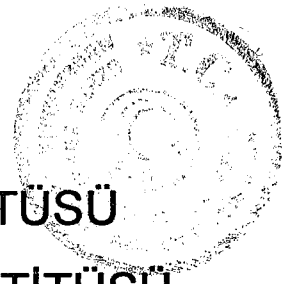


T.C.

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



ZAMANA BAĞLI BİR İŞARET
TARAFINDAN KAVİTE İÇERİSİNDE
ÜRETİLEN OSİLYONLAR

Serkan AKSOY
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI

86056

TEZ DANIŞMANI
Yrd.Doç.Dr.Ertuğrul KARAÇUHA

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
TOKÜMANTASYON MERKEZİ

GEBZE

1999

Bu tez çalışması, G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun19.07.1999... tarih ve 99.../2... sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından ...ELECTRONİK..... Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.



JÜRİ

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Ertuğrul KARAÇUHA
(Tez Danışmanı) *B. Mercelis*

ÜYE : Doç. Dr. Ali ALKUMRU

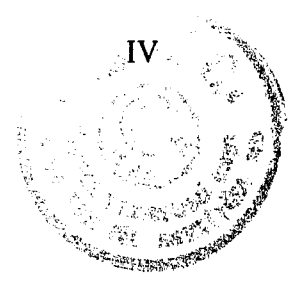
AA

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Murat ESİN
Murat Esin

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .26/07/1999... tarih ve 99.../2/... sayılı kararı.

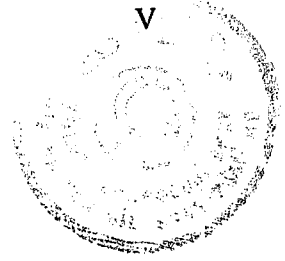
İmza/Mühür
[Signature]



ÖZET

Bu çalışmada; kavite içinde herhangi bir formda olan kaynak fonksiyonlarının (sinüzoidal veya değil) oluşturacağı elektromagnetik alan ifadelerinin zaman domeninde gerçek zamanlı olarak analitik çözümleri öngörölmüştür. Yöntem; öz değer ve öz vektör prensiplerinin göz önüne alınması ile Maxwell denkleminde ayrılan yeni bir operatöre öz vektörler karşı düşürölerek elektromagnetik alanın zamana bağılı ifadelerinin direkt ve analitik olarak elde edilmesini hedefler. Zamana gerçek zamanlı olarak bağılı olan elektrik ve magnetik alan ifadelerinden yola çıkılarak MATLAB programı yardımı ile üç boyutlu olarak elektrik alanının z bileşeninin simölasyonu mümkün olmuştur.

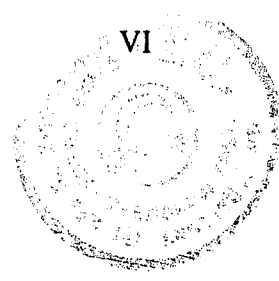




ABSTRACT

The solving of electromagnetic field terms which are produced from given source functions (sinusoidal or arbitrary) is related to time domain coefficient in a cavity is proposed at time domain analytically. The method is based on the eigen vector and eigen value principles. By using eigen vector and value method, a new operator which is splitted from Maxwell equations is corresponded to eigen vector solutions. Thus, electromagnetic field term depends on time coefficient is calculated analytically as a sum of series. After all calculations and arrangements on time dependence electromagnetic field terms, a powerful simulation program by using MATLAB is created and electromagnetic field terms are simulated as a 3 dimensional form.





TEŞEKKÜR

Tez alıőmam sırasında yakın ilgi ve teőviklerini esirgemeyen sayın hocalarım Prof. Dr. O.A. Tretyakov, Y. Do. Dr. Ertuğrul Karauha, Prof. Dr. Sergey Gavrilov ve Prof. Dr. A. Alex Vertiy'e ve benim için huzurlu ve rahat bir çalıőma ortamı sağlayan Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsüne, arkadaşlarım Erol Őafak, nal Őafak ve çalıőmalarım sırasında bana yardımcı olan tüm arkadaşlarıma teőekkürlerimi bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ



ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	V
TEŞEKKÜR.....	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII,VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	IX
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	X

1.GİRİŞ

1.1.Konu ve Önemi	1
1.2.Tezin Amacı ve İçeriği	3
1.3.Tarihsel Gelişim	7

2.MAXWELL OPERATÖRÜNÜN AYRILMASI

2.1.Kavite Tanımlamaları ve Temel Hesaplamalar	10
2.2.Kavite Problemlerinin Standart Formülasyonu	11
2.3.Curl-Sınır Operatörü	12

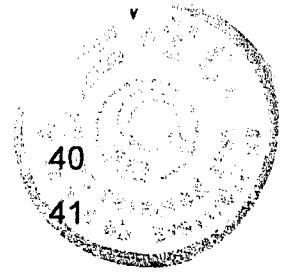
3.CSO DOMENİNDEKİ TEMEL KÜME

3.1.Selonoidal Öz Vektörlerin Alt Kümesi	18
3.2.İrrotasyonel Vektörlerin Alt Kümesi	21
3.3.Harmonik Öz Vektörlerin Alt Kümesi	25
3.4.Ortonormalizasyon Şartları	26
3.5.CSO Öz Vektörler Kümesinin Tamamlanılmışlığı	29

4.ELEKTROMAGNETİK ALANIN BAZA İZDÜŞÜMÜ

5.MAXWELL DENKLEMLERİNİN BAZA İZDÜŞÜMÜ

5.1.Genel Yaklaşım Denklemi	35
-----------------------------	----



6.ZAMAN DOMENİNDE ANALİTİK ÇÖZÜM

6.1.İrrotasyonel Modlar

6.2.Selonoidal Modlar

7.KAVİTE İÇİN SAYISAL BİR ÖRNEK

7.1.R Operatörünün Selonoidal Öz Vektörleri	44
7.1.1.Dirichlet Öz Değer Problemi	44
7.1.2.Neumann Öz Değer Problemi	47
7.2.R operatörünün İrrotasyonel Öz Vektörleri	50
7.2.1.Dirichlet Öz Değer Problemi	50
7.2.2.Neumann Öz Değer Problemi	52
7.3.Kaynak Fonksiyonlarının Hesaplamaları	54
7.3.1.Selonoidal Öz Vektörlerin Zaman Katsayıları	55
7.3.2.İrrotasyonel Öz Vektörlerin Zaman Katsayıları	56
7.3.3.Kaynak Fonksiyonları Hesaplamaları	58
7.3.3.1.Değişim Bölgesi Hesaplamaları	58
7.3.3.2.Peryodik Bölge Hesaplamaları	59
7.3.3.3.Ek Bölge Hesaplamaları	59

8.ELEKTRİK ALANIN SİMÜLASYONU

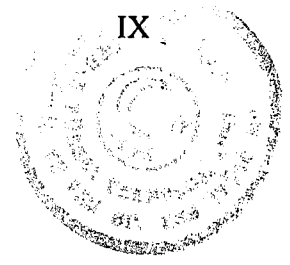
8.1.Programla İlgili Açıklamalar 60

8.2.Program Sonuçları 61

9.SONUÇLAR ve ÖNERİLER 63

10.KAYNAKLAR 67

ÖZGEÇMİŞ 69

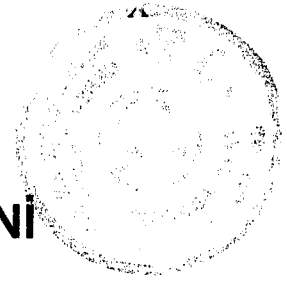


ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
1. $j_n^e(t)$ elektriksel kaynak fonksiyonlarının zamana bağımlılığı	54
2. Frekans 0.5 GHZ, gözlem zamanı t_{per} iken E_z simlasyonu.	61
3. Frekans 0.5 GHZ, gözlem zamanı $1.5 \cdot t_{per}$ E_z simlasyonu.	62
4. Frekans 0.5 GHZ, gözlem zamanı $0.5 \cdot t_{per}$ E_z simlasyonu.	62



SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ



$\vec{H} = \vec{H}(r,t)$; magnetik alan vektörü (A/m)

