mathbf{Z}_p$ devirli grubu alınabilir. Böylece, yine (2.5) izomorfizması kurulabilir. İspata **(b)**' deki gibi devam edilerek, G grubunun nilpotent olduğu görülür.

2.4.10 Örnek $B = \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3$ ve sunuşu $\langle a,b; a^2, b^3, [a,b] \rangle$ olmak üzere, $G = \mathbf{Z}_2 *_\theta (\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3)$ birleştirilmiş serbest çarpımının nilpotentliğini inceleyelim. Bunun için A ve B gruplarının H ve K alt grubu olarak $\mathbf{Z}_2$ grubunu alalım ve sunuşları da sırasıyla $\langle x; x^2 \rangle$ ve $\langle a; a^2 \rangle$ olsun. Bu durumda H ve K alt grupları arasında,

$$\theta : \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}_2, \quad x \mapsto a$$

izomorfizması kurulabilir. Böylece $\mathbf{Z}_2 *_\theta (\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3)$ grubunun sunuşu,

$$\langle x, a, b; x^2, a^2, b^3, [a,b], x = a \rangle$$

olarak elde edilir. Bu sunuşa Tietze dönüşümleri uygulanırsa, $\langle x, b; x^2, b^3, [x,b] \rangle \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3$ bulunur. Grup değişmeli olduğundan nilpotenttir.

2.5 HNN Genişlemeler

Bu kısımda, grup birleştirmelerinin ikincisi olan HNN genişlemeler ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.5.1 Tanım G_0 bir grup, A ve B bunun alt grupları olsun. $\theta : A \to B$ izomorfizma olmak üzere,

$$G^{*} = \left\langle \ddot{u}r\ G_0, t\ ;\ ba\breve{g}\ G_0,\ t^{-1}at = \theta(a),\ a \in A \right\rangle$$

sunuşu ile gösterilen gruba, G_0 grubunun **bir HNN genişlemesi** denir. Burada G_0 grubu **taban,** t **sabitleyici harf,** A ve B **birleştirilmiş gruplar** diye adlandırılırlar. G^{*} grubu, A, B ve θ' ya bağlıdır [5, 18].

Bu tanım, $\{A_i : i \in I\}$ ve $\{B_i : i \in I\}$ alt grup ailelerine genişletilebilir [11].

Bir **normal form,**

a) g_0, G_0 grubunun keyfi elemanı,

b) $\varepsilon_i = -1$ ise, g_i, G_0 grubunda A grubunun bir yan cümle temsilidir,

c) $\varepsilon_i = 1$ ise, g_i, G_0 grubunda B grubunun bir yan cümle temsilidir,

d) t^{ε} ve $t^{-\varepsilon}$ nin ardışık olduğu bir dizi yoktur,

özelliklerini sağlayan,

$$g_0 t^{\varepsilon_1} \ldots t^{\varepsilon_n} g_n, \quad (n \geq 0 \text{ olmak üzere})$$

serisidir.

2.5.2 Teorem (HNN) Sayılabilir her grup, iki eleman ile üretilen bir gruba gömülebilir [23].

2.5.3 Örnek G^{*} grubu, sunuşu $\left\langle a, t, u; a^2, (at)^3, [t,u] \right\rangle$ olan grup olsun. G^{*} grubunun $\left\langle a, t; a^2, (at)^3 \right\rangle$ sunuşuna sahip G_1 alt grubunu ele alalım. Bu grup, a ile üretilen ve mertebesi 2 olan devirli grup ile, at ile üretilen ve mertebesi 3 olan devirli grubun serbest çarpımıdır. Yani, $G_1 = \mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_3$ serbest çarpımıdır. t elemanı, G^{*} grubunda sonsuz mertebelidir. Bundan başka, temsili $\left\langle t, u; [t,u] \right\rangle$ olan G_2 grubu, rankı 2 olan serbest değişmeli gruptur. $t \mapsto t$ özdeşliği ile $G^{*} = G_1 * G_2$ serbest çarpım grubu elde edilir. Artık G^{*} grubunu,

$$\left\langle a, t, u; a^2, (at)^3, u^{-1}tu = t \right\rangle$$

olarak yazabiliriz. O zaman G^* grubu, $f(t)=t$ alınarak birleştirilmiş $\langle t\rangle$ ve $\langle f(t)\rangle$ alt gruplu tek parçalı G_1 ' in bir HNN genişlemesi olur.

2.5.4 Örnek İki ranklı serbest değişmeli grupların sunuşu $G^* = \langle a,b;ab=ba\rangle$ biçimindedir. Burada G_0, A ve B grupları olarak $<b>$ sonsuz devirli grubunu alalım. Bu durumda, A ve B gruplarının elemanları arasında $\theta : b \mapsto b$ izomorfizması kurulur ve $t=a$ alınırsa,

$$\langle b,t=a;t^{-1}bt=\theta(b)\rangle = \langle b,a;a^{-1}ba=b\rangle = \langle b,a;ba=ab\rangle$$

olduğundan, G^* grubu bir HNN genişleme olur.

2.6 HNN Genişlemelerin Nilpotentliği

2.6.1 Teorem $\mathbf{Z}_m$ ile $\mathbf{Z}_m$ gruplarının HNN genişlemesinin sunuşu, $G_0 = \mathbf{Z}_m$ taban grubuna göre

$$G^* = \langle x,t;x^m,t^{-1}x^n t=\theta(x^n)\rangle = \langle x,t;x^m,t^{-1}x^n t = x^r\rangle \tag{2.7}$$

olur. Eğer t sabitleyicisi,

a) $n \neq r$ durumunda,

i) G_0 grubundan alınırsa HNN genişleme yoktur.

ii) G_0 grubunu alt grup olarak içeren M değişmeli grubundan alınırsa HNN genişleme nilpotent değildir.

iii) G_0 grubunun dışında değişmeli olmayan bir M grubundan alınırsa, nilpotentlik hakkından bir şey söylenemez.

b) $n=r$ durumunda,

i) G_0 grubundan alınırsa HNN genişleme nilpotenttir.

ii) G_0 grubunu alt grup olarak içeren M değişmeli grubundan alınırsa HNN genişleme nilpotent değildir.

iii) G_0 grubunun dışında değişmeli olmayan bir M grubundan alınırsa HNN genişlemenin nilpotent olduğu durum vardır.

İspat: 2.5.1 Tanım' daki G_0 grubu olarak $\mathbf{Z}_m$' yi alalım ve sunuşu $\langle x; x^m \rangle$ olsun. Ayrıca A ile B gruplarının sunuşları da sırasıyla $(m,n)=1$ ve $(m,r)=1$ olmak üzere $\langle x^n;(x^n)^m \rangle$ ve $\langle x^r;(x^r)^m \rangle$ olsun. Bu durumda A ile B grupları arasında,

$$\theta : \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_m, \quad x^n \mapsto x^r \quad (n,r < m)$$

izomorfizması kurulabilir. Bu durumda HNN genişlemenin sunuşu,

$$G^* = \langle x,t; x^m, t^{-1}x^n t = \theta(x^n) \rangle = \langle x,t; x^m, t^{-1}x^n t = x^r \rangle$$

olarak bulunur.

a) i) Eğer $n \neq r$ ise ve t sabitleyicisi G_0 grubundan alınırsa, $\mathbf{Z}_m$ grubundaki elemanlar x ile üretildiğinden ve $t^{-1}x^n t$ bağıntısındaki harfler değişmeli olacağından HNN genişlemenin sunuşu,

$$\langle x,t; x^m, t^{-1}x^n t = x^r \rangle = \langle x,t; x^m, t^{-1}t x^n = x^r \rangle = \langle x; x^m, x^n = x^r \rangle = \langle x; x^m, x^{n-r} \rangle$$

olarak bulunur. Buradaki n ve r tamsayıları m tam sayısından küçük olduklarından $n-r$ sayısı da m' den küçük olacaktır. Bu durumda $m=(n-r)+s$ olacak şekilde bir s tam sayısı vardır [4]. Böylece grubun sunuşu,

$$\langle x; x^m, x^{n-r} \rangle = \langle x; x^{n-r}x^s, x^{n-r} \rangle = \langle x; x^s \rangle$$

olarak bulunur ki bu grup $\mathbf{Z}_s$ grubuna izomorftur. [23]' de G_0 grubu HNN genişlemesinin alt grubu olmalıdır. O halde verilen şartlarda $\mathbf{Z}_m$ ile $\mathbf{Z}_m$ gruplarının HNN genişlemesi yoktur.

ii) Eğer $n \neq r$ ise ve t sabitleyicisi G_0 grubunu alt grup olarak içeren değişmeli bir gruptan alınırsa (2.7) sunuşu, $t=a$ ve s tam sayısı da **(a)**' daki tam sayı olmak üzere,

$$\langle x,t;x^m,t^{-1}x^n t=x^r\rangle=\langle x,a;x^m,a^{-1}ax^n=x^r\rangle=\langle x,a;x^m,x^n=x^r\rangle=\langle x,a;x^s\rangle$$

olur ki bu grup $\mathbf{Z}*\mathbf{Z}_s$ serbest çarpımıdır. 2.2.12 Sonuç' tan bu grup nilpotent değildir.

iii) Eğer $n\neq r$ ise ve t sabitleyicisi G_0 grubunun dışında değişmeli olmayan bir M grubundan alınırsa (2.7) sunuşu,

$$\langle x,a;x^m,a^{-1}x^n a=x^r\rangle$$

olarak bulunur. Burada $(n,r)=1$ ve n ile r tamsayılarının birbirini böldüğü durumlarda üreteçler veya bağıntılar üzerinde sadeleştirmeye gidilemez. Dolayısıyla bulunan sunuş, olabilecek sunuşların minimal şeklidir [7, 8, 9]. Bu nedenle nilpotentlik hakkında bir şey söyleyemeyiz.

b) i) $n=r$ durumunda t sabitleyicisi G_0 grubundan alınırsa (2.7) sunuşu **(a-i)**' de belirtilen sebeplerden dolayı,

$$\langle x,t;x^m,t^{-1}x^n t=x^n\rangle=\langle x,t;x^m,t^{-1}tx^n=x^r\rangle=\langle x;x^m,x^n=x^n\rangle=\langle x;x^m\rangle$$

olur ki bu grup $\mathbf{Z}_m$ grubuna izomorftur ve nilpotenttir.

ii) $n=r$ durumunda t sabitleyicisi G_0 grubunu alt grup olarak içeren M grubundan alınırsa (2.7) sunuşu $t=a$ olmak üzere,

$$\langle x,a;x^m,a^{-1}x^n a=x^n\rangle=\langle x,a;x^m,a^{-1}ax^n=x^n\rangle=\langle x,a;x^m,x^n=x^n\rangle=\langle x,a;x^m\rangle$$

olur ki bu grup, $\mathbf{Z}*\mathbf{Z}_m$ serbest çarpımıdır ve 2.2.12 Sonuç' tan HNN genişleme nilpotent değildir.

iii) $n=r$ durumunda t sabitleyicisi G_0 grubunun dışında değişmeli olmayan bir M grubundan alınırsa (2.7) sunuşu,

$$\langle x,a;x^m,x^n a=ax^n\rangle$$

olarak bulunur. Özel olarak $n = r = 1$ durumunda bu grup, iki ranklı serbest değişmeli gruptur ve nilpotenttir. □

2.6.2 Sonuç $\mathbf{Z}_2$ ile $\mathbf{Z}_2$ gruplarının HNN genişlemesi, G_0 taban grubu olmak üzere,

a) Eğer sabitleyici elemanlar taban grubundan alınırsa, $\mathbf{Z}_2$ ile $\mathbf{Z}_2$ gruplarının HNN genişlemesi $\mathbf{Z}_{2n}$ olur ve nilpotenttir.

b) Sabitleyici elemanın alındığı grup M olmak üzere, $t \in M$ ve $t \notin G_0$ olsun.

i) Eğer M grubu G_0 grubunu kapsayan değişmeli bir grup ise $\mathbf{Z}_2$ ile $\mathbf{Z}_2$ gruplarının HNN genişlemesi nilpotent değildir.

ii) Eğer M grubu değişmeli olmayan bir grup ise $\mathbf{Z}_2$ ile $\mathbf{Z}_2$ gruplarının HNN genişlemesinin nilpotent olduğu durum vardır.

İspat: a) 2.5.1 Tanım' daki A ile B gruplarını $\mathbf{Z}_2$ ve G_0 grubunu da $\mathbf{Z}_{2n}$ alalım. Burada G_0 grubunun sunuşu $\langle x; x^{2n} \rangle$ ve A ile B, G_0 grubunun alt grupları olduğundan, her ikisinin de sunuşu $\langle x^n; (x^n)^2 \rangle$ olsun. Böylece $\mathbf{Z}_2$ ile $\mathbf{Z}_2$ grupları arasında sadece,

$$\theta : \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}_2, \quad x^n \mapsto x^n$$

izomorfizması kurulabilir. Bu durumda HNN genişlemenin sunuşu,

$$G^* = \langle x, t; x^{2n}, t^{-1}x^n t = \theta(x^n) \rangle = \langle x, t; x^{2n}, t^{-1}x^n t = x^n \rangle \qquad (2.8)$$

olarak bulunur. Grubun sunuşunda bulunan t sabitleyici harfi eğer $G_0 = \mathbf{Z}_{2n}$ grubundan alınırsa bu grup devirli olduğundan tüm elemanlar x üreteci ile üretildiğinden ve değişmeli olduğundan, $t^{-1}x^n t$ bağıntısındaki harfler değişmeli olacağından HNN genişlemenin sunuşu,

$$G^* = \langle x, t; x^{2n}, t^{-1}x^n t = x^n \rangle = \langle x, t; x^{2n}, t^{-1}t x^n = x^n \rangle = \langle x; x^{2n}, x^n = x^n \rangle = \langle x; x^{2n} \rangle$$

olur ve bu sunuş $\mathbf{Z}_{2n}$ grubuna izomorftur. Böylece HNN genişlemesi nilpotenttir.

b) i) (2.8) sunuşunda $t = a$ sabitleyicisi M değişmeli grubundan alınırsa sunuş,

$$G^{*} = \langle x,a; x^{2n}, a^{-1}x^{n}a = x^{n}\rangle = \langle x,a; x^{2n}, a^{-1}ax^{n} = x^{n}\rangle$$
$$= \langle x,a; x^{2n}, x^{n} = x^{n}\rangle = \langle x,a; x^{2n}\rangle \cong \mathbf{Z} * \mathbf{Z}_2$$

şeklini alır. 2.2.12 Sonuç' tan, HNN genişlemesi nilpotent değildir.

ii) (2.8) sunuşunda $t = a$ sabitleyicisi M değişmeli olmayan grubundan alınırsa sunuş,

$$G^{*} = \langle x,a; x^{2n}, a^{-1}x^{n}a = x^{n}\rangle \tag{2.9}$$

şeklindedir. (2.9) sunuşu, $n=1$ durumunda iki ranklı serbest değişmeli grup sunuşu olur. Bu durumda $\mathbf{Z}_2$ ile $\mathbf{Z}_2$ gruplarının bir HNN genişlemesi nilpotent olur. □

Yukarıdaki sonuçlar bize aşağıdaki teoremleri verir.

2.6.3 Teorem $\mathbf{Z}_m$ ile $\mathbf{Z}_n$ $(m \neq n)$ gruplarının bir HNN genişlemesi yoktur.

İspat: 2.5.1 Tanım' dan açıktır.

2.6.4 Teorem Nilpotent iki grubun HNN genişlemesi varsa, bunun nilpotent olması gerekmez.

İspat: 2.6.1 Teorem **(a-ii)** ve **(b-ii)**' den açıktır.

3. YARI-DİREKT ÇARPIMLARIN NİLPOTENTLİĞİ

3.1 Giriş

Bir G grubu, K ve A normal alt grupları için $K \cap A = \{1_G\}$ ve $KA=G$ durumları sağlandığında, bu iki alt grubunun direkt çarpımıdır. Direkt çarpımlar için olan bu doğal genelleme ile alt gruplardan sadece birinin normal olduğu duruma ulaşılabilir. Ulaşılan bu gruplar **yarı-direkt çarpım grupları** dır. Direkt çarpımlarda, G_1 ve G_2 nilpotent herhangi iki grup olmak üzere, $G_1 \times G_2$ direkt çarpım grubunun da nilpotent olduğu 1.3.11 Teorem' de açıklanmıştı. Bu özelliğin yarı-direkt çarpımlarda da olup olmadığını araştırmak, bu bölümün temel noktasıdır. Bu bölümün 3. kısmında nilpotent herhangi iki grubun yarı-direkt çarpımının ([3]' de bunun split extension olduğu gösterilmiştir) oluşturduğu grubun nilpotentliği, çözülebilirliği, 4. kısmında ise p-nilpotentliği ve süperçözülebilirliği araştırılacaktır. Direkt çarpımlarda, sırasıyla m ve n mertebeli iki devirli grubun mn mertebeli devirli gruba izomorf olması için gerekli ve yeterli koşulun m ve n tamsayılarının aralarında asal olması olduğu [13]' de verilmiştir. Yine bu bölümde devirli grupların yarı-direkt çarpımlarının, devirli bir gruba izomorf olma şartı belirlenecektir. Ayrıca, bulunan ana teoremlerin sonuçları ve uygulamaları verilecektir.

