

T.C.  
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ  
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

77763

**SONSUZ İNCE VE MÜKEMMEL İLETKEN  
DAİRESEL HALKADAN SKALER DALGA  
SAÇILMASI**

Fatih DİKMEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Tez Danışmanları

Doç.Dr. Yury A. TUCHKIN  
Yrd.Doç.Dr. Ertuğrul KARAÇUHA

**Gebze  
Şubat 1998**

Bu tez çalışması, G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 04.02.1998. tarih ve 98/4... sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından *Elektronik Müh.* Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS Tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE : Yrd.Doç.Dr. Ertuğrul Karacıha  
(Tez Danışmanı) Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü  
Mühendislik Fak. Elektronik Müh. Blm

*Ertuğrul Karacıha*

ÜYE : Doç.Dr. Ali Alkumru  
Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü  
Mühendislik Fak. Elektronik Müh. Blm.

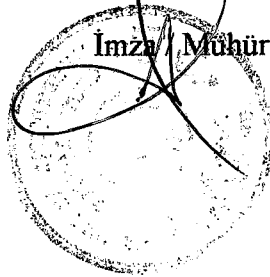
*Ali Alkumru*

ÜYE : Doç.Dr. Filiz Birbir  
Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü  
Fen Fak.. Matematik Blm.

*Filiz Birbir*

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun  
11/02/1998...tarih ve 98/05... sayılı kararı.



## ÖZET

Tezin amacı, sonsuz incelikte dairesel halka biçimindeki bir yapıdan skaler dalga saçılmasına ilişkin sınır değer probleminin çözümü için matematiksel olarak güçlü ve sayısal olarak etkin olan yeni bir yöntemin uygulanmasıdır. Yöntem, G. Ya. Popov'un önerdiği [1,2] ortogonal polinomlar yöntemi ve Y. A. Tuchkin'in makalelerinde [3,4,10] ele alınan analitik regülerleştirme yönteminin birlikte kullanılmasına dayanmaktadır. Kullanılan regülerleştirme işleminin sonucunda, başlangıç sınır değer problemi eşdeğer olarak  $(I+H)x=b$  biçiminde, karesi toplanabilir dizilerin uzayı  $l_2$  'de ikinci türden sonsuz bir lineer cebir denklem sistemine indirgenebilmektedir. Bu denklem sistemi ise sayısal olarak kesme yöntemi kullanılarak istenen doğrulukta çözülebilmektedir.

Silindirik bir cismin aksenal simetrik biçimde uyarıldığı yani gelen dalganın düşey magnetik dipol alanı biçiminde olduğu en basit halde Dirichlet sınır koşulu altında sözkonusu kırınım problemi aşağıdaki biçimde bir denkleme indirgenebilir:

$$\int_{-1}^1 \ln(u-v)z(v)dv + \int_{-1}^1 K(u,v)z(v)dv = f(u), \quad u \in [-1,1]$$

Burada  $z(v)$  bilinmeyen fonksiyondur ve ikinci integral terimi ise birincisine oranla daha düzgün bir çekirdeğe sahiptir. Herhangi bir uyarma altındaki aksenal simetrik silindirik bir sisteme ilişkin problem özdeşleştiren yukarıda sunulan tipteki denklemlerin oluşturduğu bir sisteme indirgenebilir. Kullanılan yöntemin ilk adımı, bilinmeyen fonksiyonların ve çekirdeklerin Chebyshev polinomlarının oluşturduğu sonsuz seriler biçiminde ve yukarıdaki denklemin sol tarafındaki ilk integral

operatöre ilişkin ters operatörün de analitik olarak ifade edilmesinden ibarettir. İkinci adım ise bu biçimde elde edilen fonksiyonel denkleme ait iki yanlı regülerleştirme çarpanının oluşturulmasıdır. Sonuçta, başlangıçtaki problem özdeşlemin  $l_2$  uzayında  $(I+H)x=b$ ,  $x,b \in l_2$ , biçiminde ikinci türden bir denkleme indirgenmektedir. Burada  $I$  ve  $H$  sırasıyla birim ve kompakt operatörlerdir.

Tezin sonunda verilen sayısal sonuçlar yöntemin verimli, sayısal kararlılığa sahip ve sözkonusu sınıfa ait kırınım problemleri için güvenilir olduğunu göstermektedir.



## ABSTRACT

A new strong mathematically rigorous and numerically effective method for solving a boundary value problem of scalar wave diffraction by an infinitely thin circular ring screen is proposed. The method is based on the combination of the Orthogonal Polynomials Approach, running back to the G. Ya. Popov's papers (see, for example, [1,2]), and on the ideas of the methods of analytical regularization [3,4]. As a result of the suggested regularization procedure, the initial boundary value problems equivalently reduced to the infinite system of the linear algebraic equations of the second kind, i.e. to an equation of the type  $(I+H)x=b$  in the space  $l_2$  of square summable sequences. This equation can be solved numerically by means of truncation method with, in principle, any desired accuracy.

In the simplest case of axially symmetrical excitation of one cylindrical obstacle, the diffraction problem under consideration can be reduced to the equation of the form:

$$\int_{-1}^1 \ln(u-v)z(v)dv + \int_{-1}^1 K(u,v)z(v)dv = f(u), \quad u \in [-1,1]$$

with unknown function  $z(v)$ , where second integral term has more smooth kernel in comparison with first one; in the case of Dirichlet boundary condition, when incident wave is of type like the field of vertical magnetical dipole. For the axially symmetrical system of the cylindrical screen with arbitrary excitation, the corresponding problem can be equivalently reduced to the system of equations of the type above. The first step of our method is based on the representation of unknown functions and kernels as infinite series involving the

Chebyshev's polynomials and on analytical construction of the inverse operator to the first integral operator in the left hand side of the equation above. The second step is construction of the two-sided regularizator of thus obtained functional equation. As a result, initial problem is equivalently reduced to the equation of the second kind in  $l_2$  of the form  $(I+H)x=b$ ,  $x,b \in l_2$ , where  $I$  and  $H$  are identical and compact operators respectively.

Numerical results given at the end of this thesis show that the method is efficient, numerically stable and reliable for considering type of diffraction problems.



## TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanması sırasındaki olağanüstü ilgi, destek ve yönlendirmelerini esirgemeyen hocam sayın Yrd.Doç.Dr. Yury A. Tuchkin'e, aynı ilgi, destek ve yönlendirmelere ek olarak, hayatımda önemli bir köşetaşı olan kararı vermemde de destekleyip bana güvenerek beni yönlendirmiş olan hocam sayın Yrd.Doç.Dr. Ertuğrul Karaçuha'ya, çalışmalarımı bu şekilde huzurlu gerçekleştirebileceğim tek yer olan Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü'ne, tezi hazırladığım süreç içinde aynı hedefe sahip olmamız nedeni ile diğer bir konuda da olsa aynı çabayı sürdüren ve aynı mesaiyi paylaşırken bana destek olduğunu hissettiğim yol ve mesai arkadaşım Araş.Gör. Ahmet Serdar Türk'e ve benim yetişmemdeki değer biçilemez emeklerin sahibi aileme teşekkürü borç bilirim.

Fatih Dikmen

# İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>vi</b>
<b>TEŞEKKÜR</b>	<b>viii</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b>	<b>ix</b>
<b>1. GİRİŞ</b>	<b>1</b>
<b>1.1. Konu ve Önemi</b>	<b>1</b>
<b>1.2. Tezin Amacı Ve İçeriği</b>	<b>3</b>
<b>1.2.1. Birinci Türden Bir Denklem Sistemine Ait Operatörün Regülerleştirilerek İkinci Türden Bir Denklem Elde Edilmesi</b>	<b>5</b>
<b>1.2.2. Birinci ve İkinci Türden Denklemlerin Sayısal Kesme Yöntemi Bakımından Karşılaştırılması (Tablo)</b>	<b>7</b>
<b>1.3. Kullanılan Notasyon</b>	<b>7</b>
<b>2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ</b>	<b>8</b>
<b>2.1. Açık Bölge İçin Green Özdeşliği</b>	<b>8</b>
<b>2.1.1. Genelleştirilmiş İkinci Green Teoremi</b>	<b>8</b>
<b>2.1.2. Helmholtz Denklemine Temel Çözümü ve Açık Bölge için Üçüncü Green Formülü, Sommerfeld Radyasyon Koşulu</b>	<b>9</b>



2.1.3. Homojen Helmholtz Denklemine Çözümünün  
Analitik Devamı: Sobolev Teoremi 13

2.1.4. Dirichlet Problemi, Saçılan Alanın İntegral  
İfadesi 18

### 3. İNTEGRAL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ 23

3.1. Sonsuz İnce Dairesel Halka için Dirichlet Sınır  
Değer Problemi ve Saçılan Alanın İntegral İfadesi 23

3.2. Halka Geometrisine göre İntegral Denklem  
İfadeleri 24

3.3. Sınırdaki Yazılan İntegral İfadesinin Fourier  
Açılımı 26

3.4. Halka Yüzeyinin Uygun Bir Parametre ile İfade  
Edilmesi, Ortogonal Polinomlar Yaklaşımının Uygulanacağı  
İntegral Denklem 28

3.5. Ortogonal Polinomlar Yöntemi Uygulanacak,  
Logaritmik Tekilliğe Sahip İntegral Denklem Sonsuz  
Cebirsel Lineer Denklem Sistemine İndirgenmesi 31

3.5.1. İntegral Denklem Terimlerinin  
Normalleştirilmiş Chebyshev Polinomları ile İfade  
Edilmesi 31

3.5.2. (3.5.1.)'de Elde Edilen Sonuçların  
Değerlendirmesi, Fourier - Chebyshev Katsayılarının  $m, n \rightarrow$   
 $\infty$  Halinde Davranışları 33

3.5.3. İntegral Denklemin Sonsuz Cebirsel Linear Denklemler Sistemine İndirgenmesi 34

3.5.4. Sonsuz Linear Cebir Sistemine Analitik Regülerleştirme Uygulaması 37

4. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN SAYISAL OLARAK GERÇEKLENMESİ 39

4.1. Kesme Yöntemi ile çözülecek Linear Cebir Sisteminin Oluşturulması 39

4.1.1. İntegral denklemin sağ tarafı 39

4.1.2. Çekirdek  $K(u,v)$ 'nin Hesabı 40

4.1.3. Akım Yoğunluğu Fonksiyonu Katsayılarının Hesabı 44

4.1.4. Fourier - Chebyshev Katsayılarının Bulunması, Elde Edilen Linear Cebir Sisteminin Çözümü 45

4.1.4.1. Gauss-Hermit Formülleri 45

4.1.4.2. Fourier - Chebyshev Katsayılarının Gauss - Hermit Formülleri ile Hesaplanması 46

4.1.4.3. İntegral Denkleme Ait Fourier - Chebyshev Katsayılarının Gauss - Hermit Formülleri ile Hesabı 47

4.1.4.4. Elde Edilen Regülerleştirilmiş Linear Denklemler Sisteminin Çözümü 49

4.2. Uzayda Herhangi Bir Nokta için Alan İfadesi	50
4.3. Diğer Sayısal Sonuçları Hesaplanan Büyüklükler, Uzak Alan, Yakın Alan, Radar Kesiti (RCS)	53
5. SONUÇLAR	55
KAYNAKLAR	78
ÖZGEÇMİŞ	82



# 1. GİRİŞ

## 1.1. Konu ve Önemi

Modern kırınım teorisinde son otuz yıl boyunca, açık yapılardan kırınım problemleri üzerine yapılan araştırmalar önem kazanmıştır. Tezin konusu olan sonsuz ince dairesel halkanın da dahil olduğu bu gruba ilişkin problemlerin çözümünde modern kırınım teorisinin öngördüğü yöntemler iki ana gruba ayrılabilir.

Moment yöntemi, sonlu fark yöntemi gibi yöntemlerin dahil olduğu 'direkt yöntemler' ilk grubu, integral dönüşümler ve değişkenlerine ayrıştırma yöntemlerine dayalı 'sayısal-analitik yöntemler' ise ikinci grubu oluşturur.

Direkt yöntemler, probleme ilişkin yapılar karmaşıklaştıkça, çözüm sırasında altından kalkması güç sayısal kararsızlıklara neden olmaktadır. Bu durum, direkt yöntemler ile çözülemeyen ve ek olarak karmaşık analitik ve matematiksel çabalar gerektiren, düzlemsel veya dielektrik dairesel dalga kılavuzlarındaki süreksizlik problemleri gibi, daha da basit yapıdaki problemlerde de aynıdır (bkz.[24]).

İlk grubun, yani direkt yöntemlerin uygulandığı problemlerin çözümü sonunda ulaşılan denklem sistemleri, birinci türden denklem sistemleridir. Bu denklem sistemleri sayısal olarak çözülmeye elverişli değildir çünkü bu denklemlerin oluşturduğu sistemler kullanılacak sayısal yöntemler bakımından iyi kurulmuş değillerdir. Bu

da sözkonusu büyüklükteki sistemlerin hal sayısının<sup>(\*)</sup> aşırı büyük olduğu anlamına gelmektedir. Bu, sisteme ilişkin doğru çözümün, yuvarlatma hatalarının etkisi ile tahrip olmasına neden olan bir etkidir [bkz. 25-26].

Sayısal-analitik yöntemler olarak adlandırılan ve tezde ele alınan yapıya uygulanması açıklanacak ikinci türden yöntemler, birinci grubun yukarıda belirtilen sakıncalarından bağımsızdır. Buradan itibaren 'Analitik Regülerleştirme Yöntemleri' olarak anılacak bu yöntemler, sözkonusu kırımın problemini, matematiksel olarak esas sınır değer problemine denk düşen, ikinci türden fonksiyonel bir denkleme indirgemektedir. Bu, yöntemin uygulandığı sistemin boyutu sonsuza gittiğinde, sisteme ilişkin hal sayısının düzgün biçimde sınırlı kaldığı anlamına gelir. Kesme yöntemi uygulanarak çözülecek sistemin bu özelliği sadece sistem boyutu sonsuz olduğundaki çözüme yakınsamayı değil, keyfi büyüklükte boyuta sahip lineer cebir sisteminin sayısal kararlılığını da garantilemektedir.

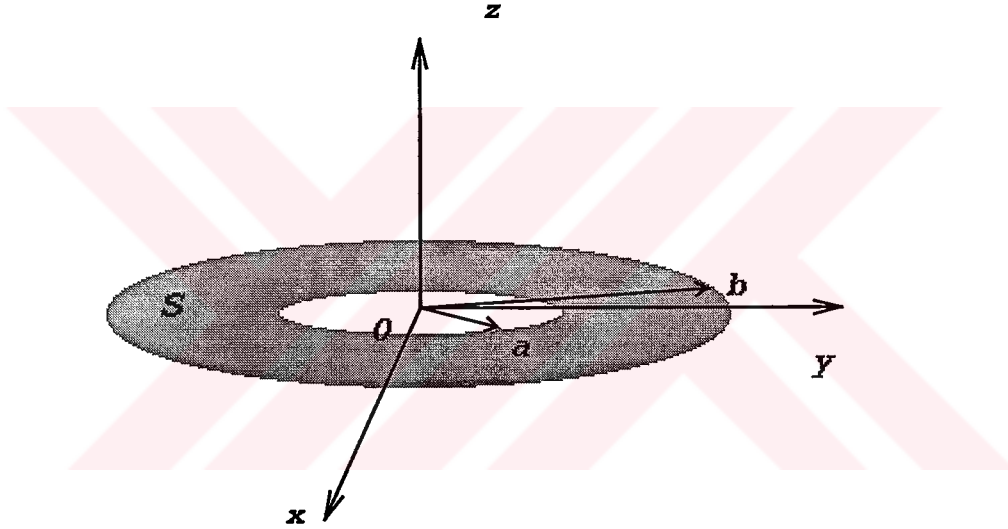
Direkt yöntemlerle elde edilen sonuçlar genelde ilgili deney sonuçları ile sağlama yapılmasını gerektirir. Ancak analitik regülerleştirme yöntemlerinin sonuçları, kullanılan sayısal işlemler aritmetik hata içermedikçe, ilgili deneyler için sağlama verisi oluşturarak, deneylerdeki hataların kaynağını belirlemeye yarar. Yöntemler arasındaki temel farklılık da budur.

---

<sup>(\*)</sup>Bir matrisin hal sayısı (condition number), matrisin ve tersinin normlarının çarpımı olarak tanımlanır.

## 1.2. Tezin Amacı ve İçeriği

Sonsuz ince, mükemmel iletken bir dairesel halkadan (Şekil 1.1), Helmholtz denklemini, Dirichlet sınır koşulunu, sözkonusu açık bölge için Sommerfeld radyasyon koşulunu ve ilişkin ayırıt koşulunu sağlayan skaler dalgaların saçılmasına ilişkin sınır değer problemi, pratikte kullanım alanı bulan dairesel yapıda, aksenal simetrik halkalardan oluşan anten sistemlerinin anlaşılmasında ele alınacak teorik problemin ilk ve temel adımı olması bakımından önemlidir.



Şekil (1.1)

Problemin çözümü sırasında çıkarımı yapılacak olan şudur: Yukarıdaki gibi bir dairesel halkadan saçılan alanın ifadesine ait integral gösterilim, sınır koşulunun ve buna ilişkin, sonsuz ince S yüzeyi üzerindeki Fourier açılımının uygulanması sonucunda, probleme ilişkin

$$\int_{-1}^1 \ln(u-v)z(v)dv + \int_{-1}^1 K(u,v)z(v)dv = f(u), \quad u \in [-1,1] \quad (1.0)$$

denklemin yapısında bir denkleme indirgenecektir. Bu denklem, ortogonal polinomlardan Chebyshev polinomlarını kullanarak, birinci türden bir lineer cebir denklem sisteminin elde edilmesine elverişlidir. Bu denklem daha sonra uygun analitik regülerleştirme işlemine sokularak, bölüm 1.1. de değinilen faydalara sahip, sayısal olarak kararlı çözümün elde edilebildiği, ikinci türden bir denklem sistemine dönüştürülecektir.

Daha sonra, denklem sisteminin çözümü, bölüm 4'teki yöntemler sonucunda elde edilecektir. Sonuçlar bölümünde ise sayısal sonuçların, önceden bilinen yöntemlerin sonuçlarına ait veriler ile karşılaştırması da yapılmıştır.

Sonuçların karşılaştırmasının yapıldığı, önceden bilinen yöntem, Kirchhoff yaklaşıklığı olarak bilinen yöntemdir. Bu yöntemin esası, saçılan alan ifadesini, saçıcı cismin gelen dalganın gördüğü yüzeyi üzerinden alınan integral ile ifade edip, gölge bölgesindeki toplam alanı sıfıra eşit kabul etmeye dayanmaktadır[27].

Gerçekten de, Kirchhoff yaklaşıklığı uygulamada sıkça kullanılmış bir yöntemdir (bkz. [20], [21], [22], [23]). Bu sayede yapılan incelemelerde, birden fazla sayıda halkanın iç içe oluşturduğu, sistemler incelenmiştir. Tezin incelediği geometri, yalnızca bir halkayı içerse de, bu yöntemi birden fazla sayıda ve keyfi konumlara sahip halkaların oluşturduğu bir sisteme genişleterek uygulamak da mümkündür.

Kirchhoff yaklaşıklığı, halka boyutu ile iç ve dış yarıçapları arasındaki farkın dalga boyuna oranla büyüdüğü haller ve uzak alan ifadeleri bakımından tatminkar sonuçlar vermektedir. Ancak halka boyutu

ve/veya iç ve dış yarıçapı arası fark dalga boyuna göre küçülür ise aynı şey söylenemez. Halka ile üzerine oturduğu sonsuz düzlem arasında fark gözetmeyen Kirchhoff yaklaşıklığının sözkonusu halkaların yakın alanı için geçerli olmayacağı da açıkça bilinmektedir. Tezde kullanılan yöntem ne dalga boyu, ne de cisim boyutu bakımından bir kısıtlama getirmektedir. Bu da yaklaşımın güçlülüğünü ortaya koymaktadır.

### **1.2.1. Birinci Türden Bir Denklem Sistemine Ait Operatörün Regülerleştirilerek İkinci Türden Bir Denklem Elde Edilmesi İşleminin Kısa Tanıtımı**

$B, B_1, B_2$  üç Hilbert uzayı ve  $A, L_0, R_0 (L_0^{-1}, R_0^{-1})$  mevcut ve sınırlı) bu uzaylar üzerine şu ilişkilere geçerli operatörler olsun:

$$- A : B_1 \rightarrow B_2 ;$$

$$- L_0 : B_2 \rightarrow B ;$$

$$- R_0 : B \rightarrow B_1 ;$$

Eğer,

$$- L_0 A R_0 = I + H; \quad (H : B \rightarrow B)$$

yazılabiliyorsa,  $(L_0, R_0)$  çifti iki-yanlı regülerleştirici olarak tanımlanır.  $H, B$  uzayında kompakt bir operatördür.



$$Ax = b \quad (x \in B_1, b \in B_2) \quad (1.1)$$

Birinci türden fonksiyonel denklem (1.1) ele alınır,  $R_0^{-1}$  sınırlı bir operatör olduğundan herhangi  $x \in B_1$ ,  $y = R_0^{-1}x \in B$  olacak biçimde  $x = R_0 y \in B_1$  yazılabilir. Bu ifade (1.1) de yerine yazılıp her iki tarafa  $L_0$  uygulanırsa, ikinci türden olan şu denkleme ulaşılır:

$$(I + H)y = L_0 b; \quad (y \in B, L_0 b \in B) \quad (1.2)$$

Kırınım teorisinde analitik regülerleştirme yöntemi, kırınım sınır değer problemine ilişkin sınır değer problemini, probleme ilişkin fiziksel anlamını kesin olarak yansıtan iki yanlı regülerleştiricinin ( $L_0, R_0$  çifti) analitik olarak yapılandırılması tekniğidir.

1.2.2. Birinci ve İkinci Türden Denklemlerin Sayısal Kesme Yöntemi Bakımından Karşılaştırılması (Tablo)

<b>SORULAR</b>  (N: sistemin boyutu, $v_N$ : hal sayısı)	Birinci Türden Sistemler  $Ax = b$  (x: sistemin gerçek çözümleri, $x_N$ : N boyutlu sistemin çözümü $\ C\ $ : C'nin normu)	İkinci Türden Sistemler  $(I + H)x = b$  çözümü, sistemin çözümü
$\lim_{N \rightarrow \infty} x_N \rightarrow x$ ?	Genelde <b>HAYIR</b>  (EVET varsayılırsa 2. Soru sorulur)	<b>EVET</b>
$\lim_{N \rightarrow \infty} v_N \leq \text{sabit}$ ?	$v_\infty = \ A\  \cdot \ A^{-1}\ $  <b>HAYIR</b>	$v_\infty = \ (I + H)\  \cdot \ (I + H)^{-1}\ $  <b>EVET</b>

### 1.3. Kullanılan Notasyon

Bu tezde kullanılan notasyon, yaygın olarak kullanılan standart notasyon olduğundan ayrıca belirtilmesine gerek duyulmamaktadır. Bununla beraber yeni tanımlandığı düşünülen bir terim için gerekli açıklamalar yerinde yapılacaktır.

