T.C
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

$L^2(G)$ UZAYINDA POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ramazan AKGÜN

Balıkesir, Haziran 2003

T.C
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

$L^2(G)$ UZAYINDA POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ramazan AKGÜN

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV

Sınav Tarihi : 16.06.2003

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV (BAÜ, FEF)
Prof. Dr. Musa ERDEM (BAÜ, FEF)
Prof. Hasan SOYDAN (BAÜ, NEF)

Balıkesir, Haziran-2003

ÖZET

$L^2(G)$ UZAYINDA POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

Ramazan AKGÜN
Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı : Prof. Dr. Daniyal M. İsrafilov)

Balıkesir, 2003

Genel olarak $L^2(G)$ uzayında polinomlar ile yaklaşımı inceleyen bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde temel tanımlar, teoremler ve kullanılan gösterimler verilip, yaklaşımın incelendiği $L^2(G)$ uzayı tanımlanmıştır. Ayrıca bazı fonksiyon sınıflarının tanımları verilmiştir.

İkinci bölümde, bir bölge üzerinden alınan Lebesgue integralin bilinen Riemann integrali yardımıyla ifade edilebileceği gösterilip $L^2(G)$ uzayının bir Hilbert uzayı olduğu ispatlanmıştır.

Üçüncü bölümde ortanormal ve tam ortanormal sistem tanımları verilip polinomlarla yaklaşımın mümkün olduğu bölgeler (PA) tanımlanıp PA özelliğine sahip bölgelere örnekler verilmiştir. Her Carathéodory bölgesinin PA özelliğine sahip olduğu ispatlandıktan sonra PA özelliği olmayan basit bağlantılı bölgelerden kesik bölge ve ayvari bölge incelenmiştir. Ayvari bölgenin PA özelliğine sahip olma ve olmama koşulları araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde Hilbert uzaylarında ON sistemlere göre seri açılımı ile ilgili koşullar belirtildikten sonra özel olarak $L^2(G)$ uzayında ON seri açılımı incelenmiştir. ON sistem tam ise $L^2(G)$ uzayından bir fonksiyonun düzgün yakınsak ON seri açılımının var olduğu ispatlanmıştır. Daha sonra $\overline{G}$ de analitik bir fonksiyonun $\overline{G}$ da düzgün yakınsak ON seri açılımının varlığı, ∂G sınırının Jordan eğrisi ve ON sistemin G nin ON P_j , $j=0, 1, 2, 3, \ldots$ polinomlar sistemi olması koşulları altında gösterilmiştir.

Beşinci bölümde kvazi-konform sınıra sahip bir G bölgesinde tanımlı $A^2(G,\omega)$ ağırlıklı Bergman uzayından bir fonksiyon için genelleştirilmiş Faber polinomları tanımlanıp, bunun yaklaşım özellikleri araştırılmıştır. $A^2(G,\omega)$ uzayında bir fonksiyonun genelleştirilmiş Faber serisine açılımının kompakt altkümelerde düzgün yakınsak olduğu ispatlanıp genelleştirilmiş Faber serisinin teklik problemi incelenmiştir. Bu bölümde son olarak bir f fonksiyonunun genelleştirilmiş Faber serisinin kısmi toplamının f ye $A^2(G)$ normunda yaklaşım hızı değerlendirilmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER : PA özelliğine sahip bölge / Carathéodory bölgesi / ortanormal sistem / ağırlıklı Bergman uzayı / yaklaşım hızı / kvazi-konform eğri / sınıra göre kvazi-konform yansıma / genelleştirilmiş Faber polinomu.

ABSTRACT

APPROXIMATION BY POLINOMIALS IN $L^2(G)$ SPACE

Ramazan AKGUN

Balikesir University, Institute of Science, Department of Mathematics

(M. Sc. Thesis / Supervisor : Prof. Dr. Daniyal M. Israfilov)

Balikesir-Turkey, 2003

This work in which generally concerns approximation by polinomials in $L^2(G)$ spaces, consist of five chapters.

In the first chapter, basic definitions, theorems and notations which are used through in this work are given, the $L^2(G)$ spaces in which the approximation is studied are defined. Also definitions of some function classes are given.

In the second chapter, the Lebesgue integral which is taken over any domain will be able to be expressed by the help of familiar Riemann integral is demonstrated after that it is proved that $L^2(G)$ is a Hilbert space.

In the thirth chapter definitions of orthanormal and complete orthanormal systems are given, after that, domains in which have got possibility to approximation by polinomials (polinomial approximation) are defined and various examples are given about domains which have the PA property. It is proved that every Carathéodory domains to have the PA property. After that simply connected Slit and Moon-shaped domains which have not PA property, are investigated. Conditions on the PA property of the moon-shaped domains that whether they have or not, are investigated, respectively.

In the fourth chapter, first, conditions on expansion with respect to ON systems for functions in $L^2(G)$ spaces are investigated. If ON system is complete then for any function in $L^2(G)$ spaces, existence of uniformly convergent series expansion with respect to this system is proved. After that, for any function which is analitic in $\overline{G}$, under the circumstences that ∂G boundary is Jordan curve and P_j, $j=0, 1, 2, 3, \ldots$ is ON polinomials of domain G, existence of uniformly convergent series expansion with respect to this ON system are demonstrated.

In the fifth chapter, the generalized Faber polinomials for the functions in $A^2(G,\omega)$ weighted Bergman spaces are defined and their approximation properties are investigated. For any function in $A^2(G,\omega)$ the expansion of generalized Faber series have been uniformly convergent on compact subsets of the domain G is proved and uniqueness problem of the generalized Faber series expansion is investigated. Finally in this chapter, for partial sum of the generalized Faber series of any function f, rate of convergence to f with the $A^2(G)$ norm is evaluated.

KEY WORDS : domain which have the PA property / Carathéodory domain / orthanormal system / weighted Bergman space / rate of convergence / quasi-conformal curve / quasi-conformal reflection across to a boundary / generalized Faber polinomials.

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SEMBOL LİSTESİ

Sembol İsmi	Tanımı
$\boldsymbol{C}$	Karmaşık sayılar kümesi.
$\overline{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$	Genişletilmiş karmaşık sayılar kümesi.
$\overline{\boldsymbol{G}}$	$\boldsymbol{G}$ kümesinin kapanışı.
$\partial\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{M}$ kümesinin sınır noktaları kümesi.
$L^2(G)$	L^2 Bergman uzayı.
$d_z=d(z,\partial G)$	z noktasının bölgenin sınırına olan uzaklığı.
$f_n\to f$	f_n dizisi f ye noktasal yakınsar.
$f_n\to f$ (d.Y.)	f_n dizisi f ye düzgün yakınsar.
$f_n\uparrow f$	f_n dizisi f ye monoton artarak yakınsar.
$f_n\downarrow f$	f_n dizisi f ye monoton azalarak yakınsar.
$C_R,\ \Gamma_R$	Seviye eğrisi.
$A=O(x_n)$	$\exists M>0:\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A}{x_n}\leq M.$
$intA$	A nın iç noktaları kümesi.
$extA$	A nın dış noktaları kümesi.
CE	E kümesinin tümleyen kümesi.
$A^2(G,\omega)$	Ağırlıklı Bergman uzayı.
ω	Ağırlık fonksiyonu.
$\boldsymbol{N}$	Doğal sayılar kümesi.
$\boldsymbol{R}$	Gerçel sayılar kümesi.
$intC$	C eğrisi ile sınırlanan, sınırlı iç bölge.
$extC$	C eğrisi ile sınırlanan, sınırlı iç bölge.

ŞEKİL LİSTESİ

ÖNSÖZ

Bu çalışmamda bana zaman ayıran hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Daniyal M. İsrafilov'a ne kadar teşekkür etsem azdır.

Matematiği sevmemde büyük katkıları olan Fen Edebiyat fakültesi Matematik bölümü hocalarıma ayrıca teşekkürlerimi sunuyorum.

Bu çalışmada beni destekleyen ve uygun şartların oluşmasında katkıları olan Yağcılar Yatılı İlköğretim Bölge Okulu idareci ve öğretmenlerine teşekkürler.

Balıkesir. 2003 Ramazan AKGÜN

1. ÖNBİLGİLER

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

1.1.1 Tanım : *$G \subset \mathbf{C}$ bir bölge ve*

$$L^2(G) := \left\{ f \ : \ f \ \text{G de analitik ve} \iint_G |f(z)|^2 \, d\sigma \ < \ \infty \right\}$$

*şeklindeki tanımlanan $L^2(G)$ uzayına **L^2 Bergman Uzayı** denir.*

$L^2(G)$ uzayının, üzerinde tanımlanacak bir iç-çarpım yardımıyla elde edilen norm kullanılarak, ikinci bölümde Hilbert uzayı olduğu ispatlanmıştır.

1.1.2 Tanım: *Bir H Hilbert uzayının bir altkümesi S olsun. Eğer her $u,v \in S$, $u \neq v$ için $(u,v) = 0$ oluyorsa S altkümesine **orthogonal sistem** denir. Ek olarak S ye ait her öğenin kendisi ile iç çarpımı 1 oluyorsa S altkümesine **orthonormal sistem** adı verilir* [1,s.211].

1.1.3 Tanım : $\{v_j\}_{j=0}^{\infty}$ *$L^2(G)$ uzayında bir orthonormal sistem olsun. Eğer verilen bu orthonormal sistemin tüm elemanlarıyla iç çarpımı 0 olan fonksiyon sadece 0 fonksiyonuysa bu sisteme **tam orthonormal sistem***[1,s.215]; *eğer sistemin elemanlarının lineer bileşimi H uzayında yoğunsa sisteme **kapalı orthonormal sistem** adı verilir*[2,s.25].

1.1.4 Tanım : $[a, b] \subset \mathbf{R}$ *olmak üzere sürekli bir*

$$\Gamma \ : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$$

*fonksiyonuna karmaşık düzlemde bir **eğri** denir. Bir Γ eğrisi verildiğinde $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ oluyorsa Γ ya **kapalı eğri**; bir Γ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\Gamma(t_1) = \Gamma(t_2)$ oluyorsa Γ ya **Jordan eğrisi** denir*[3,cilt:3].

1.1.5 Tanım : $[a, b] \subset \mathbf{R}$ *olmak üzere*

$$\Gamma \ : \ z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

sürekli eğrisi verilmiş olsun. Eğer n doğal sayı olduğunda

$$t_1 = a < t_2 < t_3 < \ldots < t_{n+1} = b$$

koşulunu sağlayan $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n+1}$ *değerlerinin keyfi bir dizisi için*

$$\sum_{k=1}^{n} \left| z(t_{k+1}) - z(t_k) \right|$$

toplamı sınırlı kalıyorsa Γ *eğrisine* ***sonlu uzunluklu eğri*** *denir. Başka bir deyişle,* Γ *eğrisini gösteren z fonksiyonu sınırlı değişimli ise* Γ *ya* ***sonlu uzunluklu eğri*** *denir*[4,s.417].

1.1.6 Tanım : *Karmaşık düzlemin boş olmayan, sınırlı, kapalı ve bağlantılı bir altkümesine* ***kontinyum****, boş olmayan, açık ve bağlantılı bir altkümesine bir* ***bölge****, kapalı ve sınırlı bir altkümesine* ***kompakt küme*** *denir*[3,cilt:1,s.62-64-48].

1.1.7 Tanım : *G sınırlı bir bölge ve* $\Gamma := \partial G$ *olsun. Eğer* Γ *bağlantılı ise G bölgesine* ***basit bağlantılı bölge****; Eğer* Γ *bağlantılı değil ise G bölgesine* ***katlı bağlantılı bölge*** *denir*[3,cilt:1,s.67].

Başka bir deyişle basit bağlantılı bir bölge aşağıdaki teorem yardımıyla karakterize edilebilir.

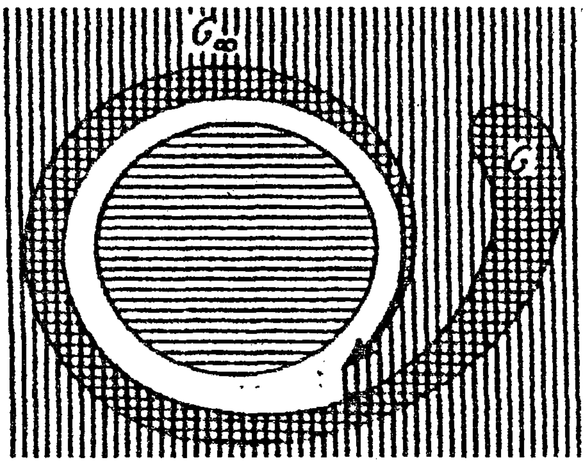
1.1.8 Teorem : *Sınırlı bir G bölgesinin basit bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul, G deki her bir kapalı Jordan eğrisinin iç-bölgesinin de G nin altkümesi olmasıdır*[3,cilt:1,s.70].

1.1.9 Tanım : P_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *polinomlar ailesi bir polinomlar sistemi oluşturur. Eğer polinomlar sistemi* $L^2(G)$ *uzayında yoğunsa G bölgesine* ***PA özelliğine sahip bölge*** *denir. Eğer basit bağlantılı ve sınırlı bir G bölgesinin sınırı, G nin* ∞ *noktasını içeren tümleyen bölgesinin sınırı ile çakışıyorsa G bölgesine* ***Carathéodory bölgesi*** *denir. Eğer bir G bölgesinin sınırı Jordan eğrisi ise bu bölgeye* ***Jordan bölgesi*** *denir*[2,s.16-17-26].

1.1.10 Tanım : *Sınırı kesik içeren bölgelere* ***kesik bölge*** *denir*[2,s.20].

1.1.11 Tanım : *Tek bir noktada kesişen, içten teğet, kapalı iki Jordan eğrisi ile sınırlı bölgeye* ***ayvari bölge*** *denir*[2,s.21].

1.1.12 Tanım : *Bir çemberi dıştan saran yılanvari bölgenin kuyruk kısmı çembere sonsuz olarak yaklaştığında oluşan bölgeye* ***dış yılan bölge*** *denir. Bir çemberi içten saran yılanvari bölgenin kuyruk kısmı çembere sonsuz olarak yaklaşırsa oluşan bu bölgeye* ***iç yılan bölge*** *adı verilir*[2,s.17].



Şekil **1.1** (dış yılan bölge)

1.1.13 Tanım : *f fonksiyonu* $H \subset \overline{C}$ *bölgesinde meromorf ve bire bir olsun.* $G \subset \overline{C}$ *için* $f(H)=G$ *oluyorsa f dönüşümüne H bölgesinin G üzerine* ***konform dönüşümü*** *denir*[5,s.4].

1.1.14 Tanım : $J \subset C$ *bir Jordan eğrisi ve* $M>0$ *sabiti sadece J eğrisi ve f fonksiyonuna bağlı olsun. Eğer* $a, b \in J$ *için*

$$\{ J(a, b) \text{ yayının uzunluğu}\} \leq M \cdot |a-b|$$

sağlanıyorsa J eğrisine ***kvazi-konform eğri*** *denir. Burada J(a, b), a ile b noktalarını birleştiren, J üzerindeki çapı küçük olan yayı gösterir*[5,s.107].

1.1.15 Tanım : $h: C \to C,\ h(z) = h(x+iy)$ *hemen her y için x değişkenine göre ve hemen her x için y değişkenine göre mutlak sürekli olan homeomorfizm olsun.* h_x' *ve* h_y' *kısmi türevleri* **C** *de hemen her yerde var ve bunların mutlak değerlerinin kareleri yerel integrallenebilir olsun.* $\mu(z)$ *kompleks değerli ölçülebilir fonksiyon ve* $z \in C$ *için*

$$|\mu(z)| \leq k < 1$$

sağlansın. Hemen her $z \in C$ *için*

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \mu(z)\frac{\partial h}{\partial z}$$

sağlanıyorsa h dönüşümüne C de ***kvazi-konform dönüşüm*** *denir*[5,s.95].

1.1.16 Tanım : *f : $C \rightarrow C$ hemen her yatay ve hemen her dikey doğrular üzerinde mutlak sürekli bir homeomorfizm olsun. Her bir $K \subset C$ kompakt kümesi için*

$$\iint_K \left|f_{\bar{z}}\right|^2 d\sigma_z < \infty, \quad \iint_K \left|f_z\right|^2 d\sigma_z < \infty \text{ ve}$$

$$\left|f_{\bar{z}}\right| \le k \cdot \left|f_z\right|, (0 \le k < 1)$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa f homeomorfizmine ***k-kvazi-konform dönüşüm*** *denir.*

1.1.17 Tanım : *$F(z)$ bir G bölgesi üzerinde karesi integrallenebilir bir fonksiyon ve $P_n(z)$, n=0, 1, 2, 3, ... G de bir ON polinomlar sistemi olsun.*

$$a_n := \iint_G F(z)\overline{P_n(z)}d\sigma_z, \; n=0, 1, 2, 3, \ldots$$

sayılarına F(z) nin ***Fourier katsayıları;***

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$$

serisine de F(z) nin ***Fourier serisi*** *denir*[3,cilt:2,s.122].