Bu bölümde üzerinde çalışılan gruplar aksi belirtilmedikçe sonlu gruplardır.

3.2 Yarı-direkt Çarpımlar

Bu kısımda, ilk önce genişleme ve yarı-direkt çarpım tanımı verilip, her yarı-direkt çarpımın bir genişleme olduğu ve bir grup oluşturduğu açıklanmıştır. Ayrıca, devirli grupların yarı-direkt çarpımlarının, devirli bir gruba izomorf olma şartı belirlenmiştir.

1.7.1 Tanım' ın değişik bir versiyonu aşağıdaki gibidir.

3.2.1 Tanım G bir grup, K ve A bunun alt grupları olmak üzere, eğer $K \lhd G$ ve $G/K \cong A$ özellikleri sağlanıyorsa, G grubuna K ile A gruplarının bir **genişlemesi** denir [22, 23].

3.2.2 Tanım K ve A herhangi iki grup ve θ da her $a \in A$ için,

$$\theta : A \to Aut(K),\ a \mapsto \theta_a : k \mapsto aka^{-1} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlı bir homomorfizma olsun. K ile A gruplarının **yarı-direkt çarpımı,** her $(a,k)(a \in A, k \in K)$ sıralı çifti için,

$$(a,k)(a',k') = (aa', (k\theta_{a'})k') \tag{3.2}$$

kuralını sağlayan $G = K >\!\!\lhd_\theta A$ kümesidir. [23]' de belirtildiği gibi (a,k) sıralı ikilileri, $A \times K$ direkt çarpımının elemanlarıdır.

Yarı-direkt çarpım tanımları, [1, 18] gibi kaynaklarda da bulunabilir.

3.2.3 Teorem $G = K >\!\!\lhd_\theta A$ kümesi, (3.2) kuralına göre bir gruptur [23].

İspat: (1,1) sıralı ikilisinin $K >\!\!\lhd_\theta A$ kümesinin birim elemanı olduğunu göstermek kolaydır. Yani,

$$(1,1)(a,k) = (1a, (1\theta_a)k) = (a, 1k) = (a, k)$$

$$(a,k)(1,1) = (a1, (k\theta_1)1) = (a, k1) = (a, k)$$

olur. Burada θ_a bir otomorfizma olduğu için birim elemanı birim elemana götürür ve θ_1 birim otomorfizmadır.

(a,k) elemanlarının tersinin (a_1,k_1) gibi elemanlar olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$(a,k)\,(a_1,k_1) = (1, 1) \quad \text{ve} \quad (a_1,k_1)\,(a,k) = (1,1)$$

olmalıdır. (3.2)' den $(a,k)(a_1,k_1)=(aa_1,(k\theta_{a_1})k_1)=(1,1)$ olur ve $aa_1=1$ ve $(k\theta_{a_1})k_1=1$ elde edilir. Bu, $a_1=a^{-1}$ ve $k_1=(k\theta_{a^{-1}})^{-1}$ olduğu anlamına gelir. Elde edilen bu elemanın ters eleman olup olmadığı (3.2) kullanılarak kontrol edilirse,

$$(a,k)\,(a^{-1},(k\theta_{a^{-1}})^{-1})=(a.a^{-1},(k\theta_{a^{-1}})(k\theta_{a^{-1}})^{-1})\ =(1,1)$$

istenen sonucuna ulaşılır. Aynı şekilde $(a_1,k_1)\,(a,k)=(1,1)$ durumu için $a_1=a^{-1}$ ve $k_1=(k^{-1})\theta_{a^{-1}}$ bulunur.

(3.2)' ye göre, $K >\!\!\lhd_{\theta} A$ kümesinin birleşmeli olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
[(a_1,k_1)(a_2,k_2)](a_3,k_3) &= (a_1a_2,(k_1\theta_{a_2})k_2)(a_3,k_3)\\
&=(a_1a_2a_3,((k_1\theta_{a_2}k_2)\theta_{a_3})k_3)\\
&=(a_1a_2a_3,(k_1\theta_{a_2a_3})(k_2\theta_{a_3})k_3)\\
(a_1,k_1)[(a_2,k_2)(a_3,k_3)] &= (a_1,k_1)(a_2a_3,(k_2\theta_{a_3})k_3)\\
&=(a_1a_2a_3,((k_1\theta_{a_2a_3})(k_2\theta_{a_3})k_3).
\end{aligned}$$

Böylece, $G=K >\!\!\lhd_{\theta} A$ kümesinin (3.2) eşitliğine göre bir grup olduğu ispatlanmış olur. □

[14]' de sırasıyla, $k\mapsto(k,1_K)$ ve $a\to(1_A,a)$ şeklinde verilen $K\to G$ ve $A\to G$ monomorfizmaları kullanılarak aşağıdaki tanım elde edilir.

3.2.4 Tanım G bir grup olmak üzere, eğer $K\lhd G$, $KA=G$ ve $K\cap A=\{1_G\}$ şartlarını sağlayan K ve A alt gruplarına sahipse, G grubuna K ile A gruplarının **yarı-direkt çarpımı** denir.

3.2.5 Tanım G bir grup, K ve A bunun alt grupları olsun. Bu grupların,

$$1\longrightarrow K\xrightarrow{i} G\underset{\xleftarrow[k]{}}{\xrightarrow{j}} A\longrightarrow 1$$

şeklindeki tam serisini düşünelim. Eğer, $j\circ k$ dönüşümü K üzerinde birim olacak şekilde bir $k: A\to G$ homomorfizması varsa, bu tam seriye **split** denir.

3.2.4 Tanım ve 3.2.5 Tanım' dan K ile A gruplarının her yarı-direkt çarpımının bir split genişleme olduğu açıktır. Detaylar için [3]' e bakılabilir..

Yarı-direkt çarpımların mertebeleri için aşağıdaki sonuç verilebilir.

3.2.6 Sonuç G grubu K ile A gruplarının yarı-direkt çarpımı ise, $|G| = |K||A|$ olur.

İspat: G grubunun K ile A gruplarının her yarı-direkt çarpımı, 3.2.4 Tanım ve 3.2.1 Tanım' dan da görülebileceği gibi, aynı zamanda K ile A gruplarının bir genişlemesidir. Bu nedenle $G/K \cong A$ olduğundan, $|G/K| = |A|$ dır ve Lagrange Teoremi'nden dolayı $|G| = |K||A|$ olur. □

Yarı-direkt çarpım gruplarında otomorfizma gruplarını şıkça kullanırız.

3.2.7 Tanım Bir G grubunun otomorfizma grubu,

$Aut(G) = \{\theta: G \to G$ izomorfizma$\}$

şeklinde gösterilen kümedir ve bu küme fonksiyonların birleşim işlemine göre bir grup oluşturur.

Aşağıdaki ön teorem ve ispatı [23]' de bulunabilir.

3.2.8 Ön Teorem G grubu K ile A gruplarının bir yarı-direkt çarpımı ise, o zaman,

$$\theta : A \to Aut(K),\ a \mapsto \theta_a : k \mapsto aka^{-1}\ (\forall k \in K,\ a \in A)$$

şeklinde tanımlı bir θ homomorfizması vardır. Burada $\forall k \in K, a \in A$ için, $\theta_a(\theta_b(k)) = \theta_{ab}(k)$ ve $\theta_1(k) = k$ olduğu açıktır.

Yarı-direkt çarpımların sunuşlarını aşağıdaki ön teoremle verebiliriz. Aslında bu sonuç 1.7.5 Teorem' in bir uygulamasıdır. Bu ön teoremin ispatı [15]' de bulunabilir.

3.2.9 Ön Teorem K ile A gruplarının sunuşları, $y \mapsto k_y$ $(k \in y)$ ve $x \mapsto a_x$ $(x \in x)$ dönüşümleri altında sırasıyla $P_K = < y; s >$ ve $P_A = < x; r >$ olsun. $G = K >\!\!\lhd_\theta A$ yarı-direkt çarpımı için, $t = \{ yx\lambda_{yx}^{-1}x^{-1} : y \in y, x \in x \}$ ve $\lambda_{yx} = (k_y)\theta_{a_x}$ $(a \in A, k \in K, x \in x, y \in y)$ olacak şekilde y' de bir kelime olmak üzere $P = \langle y, x; s, r, t \rangle$ sunuşu bulunabilir.

3.1 Bölüm' de belirtildiği gibi, direkt çarpım gruplarında, m mertebeli devirli bir grup ile n mertebeli devirli bir grubun direkt çarpımının, mn mertebeli devirli bir gruba izomorf olması için gerek ve yeterli koşulun $(m,n)=1$ olduğu iyi bilinen bir sonuçtur. Aşağıdaki teoremde m mertebeli devirli bir grup ile n mertebeli devirli bir grubun *yarı-direkt çarpımının*, mn mertebeli devirli bir gruba izomorf olma şartı ispatlanmıştır.

3.2.10 Teorem m, $n \in \mathbf{Z}^+$ ve $G = \mathbf{Z}_m >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_n$ olsun. $G \cong \mathbf{Z}_{mn}$ ise $(m,n)=1$ dir.

İspat: $\mathbf{Z}_m >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_n \cong \mathbf{Z}_{mn}$ olsun. $\mathbf{Z}_m$ ve $\mathbf{Z}_n$ devirli grup olduklarından sırasıyla $\mathbf{Z}_m =< k; k^m >$ ve $\mathbf{Z}_n =< a; a^n >$ sunuşlarıyla gösterilirler. Bu durumda k elemanının mertebesi, m ve a elemanının mertebesi n olur. Hipotezden dolayı, $\mathbf{Z}_m >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_n$ yarı-direkt çarpım grubu da devirlidir ve $\mathbf{Z}_m >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_n =< (a,k) >$ biçiminde bir sunuşa sahiptir ve (a,k) elemanının mertebesi mn olur. Buradan

$$o((a,k)) = \frac{o(a)o(k)}{(o(a),o(k))} = mn \Rightarrow \frac{nm}{(n,m)} = mn \Rightarrow (n,m) = 1$$

elde ederiz. □

3.2.10 Teorem' in tersi doğru olmayabilir. Ancak G grubunun değişmeli olması durumunda gerektirmenin tersi doğrudur.

3.2.11 Teorem G değişmeli bir grup olmak üzere, $G \cong \mathbf{Z}_{mn}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $(m,n)=1$ olmasıdır.

İspat: (m,n)=1 olsun. [23]' de $|\mathbf{Z}_m >\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_n| = |\mathbf{Z}_{mn}|$ olduğu verilmiştir. O halde $(a,k)\in \mathbf{Z}_m >\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_n$ alalım. (a,k) elemanının bu grup için bir üreteç ve mertebesinin mn olduğu gösterilmelidir.

(a,k) elemanının mertebesi t olsun. Bu durumda $(a,k)^t = (1_{Z_n}, 1_{Z_m})$ olur. $(a,k)^t$ sıralı ikililerinin çarpımının ne olduğunu bulalım.

$$(a,k)^2 = (a,k)(a,k) = (a^2,(k\theta_a)k) = (a^2,(aka^{-1})k)$$

$$(a,k)^3 = (a,k)^2(a,k) = (a^2,(aka^{-1})k)(a,k) = (a^3,(((aka^{-1})k)\theta_a)k)$$

$$= (a^3, a^2k(a^{-1}k)^2)$$

...

şeklinde devam edilerek,

$$(a,k)^t = (a^t, a^{t-1}k(a^{-1}k)^{t-1})$$

olduğu görülür. Kabulümüz gereği, $(a,k)^t = (a^t, a^{t-1}k(a^{-1}k)^{t-1}) = (1_{Z_n}, 1_{Z_m})$ dir. Bu, $a^t = 1_{Z_n}$ ve $a^{t-1}k(a^{-1}k)^{t-1} = 1_{Z_m}$ olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla $n\,|\,t$ olduğu açıktır. Şimdi $m\,|\,t$ olup olmadığını araştıralım. Eğer bu sağlanıyorsa o zaman, (m,n)=1 olduğundan $mn\,|\,t$ olacaktır.

$$a^{t-1}k(a^{-1}k)^{t-1} = 1_{Z_m} \Rightarrow a^{-1}k(a^{-1}k)^{t-1} = 1_{Z_m} \Rightarrow (a^{-1}k)^t = 1_{Z_m}$$

bulunur. Bu ifade, $(a^{-1})^t k^t = 1_{Z_m}$ olarak yazılabilirse, $a^{-t}k^t = 1_{Z_m} \Rightarrow 1_{Z_n} k^t = 1_{Z_m}$ olur ve buradan $k^t = 1_{Z_m}$ olduğu gösterilerek $m\,|\,t$ olduğu söylenebilir. Ancak Z_mZ_n' nin dolayısıyla 3.2.4 Tanım' dan $Z_m >\!\lhd_\theta Z_n$ grubunun değişmeli olduğu bilinmeden yukarıda gösterilen işlemler yapılamaz. Yine aynı şekilde, $t\,|\,mn$ olması için $(a,k)^t = (1_{Z_n}, 1_{Z_m})$ olmalıdır. Ancak bu eşitliğin de yazılabilmesi için, Z_mZ_n grubunun dolayısıyla $Z_m >\!\lhd_\theta Z_n$ grubunun değişmeli olması gerekir.

Bu nedenle, $(m,n) = 1$ iken $G \cong \mathbf{Z}_{mn}$ olduğunun söylenilebilmesi için grubun değişmeli olması gerekir. □

3.2.12 Örnek $\mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunu düşünelim. $\mathbf{Z}_3$ grubunun sunuşu $P = < y; y^3 >$ ve $\mathbf{Z}_2$ grubunun sunuşu $P = < x; x^2 >$ olsun. $\mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubu yarı-direkt çarpım olduğundan 3.2.8 Ön Teorem' den dolayı,

$$\theta : \mathbf{Z}_2 \to Aut(\mathbf{Z}_3), \quad x \mapsto \theta_x : y \mapsto xyx^{-1}$$

homomorfizması vardır. [23]' de $Aut(\mathbf{Z}_3) \cong \mathbf{Z}_2$ olduğundan, $\mathbf{Z}_3 \to \mathbf{Z}_3$ olan, grubun elemanlarını $y \mapsto y$ ve $y \mapsto y^{-1}$ şeklinde eşleyen iki tane otomorfizma belirleriz. Eğer otomorfizma elemanları $y \mapsto y$ şeklinde karşılık getiriyorsa grubun sunuşunu,

$$P_{\mathbf{Z}_3 >\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2} = < y, x; y^3, x^2, [y, x] >$$

olarak buluruz. Sunuşunu bulduğumuz grup, $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_2$ direkt çarpım grubudur ve değişmelidir. Burada $(2,3) = 1$ olduğundan bu grup $\mathbf{Z}_6$ grubuna izomorftur. Eğer otomorfizma elemanları $y \mapsto y^{-1}$ şeklinde karşılık getiriyorsa, grubun sunuşu,

$$P_{\mathbf{Z}_3 >\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2} = < y, x; y^3, x^2, (yx)^2 >$$

olarak bulunur ki [sunuşun bulunuşu ilerde anlatıldı] bu durumda $\mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2 \cong S_3$ olur. Buradaki $P_{\mathbf{Z}_3 >\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2}$ sunuşunun detayları için 3.3.2 Örnek ve 3.2.1 Örnek (devam)' a bakınız. ///

3.3 Yarı-direkt Çarpım Gruplarında Nilpotentlik

Nilpotentlik ile ilgili temel kavramlar 1.3 Bölüm' de verilmişti. Bu kısımda, bu kavramlara ek olarak grupların sunuşlarından faydalanılarak bazı şartlar altında yarı-direkt çarpımların nilpotentliği çalışılmıştır.

3.3.1 Teorem Değişmeli her G grubu için $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta G$ yarı-direkt çarpım grubu nilpotenttir.