## 2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ

### 2.1. Açık Bölge İçin Green Özdeşliği

#### 2.1.1. Genelleştirilmiş İkinci Green Teoremi

$p$ , üç boyutlu uzay  $R^3$  'de herhangi bir noktaya ilişkin vektör,  $u(p)$ ,  $v(p)$ ,  $f(p)$  skaler ve  $A(p)$ ,  $B(p)$  vektörel büyüklükleri göstermek üzere<sup>(\*)</sup>,  $\text{div.grad}=\Delta$  ve  $\text{div}(fA)=f.\text{div}A+(A,\text{grad } f)$ <sup>(\*\*)</sup> olduğu da dikkate alınarak ,

$$\text{div}\{v.\text{grad } u-u.\text{grad } v+u.v.B\}=v\{\Delta u+(B,\text{grad } u)+c.u\} - u\{\Delta v-\text{div}(vB)+c.v\} \quad (2.1)$$

yazılabilir( $c$ =sabit).  $L$  ve  $M$  operatörleri (2.1) ' e göre,

$$L u=\Delta u+(B,\text{grad } u)+c.u \quad (2.2)$$

$$M v=\Delta v-\text{div}(vB)+c.v \quad (2.3)$$

tanımlanarak (2.1) yeniden yazılırsa;

$$v L u -u M v= \text{div}\{v.\text{grad } u-u.\text{grad } v+u.v.B\} \quad (2.4)$$

bulunur. Gauss-Ostragradski formülü  $\int_D \text{div}A .dv = \int_S (A,n).dS$ <sup>(\*\*\*)</sup>

(2.4) denklemindeki ifade için yazılacak olursa,

<sup>(\*)</sup>Bu alt başlıkta aksi belirtilmedikçe büyük harfler vektörleri temsil edecektir

<sup>(\*\*)</sup>Skaler çarpım

<sup>(\*\*\*)</sup>n burada S yüzeyinden dışarı doğru birim normal vektördür

$$\int_D (v L u - u M v) dv = \int_S (\{v.grad u - u.grad v + u.v.B\}, n).dS$$

$$= \int_S (v \frac{\partial}{\partial n} u - u \frac{\partial}{\partial n} v + u.v.(B, n)).dS \quad (2.5)$$

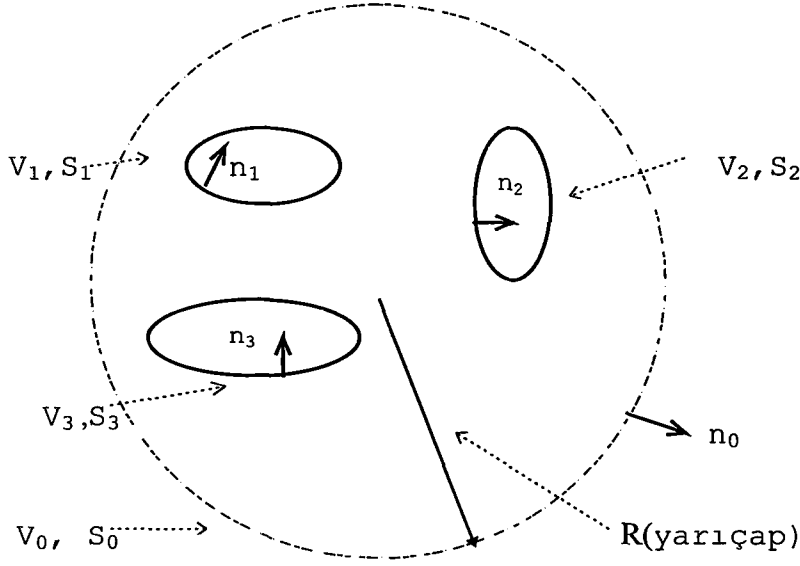
elde edilir. (2.5)denklemini, genelleştirilmiş ikinci Green formülü olarak bilinir. Bu formüle göre  $B(p)=0$ ,  $c=k^2$  olan özel hal,  $L = M = \Delta + k^2$  operatörünü verir((2.2), (2.3)). Denklem ise,

$$\int_D (v L u - u M v) dv = \int_S (v \frac{\partial}{\partial n} u - u \frac{\partial}{\partial n} v).dS \quad (2.6)$$

halini alır.

### **2.1.2.Helmholtz Denkleminin Temel Çözümü ve Açık Bölge için Üçüncü Green Formülü, Sommerfeld Radyasyon Koşulu**

Sonsuz ince mükemmel iletken dairesel halka açık bir bölgede bulunduğundan, incelemeyi açık bölge için sürdürmek daha uygun olacaktır. Ancak şunu da belirtmek gerekir ki, ulaşılabilecek ifade, radyasyon koşulunu gerektirmeyen yani sonlu olan kapalı bölge için de geçerlidir.  $V_1, V_2, V_3, \dots$  kapalı bölgeleri  $S_1, S_2, S_3, \dots$  düzgün yüzeyleri ile kuşatılmıştır ve  $V_0$  bölgesi bu bölgeleri  $S_0$  yüzeyi ile kuşatan ve incelemenin ileriki safhalarında sonsuz olacak ve keyfi bir merkez noktasından itibaren  $R$  yarıçapına sahip küreden ibarettir.( Şekil (2.1) )



Şekil (2.1)

Eğer  $\psi(p)$  skaleri, homojen olmayan Helmholtz denkleminin  $R^3$ ' deki  $D$  gibi herhangi kapalı bir basit bağımlı bölgedeki bir çözümü ise aşağıdaki denklemi sağlar:

$$L\psi = (\Delta + k^2)\psi(p) = f(p) \quad (2.7)$$

$G(q,p)$  skaleri, sözkonusu uzaya ait iki noktanın  $(q,p)$  fonksiyonu olsun. Aşağıdaki özelliklere sahip olan  $G(q,p)$ , Helmholtz denkleminin bu üç boyutlu uzaydaki temel çözümü olarak adlandırılır:

$$\blacksquare L_p G(q,p) = L_q G(q,p) = \delta(q-p); \quad q,p \in D \quad (2.8)$$

$$\blacksquare G(q,p) = -\frac{1}{4\pi|q-p|} + H(q,p); \quad q \neq p \quad (2.9)$$

$L_p$  yalnız  $p$ ,  $L_q$  yalnız  $q$  noktalarının koordinatlarına göre uygulanan operatörleri göstermektedir.  $|q-p|$ ,  $q$  ve  $p$  noktaları arası mesafedir ve  $H(q,p)$  keyfi  $q$  ve  $p$  'ler için düzgün<sup>(\*)</sup> bir fonksiyondur.

Şimdi de  $R^3$ 'de yüzeyi  $S$  olan incelenecek basit bağımlı kapalı  $D$  bölgesinin tanımı Şekil (2.1)'e göre şöyle yapılsın:  $V_0, V_1, V_2, V_3$  açık (sınırlarını içermeyen) bölgeleri dışında kalan noktaların tümü. Şekil (2.1)'de de gösterilmiş, sözkonusu açık bölgeler doğrultusundaki normal birim vektörlerin tümü  $n$ , bu açık bölgelerin bölgeye dahil olmayan sınırları ( $S_0$  hariç) da  $S$  ile temsil edilirse, bu durumda açık bölge için üçüncü Green Teoremi şu formülden ibarettir:

$$\int_{S+S_0} (\psi(p) \frac{\partial}{\partial n} G(q,p) - G(q,p) \frac{\partial}{\partial n} \psi(p)) . dS_p + \int_D G(q,p) f(p) dv_p = \alpha(q) \psi(q) \quad (2.10)$$

$$\alpha(q) = \begin{cases} 1, q \in D \\ 1/2, q \in S \\ 0, q \notin D \end{cases} \quad (2.11)$$

(2.10) ve (2.11) denklemleri şöyle elde edilebilir: (2.6) denkleminin ele alınan Helmholtz denklemi ve onun iki çözümü olan  $\psi(p)$  ve  $G(q,p)$  için aşağıdaki gibi yazılarak,

$$\int_D (\psi(p) LG(q,p) - G(q,p) L\psi(p)) dv = \int_{S+S_0} (\psi(p) \frac{\partial}{\partial n} G(q,p) - G(q,p) \frac{\partial}{\partial n} \psi(p)) . dS \quad (2.12)$$

<sup>(\*)</sup> Düzgün fonksiyon ile yüksek mertebeden türevlere sahip fonksiyon kastedilmektedir.

önce sol taraftaki integral içindeki birinci terimin (2.8) den dolayı sifira eşit olduğu dikkate alınır. Daha sonra (1) D bölgesi içerisinde, (2) D bölgesi sınırında yani S üzerinde ve (3) D bölgesi dışında,  $q = p$  durumunu incelemek üzere  $q$ 'nun merkez olduğu  $\varepsilon$  yarıçaplı küre sözü edilen üç hal için de dikkate alınır.  $\varepsilon$  sifira giderken, (2.12)'nin sağ tarafındaki integral, birinci halde bu kürenin tüm yüzeyi üzerinden alınarak (2.11)'in ilk koşulu elde edilir. İkinci halde kürenin yarısının yüzeyi üzerinden alınan aynı integral (2.11)'in ikinci koşulunu verir. Üçüncü halde ise D bölgesinin tamamen dışındaki  $q$  noktası için integral alınacak yüzey yoktur ve (2.11)'in üçüncü koşulunda olduğu gibi, sifir elde edilir.

Diğer taraftan, Şekil (2.1) de R sonsuza gittiğinde, sözkonusu üç boyutlu uzay için geçerli, Sommerfeld Radyasyon Koşulları olarak bilinen aşağıdaki koşullar sağlanırsa (2.10) denkleminin solundaki ilk integralin sözkonusu  $S_0$  yüzeyi üzerinden alınan parçasının değeri sifira eşit olacaktır:

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} |p| \left( \frac{\partial}{\partial |p|} \psi(p) - ik\psi(p) \right) = 0 \quad (2.13)$$

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} |p| \left( \frac{\partial}{\partial |p|} G(q, p) - ikG(q, p) \right) = 0 \quad (2.14)$$

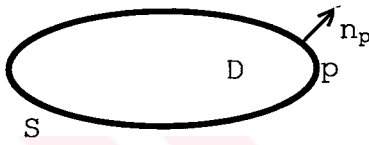
$$\lim_{|q| \rightarrow \infty} |q| \left( \frac{\partial}{\partial |q|} G(q, p) - ikG(q, p) \right) = 0 \quad (2.15)$$

Sonuçta, (2.11) geçerli kalmak üzere açık bölgeye ilişkin üçüncü Green formülü aşağıdaki son biçimini alır:

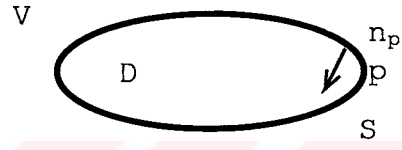
$$\int_S (\psi(p) \frac{\partial}{\partial n} G(q,p) - G(q,p) \frac{\partial}{\partial n} \psi(p)) . dS_p + \int_D G(q,p) f(p) dv_p = \alpha(q) \psi(q) \quad (2.16)$$

### 2.1.3. Homojen Helmholtz Denkleminin Çözümünün Analitik Devamı: Sobolev Teoremi

$R^3$  uzayında, önceki bölümde de ele alınmış olan basit bağımlı, düzgün  $S$  yüzeyinin kuşattığı kapalı  $D$  bölgesi sözkonusu olsun (Şekil (2.2)).



Şekil (2.2)



Şekil (2.3)

Şekil (2.2) için  $n_p$ ,  $D$  bölgesi için, sınır  $S$  üzerindeki bir  $p$  noktasından bölge dışına doğrultudaki birim normal vektördür. Homojen Helmholtz denkleminin  $((\Delta+k^2)\psi(p)=0)$ , kapalı bölge içinde de geçerli<sup>(\*)</sup> (2.16) ve (2.11) ifadelerine göre, integral ifadesi şu biçimi alır:

$$\int_S (\psi(p) \frac{\partial}{\partial n_p} G(q,p) - G(q,p) \frac{\partial}{\partial n_p} \psi(p)) . dS_p = \alpha(q) \psi(q) \quad (2.17)$$

Şekil (2.3)'deki durum gözününe alınsın. Homojen Helmholtz denkleminin Sommerfeld radyasyon koşulunun sağlandığı  $D'$  nin tümleyeni olan  $V (= R^3 \setminus D)$  açık bölgesi için integral ifadesi,  $S$  yüzeyi üzerinde,  $V$  bölgesinin dışına doğrultudaki  $p$  noktasındaki birim normal  $n_p'$

<sup>(\*)</sup>Bölüm 2.1.2. giriş paragrafı



kullanılarak yazılırsa  $(\alpha(q))$  (2.11) denklemindeki anlamındadır),

$$\int_S (\psi(p) \frac{\partial}{\partial n'_p} G(q,p) - G(q,p) \frac{\partial}{\partial n'_p} \psi(p)) . dS_p = \alpha(q) \psi(q) \quad (2.18)$$

$$n_p = - n'_p \quad (2.19)$$

Ele alınan iki durumdaki birim normal vektörler arasındaki (2.19) ilişkisi sayesinde, (2.18) şu biçimde yeniden yazılabilir.

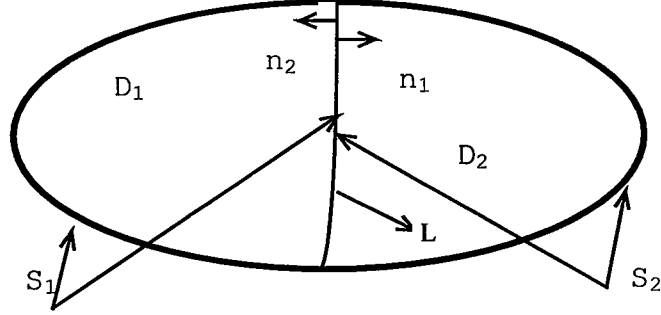
$$- \int_S (\psi(p) \frac{\partial}{\partial n_p} G(q,p) - G(q,p) \frac{\partial}{\partial n_p} \psi(p)) . dS_p = \alpha(q) \psi(q) \quad (2.20)$$

$n_p$  birim vektörünün,  $V$  açık bölgesi için yazılmış denklemde kullanılması, (2.17)'deki ifadeyi kullanma durumunu doğuruyor. Buna göre, (2.17) denklemi  $S$  bölgesi için geçerli olduğundan, (2.20) ifadesinin geçerli olduğu bölge artık,  $V = R^3 \setminus (D \setminus S)$  kapalı bölgesi haline dönüşmüştür. (2.20)' ye göre  $\psi(q)$ , homojen Helmholtz denkleminin, sözü edilen bu bölgedeki bir çözümdür.

(2.17-20) integral ifadelerinin önemli bir sonucu, Sobolev teoremi olarak bilinen teoremdir. Basit bağımlı kapalı iki bölge  $D_1$  ve  $D_2'$  ye ait sınırlar olan  $S_1$  ve  $S_2$  ortak bir sınır parçası  $L'$  ye sahip olsunlar (Şekil 2.3). Söz konusu yüzeylerden dışa doğrultudaki birim normal vektörler sırası ile  $n_1$  ve  $n_2'$  dir.  $\psi_1(p)$  ve  $\psi_2(p)$  aynı numaralı bölgelerde homojen Helmholtz denklemini sağlayan fonksiyonlar olsunlar.

$$(\Delta+k^2)\psi_1(p)=0 \quad p \in D_1 \quad (2.21)$$

$$(\Delta+k^2)\psi_2(p)=0 \quad p \in D_2 \quad (2.22)$$



Şekil (2.3)

Ek olarak,  $\psi_1(p)$  ve  $\psi_2(p)$ , L yüzeyi üzerinde şu koşulları sağlasınlar:

$$\psi_1(p) = \psi_2(p) \quad ; \quad p \in L \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_1} \psi_1(p) = - \frac{\partial}{\partial n_2} \psi_2(p) \quad ; \quad p \in L \quad (2.24)$$

$n_1 = -n_2$  olduğundan, (2.24) özelliği,  $\psi_1(p)$  ve  $\psi_2(p)$  fonksiyonlarının, L yüzeyine göre sabit olacak herhangi bir normal birim vektör bakımından, aynı normal türevlere sahip olmaları anlamına gelir:

$$\frac{\partial}{\partial n_j} \psi_1(p) = \frac{\partial}{\partial n_j} \psi_2(p) \quad ; \quad p \in L, j=1,2; \quad (2.25)$$

Şimdi de,

$$D = (D_1 \cup D_2) \setminus L \quad (2.26)$$

olarak tanımlanan bölgede,

$$\psi(p) = \begin{cases} \psi_1(p), p \in D_1 \setminus L \\ \psi_2(p), p \in D_2 \setminus L \end{cases} \quad (2.27)$$

fonksiyonu tanımlansın. D bölgesi içindeki, mesela  $D_1$  bölgesine ait bir  $q$  noktası için, fonksiyon (2.20) ve (2.16) eşitliklerine<sup>(\*)</sup> göre yazılacak olursa,  $S_1$  yüzeyi üzerinden alınacak integral, fonksiyonun  $S_1$  'in kuşattığı bölge içindeki  $q$  noktasındaki değeri  $\psi(q)$  'yu verir. Diğer yandan,  $q$  noktası  $S_2$  yüzeyinin dışında olduğundan, bu yüzey üzerinden alınacak integral sifıra eşittir. Bu yüzden  $\psi(q)$  'nun,  $S_1$  ve  $S_2$  yüzeyleri cinsinden bir alan üzerinden, (2.26)' daki gibi tanımlı D bölgesi içindeki tüm noktalar için tek bir integral ile ifade edilebilmesinin mümkün olduğu söylenebilir.

Sözü edilen bölgeye ilişkin alan,  $S_1$  ve  $S_2$  yüzeylerinin arakesiti L üzerinde sağlanan koşullar incelendikten sonra belirlenebilir. Bu yapılsa görülecektir ki,  $\psi(q)$  fonksiyonunun L arakesiti üzerinden alınan integrali,  $S_1$  ve  $S_2$  üzerinden alınan integraller sırasında birer kere kendini gösterecektir. (2.23-25) koşulları da dikkate alındığında, bu iki integralin toplamının sifıra eşit olduğu görülür. Buna göre (2.27) ile tanımlı fonksiyonun D bölgesi içindeki herhangi bir noktadaki değerine ilişkin ifade,  $S = (S_1 \cup S_2) \setminus (2L)$  biçiminde tanımlı, D bölgesinin tümünü kuşatmakta olan alan üzerinden, bu yüzeyin dışına doğrultudaki birim normal vektör ( $n$ ) kullanılarak yazılacak (2.16) formülü ile elde edilebilir:

---

<sup>(\*)</sup>denklemdaki S yüzeyi burada  $S_1$  ve  $S_2$  yüzeyleri olarak ayrı ayrı dikkate alınacaktır.

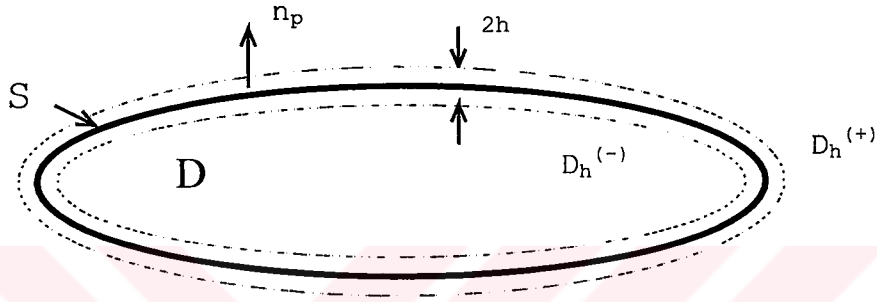
$$\psi(q) = \int_S (\psi(p) \frac{\partial}{\partial n} G(q,p) - G(q,p) \frac{\partial}{\partial n} \psi(p)) dS_p \quad (2.28)$$

Buna göre Sobolev teoremi şöyle ifade edilebilir: Ortak bir sınır parçasına sahip, kapalı iki bölge için farklı iki skaler fonksiyon, ilişkili oldukları bölgelerde homojen Helmholtz denkleminin çözümleri olsunlar. Ortak sınır parçasında, fonksiyonların değerleri eşit ve geçerli oldukları bölgelere ait normal türevleri birbirinin ters işaretlisi ise, sözkonusu toplam bölgenin tümünde homojen Helmholtz denklemini sağlayan bir fonksiyon bulunabilir. Bu fonksiyon, bölgelere ait homojen Helmholtz denkleminin çözümü olan fonksiyonların toplam bölgeye analitik devamıdır.

Sobolev teoreminin açık bölgeler için olan genelleştirilmiş formu, farklı açık bölgelerde homojen Helmholtz denklemini sağlayan fonksiyonların, ortak sınır dışında her yerde sürekli ikinci mertebeden kısmi türevlere, ortak sınırın da dahil olduğu her yerde birinci mertebeden türevlere sahip olması halinde, tüm  $R^3$  için geçerli, homojen Helmholtz denklemini sağlayan ifadeye analitik devamının yapılabileceğini belirtir.

#### 2.1.4. Dirichlet Problemi, Saçılan Alanın İntegral İfadesi

Silindirik bir cismin üzerine gelen elektromagnetik dalğanın, sadece  $E_z$  bileşeni sıfırdan farklı olduğunda ortaya çıkan saçılan alana ilişkin sınır değer problemi, Dirichlet problemi olarak anılır. Skaler alanlara ilişkin Dirichlet problemi de benzer biçimde incelenir.



Şekil (2.4)

Şekil (2.4) ' deki cisme gelen alan  $u^i(p)$  olsun.  $u^i(p)$  sözkonusu uzayda  $(R^3)$ , Homojen Helmholtz denklemini sağlar:

$$(\Delta + k^2) u^i(p) = 0 \quad (2.29)$$

Saçılan alan  $u^s(p)$ 'nin ifadesi S yüzeyi hariç her yerde ikinci mertebeden kısmi türevlere, S yüzeyine içeriden ve dışarıdan yaklaşırken sürekli ifadeleri bulunan birinci türevlere sahip biçimde belirlenecektir. h sıfıra giderken bu değerler düzgün olarak sonlu limitlere yaklaşırlar.

Saçılan alan  $S$  yüzeyi dışında homojen Helmholtz denklemini ve Sommerfeld radyasyon koşulunu sağlar.

$$(\Delta + k^2) u^s(p) = 0 \quad (2.30)$$

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} |p| \left( \frac{\partial}{\partial |p|} u^s(p) - iku^s(p) \right) = 0 \quad (2.31)$$

$S$  yüzeyinin iki yanındaki Dirichlet sınır koşulu ise;

$$u^{s(+)}(p) + u^i(p) = 0 \quad p \in S \quad (2.32)$$

(2.29-32) denklemlerinin ifade ettiği sınır değer problemine Dirichlet sınır değer problemi denir.

$$P^{(+)} = \{p + h \cdot n_p\} \quad (2.33), \quad P^{(-)} = \{p - h \cdot n_p\} \quad (2.34)$$

$S_h^{(+)}$  ve  $S_h^{(-)}$ , Şekil(2.4)'te kesikli çizgi ile belirtilmiş  $D_h^{(+)}$  dış ve  $D_h^{(-)}$  iç bölgelerinin sınır yüzeyleridir. Bu yüzeyler sırasıyla  $P^{(+)}$  ve  $P^{(-)}$  yer vektörlerinin uç noktalarının toplamından oluşmaktadır. (2.33, 2.34) denklemlerinde  $p$ ,  $S$  yüzeyi üzerindeki bir noktanın yer vektörü,  $n_p$  dışarıya yönelmiş birim normal vektör ve  $h$  çok küçük değerinde pozitif bir skaler büyüklüktür.