1.1.18 Tanım : *$C \subset C$ bir Jordan eğrisi ve*

$$z = \Psi(w) = cw + c_0 + \frac{c_1}{w} + \ldots \; (c > 0)$$

ile $\{ w : |w| > 1 \}$ bölgesinin extC üzerine konform dönüşümü gösterilsin. Bu konform dönüşümü ∞ noktasında

$$\Psi(\infty) = \infty, \; \lim_{w \to \infty} \frac{\Psi(w)}{w} = c > 0$$

olacak şekilde normlayalım. ϕ , Ψ dönüşümünün tersi ve

$$w = \phi(z) = dz + d_0 + \frac{d_1}{z} + \ldots \; (cd = 1)$$

olsun. Her bir n=0, 1, 2, 3, ... $|z|$ nin çok büyük değerleri için geçerli *olan*

$$\left[\phi(z)\right]^n = d^n z^n + \sum_{k=-\infty}^{n-1} d_{nk} z^k$$

açılımının F_n *polinom kısmına* ($n=0, 1, 2, 3, \ldots$) ***n-Faber polinomu*** *denir*[2,s.43].

1.1.19 Teorem (Maksimum Modül Teoremi) : *G bölgesinde analitik, sabit olmayan bir f fonksiyonunun modülü G de maksimum değerini alamaz* [3,cilt:2,s.91,sonuç2].

1.1.20 Teorem (Minimum Modül Teoremi) : *G bölgesinde analitik,* $\overline{G}$ *de sürekli ve sıfırdan farklı bir fonksiyon f olsun. Bu durumda* $|f|$ *minimum değerini* ∂G *de alır*[3,cilt:2,s.92, sonuç3].

1.1.21 Teorem : $A \subset C$ *bölgesinde analitik fonksiyonların bir* f_n, $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ *dizisi, A daki her bir kapalı disk üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsasın. Bu durumda f fonksiyonu A da analitiktir. Üstelik* $f_n' \to f'$ *yakınsaması A da noktasal, A nın kapalı alt diskleri üstünde düzgündür*[6,s.187,teorem5.2.7].

1.1.22 Teorem : $A \subset C$ *sınırlı bir bölge ve* f_n, $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ *A da analitik fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer* $f_n \to f$ *yakınsaması* ∂A *üstünde düzgün ise* f_n, $n=0, 1, 2, 3, \ldots$, *dizisi A da analitik olan bir f fonksiyonuna düzgün yakınsar* [6,s.194,örnek7].

1.1.23 Teorem (Lebesgue Monoton Yakınsama Teoremi) :
f_k, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *ölçülebilir bir E kümesi üzerinde, ölçülebilir fonksiyonların negatif olmayan, monoton artan bir dizisi ise*[7, s.273, teorem5.10]

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, d\sigma = \int_E \left(\lim_{k\to\infty} f_k \right) d\sigma .$$

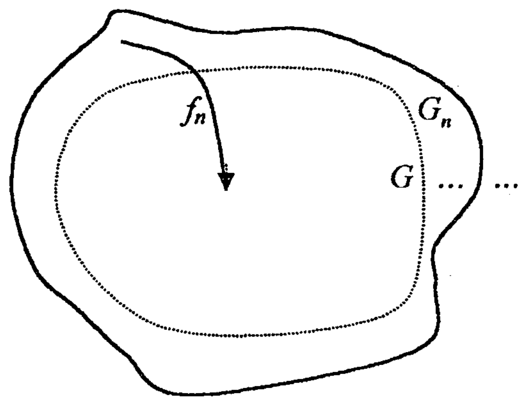
1.1.24 Teorem : G_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *Jordan bölgeleri dizisi G bölgesine çekirdek yakınsasın.* h_n, G_n *bölgesinin G bölgesi üzerine konform dönüşümü ve* h_n *konform dönüşümünü*

$$h_n(\xi) = 0, \; h_n'(\xi) > 0, \; (\xi \in G)$$

olacak şekilde normlayalım. Bu durumda G nin her kompakt altkümesi üzerinde

$$h_n(z) \to z\,(\text{d.Y.})\ ve\ h_n'(z) \to 1\,(\text{d.Y.}),\ (n \to \infty)$$

olur[2,s.18].



Şekil **1.2**

1.1.25 Teorem (Runge Teoremi) : *G bir Jordan bölgesi ve F fonksiyonu $\overline{G}$ de analitik ise, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists P$ polinomu vardır ki*

$$|f(z) - P(z)| < \varepsilon\ ,\ z \in \overline{G}$$

sağlanır[2,s.18].

1.1.26 Teorem : *H^p, ($p>0$) Hardy uzayından bir $f(z) \neq 0$ fonksiyonu için*

$$f(z)=B(z).g(z)$$

sağlanır. Burada $B(z)$ Blaschke çarpanı, $g(z) \in H^p$ fonksiyonu $|z| < 1$ de sıfırdan farklıdır[8,s.20,teorem2.5].

1.1.27 Teorem : *$f_n(z)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ $|z| < 1$ diskinde analitik fonksiyonlar dizisi için*

$$f_n(0) = 0\ ,\ f_n'(0) > 0\ ,\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

olsun ve her n için f_n, $|z| < 1$ diskini B_n Jordan bölgesine resmetsin. f_n, $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ dizisinin $|z| < 1$ diskinde sonlu bir fonksiyona yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul $B_n \to B$ çekirdek yakınsamasının sağlanmasıdır. Burada ya $B=0$ ya da B, sınırı en az iki nokta içeren bir bölgedir. Eğer bu yakınsama, varsa, $|z| < 1$ diskinde düzgündür. Eğer $f(z)$ limit fonksiyonu sabitten farklı ise $f(z)$, $|z| < 1$ diskini B çekirdeğine resmeder. Ayrıca f_n, $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ lerin ters *fonksiyonlarının* ϕ_n, $n=0, 1, 2, 3, \ldots,$ *dizisi f nin ters fonksiyonu* ϕ *ye B de düzgün yakınsar*[4,s.55,teorem1].

1.1.28 Tanım : $\left\{C\overline{D}, CE\right\}$ *gösterimi* $C\overline{D}$ *kümesi ile CE kümesinin kartezyen çarpım kümesini ifade eder.*

1.1.29 Teorem : $p>1$, $q>1$ *ve* $p^{-1}+q^{-1}=1$ *için* $f\in L^p$ *ve* $g\in L^q$ *ise* $f.g\in L^1$ *olur ve*

$$\left|\int_E f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_E |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır[4,s.388].

1.1.30 Tanım (En İyi Yaklaşım Sayısı) : *G bir bölge olsun.*

$$E_n(f,G) := \inf \left\{ \|f \quad P_n\|_{l^2(G)} : P_n \text{ polinom ve } \deg P_n \leq n \right\}$$

sayısına, derecesi en fazla n olan polinomlarla f fonksiyonuna ***en iyi yaklaşım sayısı*** *denir.*

1.1.31 (Kvazi-konform Yansıma) : *L bir K-kvazi konform eğri,* $L\neq\infty$ *ve L,* $f(z) : \overline{C}\to\overline{C}$ *K-kvazi-konform homeomorfizmi altında birim diskin görüntüsü olsun. Bu durumda*

$$j = j^*(z) = \frac{1}{\overline{z}}$$

olmak üzere

$$y(z) = f \circ j \circ f^{-1}$$

formunda oluşturulan fonksiyona ***kvazi-konform yansıma*** *denir*[9,s.25].

1.1.32 Tanım (Genelleştirilmiş Faber Polinomları) : *Bir D bölgesinde analitik g(z) fonksiyonu için* $\alpha_0 := g(\infty) > 0$ *olsun. Bu durumda*

$$g(z)\Phi^n(z)$$

sonsuz noktasında n. dereceden kutup yerine sahiptir ve

$$g(z)\Phi^n(z)=\alpha_0\gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \ldots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)}$$

$$+\frac{b_1^{(n)}}{z}+\frac{b_2^{(n)}}{z^2}+\frac{b_3^{(n)}}{z^3}+\ldots+\frac{b_k^{(n)}}{z^k}+\ldots, \ |z|>R_0$$

sağlanır. z değişkeninin negatif olmayan terimleri toplamına g(z) ağırlık fonksiyonu ve K kontinyumuna göre ***n. dereceden genelleştirilmiş Faber polinomları*** *denir* [10,s.44].

Bu polinomlar için

$$\Phi_n(z;g)=\alpha_0\gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \ldots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)}$$

gösterimi kullanılır.

1.2 Bazı Fonksiyon Sınıfları

1.2.1 Tanım (H^p Hardy Uzayı) : *f(z) fonksiyonu $|z| < 1$ de analitik olsun. Eğer $r \to 1$ için*

$$M_p(r,f)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}, (0<p<\infty)$$

sınırlı kalıyorsa f(z) fonksiyonuna $\boldsymbol{H^p}$ *sınıfından bir fonksiyondur denir*[8,s.2].

1.2.2 Tanım (Ağırlıklı Bergman Uzayı) : *f G de analitik bir fonksiyon ve ω G de ağırlık fonksiyonu olsun. Eğer f fonksiyonu için*

$$\iint_G \omega(z)|f(z)|^2 d\sigma < \infty$$

koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna $A^2(G,\omega)$ ağırlıklı Bergman sınıfından bir fonksiyon denir.

1.2.3 Tanım (Çekirdek Yakınsaması) :

G bir Carathéodory bölgesi olsun. Bu durumda [3, cilt:3]

$$G \subset G_n \text{ ve } \overline{G_{n+1}} \subset G_n$$

şartını sağlayan öyle bir $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ Jordan bölgeleri dizisi vardır ki

$$G_n \to G, (n \to \infty)$$

sağlanır. Bu durumda $\left\{G_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ *Jordan bölgeleri dizisi G çekirdeğine yakınsar ve G bölgesi* $\left\{G_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ *Jordan bölgeleri dizisinin çekirdeğini oluşturur denir.*

Bu yakınsamanın anlamı $\bigcap G_n = G$ olması anlamına gelmez. Örneğin 1.1.12 tanım da belirtilen dış yılan bölge için $\bigcap G_n = G$ şartı sağlanmaz.

2. $L^2(G)$ HİLBERT UZAYI

Bu bölümde bir $G \subset C$ bölgesi üzerinden alınacak Lebesgue integralinin bilinen Riemann integrali yardımıyla ifade edilebileceği gösterilecek ve 1.1.1 tanımda verilen $L^2(G)$ Bergman uzayının üzerinde tanımlanacak bir norm yardımıyla Hilbert uzayı olduğu ispatlanacaktır.

2.1 Giriş

$G \subset C$ bir bölge ve f, G de analitik bir fonksiyon olsun. G bölgesi üzerinden

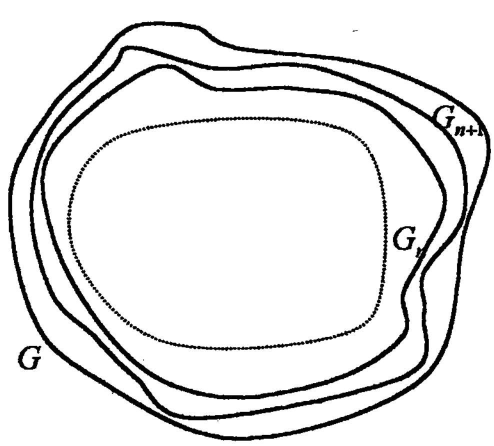
$$\iint_G |f(z)|^2 \, d\sigma$$

integralini göz önüne alalım. Burada $d\sigma$ ile iki boyutlu Lebesgue alan diferansiyelini gösteriyoruz. G bölgesi üzerinden alınacak integrali bilinen Riemann integrali yardımıyla da ifade etmek mümkündür. Gerçekten : G_n, $n = 1, 2, 3, \ldots, G$ bölgesinin altkümelerinin aşağıdaki şartları sağlayan bir dizisi olsun.

(1) Her n için G_n, sınırı sonlu tane Jordan eğrisinden oluşan bir bölgedir.

(2) Her n için $G_n \subset G_{n+1} \subset G$ sağlanır.

(3) $\forall P \in G$ noktası için $\exists n_0 = n_0(P) : n > n_0$ için $P \in G_n$.



Şekil **2.1**

$$\phi_n(z) \doteq \begin{cases} |f(z)|^2 & , z \in \overline{G_n} \\ 0 & , z \in G - \overline{G_n} \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $n \to \infty$ için ϕ_n monoton artarak $|f|^2$ ye yakınsar.

Yani $n \uparrow \infty$ için $\phi_n \uparrow |f|^2$ olur. Lebesgue Monoton Yakınsama Teoremi (LMCT) [7,s.237,teorem5.10] kullanılarak,

$$\iint_G \phi_n d\sigma \to \iint_G |f|^2 d\sigma, (n \to \infty)$$

olduğu görülür. Böylece,

$$\iint_{G-\overline{G_n}} \phi_n d\sigma + \iint_{\overline{G_n}} \phi_n d\sigma \to \iint_G |f|^2 d\sigma, (n \to \infty)$$

ve ϕ_n fonksiyonunun tanımı göz önüne alınırsa,

$$\iint_{\overline{G_n}} \phi_n d\sigma \to \iint_G |f|^2 d\sigma, (n \to \infty)$$

elde edilir. Yani,

$$\iint_{\overline{G_n}} |f|^2 d\sigma \to \iint_G |f|^2 d\sigma, (n \to \infty)$$

ve dolayısıyla

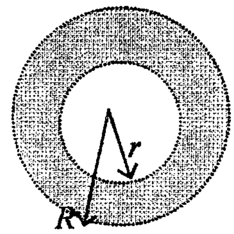
$$\iint_G |f|^2 d\sigma = \lim_{n \to \infty} \iint_{\overline{G_n}} |f|^2 d\sigma, (n \to \infty)$$

yazılabilir. Son eşitlik, G bölgesi üzerinden alınacak Lebesgue integralin Riemann integrali yardımıyla ifade edilebileceğini gösterir.

Örnek 2.1 *$0 \le r < R < \infty$ olsun. $G = \{z \in C : r < |z| < R\}$ halka bölgesini düşünelim. $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonunun G bölgesi üzerinden integralini bulalım.*

$z = \rho e^{i\phi}$ olsun. Bu durumda

$$\iint_G |f(z)|^2 \, d\sigma = \iint_G \left| \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n \right|^2 d\sigma = \int_{\rho=r}^{R} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left| \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \rho^n e^{in\phi} \right|^2 \rho \, d\rho \, d\phi$$



Şekil 2.2

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{\rho=r}^{R} |a_n|^2 \rho^{2n} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \rho \, d\rho$$

$$= 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \int_{\rho=r}^{R} \rho^{2n+1} d\rho$$

$$= 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \left(\frac{1}{2n+2} \rho^{2n+2} \Big|_r^R \right)$$

$$= 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \frac{1}{2(n+1)} \left(R^{2n+2} - r^{2n+2} \right)$$

$$= \pi \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \frac{1}{n+1} \left(R^{2(n+1)} - r^{2(n+1)} \right)$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|a_n|^2 \pi}{n+1} \left(R^{n+1} - r^{n+1} \right) \left(R^{n+1} + r^{n+1} \right)$$

Tanım 2.1 *$G \subset C$ bir bölge ve*

$$L^2(G) := \left\{ f \; : \; f \;\; G \text{ de analitik ve } \iint_G |f(z)|^2 \, d\sigma < \infty \right\}$$

olsun.

Yardımcı Teorem 2.1 $f \in L^2(G)$, $z_0 \in G, \rho_{z_0} := d(z_0, \partial G)$ *olsun. Bu durumda*

$$\iint_G |f(z)|^2 \, d\sigma \geq \pi \rho_{z_0}^2 |f(z_0)|^2$$

olur.

İspat : $f(z)$ fonksiyonunu $z - z_0$ öğesine göre kuvvet serisine açarsak,

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ ve $a_0 = f(z_0)$ olur. Taylor teoremine göre $\rho \in (0, \rho_{z_0})$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

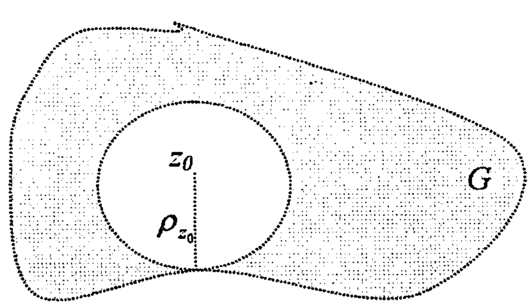
serisi $|z - z_0| < \rho$ diskinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. $z = z_0 + re^{i\varphi}$ yazarsak,

$$\iint_{|z - z_0| \leq \rho} |f(z)|^2 \, d\sigma = \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\varphi} \right|^2 d\varphi r dr = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\rho} |a_k|^2 r^{2k+1} \int_0^{2\pi} d\varphi dr$$

$$= 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \int_0^{\rho} r^{2k+1} dr = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \frac{1}{2k+2} \left[r^{2k+2} \Big|_0^{\rho} \right]$$

$$= 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \frac{1}{2(k+1)} \rho^{2k+2} = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{k+1} \rho^{2(k+1)}$$

olur.



Şekil **2.3**

Böylece,

$$\iint_B |f(z)|^2 d\sigma \geq \iint_{|z-z_0|\leq\rho} |f(z)|^2 d\sigma = \pi|a_0|^2 \rho^2 + \frac{\pi|a_1|^2}{2}\rho^4 + \ldots \geq \pi|a_0|^2 \rho^2$$

olduğundan

$$\iint_B |f(z)|^2 d\sigma \geq \pi|a_0|^2 \rho^2$$

yazılabilir. Bu durumda $\rho \to \rho_{z_0}$ alırsak

$$\iint_B |f(z)|^2 d\sigma \geq \pi|f(z_0)|^2 \rho_{z_0}{}^2$$

olduğu görülür.