$\vec{E} = \vec{E}(r,t)$; elektrik alan vektörü (V/m) m^2

$\vec{D} = \vec{D}(r,t)$; elektrik akı yoğunluğu vektörü (C/m^2)

$\vec{B} = \vec{B}(r,t)$; magnetik akı yoğunluğu vektörü (T)

$\vec{J}_\sigma = \vec{J}_\sigma(r,t)$; malzeme içerisindeki alan tarafından endüklenen elektrik akım hacim yoğunluğu vektörü (A/m^2)

$\vec{J}_e = \vec{J}_e(r,t)$; kaynaklar tarafından üretilen elektrik akım hacim yoğunluğu vektörü (A/m^2)

$\vec{J}_h = \vec{J}_h(r,t)$; kaynaklar tarafından üretilen magnetik akım hacim yoğunluğu vektörü (V/m^2)

r = konum vektörü (m)

t = zaman (s)

∂_t = zamana göre kısmi türev operatörü (1/s)

$\rho_\sigma = \rho_\sigma(r,t)$; malzemedeki alan tarafından endüklenen elektrik yükü hacim yoğunluğu (C/m^3)

$\rho_e = \rho_e(r,t)$; kaynaklar tarafından üretilen elektrik yükü hacim yoğunluğu (C/m^3)

$\rho_h = \rho_h(r,t)$; kaynaklar tarafından üretilen magnetik yükü hacim yoğunluğu (C/m^3)

$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$; elektrik polarizasyon vektörü (C/m^2)

$\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$; magnetizasyon vektörü (A/m)

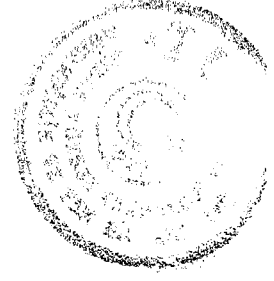
ϵ_0 ; boşluğun dielektrik sabiti (F/m)

μ_0 ; Boşluğun magnetik sabiti (H/m)

c ; ışığın boşluktaki hızı (m/s)

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$; kartezyen koordinatlarda birim vektörler

1.GİRİŞ



1.1. Konu ve Önemi

Frekans domenindeki elektromagnetik alan teorisi problemlerinin çözümünü için kullanılan klasik kompleks genlik metoduna (KGM) karşılık, zaman domenindeki elektromagnetik problemlerin çözülebilmesi için yeni bir metot geliştirilmiştir. Bu metoda zaman domeninde elektromagnetik alan teorisine yeni bir yaklaşım adı verilmiştir. Bu metot yardımı ile zaman domeninde birleştirilmiş ve belirli bir yöntemle göre düzenlenmiş bir yol izlenerek, durgun – hal, geçici – hal ve lineer olmayan hal v.b. birtakım doğa olayları için elektromagnetik açıdan çözümler bulunmaya çalışılmıştır. İzlenen yol gereği, genel anlamdaki Maxwell operatöründen (M) özel olarak ayrılmış bir parça ile ilgili olarak lineer self – adjoint (kendi kendine katılım) rot-sınır operatörünün bir öz vektör seti, Hilbert uzayındaki koordinatların ortonormal kompleks değerli vektör fonksiyonlarının tamamlanmış bir alt kümesi olarak bulunmuştur. Uzay – zaman domeninde düşünülen elektromagnetik alan ifadeleri, selonoidal ve irrotasyonel ismi verilen doğal kavite modları yardımı ile fiziksel manada açıklanabilmiştir. Burada selonoidal ve irrotasyonel doğal kavite modları sadece skaler zaman katsayılarına bağlı olup katsayılar matematiksel manada çözülebilir niteliktedirler. Katsayıların çözülmesi amacı ile Maxwell denklemleri yardımı ile Hilbert uzayı dikkate alınarak Cauchy problemine ulaşılmış ve daha sonra gerçek çözüme ulaşmak mümkün olabilmıştır. Maxwell denklemlerinin genel manada bünye bağıntıları ile ilişkilendirilmeleri sonucu lineer veya lineer olmayan v.b. birçok farklı ortamlarda çalışılabilme esnekliğine ulaşılmıştır. Bu bağıntılar yardımı ile zamanla değişen boş veya kaynaklı ortamlarda söz konusu katsayıların analitik bir çözüm seti aranmıştır.