(2.30) ve (2.31) denklemlerini sağlayan  $u^s(p)$  fonksiyonu, (2.17) ve (2.20) deki integral ifadeler kullanılarak gösterilebilir.

$$\int_{S_h^{(-)}} (u^s(p) \frac{\partial}{\partial n_p} G(q,p) - G(q,p) \frac{\partial}{\partial n_p} u^s(p)) \cdot dS_p = \begin{cases} u^s(q), q \in D_h^{(-)} \\ 0, q \in D_h^{(+)} \end{cases} \quad (2.35)$$

$$-\int_{S_h^{(+)}} (u^s(p) \frac{\partial}{\partial n_p} G(q,p) - G(q,p) \frac{\partial}{\partial n_p} u^s(p)) \cdot dS_p = \begin{cases} 0, q \in D_h^{(-)} \\ u^s(q), q \in D_h^{(+)} \end{cases} \quad (2.36)$$

2h kalınlığındaki  $S_h^{(+)}$  ve  $S_h^{(-)}$  yüzeylerinin arasındaki cıdar  $D_h$  haricinde, herhangi bir yerde sabit bir  $q$  noktası düşünölsün. Sözkonusu bölgenin her yerinde  $u^s(p)$ 'nin kendisinin ve birinci türevlerinin sürekli olduğu ve  $h$ 'nin çok küçük bir pozitif sayı olduğu halde bu değerlerin  $S$  üzerinde limitlerinin bulunduğu belirtilmişti. Seçilen  $q$  noktası bakımından  $G(q,p)$  de sonsuz düzgün bir fonksiyondur. Bu yüzden, (2.35) ve (2.36) denklemlerinin sol taraflarında  $h \rightarrow 0$  yapılırsa, aynı integraller  $S$  yüzeyi üzerinden ve ilişkin limit fonksiyonlar olan  $u^{s(\pm)}$  ve  $\frac{\partial}{\partial n} u^{s(\pm)}$  cinsinden olacak biçimde geçerlidir:

$$\int_S (u^{s(-)}(p) \frac{\partial}{\partial n_p} G(q,p) - G(q,p) \frac{\partial}{\partial n} u^{s(-)}(p)) \cdot dS_p = \begin{cases} u^s(q), q \in (D \setminus S) \\ 0, q \in \mathbb{R}^3 \setminus D \end{cases} \quad (2.37)$$

$$-\int_S (u^{s(+)}(p) \frac{\partial}{\partial n_p} G(q,p) - G(q,p) \frac{\partial}{\partial n} u^{s(+)}(p)) \cdot dS_p = \begin{cases} 0, q \in (D \setminus S) \\ u^s(q), q \in \mathbb{R}^3 \setminus D \end{cases} \quad (2.38)$$

Denklemlerde saçılan alanın sahip olduğu üniform limit değerleri aşağıdaki biçimde verilebilir:

$$u^{s(+)}(p) = \lim_{h \rightarrow +0} u(p + hn_p) \quad ; p \in S \quad (2.39)$$

$$u^{s(-)}(p) = \lim_{h \rightarrow +0} u(p - hn_p) \quad ; p \in S \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u^{s(+)}(p) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial n_p} u(p + hn_p) \quad ; p \in S \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u^{s(-)}(p) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial n_p} u(p - hn_p) \quad ; p \in S \quad (2.42)$$

(2.37) ve (2.38)'in sol ve sağ yanları taraf tarafa toplanırsa varılacak ifade şudur:

$$u^s(q) = \int_S \left\{ -\delta u^s(p) \frac{\partial}{\partial n_p} G(q,p) + G(q,p) \delta \frac{\partial}{\partial n} u^s(p) \right\} dS_p, \quad q \in R^3 \setminus S \quad (2.43)$$

Yukarıdaki denklemdeki yeni terimler ise şöyle tanımlanmıştır:

$$\delta u^s(p) = u^{s(+)}(p) - u^{s(-)}(p); \quad p \in S \quad (2.44)$$

$$\delta \frac{\partial}{\partial n} u^s(p) = \frac{\partial}{\partial n} u^{s(+)}(p) - \frac{\partial}{\partial n} u^{s(-)}(p); \quad p \in S \quad (2.45)$$

Şu ana dek elde edilen formüller için Dirichlet koşulu kullanılmamıştır. Yani (2.43), (2.30-31) ve (2.39-42) eşitliklerini sağlayan, her  $u^s(q)$  için geçerlidir. Bu,  $u^s(q) = 0$  elde edilen, (2.44) ve (2.45) denklemlerinin sıfıra eşit olduğu durumda da geçerlidir. Bu durum hiçbir saçıcı cismin olmadığı duruma karşı gelir ve tabii bir sonuçtur: Cisim yoksa saçılan alan da olmaz. Sobolev teoreminin açık bölgeler için olan genelleştirilmiş formu,  $u^{s(\pm)}(q)$ , (2.30-31) ve (2.39-42) eşitliklerini sağladıkça geçerlidir<sup>(\*)</sup>.

Bu aşamadan sonra (2.32) ile verilmiş Dirichlet koşulu kullanılırsa, (2.44) eşitliğinin hemen sıfır olduğu görülebilir. Bu yüzden Dirichlet kırımım probleminde saçılan alanın ifadesi aşağıdaki gibi bir integral ifadeden ibarettir:

---

<sup>(\*)</sup>bkz. bölüm 2.1.3



$$u^s(q) = \int_S G(q,p) \cdot \delta \frac{\partial}{\partial n} u^s(p) \cdot ds ; \quad q \in R^3 \setminus S \quad (2.46)$$

İki paragraf önce belirtilen nedenden ötürü  $\delta \frac{\partial}{\partial n} u^s(p) = 0$  olamaz, çünkü bu saçılan alanın özdeşleyin sıfır olması yani, var olmaması demektir. Dirichlet koşulu (2.46)'nın sağ yanını yeniden yazmak için kullanılacak olursa,

$$-u^i(q) = \int_S G(q,p) \cdot J_D(p) \cdot ds ; \quad q \in S \quad (2.47)$$

bilinmeyen fonksiyon olarak yeni tanımlanan,

$$J_D(p) = \delta \frac{\partial}{\partial n} u^s(p) \quad (2.48)$$

kullanılarak yazılabilir. Denklemin çözümü,  $J_D(p)$  bulunduktan sonra, uzayda herhangi bir noktadaki saçılan alan

$$U^s(q) = \int_S G(q,p) \cdot J_D(p) \cdot ds ; \quad q \in R^3 \quad (2.49)$$

şeklinde elde edilebilir.  $J_D(p)$ 'nin sürekli fonksiyonlar sınıfından olması gerektiği unutulmamalıdır.

Tezin bu noktadan sonraki bölümü, sonsuz ince, mükemmel iletken dairesel halkadan (Şekil(1.1)) skaler dalga saçılması probleminin , Dirichlet sınır koşulu altında geçerli olan (2.47) gibi bir denklemden yola çıkılarak çözümüne ayrılmıştır.

### 3. İNTEGRAL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

#### 3.1. Sonsuz İnce Dairesel Halka için Dirichlet Sınır Değer Problemi ve Saçılan Alanın İntegral İfadesi

Sonsuz ince dairesel halka (Şekil (1.1)) için, Dirichlet sınır koşulu altında skaler dalga saçılması problemindeki saçılan alan  $u^s(p)$ 'nin sağlaması gereken denklemler şunlardır:

$$(\Delta + k^2) u^s(p) = 0 \quad p \in \mathbb{R}^3 \setminus S \quad (3.1)$$

(Homojen Helmholtz Denklemi)

$$u^{s(z)}(p) + u^i(p) = 0 \quad p \in S \quad (3.2)$$

(Dirichlet Koşulu)

$$u^s(q) = \int_S J_D(p) \cdot G(q,p) \cdot ds_p ; \quad q \in \mathbb{R}^3 \quad (3.3)$$

(Green Özdeşliği ile ulaşılan saçılan alan ifadesi)

$$G(q,p) = -\frac{e^{ik|q-p|}}{4\pi|q-p|} \quad , \quad q,p \in \mathbb{R}^3 \quad (3.4)$$

( $\mathbb{R}^3$  boş uzayı için Green Fonksiyonu)

S yüzeyinde bilinmeyen fonksiyon (akım yoğunluğu),

$$J_D(p) = \frac{\partial}{\partial n} u^{s(+)}(p) - \frac{\partial}{\partial n} u^{s(-)}(p); \quad p \in S \quad (3.5)$$

biçimindedir (bkz. 2. bölüm) . (  $n$  :  $e_z$  - halka yüzeyine pozitif  $z$  doğrultusunda normal, birim vektör)

(3.2) ve (3.3) formüllerinin sonucunda elde edilecek probleme ilişkin denklem,  $J_D(p)$  bilinmeyen fonksiyonuna sahip, birinci türden bir integral ifadedir:

$$-u^i(q) = \int_S J_D(p) \cdot G(q,p) \cdot ds_p; \quad q \in S \quad (3.6)$$

Probleme ilişkin ayrıt koşulu,  $J_D(p)$  fonksiyonunun,  $d(p)$  halkanın en yakın ayrıtına uzaklık,  $H(p)$  de  $S$  yüzeyi üzerinde düzgün bir fonksiyon olmak üzere, aşağıdaki yapıda olmasını gerektirir[7]:

$$J_D(p) = [d(p)]^{-1/2} H(p) \quad (3.7)$$

### 3.2. Halka Geometrisine göre İntegral Denklem İfadeleri

$R^3$ 'te herhangi iki nokta olan  $q$  ve  $p$ 'nin silindirik koordinatları aşağıdaki gibi alınsın:

$$q = (z_q, \rho_q, \varphi_q); \quad p = (z_p, \rho_p, \varphi_p); \quad (3.8)$$

Bu iki nokta arasındaki uzaklık, bilindiği gibi,

$$|q - p| = \{ (z_q - z_p)^2 + (\rho_q - \rho_p)^2 + 4\rho_q\rho_p \sin^2((\varphi_q - \varphi_p)/2) \}^{1/2}; \quad (3.9)$$

biçiminde verilebilir. Sonsuz ince halka için ( $z_q = z_p$ ), halka  $z=0$  düzlemine de oturtulmuşsa (3.9), şu hale sadeleşir:

$$|q - p| = \{ (\rho_q - \rho_p)^2 + 4\rho_q\rho_p \sin^2((\varphi_q - \varphi_p)/2) \}^{1/2}; \quad (3.10)$$

(3.10) ifadesine dayalı olarak  $R(\rho_q, \rho_p; \varphi) = |q - p|$ ,  $\varphi = \varphi_q - \varphi_p$  olarak tanımlanırsa (3.4) ile verilmiş, sınır değer problemine ilişkin Green fonksiyonu şöyle ifade edilebilir:

$$G(\rho_q, \rho_p; \varphi) = - \frac{e^{ikR(\rho_q, \rho_p; \varphi)}}{4\pi R(\rho_q, \rho_p; \varphi)} \quad (3.11)$$

(3.6) ile verilen, probleme ilişkin sınırdaki yani halka üzerinde geçerli integral denklem aşağıdaki hale gelecektir:

$$-u^i(r_q, \varphi_q) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_a^b J_D(r_p, \varphi_p) \cdot G(r_q, r_p; \varphi_q - \varphi_p) \cdot r_p dr_p d\varphi_p; \quad a \leq r_q \leq b, \varphi_q \in [-\pi, \pi] \quad (3.12)$$

$q$  ve  $p$   $R^3$ 'te herhangi iki nokta olmak üzere, saçılan alan ifadesi için,  $R_z(z_q, \rho_q; z_p, \rho_p; \varphi)$  uzaklığı tanımlanmalıdır. (3.9)'dan başka birşeye eşit olmayan bu ifade,

$$R_z(z_q, \rho_q; z_p, \rho_p; \varphi) = \{ (z_q - z_p)^2 + (R(\rho_q, \rho_p; \varphi))^2 \}^{1/2} \quad (3.13)$$

biçimindedir ( $R(\rho_q, \rho_p; \varphi)$  (3.11) ile verilen, halka düzlemi ( $z=0$ ) üzerindeki uzaklık ifadesidir).  $R^3$  uzayının tümü için geçerli Green fonksiyonu, bu ifadeyi içermelidir:

$$G_z(z_q, \rho_q; z_p, \rho_p; \varphi) = -\frac{e^{ikR_z(z_q, \rho_q; z_p, \rho_p; \varphi)}}{4\pi R_z(z_q, \rho_q; z_p, \rho_p; \varphi)} \quad (3.14)$$

Yukarıdaki Green fonksiyonunun kullanıldığı saçılan alan ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$u^s(z_q, r_q, \varphi_q) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_a^b J_D(r_p, \varphi_p) \cdot G_z(z_q, \rho_q; z_p, \rho_p; \varphi) \cdot r_p dr_p d\varphi_p; a \leq r_q \leq b, \varphi_q \in [-\pi, \pi] \quad (3.15)$$

Yapılması gereken, sınırdaki sağlanan (3.12) denkleminde  $J_D(r_p, \varphi_p)$ 'yi çözüp, (3.15) denklemini yardımı ile saçılan alanı hesaplamaktır.

### 3.3. Sınırdaki Yazılan İntegral İfadesinin Fourier Açılımı

(3.12) denklemindeki her terimin Fourier serileri ile ifadesi ele alınsın.

$$J_D(r_p, \varphi_p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j_m(r_p) \cdot e^{im\varphi_p}, \quad \varphi_p \in [-\pi, \pi], r_p \in [a, b] \quad (3.15)$$

$$G(r_q, r_p; \varphi_q - \varphi_p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m(r_q, r_p) e^{im\varphi}, \quad \varphi \in [-\pi, \pi], r_p, r_q \in [a, b] \quad (3.16)$$

$$u^i(r_q, \varphi_q) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m^i(r_q) \cdot e^{im\varphi_q}, \quad \varphi_q \in [-\pi, \pi], r_q \in [a, b] \quad (3.17)$$

Bu denklemlerin Fourier katsayıları ise şöyledir:

$$j_m(r_p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\varphi} J_D(r_p, \varphi_p) d\varphi, \quad r_p \in [a, b] \quad (3.17)$$

$$G_m(r_q, r_p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\varphi} G(r_q, r_p; \varphi_q - \varphi_p) d\varphi, \quad r_p, r_q \in [a, b] \quad (3.18)$$

$$u_m^i(r_q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\varphi} u^i(r_q, \varphi_q) d\varphi, \quad r_q \in [a, b] \quad (3.19)$$

Fourier serileri ile ifade edilen fonksiyonlar (3.12)'de, gerektiğinde farklı fonksiyonların katsayı numaralarını  $(m, n, \dots)$  farklı göstererek, yerine yazılabilir:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} -u_m^i(r_q) \cdot e^{im\varphi_q} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_a^b \sum_{n=-\infty}^{\infty} j_n(r_p) \cdot e^{in\varphi_p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m(r_q, r_p) e^{im\varphi} \cdot r_p dr_p d\varphi_p; \quad (3.20)$$

(3.20) nin sağ tarafındaki integral  $\varphi_p$  bakımından süreksizlik içermediğinden, toplama ve integral işlem sıralarını değiştirmek mümkündür. Bu sayede sağ tarafta

kalan yegane integrali alınacak kısım,  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi$

olacaktır. Burada integral, ortogonal bir fonksiyon olduğundan, integral,  $n \neq m$  olduğunda sifıra eşit iken, sadece  $n=m$  için bir değere sahiptir ve bu değer de  $2\pi$ 'ye eşittir. Denklem iki tarafının Fourier katsayılarınının eşit olması gerektiği göz önüne alındığında, indirgenen denklem şu hali alır:

$$-u_m^i(r_q) = 2\pi \int_a^b j_m(r_p) G_m(r_q, r_p) \cdot r_p dr_p; \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.21)$$

### 3.4. Halka Yüzeyinin Uygun Bir Parametre ile İfade Edilmesi, Ortogonal Polinomlar Yaklaşımının Uygulanacağı İntegral Denklem

Ortogonal polinomlar yaklaşımının kullanılacak olması, çözeceğimiz denklemi uygun bir değişken dönüşümü ile kullanılacak ortogonal polinomun geçerli olduğu aralığa dönüştürmemizi gerektirir. Kullanılacak olan birinci türden Chebyshev polinomları,  $[-1,1]$  aralığında geçerlidir. Bu yüzden, bu bölüm (3.21) denkleminin parametrelerini, sözkonusu aralıkta incelemeye uygun hale getirecek dönüşümün açıklanmasına ayrılmıştır.

Halkanın üzerindeki noktalar olan  $q$  ve  $p'$  nin yarıçapları  $r_q, r_p \in [a,b]$ ,  $u, v \in [-1,1]$  parametrelerinin fonksiyonu olsunlar.  $[-1,1]$  aralığını,  $[a,b]$  ( $a, b > 0$ ) aralığına dönüştürecek bir  $\eta(u)$  fonksiyonu düşünölsün.  $\eta'(u) > 0$  olduğu takdirde bu mümkündür. Kullanılacak olan bu şarta uygun fonksiyon, en basit halde,  $r \in [a,b]$  'yi  $v \in [-1,1]$  ' ye göre ifade etmek üzere pozitif katsayılı  $r = \alpha v + \beta$  gibi lineer bir denklem düşünölerek ve katsayıları da parametre sınırları arasındaki ilişkilerden yararlanılıp bulunarak yazılabilir. Kullanılacak denklem böyle elde edilmiştir:

$$\eta(v) = \frac{b-a}{2}v + \frac{a+b}{2}; \quad b > a, \quad v \in [-1,1] \rightarrow \eta'(v) > 0 \quad (3.22)$$

Bu dönüşümle,  $r_q = \eta(u)$ ,  $r_p = \eta(v)$ ,  $dr_p = \eta'(v)dv$  olduğu da dikkate alınarak, integral ifadesi yeniden yazılır:

$$-u_m^i(\eta(u)) = 2\pi \int_{-1}^1 j_m(\eta(v)) G_m(\eta(u), \eta(v)) \cdot \eta(v) \eta'(v) dv; u \in [-1, 1]; m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.23)$$

$$\tilde{G}_m(u, v) = 4\pi^2 (\eta(u)\eta(v))^{1/2} G_m(\eta(u), \eta(v)); \quad (3.26)$$

şeklinde bir tanımlama yapılarak  $\tilde{G}_m(u, v)$  fonksiyonuna ait tekillik özellikleri aşağıdaki teorem ile ele alınsın.

Teorem:  $\tilde{G}_m(u, v)$  fonksiyonu aşağıdaki gösterilime sahiptir:

$$\tilde{G}_m(u, v) = \ln|u-v| \left\{ 1 + \sum_{n=2}^3 A_n^m(u) \cdot |u-v|^n \right\} + H_3^m(u, v) \quad (3.27)$$

$H_3^m(u, v)$  ( $u, v \in [-1, 1]$ ) burada, üçüncü mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip, dördüncü mertebeden türevleri ise logaritmik tekillik gösteren bir fonksiyondur ve,

$$A_2^m(u) = \frac{[k \cdot \eta'(u)]^2}{4} - \frac{m^2 - 1/4}{4} \cdot \frac{\eta'(u)}{\eta(u)} \quad (3.28)$$

$$A_3^m(u) = \frac{m^2 - 1/4}{4} \cdot \left( \frac{\eta'(u)}{\eta(u)} \right)^3 \quad (3.29)$$

olarak geçerlidir. Buradan çıkan sonuç şudur ki,  $\tilde{G}_m(u, v)$  fonksiyonu  $u \neq v$  oldukça, düzgün bir fonksiyondur.

$$\tilde{g}_m(u) = 2(\eta(u))^{1/2} \cdot u_m^i(\eta(u)); \quad (3.30)$$

$$\tilde{j}_m(v) = (\eta(v))^{1/2} \eta'(v) j_m(\eta(v)); \quad (3.31)$$



$$\tilde{K}(u,v) = -\frac{1}{\pi} [\tilde{G}_m(u,v) - \ln|u-v|] \quad (3.32)$$

fonksiyonları tanımlansın. (3.23) ifadesine konup gerekli düzeltmeler yapıldığında, (1.0) denkleminde bahsedilen, çözümünde Ortogonal Polinomlar yöntemi kullanılacak olan denkleme ulaşılır:

$$\int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln|u-v| + \tilde{K}(u,v) \right\} \tilde{j}_m(v) dv = \tilde{g}_m(u); \quad u \in [-1,1]; \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.33)$$

(3.32)'de tanımlı olan  $\tilde{K}(u,v)$ , tüm birinci mertebeden kısmi türevleri olan ve ikinci mertebeden türevlerinde sadece  $\ln|u-v|$  gibi bir tekilliği bulunan, düzgün bir fonksiyondur. Yani,

$$\tilde{K}(u,v) \in C^1(u \in [-1,1], v \in [-1,1]); \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \tilde{K}(u,v), \frac{\partial^2}{\partial v^2} \tilde{K}(u,v), \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \tilde{K}(u,v) \in L_2(u \in [-1,1], v \in [-1,1]); \quad (3.35)$$

### 3.5. Ortogonal Polinomlar Yöntemi Uygulanacak, Logaritmik Tekilliğe Sahip İntegral Denklemin Sonsuz Lineer Cebir Sistemine İndirgenmesi

#### 3.5.1. İntegral Denklem Terimlerinin Normalleştirilmiş Chebyshev Polinomları ile İfade edilmesi

Bir önceki bölümde belirtilen tekillik özelliklerine sahip ((3.34-35))  $\tilde{K}(u,v)$  ve  $\tilde{g}_m(u)$  fonksiyonları, uygun ortogonal polinom olan birinci türden Chebyshev polinomları ile ifade etmeye elverişli, yeteri kadar düzgün fonksiyonlardır.

Birinci tür Chebyshev polinomu,

$$T_n(x) = \cos n\varphi ; x = \cos\varphi (\varphi = \arccos x) ; \quad (3.36)$$

olarak tanımlıdır ve buna göre,

$$T_0(x) = 1 ; T_1(x) = x \quad (3.37)$$

olmak üzere, polinomun herhangi bir terimi aşağıdaki eşitlik ile bulunabilir:

$$T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (3.38)$$

Chebyshev polinomu terimlerinin normu ( $\|T_n(x)\|$ ) şöyle tanımlıdır:

$$d_n^2 = (\|T_n(x)\|)^2 = \begin{cases} \pi/2; n = 1, 2, 3, \dots \\ \pi; n = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

Normalleştirilmiş Chebyshev polinomu, Chebyshev polinomunun, normunun karesine bölünmüş hali olarak tanımlanır:

$$\hat{T}_n(x) = T_n(x) / d_n \quad (3.40)$$

Sınır değer integral denkleminin son hali (3.33)'ün içerdiği terimler normalleştirilmiş Chebyshev polinomları aracılığı ile  $\{b(u) = \tilde{g}_m(u), K(u, v) = \tilde{K}(u, v), X(v) = \tilde{J}_m(v)\}$  gösterilim değişiklikleri de yapılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$-\frac{1}{\pi} \ln|u - v| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{T}_n(u) \hat{T}_n(v)}{\gamma_n^2}, \quad \gamma_0 = (\ln 2)^{-1/2}; \quad \gamma_n = |n|^{1/2}, \quad n \neq 0 \quad (3.41)$$

$$X(v) = (1 - v^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} x_n \hat{T}_n(v), \quad (3.42)$$

(3.42) denkleminin Fourier - Chebyshev katsayıları  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  problemin çözümü için bulunmalarına çalışılan katsayılardır.

$$b(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \hat{T}_n(u), \quad u \in [-1, 1] \quad (3.43)$$

$$K(u, v) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{mn} \hat{T}_m(u) \hat{T}_n(v), \quad u, v \in [-1, 1] \quad (3.44)$$

Yukarıdaki seri ifadelerinin Fourier - Chebyshev katsayıları da şöyle yazılabilir:  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  ile  $\{k_{mn}\}_{m,n=0}^{\infty}$

$$b_n = \int_{-1}^1 (1-u^2)^{-1/2} b(u) \hat{T}_n(u) du \quad (3.45)$$

$$= d_n^{-1} \int_0^{\pi} b(\cos \varphi) \cos n \varphi d\varphi; \quad (3.46)$$

$$k_{mn} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{K(u, v) \hat{T}_m(u) \hat{T}_n(v)}{(1-u^2)^{1/2} (1-v^2)^{1/2}} du dv \quad (3.47)$$

$$= d_n^{-1} d_m^{-1} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} K(\cos \vartheta, \cos \tau) \cos m \vartheta \cos n \tau d\vartheta d\tau. \quad (3.48)$$

### 3.5.2. (3.5.1.)'de Elde Edilen Sonuçların Değerlendirmesi, Fourier - Chebyshev Katsayılarının $m, n \rightarrow \infty$ Halinde Davranışları

(3.41) eşitliği, ileride de görüleceği üzere, logaritmik tekillik içeren sözkonusu integral denklemin tekil kısmının değerlendirilmesi için önemlidir. İntegral denklemin ana çekirdeğinin lineer simetrik formda ifade edilebilmesini sağlar. Bu formülün çıkarımı için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|, \quad x \in [-2\pi, 2\pi] \quad (\text{bkz. [19]})$$

özdeşliğinden yola çıkıp trigonometrik ve Chebyshev polinomlarına has özelliklerden yararlanmak gerekmektedir. (3.46) ve (3.48) denklemleri ise Chebyshev polinomlarının tanımından ((3.36)) yararlanılarak kolayca yazılabilir.