İspat: $\mathbf{Z}_2$ grubunun sunuşu $P_{\mathbf{Z}_2} = \langle y; y^2 \rangle$ ve G değişmeli bir grup olduğundan sunuşu,

$$P_G = \langle x_1,\dots,x_n; R_1(x_1),\dots,R_m(x_m),[x_1,x_2],\dots,[x_1,x_n],[x_2,x_3],\dots,[x_{n-1},x_n] \rangle$$

olsun. $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta G$ yarı-direkt çarpım olduğundan 3.2.8 Ön Teorem' den dolayı,

$$\theta : G \to Aut(\mathbf{Z}_2), \quad x_i \mapsto \theta_{x_i} : y \mapsto x_i y x_i^{-1}$$

homomorfizması vardır. Ancak [23]' de $Aut(\mathbf{Z}_2) \cong \{1\}$ olduğundan, $\mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}_2$ olan tek otomorfizma, elemanları $y \mapsto y$ şeklinde karşılık getiren birim otomorfizmadır. $Aut(\mathbf{Z}_2)$ grubunda birim otomorfizmaya karşılık gelen, θ_1 otomorfizmasıdır. Bu durumda θ homomorfizması,

$$\theta : G \to Aut(\mathbf{Z}_2), \quad x_i \mapsto \theta_1 = I : y \mapsto 1y1^{-1} = y$$

biçiminde olur. Şimdi $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta G$ yarı-direkt çarpım grubunun,

$$P_{\mathbf{Z}_2 >\!\lhd_\theta G} = \langle x_1,\dots,x_n, y; R_1(x_1),\dots,R_m(x_m), y^2,[x_1,x_2],\dots,[x_1,x_n],[x_2,x_3],\dots,[x_{n-1},x_n],\boldsymbol{t} \rangle$$

şeklindeki sunuşunu bulmalıyız. 3.2.9 Ön Teorem' den dolayı, öncelikle $\boldsymbol{t} = \{y x_i \lambda_{yx_i}^{-1} x_i^{-1} : y \in \boldsymbol{y}, x_i \in \boldsymbol{x}\}$ bağıntıları belirlenmelidir. Buradaki λ_{yx_i}, $(y)\theta_{x_i}$ biçiminde $\boldsymbol{y}$' de bir kelimedir. Böylece,

$$\lambda_{yx_i} = (y)\theta_{x_i} = (y)I = y \Rightarrow \lambda_{yx_i}^{-1} = y^{-1}$$

olduğundan $\boldsymbol{t}_i = y x_i y^{-1} x_i^{-1} = [y, x_i]$ bağıntılarını elde ederiz. Bulunan bu komütatörler kullanılarak, $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta G$ yarı-direkt çarpım grubunun,

$$\langle x_1,\dots,x_n, y; R_1(x_1),\dots,R_m(x_m), y^2,[x_1,x_2],\dots,[x_1,x_n],[x_2,x_3],\dots,[x_{n-1},x_n],[y,x_1],\dots,[y,x_n] \rangle$$

şeklindeki sunuşu bulunur. Sunuşun üreteçleri olan bütün elemanlar birbirlerinin komütatörleri olarak yazılabildiğinden, $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta G$ grubu değişmeli ve 1.3 Bölüm' de belirtildiği gibi her değişmeli grup nilpotent olduğundan grup nilpotenttir. □

3.3.2 Örnek $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_m$ grubunun nilpotentliğini gösterelim. $\mathbf{Z}_2$ ve $\mathbf{Z}_m$ grupları devirli grup olduklarından, sunuşları sırasıyla $P_{\mathbf{Z}_2} = \langle y; y^2 \rangle$ ve $P_{\mathbf{Z}_m} = \langle x; x^m \rangle$ olsun. $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_m$ yarı-direkt çarpım ve $Aut(\mathbf{Z}_2) \cong \{1\}$ olduğundan, 3.3.1 Teorem' in ispatında belirtildiği gibi,

$$\theta : \mathbf{Z}_m \to Aut(\mathbf{Z}_2), \quad x \mapsto \theta_x : y \mapsto xyx^{-1}$$

homomorfizması vardır ve bu homomorfizma $x \mapsto \theta_1 = I : y \mapsto 1y1^{-1} = y$ biçimindedir. $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_m$ grubunun $P_{\mathbf{Z}_2 >\lhd_\theta \mathbf{Z}_m} = \langle y, x; y^2, x^m, t \rangle$ şeklindeki sunuşunu bulmak için yine, t bağıntı kümesi bulunmalıdır. $\lambda_{y,x} = (y)\theta_x = (y)I = y \Rightarrow \lambda_{y,x}^{-1} = y^{-1}$ bulunarak, $t = yxy^{-1}x^{-1} = [y, x]$ bağıntısı elde edilir. Böylece $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_m$ grubunun sunuşu,

$$P_{\mathbf{Z}_2 >\lhd_\theta \mathbf{Z}_m} = \langle y, x; y^2, x^m, [y, x] \rangle$$

olur ve görüldüğü gibi $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_m$ grubu değişmeli ve dolayısıyla nilpotenttir. ///

3.3.3 Sonuç p asal sayı olmak üzere, $|G| = p$ ise $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta G$ grubu nilpotenttir.

3.3.4 Sonuç Değişmeli her G grubu için $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta G$ grubu çözülebilirdir.

3.3.5 Sonuç Değişmeli olmayan bir G grubu için, $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta G$ grubunun nilpotent olduğu genel olarak söylenemez. Bunu göstermek için, $G = S_3$ değişmeli olmayan grubunu alalım ve $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta S_3$ grubunun nilpotentliğini inceleyelim. $\mathbf{Z}_2$ grubunun sunuşu $\langle y; y^2 \rangle$ ve S_3 grubunun sunuşu ise $\langle a, b; a^3, b^2, ab = ba^2 \rangle$ olsun. $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta S_3$ yarı-direkt çarpım ve $Aut(\mathbf{Z}_2) \cong \{1\}$ olduğundan,

$$\theta : S_3 \to Aut(\mathbf{Z}_2), \quad a \mapsto \theta_a : y \mapsto aya^{-1} = y, \quad b \mapsto \theta_b : y \mapsto byb^{-1} = y$$

homomorfizmalarını belirleyebiliriz. Yani $\forall s \in S_3$ için, $s \mapsto \theta_s : y \mapsto sys^{-1} = y$ olur. Buradan, $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta S_3$ grubunun sunuşu için gerekli olan $\mathbf{t}$ bağıntıları $t = \{ys\lambda_{y,s}^{-1}s^{-1} : y \in y,\ s \in s\}$ şeklinde olduğundan, $t = ysy^{-1}s^{-1}$ biçiminde bulunur. Böylece $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta S_3$' ün sunuşu,

$$\left\langle y, a, b; y^2, a^3, b^2, ab = ba^2, [y, s]\,(s \in S_3) \right\rangle$$

olur. 1.3.7 Teorem' de, nilpotent her grubun alt grubunun da nilpotent olduğu belirtilmişti. O halde, nilpotent olmayan en az bir tane alt grubu bulunan gruplar nilpotent değildir. S_3 grubu yukarıda sunuşu bulunan $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta S_3$ grubunun normal alt grubudur ve çözülebilir fakat nilpotent olmayan bir gruptur. Böylece, nilpotent olmayan bir alt grubu olduğu için $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta S_3$ nilpotent değildir.

3.3.6 Sonuç $\mathbf{Z}_2 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_m$ grubu nilpotent olduğu halde, $\mathbf{Z}_m >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunun genel olarak nilpotentliğinden söz edemeyiz. Mesela, 3.3.7 Teorem' in ispatında görüleceği gibi $D_3 = \mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$' dir. [23]' de $D_3 \cong S_3$ olduğu belirtilir. 1.3 Bölüm' de nilpotent grupların bazı özellikleri-6' da S_3 simetrik grubunun çözülebilir fakat nilpotent olmayan bir grup olduğu belirtilmiştir. Ancak, $\mathbf{Z}_m >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunun çözülebilirliği incelenebilir.

3.3.7 Teorem $\mathbf{Z}_m >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ çözülebilirdir.

İspat: [23]' de $2m$ mertebeli D_m dihedral grubu, $\mathbf{Z}_m$ devirli grubunun $\mathbf{Z}_2$ devirli grubu ile yarı-direkt çarpımı olduğu verilmiştir. Eğer m tek ise, D_m grubunun komütatör alt grubu $\mathbf{Z}_m$ ve eğer m çift ise, $2n = m$ olmak üzere $\mathbf{Z}_n$ grubudur. Reidemeister-Schreier yöntemiyle bulunan komütatör alt gruplar kullanılarak, D_m için bölüm grupları değişmeli olan bir normal seri oluşturur. Böylece $\mathbf{Z}_m >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubu çözülebilirdir. $\square$

3.3.8 Sonuç Genel olarak, herhangi bir G grubu için $G >\!\!\lhd_{\theta} \mathbf{Z}_2$ grubunun çözülebilir olduğunu da söyleyemeyiz. Mesela, $G = A_n$ alalım. Bu durumda, [23]' de belirtildiği gibi $S_n = A_n >\!\!\lhd_{\theta} \mathbf{Z}_2$ olup, ancak $n \geq 5$ için S_n çözülebilir grup değildir.

3.2.1 Örnek aynı zamanda, $\mathbf{Z}_m >\!\!\lhd_{\theta} \mathbf{Z}_2$ grubunun her zaman nilpotent olamayacağına bir örnektir.

3.2.1 Örnek (devam) $\mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_{\theta} \mathbf{Z}_2$ grubu her zaman nilpotent değildir. $\mathbf{Z}_3$ grubunun sunuşu $P = \langle y; y^3 \rangle$ ve $\mathbf{Z}_2$ grubunun sunuşu $P = \langle x; x^2 \rangle$ olsun. $\mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_{\theta} \mathbf{Z}_2$ grubu yarı-direkt çarpım olduğundan,

$$\theta : \mathbf{Z}_2 \to Aut(\mathbf{Z}_3), \quad x \mapsto \theta_x : y \mapsto xyx^{-1}$$

homomorfizması vardır. $Aut(\mathbf{Z}_3) \cong \mathbf{Z}_2$ olduğundan $\mathbf{Z}_3 \to \mathbf{Z}_3$ olan, grubun elemanlarını $y \mapsto y$ ve $y \mapsto y^{-1}$ şeklinde eşleyen iki tane otomorfizma belirleriz. Eğer otomorfizma elemanları $y \mapsto y$ şeklinde karşılık getiriyorsa, grubun sunuşunu

$$P_{\mathbf{Z}_3 >\!\lhd_{\theta} \mathbf{Z}_2} = \langle y, x; y^3, x^2, [y, x] \rangle$$

olarak buluruz ve bu grup değişmeli olduğundan nilpotenttir. Eğer otomorfizma elemanları $y \mapsto y^{-1}$ şeklinde karşılık getiriyorsa, grubun sunuşu,

$$P_{\mathbf{Z}_3 >\!\lhd_{\theta} \mathbf{Z}_2} = \langle y, x; y^3, x^2, (yx)^2 \rangle$$

olarak bulunur ki bu durumda $\mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_{\theta} \mathbf{Z}_2 \cong S_3$ olduğundan nilpotent değil ancak çözülebilir bir gruptur. Bu sunuş aynı zamanda metacyclic grup sunuşudur [13] ve metacyclic grupların çözülebilir olduğu tanımından açıktır. ///

Aşağıdaki ön teoremin ispatı [13]' de bulunabilir.

3.3.9 Ön Teorem D_n, n mertebeli a ve 2 mertebeli b elemanları tarafından üretilen dihedral grup olsun. O zaman D_n dihedral grubunun nilpotent olması için gerekli ve yeterli koşul k bir tam sayı olmak üzere, $n = 2^k$ olmasıdır.

3.3.10 Teorem G devirli bir grup olmak üzere, $Aut(G) \cong \mathbf{Z}_2$ ise $G >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubu çözülebilirdir.

İspat: G grubu mertebesi n olan devirli bir grup ve sunuşu $P_G = \langle y; y^n \rangle$ olsun. $\mathbf{Z}_2$ grubunun sunuşunu ise $P = \langle x; x^2 \rangle$ olarak alalım. $G >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubu yarı-direkt çarpım olduğundan,

$$\theta : \mathbf{Z}_2 \to Aut(G), \quad x \mapsto \theta_x : y \mapsto xyx^{-1}$$

homomorfizması vardır. $Aut(G) \cong \mathbf{Z}_2$ olduğundan $G \to G$ olan G grubunun elemanlarını $y \mapsto y$ ve $y \mapsto y^{-1}$ şeklinde eşleyen iki tane otomorfizma vardır. Bu otomorfizmalara göre $G >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunun sunuşları belirlenirse;

i) G grubunun elemanlarını $y \mapsto y$ şeklinde eşleyen otomorfizma ise, bu durumda θ homomorfizması,

$$\theta : \mathbf{Z}_2 \to Aut(G), \quad x \mapsto \theta_x = I : y \mapsto 1y1^{-1} = y$$

şeklinde olur. $\lambda_{yx} = (y)\theta_x = (y)I = y \Rightarrow \lambda_{yx}^{-1} = y^{-1}$ olduğundan, $G >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunun $P = \langle y, x; y^n, x^2, t \rangle$ sunuşu için gerekli olan t bağıntısı $t = yxy^{-1}x^{-1} = [y, x]$ olarak bulunur. Bu durumda $G >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunun sunuşu,

$$P = \langle y, x; y^n, x^2, [y, x] \rangle$$

olur. Sunuştan da anlaşılacağı gibi grup değişmeli ve dolayısıyla (nilpotent) çözülebilir bir gruptur.

ii) G grubunun elemanlarını $y \mapsto y^{-1}$ şeklinde eşleyen otomorfizmayı düşünelim. Bu durumda θ homomorfizması,

$$\theta : \mathbf{Z}_2 \to Aut(G), \quad x \mapsto \theta_x : y \mapsto xyx^{-1} = y^{-1}$$

şeklinde olur. $\lambda_{yx} = (y)\theta_x = y^{-1} \Rightarrow \lambda_{yx}^{-1} = y$ olduğundan, $G >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunun $P = \langle y, x; y^n, x^2, t \rangle$ sunuşu için gerekli olan t bağıntısını, $t = yxyx^{-1}$ olarak bulunur. t grup sunuşunda bir bağıntıdır ve bu nedenle,

$$yxyx^{-1} = 1 \Rightarrow yxyx = 1 \Rightarrow (yx)^2 = 1$$

bağıntısı elde edilir. $G >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunun sunuşu,

$$P = \langle y, x; y^n, x^2, (yx)^2 \rangle$$

olarak bulunur. n tamsayısının çift ve tek olması durumuna göre 3.3.7 Teorem' den, sunuşu bulunan bu grup çözülebilirdir. □

3.3.11 Örnek $\mathbf{Z}_4 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubu çözülebilirdir. $\mathbf{Z}_4$ grubunun sunuşu $P = \langle y; y^4 \rangle$ ve $\mathbf{Z}_2$ grubunun sunuşu $P = \langle x; x^2 \rangle$ olsun. $\mathbf{Z}_4 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubu yarı-direkt çarpım olduğundan,

$$\theta : \mathbf{Z}_2 \to Aut(\mathbf{Z}_4), \quad x \mapsto \theta_x : y \mapsto xyx^{-1}$$

homomorfizması vardır. $Aut(\mathbf{Z}_4) \cong \mathbf{Z}_2$ olduğundan $\mathbf{Z}_4 \to \mathbf{Z}_4$ olan, grubun elemanlarını $y \mapsto y$ ve $y \mapsto y^{-1}$ şeklinde eşleyen iki tane otomorfizma vardır. Bu otomorfizmalara göre $\mathbf{Z}_4 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunun sunuşlarını belirleyelim.

i) $\mathbf{Z}_4$ grubunun elemanlarını $y \mapsto y$ şeklinde eşleyen otomorfizma ise bu durumda θ homomorfizması,

$$\theta : \mathbf{Z}_2 \to Aut(\mathbf{Z}_4), \quad x \mapsto \theta_x = I : y \mapsto 1y1^{-1} = y$$

şeklinde olur. $\lambda_{yx} = (y)\theta_x = (y)I = y \Rightarrow \lambda_{yx}^{-1} = y^{-1}$ olduğundan, $\mathbf{Z}_4 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunun $P = \langle y, x; y^4, x^2, t \rangle$ sunuşu için gerekli olan t bağıntısı, $t = yxy^{-1}x^{-1} = [y, x]$ olarak belirlenir. Bu durumda $\mathbf{Z}_4 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunun sunuşu,

$$P = \langle y, x; y^4, x^2, [y, x] \rangle$$

olarak bulunur. Sunuştan da anlaşılacağı gibi grup değişmeli ve dolayısıyla (nilpotent) çözülebilir bir gruptur.

ii) $\mathbf{Z}_4$ grubunun elemanlarını $y \mapsto y^{-1}$ şeklinde eşleyen otomorfizma ise, bu durumda θ homomorfizması,

$$\theta : \mathbf{Z}_2 \to Aut(\mathbf{Z}_4), \quad x \mapsto \theta_x : y \mapsto xyx^{-1} = y^{-1}$$

şeklinde olur. $\lambda_{yx} = (y)\theta_x = y^{-1} \Rightarrow \lambda_{yx}^{-1} = y$ olduğundan, $\mathbf{Z}_4 > \!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunun $P = \langle y, x; y^4, x^2, t \rangle$ sunuşu için gerekli olan t bağıntısını, $t = yxyx^{-1}$ olarak buluruz. t grup sunuşunda bir bağıntıdır ve bu nedenle,

$$yxyx^{-1} = 1 \Rightarrow yxyx = 1 \Rightarrow (yx)^2 = 1$$

bağıntısı elde edilir. $\mathbf{Z}_4 > \!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunun sunuşu,

$$P = \langle y, x; y^4, x^2, (yx)^2 \rangle$$

olarak bulunur. Sunuşu bulunan $\mathbf{Z}_4 > \!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubu, D_4 dihedral grubunun sunuşudur [15, 16] ve bu grup 3.3.9 Ön teorem' den dolayı nilpotent olduğundan çözülebilirdir. ///

Not: 3.3.11 Örnek aslında tamamen nilpotent olan bir gruptur. 3.2.1 Örnek' deki grup ise, $Aut(G) \cong \mathbf{Z}_2$ olan $G > \!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ gruplarının nilpotent olması gerekmediğine bir örnektir.