2.2 $L^2(G)$ Hilbert Uzayı

Yardıcı Teorem 2.2 $G \subset C$ bir bölge, $z \in G$ ve $f,g \in L^2(G)$ *olsun. Bu durumda*

$$(f,g) = \iint_G f(z)\overline{g(z)}d\sigma$$

dönüşümü $L^2(G)$ uzayında bir iç-çarpım dönüşümü olur.

İspat : 1.) $(f+g,h) = \iint_G (f+g)(z)\overline{h(z)}d\sigma = \iint_G (f(z)+g(z))\overline{h(z)}d\sigma$

$$= \iint_G \left(f(z)\overline{h(z)} + g(z)\overline{h(z)}\right)d\sigma = \iint_G f(z)\overline{h(z)}d\sigma + \iint_G g(z)\overline{h(z)}d\sigma$$

$= (f,h) + (g,h)$.

2.) $$(f,g) = \iint_G f(z)\overline{g(z)}d\sigma = \iint_G \overline{\overline{f(z)\overline{g(z)}}}d\sigma = \iint_G \overline{\overline{f(z)}g(z)}d\sigma$$

$$= \iint_G \overline{g(z)\overline{f(z)}}d\sigma = \overline{\iint_G g(z)\overline{f(z)}d\sigma} = \overline{(g,f)}.$$

3.) $\forall a \in C$ için $(af,g) = a(f,g)$ sağlanır. Gerçekten:

$$(af,g)=\iint_G (af)(z)\overline{g(z)}d\sigma=\iint_G af(z)\overline{g(z)}d\sigma$$

$$=a\iint_G f(z)\overline{g(z)}d\sigma=a(f,g).\ \Rightarrow\ (af,g)=a(f,g).$$

4.) $\forall f\in L^2(G)$ için $(f,f)\geq 0$ sağlanır.

$$(f,f)=\iint_G f(z)\overline{f(z)}d\sigma=\iint_G |f(z)|^2 d\sigma\geq 0 \text{ olur.} \Rightarrow (f,f)\geq 0.$$

5.) $\forall f\in L^2(G)$ için $(f,f)=0.\Leftrightarrow f=0$ sağlanır.

$[(f,f)=0$ olsun. $]\Rightarrow \iint_G f(z)\overline{f(z)}d\sigma=0.\Rightarrow \forall z\in G$ için $\iint_G |f(z)|^2 d\sigma=0.$

$\Rightarrow \forall z\in G$ için $|f(z)|^2=0.\ \Rightarrow \forall z\in G$ için $|f(z)|=0.$

$\Rightarrow \forall z\in G$ için $f(z)=0.\ \Rightarrow f=0.$

$[\ f=0$ olsun. $]\Rightarrow \forall z\in G$ için $f(z)=0.\ \Rightarrow |f(z)|=0.\ \Rightarrow \forall z\in G$ için $|f(z)|^2=0.$ $\forall z\in G$ için $\iint_G |f(z)|^2 d\sigma=0.\ \Rightarrow \iint_G f(z)\overline{f(z)}d\sigma=0.$

$\Rightarrow (f,f)=0.$

$L^2(G)$ de $(f,g)=\iint_G f(z)\overline{g(z)}d\sigma$, $z\in G$ dönüşümü bir iç çarpım dönüşümüdür.

Bu durumda ($L^2(G)$,(. , .)) bir iç çarpım uzayı olur. $f\in L^2(G)$ fonksiyonu için

$$\|f\|:=(f,f)^{1/2}=\sqrt{\iint_G |f(z)|^2 d\sigma}$$

olsun. Bu dönüşüm bir norm dönüşümüdür ve $(L^2(G),\|.\|)$ normlu bir uzaydır.

Şimdi $L^2(G)$ uzayının bu tanımlanan norma göre tam olduğunu gösterelim. Bunun için $L^2(G)$ deki bir $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cauchy dizisinin $L^2(G)$ de yakınsak olduğunu ispatlayalım. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ $L^2(G)$ de bir Cauchy dizisi olsun. Buradan $\forall\varepsilon>0$ için $\exists N\in\mathbf{N}: \forall n,m>N$ için $\|f_n-f_m\|<\sqrt{\varepsilon}$ olur. $n,m>N$ için

$$\left\| f_n - f_m \right\|^2 < \varepsilon$$

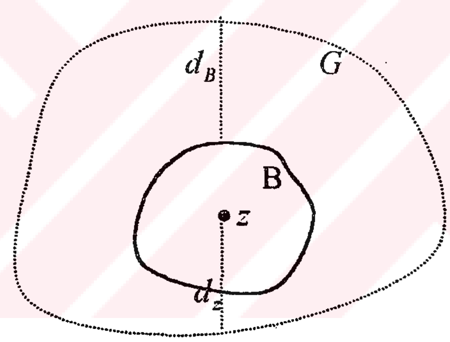
olur. Böylece,

$$\iint_G \left| f_n(z) - f_m(z) \right|^2 d\sigma < \varepsilon$$

olur. G bölgesinin bir kompakt B altkümesini alalım. Bu durumda $\forall z \in B$ için yardımcı teorem **2.1** yardımıyla

$$\left| f_n(z) - f_m(z) \right|^2 < \frac{\iint_G \left| f_n(z) - f_m(z) \right|^2 d\sigma}{\pi d_z^2}$$

sağlanır. $L^2(G)$ bir vektör uzayı olduğundan $f_n \in L^2(G)$ ve $f_m \in L^2(G)$ için $f_n - f_m \in L^2(G)$ olur. Ayrıca $d_z := d(z, \partial G)$, $z \in B$ olarak tanımlıdır.



Şekil **2.4**

$z \in B$ olduğundan

$$d = d(B, \partial G) = \inf\left\{ |\varsigma_1 - \varsigma_2| : \varsigma_1 \in B, \varsigma_2 \in \partial G \right\}$$

için $d_z \geq d$ olur. Böylece $\dfrac{1}{d_z} \leq \dfrac{1}{d}$ sağlanacağından $\forall z \in B$ için

$$\left| f_n(z) - f_m(z) \right|^2 \leq \frac{\left\| f_n(z) - f_m(z) \right\|^2}{\pi d_z^2} \leq \frac{\left\| f_n(z) - f_m(z) \right\|^2}{\pi d^2} < \frac{\varepsilon}{\pi d^2}$$

elde edilir ve G nin her kompakt altkümesi üzerinde $\left\{ f_n(z) \right\}_{n=0}^{\infty}$ düzgün yakınsak olur. Analitik fonksiyonların düzgün limiti analitik olacağından,

$$f_n(z) \Rightarrow F(z), (n \to \infty), z \in B$$

yakınsaması $B \subset G$ üzerinde düzgün olur. Böylece $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cauchy dizisi $F(z)$ analitik fonksiyonuna düzgün yakınsar.

$$\iint_G |f_n(z) - f_m(z)|^2 d\sigma < \varepsilon$$

olduğundan $n, m > N$ için

$$\iint_B |f_n(z) - f_m(z)|^2 d\sigma < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Yukarıdaki eşitsizlikte limit alırsak,

$$\iint_B |f_n - F|^2 d\sigma < \varepsilon$$

çıkar. Buradan, $\forall B \subset G$ için

$$\iint_G |f_n - F|^2 d\sigma < \varepsilon \qquad (2.1)$$

olur. F, G nin her kompakt altkümesinde analitik olduğundan G de de analitik olur. F fonksiyonun $L^2(G)$ de olduğunu, yani

$$\iint_G |F(z)|^2 d\sigma < \infty$$

sağlandığını ispatlayalım. Üçgen eşitsizliğini göz önüne aldığımızda, (2.1) kullanılarak

$$\|F\| \leq \|F - f_n\| + \|f_n\| < \infty$$

elde edilir. Böylece $F \in L^2(G)$ olduğu ispatlanır. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cauchy dizisi $L^2(G)$ deki bir F fonksiyonuna yakınsadığından dolayı $(L^2(G), \|.\|)$ uzayı tam normlu uzay, $L^2(G)$ ise bir Hilbert uzayı olur.

3. $L^2(G)$ DE POLİNOMLAR SİSTEMİNİN TAMLIĞI

Bu bölümde polinomlarla yaklaşımın mümkün olduğu (PA) bölgeler tanımlanıp PA özelliğine sahip bölgelerin özellikleri araştırılmıştır. Sonra PA özelliğine sahip olamayan ayvari ve kesik bölgenin özellikleri incelenmiştir.

3.1 Giriş

$G \subset \mathbf{C}$ sınırlı bölgesi verilmiş olsun. $L^2(G)$ de polinomların yoğun olması için G bölgesinin hangi özelliklere sahip olması gerektiğini araştıralım.

Teorem 3.1 *$S := \{1, z, z^2, z^3, z^4, ...\}$ olsun. Bu durumda $S \subset L^2(G)$ olur.*

İspat : $z \in G$ ve $k=0, 1, 2, 3, ...$ için $z^k \in L^2(G)$ olduğunu gösterelim. G sınırlı olduğundan,

$$\forall z \in G \text{ için } \exists M > 0 : |z| < M$$

sağlanır. Böylece

$$\iint_G |z^k|^2 d\sigma = \iint_G |z|^{2k} d\sigma \leq \iint_G M^{2k} d\sigma = M^{2k} \iint_G d\sigma = M^{2k} \cdot Alan(G) < \infty$$

ve $\forall k = 0, 1, 2, 3, ...$ için $z^k \in L^2(G)$ olur.

Tanım 3.1 *Eğer polinomlar sistemi $L^2(G)$ uzayında yoğunsa G bölgesine* PA *özelliğine sahip bölge denir.*

Teorem 3.2 *$G = \{z : |z| < 1\}$ açık birim diski* PA *özelliğine sahip bir bölgedir.*

İspat : G de analitik bir f fonksiyonu alalım. Taylor teoremine göre

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ yazılabilir. $f \in L^2(G)$ ise

$$\| f \|^2 = \iint_G |f(z)|^2 d\sigma = \iint_G \left| \sum_{K=0}^{\infty} a_k z^k \right|^2 d\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \iint_G | a_k |^2 | z |^{2k} d\sigma$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \left| a_k \right|^2 \left| \rho e^{i\theta} \right|^2 \rho d\rho d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \left| a_k \right|^2 \rho^{2k} \rho d\rho d\theta$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{1} \left| a_k \right|^2 \rho^{2k+1} \int_0^{2\pi} d\theta d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{1} \left| a_k \right|^2 \rho^{2k+1} 2\pi d\rho$$

$$= 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \left| a_k \right|^2 . \left(\frac{\rho^{2k+2}}{2k+2} \Big|_0^1 \right) = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \left| a_k \right|^2 \frac{1}{2(k+1)} = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left| a_k \right|^2}{k+1}$$

olur. Buradan görüldüğü gibi

$$\text{“}f(z) \in L^2(G) \Leftrightarrow \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left| a_k \right|^2}{k+1} < \infty \text{”}$$

olur.

$P_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ alalım. Böylece

$$\iint_G \left| f - P_n \right|^2 d\sigma = \left\| f - P_n \right\|^2 = \pi \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\left| a_k \right|^2}{k+1} \to 0.$$

Çünkü $\pi \sum_{k>n}^{\infty} \frac{\left| a_k \right|^2}{k+1}$ serisi, yakınsak $\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left| a_k \right|^2}{k+1}$ serisinin kalan serisidir.

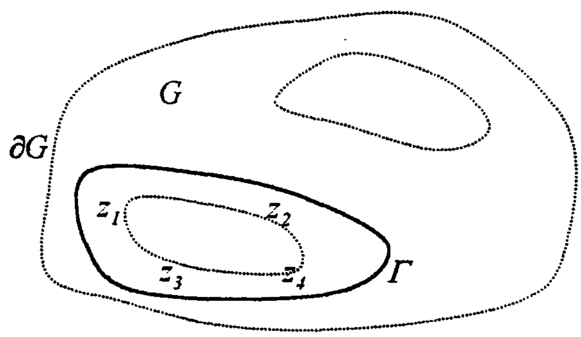
Bundan dolayı $\pi \sum_{k>n}^{\infty} \frac{\left| a_k \right|^2}{k+1} \to 0$ yazılabilir. Böylece $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall f \in L^2(G)$ için $\exists P_n(z)$ polinomu vardır ki $\iint_G \left| f - P_n \right|^2 d\sigma < \varepsilon$ sağlanır. Polinomlar $L^2(G)$ de yoğun olduğundan, G bölgesi PA özelliğine sahip bir bölgedir.

Teorem 3.3 *Katlı bağlantılı bölgeler* PA *özelliğine sahip bölgeler değildirler.*

İspat : G katlı bağlantılı bir bölge olsun. G nin sınır bileşeninin birinin üzerinde z_1 , z_2 , z_3 , z_4 noktalarını alalım.

$$f(z)=((z-z_1)(z-z_2))^{-1/2}((z-z_3)(z-z_4))^{-1/2}$$

fonksiyonunu düşünelim. f fonksiyonu G üzerinde analitiktir. Çünkü $z_1, z_2, z_3, z_4 \notin G$ dir. Bu sınır bileşenini kapsayan bir Γ Jordan eğrisi vardır.



Şekil **3.1**

Burada

$$\iint_G |f(z)|^2 d\sigma < \infty$$

olur. Gerçekten,

$$\frac{1}{|z-z_1||z-z_2||z-z_3||z-z_4|}=\frac{A_1}{|z-z_1|}+\frac{A_2}{|z-z_2|}+\frac{A_3}{|z-z_3|}+\frac{A_4}{|z-z_4|}$$

olduğundan, $i=1, 2, 3, 4, \ldots$ için

$$I_i=\iint_G \frac{A_i}{|z-z_i|}d\sigma \text{ ve } I=\iint_G |f(z)|^2 d\sigma = I_1+I_2+I_3+I_4$$

gösterimlerini kullanırsak,

$$I_i = A_i \iint_{|z-z_i|<R_i} \frac{d\sigma}{|z-z_i|} = A_i \int_0^{2\pi}\int_0^{R_i} \frac{rdrd\varphi}{r} = 2\pi A_i R_i < \infty$$

olur. Buradan ise $I=I_1+I_2+I_3+I_4<\infty$ çıkar. Sonuç olarak, $f(z)\in L^2(G)$ olur. $n\to\infty$ iken $\|f-P_n\|\to 0$ şartını sağlayan bir P_n, $n=1, 2, 3, \ldots$ polinomlar dizisinin var olduğunu düşünelim. O zaman yardımcı teorem **2.1** e göre dizisinin var olduğunu düşünelim. O zaman yardımcı teorem 2.1 e göre

$$\left|f(z)-P_n(z)\right| \leq \frac{\left\|f(z)-P_n(z)\right\|}{\sqrt{\pi}d_z} \leq \frac{\left\|f(z)-P_n(z)\right\|}{\sqrt{\pi}d_B} \leq \varepsilon$$

eşitsizliği G nin her B kompakt altkümesi üzerinde geçerlidir. Yani G nin her kompakt B altkümesi üzerinde $P_n(z) \to f(z)$ yakınsaması düzgündür. $P_n(z)$, $n=1, 2, 3, \ldots$, polinomları B de analitik ve yakınsama düzgün olduğundan $f(z)$ B de analitik olur. Bu durumda Γ kapalı Jordan eğrisi ile sınırlı bölgenin kapanışı da G bölgesinin kompakt bir altkümesi olduğundan, özel halde Γ üzerinde de $P_n(z) \to f(z)$ yakınsaması düzgündür. Maksimum prensibi yardımı ile $P_n(z) \to f(z)$ düzgün yakınsaması Γ üstünde sağlanıyorsa $int\,\Gamma$ de de sağlanır. Teklik teoremini düşünürsek Γ üstündeki düzgün limit ile $int\,\Gamma$ deki düzgün limit çakışır. Sonuç olarak $int\,\Gamma$ içindeki $f(z)$ düzgün limitinin $int\,\Gamma$ içinde analitik olduğu çıkar. Halbuki $f(z)$, $int\,\Gamma$ de analitik olamaz. Çünkü bu bölgede $f(z)$ nin tanımsız olduğu noktalar vardır. Bu varsayımımızla çelişti. Katlı bağlantılı bölgeler PA özelliğine sahip olamazlar ve ispat biter.

Katlı bağlantılı bölgeler PA özelliğine sahip olamadığından basit bağlantılı bölgeleri inceleyelim. Her basit bağlantılı bölge PA özelliğine sahip değildir. Örneğin aşağıda tanımları verilecek olan *Kesik bölge*, *Ayvari bölge* ve *İç yılan bölge* PA özelliği olmayan basit bağlantılı bölgelerdir.