Bu denklemler, probleme ilişkin Fourier - Chebyshev katsayılarının ifadeleridir ve  $m, n \rightarrow \infty$  olurken nasıl davrandıklarını anlamada yardımcı olurlar. (3.34) ve (3.35) özelliğine sahip olan ve (3.44) şeklinde ifade edilebilen integralin çekirdeğine ilişkin (3.48) ile verilen katsayıların,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (1+n^2)(1+m^2) |k_{mn}|^2 < \infty, \quad (3.49)$$

özelliğini sağladığını göstermek için önce, çekirdeğin sahip olduğu öne sürülen türevler ((3.34-35)) uygun değişken dönüşümleri ile aynı değişkenlere sahip hale getirilir<sup>(\*)</sup>. Sonraki adım, bu ifadedeki ((3.48)) integralini hesaplayarak, sözkonusu türevleri aynı integral altında elde etmektir. Daha sonra, bu türevler cinsinden ifade edilen Fourier katsayılarının, sağlamaları zorunlu olan Parseval eşitsizliği kullanılarak (3.49) sonucuna varılabilir.

### 3.5.3. İntegral Denklemin Sonsuz Lineer Cebir Sistemine İndirgenmesi

Bu bölümde, bölüm 3.5.1. de elde edilen gösterilimler,

$$b(u) = \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln|u-v| + K(u,v) \right\} X(v) dv; \quad u \in [-1,1]; \quad (3.50)$$

biçimindeki integral denklemde yerine koyulacaktır.

<sup>(\*)</sup>Bu değişken dönüşümleri (3.36) tanım bağıntısından elde edilecektir

Normalleştirilmiş Chebyshev polinomları aşağıdaki gibi bir integralde kullanılırsa ortogonalite özelliklerinden faydalı bir sonuç ortaya çıkar:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} \hat{T}_n(x) \hat{T}_m(x) dx = \delta_{m,n}, \quad m, n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.51)$$

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0; m \neq n \\ 1; m = n \end{cases} \quad (\text{Kronecker deltası}) \quad (3.52)$$

Sözünü ettiğimiz yerine koyma işlemine başlanırsa, (3.41) ve (3.42) (3.50)'de yerine konur, toplam ve integralin sıraları değiştirilebilir ve integral altında (3.51) elde edilir. Buna göre:

$$\int_{-1}^1 -\frac{1}{\pi} \ln|u-v| X(v) dv = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} x_n \hat{T}_n(u), \quad u \in [-1, 1]; \quad (3.53)$$

Aynı işlem (3.42)-(3.43) ve (3.42)-(3.44) denklemleri (3.50)'de yerine konularak yapılmış integralin çekirdeğinin ifadesi ve sonra tüm integral ifadesi aşağıdaki gibi olur:

$$\int_{-1}^1 K(u,v) X(v) dv = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} k_{mn} x_n \right) \hat{T}_m(u) \quad (3.54)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} x_n \hat{T}_n(u) + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{s=0}^{\infty} k_{ns} x_s \right) \hat{T}_n(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \hat{T}_n(u) \quad (3.55)$$

(3.55)  $\{\hat{T}_n(u)\}_{n=0}^{\infty}$  fonksiyonlarının oluşturduğu denklem sisteminin, sağ ve sol yan Fourier-Chebyshev

katsayılarının eşitliği aşağıdaki sonsuz cebirsel lineer denklem sisteminin elde edilmesini sağlar:

$$\frac{1}{\gamma_n^2} x_n + \sum_{s=0}^{\infty} k_{ns} x_s = b_n ; n=0,1,2,3,\dots \quad (3.56)$$

Bu denklem, kesme yöntemi ile sonlu cebirsel lineer denklem sistemi haline getirilerek çözülebilir:

$$\frac{1}{\gamma_n^2} x_n + \sum_{s=0}^N k_{ns} x_s = b_n ; n=0,1,2,3,\dots,N-1,N. \quad (3.57)$$

$N$  burada, çözüm prosedürünün bir parametresidir ve gerekli hassaslıktaki yaklaşık çözüm için yeterince büyük seçilmelidir.

Ancak, (3.56) birinci türden bir sonsuz lineer cebir denklem takımı oluşturmuştur. Bu denkleme kesme yöntemi uygulanması, giriş bölümünde değinilen istenmeyen sonuçları ortaya çıkarır: Çözülecek matris iyi kurulmuş değildir, yuvarlatma hataları yaklaşık çözümün gerçek çözümden büyük miktarlarda sapmasına neden olur, kesme sayısı istenilen yaklaşıklık için istenilen kadar küçük olamaz. Bu yüzden, sonraki bölümde açıklanacak olan regülerleştirme işleminin yapılması gerekmektedir.

### 3.5.4. Sonsuz Lineer Cebir Sistemine Analitik Regülerleştirme Uygulaması

Analitik regülerleştirme yönteminin varmayı amaçladığı ikinci türden denklem takımı, incelenen birinci türden problem bakımından basit bir biçimde elde edilebilmektedir. Yeni bilinmeyen katsayılar,

$$y_n = x_n / \gamma_n \quad n=0,1,2,\dots \quad (3.58)$$

şeklinde tanımlanıp, (3.56) sisteminin her yanı  $\gamma_n$  ile çarpılırsa,

$$y_n + \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_n \gamma_s k_{ns} y_s = \gamma_n b_n \quad (3.59)$$

bulunur. Yeni katsayılar,

$$\hat{k}_{ns} = \gamma_n \gamma_s k_{ns} \quad n,s=0,1,2,3,\dots \quad (3.60) \quad ; \quad \hat{b}_n = \gamma_n b_n \quad (3.61)$$

yeni matris operatörü,

$$\hat{K} = \left\{ \hat{k}_{ns} \right\}_{n,s=0}^{\infty} \quad (3.62)$$

ve sütun vektörleri

$$y = \left\{ y_n \right\}_{n=0}^{\infty} \quad (3.63) \quad ; \quad \hat{b} = \left\{ \hat{b}_n \right\}_{n=0}^{\infty} \quad (3.64)$$

yazıldıktan sonra (3.59) sistemi yeni halini alır:



$$y_n + \sum_{s=0}^{\infty} \hat{k}_{ns} y_s = \hat{b}_n, \quad n=0,1,2,\dots \quad (3.65)$$

Buna ilişkin fonksiyonel denklem ise,.

$$(I + \hat{K})y = \hat{b}; \quad y, \hat{b}_n \in l_2 \quad (3.66)$$

biçimindedir. Bu sistem kesme yöntemi ile çözülebilir. (3.56) denklemi ile arasındaki önemli fark, çekirdek fonksiyonu  $K(u,v)$  yeterince düzgün ise,  $\hat{K}$  operatörünün  $l_2'$  de kompakt olmasıdır. Bu yüzden (3.66) denklemi sayısal olarak çözmeye daha elverişlidir yani, denklemin N boyut için bulunan çözümü gerçek çözüme ( $N \rightarrow \infty$ ) yakınsamaktadır ve buna bağlı olarak (3.66) denklemi daha doğru ve daha da önemlisi daha kararlıdır.

## 4. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN SAYISAL OLARAK GERÇEKLENMESİ

### 4.1. Kesme Yöntemi ile çözülecek Lineer Cebir Sisteminin Oluşturulması

(3.33) denkleminin ifadeleri, bu bölümde ayrı ayrı ele alıp, çözümde uygulanan sayısal yöntemlerden bahsedilecektir.

#### 4.1.1. İntegral denklemin sağ tarafı

(3.30) denkleminden geriye doğru gidilip, gelen alanın Fourier dönüşümü dikkate alınırsa, sayısal olarak gerçekleşmesi gerekli ifade aşağıdaki gibi olur:

$$\tilde{g}_m(u) = \{ 2 r_q^{1/2} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\varphi} u^i(r_q, \varphi_q) d\varphi \right] \} \quad (4.1)$$

Yapılan incelemede  $u^i(r_q, \varphi_q)$ , düzlemsel dalga ve noktasal kaynak olarak ele alınmıştır. Düzlemsel dalganın ifadesi; ( $x=r_q \cos \varphi_q$ ;  $y=r_q \sin \varphi_q$ ;  $z$  : noktanın parametreleri;  $\theta, \varphi$ : gelen alan parametreleri)

$$u^i(r_q, \varphi_q) = e^{ik(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta)}, \quad (4.2)$$

Noktasal kaynak ifadesi; ( $R_z$ : (3.13) denklemindeki ifade)

$$u^i(r_q, \varphi_q) = - \frac{e^{ikR_z(z_q, r_q; z_p, r_p; \varphi_q - \varphi_p)}}{4\pi R_z(z_q, r_q; z_p, r_p; \varphi_q - \varphi_p)} \quad (4.3)$$

Sağ yana ilişkin  $m'$ inci Fourier katsayısını veren (4.1)'in herhangi bir tekillik içermeyen bir integrale sahip olması, integrali  $[-\pi, \pi]$  aralığında sonsuz küçük dikdörtgen alanların toplamı yaklaşıklığı ile doğru olarak hesaplayabilmeye imkan verir.

#### 4.1.2. Çekirdek $K(u, v)$ 'nin Hesabı

(3.32) denkleminden geri gidilip, buna ilişkin Fourier dönüşümü yerine yazılırsa şu elde edilir: ( $R$  (3.10)'daki gibidir.)

$$\tilde{K}(u, v) = \left\{ \frac{1}{2\pi} (r_q r_p)^{1/2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\varphi} \left[ \frac{e^{ikR(r_q, r_p; \varphi)}}{R(r_q, r_p; \varphi)} d\varphi \right] + \frac{1}{\pi} \ln|u-v| \right\} \quad (4.4)$$

(4.4) denkleminin integral ifadesi,  $r_q = r_p$  için tekillik içerir. (4.4)'ün tamamı ise logaritmik olduğu bilinen bu tekillikten bağımsızdır. Yapılacak olan, integral ifadesini açarak, sayısal hesaplamaya elverişli ifadeler aramaktır.

$$H_m(r_q, r_p) = \frac{1}{2\pi} (r_q r_p)^{1/2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\varphi} \left[ \frac{e^{ikR(r_q, r_p; \varphi)}}{R(r_q, r_p; \varphi)} d\varphi \right] + \frac{1}{\pi} \ln|r_q - r_p| \quad (4.5)$$

$$L(u,v) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{r_q - r_p}{u - v} \right| = \frac{1}{\pi} \ln \frac{b-a}{2} \quad (4.6)$$

ara işlemleri ile  $r_q, r_p$  'yi  $u, v$ 'ye bağlayan (3.22) de dikkate alınarak aşağıdaki ifade yazılır:

$$\tilde{K}(u,v) = H_m(r_q, r_p) - L(u,v) \quad (4.7)$$

$H_m(r_q, r_p)$ 'nin içerdiği integral,  $e^{im\varphi} = \cos m\varphi + i \sin m\varphi$  terimi yüzünden, (sanal kısım üzerindeki integral sıfırdır, reel kısım yani kalan kısım ise çift fonksiyon olduğundan) aşağıdaki halde ifade edilebilir:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\varphi} \left[ \frac{e^{ikR(r_q, r_p; \varphi)}}{R(r_q, r_p; \varphi)} d\varphi \right] = 2 \int_0^{\pi} \cos m\varphi \left[ \frac{e^{ikR(r_q, r_p; \varphi)}}{R(r_q, r_p; \varphi)} d\varphi \right] \quad (4.8)$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \left[ \frac{\cos m\varphi \cdot e^{ikR(r_q, r_p; \varphi)} - 1}{R(r_q, r_p; \varphi)} d\varphi \right] + 2 \int_0^{\pi} \left[ \frac{1}{R(r_q, r_p; \varphi)} d\varphi \right] \quad (4.9)$$

(4.9) açılımının birinci terimi  $q=p$  için düzgün bir fonksiyondur ve  $[0, \pi]$  aralığındaki sonsuz küçük yamukların toplamı yaklaşıklığı ile sayısal integrasyona tabi tutulabilir. Ancak ikinci fonksiyon için aynı şey söylenemez. (3.10)'da verilen  $R$  ifadesinin paydada yer aldığı bu integral incelendiğinde, ortaya birinci türden bir eliptik integralin bir katsayı ile çarpılmasından oluşan bir ifade çıkar. Bunu elde etmek için, önce  $\varphi = \pi - 2\psi$  dönüşümü ve ilişkin düzenlemeler yapılır. Daha sonra,  $\psi$ 'ye göre eliptik integral ve çarpanı olan bir fonksiyon elde edilir:

$$2 \int_0^{\pi} \left[ \frac{1}{R(r_q, r_p; \phi)} d\phi \right] = 2(r_q, r_p)^{-1/2} \cdot \zeta \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \zeta^2 \sin^2 \phi}} \quad (4.10)$$

$$= 2(r_q, r_p)^{-1/2} \cdot \zeta \underline{K}(\zeta) \quad (4.11)$$

(4.11)'de  $\underline{K}(\zeta)$  birinci türden eliptik integraldir. Diğer yeni terim ise aşağıdaki ifadeden ibarettir:

$$\zeta = 2(r_q r_p)^{-1/2} / (r_q + r_p) \quad (4.12)$$

$$\underline{K}(\zeta) = -0.5 \ln|1 - \zeta| + S(\zeta) \quad (4.13)$$

(4.13) ifadesi birinci türden eliptik integrallerin seri ifadesi gözönüne alındığında yazılabilir (bkz. [5], [6]).  $S(\zeta)$ , birinci türevi sürekli, ikinci türevi ise  $\ln|1 - \zeta|$  gibi bir tekilliğe sahip bir fonksiyondur. Bu fonksiyon (4.11)'de yerine konursa,

$$2(r_q r_p)^{-1/2} \cdot \zeta (-0.5 \ln|1 - \zeta| + S(\zeta)) = -(r_q r_p)^{-1/2} \cdot \zeta \ln|1 - \zeta| + 2(r_q, r_p)^{-1/2} \cdot \zeta S(\zeta) \quad (4.14)$$

ve devamında ifadeye  $-2(r_q r_p)^{-1/2} \ln|r_q - r_p|$  eklenip çıkarılır ve düzenlenir ise,

$$D(r_q r_p) = (r_q r_p)^{-1/2} \cdot \{ (1 - \zeta) \ln|1 - \zeta| + \ln[(1 + \zeta) (r_q + r_p)^2] \} \quad (4.15.a)$$

$$D_0(r_q r_p) = \{ (1 - \zeta) \ln|1 - \zeta| + \ln[(1 + \zeta) (r_q + r_p)^2] \} \quad (4.15.b)$$

fonksiyonları tanımlanabilir .Yukarıdaki eşitliklerde yaylı parantezin içindeki ilk terim,  $\zeta=1$  yani  $r_q=r_p$  olduğunda limitte sıfıra eşittir. Diğer değer kombinasyonları için doğrudan hesaplanabilir. İkinci

terim doğrudan hesaplanmak için uygundur. Bütün bunlara göre (4.11) yeniden ele alınır ve  $A_0$  olarak tanımlanırsa,

$$A_0 = 2(r_q r_p)^{-1/2} \cdot \zeta K(\zeta) = -2(r_q r_p)^{-1/2} \ln|r_q - r_p| + D(r_q r_p) + 2(r_q r_p)^{-1/2} \cdot \zeta S(\zeta) \quad (4.16.a)$$

$$A_0(r_q r_p)^{1/2}/2 = -\ln|r_q - r_p| + D_0(r_q r_p) + \zeta S(\zeta) \quad (4.16.b)$$

yazılabilir. (4.5) ile tanımlı  $H_m(r_q, r_p)$ ,  $H_m^0(r_q, r_p)$  ve  $H_m^1(r_q, r_p)$  gibi iki parçaya ayrılınsın, öyle ki; (4.9)'un ilk terimi ve (4.16.b) kullanılsın:

$$H_m^1(r_q, r_p) = (r_q r_p)^{1/2} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos m\varphi \cdot e^{ikR(r_q, r_p; \varphi)} - 1}{R(r_q, r_p; \varphi)} d\varphi \quad (4.17)$$

$$H_m^0(r_q, r_p) = \frac{1}{2\pi} A_0(r_q r_p)^{1/2} + \frac{1}{\pi} \ln|r_q - r_p| \quad (4.18)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \{D_0(r_q r_p) + 2 \cdot \zeta S(\zeta)\} \quad (4.19)$$

$$H_m(r_q, r_p) = H_m^0(r_q, r_p) + H_m^1(r_q, r_p) \quad (4.20)$$

(4.20) ile tamamen belirlenen  $H_m(r_q, r_p)$ , (4.9)'da  $K''(u, v)$ 'da yerine konarak integralin çekirdeği elde edilmiş olur.

### 4.1.3. Akım Yoğunluğu Fonksiyonu Katsayılarının Hesabı

(3.31) ve (3.42) ifadelerine göre akım yoğunluğu katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanmış idi.

$$\tilde{j}_n(v) = X(v) = (1-v^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} x_n \hat{T}_n(v), \quad (4.21.a)$$

$$= (1-v^2)^{-1/2} X_n(v) \quad (4.21.b)$$

$\tilde{j}_n(v)$  katsayıları  $(1-v^2)^{-1/2}$  ağırlık fonksiyonu ile probleme ilişkin ayırıt koşulunu sağlar. Bu, parametrize edilmiş halka üzerinde ayırıtlara karşı gelen 1 ve -1 noktalarına herhangi bir noktanın uzaklıklarının ifadesidir. Fonksiyonun bu kısmı haricindeki kısmı düzgündür. Şimdi geri giderek, bu katsayılar aracılığı ile varılan gerçek akım yoğunluğunun ifadesini bulmak sözkonusu olsun. (3.31) ifadesinden basitçe,

$$j_n(r) = \tilde{j}_n(\eta^{-1}(r)) (r)^{-1/2} / \eta'(\eta^{-1}(r)); \quad (4.22)$$

elde edilir.

$$\eta^{-1}(r) = (2r-b-a)/b-a; \quad (4.23)$$

(4.23) deklemini (3.22) dönüşümünün tersidir. (4.21) ile birlikte (4.22)'de yerine yazılırsa, akım yoğunluğu denklemi elde edilir:

$$j_n(r) = [(r-a)(b-r)]^{1/2} (r)^{-1/2} X_n(\eta^{-1}(r)); \quad (4.24)$$

Akım yoğunluğu, yukarıdaki denklemden ancak (4.21) deki  $x_n$  katsayıları, oluşturulacak regülerleştirilmiş lineer cebir sisteminden çözülüp (bölüm 4.1.4.4.), aynı denklemin içerdiği ters Fourier - Chebyshev dönüşümü uygulandıktan sonra, elde edilebilir.

#### 4.1.4. Fourier - Chebyshev Katsayılarının Bulunması, Elde Edilen Lineer Cebir Sisteminin Çözümü

##### 4.1.4.1. Gauss-Hermit Formülleri

$$I(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (4.25)$$

Yukarıdaki yapıdaki integrallerin sayısal olarak yaklaşık hesabında kullanılan bir formül verilecektir. Bu formül,

$$I(f) \approx S_L(f) = \frac{\pi}{L+1} \sum_{i=0}^L f(t_i) \quad (4.26)$$

olarak verilir. Burada,

$$t_i = \cos \theta_j; \theta_j = \frac{2j+1}{2L+2} \pi \quad (4.27)$$

Bu formüller aşağıdaki dereceden polinomlar için kesin doğruluktadır:



$$m \leq 2(L+1)-1=2L+1 \quad (4.28)$$

#### 4.1.4.2. Fourier - Chebyshev Katsayılarının Gauss - Hermit Formülleri ile Hesaplanması

$$f_k = \int_{-1}^1 \frac{f(x) \cdot \hat{T}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (4.29)$$

Tıpkı önceki bölümdeki gibi, bu tip bir integralin sayısal hesabı için geçerli yaklaşık formül,

$$f_k \approx S_L(f) = \frac{\pi}{L+1} \sum_{i=0}^L f(t_i) \hat{T}_k(t_i) ; \quad (4.30)$$

$$t_i = \cos \theta_j ; \theta_j = \frac{2j+1}{2L+2} \pi ; \quad (4.31)$$

(4.28)' e göre formülün kesin doğru sonuç vermesi için;

$$2K \leq 2L+1 \quad (4.32)$$

Buna bağlı olarak,  $\{f_k\}_{k=0}^M$  gibi katsayı kümesi hesaplanacağında,

$$L \geq M \quad (4.33)$$

seçilerek (4.30) uygulanmalıdır. Ayrıca Chebyshev polinomlarının (3.36) tanım bağıntısı yerine (3.37) ve (3.38) eşitlikleri ile hesaplanması daha verimli bir yol olmaktadır.

#### 4.1.4.3. İntegral Denkleme Ait Fourier - Chebyshev Katsayılarının Gauss - Hermit Formülleri ile Hesabı

Hesabı sözkonusu olan formüller, şu aşamada (3.45) ve (3.47) ile verilen Fourier - Chebyshev katsayılarıdır:

$$b_n = \int_{-1}^1 (1-u^2)^{-1/2} b(u) \hat{T}_n(u) du \quad (4.34)$$

$$k_{mn} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{K(u,v) \hat{T}_m(u) \hat{T}_n(v)}{(1-u^2)^{1/2} (1-v^2)^{1/2}} dudv \quad (4.35)$$

(4.34) ile verilen katsayı ifadesinde bir önceki bölümde anlatılan formüllere bire bir denk düşen bir yapı sözkonusudur. Gauss - Hermit (4.31) kuadratik formülleri ile direkt olarak çözülebilir. Toplam işlem sayısı  $L \times N'$  dir (  $L$  ( dizi elemanı sayısı )  $> N$  (katsayı adedi)). Ancak iki katlı integral ifadesi, biraz daha dikkat gerektirmektedir. Formül ilk aşamada aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$k_{mn} = \left( \frac{\pi}{L+1} \right)^2 \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L K(u_i, v_j) \hat{T}_m(u_i) \hat{T}_n(v_j) \quad (4.36)$$

(4.35) gibi bir integralinin, (4.36) gibi bir çift toplam üzerinden hesaplandığı ele alınsın.  $K(u_i, v_j) \hat{T}_m(u_i) \hat{T}_n(v_j)$  ifadesi bütün olarak alınırsa, bir  $m, n$  çiftine ait katsayı değerinin hesaplanabilmesi için, önce  $m=N$  adet ve  $j=L$  kadar işlemi,  $n$  ve  $i$  sabit tutularak yaptıktan sonra,  $N$  kere  $n$  için,  $L$  kere,  $j$  için tekrar edilmesi gerektiği için  $N^2 \times L^2$  işlem gerektirir.