3.3.12 Sonuç p asal sayı olmak üzere, $\mathbf{Z}_p > \!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubu çözülebilirdir.

İspat: $p=2$ için $\mathbf{Z}_2 > \!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunun nilpotent olduğu 3.3.9 Ön Teorem' den açıktır. Dolayısıyla bu grup, çözülebilirdir.

$p>2$ için $\mathbf{Z}_p > \!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubu metacyclic bir gruptur [13] ve metacyclic grupların çözülebilir olduğu 1.2.10 Tanım' dan açıktır.

3.3.13 Sonuç $n \in \mathbf{Z}^+$ ve $m = 2^n$ ise $\mathbf{Z}_m >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubu nilpotent dolayısıyla çözülebilirdir.

İspat: $\mathbf{Z}_m >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunun mertebesi 3.2.6 Sonuç' dan 2^{n+1} dir. Ayrıca, bütün Sylow 2-alt gruplarının sayısı 1 olduğundan, bu alt gruplar 1.3.13 Teorem' den $\mathbf{Z}_m >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunun normal alt grubu olur. Bu nedenle, $\mathbf{Z}_m >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ 1.3.14 Teorem' den $\mathbf{Z}_2$ gruplarının direkt çarpımı olarak yazılabilir. Elde edilen bu grup, değişmeli olduğundan nilpotenttir. □

3.3.14 Uyarı $G = \mathbf{Z}$ durumunda, θ homomorfizması toplamsal tanımlanmak zorunda olduğundan, yarı-direkt çarpım kavramı, yarı-direkt toplam kavramına dönüşmek zorundadır. Bu konuyla ilgili olarak literatürde herhangi bir bilgi verilmediğinden $G = \mathbf{Z}$ durumu bu tezde incelenememiş olup, ileri dönemde çalışılacaktır.

Aşağıdaki teorem [12]' de bulunabilir.

3.3.15 Ön Teorem G bir grup ve H, K grupları G grubunun normal alt grubu olsunlar. Eğer $H \cap K = \{1_G\}$ ise, $\forall h \in H$ ve $\forall k \in K$ için $hk = kh$ dır.

İspat: $h \in H$ ve $k \in K$ alalım. $h^{-1}k^{-1}hk$ elemanı, $K \lhd G$ olduğundan K grubunun elemanı ve aynı zamanda $H \lhd G$ olduğundan H nin elemanıdır. Böylece $h^{-1}k^{-1}hk$, $H \cap K$ grubunun elemanı olur. $H \cap K = \{1_G\}$ olduğundan, $h^{-1}k^{-1}hk = 1$ dir. Buradan istenen sonucu elde ederiz. □

3.3.16 Teorem G grubu, K ile A değişmeli gruplarının yarı-direkt çarpımı olsun. Eğer $|G| = 2|A|$ ise G grubu nilpotenttir.

İspat: $G = K >\!\!\lhd_\theta A$ olsun. Bu durumda 3.2.4 Tanım' dan, $K \lhd G$, $KA = G$, $K \cap A = \{1\}$ özellikleri sağlanır. $|G| = 2|A|$ ise $\dfrac{|G|}{|A|} = 2$ ve buradan $A \lhd G$ olur.

Bu durumda $K \lhd G$, $A \lhd G$ ve $K \cap A = \{1_G\}$ olduğundan, 3.3.15 Ön Teorem' den, $\forall a \in A$ ve $k \in K$ için $ak = ka$ olur. Ayrıca 3.2.4 Tanım' dan $G = \{ka : k \in K, a \in A\}$ olur. Şimdi G grubunun değişmeli olduğunu ispatlayalım.

Bunun için, $x, y \in G$ olsun. O halde $x = k_1 a_1$ ve $y = k_2 a_2$ olacak şekilde $a_1, a_2 \in A$ ve $k_1, k_2 \in K$ vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} xy &= (a_1k_1)(a_2k_2) = a_1(k_1a_2)k_2 = a_1(a_2k_1)k_2 = (a_1a_2)(k_1k_2) = (a_2a_1)(k_2k_1) \\ &= a_2(a_1k_2)k_1 = a_2(k_2a_1)k_1 = (a_2k_2)(a_1k_1) = yx \end{aligned}$$

bulunur. Böylece G grubunun değişmeli ve dolayısıyla nilpotent olduğu görülür. □

3.3.17 Örnek $\mathbf{Z}_m >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_n$ yarı-direkt çarpım grubunu düşünelim. $|\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n| = 2|\mathbf{Z}_n|$ ise, $\mathbf{Z}_m >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_n$ grubunun nilpotent olduğunu gösterelim. O halde $G = \mathbf{Z}_m >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_n$ olsun. Bu durumda 3.2.4 Tanım' dan dolayı, $\mathbf{Z}_m \lhd G$, $\mathbf{Z}_m\mathbf{Z}_n = G$ ve $\mathbf{Z}_m \cap \mathbf{Z}_n = \{1_G\}$ özellikleri sağlanır. $\mathbf{Z}_m$ ve $\mathbf{Z}_n$ devirli grup olduklarından sunuşları sırasıyla $\langle y; y^m \rangle$ ve $\langle x; x^n \rangle$ olsun. Hipotezimizden, $|\mathbf{Z}_m >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_n| = 2|\mathbf{Z}_n|$ olduğundan, $\mathbf{Z}_n \lhd G$ olduğu açıktır. 3.3.15 Ön Teorem' den, $\forall y \in \mathbf{Z}_m$ ve $\forall x \in \mathbf{Z}_n$ için $yx = xy$ dir. Yine 3.2.4 Tanım' dan, $\mathbf{Z}_m\mathbf{Z}_n = G$ olduğundan, $G = \{yx : y \in \mathbf{Z}_m$ ve $x \in \mathbf{Z}_n\}$ dır. 3.3.16 Teorem' in ispatındaki adımlar takip edilerek, $\forall a, b \in G$ için $ab = ba$ olduğu gösterilerek, G grubunun değişmeli olduğu ispatlanmış olur. Böylece $\mathbf{Z}_m >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_n$ yarı-direkt çarpımı nilpotent bir gruptur. ///

3.3.18 Teorem $\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_p$ nilpotent bir gruptur.

İspat: 3.2.6 Sonuç' dan $|\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_p| = p^2$ olduğu açıktır. Bu grubun Sylow p-alt gruplarının sayısı, $n_p = 1 + kp$ dir ve n_p sayısı 1' i bölmelidir. Görüldüğü gibi, $k = 0$ dışındaki hiçbir k tamsayısı için n_p sayısı 1' i bölmez. Böylece, $n_p = 1$ bulunur. Bu durumda $\mathbf{Z}_p \lhd \mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_p$ olduğundan, 1.3.14 Teorem' e göre $\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_p$ grubu nilpotenttir. Dolayısıyla çözülebilirdir. □

3.3.19 Örnek $\mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_3$ grubunun nilpotent olduğunu gösterelim. $\mathbf{Z}_3$ gruplarının sunuşu sırasıyla $\langle y; y^3 \rangle$ ve $\langle x; x^3 \rangle$ olsun. $\mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_3$ yarı-direkt çarpım olduğundan, (3.2) homomorfizması vardır ve 3.3.10 Teorem' deki gibi işlemleri uygularsak, $Aut(\mathbf{Z}_3) \cong \mathbf{Z}_2$ olduğundan G grubundan G grubuna giden elemanları $y \mapsto y$ ve $y \mapsto y^{-1}$ şeklinde karşılık getiren iki tane otomorfizma vardır. Eğer otomorfizma elemanları $y \mapsto y$ şeklinde karşılık getiriyorsa, grubun sunuşu $\langle y, x; y^3, x^3, [y,x] \rangle$ olur ki bu durumda grup değişmeli olduğundan nilpotenttir.

Eğer otomorfizma, elemanları $y \mapsto y^{-1}$ şeklinde karşılık getiriyorsa, o zaman grubun sunuşu, $\langle y, x; y^3, x^3, yx = xy^2 \rangle$ olarak elde edilir. Şimdi sunuşunu bildiğimiz bu grubun nilpotentliğini inceleyelim.

İlk olarak Reidemeister-Schreier yöntemiyle bu grubun komütatör alt grubunu belirleyelim.

$G = \mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_3$ alalım. O zaman $G/_{G'} = \langle y, x; y^3, x^3, yx = xy^2, [y,x] \rangle$ olur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, $y = 1$ bulunur. Şimdi y üretecinin yerine eşitini yazarsak, $G/_{G'} \cong \langle x ; x^3 \rangle \cong \mathbf{Z}_3$ bulunur. Bu durumda $\{1, x, x^2\}$ kümesi bir Schreier sistemi olur ve yan cümle temsilcileri, $\overline{x} = x$ ve $\overline{x^2} = x^2$ olarak elde edilir. Reidemeister-Schreier metodu kullanılarak G' grubunun üreteçleri, $S_{1y} = 1y(\overline{1y})^{-1} = y = a$, $S_{xy} = xy(\overline{xy})^{-1} = xyx^{-1} = b$, $S_{x^2y} = x^2y(\overline{x^2y})^{-1} = x^2yx^{-2} = c$ ve bağıntıları da,

$$\tau(y^3) = S_{1y}S_{1y}S_{1y} = a^3$$

$$\tau(yxy^{-2}x^{-1}) = S_{1y}S_{1y}S_{xy}^{-1}S_{xy}^{-1}S_{1x}^{-1} = ab^{-2}$$

$$\tau(xy^3x^{-1}) = S_{1x}S_{xy}S_{xy}S_{xy}S_{1x}^{-1} = b^3$$

$$\tau(xyxy^{-2}x^{-1}x^{-1}) = S_{1x}S_{xy}S_{xx}S_{x^2y}^{-1}S_{x^2y}^{-1}S_{xx}^{-1}S_{1x}^{-1} = bc^{-2}$$

$$\tau(x^2y^3x^{-2}) = S_{1x}S_{xx}S_{x^2y}S_{x^2y}S_{xx}^{-1}S_{1x}^{-1} = c^3$$

$$\tau(x^2yxy^{-2}x^{-1}x^{-2}) = S_{1x}S_{xx}S_{x^2y}S_{x^2y}S_{xy}^{-1}S_{xy}^{-1}S_{x^2y}^{-1}S_{xx}^{-1}S_{1x}^{-1} = cb^{-2}$$

olarak bulunur. Bu bağıntılardan, $b = c$ ve a ile b eşlenik olduklarından, $G' = \langle a; a^3 \rangle \cong \mathbf{Z}_3$ olur. Böylece $\mathbf{Z}_3$ grubu G grubunun normal alt grupları olduğundan, 1.3.14 Teorem' den $G = \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3$ yazılabilir. Bu direkt çarpım grubu değişmeli olduğundan nilpotenttir. ///

p ve q asal sayılarının birbirinden farklı olduğu durumlarda nilpotentlik durumu aşağıdaki ön teoremde verilmiştir ve bu teorem [13]' de bulunabilir.

3.3.20 Ön Teorem p ve q asal sayılar ve $p > q$ olsun. Eğer q asalı $(p$-$1)$ sayısını bölmüyorsa, o zaman pq mertebeli her grup $\mathbf{Z}_{pq}$ devirli grubuna izomorftur.

İspat: [23]' de Cauchy Teoremi' ne göre, mertebesi bir p asalı ile bölünebilen sonlu bir G grubu, p mertebeli bir eleman içerir. Ayrıca p asalı G sonlu grubunun mertebesini bölen en küçük asal ise, G grubunun p indeksli H alt grubu G grubunun normal alt grubudur [13]. O halde pq mertebeli G grubu da sırasıyla p ve q mertebeli a ve b elemanlarını içerir. $S =< a; a^p >$ devirli grubu G grubunun normal alt grubu olur. Buradan, G/S bölüm grubunda bS yan cümlesi q elemanlı olur. Bu durumda, $G/S =< bS >$ olan devirli bir gruptur. Böylece, G grubunun her elemanı $b^i a^j$ şeklinde yazılabilir ve $G =< a,b >$ olur. Bu grubun Sylow q-alt gruplarının sayısı $n_q = 1 + kq$ olur ve n_q sayısı p asalını bölmelidir. Görüldüğü gibi, $k = 0$ dışında bunu sağlayan bir k tam sayısı yoktur ve $n_q = 1$ olarak bulunur. Bu nedenle, $< b > \lhd G$ olup, buradan $< a > \cap < b > = \{1_G\}$ elde edilir. Böylece, 1.3.14 Teorem de kullanılarak,

$$G =< a > \times < b > \cong \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_q \cong \mathbf{Z}_{pq}$$

aranan sonucu çıkar. □

3.3.21 Teorem p ve q asal sayılar ve $p > q$ olsun. Eğer q asalı (p-1) sayısını bölmüyorsa, $\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_q$ nilpotent bir gruptur.

İspat: $|\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_q| = pq$ olduğundan 3.3.20 Ön Teorem' den dolayı, bu grup devirli dolayısıyla değişmelidir. Böylece $\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_q$ nilpotent bir gruptur. □

3.3.22 Örnek $\mathbf{Z}_5 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_3$ grubunun nilpotentliğini gösterelim. 5 ve 3 asal sayılar ve 5>3 olduğundan 3.3.21 Teorem için gerekli olan şartları sağlar. Bu grubun Sylow 5-alt grubunun sayısı $n_5 = 1$ ve Sylow 3-alt grubunun sayısı $n_3 = 1$ bulunur. Bu nedenle, 1.3.13 Teorem' den Sylow 3-alt grubu ve Sylow 5-alt grubu bu grubun normal alt grupları olduğundan $\mathbf{Z}_5 \times \mathbf{Z}_3$' e izomorf olarak yazılabilir. Bilindiği gibi $(3,5) = 1$ olduğundan bulunan direkt çarpım grubu da $\mathbf{Z}_{15}$ devirli grubuna izomorftur. Böylece $\mathbf{Z}_5 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_3$ grubu nilpotenttir. ///

Not: Eğer q asalı (p-1) sayısını bölüyorsa, $\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_q$ grubunun her zaman nilpotent olması gerekmez. Mesela, 3.2.1 Örnek' deki $\mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunun her zaman nilpotent olmadığı açıklanmıştır.

3.3.23 Teorem p ve q asal sayılar ve $p > q$ olsun. Eğer q asalı (p-1) sayısını bölüyorsa, *(mod p)* ye göre 1'e denk olmayan ancak, q. kuvveti 1'e denk olan bir s tamsayısı varsa $\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_q$ grubu çözülebilirdir.

İspat: [13]' de yukarıdaki şartlara sahip $\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_q$ grubunun metacyclic grup olduğu gösterilmiştir. Metacyclic grupların çözülebilirliği ise tanımından açıktır.

3.3.24 Örnek $G = \mathbf{Z}_7 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_3$ grubunu alalım. $3 \mid 6$ olduğu açıktır ve bu grup için 3.3.23 Teorem' deki s tamsayısı, 2' dir. Gerçekten, $2 \not\equiv 1 (mod 7)$ ve $2^3 \equiv 1 (mod 7)$ dir. Bu durumda [13]' den G grubunun sunuşu,

$$P = \langle y, x; y^7, x^3, xy = y^2 x \rangle$$

olur. Reidemeister-Schreier metodu ile bu grubun komütatör alt grubunu belirleyelim. Bunun için,

$$G/G' = \langle y, x; y^7, x^3, xy = y^2x, [y,x] \rangle$$

olduğu açıktır. Buradan $y = 1$ bulunarak, $G/G' \cong \mathbf{Z}_3$ elde edilir. Böylece, $\{1, x, x^2\}$ kümesi bir Schreier sistemi olur. Bu küme için yan cümle temsilcileri $\bar{x} = x$ ve $\overline{x^2} = x^2$ alınarak, G' grubunun üreteçleri,

$$S_{1x} = S_{xx} = 1,\ S_{1y} = 1y(\overline{1y})^{-1} = y = a,\ S_{xy} = xy(\overline{xy})^{-1} = xyx^{-1} = b$$

$$S_{x^2y} = x^2y(\overline{x^2y})^{-1} = x^2yx^{-2} = c$$

olur. Komütatör alt grubun bağıntıları ise,

$$\tau(y^7) = \underbrace{S_{1y} \dots S_{1y}}_{7 \text{ tane}} = a^7$$

$$\tau(x^3) = \tau(xx^3x^{-1}) = \tau(x^2x^3x^{-2}) = 1$$

$$\tau(xyx^{-1}y^{-2}) = S_{1x}\, S_{xy}\, S_{1x}^{-1}\, S_{1y}^{-1}\, S_{1y}^{-1} = ba^{-2}$$

$$\tau(xy^7x^{-1}) = S_{1x}\underbrace{S_{xy} \dots S_{xy}}_{7 \text{ tane}}S_{1x}^{-1} = b^7$$

$$\tau(xxyx^{-1}y^{-2}x^{-1}) = S_{1x}\, S_{xx}\, S_{x^2y}\, S_{xx}^{-1}\, S_{xy}^{-1}\, S_{xy}^{-1}\, S_{1x}^{-1} = cb^{-2}$$

$$\tau(x^2y^7x^{-2}) = S_{1x}S_{xx}\underbrace{S_{x^2y} \dots S_{x^2y}}_{7 \text{ tane}}S_{xx}^{-1}S_{1x}^{-1} = c^7$$

$$\tau(x^2xyx^{-1}y^{-2}x^{-2}) = S_{1x}\, S_{xx}\, S_{x^2y} S_{xy}\, S_{x^2y}^{-1}\, S_{x^2y}^{-1}\, S_{x^2y}^{-1}\, S_{xx}^{-1}\, S_{1x}^{-1} = bc^{-2}$$

bulunur. Bulunan üreteçler ve bağıntılardan, $b = c$ bulunur ve a ile b eşlenik olduklarından, komütatör alt grubun sunuşu $G' = \langle a; a^7 \rangle \cong \mathbf{Z}_7$ olur. Böylece, $\mathbf{Z}_7 \triangleleft G$ bulunarak, G grubu için, $\{1\} \triangleleft \mathbf{Z}_7 \triangleleft G$ değişmeli serisi elde edilir. Görüldüğü gibi bu serideki bölüm grupları değişmelidir. Bu nedenle G grubu çözülebilir bir gruptur. ///

3.3.25 Teorem $\mathbf{Z}_{p^2} >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_q$ ve $\mathbf{Z}_q >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_{p^2}$ grupları çözülebilirdir.