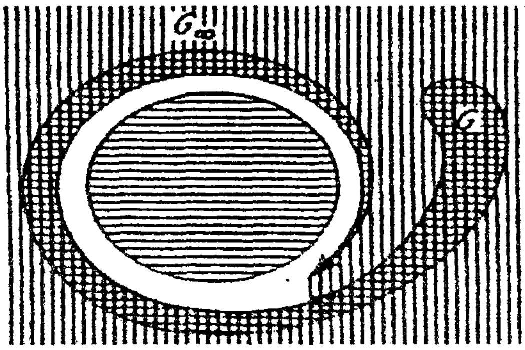
3.2 PA Özelliğine Sahip Bölgeler

Tanım 3.2 *G sınırlı, basit bağlantılı bir bölge olsun. ∂G sınırı, G nin ∞ noktasını içeren tümleyen bölgesinin sınırı ile çakışıyorsa G bölgesine Carathéodory bölgesi denir.*

Örnek 3.1 *Her bir Jordan bölgesi Carathéodory bölgesidir.*

Örnek 3.2 *Dış yılan bölge bir Carathéodory bölgesidir. Bu bölge, verilen bir çemberi dıştan saran yılanvari bölgeden oluşur öyle ki yılanvari bölgenin kuyruğu çembere sınırsız olarak yaklaşır.*

Bu bölgeye ait şekil aşağıda verilmiştir. [Şekil 3.2]



Şekil **3.2**

Bunu göstermek için G dış yılan bölgesinin sınırında bir z noktası alalım. $z \in \partial G$ ise $z \notin int\, \partial G$ ve $z \in ext\partial G$ olur. Buradan, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$B(z,\varepsilon) \cap G \neq \phi \quad \text{ve} \quad B(z,\varepsilon) \cap G_\infty \neq \phi$$

olur. Burada G_∞ ile G nin sonsuz noktasını içeren tümleyen bölgesini gösteriyoruz. Böylece $z \in \partial G_\infty$ olur. Bu $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall z \in \partial G$ için sağlandığı için $\partial G = \partial G_\infty$ olur, yani dış yılan bölge bir Carathéodory bölgesidir.

Örnek 3.3 *Bir çemberi içten bir yılanvari bölge sarsın öyle ki yılanın kuyruğu daralarak çembere sınırsız olarak yaklaşsın. Bu bölgeye* ***iç yılan bölge denir****. İç yılan bölge bir Carathéodory bölgesi değildir.*

Gerçekten : G bir iç yılan bölge olsun. Bu bölgenin Carathéodory bölgesi olması için sınırının, aynı zamanda ∞ noktasını içeren G_∞ tümleyeninin de sınırı olması gerekir. ∂G_∞ sınırı $|z| = r$ çemberinden oluşur. Bu durumda $\partial G = \partial G_\infty$ sağlanmaz. Çünkü ∂G sınırı $|z| = r$ çemberinin iç bölgesinden olan elemanlar içermektedir, yani iç yılan bölge bir Carathéodory bölgesi değildir.

Teorem 3.4 *G sınırlı, basit bağlantılı bir bölge olsun. ∂G sınırı, G nin ∞ noktasını içeren tümleyen bölgesinin sınırı ile çakışıyorsa G bölgesi* PA *özelliğine sahip bölge olur.*

İspat : Göstermemiz gereken şey $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall f \in L^2(G)$ için $\| f(z) - P(z) \| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir $P(z)$ polinomunun varlığıdır. Herhangi bir $f \in L^2(G)$ fonksiyonu alalım.

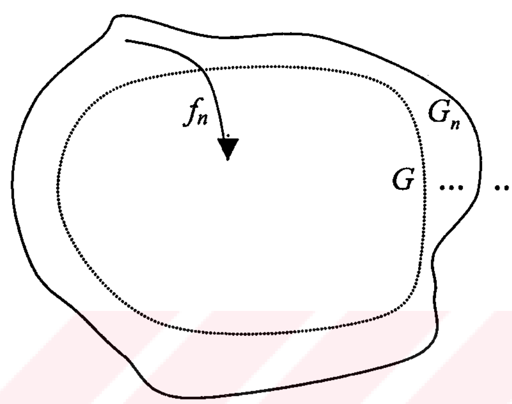
Adım 1 : $\overline{G}$ de analitik ve $\| f - F \| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir F fonksiyonu oluşturalım. $z \in G_n$ için

$$f_n(z) := f\big(h_n(z)\big) \cdot h_n'(z)$$

olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \iint_G |f_n|^2 \, d\sigma = \iint_G |f|^2 \, d\sigma$$

olduğunu ispatlayalım.



Şekil **3.3**

$w = h_n(z)$ olsun. Bu durumda

$$\iint_G |f_n|^2 \, d\sigma = \iint_{h_n(G)} \left|f\big(h_n(z)\big)\right|^2 \cdot \left|h_n'(z)\right|^2 d\sigma_w = \iint_{h_n(G)} |f(w)|^2 \, d\sigma_w$$

$$\leq \iint_{h_n(G)} |f|^2 \, d\sigma_w + \iint_{h_n(G_n - G)} |f|^2 \, d\sigma_w = \iint_{h_n(G_n)} |f|^2 \, d\sigma_w = \iint_G |f|^2 \, d\sigma$$

ve

$$\iint_G |f_n|^2 \, d\sigma \leq \iint_G |f|^2 \, d\sigma, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

sağlanır. Goluzin[4, s.55] den biliyoruz ki G nin her kompakt altkümesi üzerinde

$$f_n(z) \to f(z) \text{ (d. Y)}, \; (n \to \infty)$$

olur. Böylece,

$$\underline{\lim} \iint_G |f_n|^2 \, d\sigma \geq \underline{\lim} \iint_B |f_n|^2 \, d\sigma = \iint_B |f|^2 \, d\sigma$$

elde edilir. G bölgesinde öyle bir B_n bölgeler dizisi alalım ki,

$$B_n \subset G\ ,\ \overline{B_n} \subset B_{n+1} \subset G,\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

ve $B_n \to G,\ (n\to\infty)$. Ayrıca

$$\iint_{B_n} |f|^2\, d\sigma = \iint_{B_n} \underline{\lim} |f_n|^2\, d\sigma = \iint_{B_n} \overline{\lim} |f_n|^2\, d\sigma \le \iint_{G} |f|^2\, d\sigma$$

$$\iint_{B_n} |f|^2\, d\sigma = \underline{\lim} \iint_{B_n} |f_n|^2\, d\sigma \le \overline{\lim} \iint_{B_n} |f_n|^2\, d\sigma \le \iint_{G} |f|^2\, d\sigma,\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

... olacağından

$$\iint_{G} |f|^2\, d\sigma \le \underline{\lim} \iint_{G} |f_n|^2\, d\sigma \le \overline{\lim} \iint_{G} |f_n|^2\, d\sigma \le \iint_{G} |f|^2\, d\sigma$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{G} |f_n|^2\, d\sigma = \iint_{G} |f|^2\, d\sigma$$

çıkar. Böylece G nin her B kompakt altkümesi için

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{G-B} |f_n|^2\, d\sigma = \iint_{G-B} |f|^2\, d\sigma,\ (n\to\infty)$$

olur. Şimdi $0<\delta<\varepsilon^2/7$ olsun ve B, $\iint_{G-B} |f|^2\, d\sigma < \delta$ koşulunu sağlayan kompakt bir altküme, n

$$\iint_{G-B} |f_n|^2\, d\sigma < 2\delta \text{ ve } \iint_{B} |f_n - f|^2\, d\sigma < \delta$$

koşullarını sağlayan bir sayı olsun. Bu koşullar altında

$$\| f_n - f \|^2 = \iint_{B} |f_n - f|^2\, d\sigma + \iint_{G-B} |f_n - f|^2\, d\sigma$$

$$< \delta + 2\cdot\left(\iint_{G-B} |f_n|^2\, d\sigma + \iint_{G-B} |f|^2\, d\sigma \right) < \delta + 2\cdot(2\delta+\delta) = 7\delta < \varepsilon^2$$

olduğu görülür. $\| f_n - f \|^2 < \varepsilon^2$ olduğundan $\| f_n - f \| < \varepsilon$ sağlanır. f_n fonksiyonu $\overline{G}$ de analitik ve $\| f - f_n \| < \varepsilon$ olur. Böylece, istenen şartları sağlayan fonksiyon $F := f_n$ olarak bulunur.

2. Adım : $\|f - P\| < 2\varepsilon$ koşulunu sağlayan P polinomunu oluşturalım. $F = f_n$ fonksiyonuna Runge teoremini uygularsak, $\delta > 0$ ve $z \in \overline{G}$ için $\exists P$ polinomu vardır ki $|F(z) - P(z)| < \delta$ koşulu sağlanır. δ nın uygun seçimiyle

$$\iint_G |F - P|^2 \, d\sigma < \delta^2 \cdot \iint_G d\sigma = \delta^2 \cdot Alan(G) < \varepsilon^2$$

ve

$$\| f - P \|^2 < \varepsilon^2$$

elde edilir. Buradan $\| f - P \| < \varepsilon$ çıkar.

$$\| f - P \| \leq \| f - F \| + \| F - P \| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

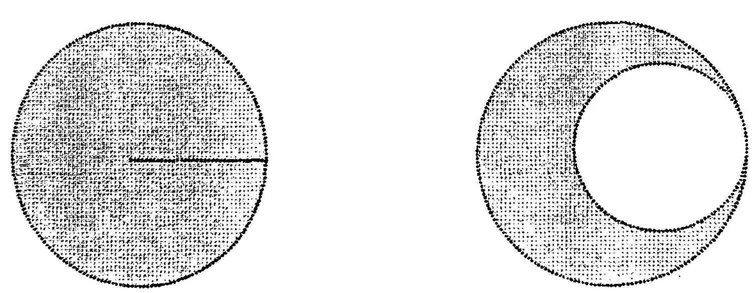
olması nedeniyle

$$\| f - P \| < 2\varepsilon$$

yazılabilir. Polinomlar G de yoğun olduğu için G bölgesi PA özelliğine sahiptir.

3.3 PA Özelliğine Sahip Olmayan Bölgeler

Her basit bağlantılı bölge PA özelliğine sahip değildir. Örneğin Kesik bölge, Ayvari bölge, İç yılan bölge PA özelliği olmayan basit bağlantılı bölgelerdir.



Şekil **3.4** (a) Kesik bölge (b) Ayvari bölge

3.3.1 Kesik Bölge

Tanım 3.7 *Sınırı kesik içeren bölgelere Kesik bölge denir.* (Şekil **3.4 (a)**)

Yardımcı Teorem3.1 *G ve G' iki bölge ve $G' \supset G$, $meas\left(G' - G\right) = 0$ olsun. Eğer G bölgesi* PA *özelliğine sahipse G' bölgesi de* PA *özelliğine sahip olur.*

İspat : G bölgesi PA özelliğine sahip olsun. $\forall f \in L^2(G')$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\| f - P \|_{L^2(G')} < \varepsilon$ koşulunu sağlayan $P(z)$ polinomunun varlığını gösterelim. Bir $f \in L^2(G')$ fonksiyonu alırsak f, G' bölgesinde analitik ve

$$\iint_{G'} |f|^2 d\sigma = \iint_{G'-G} |f|^2 d\sigma + \iint_{G} |f|^2 d\sigma = \iint_{G} |f|^2 d\sigma < \infty$$

olur. Buradan f, G de analitik ve $\iint_{G} |f|^2 d\sigma < \infty$ olacağından $f \in L^2(G)$ çıkar.

Hipotezden, $\varepsilon > 0$ için $\exists P$ polinomu vardır ki $\| f - P \|_{L^2(G)} < \varepsilon$ olur. Böylece,

$$\iint_{G} |f - P|^2 d\sigma + 0 = \iint_{G} |f - P|^2 d\sigma + \iint_{G'-G} |f - P|^2 d\sigma$$

$$= \iint_{G'} |f - P|^2 d\sigma = \| f - P \|^2_{L^2(G')} < \varepsilon$$

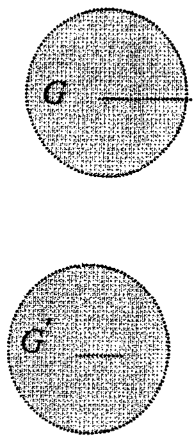
olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall f \in L^2(G')$ için $\exists P$ polinomu vardır ki $\| f - P \|_{L^2(G')} < \varepsilon$ sağlanır. Böylece G' bölgesi PA özelliğine sahip bir bölgedir.

Sonuç 3.1 *Eğer G' bölgesi PA özelliğine sahip değilse G bölgesi de PA özelliğine sahip değildir.*

Sonuç 3.2 *G ve G' iki bölge, $G' \supset G$, $meas\left(G' - G\right) = 0$ ve G' katlı bağlantılı ise G bölgesi PA özelliğine sahip olamaz.*

Teorem 3.5 *Kesik bölge* PA *özelliğine sahip bir bölge değildir.*

İspat : Kesikten bir kısmını silersek bölge katlı bağlantılı bir bölge olur.

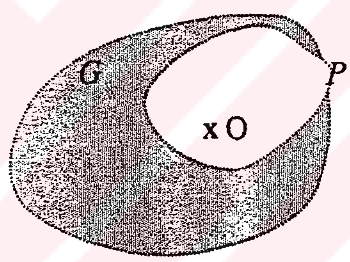


Yeni oluşan katlı bağlantılı bölgeyi G' ile gösterelim. $G' \supset G$ ve G' katlı bağlantılı olduğundan teorem 3.3 göz önüne alınırsa G' bölgesi PA özelliğine sahip bir bölge değildir. Ayrıca meas$\left(G' - G\right) = 0$ olduğundan sonuç 3.1 kullanılırsa G bölgesinin PA özelliğine sahip olmadığı çıkar. Böylece Kesik bölge (Şekil 3.4 (a)) PA özelliğine sahip değildir

Şekil 3.5

3.3.2 Ayvari Bölgeler

Tanım 3.4 *Tek bir noktada kesişen, içten teğet, kapalı iki Jordan eğrisi ile sınırlı bölgeye Ayvari bölge denir.* (Şekil 3.6)



Şekil 3.6

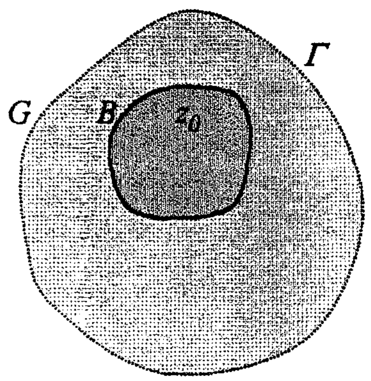
Yardımcı Teorem3.2 *Γ sonlu uzunluklu Jordan eğrisi ve $G := int\ \Gamma$ olsun. F fonksiyonu G de analitik, $\overline{G}$ de sürekli ve B, G nin kompakt bir altkümesi ise $\forall \alpha > 0$ için $\exists M(\alpha, B) =$ sabit :*

$$max\left\{\left|F(z)\right| : z \in B\right\} \le M(\alpha, B) \cdot \left\{\int_{\Gamma} \left|F(z)\right|^{\alpha} \left|d\sigma_z\right|\right\}^{1/\alpha}$$

olur.

İspat : Eğer, $\forall z \in G$ için $F(z) \neq 0$ yada $\alpha \geq 1$ ise F^{α} G de analitik olur ve buna Cauchy integral teoremini uyguladığımızda, $z_0 \in B$ için

$$F^{\alpha}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{F^{\alpha}(z)}{z - z_0} d\sigma_z$$



Şekil 3.7

olur. Bu durumda

$$\left|F^{\alpha}(z_0)\right| \le \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma}\frac{\left|F^{\alpha}(z)\right|}{d_{z_0}}\, d\sigma_z\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\left|F^{\alpha}(z)\right|}{d_B}\left|d\sigma_z\right|$$

$$= M(B)\cdot\int_{\Gamma}\left|F^{\alpha}(z)\right|\left|d\sigma_z\right|,$$

$$\left|F(z_0)\right|^{\alpha} \le M(B)\cdot\int_{\Gamma}\left|F^{\alpha}(z)\right|\left|d\sigma_z\right|$$

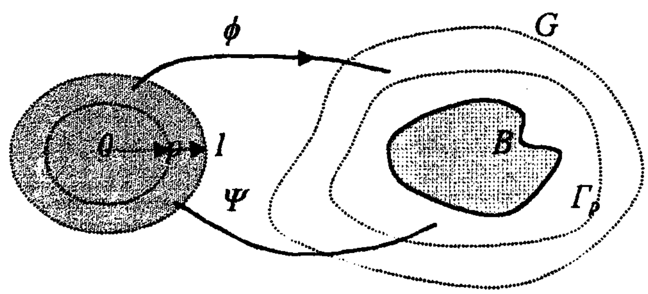
ve $\forall z_0 \in B$ için

$$\left|F(z_0)\right| \le M(\alpha, B)\cdot\left\{\int_{\Gamma}\left|F^{\alpha}(z)\right|\left|d\sigma_z\right|\right\}^{1/\alpha}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$max\left\{\left|F(z)\right| : z \in B\right\} \le M(\alpha, B)\cdot\left\{\int_{\Gamma}\left|F^{\alpha}(z)\right|\left|d\sigma_z\right|\right\}^{1/\alpha}$$

çıkar. Şimdi genel durumu düşünelim.