(4.36) ile verilen formülde kesin doğruluk için önce, hesaplanacak katsayı sayısından büyük sayıda eleman seçme şartı vardır (4.33). Bu yapıldıktan sonra, önce

$$\frac{\pi}{L+1} \sum_{j=0}^L K(u_i, v_j) \hat{T}_n(v_j) = F_{i,n} \quad (4.37)$$

olarak ele alınır ve  $j=0,1,2,\dots,L$  dizi elemanı kullanılarak her bir  $n=0,1,2,\dots,N$  katsayısı  $N \times L$  işlem ile tıpkı (4.34) için olduğu gibi hesaplanır.  $F_{i,n}$  bulunduktan sonra,

$$k_{mn} = \frac{\pi}{L+1} \sum_{i=0}^L F_{i,n} \hat{T}_m(u_i) \quad (4.38)$$

$i=0,1,2,\dots,L$  eleman ile herhangi  $m=0,1,2,\dots,N$  katsayısından birini elde etmek için ( $m$ =sabit için)  $L$  işlem yetecektir. Görülmektedir ki bir  $k_{m,n}$  katsayısı için toplam  $L \times L \times N$  işlem yetmektedir. Bu ise önceki yöntemden  $N$  kez daha hızlı işlem zamanı demektir. Halka probleminde  $N=200$  seçildiği hal için, önceki yöntemden 200 kat hızlı bir hesap sözkonusu olacağı açıktır.

#### 4.1.4.4. Elde Edilen Regülerleştirilmiş Lineer Denklem Sisteminin Çözümü

$$y_n + \sum_{s=0}^{\infty} \hat{k}_{ns} y_s = \hat{b}_n, n=0,1,2,\dots \quad (4.39)$$

Bölüm 3.5.4.'de yukarıdaki tipteki bir denklem takımının elde edilişi açıklanmış idi. Bu yapıdaki denklemi elde etmek için, sistemin,

$$(I + \hat{K})y = \hat{b}_n; (y, \hat{b}_n \in l_2) \quad (4.40)$$

şeklinde oluşunun basit bir biçimde kullanılması gerekmektedir.

Bir önceki bölümde nasıl hesaplandığı anlatılan sağ taraf ve çekirdeğe ilişkin Fourier - Chebyshev katsayıları uygun regülerleştirme çarpanı ile çarpılıp ( $\hat{k}_{ns} = \gamma_n \gamma_s k_{ns}$   $n,s=0,1,2,3,\dots$ ;  $\hat{b}_n = \gamma_n b_n$ ) bu denklem (4.40) ikinci tip sistemine indirgenir (bölüm 3.5.4.). Sonraki aşama, elde edilen  $\hat{K}$  matrisinin köşegen elemanlarının değerini 1 arttırmaktır. Elde edilen matris sistemimizin çekirdek matrisidir.

Daha sonra bu lineer denklem sistemi LU ayrıştırması olarak bilinen yöntem [28] kullanılarak,  $y$  çözümü bulunur. Sıra, regülerleştirilmiş  $y$  vektöründen geri doğru gidilerek, akım yoğunluğu fonksiyonunun katsayılarını ve kendisini bulmaya gelir.

$$y_n = x_n / \gamma_n \quad n=0,1,2,\dots \quad (4.41)$$

(4.41) eşitliği kullanılarak  $x_n$  bulunur. Akım yoğunluğu ile ilgili geri kalan büyüklükler bölüm 4.1.3. de yer alan denklemlerden geri giderek elde edilecektir.

## 4.2. Uzayda Herhangi Bir Nokta için Alan İfadesi

$$u^s(z_q, r_q, \varphi_q) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_a^b J_D(r_p, \varphi_p) \cdot G_z(z_q, r_q; 0, r_p; \varphi) \cdot r_p \cdot dr_p d\varphi_p; \quad (4.42)$$

Bölüm (3.2)'de değinilmiş olan uzayın herhangi bir  $q \equiv (z_q, r_q, \varphi_q)$  noktasında saçılan alan ifadesi (4.42)'deki gibidir.

$$J_D(r_p, \varphi_p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j_m(r_p) \cdot e^{im\varphi_p}, \quad \varphi_p \in [-\pi, \pi], r_p \in [a, b] \quad (4.43)$$

$$G_z(z_q, r_q; 0, r_p; \varphi_q - \varphi_p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G^{(m)}_z(r_q, r_p) e^{im\varphi}, \quad \varphi \in [-\pi, \pi] \quad (4.44)$$

$$G^{(m)}_z(r_q, r_p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\varphi} G_z(z_q, r_q; 0, r_p; \varphi_q - \varphi_p) d\varphi, \quad (4.45)$$

$$G_z(z_q, r_q; 0, r_p; \varphi) = -\frac{e^{ikR_z(z_q, r_q; 0, r_p; \varphi)}}{4\pi R_z(z_q, r_q; 0, r_p; \varphi)} \quad (4.46)$$

Saçılan alana ilişkin boş uzayın Green fonksiyonu,  $q$  alan değeri aranan nokta, ve  $p$  ise halka üzerindeki bir nokta ( $p \equiv (0, r_p, \varphi_p)$ ) iken (4.46) gibidir. Bu kullanılarak, ilişkin Fourier serisi (4.44) ve katsayı ifadeleri (4.45) ile verilmiştir ( $\varphi = \varphi_q - \varphi_p$ ). (4.46) ve (4.45) ile birlikte,

$$G^{(m)}_z(r_q, r_p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\varphi} \left\{ -\frac{e^{ikR_z(z_q, r_q; 0, r_p; \varphi)}}{4\pi R_z(z_q, r_q; 0, r_p; \varphi)} \right\} d\varphi, \quad (4.47)$$

yazılabilir. Saçılan alana ait nokta halka yüzeyi üzerinde olmadığı için ve dolayısı ile  $z_q$  sıfır olmadığından (4.47) denkleminde  $R_z$  pozitif ve integrand düzgün bir fonksiyondur. (Saçılan alana ait nokta yüzeyde ise bile değeri sınır koşulundan bilinmektedir; gelen alanın ters işaretlisine eşittir.)

(4.43) ile birlikte (4.47), saçılan alan ifadesi (4.42)'ye yerleştirilirse,

$$u^s(z_q, r_q, \varphi_q) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_a^b \sum_{n=-\infty}^{\infty} j_n(r_p) \cdot e^{in\varphi_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} G^{(m)}_z(r_q, r_p) e^{im\varphi} \cdot r_p \cdot dr_p \cdot d\varphi_p \quad (4.48)$$

toplamlar ve integraller,  $\varphi$  bakımından süreksizlik içermediğinden, sıraları değiştirilebilir. Yegane

integral altındaki terim olan  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi$  ortogonalliğinden

dolayı, yalnızca  $n=m$  için bir değere sahiptir ve bu da  $2\pi$  ye eşittir. Buna göre, saçılan alan herhangi bir noktada saçılan alan,

$$u^s(z_q, r_q, \varphi_q) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_a^b j_m(r_p) \cdot G_z^{(m)}(z_q, r_q, r_p) \cdot r_p \cdot dr_p d\varphi_p \right\} e^{im\varphi_q} \quad (4.49)$$

gibi yazılabilir. Yeni bir ifade olarak aşağıdaki tanım yapılırsa,

$$I_m(z_q, r_q) = 2\pi \left\{ \int_a^b j_m(r_p) \cdot G_z^{(m)}(z_q, r_q, r_p) \cdot r_p \cdot dr_p d\varphi_p \right\} \quad (4.50)$$

$$u^s(z_q, r_q, \varphi_q) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(z_q, r_q) e^{im\varphi_q} \quad (4.51)$$

yazılabilir ve herhangi bir m değeri için geçerli saçılan alan bulunabilir. Bu integralin hesabı sözkonusudur.  $Z_q$  halka üzerinde olmadığından sıfır değildir ve  $G_z^{(m)}(z_q, r_q, r_p)$  sonsuz düzgünlükte bir fonksiyondur. Ama akım yoğunluğu fonksiyonu  $r=a$  ve  $r=b$  için süreksizlikler içerir. (3.22) denklemindeki dönüşüm ile bu integral ifadeyi, sözkonusu süreksizlikleri de dikkate alacak şekilde ifade etmek gereklidir. (3.31) yeniden yazılsın ve integral denkleme göre düzenlensin;

$$\tilde{j}_n(u) = (\eta(u))^{1/2} \eta'(u) j_n(\eta(u)); \quad (4.52)$$

$$j_m(\eta(u)) \eta(u) \eta'(u) = (\eta(u))^{1/2} \tilde{j}_n(u) \quad (4.53)$$

$$I_m(z_q, r_q) = 2\pi \int_{-1}^1 j_m(\eta(u)) \cdot G_z^{(m)}(z_q, r_q, \eta(u)) \eta(u) \eta'(u) du \quad (4.54)$$

$$I_m(z_q, r_q) = 2\pi \int_{-1}^1 G_z^{(m)}(z_q, r_q, \eta(u)) (\eta(u))^{1/2} \tilde{j}_n(u) du \quad (4.55)$$

(4.21.b)denklemindeki  $\tilde{j}_n(u)$  akım ifadesi yerine yazılırsa, Gauss-Hermit formülleri (bkz.bölüm 4.1.4.1.) uygulanarak çözülmeye müsait bir integral denklem elde edilir:

$$I_m(z_q, r_q) = 2\pi \int_{-1}^1 G_z^{(m)}(z_q, r_q, \eta(u)) (\eta(u))^{1/2} (1-u^2)^{-1/2} X_n(u) du \quad (4.56)$$

### 4.3. Diğer Sayısal Sonuçları Hesaplanan Büyüklükler, Uzak Alan, Yakın Alan, Radar Kesiti (RCS)

Problemin konusu olan halkanın üzerindeki akım ifadesi bulunduktan sonra, saçılan alan ifadesinin yanısıra bilinmek istenen diğer bazı özelliklerini de incelemek gereklidir. Bunlardan ilk bahsedilecek olan yakın alandır.

Yakın alan basitçe halka yakınında gelen ve saçılan alanın toplamı olarak tanımlanabilir. Bölüm 4.1.1'de sözü edilen , kaynaklara ilişkin alan ifadelerini saçılan alan ifadesi ile toplayarak halkanın yakınında toplam alan değerlendirilir.

Halka sisteminin uzak alanı, ikinci tanımlanacak olan önemli büyüklüktür. Herhangi bir kaynak için uzak alan,  $kr \rightarrow \infty$  olduğundaki alan ifadesi olarak tanımlanabilir. Söz konusu halka için bu saçılan alan ifadesinde uygulanarak uzak alan ifadesi ( $u'(q)$ ) bulunmuştur:



$$u^f(q) = -\frac{1}{8\pi^2} \exp\{-i(r_p(\sin\theta_p \sin\theta_q \cos(\varphi_q - \varphi_p) + \cos\theta_p \cos\theta_q) - m(\varphi_q - \varphi_p))\} \quad (4.57)$$

Sonsuz ince dairesel halka için son olarak incelenen büyüklük radar kesitidir. Radar kesiti, burada bir düzlemsel dalğanın geliş yönünün tersi yönde, halkadan saçılan uzak alan enerjisinin, gelen dalğanın enerjisine oranı olarak ele alınmıştır. Uygulamada aşağıdaki formül esas alınmıştır[29]:

$$RCS = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ 4\pi^2 \frac{|u^s|^2}{|u^i|^2} \right] \quad (4.58)$$

Yukarıda sözü edilen büyüklüklere ilişkin bölüm 4.1.1'de sözü edilen kaynaklar ve çeşitli halka boyutlarına göre elde edilmiş grafikler ve 1. bölümde anılan Kirchhoff yaklaşıklığı sonuçları ile karşılaştırma sonuç bölümünde yer alacaktır.

## 5. SONUÇLAR

Dairesel halkadan skaler dalga saçılmasının, ortogonal polinomlar ve analitik regülerleştirme yöntemlerinin bileşimi bir teknik ile çözümü sonucunda görülen, uygulanan analitik regülerleştirmenin, çözülecek sistemi kararlı ve istenilen doğrulukta ve ek olarak uygun boyutta ele alabilmeye imkan vermiştir. Sisteme ilişkin hal sayısının sistem boyutuna göre değişimi, takibeden şekillerin arasında yer almaktadır. Hal sayısının yakısayacağı bilinen sonlu değer ilişkin şekilde görülebileceği gibi, hemen ortaya çıkmıştır.

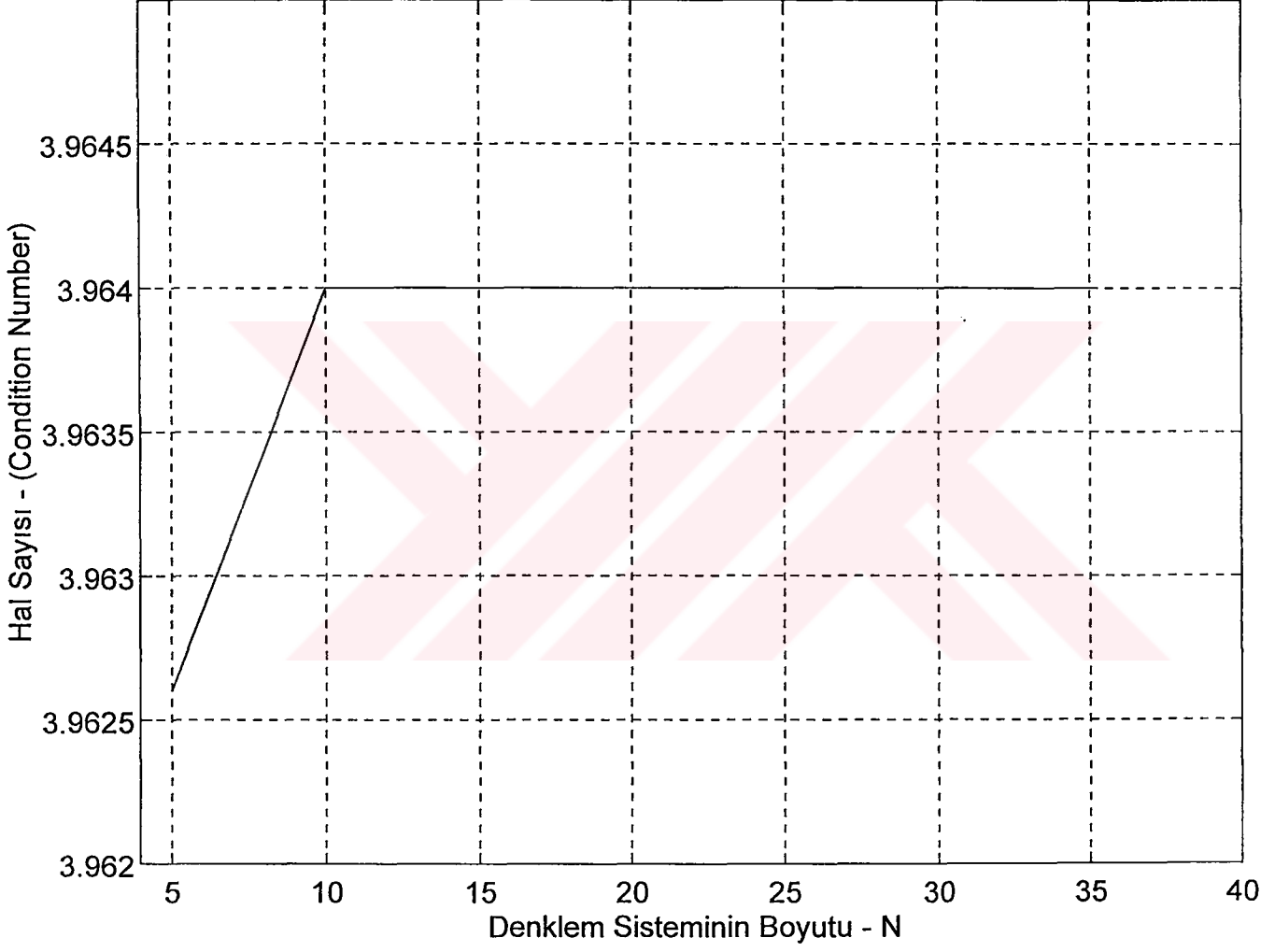
Uygulanan yöntem sonucunda, gelen dalganın halka düzlemine paralel düzlemsel dalga olarak ele alındığı durum için, akım yoğunluğu ve uzak alan değerlerinin, önceden kullanılagelen Kirchhoff yaklaşıklığı ile karşılaştırılması da şekiller arasındadır. Bunlardan görülen sonuç şudur: Tezde kullanılan yöntem, halka geometrisine göre yüzey üzerindeki akım dağılımı değerlerini, fiziksel gerçeklere daha uygun olarak vermektedir. Öte yandan uzak alan değerleri arasında yapılan karşılaştırma, yöntemin Kirchhoff yaklaşıklığı sayesinde sağlamasını yapmaya şans tanımaktadır. Çünkü Kirchhoff yaklaşıklığı, uzak alan hesapları için tatmin edicidir[20-21-22-23].

Şekiller arasında aynı uyarma biçiminde (halka düzlemine paralel düzlemsel dalga), çeşitli halka boyutları için yakın alan dağılımına ilişkin görüntüler yer almaktadır. Aynı uyarma hali için radar kesitinin (RCS) değişik boyutlar için değişimi de şekiller arasındadır.

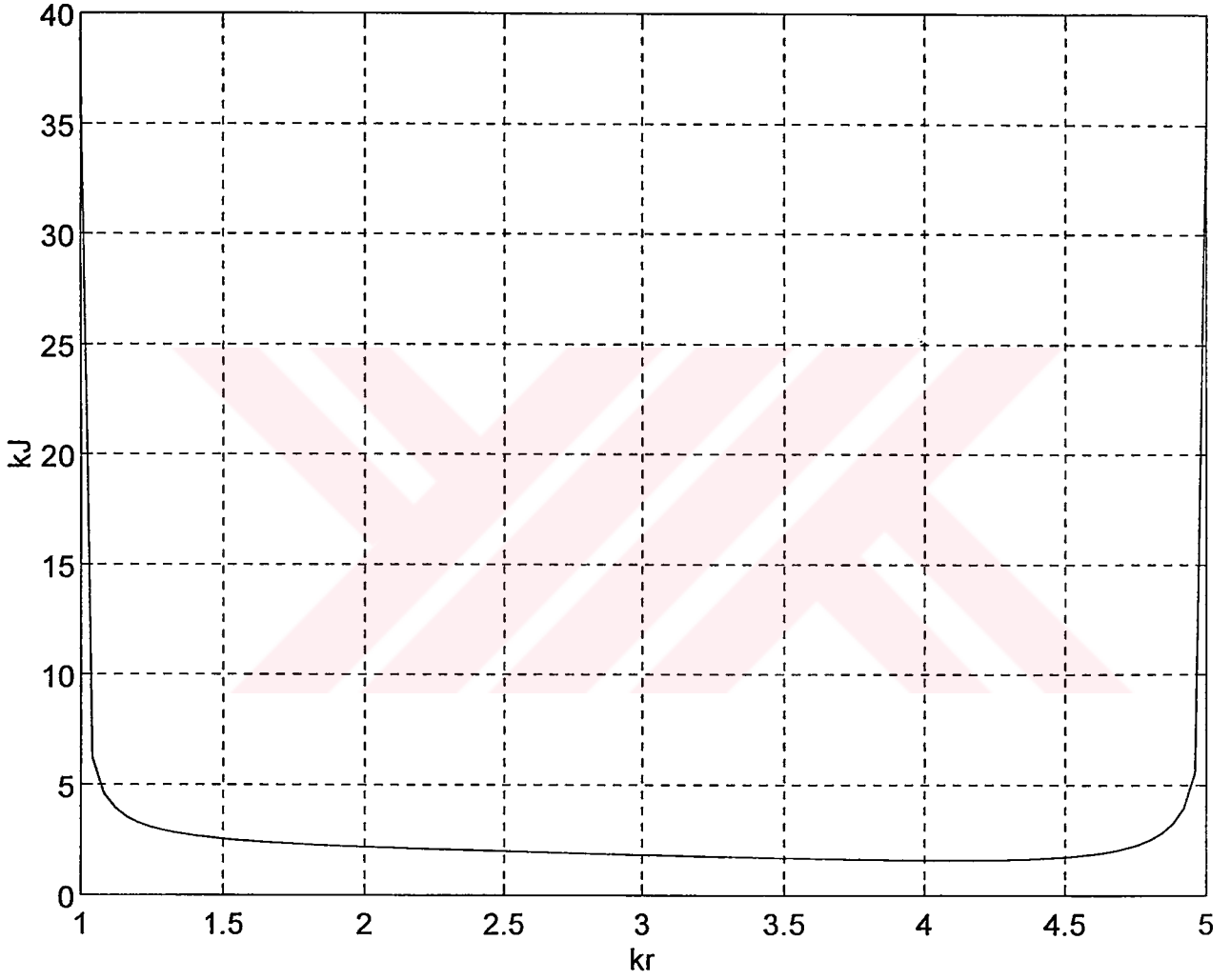
Şekiller arasında son sıradakiler,  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=10$  koordinatlarındaki bir noktasal kaynak hali için akım yoğunluğuna ilişkin olanlardır.