Zamanla değişmeyen sıradan ortamlarla doldurulmuş mikrodalda kavitelerin kesin analizi, kavitelerin uygulamalarındaki kritik bir nokta

olarak yaygın bir şekilde gelişmiştir. Özellikle malzeme bilimindeki teknolojik gelişmeler ve yenilikler yardımı ile, zamana bağlı olarak elektromagnetik parametreleri lineer olmayan bir biçimde değişen ve hatta uygulanan elektromagnetik alan ifadelerine bağlı olarak çok farklı elektromagnetik cevaplar veren modern malzemelerin mikrodalga mühendislik ve fizik bilimi tarafından kullanılmaya başlanması mümkün olmuştur. Bu tür özelliklere sahip modern malzemeler ile mikrodalga kavitelerin doldurulması, kavite içerisinde meydana gelen elektromagnetik alanlar üzerinde çok büyük değişiklikler yapmaktadır. Bu değişimle beraber, KGM metodu yardımı ile bu tür analizlerin matematiksel anlamda yapılması çok zor hatta mümkün olmayan bir görünüm alır. Gerçekte KGM metodunda kullanılan lineer bünye bağıntıları $\vec{D}(r,t) = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}(r,t)$ ve $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}(r,t)$ olup ϵ_0 ve μ_0 boş uzay için elektromagnetik parametrelerdir. ϵ ve μ ifadeleri ise söz konusu ortamın elektromagnetik parametreleri olup sabit, uzay değişkenli veya lineer zaman konvolüsyon operatörleri formunda olabilirler. Bu ifadelerin zamanla değişen ortamlarda zamana bağlı olabilmeleri mümkün olup, bu durumda KGM methodunun bu tür problemlere çözüm bulması çok daha zor olmaktadır. Yine bu konuda bir diğer durum bünye bağıntılarının $\vec{D}(r,t) = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}(r,t)$ ve $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}(r,t)$ ifadelerinin gerçekte $\vec{D}(r,t) = \epsilon_0 \vec{E}(r,t) + \vec{P}(\vec{E}(r,t))$ ve $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H}(r,t) + \vec{M}(\vec{H}(r,t)))$ ifadelerinin sadece bir yakınsaması olduğu gerçeğidir. Gerçekte $\vec{D}(r,t)$ ve $\vec{B}(r,t)$ ifadeleri yukarıda yazılan en genel halleri ile çok geniş bir ortamın özelliklerini karşılayabilmektedirler. Bünye bağıntılarında ki $\vec{P}(\vec{E}(r,t))$ polarizasyon ve $\vec{M}(\vec{H}(r,t))$ magnetizasyon vektörleri genel olarak $\vec{E}(r,t)$ ve $\vec{H}(r,t)$ elektromagnetik alan ifadelerinin güç serileri yardımı ile açılımı şeklinde yazılabilirler. Bu nedenle KGM dikkate alındığında yalnızca bu güç serilerinin lineer bir parçası dikkate alınmakta ve lineer olmayan kısım ihmal edilmektedir. Güç serilerinde ki yüksek derceden terimlerin ele alınmaması sonucu bünye bağıntıları ancak önemli bir hata ile beraber basit bir formda kullanılabilirler. Aksi halde ise, yani güç serilerinde yüksek derceden terimlerin ele alınması sonucu ise, bünye

bağıntıları lineer olmayan bir form kazanmakta olup, bu durumda KGM tamamı ile cevapsız kalacaktır.