Şekil 3.8

$\phi:\{w:|w|<1\}\to G$ konform dönüşümünü alalım. $\rho<1$ öyle seçilsin ki G nin bir B kompakt altkümesi $\Gamma_\rho = \{z=\phi(w):|w|=\rho\}$ eğrisi tarafından kapsansın. $F(\phi(w))\cdot[\phi'(w)]^{1/\alpha}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon H^α Hardy uzayındandır. Çünkü, $F(\phi(w))$ fonksiyonu $\overline{G}$ de sürekli olduğundan, $F^\alpha(\phi(w))$ fonksiyonu da $\overline{G}$ de sürekli olur. Bu nedenle $F^\alpha(\phi(w))$ fonksiyonu $\overline{G}$ de sınırlıdır. Böylece,

$$\int_{\Gamma_\rho} |F(\phi(w))|^\alpha \cdot |\phi'(w)|\,|d\sigma_w| \le M\cdot \int_{\Gamma_\rho} |\phi'(w)|\,|d\sigma_w| \le M_1<\infty$$

olduğundan

$$F(\phi(w))\cdot \phi'(w)^{1/\alpha}\in H^\alpha$$

çıkar. [8, s.20] yardımıyla

$$F(\phi(w))\cdot \phi'(w)^{1/\alpha} = H(w)\cdot B(w)$$

yazılabilir. Burada $H(w)\in H^\alpha$ ve H, birim diskte sıfıra eşit değildir. Ayrıca $B(w)$ Blaschke çarpanın sıfır yerleri kümesi ile $F(\phi(w))$ nin sıfır yerleri kümesi eşittir. Bilindiği gibi $|w|<1$ için $|B(w)|\le 1$ ve $|w|=1$ için $|B(w)|=1$ sağlanır.

$|w|\le\rho<1$ olsun. Bu durumda

$$\left|F(\phi(w)).\phi'(w)^{1/\alpha}\right| < |H(w)| = |H^\alpha(w)|^{1/\alpha}$$

$$=\left(\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{H^\alpha(w)}{w-w_0}\,d\sigma_w\right|\right)^{1/\alpha} \le \left(\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1-\rho}\int_{|w|=1}|H^\alpha(w)|\,|d\sigma_w|\right)^{1/\alpha}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafındaki en son integrali bulalım.

$$\int_{|w|=1}|H^\alpha(w)|\,|d\sigma_w| = \int_{|w|=1}|H(w)\cdot B(w)|^\alpha\,|d\sigma_w|$$

$$= \int_{|w|=1}|F(\phi(w))|^\alpha\,|\phi'(w)|\,|d\sigma_w| = \int_{\Gamma}|F(z)|^\alpha\,|d\sigma_z|$$

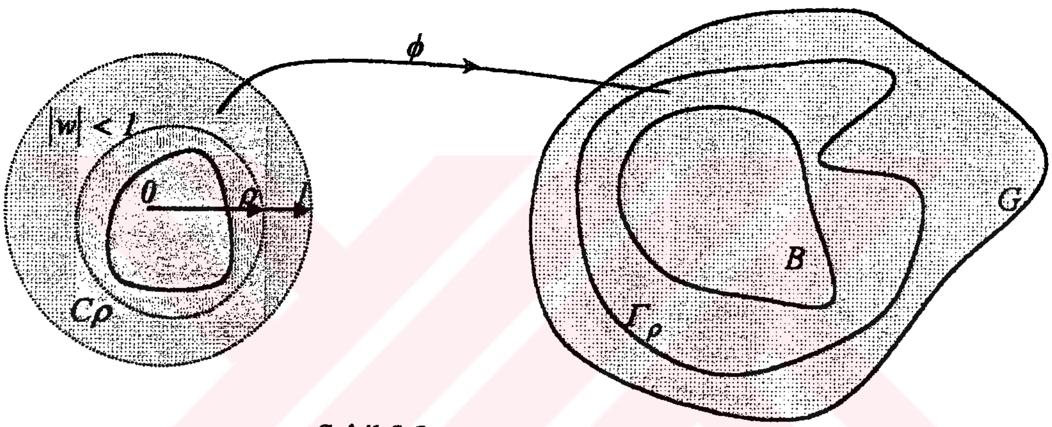
olduğundan

$$\left| F(\phi(w))\cdot\phi'(w)^{1/\alpha} \right| < M(\alpha, B)\cdot\left\{ \int_{\Gamma} \left| F(z) \right|^{\alpha} \left| d\sigma_z \right| \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

çıkar. $z \in B$ için $|w| \leq \rho$ sağlanır. ϕ , $|w| < 1$ de analitik ve birebir dir. ϕ' , $\overline{C_\rho}$ da sürekli olduğundan, minimum modül teoremini uygularsak, $|\phi'|$ minimum değerini $\partial C\rho$ da alır. Böylece

$$\left| \phi' \right| \geq C(\rho) > 0$$

sağlanacağından



Şekil 3.9

$$C(\rho)\left|F(z)\right| \leq \left| F(z)\cdot\phi'(w)^{1/\alpha} \right| < M(\alpha, B)\cdot\left\{ \int_{|w|=1} \left| F(z) \right|^{\alpha} \left| d\sigma_z \right| \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

ve $z \in B$ için

$$\left|F(z)\right| \leq M(\alpha, B)\cdot\left\{ \int_{|w|=1} \left| F(z) \right|^{\alpha} \left| d\sigma_z \right| \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

elde edilir. Buradan da

$$max\left\{ \left|F(z)\right| \,:\, z \in B \right\} \leq M(\alpha, B)\cdot\left\{ \int_{\Gamma} \left| F(z) \right|^{\alpha} \left| d\sigma_z \right| \right\}^{1/\alpha}$$

çıkar ve ispat biter.

Ayvari bölgeler her zaman PA özelliğine sahip olmazlar. Fakat bazı koşullar altında PA özelliğine sahip olabilirler.

Teorem 3.6 *G bölgesi sınırlı bir ayvari bölge ve ∂G sınırının iç Jordan eğrisi ile sınırlı bölge 0 noktasını içersin. G bölgesinin* PA *özelliğine sahip olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $\frac{1}{\sqrt{z}}$ fonksiyonuna polinomlarla istenilen şekilde yaklaşılabilir olmasıdır.*

İspat : $(\Rightarrow)$ [G PA özelliğine sahip olsun.] $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists P$ polinomu vardır ki $\left\| \frac{1}{\sqrt{z}} - P \right\| < \varepsilon$ sağlanır. İsteneni göstermek için $\frac{1}{\sqrt{z}} \in L^2(G)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ fonksiyonu G bölgesinde analitiktir. Bu durumda

$$\iint_G |f(z)|^2 \, d\sigma < \infty$$

eşitsizliğinin sağlandığını ispatlayalım. G bölgesi sınırlı olduğundan, $z \in G$ için $|z| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Böylece

$$\iint_G \left| \frac{1}{z} \right| d\sigma \leq \iint_G \frac{1}{M} \, d\sigma = M_1 \cdot \iint_G d\sigma = M_1 \cdot alan(G) < \infty$$

olduğundan

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \in L^2(G)$$

çıkar. Hipotezden, $\varepsilon > 0$ için $\exists P$ polinomu vardır ki

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{z}} - P \right\| < \varepsilon .$$

$(\Leftarrow)$ [$\frac{1}{\sqrt{z}}$ fonksiyonuna polinomlarla yaklaşılabilsin.] G bölgesinin PA özelliğine sahip olduğunu göstermek için, $\varepsilon > 0$ ve bir $f \in L^2(G)$ fonksiyonu alalım. $w = \sqrt{z}$ fonksiyonu G bölgesini bir G_w Jordan bölgesi üzerine resmeder. Bu durumda

$$\infty > \iint_G |f(z)|^2 \, dm = \iint_{G_w} \left| f\left(w^2\right) \right|^2 \cdot \left| \left(w^2\right)' \right|^2 dm_w$$

$$= 4 \iint_{G_w} \left| f\left(w^2\right) w \right|^2 dm_w$$

ve

$$\iint_{G_w} \left| f\left(w^2\right) w \right|^2 dm_w < \infty$$

olduğundan, $wf\left(w^2\right) \in L^2\left(G_w\right)$ olur. $L^2\left(G_w\right)$ uzayında polinomlar yoğun olduğundan

$$4 \iint_{G_w} \left| wf\left(w^2\right) - P(w) \right|^2 dm_w < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $P(w)$ polinomu vardır. Böylece

$$\iint_G \left| \frac{\sqrt{z} f(z) - P\left(\sqrt{z}\right)}{\sqrt{z}} \right| \cdot 4 \cdot z \cdot \left[\left(\frac{1}{\sqrt{z}} \right)' \right]^2 d\sigma$$

$$= \iint_G \left| f(z) - \frac{P\left(\sqrt{z}\right)}{\sqrt{z}} \right|^2 d\sigma < \varepsilon$$

sağlanır. $P(w)$ polinomunu tek ve çift kısımlarına ayırırsak

$$P\left(\sqrt{z}\right) = P_1(z) + \sqrt{z} P_2(z)$$

ve

$$\iint_G \left| f(z) - P_2(z) - \frac{P_1(z)}{\sqrt{z}} \right|^2 d\sigma = \left\| f(z) - P_2(z) - \frac{P_1(z)}{\sqrt{z}} \right\|$$

olur. Şimdi $\| f - Q \| < 2\varepsilon$ olacak şekilde bir Q polinomu bulalım.

$\left\| \frac{1}{\sqrt{z}} - R \right\| \to 0$ olduğundan $\left\| \frac{P_1}{\sqrt{z}} - R_1 \right\| \to 0$ sağlanır. Böylece,

$$\left\| f(z) - P_2(z) - \frac{P_1(z)}{\sqrt{z}} \right\| = \left\| f(z) - P_2(z) + R_1 + \frac{P_1(z)}{\sqrt{z}} - R_1 \right\|$$

$$\leq \left\| f(z) - P_2(z) + R_1 \right\| + \left\| \frac{P_1(z)}{\sqrt{z}} - R_1 \right\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

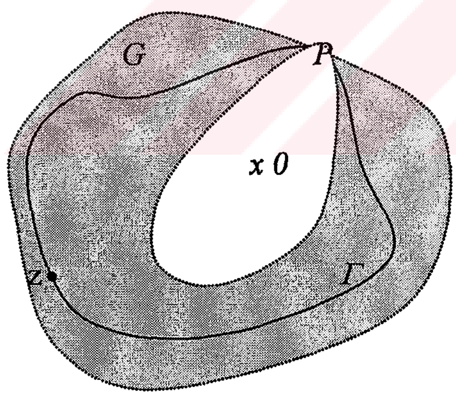
sağlandığından, G bölgesi PA özelliğine sahip bir bölge olur ve teoremin ispatı biter.

Teorem 3.7 *$\Gamma \subset G \cup \{P\}$, Γ sonlu uzunluklu Jordan eğrisi ve bir $\alpha > 0$ değeri için $I := \int_{\Gamma} \frac{|dz|}{d_z^{\alpha}} < \infty$ olsun. Bu durumda G Ayvari bölgesi* PA *özelliğine sahip olmaz. Burada $d_z := d(z, \partial G)$ ve $z \in \Gamma$ dır.*

İspat : Varsayalım ki G, PA özelliğine sahip olsun. $f \in L^2(G)$ için $\exists P_n$ polinomu vardır ki

$$\left\| f - P_n \right\| \to 0, (n \to \infty)$$

olur. Bu durumda, f nin *int* Γ de analitik olacağını gösterelim.



Şekil **3.10**

Yardımcı teorem**2.1** yardımıyla, $\forall z \in \Gamma - \{P\}$ için

$$\left| P_n(z) - P_m(z) \right| \leq \frac{\left\| P_n - P_m \right\|}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{d_z}$$

olduğundan, hipotez kullanılarak

$$\int_{\Gamma} \left| P_n(z) - P_m(z) \right|^{\alpha} |d\sigma| \leq I \cdot \pi^{-\alpha/2} \cdot \left\| P_n - P_m \right\|^{\alpha}$$

çıkar. Yardımcı teorem3.2 göz önünde bulundurulursa

$$max\left\{\left|P_n - P_m\right|\right\} \leq \left\{\left|P_n(z) - P_m(z)\right|^{\alpha} \left|d\sigma\right|\right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\leq M^{\frac{1}{\alpha}} \cdot l^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \pi^{-1/2} \cdot \left\|P_n - P_m\right\|$$

eşitsizliği sağlandığından,

$$max\left\{\left|P_n(z) - P_m(z)\right|\right\} \leq M^{1/\alpha} \cdot l^{1/\alpha} \cdot \pi^{-\alpha/4} \cdot \left\|P_n - P_m\right\|$$

$$\leq M^{1/\alpha} \cdot l^{1/\alpha} \cdot \pi^{-\alpha/4} \cdot \left(\left\|f - P_n\right\| + \left\|f - P_m\right\|\right) < \varepsilon .$$

int Γ nin kompakt her altkümesinde P_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ polinomlar dizisi düzgün yakınsak olur ve ayrıca G bölgesinde düzgün limit fonksiyonu f ile çakıştığından $f(z)$ *int* Γ da analitik olur. Bu ise bir çelişkidir ve teorem ispatlanır.

4. $L^2(G)$ HİLBERT UZAYINDA ORTHONORMAL SİSTEMLERE GÖRE AÇILIMLAR

Bu bölümde Hilbert uzaylarında bir fonksiyonun bu uzaydaki bir orthonormal sistem yardımıyla seriye açılımı incelenmiştir.

4.1 Hilbert Uzaylarında Orthonormal Açılımlar

H bir Hilbert uzayı ve $\left\{ \upsilon_j \right\}_{j=0}^{\infty}$, H uzayında bir orthonormal sistem olsun. $x \in H$ için Fourier katsayılarını, $\gamma_j := (x, \upsilon_j)$ şeklinde oluşturalım. Bu durumda aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 4.1 *(a)* $\left\| x - \sum_{j=1}^{n} c_j \upsilon_j \right\|^2$ *ifadesinin minimum değer alması için gerek ve yeter koşul* $c_j = \gamma_j$, $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ *olmasıdır.*

(b) (a) daki ifadenin minimum değeri $\|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \left|\gamma_j\right|^2$ *olur.*

(c) BESSEL EŞİTSİZLİĞİ : $\forall x \in H$ *için* $\|x\|^2 \geq \sum_{j=1}^{\infty} \left|\gamma_j\right|^2$ *sağlanır.*

İspat :
$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} c_j \upsilon_j \right\|^2 = \left(x - \sum_{j=1}^{n} c_j \upsilon_j , x - \sum_{j=1}^{n} c_j \upsilon_j \right) = \left(x, x - \sum_{j=1}^{n} c_j \upsilon_j \right)$$
$$- \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \upsilon_j , x - \sum_{j=1}^{n} c_j \upsilon_j \right) = (x, x) - \left(x, \sum_{j=1}^{n} c_j \upsilon_j \right) - \left(x - \sum_{j=1}^{n} c_j \upsilon_j , x \right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \left(c_j \upsilon_j , c_j \upsilon_j \right) = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j} (x, \upsilon_j) - \sum_{j=1}^{n} c_j (\upsilon_j, x) + \sum_{j=1}^{n} \left|c_j\right|^2 (\upsilon_j, \upsilon_j)$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j}\gamma_j - \sum_{j=1}^{n} c_j\overline{\gamma_j} + \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 - \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j}\gamma_j - \sum_{j=1}^{n} c_j\overline{\gamma_j} + \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} c_j\overline{c_j} - \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j}\gamma_j - \sum_{j=1}^{n} c_j\overline{\gamma_j} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j\overline{\gamma_j}$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} \left(c_j\overline{c_j} - \overline{c_j}\gamma_j - c_j\overline{\gamma_j} + \gamma_j\overline{\gamma_j}\right)$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} c_j\left(\overline{c_j} - \overline{\gamma_j}\right) - \gamma_j\left(\overline{c_j} - \overline{\gamma_j}\right)$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} \left(c_j - \gamma_j\right)\left(\overline{c_j - \gamma_j}\right)$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} |c_j - \gamma_j|^2$$

elde edilir. Bu durumda $\left\| x - \sum_{j=1}^{n} c_j \upsilon_j \right\|^2$ ifadesinin minimum değer alabilmesi için $c_j = \gamma_j$, $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ olmalıdır.

(a) daki ifadenin minimum değerini bulmak için $j = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere $c_j = \gamma_j$ alırsak, minimum değer

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} c_j \upsilon_j \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} |c_j - c_j|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2$$

olur ve (b) ispatlanır.

Şimdi (c) yi ispatlayalım. $\left\| x - \sum_{j=1}^{n} c_j \upsilon_j \right\|^2 \geq 0$. Bu ifadenin minimumu da 0 dan büyük eşit olduğundan,

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \upsilon_j \right\|^2 \geq 0 \Rightarrow \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \left|\gamma_j\right|^2 \geq 0$$

olur. Böylece

$$\|x\|^2 \geq \sum_{j=1}^{n} \left|\gamma_j\right|^2$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alırsak,

$$\|x\|^2 \geq \sum_{j=1}^{\infty} \left|\gamma_j\right|^2$$

Bessel eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2 *Aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktirler :*

(a) $\left\{\upsilon_j\right\}_{j=0}^{\infty}$ *tam orthonormal sistemdir.*

(b) $\forall x \in H$ *ve* $\forall \varepsilon > 0$ *için* $\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \upsilon_j \right\| < \varepsilon,\ (n \to \infty).$

(c) PARSEVAL EŞİTLİĞİ : $\forall x \in H$ *için* $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\gamma_j\right|^2$ *sağlanır.*

İspat : [(a) $\Leftrightarrow$ (b)] $\left\{\upsilon_j\right\}_{j=0}^{\infty}$ tam orthonormal sistem olsun. $x \in H$ alalım.

$\Leftrightarrow$ υ_j lerin lineer bileşimi H kümesinde yoğundur.