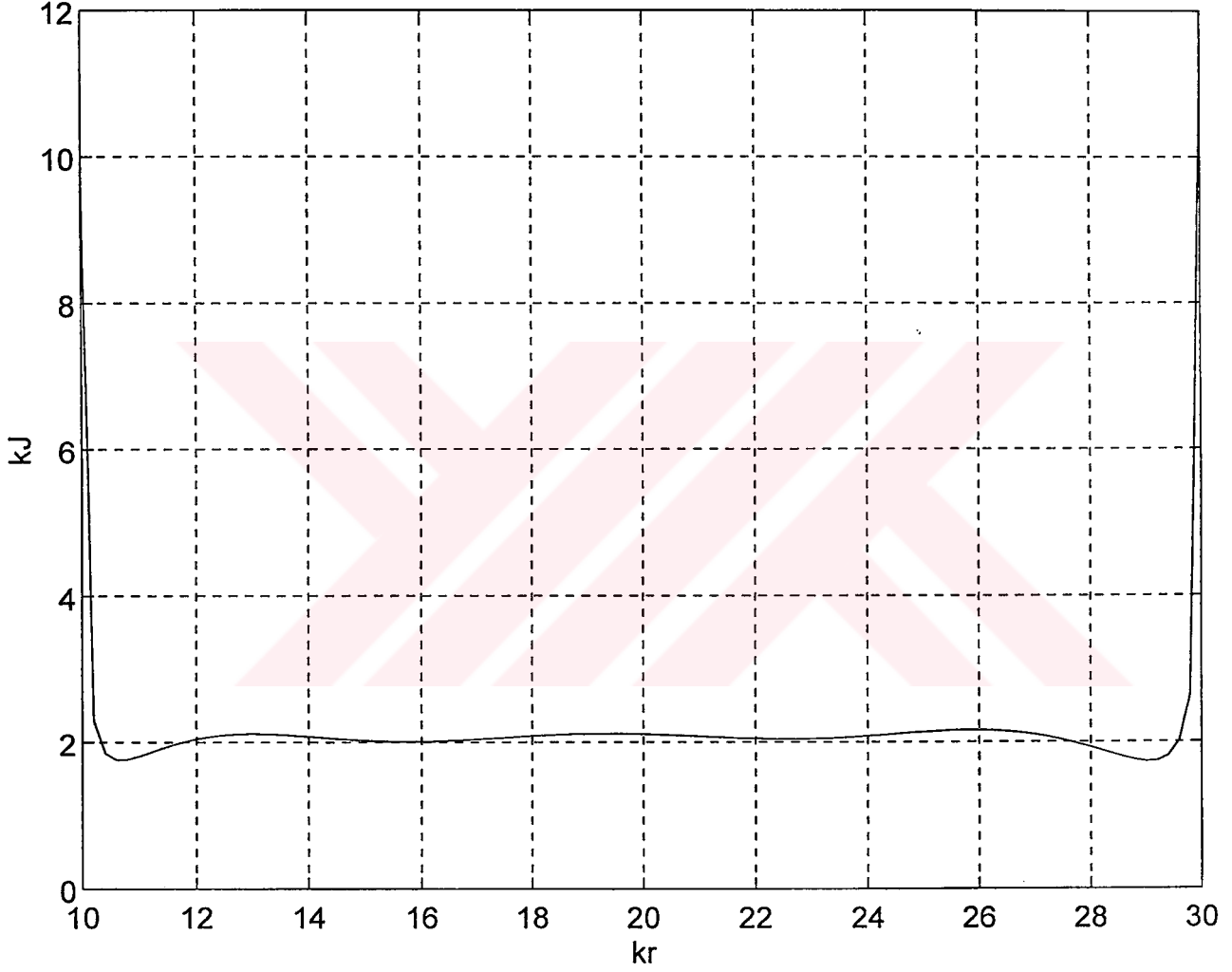
Hal Sayısının Sistem Boyutuna Göre Değişimi



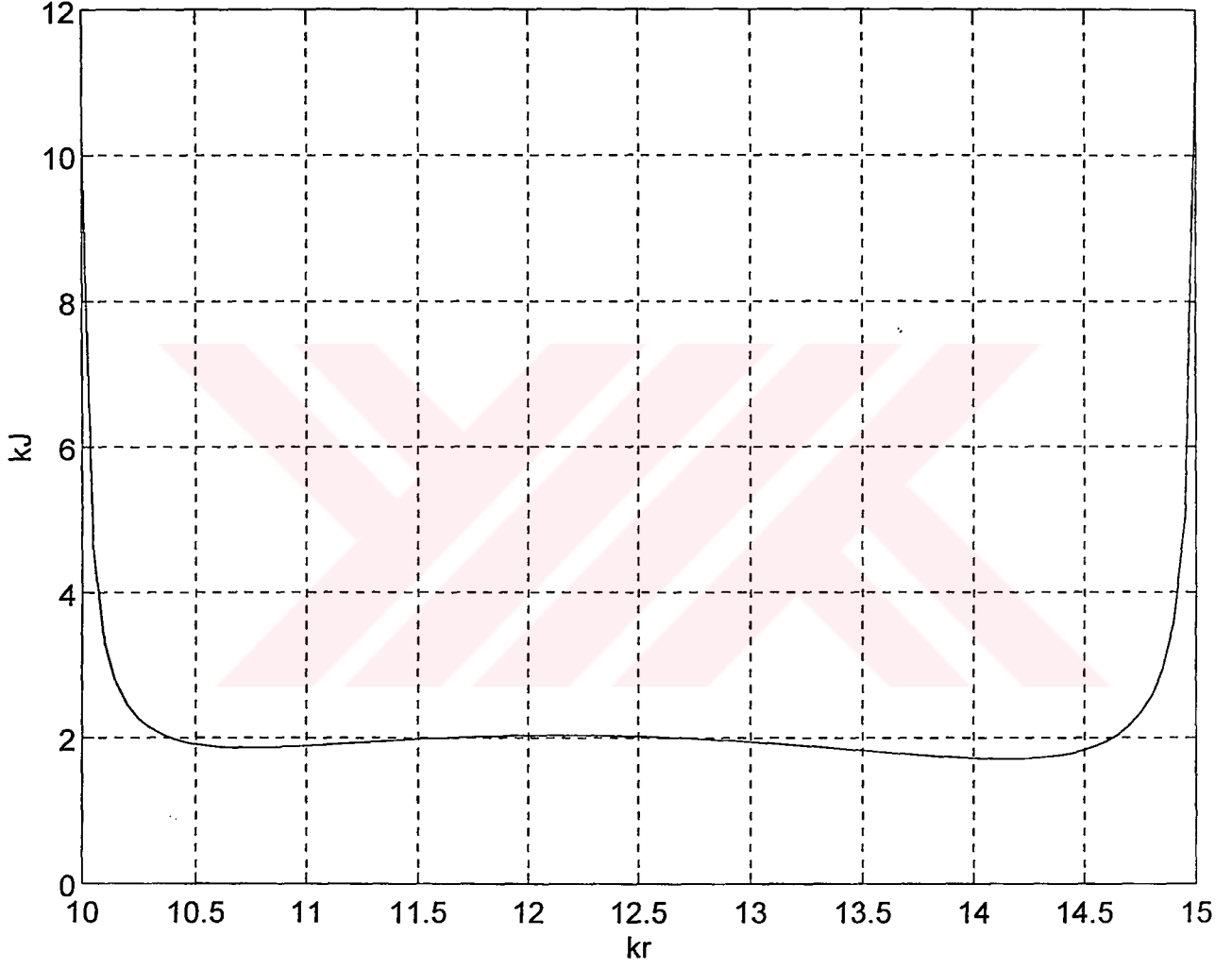
Akım Yoğunluğu,  $ka=1$ ,  $kb=5$  (Halka Düzlemine Paralel Düzlemsel Dalga Hali)



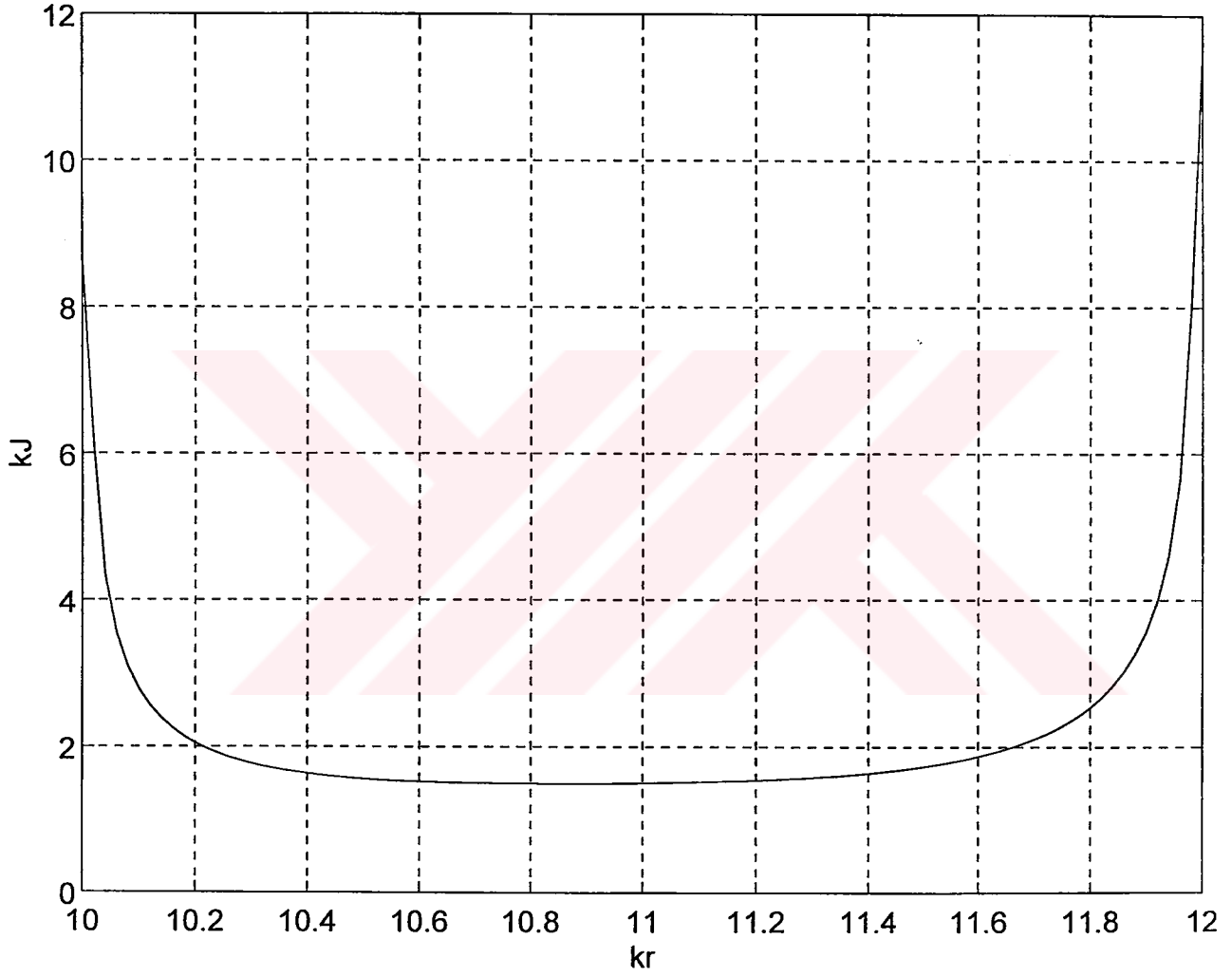
Akım Yoğunluğu,  $ka=10$ ,  $kb=30$  (Halka Düzlemine Paralel Düzlemsel Dalga Hali)



Akım Yoğunluğu,  $k_a=10$ ,  $k_b=15$  (Halka Düzlemine Paralel Düzlemsel Dalga Hali)

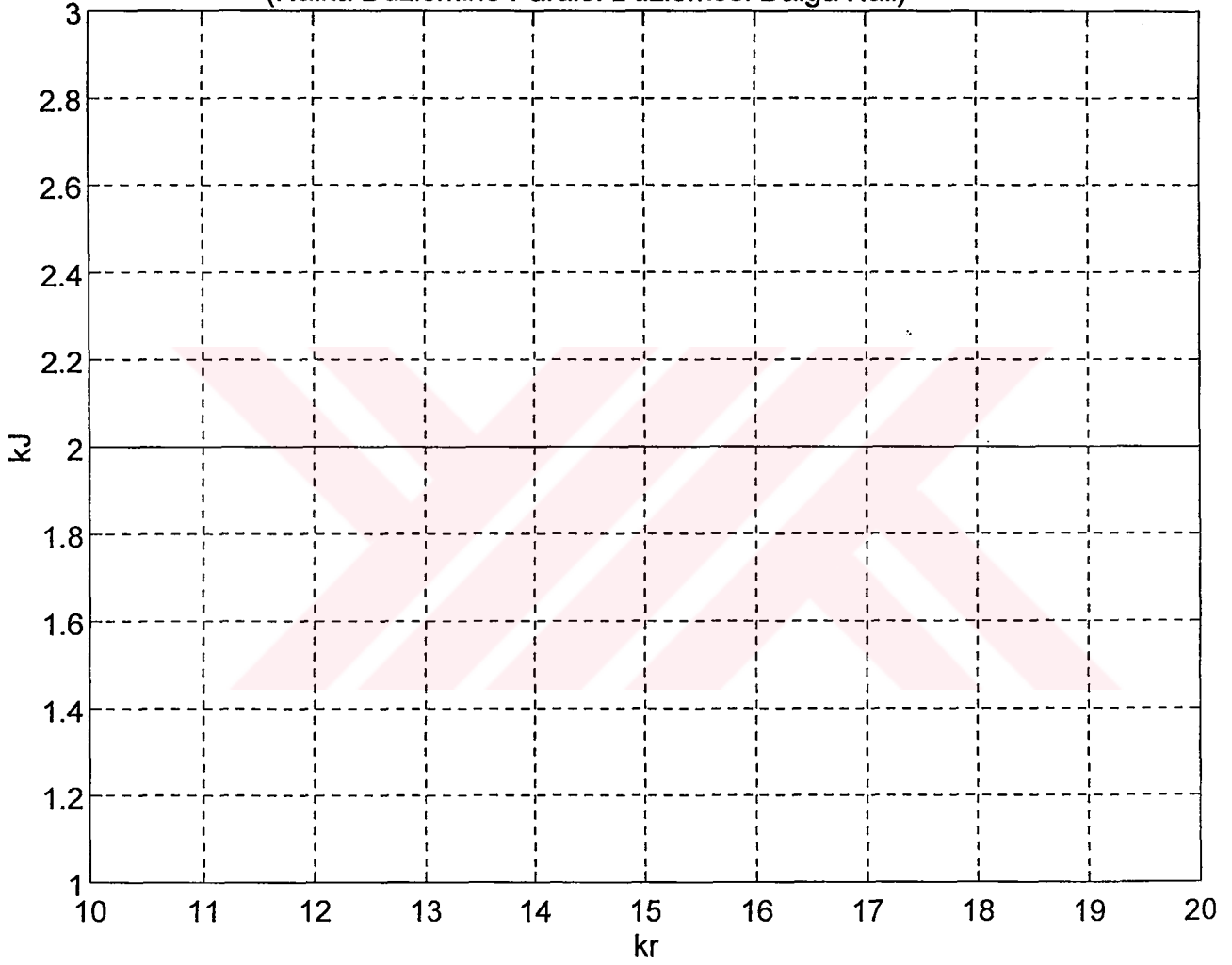


Akım Yoğunluğu,  $k_a=10$ ,  $k_b=12$  (Halka Düzlemine Paralel Düzlemsel Dalga Hali)

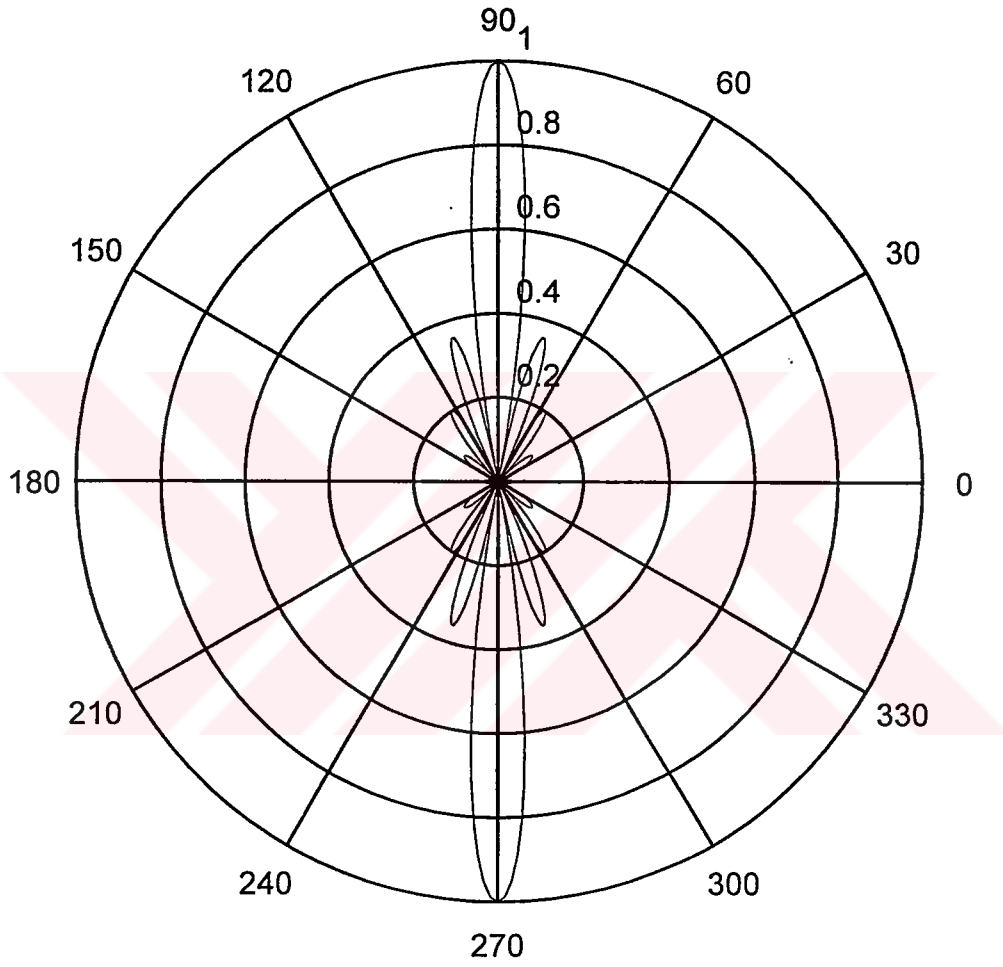




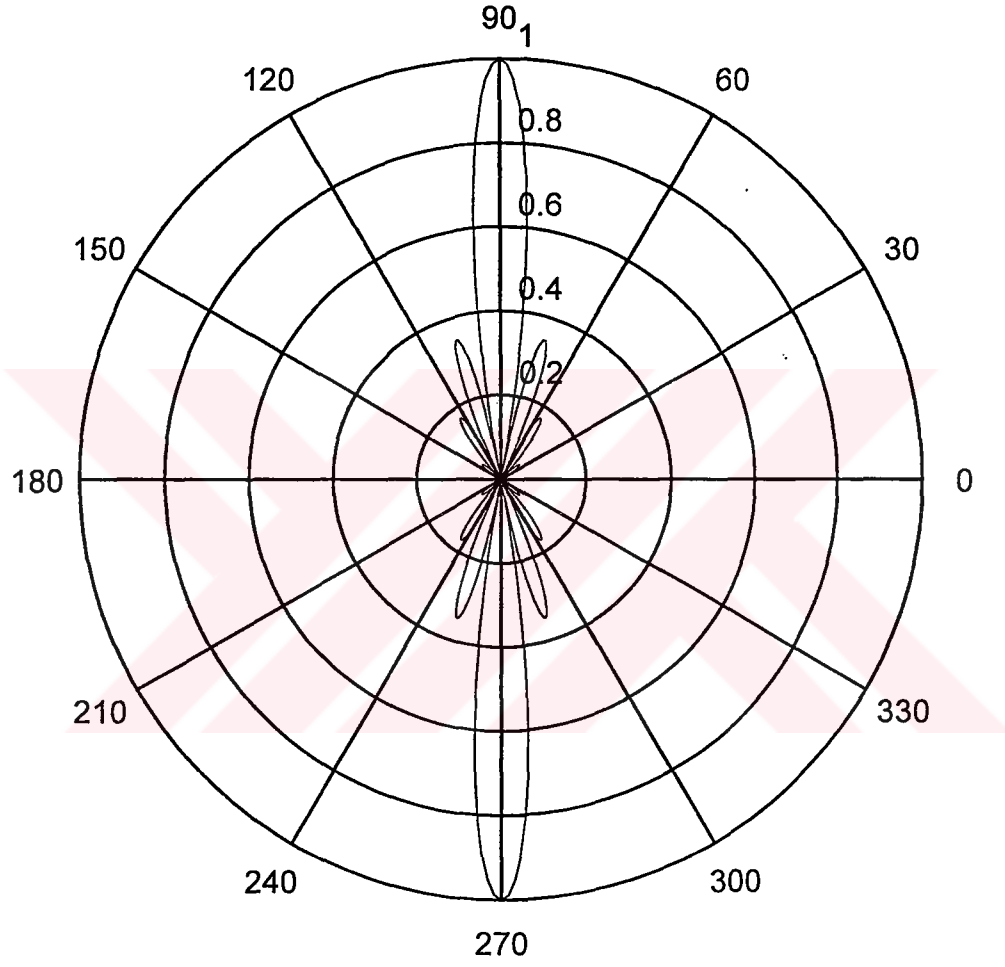
Kirchhoff Yaklaşığı ile Akım Yoğunluğu,  $ka=10$ ,  $kb=30$   
(Halka Düzlemine Paralel Düzlemsel Dalga Hali)



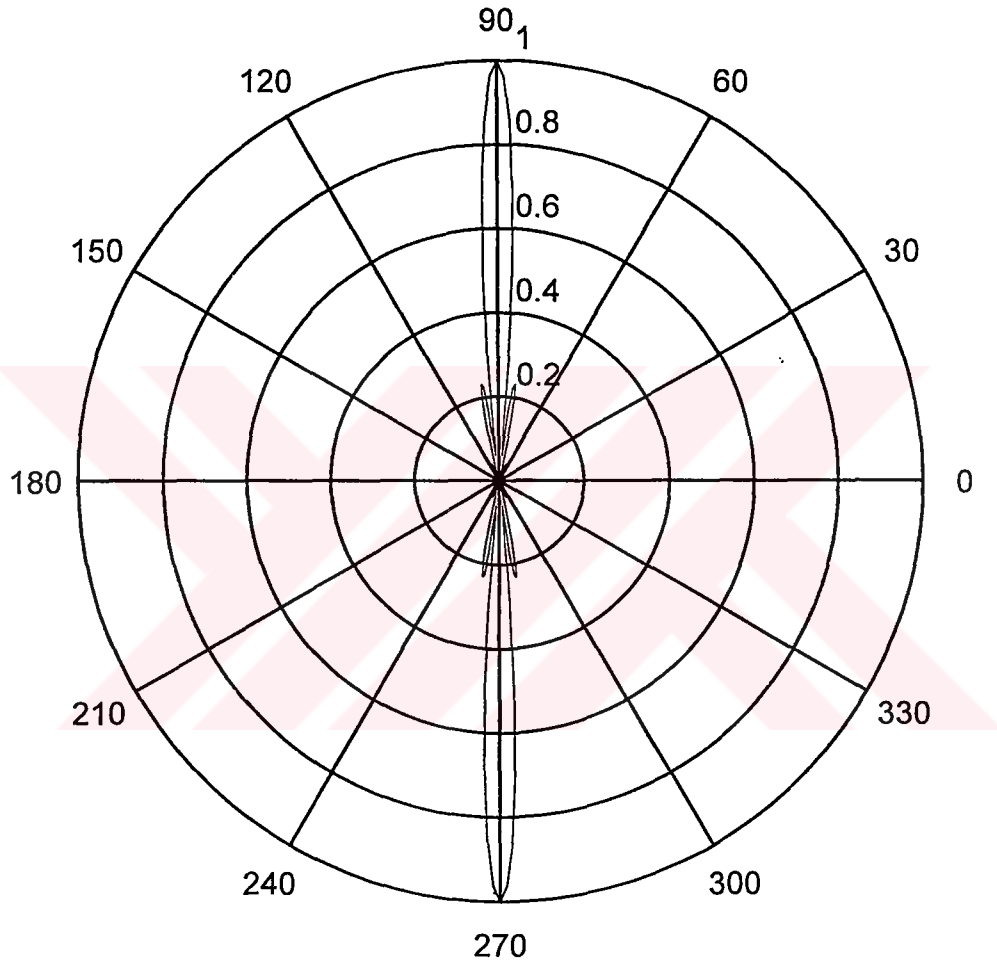
Uzak Alan,  $k_a=10, k_b=15$



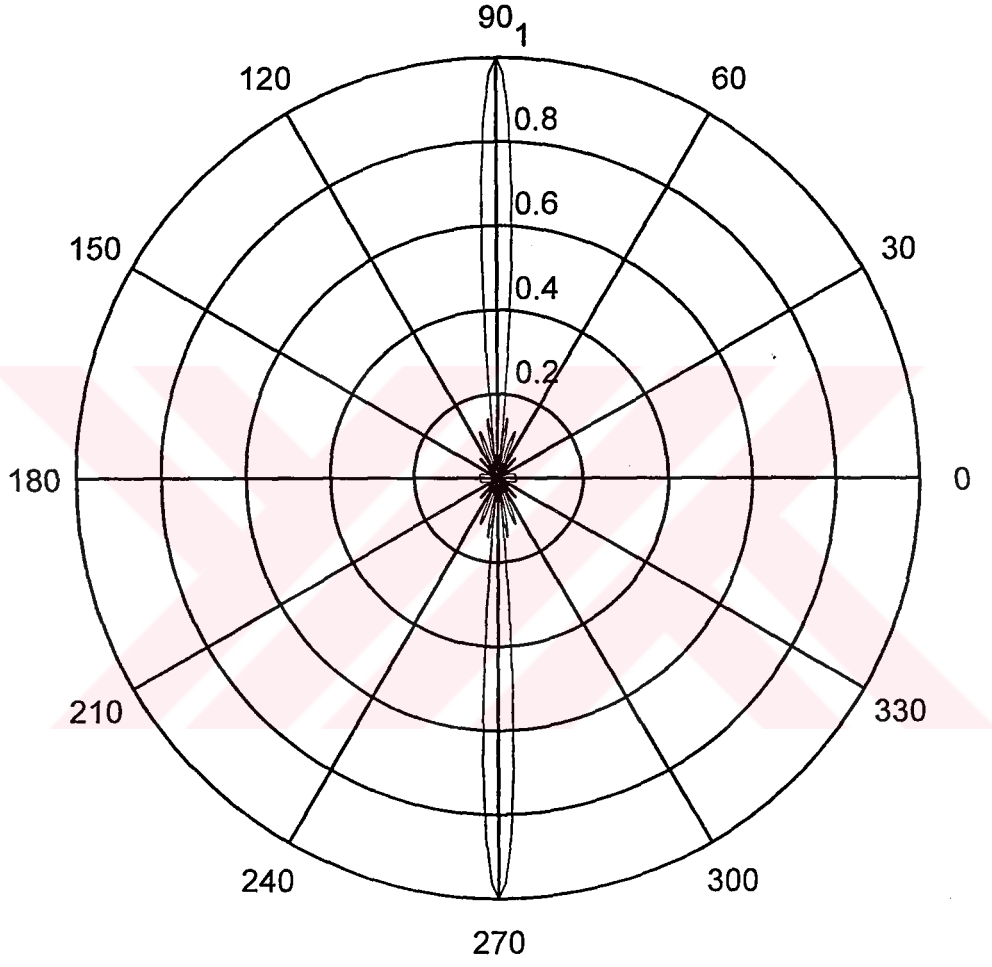
Kirchhoff Yaklaşığı ile Uzak Alan,  $ka=10, kb=15$