İspat: p^2q mertebeli herhangi bir grup çözülebilirdir [23]. Gerçekten 3.2.6 Sonuç' tan her iki grubun mertebesi de p^2q olur.

$\mathbf{Z}_{p^2} >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_q$ grubu için, 3.2.4 Tanım' dan $\mathbf{Z}_{p^2} \lhd \mathbf{Z}_{p^2} >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_q$ olduğu açıktır ve $\{1\} \lhd \mathbf{Z}_{p^2} \lhd \mathbf{Z}_{p^2} >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_q$ değişmeli serisi bulunur. Aynı şekilde $\mathbf{Z}_q >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_{p^2}$ grubu için $\mathbf{Z}_q \lhd \mathbf{Z}_q >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_{p^2}$ olur ve $\{1\} \lhd \mathbf{Z}_q \lhd \mathbf{Z}_q >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_{p^2}$ değişmeli serisi bulunur. Böylece her iki grup da çözülebilirdir. □

3.3.26 Örnek $G = \mathbf{Z}_9 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_5$ grubu çözülebilirdir. 3.2.6 Sonuç' tan dolayı, $|G| = 45 = 3^2 5$ olur. Bu grubun bir tek Sylow 3-alt grubu vardır ve mertebesi 9' dur. 1.3.13 Teorem' den dolayı, $\mathbf{Z}_9 \lhd G$ dir ve böylece, $\{1_G\} \lhd \mathbf{Z}_3 \lhd \mathbf{Z}_9 \lhd G$ değişmeli serisi bulunduğundan, G grubu çözülebilirdir.

$H = \mathbf{Z}_5 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_9$ grubunu düşünelim. Bu grubun Sylow 5-alt grubu da tektir ve mertebesi 5 tir. Yine 1.3.13 Teorem'den $\mathbf{Z}_5 \lhd H$ olur ve $\{1_G\} \lhd \mathbf{Z}_5 \lhd H$ değişmeli serisi elde edildiğinden, H grubu da çözülebilirdir. ///

3.3.28 Teorem $p < q$ olmak üzere, $\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_{q^n}$ grubu çözülebilirdir.

İspat: [13]' de $p < q$ olmak üzere pq^n mertebeli grupların çözülebilir olduğu verilmiştir. $\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_{q^n}$ grubunun mertebesi 3.2.6 Sonuç' tan pq^n olur ve bu nedenle çözülebilirdir. □

3.4 Yarı-direkt Çarpımların p-nilpotentliği ve Süperçözülebilirliği

Süperçözülebilirlik ve p-nilpotentlik ile ilgili kavramlar 1.5 Bölüm' de verilmişti. Bu kısımda bazı yarı-direkt çarpım gruplarının p-nilpotentliği ve süperçözülebilirliği incelenmiştir.

3.4.1 Teorem $\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_p$ grubu p-nilpotenttir ve süperçözülebilirdir.

İspat: 3.2.6 Sonuç' tan $\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_p$ grubunun mertebesi p^2 dir. Bu grubun Sylow p-sayısı $n_p = 1$ dir. Böylece 1.5.4 Teorem' den p asalı herhangi bir Sylow p-sayısını bölmediğinden, grup p-nilpotenttir.

Ayrıca, $\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_p$ grubunun Sylow p-alt gruplarının sayısı 1 olduğundan, 1.3.13 Teorem' den bu alt gruplar normal alt gruptur. Yani $\mathbf{Z}_p \lhd \mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_p$ olur. Böylece, her bölüm grubu devirli olan $\{1_G\} \lhd \mathbf{Z}_p \lhd \mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_p$ serisi elde edildiğinden, $\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_p$ grubu süpercözülebilir bir gruptur. □

3.3.19 Örnek' teki grup aynı zamanda p-nilpotent ve süperçözülebilir bir gruba örnektir.

3.3.19 Örnek (devam) $\mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_3$ grubunun p-nilpotentliğini ve süperçözülebilirliğini inceleyelim. Bu grubun mertebesi, 3.2.6 Sonuç'tan p^2 dir. Böylece, $\mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_3$ grubunun Sylow p-alt gruplarının sayısı $n_p = 1 + kp$ olur ve 1 sayısını bölmelidir. Görüldüğü gibi, $k = 0$ dışında bu durumu sağlayacak bir tam sayı yoktur. Bu durumda $n_p = 1$ bulunur. 1.5.4 Teorem' den dolayı, $\mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_3$ grubu 3-nilpotenttir.

Daha önce bu grubun nilpotentliği incelenirken, $\mathbf{Z}_3 \lhd \mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_3$ bulunmuştu. Böylece, $\{1_G\} \lhd \mathbf{Z}_3 \lhd \mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_3$ her bölüm grubu devirli olan seri bulunduğu için $\mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_3$ grubu süperçözülebilirdir.

3.4.2 Teorem p ve q asal sayılar ve $p > q$ olsun. Eğer q asalı $(p\text{-}1)$ sayısını bölmüyorsa, $\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_q$ grubu p-nilpotent, q-nilpotent ve süperçözülebilir gruptur.

İspat: Yukarıdaki şartlarda verilen grubun nilpotent olduğu 3.3.21 Teorem' de gösterilmişti. İlk önce, verilen şartlarda $\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_q$ grubunun Sylow sayılarını belirleyelim. Bu grubun Sylow p-alt gruplarının sayısı, $p > q$ olduğundan 1 olarak bulunur.

Hipotezde, q asalı (p-1) sayısını bölmediğinden $p-1=qs$ olacak şekilde bir s tamsayısı yoktur. Dolayısıyla, p asalı $qs+1$ şeklinde yazılmaz. Yani, Sylow q-alt grupların sayısı 1 olarak bulunur. 1.5.4 Teorem' den bu grup hem p-nilpotenttir hem de q-nilpotenttir.

$\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_q$ grubunun Sylow p-alt grubunun ve Sylow q-alt grubunun sayıları 1 olduğundan, 1.3.13 Teorem' den her ikisi de bu grubun normal alt grubu olur. Böylece, $\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_q$ grubu için $\{1_G\} \lhd \mathbf{Z}_p \lhd \mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_q$ ve $\{1_G\} \lhd \mathbf{Z}_q \lhd \mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_q$ şeklinde bütün bölüm grupları devirli olan iki tane seri bulunur. Bu nedenle grubumuz süperçözülebilir gruptur. □

3.3.22 Örnek aynı zamanda 3.4.2 teorem için bir örnektir.

3.3.22 Örnek (devam) $\mathbf{Z}_5 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_3$ grubunun p-nilpotentliği ve süperçözülebilirliğini inceleyelim. Daha önce bu grubun nilpotent olduğu gösterilirken, Sylow 5-alt grubunun sayısı $n_5=1$ ve Sylow 3-alt grubunun sayısı ise $n_3=1$ olarak bulunmuştu. Böylece, 1.5.4 Teorem' den dolayı, $\mathbf{Z}_5 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_3$ grubu hem 3-nilpotent hem de 5-nilpotenttir.

Daha önce de belirtildiği gibi, Sylow 3-alt grubu ve Sylow 5-alt grubu $\mathbf{Z}_5 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_3$ grubunun normal alt grupları olduğundan bu grup için,

$$\{1_G\} \lhd \mathbf{Z}_5 \lhd \mathbf{Z}_5 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_3 \quad \text{ve} \quad \{1_G\} \lhd \mathbf{Z}_3 \lhd \mathbf{Z}_5 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_3$$

şeklinde iki tane, her bölüm grubu devirli olan seri bulunur. Böylece $\mathbf{Z}_5 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_3$ grubu süperçözülebilirdir. ///

3.4.3 Sonuç Eğer q asalı (p-1) sayısını bölüyorsa, $\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_q$ grubunun hem p-nilpotent hem de q-nilpotent olması gerekmez. Mesela, 3.2.1 Örnek' deki $\mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunu tekrar ele alalım. Bu grubun mertebesi 3.2.6 Sonuç' tan dolayı 6' dır. $\mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubunun Sylow 2-alt grubunun sayısı $n_2=3$ ve Sylow 3-alt grubunun sayısı $n_3=1$ olarak bulunur. Böylece, 1.5.4 Teorem' den grup 2-

nilpotenttir. Fakat, 3 asalı n_2' yi böldüğü için $\mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubu 3-nilpotent değildir.

3.4.4 Sonuç $\mathbf{Z}_p >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_q$ grubunun herhangi bir asal için p-nilpotent olmaması süperçözülebilir olmadığı anlamına gelmez. Yukarıdaki sonuçta $\mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubu 3-nilpotent değildir. Fakat, $n_3 = 1$ olduğundan $\mathbf{Z}_3 \lhd \mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ olur ve bu grup için, $\{1_G\} \lhd \mathbf{Z}_3 \lhd \mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ şeklinde bölüm grupları devirli olan seri bulunur. Bu nedenle $\mathbf{Z}_3 >\!\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_2$ grubu süperçözülebilirdir.

4. STANDART WREATH ÇARPIMLARIN NİLPOTENTLİĞİ

4.1 Giriş

Bu bölümde split genişlemesinin bir sonucu olan standart wreath çarpım genel itibariyle incelenmiştir. Yine bu bölümdeki amacımız incelenen bu standart wreath çarpımı kullanarak, bu tezin genel amacı olan nilpotentlik, p-nilpotentlik ve süperçözülebilirlik cebirsel objelerine ulaşmaktır. Bunlarla ilgili olarak 4.4.1 Ön Teorem, 4.4.2 Teorem, 4.5.2 Teorem ve 4.5.4 Sonuç' ları özgün olup, literatürde rastlanmamıştır.

4.2 Standart Wreath Çarpımlar

4.2.1 Tanım Her bir $g \in H$ ve her bir $x \in X$' e karşılık, bir tek gx elemanı karşılık gelecek şekildeki boştan farklı bir X kümesini alalım. Burada H, X' in simetrik grubunun bir alt grubudur. Eğer her bir $x \in X$ ve her g_1, $g_2 \in H$ için,

$$g_1(g_2(x)) = (g_1 g_2)(x) \quad \text{ve} \quad 1.x = x$$

şartları sağlanıyorsa bu durumda H, X üzerinde **soldan hareket eder** denir.

4.2.2 Ön Teorem H grubu X kümesi üzerinde soldan hareket etsin. O zaman alınacak her bir $g \in H$ elemanına,

$$\varphi_g : X \to X\,, \quad \varphi_g : g \mapsto gx$$

dönüşümü karşılık gelir ve bu X' in bir permütasyonudur. Ayrıca,

$$\varphi : H \to S_X\,, \quad g \mapsto \varphi_g$$

şeklinde tanımlı dönüşüm bir homomorfizmadır.

İspat: Bunun için $g\in H$ alalım. 4.2.1 Tanım' dan $\varphi_g : X \to X$ bir dönüşümdür. Her bir g_1, $g_2 \in H$ ve $x\in X$ için,

$$\varphi_{g_1g_2}(x) = (g_1g_2)(x) = g_1(g_2(x)) = g_1(\varphi_{g_2}(x)) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x))$$

olduğundan,

$$\varphi_{g_1g_2} = \varphi_{g_1}\varphi_{g_2} \tag{4.1}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $\varphi_1(x) = 1.x = x$ olduğundan,

$$\varphi_1 = 1_H \tag{4.2}$$

elde edilir. (4.1) ve (4.2) kullanılarak,

$$\varphi_g\varphi_{g^{-1}}(x) = \varphi_{gg^{-1}}(x) = \varphi_1(x) \quad \text{ve} \quad \varphi_{g^{-1}}\varphi_g(x) = \varphi_{g^{-1}g}(x) = \varphi_1(x)$$

olduğundan $\varphi_g\varphi_{g^{-1}} = \varphi_{g^{-1}}\varphi_g = \varphi_1$ olur ki bu, φ_g' nin tersinir dönüşüm olması demektir. Ayrıca (4.1), φ' nin bir homomorfizma olması demektir. □

Şimdi bu bölümdeki işlemlerimizin temelini oluşturan *standart wreath çarpımı* oluşturalım. Bunun için B ve A sonlu grubunu alalım. Ayrıca H grubu da B grubunun $|A|$ tane direkt çarpımı olsun. Burada H ya koordinatları B grubunda A ile indekslenen a_x' ler olan (a_x) vektörlerinden oluşur ya da B^A,

$$(f_1f_2)(x) = f_1(x)f_2(x), \quad (x \in A)$$

şeklinde tanımlı bütün $f : A \to B$ fonksiyonlardır. Her bir $y \in A$ ve $f \in B^A$ için $f^y \in B^A$,

$$f^y(x) = f(xy), \quad (x \in A)$$

olarak tanımlanır. Eğer f, x inci koordinatı $a_x = f(x)$ olan bir vektör olarak düşünülürse, o zaman f^y fonksiyonu bu koordinatların y ile indislenip yer değiştirilerek, f fonksiyonundan elde edilir.

Mesela, $A=\{1,x,y,xy\}$ ve $f=(a_1,a_x,a_y,a_{xy})\in B\times B\times B\times B$ ise,

$$f^{y}(1)=f(1.y)=f(y)=a_y$$

$$f^{y}(x)=f(x.y)=a_{xy}$$

$$f^{y}(y)=f(y.y)=a_1$$

$$f^{y}(xy)=f(x.y.y)=a_x$$

olduğundan, $f^{y}=(a_y,a_{xy},a_1,a_x)$ olarak bulunur.

Sonuç olarak,

$$0:A\rightarrow Aut(H),\quad 0_y(f)=f^{y} \tag{4.3}$$

tanımlanır.

4.2.3 Tanım A sonlu olmak üzere B ve A gruplarını alalım. Burada 0, (4.3) homomorfizması olmak üzere,

$$H>\!\!\lhd_0 A=B^{|A|}>\!\!\lhd_0 A$$

yarı-direkt çarpımına, B ile A gruplarının **standart wreath çarpımı** denir ve $B\int A$ ile gösterilir.

4.2.4 Teorem $B\int A$ çarpımı bir gruptur ve

$$|B\int A|=|B|^{|A|}|A| \tag{4.4}$$

şeklindedir.

İspat: [23]' de açıklanmıştır.

Standart wreath çarpımlar, 4.2.3 Tanım' dan bir yarı-direkt çarpım ve her yarı-direkt çarpımında 3.2.4 Tanım' dan bir genişleme olduğu açıktır. Bu nedenle $B\int A$ çarpımı B ile A gruplarının her genişlemesinin bir izomorfik kopyasını içerir.

4.3 Standart Wreath Çarpımın Sunuşu

$G = B \int A$ grubunun sunuşunu bulmak için aşağıdaki yöntem uygulanabilir:

Öncelikle her bir $a \in A$ için B grubunun P_B sunuşunun bir $\langle y^{(a)}; s^{(a)} \rangle$ kopyasını alalım ve A elemanlarının $a_1 = 1$ olmak üzere $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ sıralamasını oluşturalım. Daha sonra, $\{a_x : x \in \boldsymbol{x}\}$ kümesi A grubu için $P_A = \langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{r} \rangle$ sunuşuna karşılık gelen bir üreteç kümesi ve $\{b_y : y \in \boldsymbol{y}\}$ kümesi de $P_B = \langle \boldsymbol{y}; \boldsymbol{s} \rangle$ sunuşuna karşılık gelen bir üreteç kümesi olsun. Bu durumda 1.7.5 Teorem' in bir uygulaması olan aşağıdaki ön teorem, $G = B \int A$ grubunun sunuşunu verir. Bu teoremin ilk ispatı [10]' da bulunabilir.