$\Leftrightarrow$ $n \to \infty$ için $\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \upsilon_j \right\| \to 0$ sağlanır. $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \upsilon_j \right\| < \varepsilon.$

[(b) $\Leftrightarrow$ (c)] teorem **4.1 (b)** den $0 \leq \min\limits_{c_j} \left\| x - \sum_{j=1}^{n} c_j \upsilon_j \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2 .$

$\Leftrightarrow$ hipotezden $\|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2 \leq 0$ sağlanır. $\Leftrightarrow$ $0 \leq \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2 \leq 0.$

$\Leftrightarrow \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2 = 0.$ $\Leftrightarrow$ $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2$ eşitliği $\forall j$ için sağlanır.

$\Leftrightarrow$ $n \to \infty$ için limit alırsak,

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\gamma_j|^2$$

Parseval eşitliği çıkar ve teoremin ispatı biter.

4.2 $L^2(G)$ Uzaylarında Orthonormal Açılımlar

G bir bölge ve bu bölgede tanımlı $L^2(G)$ Hilbert uzayında $\left\{ \phi_j \right\}_{j=0}^{\infty}$ bir orthonormal sistem olsun. $f \in L^2(G)$ için Fourier katsayılarını aşağıda verilen tanımdaki şekliyle oluşturalım.

Tanım 4.1 $\gamma_j = \left(f, \phi_j \right) = \iint\limits_G f \cdot \overline{\phi_j} \, d\sigma$,$j=1, 2, 3, \ldots$

değerlerine f nin ***Fourier katsayıları,***

$$\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \phi_j$$

serisine ise f nin ***Fourier serisi*** *denir.*

Eğer $\left\{ \phi_j \right\}_{j=0}^{\infty}$ orthonormal sistemi tam ise teorem **4.2** ye göre

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \phi_j \right\| \to 0, (n \to \infty)$$

yazılabilir.

Teorem 4.3 *Eğer $L^2(G)$ uzayındaki bir* $\left\{\phi_j\right\}_{j=0}^{\infty}$ *ortanormal sistemi tam ortanormal sistem ve $f \in L^2(G)$ fonksiyonunun Fourier serisi* $\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \phi_j$ *ise*

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \phi_j \right\| \to 0,\ (n \to \infty)$$

sağlanır. Ayrıca G nin her kompakt B altkümesi üzerinde

$$\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \phi_j \to f$$

yakınsaması düzgündür.

İspat : $d := d(B, \partial G) = \inf\{|x - y| : x \in B; y \in \partial G\}$ olsun.

Yardımcı teorem**2.1** e göre, $\forall z \in B$ için

$$\left| f(z) - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \phi_j(z) \right| \leq \frac{\left\| f - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \phi_j \right\|}{\sqrt{\pi} d_z} \leq \frac{\left\| f - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \phi_j \right\|}{\sqrt{\pi} d}$$

olduğundan, teorem **4.2(b)** uygulanırsa

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \phi_j \right\| \to 0,(n \to \infty)$$

elde edilir. Buradan, $z \in B$ için

$$\left| f(z) - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \phi_j(z) \right| \to 0,(n \to \infty)$$

olur. Böylece G nin her kompakt B altkümesi üzerinde

$$\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \phi_j \to f$$

yakınsaması düzgün olur ve teoremin ispatı biter.

Teorem **4.3** e göre, eğer ortanormal sistem tamsa, G nin her bir tıkız altkümesi üzerinde, f nin Fourier serisi f ye düzgün yakınsar, yani

Teorem 4.3 e göre, eğer orthonormal sistem tamsa, G nin her bir tıkız altkümesi üzerinde, f nin Fourier serisi f ye düzgün yakınsar, yani

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j\phi_j(z),\ z\in B$$

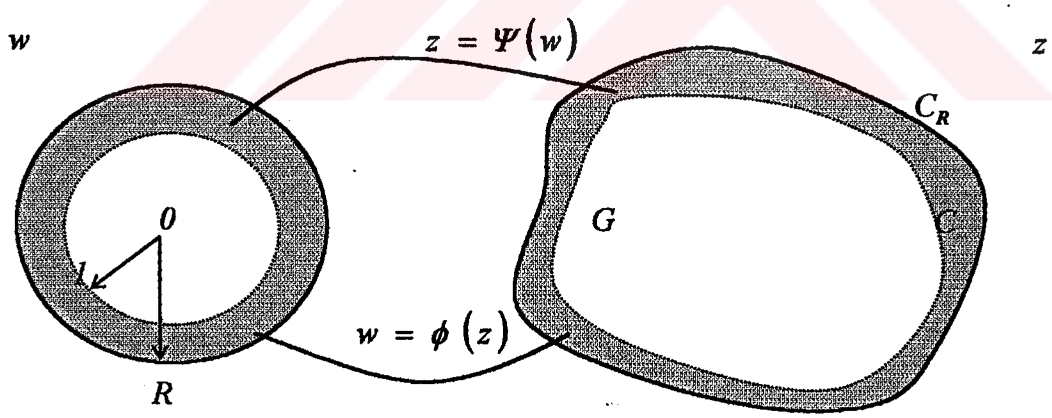
sağlanır.

4.3 f $\overline{G}$ de Analitik İken Yaklaşımın Kalitesi

f, $\overline{G}$ de analitik olsun. Bu durumda, f nin orthonormal seri açılımı G nin her kompakt altkümesi üzerinde f ye düzgün yakınsar. Bu serinin $\overline{G}$ de düzgün yakınsaklık koşullarını araştıralım. G bir Jordan bölgesi, $C:=\partial G$, f $\overline{G}$ de analitik ve $\{P_j\}_{j=0}^{\infty}$, G nin ON polinomlar sistemi olsun.

$$z = \Psi(w) = cw + c_0 + \frac{c_1}{w} + \ldots,\ c > 0$$

ile $\{w : |w| < 1\}$ bölgesini $extC$ üzerine konform resmeden dönüşümü gösterelim. Bu dönüşümü ∞ noktasında $\Psi(\infty) = \infty$, $\lim\limits_{w\to\infty}\dfrac{\Psi(w)}{w} = c > 0$ olacak şekilde normlayalım. ϕ ile Ψ dönüşümünün ters dönüşümünü gösterelim.



Şekil 4.1

$C_R = \{z : |\phi(z)| = R > 1\}$ seviye eğrileri tanımlansın.

Yardımcı Teorem4.1 (Bernstein) : *Yukarıdaki bilgilere ilaveten P, n dereceli bir polinom ve $z \in C := \partial G$ için $|P(z)| \le 1$ olsun. Bu durumda $z \in C_R$ için $|P(z)| \le R^n$ sağlanır.*

İspat : $\phi(z)$ dönüşümü *extC* bölgesini $ext\{w : |w| < 1\}$ bölgesine resmettiğinden $P(z)/[\phi(z)]^n$ fonksiyonu *extC* de analitik, *extC* in kapanışında süreklidir. Maksimum modül teoremine göre bu fonksiyon maksimum değerini C üzerinde aldığından, $z \in extC$ için

$$\left|\frac{P(z)}{[\phi(z)]^n}\right| \leq max\left|\frac{P(z)}{[\phi(z)]^n}\right| \leq 1$$

sağlanır. Bu durumda, $z \in C_R$ alırsak

$$\frac{|P(z)|}{|R^n|} = \frac{|P(z)|}{R^n} \leq 1$$

ve dolayısıyla

$$|P(z)| \leq R^n$$

olur. Yani, $z \in C_R$ için $|P(z)| \leq R^n$ çıkar. Böylelikle yardımcı teorem **4.1** ispatlanır.

Teorem 4.1 *Bölüm* **4.3** *ün başındaki bilgilere ek olarak* C *Jordan eğrisi olsun ve* $\rho > 1$, f *nin analitik olduğu en geniş bölgenin* C_ρ *sınırına göre belirlensin.* $\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j P_j$ *, f fonksiyonunun* $\{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ ON *polinomlar sistemine göre açılımı ve* $p_n := \sum_{j=1}^{n} \gamma_j P_j$ *ise*

$$max\left\{\left|f(z) - p_n(z)\right| : z \in \overline{G}\right\} = O\left(R^n\right)$$

bağıntısı $\forall R < \rho$ *için geçerli,* $\forall R > \rho$ *için geçersizdir.*

İspat : (a) İlk önce $R > \rho$ için bağıntının sağlanmayacağını gösterelim. Bu amaçla, $\forall z \in \overline{G}$ ve $R > \rho$ için

$$|f(z) - p_n(z)| \leq \frac{M_1}{R^n}$$

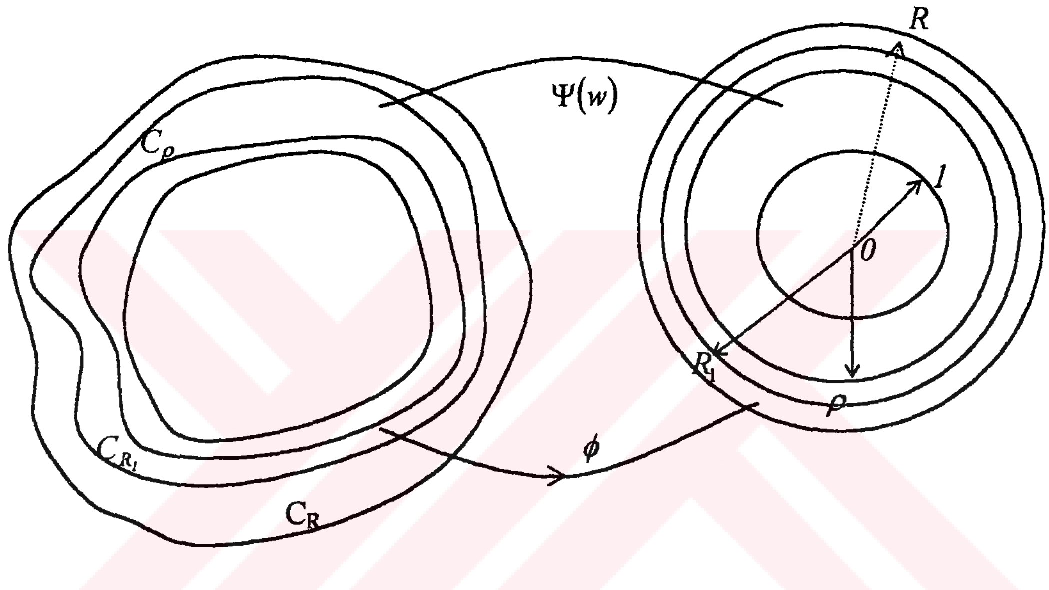
şartını sağlayan n dereceli bir p_n polinomunun varolamadığını ispatlayalım. Gerçekten, eğer böyle $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ polinomları varsa $z \in \overline{G}$ için

$$\left|p_{n+1}(z) - p_n(z)\right| \leq \left|f(z) - p_{n+1}(z)\right| + \left|f(z) - p_n(z)\right| \leq \frac{2M_1}{R^n}$$

olur. Yardımcı teorem 4.1 yardımıyla $z \in C_{R_1}$, $(\rho < R_1 < R)$ için

$$\left|p_{n+1} - p_n\right| \leq \frac{2M_1}{R^n} \cdot R_1^{n+1} = 2M_1 R_1 \left(R_1 / R\right)^n$$

elde edilir.



Şekil **4.2**

Majör testini uygularsak, C_{R_1} üzerinde ve içinde $p_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(p_{n+1} - p_n\right)$ polinomlar serisi düzgün yakınsaktır ve serinin F düzgün limiti de $int\, C_{R_1}$ de analitiktir. Fakat G de F ile f özdeş olarak eşit olduğundan f $int\, C_{R_1}$ de analitiktir ve $R_1 > \rho$. Bu da ρ un seçimiyle çelişki oluşturur.

b) $R < \rho$ için

$$max\left\{\left|f(z) - p_n(z) : z \in \overline{G}\right|\right\} \leq \frac{C}{R^n}$$

olduğunu gösterelim. Bu amaçla $1 < \sigma < R_1 < \rho$ için

$$\max_{\overline{G}}\left|f(z)-p_n(z)\right| \le N\cdot\left(\frac{\sigma}{R_1}\right)^n, (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \qquad (4.1)$$

sağlandığını ispatlayalım. Burada N ile bir sabiti ve p_n ile f nin Fourier serisinin n-kısmi toplamı gösterilsin. [2, s.66] uygulanırsa öyle π_n, $n = 0,1,2,3,\ldots$ polinomları vardır ki π_n n dereceli polinomdur ve

$$\max_{\overline{G}}\left|f(z)-\pi_n(z)\right| \le M_2\cdot R_1^{-n}, (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu π_n polinomları için

$$\left\|f-\pi_n\right\| \le M_2 R_1^{-n}$$

eşitsizliği geçerlidir. Çünkü $R_1 > 1$ için $R_1^{-2n} < R_1^{-n}$ olduğundan

$$\iint_G\left|f-\pi_n\right|^2 d\sigma \le \iint_G\left(M_2 R_1^{-n}\right)^2 d\sigma = M_4 R_1^{-2n} < M_2 R_1^{-n}$$

olur. Bu eşitsizlik p_n minimal polinomları için de geçerlidir, yani

$$\left\|f-p_n\right\| \le M_2 R_1^{-n}$$

olur. Yardımcı teorem2.1 kullanılırsa G nin her bir kompakt altkümesi üzerinde

$$\left|f(z)-p_n(z)\right| \le \frac{\left\|f-p_n\right\|}{\sqrt{\pi}\,d_z} \le \frac{M_2 R_1^{-n}}{\sqrt{\pi}\,d_B} = M_3(B)R_1^{-n}$$

olduğundan, $z\in B$ için

$$\max_{B}\left|f(z)-p_n(z)\right| \le M_3(B)R_1^{-n}$$

ve

$$\left|p_{n+1}(z)-p_n(z)\right| \le 2M_3(B)R_1^{-n}$$

sağlanır. Çünkü $R_1>1$ için $R_1^{-(n+1)} < R_1^{-n}$ olduğundan

$$\left|p_{n+1}(z)-f(z)+f(z)-p_n(z)\right|$$

$$\le \left|f(z)-p_{n+1}(z)\right| + \left|f(z)-p_n(z)\right|$$

$$\le M_3(B)R_1^{-(n+1)} + M_3(B)R_1^{-n} < 2M_3(B)R_1^{-n}$$

olur. Γ Jordan eğrisi C ye öyle yakın seçilsin ki $C \subset \Gamma_\sigma$ olsun. $B = \Gamma$ seçilip, yardımcı teorem **4.1** kullanılırsa, $z \in \Gamma_\sigma$ için

$$\left|p_{n+1}(z) - p_n(z)\right| \le 2M_3(B)R_1^{-n}\sigma^{n+1}$$

olur. Böylelikle $p_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(p_{n+1} - p_n\right)$ polinomlar serisi, Γ_σ nin üzerinde ve içinde analitik bir F fonksiyonuna düzgün yakınsar. $\overline{G} \subset \Gamma_\sigma$ olduğundan $z \in \overline{G}$ için

$$\left|F(z) - p_n(z)\right| = \left|\sum_{k \ge n}\left(p_{k+1}(z) - p_k(z)\right)\right| \le \sum_{k \ge n}\left|p_{k+1}(z) - p_k(z)\right|$$

$$\le \sum_{k \ge n} M_3(B)R_1^{-k}\sigma^{k+1} = 2M_3(B)\sigma\sum_{k \ge n}\left(\frac{\sigma}{R_1}\right)^k$$

sağlanır. Bu durumda F için (4.1) sağlanmış olur. Yalnız, $z \in G$ için

$$p_n(z) \to f(z), (n \to \infty)$$

olduğundan G de F ile f özdeş olarak eşit olur. Bu nedenle

$$\max_{\overline{G}}\left|f(z) - p_n(z)\right| \le N \cdot \left(\frac{\sigma}{R_1}\right)^n, (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

çıkar. Buradan $\frac{\sigma}{R_1} < \rho$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\max\left|f(z) - p_n(z)\right|}{\left(\sigma / R_1\right)^n} \le N$$

olur. Böylece

$$\max\left\{\left|f(z) - p_n(z)\right| : z \in \overline{G}\right\} = O\left(\left(\frac{\sigma}{R_1}\right)^n\right)$$

elde edilir.

5. KVAZİ-KONFORM SINIRA SAHİP SONLU BÖLGELER ÜZERİNDE TANIMLI AĞIRLIKLI BERGMAN UZAYLARINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ FABER SERİLERİYLE YAKLAŞIM

$G \subset C$ sonlu, Γ kvazi-konform sınıra sahip bir bölge ve $A^2(G,\omega)$, G içinde analitik fonksiyonların ağırlıklı Bergman uzayı olsun. Bu bölümde $A^2(G,\omega)$ deki fonksiyonların genelleştirilmiş Faber serileri ve onların yaklaşım özellikleri ile ilgili yapılan araştırmalar incelenmiştir.