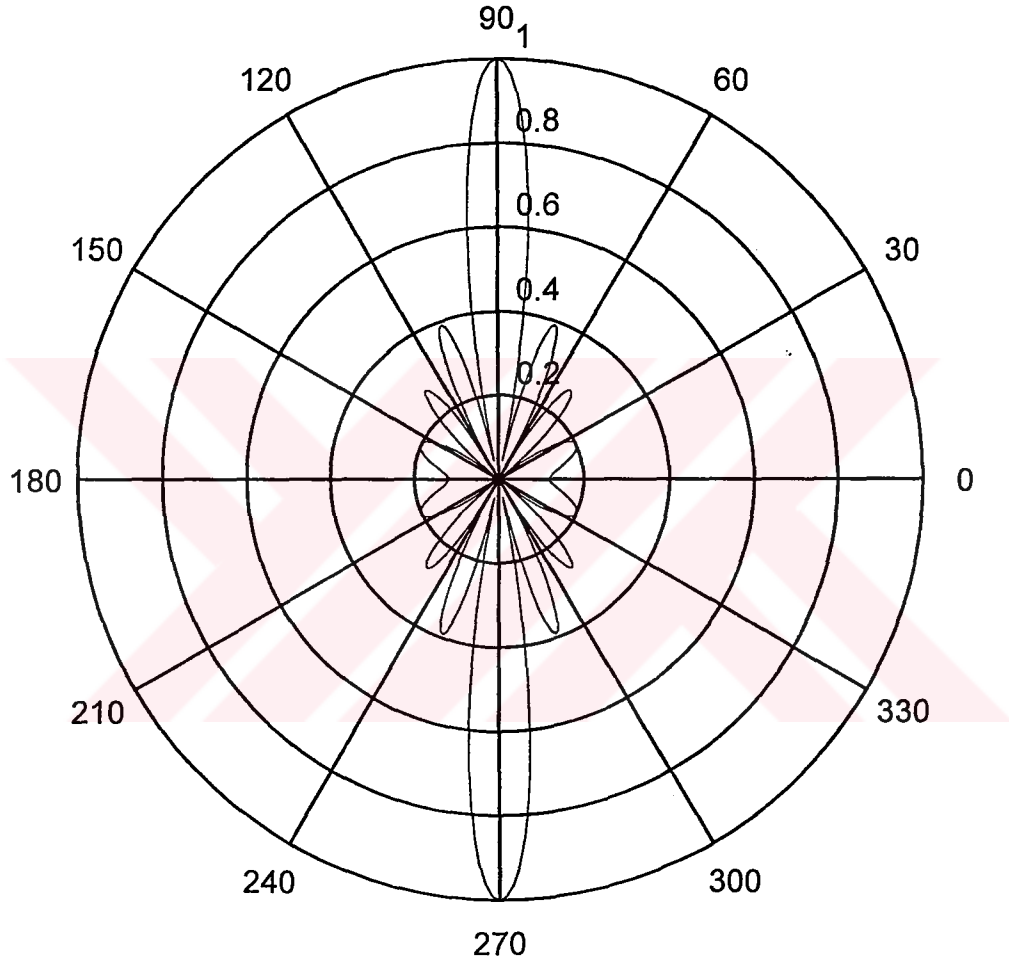
Uzak Alan,  $k_a=10, k_b=30$



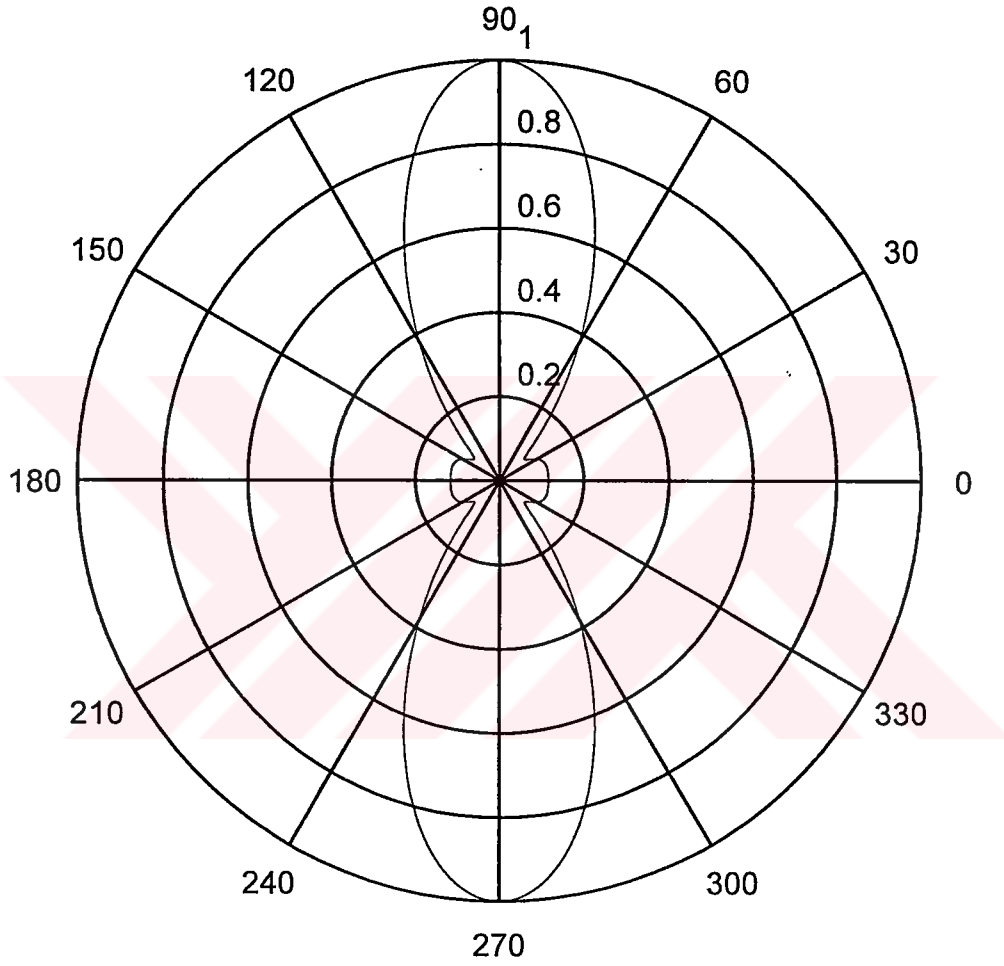
Kirchhoff Yaklaşığı ile Uzak Alan,  $ka=10, kb=30$

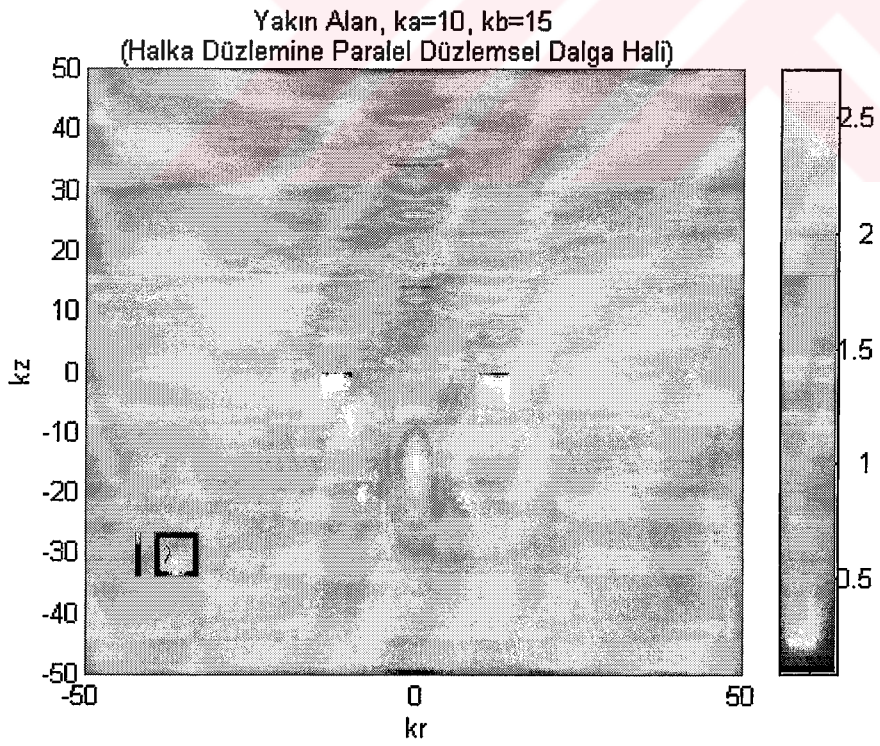
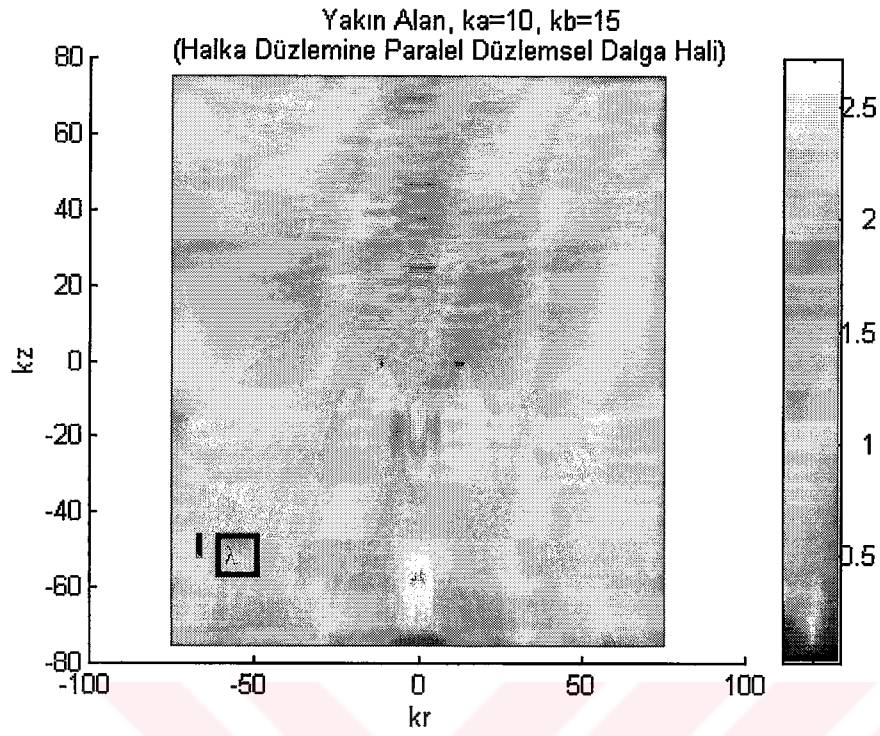


Uzak Alan,  $k_a=10, k_b=12$

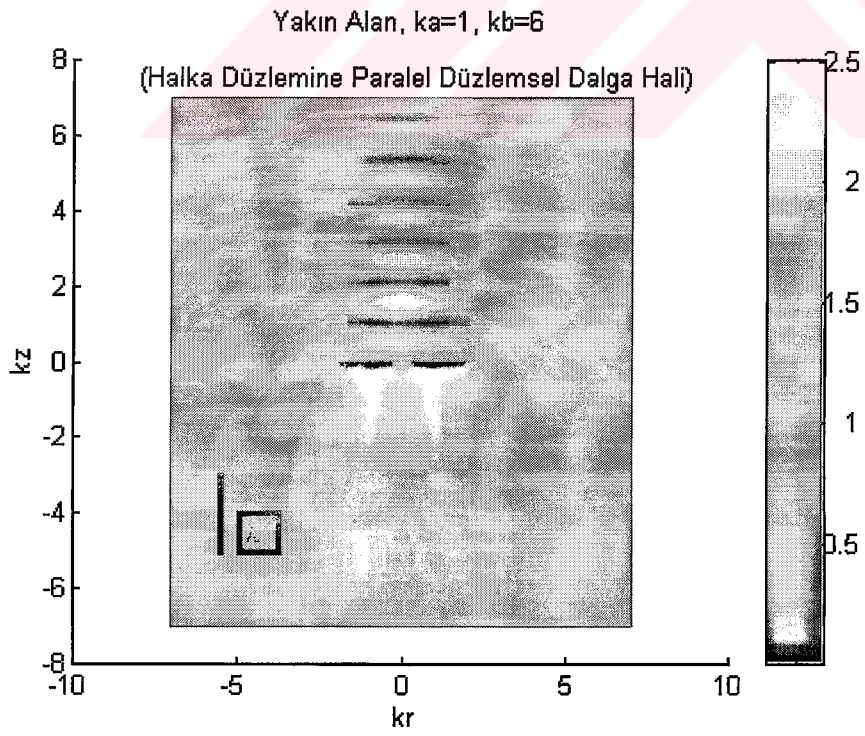
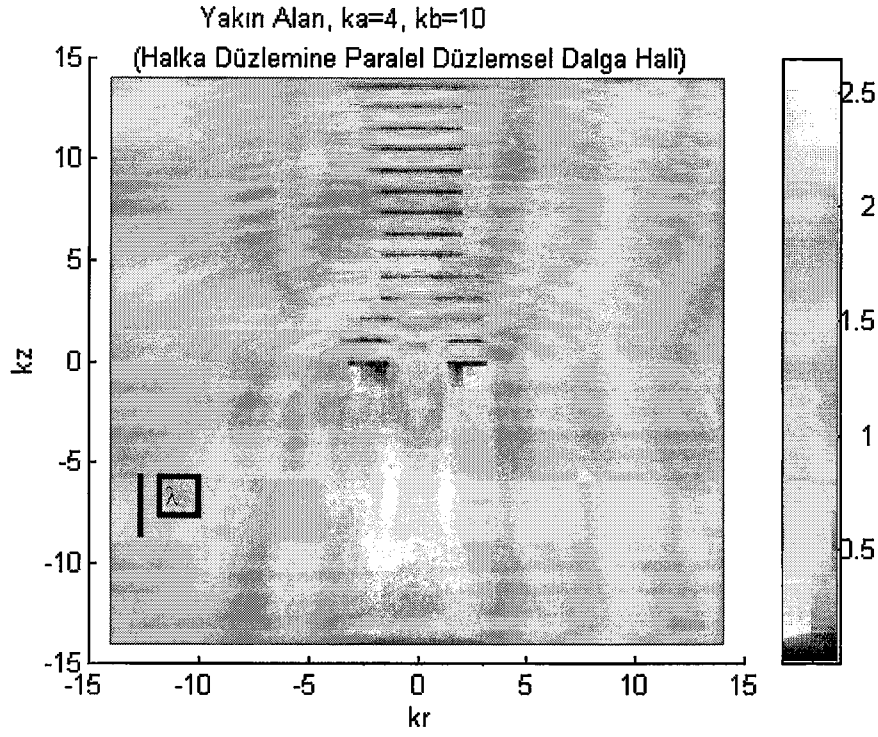