4.3.1 Ön Teorem $G = B \int A$ grubunun sunuşu,

$$P_0 = \langle y^{(a)}\ (a \in A), x;\ s^{(a)}(a \in A),\ \boldsymbol{r},\ y^{(a)} z^{(a')} = z^{(a')} y^{(a)}\ \ (a, a' \in A,\ a < a'$$
$$y, z \in \boldsymbol{y}),\ x^{-1} y^{(a)} x = y^{(aa_x)}\ \ (a \in A,\ y \in \boldsymbol{y},\ x \in \boldsymbol{x}) \rangle$$

ile verilir.

İspat: Wreath çarpımın tanımındaki H grubu, $|A|$ tane B grubunun direkt çarpımı olduğundan bu grup,

$$P_H = \langle y^{(a)}\ (a \in A);\ s^{(a)}(a \in A),\ [y^{(a)}, z^{(a')}]\ \ (a, a' \in A,\ a < a', y, z \in \boldsymbol{y})\ \rangle$$

olarak yazılabilir. Yine aynı sebepten $B \int A$ grubu, $H >\!\!\lhd_\theta A$ yarı-direkt çarpım genişlemesidir. Bu nedenle $H >\!\!\lhd_\theta A$ grubu,

$$P' = \langle y^{(a)}\ (a \in A), x;\ s^{(a)}(a \in A),\ \boldsymbol{r},\ [y^{(a)}, z^{(a')}]\ \ (a, a' \in A,\ a < a', y, z \in \boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{t} \rangle$$

ile verilir. Burada $\boldsymbol{t}$, $\{y^{(a)} x y^{(aa_x)^{-1}} x^{-1} : y \in \boldsymbol{y},\ x \in \boldsymbol{x}\}$ kümesi ile verilen bağıntılardır. Bu kümedeki herhangi bir $a \in A$ için $y^{(a)}$, H grubunun bir elemanını gösterir. Bu elemanda, a durumu dışındaki bütün durumlar 1' dir ve a durumundaki değeri b_y' dir ($b_y \in B$). Bu durumda P' ve P_0 sunuşları aynıdır. □

4.3.2 Örnek D_4 dihedral grubunun $G = \mathbf{Z}_2 \int \mathbf{Z}_2$ grubuna izomorf olduğunu gösterelim. Bunun için, $A = \mathbf{Z}_2$ ve $B = \mathbf{Z}_2$ olarak alalım ve sunuşları da sırasıyla $\langle x; x^2 \rangle$ ve $\langle y; y^2 \rangle$ olsun. Bu durumda, $H = \mathbf{Z}_2^{|\mathbf{Z}_2|} = \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ grubunun sunuşu [15] ile $\langle y^{(0)}, y^{(1)}; y^{(0)^2}, y^{(1)^2}, [y^{(0)}, y^{(1)}] \rangle$ olur. Böylece (4.3) homomorfizması,

$$\theta : A \to Aut(H) = Aut\,(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2), \quad x \mapsto \theta_x : (b_1, b_2) \mapsto (b_2, b_1)$$

olarak tanımlanır. 3.2.9 Ön Teorem' deki t bağıntıları,

$$x^{-1} y^{(0)} x = y^{(1)} \quad \text{ve} \quad x^{-1} y^{(1)} x = y^{(0)}$$

olarak bulunur. Böylece G grubunun sunuşu,

$$P_1 = \left\langle y^{(0)}, y^{(1)}, x; x^2, y^{(0)^2}, y^{(1)^2}, [y^{(0)}, y^{(1)}], x^{-1} y^{(0)} x = y^{(1)}, x^{-1} y^{(1)} x = y^{(0)} \right\rangle$$

olarak bulunur. Bu sunuşa Tietze dönüşümleri uygulanırsa P_1 sunuşu,

$$P_2 = \left\langle y^{(0)}, x; x^2, y^{(0)^2}, (x^{-1} y^{(0)} x)^2, [y^{(0)}, x^{-1} y^{(0)} x] \right\rangle$$

şeklinde olur. Burada $(x^{-1} y^{(0)} x)^2 \sim 1$ olduğundan, bu bağıntı silinir. Üreteçler ve bağıntılar artık sadece $y^{(0)}$' a bağlı olduğundan, $y^{(0)} = y$ alalım. Buradan da P_2 sunuşu,

$$P_3 = \left\langle y, x; x^2, y^2, [y, x^{-1} y x] \right\rangle$$

şeklini alır. Böylece $x^2 \sim 1$ ve $y^2 \sim 1$ olması kullanılarak,

$$[y, x^{-1} y x] = 1 \sim y x^{-1} y x y^{-1} x^{-1} y^{-1} x = 1 \sim yxyxyxyx = 1 \sim (yx)^4 = 1$$

elde edilir. Buradan da G grubunun sunuşu,

$$P_4 = \left\langle y, x; x^2, y^2, (yx)^4 \right\rangle$$

olarak bulunur ve bu sunuş [15] ile D_4 dihedral grubuna izomorftur. ///

4.4 Standart Wreath Çarpımın Nilpotentliği

Standart wreath çarpımların nilpotentliğini, p-nilpotentliğini ve süperçözülebilirliğini inceleyebilmek için öncelikle, herhangi iki devirli grubun wreath çarpımının komütatör alt grubunu veren aşağıdaki teoremi incelememiz gerekmektedir.

4.4.1 Ön Teorem B ve A sırasıyla m ve n mertebeli devirli gruplar olmak üzere,

$$(B \int A)' = \underbrace{\mathbf{Z}_m \times \ldots \times \mathbf{Z}_m}_{(n-1)\ \text{tane}}$$

şeklindedir.

İspat: $B = \mathbf{Z}_m$, $A = \mathbf{Z}_n$ ve $\langle y; y^m \rangle$ ve $\langle x; x^n \rangle$ sunuşları sırasıyla B ile A gruplarının sunuşları olsun. Bu durumda 4.2.3 Tanım' dan,

$$B \int A = \mathbf{Z}_m \int \mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}_m^{|\mathbf{Z}_n|} \rtimes_0 \mathbf{Z}_n = \underbrace{\mathbf{Z}_m \times \ldots \times \mathbf{Z}_m}_{n\ \text{tane}} \rtimes_0 \mathbf{Z}_n = H \rtimes_0 \mathbf{Z}_n$$

olur. Burada H grubunun sunuşu [15] ile,

$$\left\langle y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}; y^{(0)^m}, y^{(1)^m}, \ldots, y^{(n-1)^m}, [y^{(i)}, y^{(j)}] (i \neq j \ \text{ve}\ 0 \leq i, j \leq (n-1) \right\rangle$$

şeklindedir. Burada B ile A gruplarının wreath çarpımı G ile gösterilirse, G grubunun $\langle y, x; s, r, t \rangle$ şeklindeki sunuşunda bulunan t bağıntıları bulunmalıdır. G grubu aslında bir yarı-direkt çarpım olduğundan,

$$\theta : \mathbf{Z}_n \rightarrow Aut(H), \quad x \mapsto \theta_x : (b_1, b_2, \ldots, b_n) \mapsto (b_n, b_1, \ldots, b_{n-1})$$

homomorfizması vardır. Buradan G grubunun sunuşu için gerekli olan t bağıntıları,

$$x^{-1}y^{(0)}x = y^{(1)}$$

$$x^{-1}y^{(1)}x = y^{(2)}$$

$$\ldots$$

$$x^{-1}y^{(n-1)}x = y^{(0)}$$

olarak bulunur. Böylece bütün $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}$ elemanları $y^{(0)}$ elemanına bağlı olarak bulunur. Burada $y^{(0)} = y$ olarak alınırsa G grubunun sunuşu 4.3.1 Ön Teorem yardımıyla,

$$\begin{aligned}\langle y, x;\ & y^m, x^n,\ (x^{-1}yx)^m,\ (x^{-2}yx^2)^m, \ldots,\ (x^{-(n-1)}yx^{n-1})^m,\ [y, x^{-1}yx],\ [y, x^{-2}yx^2], \ldots, \\ & [y, x^{-(n-1)}yx^{n-1}],\ [x^{-1}yx, x^{-2}yx^2], \ldots,\ [x^{-1}yx, x^{-(n-1)}yx^{n-1}], \ldots, \\ & [x^{-(n-2)}yx^{n-2}, x^{-(n-1)}yx^{n-1}]\ \rangle\end{aligned} \tag{4.5}$$

olarak bulunur. Bu sunuşta,

$$(x^{-1}yx)^m \sim 1\ ,\ (x^{-2}yx^2)^m \sim 1\ , \ldots,\ (x^{-(n-1)}yx^{n-1})^m \sim 1$$

ve ayrıca,

$$\begin{aligned}& [x^{-1}yx, x^{-2}yx^2] \sim 1\ , \ldots,\ [x^{-1}yx, x^{-(n-1)}yx^{n-1}] \sim 1,\ [x^{-2}yx^2, x^{-3}yx^3] \sim 1, \ldots, \\ & [x^{-2}yx^2, x^{-(n-1)}yx^{n-1}] \sim 1, \ldots,\ [x^{-(n-2)}yx^{n-2}, x^{-(n-1)}yx^{n-1}] \sim 1\end{aligned}$$

olduğundan, bu bağıntılar (4.5)' ten silinir ve G grubunun sunuşu,

$$\langle y, x; y^m, x^n, [y, x^{-1}yx], [y, x^{-2}yx^2], \ldots, [y, x^{-(n-1)}yx^{n-1}]\ \rangle \tag{4.6}$$

olarak bulunur. (4.6)' daki bağıntılarda gerekli düzenlemeler yapılırsa sunuş,

$$\langle y, x; y^m, x^n,\ yx^{-1}yx = x^{-1}yxy,\ yx^{-2}yx^2 = x^{-2}yx^2y, \ldots,\ yx^{-(n-1)}yx^{n-1} = x^{-(n-1)}yx^{n-1}y\ \rangle \tag{4.7}$$

şeklini alır. Böylece, $\mathbf{Z}_m$ ve $\mathbf{Z}_n$ gruplarının wreath çarpımı olan G grubunun sunuşu elde edilmiş olur.

Şimdi (4.7) sunuşuna sahip G grubunun komütatör alt grubunun sunuşunu belirleyelim. Bunun için, 1.4 Bölüm' de sözü edilen Reidemeister-Schreier yöntemini kullanacağız. İlk önce G/G' bölüm grubunun sunuşu için (4.7) sunuşuna üreteçlerin komütatörünü ekleyelim. Böylece bölüm grubunun sunuşu,

$$\langle y,x; y^m, x^n,\ yx^{-1}yx = x^{-1}yxy,\ yx^{-2}yx^2 = x^{-2}yx^2y,\ldots,$$
$$yx^{-(n-1)}yx^{n-1} = x^{-(n-1)}yx^{n-1}y,\ [y,x]\rangle$$

olur. Bu sunuşta, eklenen komütatörden dolayı $yx = xy$ olduğundan, y^m ve x^n dışındaki diğer bağıntılar 1' e denk olduğundan silinir ve grubun sunuşu,

$$\langle y,x; y^m, x^n,\ [y,x]\rangle \tag{4.8}$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi (4.8) sunuşu $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ grubuna izomorftur.

Şimdi G ile bölüm grubu $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ grubuna izomorf olan G' komütatör alt

grubunu bulalım. Bunun için 1.4.11 Tanım' da verilen Schreier sistemini bulalım. Görüldüğü gibi,

$$\{1, y, y^2,\ldots, y^{m-1}, x, x^2,\ldots, x^{n-1}, yx, yx^2,\ldots, yx^{n-1}, y^2x,\ldots, y^2x^{n-1},\ldots, y^{m-1}x,\ldots, y^{m-1}x^{n-1}\}$$

kümesi, G' için bir Schreier sistemi olur. Buradan önce G' grubunun üreteçlerini sonra da bağıntılarını belirleyelim. Bunun için yan cümle temsilcileri,

$$\overline{y} = y,\ \overline{y^2} = y^2\ ,\ldots,\ \overline{y^{m-1}} = y^{m-1}$$
$$\overline{x} = x,\ \overline{x^2} = x^2\ ,\ldots,\ \overline{x^{n-1}} = x^{n-1}$$
$$\overline{yx} = yx,\ \overline{y^2x} = y^2x\ ,\ldots,\ \overline{y^{m-1}x} = y^{m-1}x$$
$$\overline{yx^2} = yx^2,\ \overline{y^2x^2} = y^2x^2\ ,\ldots,\ \overline{y^{m-1}x^2} = y^{m-1}x^2$$
$$\ldots$$
$$\overline{yx^{n-1}} = yx^{n-1},\ \overline{y^2x^{n-1}} = y^2x^{n-1}\ ,\ldots,\ \overline{y^{m-1}x^{n-1}} = y^{m-1}x^{n-1}$$

olsun. Bu durumda,

$$S_{1y} = 1y(\overline{1y})^{-1} = yy^{-1} = 1 \quad , \quad S_{1x} = 1x(\overline{1x})^{-1} = xx^{-1} = 1$$

$$S_{yy} = yy(\overline{yy})^{-1} = y^2(y^2)^{-1} = 1 \quad , \quad S_{yx} = yx(\overline{yx})^{-1} = yx(yx)^{-1} = 1$$

...

$$S_{y^{m-1}y} = y^{m-1}y(\overline{y^{m-1}y})^{-1} = y^m(y^m)^{-1} = 1 \quad , \quad S_{y^{m-1}x} = y^{m-1}x(\overline{y^{m-1}x})^{-1} = 1$$

$$S_{xy} = xy(\overline{xy})^{-1} = xy(yx)^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} = \lambda_{11} \quad , S_{xx} = xx(\overline{xx})^{-1} = x^2(x^2)^{-1} = 1$$

$$S_{x^2y} = x^2y(\overline{x^2y})^{-1} = x^2y(yx^2)^{-1} = xyx^{-2}y^{-1} = \lambda_{12} \quad , \quad S_{x^2x} = 1$$

$$S_{x^3y} = x^3y(\overline{x^3y})^{-1} = x^3y(yx^3)^{-1} = xyx^{-3}y^{-1} = \lambda_{13} \quad , \quad S_{x^3x} = 1$$

...

$$S_{x^{n-1}y} = x^{n-1}y(\overline{x^{n-1}y})^{-1} = x^{n-1}y(yx^{n-1})^{-1} = xyx^{-(n-1)}y^{-1} = \lambda_{1(n-1)} \quad , \quad S_{x^{n-1}x} = 1$$

$$S_{yxy} = yxy(\overline{yxy})^{-1} = yxy(\overline{y^2x})^{-1} = yxyx^{-1}y^{-2} = \lambda_{21} \quad , \quad S_{yxx} = 1$$

$$S_{yx^2y} = yx^2y(\overline{yx^2y})^{-1} = yx^2y(\overline{y^2x^2})^{-1} = yx^2yx^{-2}y^{-2} = \lambda_{22} \quad , \quad S_{yx^2x} = 1$$

...

$$S_{yx^{n-1}y} = yx^{n-1}y(\overline{yx^{n-1}y})^{-1} = yx^{n-1}y(\overline{y^2x^{n-1}})^{-1} = yx^{n-1}yx^{-(n-1)}y^{-2} = \lambda_{2(n-1)} \quad , \quad S_{yx^{n-1}x} = 1$$

$$S_{y^2xy} = y^2xy(\overline{y^2xy})^{-1} = y^2xy(\overline{y^3x})^{-1} = y^2xyx^{-1}y^{-3} = \lambda_{31} \quad , \quad S_{y^2xx} = 1$$

$$S_{y^2x^2y} = y^2x^2y(\overline{y^2x^2y})^{-1} = y^2x^2y(\overline{y^3x^2})^{-1} = y^2x^2yx^{-2}y^{-3} = \lambda_{32} \quad , \quad S_{y^2x^2x} = 1$$

...

$$S_{y^2x^{n-1}y} = y^2x^{n-1}y(\overline{y^2x^{n-1}y})^{-1} = y^2x^{n-1}y(\overline{y^3x^{n-1}})^{-1} = y^2x^{n-1}yx^{-(n-1)}y^{-3} = \lambda_{3(n-1)} \quad ,$$

$$S_{y^2x^{n-1}x} = 1$$

...

$$S_{y^{m-1}xy} = y^{m-1}xy(\overline{y^{m-1}xy})^{-1} = y^{m-1}xy(\overline{y^mx})^{-1} = yxyx^{-1} = \lambda_{m1} \quad , \quad S_{y^{m-1}xx} = 1$$

$$S_{y^{m-1}x^2y} = y^{m-1}x^2y(\overline{y^{m-1}x^2y})^{-1} = y^{m-1}x^2y(\overline{y^mx^2})^{-1} = y^{m-1}x^2yx^{-2} = \lambda_{m2} \quad , \quad S_{y^{m-1}x^2x} = 1$$

...