5.1 Giriş

$E \subset C$ en az iki nokta içeren, tümleyeni bağlantılı, sonlu bir kontinyum olsun. D ile açık birim diski, $w = \varphi(z)$ ile $CE := \overline{C} - E$ bölgesinin $C\overline{D} := \overline{C} - \overline{D}$ üzerine konform dönüşümünü gösterelim. Bu konform dönüşümü ∞ noktasında

$$\varphi(\infty) = \infty, \varphi'(\infty) > 0$$

olacak şekilde normlayalım. Burada, $\overline{C}$ ve $\overline{D}$ sırasıyla C karmaşık düzlemi ve D birim diskinin kapanışlarını gösterir. $\varphi(z)$ dönüşümünün ters dönüşümü $\Psi = \varphi^{-1}$ ile gösterilsin ve rasgele bir $R > 1$ sabit sayısı için

$$\Gamma_R := \{z : |\varphi(z)| = R\}, E_R := \{z : z \in CE, |\varphi(z)| < R\} \cup E$$

olsun. g, CE de analitik bir fonksiyon, $g(\infty) > 0$ olsun. ([10], s.67) den bilindiği gibi E ile bağlantılı $F_n(z,g)$, $n=1, 2, 3, \ldots$ genelleştirilmiş Faber polinomları, $\{C\overline{D}, CE\}$ nin kompakt altkümelerinde düzgün ve mutlak yakınsak

$$\frac{wg[\Psi(w)]\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(z,g)}{w^n}, \ z \in E, \ |w| > 1 \qquad (5.1)$$

açılımı ile tanımlıdır. (5.1) in z ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{wg[\Psi(w)]\Psi'(w)}{[\Psi(w) - z]^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n'(z,g)}{w^n} \qquad (5.2)$$

olur. Her n doğal sayısı için $F_n(z,g)$ nin n dereceli bir polinom olduğu kolayca görülebilir. Faber polinomları ve genelleştirilmiş Faber polinomları ile ilgili ayrıntılı bilgi [1-2-10] da bulunabilir.

G sonlu, Γ kvazi-konform sınıra sahip bir bölge ve $0 \in G$, ω ise G üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olsun. Eğer bir çemberi Γ üzerine resmeden **C** den **C** ye kvazi-konform izomorfizm varsa Γ ye ***kvazi-konform eğri*** denir.

G de analitik f fonksiyonu için

$$A^2(G,\omega) := \left\{ f : \iint_G |f(z)|^2 \omega(z) d\sigma_z < \infty \right\}$$

$$A(G) := \left\{ f : \iint_G |f(z)| d\sigma_z < \infty \right\}$$

olsun. Eğer $\omega = 1$ ise $A^2(G) := A^2(G,1)$ gösterimi kullanılır. $A^2(G,\omega)$ uzayına ağırlıklı Bergman uzayı denir. Bilindiği gibi Bergman uzayları $A^2(G)$ ile gösterilir. Eğer

$$\|f\|_{A^2(G,\omega)} := \left(\iint_G |f(z)|^2 \omega(z) d\sigma_z \right)^{1/2}$$

tanımlanırsa $A^2(G,\omega)$ normlu bir uzay olur. Belyi [11] de, G de analitik ve sınırlı f fonksiyonları için aşağıdaki integral gösterimini ispatlamıştır :

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{C\overline{G}} \frac{(f \circ y)(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2} y_{\bar{\varsigma}} d\sigma_\varsigma , \quad z \in G. \qquad (5.3)$$

Burada $y = y(\varsigma)$, Γ sınırına göre kvazi-konform yansımayı gösterir. Ahlfors teoremi [12] ([9], s.26, sonuç1.3) kullanılırsa $y = y(\varsigma)$ yansıması, Γ eğrisinin noktaları hariç hemen hemen her yerde C de türevlenebilecek şekilde kanonik seçilebilir ve istenilen kadar küçük $\delta > 0$ sabit sayısı için

$$\left|y_\varsigma\right| + \left|y_{\bar{\varsigma}}\right| \le c_1 \quad , \ \delta < |z| < \frac{1}{\delta} \ , \ \varsigma \notin \Gamma$$

$$\left|y_\varsigma\right| + \left|y_{\bar{\varsigma}}\right| \le c_2 |\varsigma|^{-2} \quad , \ |\varsigma| \ge \frac{1}{\delta} \quad , \ |\varsigma| \le \delta \tag{5.4}$$

koşullarını sağlar.

Sadece kanonik kvazi-konform yansımaları göz önüne alarak Batchaev [13] Belyi'nin sonucunu geliştirmiş ve (5.3) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşulun $f \in A(G)$ olduğunu göstermiştir. Batchaev'in sonucunun tam ispatı ([9], s.110, teorem4.4) de bulunabilir. Burada ve daha sonra $y = y(\varsigma)$, Γ sınırına göre kanonik yansıma olarak düşünülecektir. $f \in A(G)$ olsun. (5.3) de $\varsigma = \Psi(w)$ yazarsak

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{C\bar{D}} f(y(\Psi(w))) y_{\bar{\varsigma}} [\Psi(w)] \frac{\Psi'(w)\overline{\Psi'(w)}}{[\Psi(w) - z]^2} d\sigma_w \tag{5.5}$$

$$= -\frac{1}{\pi} \iint_{C\bar{D}} \frac{f(y(\Psi(w))) y_{\bar{\varsigma}} [\Psi(w)] \overline{\Psi'(w)}}{g(\Psi(w))} \frac{g[\Psi(w)] \Psi'(w)}{[\Psi(w) - z]^2} d\sigma_w$$

çıkar. (5.2) ve (5.5) kullanılarak $z \in G$ için

$$f(z) \sim \sum_{m=1}^{\infty} a_m (f, g) F_m' (z, g) \tag{5.6}$$

sağlanır. Burada $m = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$a_m (f, g) = -\frac{1}{\pi} \iint_{C\bar{D}} \frac{f(y(\Psi(w))) y_{\bar{\varsigma}} [\Psi(w)] \overline{\Psi'(w)}}{g[\Psi(w)] w^{m+1}} d\sigma_w \tag{5.7}$$

dır. (5.6) serisi genelleştirilmiş Faber serisinin türevi olduğundan, kolaylık olarak bu seriye de f nin genelleştirilmiş Faber serisi; $a_m(f, g)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ katsayılarına ise genelleştirilmiş Faber katsayıları diyeceğiz.

Bu bölümde $f \in A^2(G,\omega)$ fonksiyonunun (5.6) serisinin, G nin kompakt altkümeleri üzerinde düzgün yakınsak olduğunu ispatlanacaktır. ω ağırlık fonksiyonları sınıfı tanımlanıp, genelleştirilmiş Faber serisinin teklik problemi araştırılacaktır.
Ayrıca, eğer

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m F_m'(z,\omega)$$

serisi $\|\cdot\|_{A^2(G,\omega)}$ normuna göre $f \in A^2(G,\omega)$ fonksiyonuna yakınsarsa, ω ağırlık fonksiyonu üzerinde bazı sınırlamalarla $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ katsayılarının f nin genelleştirilmiş Faber katsayıları olacağı ispatlanacaktır. Son olarak, eğer $\omega = 1$ ve

$$S_n(f,z) := \sum_{m=1}^{n+1} a_m(f) F_m'(z)$$

$f \in A^2(E_R)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Faber serisinin n-kısmi toplamıysa, $E_n(f,E_R)$ yardımıyla $\|f - S_n(f,\cdot)\|_{A^2(E)}$ hatası değerlendirilecektir.
Burada

$$E_n(f,E_R) := \inf\left\{\|f - P_n\|_{A^2(E_R)} : P_n \text{ polinom ve } \deg P_n \le n\right\}$$

derecesi en fazla n olan polinomlarla f ye en iyi yaklaşım sayısını göstermektedir.
$\omega = 1$ durumunda burada belirtilen sonuçlar, sırasıyla [14] ve [15] de ifade edilip ispatlanmıştır. $A(\overline{G})$ ile G içinde analitik, $\overline{G}$ de sürekli fonksiyonların sınıfını gösterirsek benzer problemler [16] de çalışılmıştır. Biz $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ile genellikle n-den bağımsız ve farklı sabitleri göstereceğiz.

5.2 Yardımcı Sonuçlar

$R > 1$ için

$$G_R := \{z : z \in C\overline{G}, |\varphi(z)| < R\} \cup \overline{G}$$

olsun.

Yardımcı Teorem5.1 *g, $C\overline{G}$ de analitik ve $g(\infty) > 0$ olsun. Sabit bir $R_0 \in (1, \infty)$ için*

$$\iint\limits_{G_{R_0} - G} |g(z)|^2 \, d\sigma_z < \infty$$

ise

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left|F_m'(z, g)\right|}{m+1}$$

serisi G nın kompakt altkümeleri üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat : z noktası G içinde sabit bir nokta olsun. O zaman

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_m'(z, g)}{m+1} w^{m+1}$$

serisi D de analitik bir fonksiyon tanımlar.

$$A(z, w) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_m'(z, g)}{m+1} w^{m+1} \tag{5.8}$$

olsun. (5.2) ve (5.8) kullanılarak

$$A_w'(z, w) := \sum_{m=1}^{\infty} F_m'(z, g) w^m = \frac{g\left[\Psi\left(\frac{1}{w}\right)\right]\Psi'\left(\frac{1}{w}\right)}{\left[\Psi(1/w) - z\right]^2 w} \tag{5.9}$$

elde edilir. $0 < r < 1$ olsun. $\sum_{m=1}^{\infty} F_m'(z, g) w^m$ serisi $\overline{D(0, r)}$ kapalı diskinde düzgün ve mutlak yakınsak olduğundan

$$S_r(z) := \iint\limits_{D(0,r)} \left|A_w'(z, w)\right|^2 d\sigma_w = \pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left|F_m'(z, g)\right|^2}{m+1} r^{2m+2} \tag{5.10}$$

olur. (5.9) ve (5.10) eşitliklerine göre

$$\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left|F_m'(z,g)\right|^2}{m+1} r^{2m+2} = \iint_{D(0,r)} \left| \frac{g[\Psi(1/w)]\Psi'(1/w)}{[\Psi(1/w)-z]^2 w} \right|^2 d\sigma_w , \quad (5.11)$$

olduğundan, sabit $R_0 \in (1,\infty)$ değeri için,

$$S(z) := \iint_D \left| \frac{G[\Psi(1/w)]\Psi'(1/w)}{[\Psi(1/w)-z]^2} \right|^2 d\sigma_w$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \frac{g\left[\Psi\left(e^{-i\varphi}/\rho\right)\right]\Psi'\left(e^{-i\varphi}/\rho\right)}{\left[\Psi\left(e^{-i\varphi}/\rho\right)-z\right]^2 w} \right|^2 d\rho d\varphi$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \left| \frac{g\left[\Psi\left(Re^{-i\varphi}\right)\right]\Psi'.\left(Re^{-i\varphi}\right)}{\left[\Psi\left(Re^{-i\varphi}\right)-z\right]^2 w} \right|^2 \frac{dRd\varphi}{R}$$

$$= \left(\int_1^{R_0} \int_0^{2\pi} + \int_{R_0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \right) \cdots =: J_1 + J_2 \quad (5.12)$$

elde edilir. M, G nin kompakt altkümesi, $z \in M$ ve $\delta := d(M,\Gamma)$ olsun. Bu durumda

$$J_1 \le \frac{1}{\delta^4} \int_1^{R_0} \int_0^{2\pi} \left| g\left[\Psi\left(Re^{-i\varphi}\right)\right]\Psi'\left(Re^{-i\varphi}\right)\right|^2 dRd\varphi$$

$$= \frac{1}{\delta^4} \iint_{G_{R_0}-G} |g(z)|^2 d\sigma_z \le \frac{c_3}{\delta^4}$$

olur. Aynı biçimde J_2 integralinin de düzgün sınırlılığı gösterilebilir. Bu sebeple, (5.12) göz önüne alınırsa bir c_4 sabiti ve her $z \in M$ için

$$S(z) \leq \frac{c_4}{\delta^4} \tag{5.13}$$

elde edilir. Diğer yandan (5.11) de $r \to 1$ alırsak

$$\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left| F_m'(z, g) \right|^2}{m + 1} = S(z) \tag{5.14}$$

elde edilir. $S(z)$ G de sürekli olduğundan (5.13) ve (5.14) bağıntıları ve Dini teoremi gereği

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left| F_m'(z, g) \right|^2}{m + 1}$$

serisi G nin kompakt altkümelerinde düzgün yakınsaktır.

Yardımcı teorem5.2 *$f \in A^2(G, \omega)$ ve $y = y(\varsigma)$, Γ sınırına göre K-kvazi-konform yansıma ise $k = \dfrac{K - 1}{K + 1}$ olmak üzere*

$$\iint_{C\overline{G}} \left| (f \circ y)(\varsigma) \right|^2 \omega(y(\varsigma)) \left| y_{\bar\varsigma}(\varsigma) \right|^2 d\sigma_\varsigma \leq \frac{\|f\|^2_{A^2(G,\omega)}}{1 - k^2}$$

sağlanır.

İspat : $\bar{y}$, $\overline{C}$ nin kendi üzerine K-kvazi-konform dönümü olduğundan

$$\left| y_\varsigma \right| / \left| y_{\bar\varsigma} \right| = \left| \overline{y_{\bar\varsigma}} \right| / \left| \overline{y_\varsigma} \right| \leq k \text{ ve } \left| \bar{y}_\varsigma \right|^2 - \left| \bar{y}_{\bar\varsigma} \right|^2 > 0$$

sağlanır. Eğer

$$J = \left| y_\varsigma \right|^2 - \left| y_{\bar\varsigma} \right|^2$$

y nin Jacobyanı ise

$$\iint_{C\overline{G}} \left| (f \circ y)(\varsigma) \right|^2 \omega(y(\varsigma)) \left| y_{\bar\varsigma}(\varsigma) \right|^2 d\sigma_\varsigma$$

$$= \iint_{C\overline{G}} \left|(f \circ y)(\varsigma)\right|^2 \omega(y(\varsigma)) \left(1 - \left(\left| y_\varsigma \right| / \left| y_{\overline{\varsigma}} \right| \right)^2 \right)^{-1} (-J(\varsigma)) d\sigma_\varsigma$$

$$\leq \frac{1}{1-k^2} \iint_{C\overline{G}} \left|(f \circ y)(\varsigma)\right|^2 \omega(y(\varsigma))(-J(\varsigma)) d\sigma_\varsigma = \frac{\|f\|_{A^2(G,\omega)}}{1-k^2}$$

olur. Böylece ispat biter. $f \equiv 1$ ve $\omega \equiv 1$ için bu sonuç [5] de ispatlanmıştır.

Yardımcı teorem5.3 *g, $C\overline{G}$ de analitik, sınırlı, ve $C\overline{G}$ de sıfır yeri olmayan bir fonksiyon olsun. O zaman*

$$a_n\left(F_m', g\right) = \begin{cases} 1, & m = n \text{ ise} \\ 0, & m \neq n \text{ ise} \end{cases}$$

sağlanır.

İspat : Cauchy integral teoremi ve Green formülünü kullanırsak

$$a_n\left(F_m', g\right) = -\frac{1}{\pi} \iint_{C\overline{D}} \frac{F_m'\left(y(\Psi(w)), g\right) y_{\overline{\varsigma}}\left[\Psi(w)\right] \overline{\Psi'(w)}}{g\left[\Psi(w)\right] w^{n+1}} d\sigma_w$$

$$= -\frac{1}{\pi} \iint_{C\overline{D}} \frac{\partial}{\partial \overline{w}} \left[\frac{F_m\left(y(\Psi(w)), g\right)}{g\left[\Psi(w)\right] w^{n+1}} \right] d\sigma_w$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{F_m\left(\Psi(w), g\right)}{g\left[\Psi(w)\right] w^{n+1}} dw \tag{5.15}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R>1} \frac{F_m\left(\Psi(w), g\right)}{g\left[\Psi(w)\right] w^{n+1}} dw$$

elde edilir. [10, s.45] kullanılarak $F_m(z, g) = g(z)\varphi^m(z) + E_m(z, g)$ olur. Burada $E_m(z, g)$ $C\overline{G}$ de analitik ve $E_m(\infty, g) = 0$ dır. (5.15) yardımıyla

$$a_n\left(F_m',g\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=R>1} w^{m-n-1}dw+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=R>1}\frac{E_m(\Psi(w,g))}{g[\Psi(w)]w^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int w^{m-n-1}dw=\begin{cases}1\ , & m=n \text{ ise}\\ 0\ , & m\neq n \text{ ise}\end{cases}$$

elde edilir ve yardımcı teorem5.3 ün ispatı biter.

5.3 Sonuçlar

5.3.1 Ağırlıklı durum : g fonksiyonu $C\overline{G}$ de analitik ve $g(\infty)>0$ olsun. Sabit $R_0\in(1,\infty)$ değeri için

$$\iint\limits_{G_{R_0}-G}|g(z)|^2\,d\sigma_z<\infty \tag{5.16}$$

sağlansın. Bu şekildeki g fonksiyonları için

$$\omega(z):=\frac{1}{|(g\circ y)(z)|^2},\quad z\in G$$

şeklinde bir ω ağırlık fonksiyonu tanımlayalım. Burada $y=y(\varsigma)$, Γ sınırına göre kanonik yansımadır.