1.2. Tezin Amacı ve İçeriği

Burada sunulan çalışmanın hedefi yukarıda anlatılan durumlarda cevapsız kalmayacak ve direkt olarak kavite içerisinde zaman domeninde analitik olarak elektromagnetik analizler yapılabilmesini sağlayan bir method ortaya koyabilmektir. Buna göre, Maxwell denklem sistemi, birleştirilmiş ve kısaltılmış bir denklem sistemi biçiminde yazılacak olursa,

$$MX(r,t) = f(r,t) \quad (1.1)$$

şeklinde olacaktır. Burada M Maxwell operatörünü, X uzay – zaman domeninde bilinmeyen çözümü, f dışarıdan uygulanan kaynak fonksiyonlarını tanımlar. Bünye bağıntılarının genel ifadelerinin dikkate alınması ile prensip olarak lineer olmayan denklemlere ulaşılmaktadır. Burada öncelikle genel bir inceleme için gerekli olan adım, Maxwell denklemlerinin lineer olmayan bir formda varsayılması gerekliliğidir. Bu varsayım altında, Maxwell operatörü,

$$M = i\partial_t - R + A \quad (1.2)$$

burada,

∂_t : Zaman göre kısmi türev operatörü,

R : Lineer simetrik self – adjoint operatör,

A : M Maxwell operatörünün geriye kalan kısmı,

şeklinde ifade edilebilir. (1.1) denkleminde gösterilen X ifadesi R operatörünün sağladığı sınır koşulları altında bilinmeyen $\vec{E}(r,t)$ ve $\vec{H}(r,t)$

elektrik ve magnetik alan ifadeleridir. R operatörü, alan ifadeleri ile $curl$ operatörü arasında bir takım lineer cebrik işlemler aracılığı ile ilişki kurar. Bu nedenle R operatörü ilgilenilen koordinatlar üzerinde etkili olup kısaca Curl-Sınır operatörü (CSO) olarak adlandırılır. A operatörü, bünye bağıntıları ile $\vec{E}(r,t)$ ve $\vec{H}(r,t)$ alan ifadeleri arasındaki tüm işlemleri kapsar. Genel olarak A operatörü tek başına M operatörünün lineer olmayan bir parçası olarak düşünülebilir. Bu bahsedilenler bölüm 2'de ayrıntıları ile açıklanacaklardır.

(1.2) denklemini incelenilirse, tamamlanmış bir özdeğer fonksiyonları kümesine karşılık gelen iki lineer operatör ∂_t ve R görülecektir. Bu iki lineer operatör nedeni ile elektromagnetik teorisinin gelişimi en genel anlamda bu iki lineer operatörlerin herhangi birini ele alınması ile, iki temel ve farklı metot şeklinde düşünülmüştür.

İlk olarak, klasik elektromagnetik teorisi hesaplamaları ile sonuçlanan birinci yaklaşımı incelenir. Daha sonra ele alınacak olan ikinci tür yaklaşımda bu tür benzer bir yapıya sahiptir. Birinci tür yaklaşımın temeli iyi bilinen $i \frac{d}{dt}$ operatörünün bir öz fonksiyonlar kümesine yakınsıyor olması gerçeğidir. Buna göre şu ifade yazılabilir,

$$i \frac{d}{dt} e^{-i\omega t} = \omega e^{-i\omega t}, \quad -\infty < \omega < +\infty \quad (1.3)$$

Bu ifade yardımı ile, (1.1) denkleminin çözümü direkt olarak Fourier dönüşümü yardımı ile aşağıdaki gibi bulunabilir,

$$X(r,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(r,\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.4)$$

Burada, $X(r,\omega)$ incelenen elektromagnetik alanın kompleks genliği olup (1.1) denklemini üzerine bu dönüşüm uygulanarak $X(r,\omega)$ bilinmeyi

çözülebilir. Gerçekte bu işlem süreci matematiksel olarak Maxwell denklemlerindeki zamana bağlı türev işleminin bir ters formu olarak düşünülebilir. Bu yöntemde, ilk etapta öncelikle A operatörü engel olacaktır. Çünkü A operatörü M operatörünün lineer olmayan parçasıdır. Dolayısı ile KGM metodunun uygulanabilmesi için öncelikle A operatörünün lineerleştirilmesi gereklidir. Daha sonra ise, lineer bünye bağıntıları tarafından zamanla değişmeyen ortamların fiziksel anlamda karşılanılmasını sağlayacak ek sınırlamaların yapılması ile $X(r, w)$ çözümüne ulaşmak mümkün olabilecektir. (1.4) denklemini uygulanmasında ki en önemli bir diğer zorlukta, özellikle geniş bantlı kısa darbelerin söz konusu olması durumunda Fourier dönüşüm işleminin bazı problemleri olmasıdır.