$$S_{y^{m-1}x^{n-1}y} = y^{m-1}x^{n-1}y(\overline{y^{m-1}x^{n-1}y})^{-1} = y^{m-1}x^{n-1}y(\overline{y^mx^{n-1}})^{-1} = y^{m-1}x^{n-1}yx^{-(n-1)} = \lambda_{m(n-1)}$$

$$S_{y^{m-1}x^{n-1}x} = 1$$

üreteçleri elde edilir. Bu üreteçlerin yardımıyla $G^{'}$ grubunun bağıntıları ise,

$$\Gamma(xy^m x^{-1}) = S_{1x} S_{xy} S_{yxy} S_{y^2xy} \ldots S_{y^{m-1}xy} S_{1x}^{-1} = \lambda_{11}\lambda_{21}\ldots\lambda_{m1}$$

$$\Gamma(x^2 y^m x^{-2}) = S_{1x} S_{xx} S_{x^2y} S_{yx^2y} \ldots S_{y^{m-1}x^2y} S_{xx}^{-1} S_{1x}^{-1} = \lambda_{12}\lambda_{22}\ldots\lambda_{m2}$$

...

$$\Gamma(x^{n-1} y^m x^{-(n-1)}) = \lambda_{1(n-1)}\lambda_{2(n-1)}\ldots\lambda_{m(n-1)}$$

$$\Gamma(yxy^m x^{-1} y^{-1}) = S_{1y} S_{yx} S_{yxy} S_{y^2xy} \ldots S_{xy} S_{yx}^{-1} S_{1y}^{-1} = \lambda_{21}\lambda_{31}\ldots\lambda_{m1}\lambda_{11}$$

$$\Gamma(yx^2 y^m x^{-2} y^{-1}) = S_{1y} S_{yx} S_{yxx} S_{yx^2y} S_{y^2x^2y} \ldots S_{x^2y} S_{yxx}^{-1} S_{yx}^{-1} S_{1y}^{-1} = \lambda_{22}\lambda_{32}\ldots\lambda_{m2}\lambda_{12}$$

...

$$\Gamma(yx^{n-1} y^m x^{-(n-1)} y^{-1}) = \lambda_{2(n-1)}\lambda_{3(n-1)}\ldots\lambda_{m(n-1)}\lambda_{1(n-1)}$$

...

$$\Gamma(y^2 xy^m x^{-2} y^{-1}) = S_{1y} S_{yy} S_{y^2x} S_{y^2xy} \ldots S_{yxy} S_{y^2x}^{-1} S_{yy}^{-1} S_{1y}^{-1} = \lambda_{31}\lambda_{41}\ldots\lambda_{m1}\lambda_{11}\lambda_{21}$$

$$\Gamma(y^2 x^2 y^m x^{-2} y^{-2}) = S_{1y} S_{yy} S_{y^2x} S_{y^2xx} S_{y^2x^2y} \ldots S_{yx^2y} S_{y^2xx}^{-1} S_{y^2x}^{-1} S_{yy}^{-1} S_{1y}^{-1}$$

$$= \lambda_{32}\lambda_{42}\ldots\lambda_{12}\lambda_{22}$$

...

$$\Gamma(y^2 x^{n-1} y^m x^{-(n-1)} y^{-2}) = \lambda_{3(n-1)}\lambda_{4(n-1)}\ldots\lambda_{m(n-1)}\lambda_{1(n-1)}\lambda_{2(n-1)}$$

...

$$\Gamma(y^{m-1} xy^m x^{-1} y^{-(m-1)}) = \lambda_{m1}\lambda_{11}\ldots\lambda_{(m-1)1}$$

$$\Gamma(y^{m-1} x^2 y^m x^{-2} y^{-(m-1)}) = \lambda_{m2}\lambda_{12}\ldots\lambda_{(m-1)2}$$

...

$$\Gamma(y^{m-1} x^{n-1} y^m x^{-(n-1)} y^{-(m-1)}) = \lambda_{m(n-1)}\lambda_{1(n-1)}\ldots\lambda_{(m-1)(n-1)}$$

$$\Gamma(yx^{-1} yxy^{-1} x^{-1} y^{-1} x) = S_{1y} S_{yx^{n-1}x}^{-1} S_{yx^{n-1}y} S_{y^2x^{n-1}x} S_{yy}^{-1} S_{yx^{n-1}x}^{-1} S_{x^{n-1}y}^{-1} S_{x^{n-1}x}$$

$$= \lambda_{2(n-1)}\lambda_{1(n-1)}^{-1}$$

$$\Gamma(yx^{-2} yx^2 y^{-1} x^{-2} y^{-1} x^2) = \lambda_{2(n-2)}\lambda_{1(n-2)}^{-1}$$

$$\dots$$

$$\Gamma(yx^{-(n-1)}yx^{n-1}y^{-1}x^{-(n-1)}y^{-1}x^{n-1}) = \lambda_{21}\lambda_{11}^{-1}$$

$$\Gamma(yyx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-1}) = S_{1,y}S_{y,y}S^{-1}_{y^2x^{n-1},x}S_{y^2x^{n-1},y}S_{y^3x^{n-1},x}S^{-1}_{y^2,y}S^{-1}_{y^2x^{n-1},x}S^{-1}_{yx^{n-1},y}S^{-1}_{yx^{n-1},x}S^{-1}_{1,y}$$

$$= \lambda_{3(n-1)}\lambda_{2(n-1)}^{-1}$$

$$\Gamma(y^2yx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-2}) = \lambda_{4(n-1)}\lambda_{3(n-1)}^{-1}$$

$$\dots$$

$$\Gamma(y^{m-1}yx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-(m-1)}) = \lambda_{1(n-1)}\lambda_{m(n-1)}^{-1}$$

$$\Gamma(yyx^{-2}yx^2y^{-1}x^{-2}y^{-1}x^2y^{-1}) = \lambda_{3(n-2)}\lambda_{2(n-2)}^{-1}$$

$$\Gamma(y^2yx^{-2}yx^2y^{-1}x^{-2}y^{-1}x^2y^{-2}) = \lambda_{4(n-2)}\lambda_{3(n-2)}^{-1}$$

$$\dots$$

$$\Gamma(y^{m-1}yx^{-2}yx^2y^{-1}x^{-2}y^{-1}x^2y^{-(m-1)}) = \lambda_{1(n-2)}\lambda_{m(n-2)}^{-1}$$

$$\dots$$

$$\Gamma(yyx^{-(n-1)}yx^{n-1}y^{-1}x^{-(n-1)}y^{-1}x^{n-1}y^{-1}) = \lambda_{31}\lambda_{21}^{-1}$$

$$\Gamma(y^2yx^{-(n-1)}yx^{n-1}y^{-1}x^{-(n-1)}y^{-1}x^{n-1}y^{-2}) = \lambda_{41}\lambda_{31}^{-1}$$

$$\dots$$

$$\Gamma(y^{m-1}yx^{-(n-1)}yx^{n-1}y^{-1}x^{-(n-1)}y^{-1}x^{n-1}y^{-(m-1)}) = \lambda_{11}\lambda_{m1}^{-1}$$

$$\Gamma(xyx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xx^{-1}) = \lambda_{11}\lambda_{21}^{-1}$$

$$\Gamma(x^2yx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xx^{-2}) = \lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22}^{-1}\lambda_{11}^{-1}$$

$$\Gamma(x^3yx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xx^{-3}) = \lambda_{13}\lambda_{22}\lambda_{23}^{-1}\lambda_{12}^{-1}$$

$$\dots$$

$$\Gamma(x^{n-1}yx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xx^{-(n-1)}) = \lambda_{1(n-1)}\lambda_{2(n-2)}\lambda_{2(n-1)}^{-1}\lambda_{1(n-2)}^{-1}.$$

$$\Gamma(xyx^{-2}yx^{2}y^{-1}x^{-2}y^{-1}x^{2}x^{-1}) = \lambda_{11}\lambda_{2(n-1)}\lambda_{21}^{-1}\lambda_{1(n-2)}^{-1}$$

$$\Gamma(x^{2}yx^{-2}yx^{2}y^{-1}x^{-2}y^{-1}x^{2}x^{-2}) = \lambda_{12}\lambda_{22}^{-1}$$

...

$$\Gamma(x^{n-1}yx^{-2}yx^{2}y^{-1}x^{-2}y^{-1}x^{2}x^{-(n-1)}) = \lambda_{1(n-1)}\lambda_{2(n-3)}\lambda_{2(n-2)}^{-1}\lambda_{1(n-3)}^{-1}$$

...

$$\Gamma(xyx^{-(n-1)}yx^{n-1}y^{-1}x^{-(n-1)}y^{-1}x^{n-1}x^{-1}) = \lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{21}^{-1}\lambda_{12}^{-1}$$

$$\Gamma(x^{2}yx^{-(n-1)}yx^{n-1}y^{-1}x^{-(n-1)}y^{-1}x^{n-1}x^{-2}) = \lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{22}^{-1}\lambda_{13}^{-1}$$

...

$$\Gamma(x^{n-2}yx^{-(n-1)}yx^{n-1}y^{-1}x^{-(n-1)}y^{-1}x^{n-1}x^{-(n-2)}) = \lambda_{1(n-2)}\lambda_{2(n-1)}\lambda_{2(n-2)}^{-1}\lambda_{1(n-1)}^{-1}$$

$$\Gamma(x^{n-1}yx^{-(n-1)}yx^{n-1}y^{-1}x^{-(n-1)}y^{-1}x^{n-1}x^{-(n-1)}) = \lambda_{1(n-1)}\lambda_{2(n-1)}^{-1}$$

$$\Gamma(yxyx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xx^{-1}y^{-1}) = \lambda_{21}\lambda_{31}^{-1}$$

$$\Gamma(yx^{2}yx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xx^{-2}y^{-1}) = \lambda_{22}\lambda_{31}\lambda_{32}^{-1}\lambda_{21}^{-1}$$

...

$$\Gamma(yx^{n-1}yx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xx^{-(n-1)}y^{-1}) = \lambda_{2(n-1)}\lambda_{3(n-2)}\lambda_{3(n-1)}^{-1}\lambda_{2(n-2)}^{-1}$$

$$\Gamma(yxyx^{-2}yx^{2}y^{-1}x^{-2}y^{-1}x^{2}x^{-1}y^{-1}) = \lambda_{21}\lambda_{3(n-1)}\lambda_{31}^{-1}\lambda_{2(n-1)}^{-1}$$

$$\Gamma(yx^{2}yx^{-2}yx^{2}y^{-1}x^{-2}y^{-1}x^{2}x^{-2}y^{-1}) = \lambda_{22}\lambda_{32}^{-1}$$

$$\Gamma(yx^{3}yx^{-2}yx^{2}y^{-1}x^{-2}y^{-1}x^{2}x^{-3}y^{-1}) = \lambda_{23}\lambda_{31}\lambda_{33}^{-1}\lambda_{21}^{-1}$$

...

$$\Gamma(yx^{n-1}yx^{-2}yx^{2}y^{-1}x^{-2}y^{-1}x^{2}x^{-(n-1)}y^{-1}) = \lambda_{2(n-1)}\lambda_{3(n-2)}\lambda_{3(n-1)}^{-1}\lambda_{2(n-2)}^{-1}$$

...

$$\Gamma(yxyx^{-(n-1)}yx^{n-1}y^{-1}x^{-(n-1)}y^{-1}x^{n-1}x^{-1}y^{-1}) = \lambda_{21}\lambda_{32}\lambda_{31}^{-1}\lambda_{22}^{-1}$$

$$\Gamma(yx^{2}yx^{-(n-1)}yx^{n-1}y^{-1}x^{-(n-1)}y^{-1}x^{n-1}x^{-2}y^{-1}) = \lambda_{22}\lambda_{33}\lambda_{32}^{-1}\lambda_{23}^{-1}$$

...

$$\Gamma(yx^{n-2}yx^{-(n-1)}yx^{n-1}y^{-1}x^{-(n-1)}y^{-1}x^{n-1}x^{-(n-2)}y^{-1}) = \lambda_{2(n-2)}\lambda_{3(n-1)}\lambda_{3(n-2)}^{-1}\lambda_{2(n-1)}^{-1}$$

$$\Gamma(y^2xyx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xx^{-1}y^{-2}) = \lambda_{31}\lambda_{41}^{-1}$$

$$\Gamma(y^2x^2yx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xx^{-2}y^{-2}) = \lambda_{32}\lambda_{41}\lambda_{42}^{-1}\lambda_{31}^{-1}$$

...

$$\Gamma(y^2x^{n-1}yx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xx^{-(n-1)}y^{-2}) = \lambda_{3(n-1)}\lambda_{4(n-2)}\lambda_{4(n-1)}^{-1}\lambda_{3(n-2)}^{-1}$$

$$\Gamma(y^2xyx^{-2}yx^2y^{-1}x^{-2}y^{-1}x^2x^{-1}y^{-2}) = \lambda_{31}\lambda_{4(n-1)}\lambda_{41}^{-1}\lambda_{3(n-1)}^{-1}$$

$$\Gamma(y^2x^2yx^{-2}yx^2y^{-1}x^{-2}y^{-1}x^2x^{-2}y^{-2}) = \lambda_{32}\lambda_{42}^{-1}$$

$$\Gamma(y^2x^3yx^{-2}yx^2y^{-1}x^{-2}y^{-1}x^2x^{-3}y^{-2}) = \lambda_{33}\lambda_{41}\lambda_{43}^{-1}\lambda_{31}^{-1}$$

...

$$\Gamma(y^2x^{n-1}yx^{-2}yx^2y^{-1}x^{-2}y^{-1}x^2x^{-(n-1)}y^{-2}) = \lambda_{3(n-1)}\lambda_{4(n-2)}\lambda_{4(n-1)}^{-1}\lambda_{3(n-2)}^{-1}$$

...

$$\Gamma(y^2xyx^{-(n-1)}yx^{n-1}y^{-1}x^{-(n-1)}y^{-1}x^{n-1}x^{-1}y^{-2}) = \lambda_{31}\lambda_{42}\lambda_{41}^{-1}\lambda_{32}^{-1}$$

$$\Gamma(y^2x^2yx^{-(n-1)}yx^{n-1}y^{-1}x^{-(n-1)}y^{-1}x^{n-1}x^{-2}y^{-2}) = \lambda_{32}\lambda_{43}\lambda_{42}^{-1}\lambda_{33}^{-1}$$

...

$$\Gamma(y^2x^{n-1}yx^{-(n-1)}yx^{n-1}y^{-1}x^{-(n-1)}y^{-1}x^{n-1}x^{-(n-1)}y^{-2}) = \lambda_{3(n-1)}\lambda_{4(n-1)}^{-1}$$

...

$$\Gamma(y^{m-1}xyx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xx^{-1}y^{-(m-1)}) = \lambda_{m1}\lambda_{11}^{-1}$$

$$\Gamma(y^{m-1}x^2yx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xx^{-2}y^{-(m-1)}) = \lambda_{m2}\lambda_{11}\lambda_{12}^{-1}\lambda_{m1}^{-1}$$

...

$$\Gamma(y^{m-1}x^{n-1}yx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xx^{-(n-1)}y^{-(m-1)}) = \lambda_{m(n-1)}\lambda_{1(n-2)}\lambda_{1(n-1)}^{-1}\lambda_{m(n-2)}^{-1}$$

$$\Gamma(y^{m-1}xyx^{-2}yx^2y^{-1}x^{-2}y^{-1}x^2x^{-1}y^{-(m-1)}) = \lambda_{m1}\lambda_{1(n-1)}\lambda_{11}^{-1}\lambda_{m(n-1)}^{-1}$$

$$\Gamma(y^{m-1}x^2yx^{-2}yx^2y^{-1}x^{-2}y^{-1}x^2x^{-2}y^{-(m-1)}) = \lambda_{m2}\lambda_{12}^{-1}$$

$$\Gamma(y^{m-1}x^{3}yx^{-2}yx^{2}y^{-1}x^{-2}y^{-1}x^{2}x^{-3}y^{-(m-1)}) = \lambda_{m3}\lambda_{11}\lambda_{13}^{-1}\lambda_{m1}^{-1}$$

...

$$\Gamma(y^{m-1}x^{n-1}yx^{-2}yx^{2}y^{-1}x^{-2}y^{-1}x^{2}x^{-(n-1)}y^{-(m-1)}) = \lambda_{m(n-1)}\lambda_{1(n-3)}\lambda_{1(n-1)}^{-1}\lambda_{m(n-3)}^{-1}$$

...

$$\Gamma(y^{m-1}xyx^{-(n-1)}yx^{n-1}y^{-1}x^{-(n-1)}y^{-1}x^{n-1}x^{-1}y^{-(m-1)}) = \lambda_{m1}\lambda_{12}\lambda_{11}^{-1}\lambda_{m2}^{-1}$$

$$\Gamma(y^{m-1}x^{2}yx^{-(n-1)}yx^{n-1}y^{-1}x^{-(n-1)}y^{-1}x^{n-1}x^{-2}y^{-(m-1)}) = \lambda_{m2}\lambda_{13}\lambda_{12}^{-1}\lambda_{m3}^{-1}$$