Uzak Alan,  $k_a=1, k_b=5$



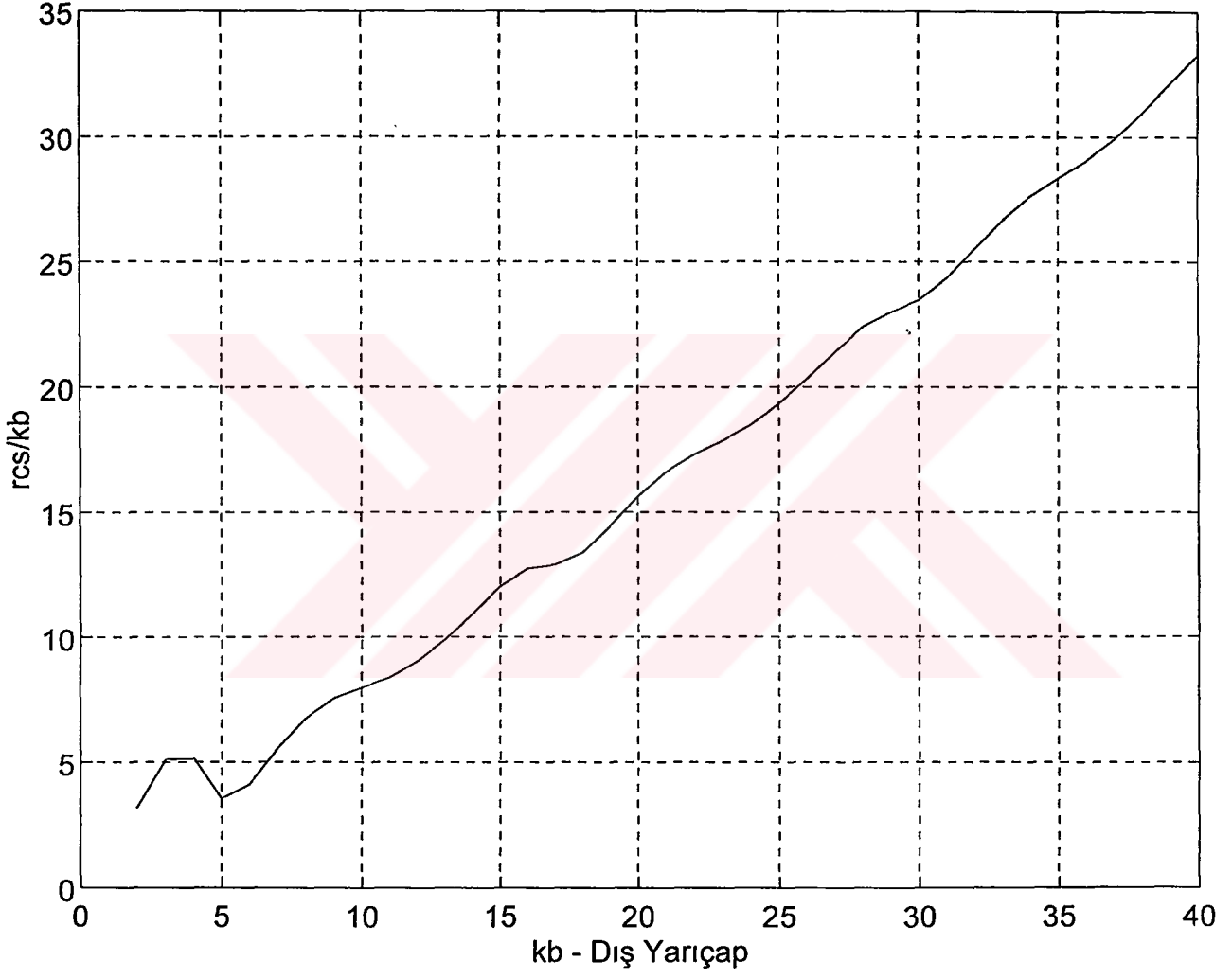






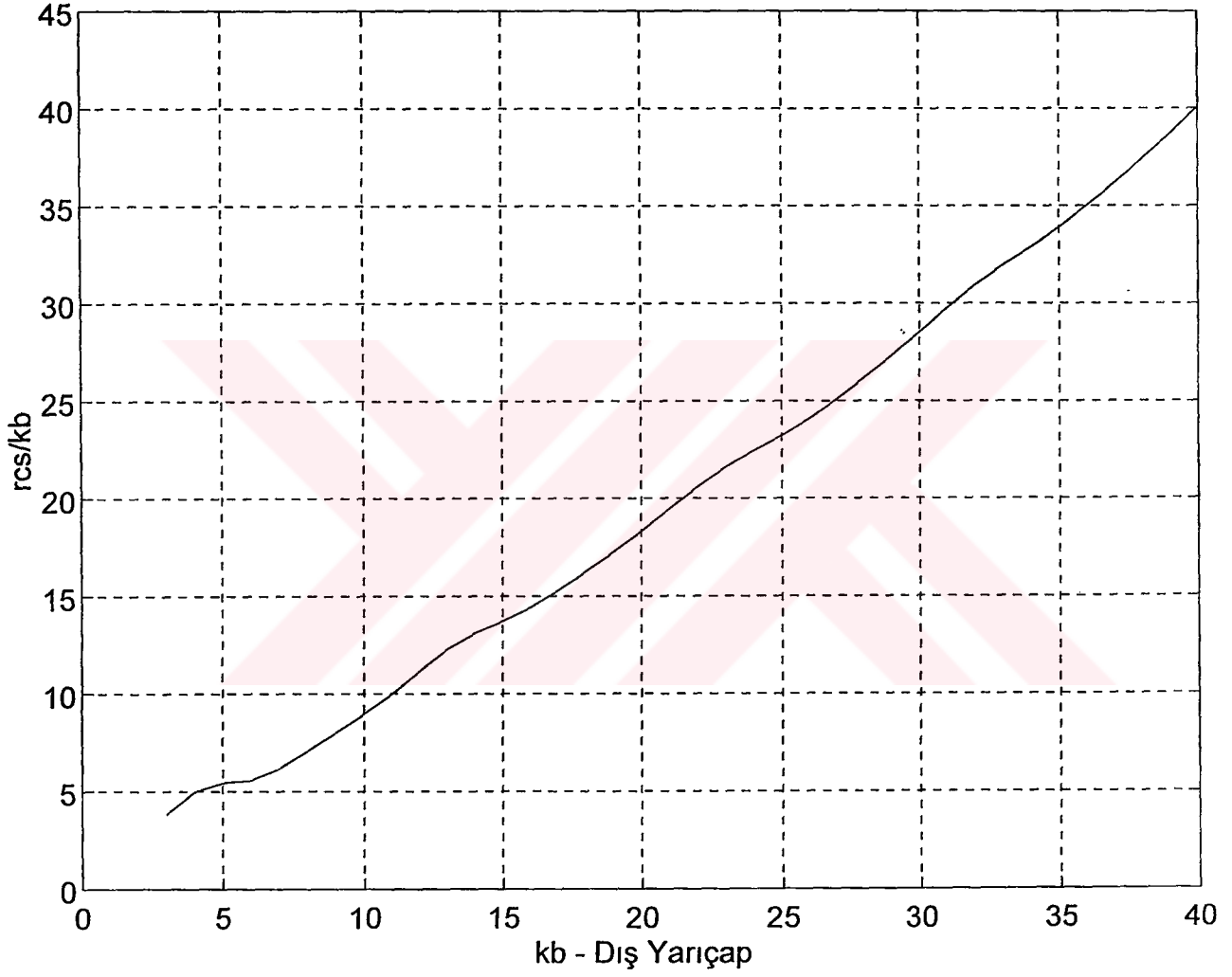
11.11.2019

Radar Kesiti,  $kb/ka=2$ ,  $\min(ka)=1$

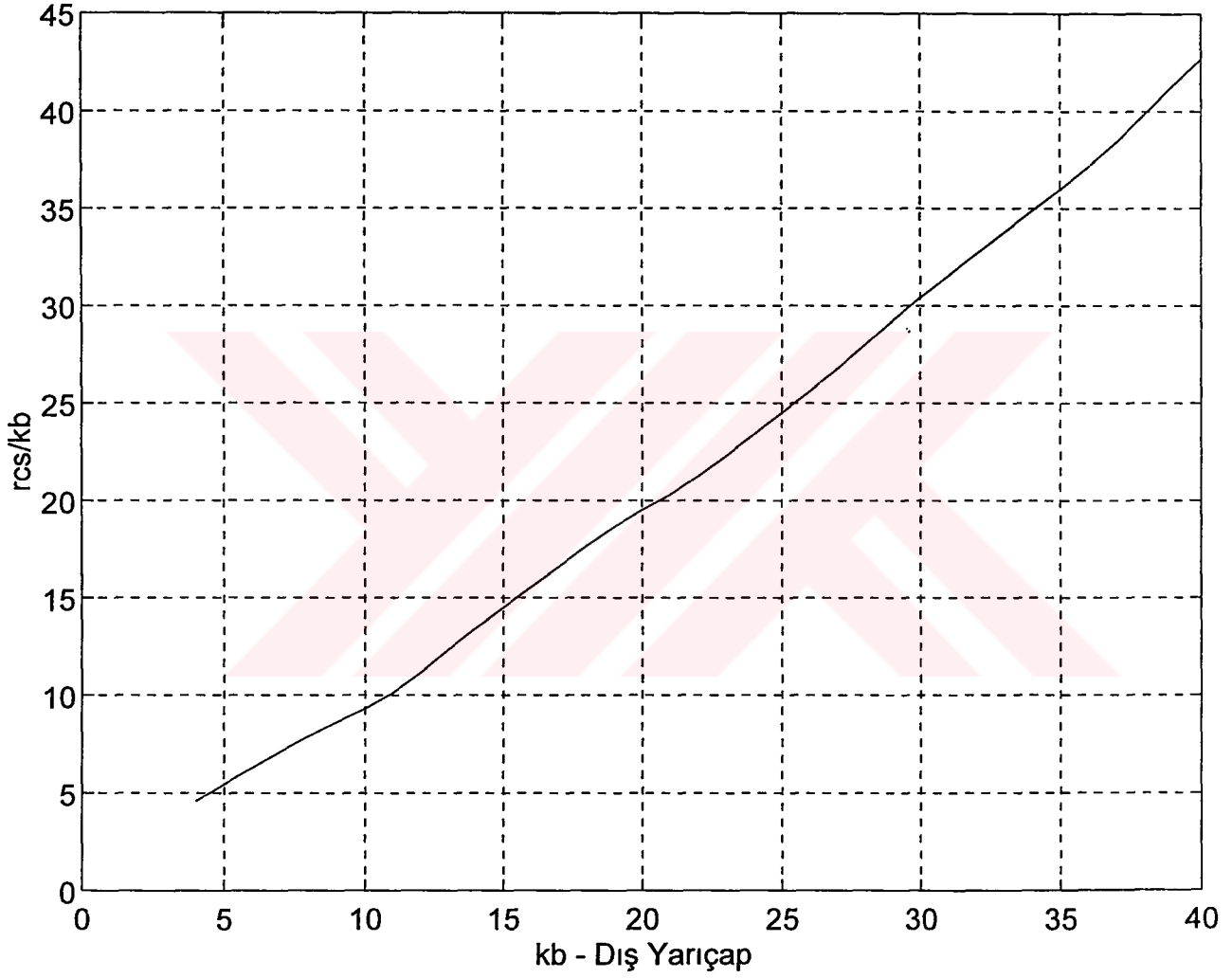




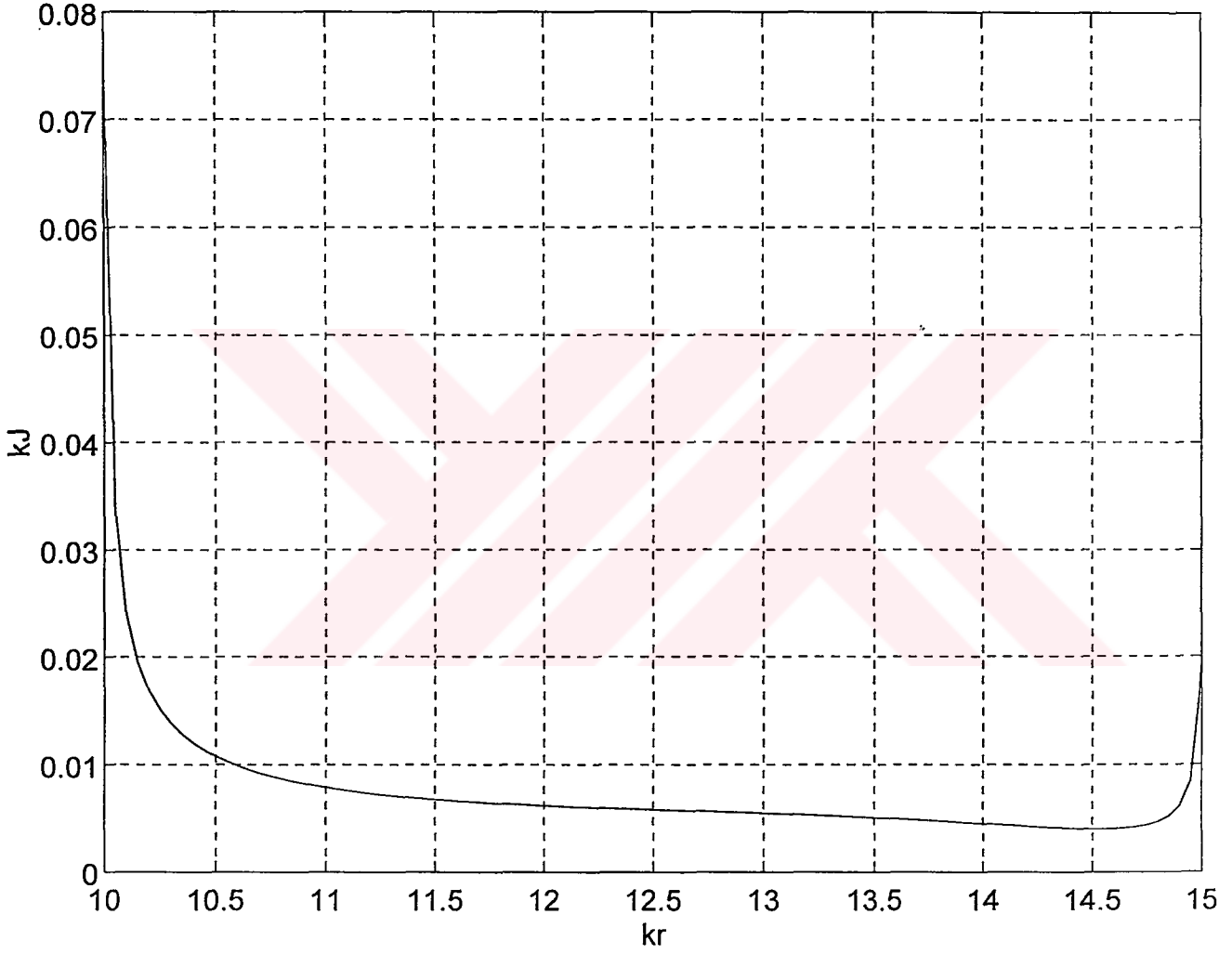
Radar Kesiti,  $kb/ka=3$ ,  $\min(ka)=1$



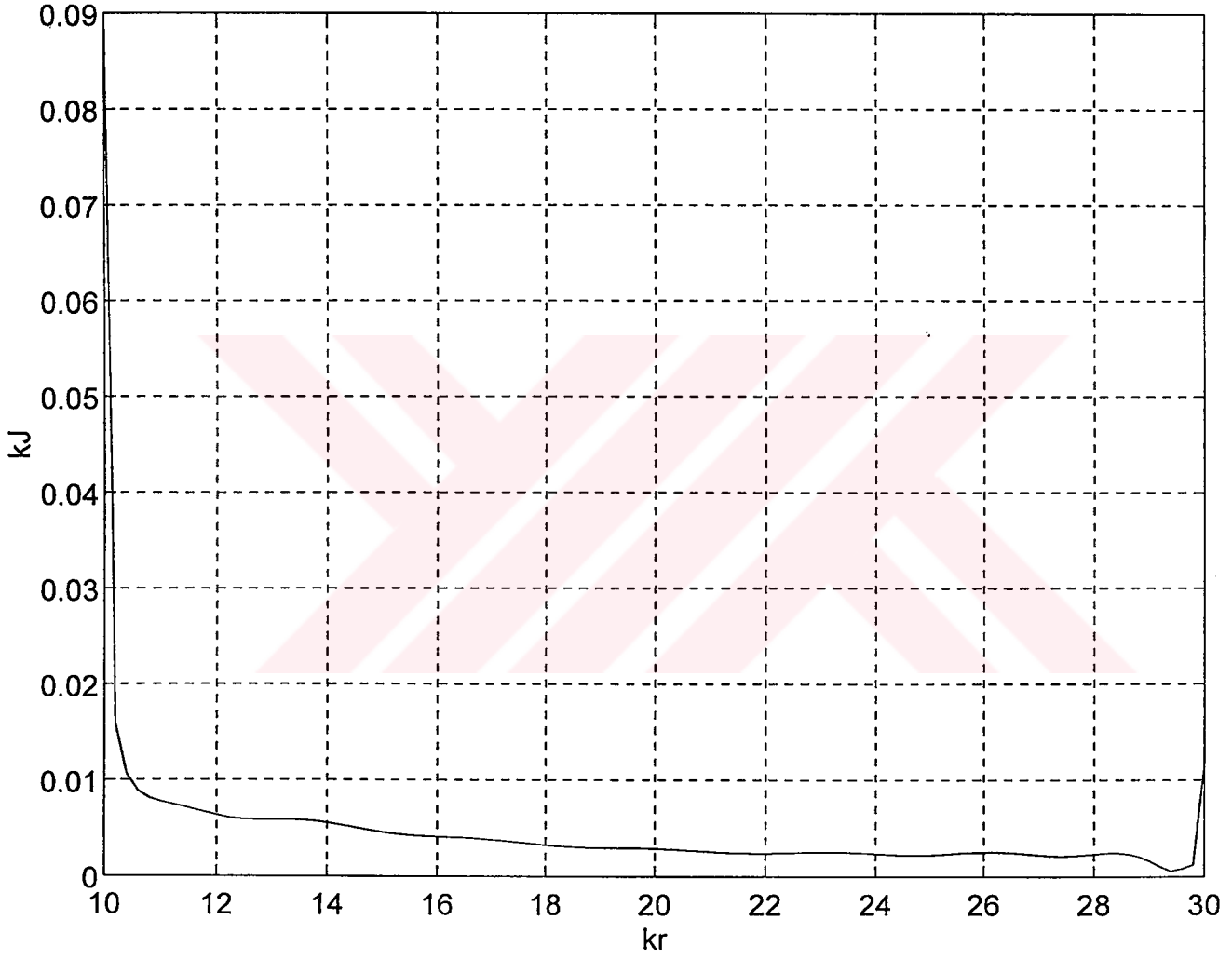
Radar Kesiti,  $kb/ka=4$ ,  $\min(ka)=1$



Akım Yoğunluğu,  $k_a=10$ ,  $k_b=15$  ( $[0,0,10]$  daki Noktasal Kaynak Hali)

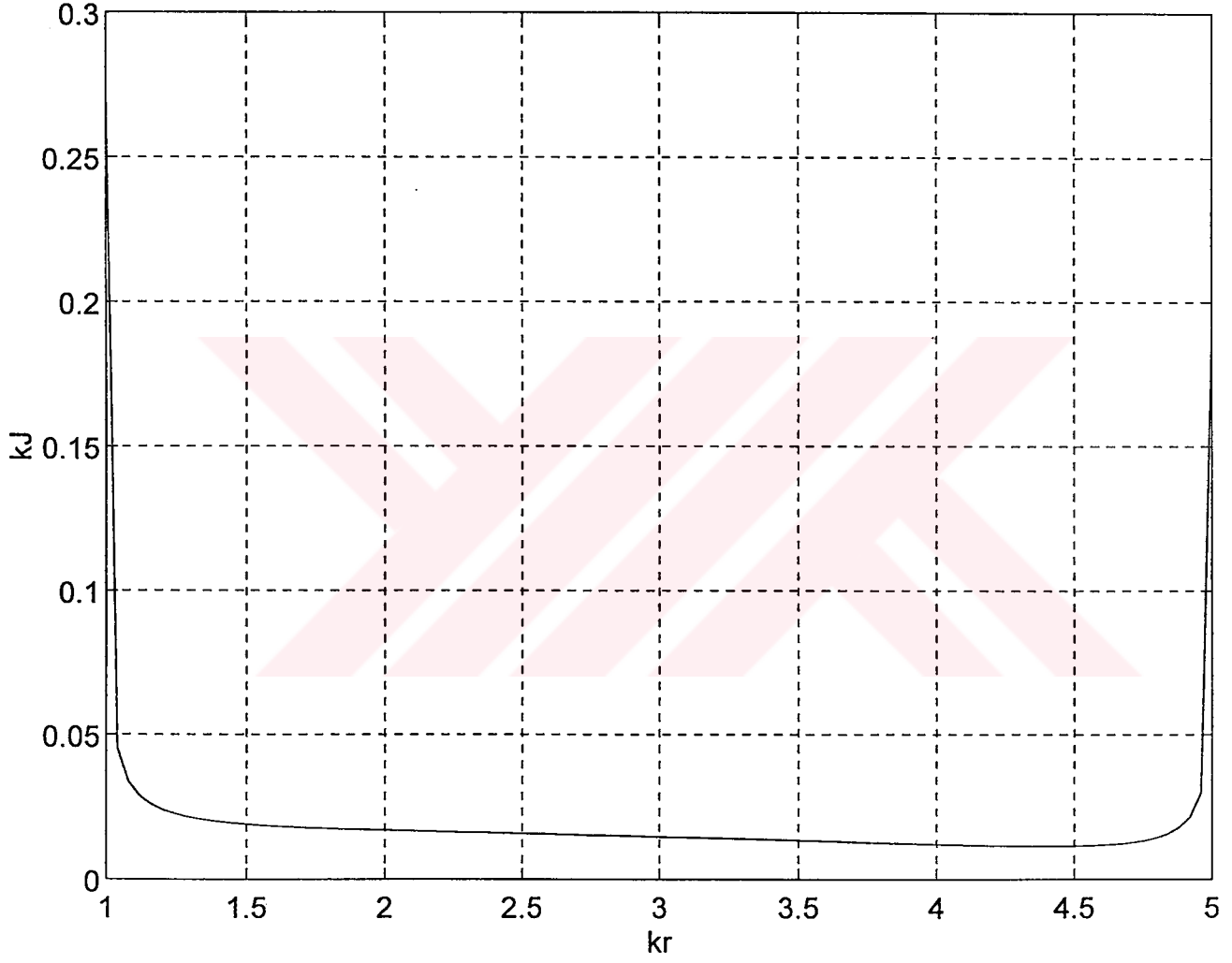


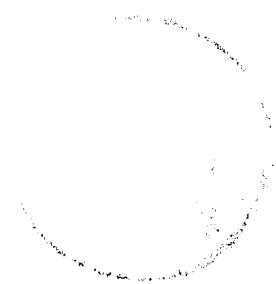
Akım Yoğunluğu,  $k_a=10$ ,  $k_b=30$  ( $[0,0,10]$  daki Noktasal Kaynak Hali)



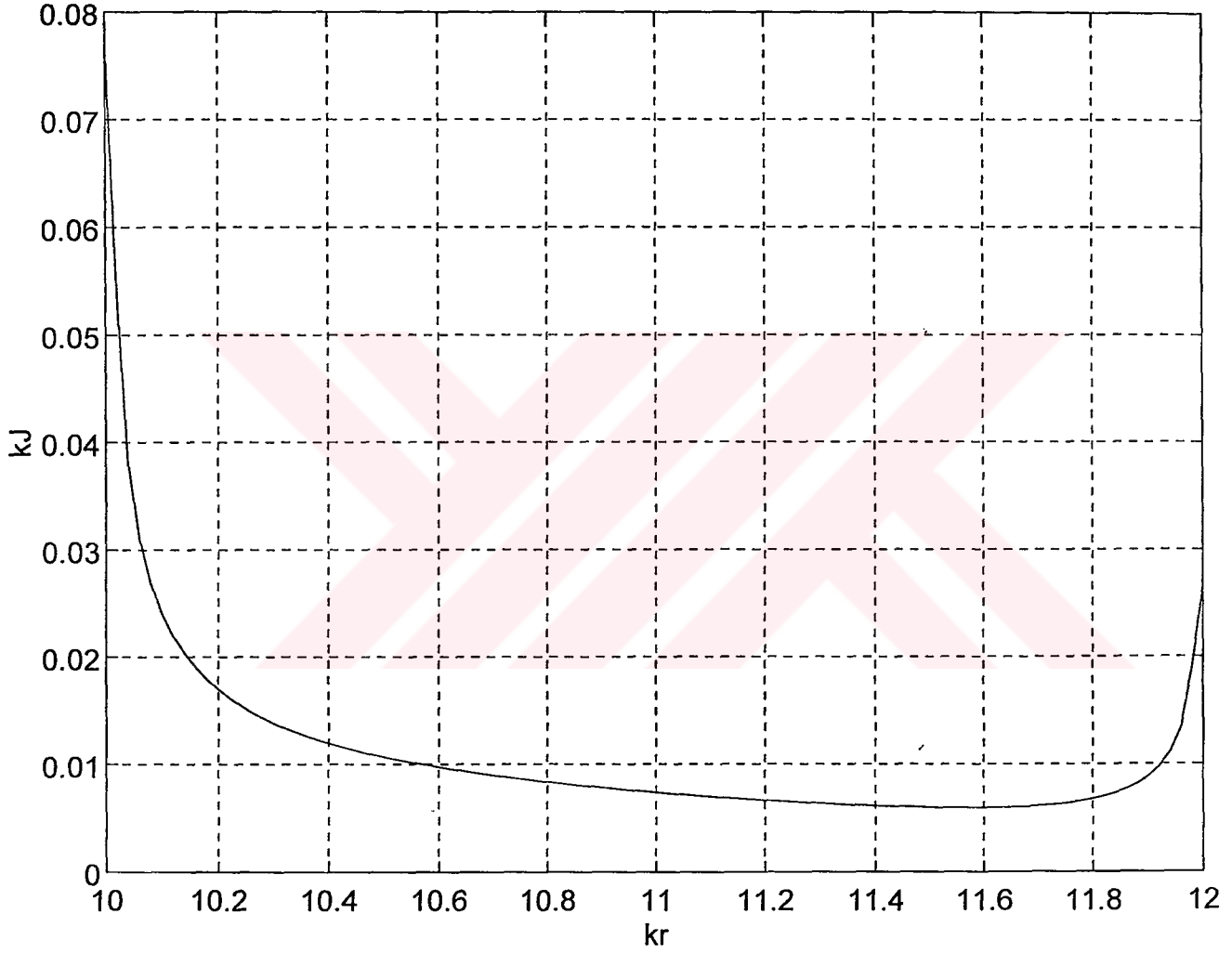


Akım Yoğunluğu,  $k_a=1$ ,  $k_b=5$  ( $[0,0,10]$  daki Noktasal Kaynak Hali)





Akım Yoğunluğu,  $k_a=10$ ,  $k_b=12$  ( $[0,0,10]$  daki Noktasal Kaynak Hali)





## KAYNAKLAR

- [1] G.Ya.Popov. On one approximate method for solving the integral equation of wave diffraction by finite width strip.-Zhurnal tekhnicheskoy fiziki, 1965, v. 35, n. 3, p.p. 381-389 (in Russian).
- [2] G.Ya.Popov. On Orthogonal polynomials method in contact problem of the elasticity theory. - Prikladnaya matematika i. mekhenica, 1969, V. 33, N3 (in Russian)
- [3] Yu.A.Tuchkin. Wave scattering by unclosed cylindrical screen of arbitrary profile with Dirichlet boundary condition. - Soviet Physics Doclady, 1985, v. 30. p.p. 1027-1030
- [4] Yu.A.Tuchkin. Wave scattering by unclosed cylindrical screen of arbitrary profile with Neumann boundary condition. - Soviet Physics Doclady, 1987, v. 32, p.p. 213-216
- [5] A.F.Nikiforov, V.B.Uvarov. Special Functions of Mathematical Physics. - Birkhäuser, 1988 (Translated from Russian by R.P.Boas).
- [6] M.Abramowitz, I.A.Stegun. Handbook of Mathematical Functions.- Dover Publications Inc., Ninth Printing, 1972.
- [7] M.İdemen. Kırınım Teorisi. İTÜ Ders notları, 1997.

[25] C.A.J.Fletcher. Computational Galerkin Method.-  
Springer Verlag, Berlin, 1984.

[26] J.H.Wilkinson. The Algebraic Eigenvalue Problem.-  
Clarendon Press, Oxford, 1965.

[27] J.D.Jackson. Classical Electrodynamics.- John Wiley  
& Sons, Second Edition, 1975.

[28] W.H.Press, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterlink, B.P.  
Flannery. Numerical Recipes in C.- Cambridge University  
Press, Second Edition, 1992.

[29] C.A.Balanis. Advanced Engineering Electromagnetics.-  
John Wiley & Sons, 1989.



## ÖZGEÇMİŞ

Fatih Dikmen, 1972 yılında İstanbul'da doğdu. İlköğrenimi ile Isparta'da tamamladığı hazırlık ve ortaokul birinci sınıflar haricindeki ortaöğrenimini İstanbul'da tamamladı. 1989 yılında Kadıköy Anadolu Lisesi'nden mezun olup, aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik - Elektronik Fakültesi, Elektrik Mühendisliği Bölümü'ne girmeye hak kazandıktan sonra, 1993 yılında buradan mezun oldu. Öğreniminin yanısıra, 1988 - 1995 yılları arasında İstanbul Üniversitesi, Devlet Konservatuvarı, Vurmalı Çalgılar Bölümü'nde yarı zamanlı eğitimini sürdürdü. 1994 - 1996 yılları arasında İstanbul Üniversitesi, İşletme Fakültesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yönetimde Muhasebe ve Finansal Kontrol ile Üretim Yönetimi yüksek lisans programlarından dersler aldı. 1996 yılı Güz döneminde Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik Fakültesi, Elektronik Mühendisliği Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine ve aynı bölümde araştırma görevliliğine başlayan Fatih Dikmen, halen bu görevi sürdürmektedir.