Tanım 5.1 *Yukarıdaki biçimde tanımlı bütün ω ağırlık fonksiyonlarının kümesini $W^2(G)$ ile gösterelim.*

Teorem 5.1 *$f\in A^2(G,\omega)$ ve $\omega\in W^2(G)$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun* (5.6) *genelleştirilmiş Faber serisi G nin kompakt altkümelerinde f ye düzgün yakınsar.*

İspat $f\in A^2(G,\omega)$ ve $\omega\in W^2(G)$ olsun. Öncelikle $f\in A(G)$ olduğunu ispatlayalım. (5.4) ve (5.16) bağıntılarını kullanırsak, istenilen kadar küçük sabit $\delta>0$ sayısı için

$$\iint_G |(g\circ y)(z)|^2 d\sigma_z = \iint_{C\overline{G}} |g(z)|^2 \left(\left|y_{\bar z}\right|^2 - \left|y_z\right|^2 \right) d\sigma_z$$

$$\leq \iint_{C\overline{G}} |g(z)|^2 \left|y_{\bar z}\right|^2 d\sigma_z$$

$$= \iint_{G_{R_0} - \overline{G}} |g(z)|^2 \left|y_{\bar z}\right|^2 d\sigma_z + \iint_{CG_{R_0}} |g(z)|^2 \left|y_{\bar z}\right|^2 d\sigma_z$$

$$\leq c_5 \iint_{G_{R_0} - \overline{G}} |g(z)|^2 d\sigma_z + c_6 \iint_{CG_{R_0}} \left|y_{\bar z}\right|^2 d\sigma_z < \infty$$

elde edilir. Burada $c_6 = max\left\{ |g(z)| \,:\, z \in CG_{R_0} \right\}$ dır. Hölder eşitsizliği ile

$$\left(\iint_G |f(z)| d\sigma_z \right)^2 \leq \left(\iint_G |f(z)|^2 \omega(z) d\sigma_z \right) \left(\iint_G |(g\circ y)(z)|^2 d\sigma_z \right) < \infty$$

olduğundan

$$\left| f(z) - \sum_{m=1}^{n} a_m(f,g) F_m'(z,g) \right|^2$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| \iint_{C\overline{D}} \frac{f(y(\Psi(w))) y_{\bar \varsigma}[\Psi(w)] \overline{\Psi'(w)}}{g(\Psi(w))} \left[\frac{g[\Psi(w)]\Psi'(w)}{[\Psi(w) - z]^2} - \sum_{m=1}^{n} \frac{F_m'(z,g)}{w^{m+1}} \right] d\sigma_w \right|^2$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \iint_{C\overline{D}} \left| \frac{f(y(\Psi(w))) y_{\bar z}[\Psi(w)] \overline{\Psi'(w)}}{g(\Psi(w))} \right|^2 d\sigma_w \times$$

$$\iint_{C\overline{D}} \left| \frac{g(\Psi(w))\Psi'(w)}{[\Psi(w) - z]^2} - \sum_{m=1}^{n} \frac{F_m'(z,g)}{w^{m+1}} \right|^2 d\sigma_w = \frac{1}{\pi} J_1 \cdot J_2 \qquad (5.17)$$

elde edilir. Yardımcı teorem5.2 uygulandığında

$$J_1 = \iint_{C\overline{G}} \left| \frac{f(y(z))y_{\bar{z}}(z)}{g(z)} \right|^2 d\sigma_z \leq c_7 \iint_G |f(z)|^2 \omega(z) d\sigma_z < \infty \tag{5.18}$$

olduğu görülür. Şimdi J_2 integralini değerlendirelim. $1 < r < R < \infty$ olsun.

(5.2) kullanılarak

$$\iint_{r<|w|<R} \left| \frac{g[\Psi(w)]\Psi'(w)}{[\Psi(w)-z]^2} - \sum_{m=1}^{n} \frac{F_m'(z,g)}{w^{m+1}} \right|^2 d\sigma_w$$

$$= \iint_{r<|w|<R} \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{F_m'(z,g)}{w^{m+1}} \right|^2 d\sigma_w$$

$$= \pi \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{r^{2m}} - \frac{1}{R^{2M}} \right) \left| F_m'(z,g) \right|^2 \leq 2\pi \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\left| F_m'(z,g) \right|^2}{m+1}$$

elde edilir. $r \to 1$ ve $R \to \infty$ alırsak

$$J_2 \leq 4\pi \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\left| F_m'(z,g) \right|^2}{m+1} \tag{5.19}$$

çıkar. Bundan dolayı (5.17), (5.18), (5.19) gereği

$$\left| f(z) - \sum_{m=1}^{n} a_m(f,g) F_m'(z,g) \right|^2 \leq c_8 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\left| F_m'(z,g) \right|^2}{m+1}$$

çıkar ve yardımcı **teorem5.1** kullanılırsa teoremin ispatı biter.

Teorem 5.2 *g fonksiyonu $C\overline{G}$ de analitik, sınırlı, $C\overline{G}$ de sıfır yeri olmayan bir fonksiyon ve $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ bir karmaşık sayılar dizisi olsun. Eğer $\sum_{m=1}^{\infty} b_m F_m'(z,g)$ serisi $\|\cdot\|_{A^2(G,\omega)}$ normuna göre $f \in A^2(G,\omega)$ fonksiyonuna yakınsıyorsa $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ karmaşık sayıları f fonksiyonunun genelleştirilmiş Faber katsayıları olur.*

İspat $: S_n(z) := \sum_{m=1}^{n+1} b_m F'_m(z,g)$, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m F'_m(z,g)$ serisinin n-kısmi toplamı olsun. Yardımcı teorem**5.3** kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{\pi}\iint_{C\overline{D}} \frac{(S_n o\, y)(\Psi(w))y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}}{g[\Psi(w)]w^{m+1}} d\sigma_w = b_m,\ m = 1,2,3,... \tag{5.20}$$

elde edilir. Diğer taraftan, Hölder eşitsizliği ve yardımcı teorem**5.2** yardımıyla, her n doğal sayısı için

$$\left|a_m(f,g) - b_m\right| \le$$

$$\left|\frac{1}{\pi}\iint_{C\overline{D}} \frac{(f o\, y)(\Psi(w)) - (S_n o\, y)(\Psi(w))}{g[\Psi(w)]w^{m+1}} y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)} d\sigma_w\right|$$

$$+\left|-\frac{1}{\pi}\iint_{C\overline{D}} \frac{(S_n o\, y)(\Psi(w))}{g[\Psi(w)]w^{m+1}} y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)} d\sigma_w - b_m\right|$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{\pi m}}\left(\iint_{C\overline{G}} \left|\frac{(f - S_n)(y(z))}{g(z)}\right|^2 \left|y_{\bar{\varsigma}}(z)\right|^2 d\sigma_w\right)^2 \tag{5.21}$$

$$+\left|-\frac{1}{\pi}\iint_{C\overline{D}} \frac{(S_n o\, y)(\Psi(w))}{g[\Psi(w)]w^{m+1}} y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)} d\sigma_w - b_m\right|$$

$$\le c_9\left(\iint_G \left|f(z) - S_n(z)\right|^2 w(z) d\sigma_z\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left|\frac{1}{\pi}\iint_{C\overline{D}} \frac{(S_n o\, y)(\Psi(w))}{g[\Psi(w)]w^{m+1}} y_{\bar{\varsigma}}[\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)} d\sigma_w + b_m\right|$$

elde edilir. $n \to \infty$ için $\left\| f - S_n \right\|_{A^2(G,\omega)} \to 0$ olduğundan (5.20) ve (5.21) e göre

$$a_m(f,g) = b_m$$

olur ve teorem ispatlanır.

Bu teoremin sonucu olarak, f fonksiyonunun genelleştirilmiş Faber katsayılarının, kanonik kvazi-konform yansımanın seçiminden bağımsız olduğu söylenebilir.

5.3.2 Ağırlıksız Durum

Yukarıdaki teorem ve yardımcı teoremler özel olarak $\omega = 1$ durumunda da geçerlidir. Dahası, bu durumda $E_n(f, E_R)$ en iyi yaklaşım sayısına göre $\left\| f - S_n(f,\cdot) \right\|_{A^2(E)}$ hatası değerlendirilebilir.

Yardımcı Teorem5.4 *F_m, $m = 1,2,3,\ldots$ E ye göre Faber polinomları ve $1 \le r < R$ ise*

$$\sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{\left\| F_m' \right\|_{A^2(E_r)}^2}{mR^{2m}} \le \left(\frac{r}{R}\right)^{2(n+1)} \frac{\pi r^2}{\left(R^2 - r^2\right)}$$

olur.

İspat : F_m in Riemann yüzeyinde, E_r nin F_m altındaki görüntüsünün alanı $S_m(E_r)$ olsun. Gaier[2,s.43] den biliniyor ki, b_{ms} Grunsky katsayıları olmak üzere

$$F_m(\Psi(w)) = w^m + \sum_{s=1}^{\infty} m b_{ms} w^{-s}, \quad |w| > 1. \qquad (5.22)$$

([10,s:170]) $1 \le r < R$ için E_r kanonik bölgesini göz önüne alalım. $w = F_m(z)$ fonksiyonu altında E_r bölgesinin Riemann yüzeyinin alanı

$$S_m(E_r) = \iint_{E_r} \left| F_m'(z) \right|^2 d\sigma_z \, .$$

Green formülü uygulanırsa

$$S_m(E_r) = \iint\limits_{E_r} F_m'(z)\overline{F_m'(z)}d\sigma_z = \frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma_r} F_m'(z)\overline{F_m(z)}dz$$

elde edilir. (5.22) kullanılırsa

$$S_m(E_r) = \frac{1}{2i}\int\limits_{|w|=r} \overline{F_m(\Psi(w))}F_m'(\Psi(w))\Psi'(w)d\sigma_w$$

$$= \frac{1}{2i}\int\limits_{|w|=r} \overline{\left[\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|w^k + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_{ms}}{w^m}\right]}\left[\sum_{k=1}^{\infty}k|a_k|w^{k-1} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{mb_{ms}}{w^{m+1}}\right]d\sigma_w$$

$$= \pi\left(\sum_{k=1}^{m}kr^{2k}|a_k|^2 - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{r^{2m}}|b_{ms}|^2\right) \tag{5.23}$$

olur. Böylece

$$S_m(E_r) = \pi\left(mr^{2m} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{r^{2m}}|b_{ms}|^2\right) \le \pi m r^{2m}$$

elde edilir.Diğer yandan

$$S_m(E_r) = \iint\limits_{E_r}\left|F_m'(z)\right|^2 d\sigma_z = \left\|F_m'\right\|^2_{A^2(E_r)} \tag{5.24}$$

ve (5.22), (5.23) kullanılarak

$$\sum_{m=n+2}^{\infty}\frac{\left\|F_m'\right\|^2_{A^2(E_r)}}{mR^{2m}} \le \sum_{m=n+2}^{\infty}\frac{\pi m r^{2m}}{mR^{2m}} = \pi\sum_{m=n+2}^{\infty}\left(\frac{r^2}{R^2}\right)^{2m}$$

$$= \pi\left(\left(\frac{r^2}{R^2}\right)^{n+2} + \left(\frac{r^2}{R^2}\right)^{n+3} + \left(\frac{r^2}{R^2}\right)^{n+4} + \dots\right)$$

$$= \pi\left(\frac{r^2}{R^2}\right)^{n+2}\left(1 + \frac{r^2}{R^2} + \frac{r^4}{R^4} + \dots\right) = \pi\frac{r^{2(n+1)}}{R^{2(n+1)}}\frac{1}{1-\frac{r^2}{R^2}} = \left(\frac{r}{R}\right)^{2(n+1)}\frac{\pi r^2}{(R^2-r^2)}$$

elde edilir ve yardımcı teorem ispatlanır.

$y(R,z)$, Γ_R sınırına göre bir K_R-kvazi- konform yansıma olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 5.3 *Eğer* $1 \le r < R$ *için* $f \in A^2(E_R)$ *ve*

$$S_n(f,z) := \sum_{m=1}^{n+1} a_m F'_m(z),$$ *genelleştirilmiş Faber serisinin n-kısmi toplamı ise her bir n doğal sayısı için*

$$\|f - S_n(f,\cdot)\|_{A^2(E_r)} \le \frac{rE_n(f,E_R)}{\sqrt{(1-k_R^2)(R^2-r^2)}}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}$$

sağlanır. Burada $k_R := \dfrac{K_R - 1}{K_R + 1}$ *dir.*

İspat : P_n^* polinomu $f \in A^2(E_R)$ fonksiyonuna, $\| \ \|_{A^2(E_r)}$ normunda en iyi yaklaşımı veren polinom, yani

$$\|f - P_n^*\|_{A^2(E_r)} = E_n(f,E_R)$$

olsun. Teorem 5.1 ve yardımcı teorem 5.3 e göre her $z \in E$ için

$$|f(z) - S_n(f,z)| = \left|\sum_{m=n+2}^{\infty} a_m(f)F'_m(z)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\pi}\sum_{m=n+2}^{\infty}\iint_{|w|>R}[(f\,o\,y(R,\Psi(w)) - (P_n^*oy(R,\Psi(w)))]\overline{\Psi'(w)}y_{\bar{\varsigma}}[R,\Psi(w)]\frac{F'_m(z)}{w^{m+1}}d\sigma_w\right.$$

$$\left.+\left|-\frac{1}{\pi}\sum_{m=n+2}^{\infty}\iint_{|w|>R}(P_n^*oy)(R,\Psi(w))y_{\bar{\varsigma}}[R,\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\frac{F'_m(z)}{w^{m+1}}d\sigma_w\right|.$$

Yardımcı teorem5.2 ve Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$|f(z) - S_n(f,z)| \le \frac{1}{\sqrt{m\pi}}\left(\iint_{CD}|(f-P_n^*)(y(R,z))|^2|y_{\bar{\varsigma}}(R,z)|^2 d\sigma_z\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left|-\frac{1}{\pi}\sum_{m=n+2}^{\infty}\iint_{|w|>R}(P_n^* oy)(R,\Psi(w))y_{\bar{\varsigma}}[R,\Psi(w)]\overline{\Psi'(w)}\frac{F_m'(z)}{w^{m+1}}d\sigma_w\right|$$

olur. Buradan

$$|f(z)-S_n(f,z)|^2 \leq C\cdot\left\|f-P_n^*\right\|_{A^2(E_r)}+0\leq\frac{E_n^2(f,E_R)}{\pi(1-k_R^2)}\sum_{m=n+2}^{\infty}\frac{\left|F_m'(z)\right|^2}{mR^{2m}} \tag{5.25}$$

çıkar. (5.25) ün her iki tarafının E_r üzerinden integrali alınırsa, yardımcı teorem**5.4** yardımıyla

$$\left\|f-S_n(f,\cdot)\right\|_{A^2(E_r)}^2 \leq \frac{\pi r^2 E_n^2(f,E_R)}{\pi(1-k_R^2)(R^2-r^2)}\left(\frac{r}{R}\right)^{2(n+1)}$$

olduğu görülür. Buradan

$$\left\|f-S_n(f,\cdot)\right\|_{A^2(E_r)} \leq \frac{rE_n(f,E_R)}{\sqrt{(1-k_R^2)(R^2-r^2)}}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}$$

olur ve teoremin ispatı tamamlanır. $r=1$ için yardımcı teorem **5.4** ve teorem **5.3** [17] da ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Smirnov, V. I. and LEBEDEV, N. A., Functions of a Complex Variable: Constructive Theory, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., p.211-215, 1968.

[2] Gaier, D., Lectures on Complex Approximation , Birkhauser, Boston, Stuttgart, p.16-43, 1987.

[3] Marcushevich, I. A., Theory of Functions of a Complex Variable, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., vol.1(p.48-70), vol.2(p.91-122), vol.3(p.38-39), 1965.

[4] Goluzin, G. M.. Geometric Teory of Functions of a Complex Variable, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 02904, p.55-388, 1969.

[5] Pommerenke, J., Boundary Behaviour of Conformal Maps, Springer-Verlag, Berlin, p.4-95-107, 1992.

[6] Başkan, T., Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Uludağ Üniversitesi Yayınları, Ceylan Matbaacılık Ltd., p.187-194, 1996.

[7] Burk, F., Lebesgue Measure and Integration: An Introduction, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley&Sons, Inc., p.273, 1998.

[8] Duren, P. L., Theory of H^p Spaces, Pure and Applied Mathematics, Academic Pres, New York-London, p.2-20, 1970.

[9] Andrievskii, V. V.; Belyi, V. I. ve Dzyadyk, V. K., Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Variable, Adv. Series in Math. Science and Engineer., WFP Co., Atlanta, Georgia, p.26-110, 1995.

[10] Suetin, P. K., Series of Faber Polynomials , Gordon and Breach Science Publishers, p.33-67-170, 1998.

[11] Belyi, V. I., Conformal mappings and approximation of analytic functions in domain with quasi-conformal boundary, Math.USSR-Sb., vol.31, p.289-317, 1997.

[12] Ahlfors, L., Lectures on Quasi-conformal Mappings, Wadsworth & Brooks / Cole Mathematics series, 1987.

[13] Batchaev, I. M., Integral representation in a region with quasi-conformal boundary, Candidate dissertation, Baku, 1981.

[14] Israfilov, D. M., Approximative properties of generalized Faber series, In: Proc. All-Union Scool on Approximation Theory, Baku, May, 1989.

[15] Çavuş, A., Approximation by generalized Faber series in Bergman spaces on finite regions with a quasi-conformal boundary. J.Approx. Theory, vol.87, 1, p.25-35, 1996.

[16] Israfilov, D. M., On approximation of functions by partial sums of generalized Faber series in domains with quasi-conformal boundary, Izv. Acad. Nauk Az. SSR, vol.5, p.10-15 (in Russian), 1981.

[17] Israfilov, D. M., Approximation by generalized Faber series in weighted Bergman spaces on finite domains with a quasi-conformal boundary, East Journal On Approximations, Vol.4, 1, p.1-13, 1998.