...

$$\Gamma(y^{m-1}x^{n-1}yx^{-(n-1)}yx^{n-1}y^{-1}x^{-(n-1)}y^{-1}x^{n-1}x^{-(n-1)}y^{-(m-1)}) = \lambda_{m(n-1)}\lambda_{1(n-1)}^{-1}$$

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntılar $G^{'}$ grubunun sunuşunda yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\lambda_{11} = \lambda_{21} = \lambda_{31} = \ldots = \lambda_{m1}$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{22} = \lambda_{32} = \ldots = \lambda_{m2}$$

...

$$\lambda_{1(n-1)} = \lambda_{2(n-1)} = \lambda_{3(n-1)} = \ldots = \lambda_{m(n-1)}$$

elde edilir. Buradan gerekli sadeleştirmeler yapılarak $G^{'}$ grubunun sunuşu,

$$\langle \lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{1(n-1)} ; \lambda_{11}^{m}, \lambda_{12}^{m}, \ldots, \lambda_{1(n-1)}^{m}, \ \lambda_{12}\lambda_{11}\lambda_{12}^{-1}\lambda_{11}^{-1}, \ \lambda_{13}\lambda_{12}\lambda_{13}^{-1}\lambda_{12}^{-1}, \ldots,$$
$$\lambda_{1(n-1)}\lambda_{1(n-2}\lambda_{1(n-1)}^{-1}\lambda_{1(n-2)}^{-1}, \lambda_{11}\lambda_{1(n-1)}\lambda_{11}^{-1}\lambda_{1(n-1)}^{-1}$$
$$\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{12}^{-1}\lambda_{13}^{-1}, \ldots, \lambda_{12}\lambda_{1(n-1)}\lambda_{12}^{-1}\lambda_{1(n-1)}^{-1}, \ldots, \lambda_{1(n-2)}\lambda_{1(n-1)}\lambda_{1(n-2)}^{-1}\lambda_{1(n-1)}^{-1} \ \rangle$$

şeklinde bulunur. Bu ise,

$$\langle \lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{1(n-1)} ; \lambda_{11}^{m}, \lambda_{12}^{m}, \ldots, \lambda_{1(n-1)}^{m}, [\lambda_{11}, \lambda_{12}], \ldots, [\lambda_{11}, \lambda_{1(n-1)}], [\lambda_{12}, \lambda_{13}], \ldots,$$
$$[\lambda_{12}, \lambda_{1(n-1)}], \ldots, [\lambda_{1(n-2)}, \lambda_{1(n-1)}] \ \rangle$$

biçimindeki sunuştur. Görüldüğü gibi bu sunuş ise,

$$\underbrace{\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_m \times \ldots \times \mathbf{Z}_m}_{(n-1)\ tane}$$

grubuna izomorftur. Böylece, B ve A gruplarının standart wreath çarpımlarının komütatör alt grubu bulunmuş olur. □

Şimdi 4.4.1 Ön Teorem' i kullanarak devirli grupların standart wreath çarpımının nilpotentliğini aşağıdaki sonuçla verelim

4.4.2 Teorem m ve n pozitif tamsayılar olmak $\mathbf{Z}_{p^m} \int \mathbf{Z}_{p^n}$ grubu nilpotenttir.

İspat: Burada $\mathbf{Z}_{p^m} \int \mathbf{Z}_{p^n}$ grubunun mertebesi 4.2.4 Teorem' den p^{mp^n+n} olur. Bu grubun Sylow p-alt grubunun sayısı $n_p = 1 + kp$ olduğundan, $n_p = 1$ olarak bulunur. Böylece p asalı n_p sayısını bölmediğinden 1.5.4 Teorem' den dolayı $\mathbf{Z}_{p^m} \int \mathbf{Z}_{p^n}$ grubu p-nilpotenttir. Ayrıca $\mathbf{Z}_{p^m} \int \mathbf{Z}_{p^n}$ grubu 1.3.12 ve 1.3.13 Teorem' lerden Sylow p-alt gruplarının direkt çarpımı olarak yazılabildiği için nilpotenttir. Bu grubun nilpotentliği 1.5.7 Teorem' den de açıktır.

Aynı zamanda nilpotent gruplar çözülebilir olduğundan $\mathbf{Z}_{p^m} \int \mathbf{Z}_{p^n}$ grubu çözülebilir bir gruptur. □

p-nilpotentlik ile ilgili çalışmalar 4.5. Alt Bölüm' de bulunabilir.

Not: $G = \mathbf{Z}_p \int \mathbf{Z}_p$ grubunun çözülebilir olduğu aşağıdaki gibi de gösterilebilir. Bunun için, G grubunun komütatör alt grubu 4.4.1 Ön Teorem' den dolayı,

$$G' = \underbrace{\mathbf{Z}_p \times \ldots \times \mathbf{Z}_p}_{(p-1)\ tane}$$

olarak bulunur ve mertebesi p^{p-1} dir. Böylece, G/G' bölüm grubunun mertebesi p^2 olur. Bu durumda $\mathbf{Z}_p \int \mathbf{Z}_p$ grubu için bölüm grupları değişmeli olan,

$$\{1_G\} \lhd \mathbf{Z}_p \lhd \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p \lhd \ldots \lhd \underbrace{\mathbf{Z}_p \times \ldots \times \mathbf{Z}_p}_{(p-2)\ \text{tane}} \lhd G' \lhd G$$

serisi elde edilir. Bu ise $\mathbf{Z}_p \int \mathbf{Z}_p$ grubunun çözülebilir olması demektir. Ayrıca 1.1.9 Teorem' den dolayı da $\mathbf{Z}_p \int \mathbf{Z}_p$ grubu çözülebilirdir. □

4.4.3 Örnek $G = \mathbf{Z}_3 \int \mathbf{Z}_3$ grubu nilpotent ve çözülebilir bir gruptur. Gerçekten, bu grubun mertebesi 4.2.4 Teorem' den 3^4 dur ve Sylow 3-alt gruplarının sayısı ise 1 olur. Bu nedenle 1.3.12 ve 1.3.13 Teorem' lerden bu grup nilpotent bir gruptur. Ayrıca $\mathbf{Z}_3 \int \mathbf{Z}_3$ grubunun komütatör alt grubunun mertebesi 4.4.1 Ön Teorem' den 9 bulunur. Bu durumda G/G' bölüm grubunun mertebesi de 9 olarak elde edilir. Böylece $\mathbf{Z}_3 \int \mathbf{Z}_3$ grubu için bölüm grupları değişmeli olan,

$$\{1_G\} \lhd \mathbf{Z}_3 \lhd G' \lhd G$$

serisi elde edilir. Bu ise, $\mathbf{Z}_3 \int \mathbf{Z}_3$ grubunun çözülebilir olması demektir. ///

4.5 Standart Wreath Çarpımın p-Nilpotentliği ve Süperçözülebilirliği

Aşağıda verilen 4.5.2 Teorem, p ve q asallarının 3.3.21 Teorem ile verilen şartlarda olduğunda $\mathbf{Z}_p \int \mathbf{Z}_q$ grubunun nilpotentliğini verir. Bu grubun süperçözülebilirliğinin ispatı için de 4.5.1 Ön Teorem verilmiştir ve bu ön teorem [13]' de bulunabilir.

4.5.1 Ön Teorem p ve q asal sayılar ve $p > q$ olmak üzere, G grubunun mertebesi pq olsun. Bu durumda G grubu ya devirlidir ya da aşağıdaki bağıntılara sahip a ve b elemanları ile üretilir.

$$b^p = 1, \quad a^q = 1, \quad a^{-1}ba = b^r \quad (r \not\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p) \text{ fakat } r^q \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p)).$$

4.5.2 Teorem p ile q asal sayılar olmak üzere $p > q$ ve q asalı (p-1) sayısını bölmesin. Bu durumda $G = \mathbf{Z}_p \int \mathbf{Z}_q$ grubu nilpotenttir ve süperçözülebilirdir.

İspat: 4.2.4 Teorem' den G grubunun mertebesi $p^q q$ olur. Bu grubun Sylow p-alt gruplarının sayısı, k bir tam sayı olmak üzere $n_p = 1 + kp$ olsun. Burada n_p sayısı q asalını bölmelidir. Hipotezden $p > q$ olduğundan $1 + kp > q$ olur ve bu sayı $k = 0$ dışındaki tüm değerler için q asalını bölmez. Böylece $n_p = 1$ olarak bulunur. Ayrıca hipotezde verilen şartlarda n_q sayısı da 1 olarak bulunur. p asalı $n_p = 1$ ve $n_q = 1$ sayılarını bölmediğinden 1.5.4 Teorem' den $\mathbf{Z}_p \int \mathbf{Z}_q$ grubu p-nilpotenttir. Aynı sebepten dolayı bu grup q-nilpotenttir. Böylece bu grup 1.5.7 Teorem' den nilpotenttir.

4.4.1 Ön Teorem' den $\mathbf{Z}_p \int \mathbf{Z}_q$ grubunun komütatör alt grubu,

$$\underbrace{\mathbf{Z}_p \times \ldots \times \mathbf{Z}_p}_{(q-1)\ \text{tane}}$$

olur ve mertebesi p^{q-1} dir. Böylece G/G' bölüm grubunun mertebesi pq olarak bulunur. 4.5.1 Ön Teorem' den G/G' bölüm grubu $\mathbf{Z}_{pq}$ devirli grubuna izomorftur. Çünkü 1.2.2 Teorem' den G/G' grubu değişmelidir ve 4.5.1 Ön Teorem' de belirtilen diğer grup olamaz. Böylece $\mathbf{Z}_p \int \mathbf{Z}_q$ grubunun,

$$\{1_G\} \lhd \mathbf{Z}_p \lhd \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p \lhd \ldots \lhd \underbrace{\mathbf{Z}_p \times \ldots \times \mathbf{Z}_p}_{(q-2)\ \text{tane}} \lhd G' \lhd G$$

şeklinde bütün bölüm grupları devirli olan bir serisi bulunur. Böylece $\mathbf{Z}_p \int \mathbf{Z}_q$ grubu süperçözülebilirdir. □

4.5.3 Örnek $G = \mathbf{Z}_5 \int \mathbf{Z}_3$ grubu 5-nilpotenttir ve süperçözülebilirdir. Gerçekten, 4.2.3 Tanım' dan G grubunun mertebesi $5^3.3$ olur. Bu grubun Sylow 5-

alt gruplarının sayısı $n_5 = 1+5k$ ve Sylow 3-alt gruplarının sayısı $n_3 = 1+3s$ olsun (k ve s tam sayı). Burada n_5 sayısı $k = 0$ dışındaki hiçbir değer için 3' ü bölmez. Bu durumda $n_5 = 1$ olarak bulunur. Ayrıca 3 asalı 5-1 = 4 sayısını bölmediğinden $n_3 = 1$ olarak bulunur. Böylece 5 ve 3 asalları hem $n_5 = 1$ ve $n_3 = 1$ sayılarını bölmediğinden 1.5.4 Teorem' den $\mathbf{Z}_5 \int \mathbf{Z}_3$ grubu hem 5-nilpotenttir hem de 3-nilpotenttir. Bu ise $\mathbf{Z}_5 \int \mathbf{Z}_3$ grubunun nilpotent olması demektir.

4.4.1 Ön Teorem' den $\mathbf{Z}_5 \int \mathbf{Z}_3$ grubunun komütatör alt grubu $\mathbf{Z}_5 \times \mathbf{Z}_5$ olur ve mertebesi 25' tir. Böylece G/G' bölüm grubunun mertebesi 15 olarak bulunur. 4.5.1 Ön Teorem' den G/G' bölüm grubu $\mathbf{Z}_{15}$ devirli grubuna izomorftur. Çünkü 1.2.2 Teorem' den G/G' grubu değişmelidir ve 4.5.1 Ön Teorem' de belirtilen diğer grup olamaz. Böylece $\mathbf{Z}_5 \int \mathbf{Z}_3$ grubunun, $\{1_G\} \lhd \mathbf{Z}_5 \lhd \mathbf{Z}_5 \times \mathbf{Z}_5 \lhd G$ şeklinde bütün bölüm grupları devirli olan bir serisi bulunur. Böylece $\mathbf{Z}_5 \int \mathbf{Z}_3$ grubu süperçözülebilirdir. ///

Direkt çarpım gruplarında sırasıyla m ve n mertebeli iki devirli grubun mn mertebeli devirli gruba izomorf olması için gerekli ve yeterli koşulun m ve n tamsayılarının aralarında asal olması olduğu belirtilmişti. Ayrıca yarı-direkt çarpımlarda (3.2.10 Teorem' de verildiği gibi) eğer G grubu değişmeli ise, $\mathbf{Z}_m >\!\lhd_\theta \mathbf{Z}_n \cong \mathbf{Z}_{mn}$ olması için gerekli ve yeterli koşulun yine m ve n tamsayılarının aralarında asal olması olduğu ispatlanmıştı.

Aşağıdaki sonuç, m ve n tamsayılarının aralarında asal olduğu durumda m ve n mertebeli iki devirli grubun wreath çarpımının durumunu verir.

4.5.4 Sonuç $(m,n)=1$ ise $G = \mathbf{Z}_m \int \mathbf{Z}_n$ grubunun komütatör alt grubu ile olan bölüm grubu mn mertebeli devirli grubuna izomorftur.

İspat: 4.2.4 Teorem' den G grubunun mertebesi $m^n n$ olur. 4.4.1 Ön Teorem' den G grubunun komütatör alt grubu,

$$\underbrace{\mathbf{Z}_m \times \ldots \times \mathbf{Z}_m}_{(n-1)\ \text{tane}}$$

olarak bulunur ve mertebesi m^{n-1} dir. Böylece G/G' bölüm grubunun mertebesi mn olarak elde edilir. 4.4.1. Ön Teorem' i ispatlarken G/G' bölüm grubunun sunuşu (4.8) olarak bulunmuştu. Böylece, $(m,n)=1$ olduğundan bu bölüm grubu $\mathbf{Z}_{mn}$ devirli grubuna izomorftur. □

KAYNAKLAR

[1] Alperin, J.L., Bell, B., Groups and representations, Springer-Verlag New York, (1995).

[2] Baumslag, G., Topics in combinatorial group theory, Birkhauser Verlag Basel, Switzerland, (1993).

[3] Brown, K.S.,Cohomology of groups, Springer-Verlag, New York, (1982).

[4] Cangül, İ.N., Çelik, B., Sayılar teorisi problemleri, Pradigma Akademi, Bursa, (2002).

[5] Collins, D.J., Grigorchuk, R.I., Kurchanov, P.F., Zieschang, H., Combinatorial group theory and applications to geometry, Springer-Verlag, New York, (1998).

[6] Coxeter, H.S.M., Moser, W.O.J., Generators and relations for disrete groups, Springer-Verlag, New York, (1965).

[7] Çevik, A.S., The p-cockcroft property of central extensions of groups, *Communications in Algebra*, **29(3)**, 1085-1094 (2001).

[8] Çevik, A.S., Efficiency of standart wreath product, *Proceeding of the Edinburg Mathematical Society*, **43**, 415-423 (2000).

[9] Çevik, A.S., The efficiency on 2-generators of semi-direct product of groups, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. A*1, **48**, 7-13 (1999).

[10] Çevik, A.S., Minimality of group and monoid presentations, Ph. D. Thesis, University of Glasgow, (1997).

[11] Fine, B., Algebraic Generalizations of discrete groups, Marcel Dekker, New York, Bassel, (1999).

[12] Fraleigh, J.B., A First course in abstract algebra, Addison-Wesley Publishing Company, (1989).

[13] Hungerford, W.H., Algebra, Springer-Verlag New York, (1974).

[14] Jao, D., Fun with semi-direct products, http://dominia.org/djao/semidirect.pdf.

[15] Johnson, D.L., Presentations of groups, L.M.S. Student Texts, Cambridge University Press, (1990).

[16] Khukhro, E.I., p-Automorphisms of finite p-groups, L.M.S. Student Texts, Camridge University Press, (1998).

[17] Lyndon, R.C., Schupp, P.E., Combinatorial group theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (1977).

[18] Magnus, W., Karras, A., Solitar, D., Combinatorial group theory, Dover Publications, New York, (1976).

[19] Massey, W.S., Homology and cohomology theory, Marcel Dekker, New York, (1978).

[20] Miller, C.F., Combinatorial group theory, http://www.ms.unimelb.edu.au (1996-2000).

[21] Robinson, D.J.S., A Course in the theory of groups, Springer-Verlag New York, (1982).

[22] Rose, J.S., A Course on group theory, L.M.S. Student Texts, Cambridge University Press, (1978).

[23] Rotman, J.J., The theory of groups, Wm. C. Brown Publishers, U.S.A., (1988).

[24] Yılmaz, M., Çevik, A.S., Nilpotentence in split extensions, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. A*1, (inceleme aşamasında).

[25] Zhang, J., Sylow numbers of finite groups, *Journal of Algebra*, **176**, 111-123 (1995).