İkinci tür yaklaşım ise, A operatörünün özelliklerinden tamamı ile bağımsızdır. R operatörünün M Maxwell operatöründen self – adjoint özelliği ile ayrılmasından sonra, öz vektör denklemi R operatörü tarafından sağlanmış olacaktır,

$$RX_n(r) = k_n X_n(r) \quad (1.5)$$

burada k_n , R operatörünün öz değerlerini, X_n ise bu öz değerleri karşılayan öz vektörleri gösterir. k spektral parametresi, kavite hacminin sonlu olması durumunda ayırık değerler alır ($k = k_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). R operatörünün self-adjoint olması durumu, R operatörü domeninde R operatörünün öz vektörlerinin ortonormal bir kümeye dönüştürülmesi ile ilgilidir. Bu konu ile ilgili detaylı açıklamalar bölüm 3 'de ele alınacaktır.

İkinci tür yaklaşımın göz önüne alınması durumunda temel hedef, (1.1) denkleminin çözümünün $X_n(r)$ öz vektörleri şeklinde elde edilebilmesidir. Bu durumda aranan elektromagnetik alan ifadesi öz vektör serileri adı verilen bir formda $X_n(r)$ 'e bağlı bir şekilde aşağıdaki gibi elde edilebilecektir,

$$X(r, t) = \sum_n C_n(t) X_n(r)$$

(1.6)

burada C_n zamana bağılı bilinmeyen spektral bir katsayıyı, n ise her bir spektral parametreyi gösteren indistir. (1.6) denkleminin elde edilmesinden sonra, yukarıda anlatılan tüm işlemler (1.1) denkleminde yansıtılmalıdır. Böylece R operatörü analitik olarak öz vektör serileri şeklindeki Maxwell denklemleri formuna dönüşecektir,

$$\frac{d}{dt} C_n + \sum_m Q_{nm} C_m = \langle f - AX, X_n \rangle \quad (1.7)$$

Burada $\langle *, * \rangle$ ifadesi bir iç üretim tanımlar ve çözüm uzayında seçilmiştir. Q_{nm} ifadesi, R operatörünün tüm öz değerlerini kapsayan bir matristir. Burada bir diğer önemli husus ise, R operatörünün ters dönüşümünde A operatörüne hiçbir müdahale yapılmıyor olmasıdır. Bu konu ile ilgili geniş açıklamalar bölüm 4'de incelenecektir. (1.7) diferansiyel denklem sistemine başlangıçta bilinmeyen elektromagnetik alan tarafından sağlanan başlangıç koşulları da eklenmelidir. Bu durumda matematiksel açıdan iyi bilinen "Cauchy problemine" ulaşılacaktır. Bu problemin çözümü olarak, dışarıdan uygulanan kaynakların neden olacağı etkilerle birlikte ele alınan elektromagnetik alanın başlangıç koşullarında hesaba katılması ile alan ifadelerinin değişimini zamana göre ele gözlemlemek ve hesaplamak mümkün olacaktır. Başlangıç koşullarının etkisinin analitik olarak ifadesi bölüm 5'de geniş olarak ele alınacaktır. Bölüm 4'de ise geçiş durumları için 3 adet analitik çözüm ele alınmıştır. Bunlardan ikisi lineer zamanla değişen kayıplı ve homojen (uzay koordinatlarında) ortamlarda ki irrotasyonel ve selonoidal kavite modlarının ayrı ayrı incelenmesi ile ilgilidir. Üçüncü örnek ise homojen olmayan ortamlardaki irrotasyonel ve selonoidal kavite modlarının birlikte ele alınmış bir formunu inceler. Bölüm 7'de ise tüm bu kullanılan yaklaşımlara genel manada bir göz atılarak eklerde ise CBO ve self-adjoint kavramları yardımı ile genel metodun esnekliği hakkında bilgiler verilmiştir.

1.3. Tarihsel Gelişim

Maxwell denklemlerinin elektromagnetik teorisin temellerini oluşturduğunun kabul edilmesinden sonra çözüm teknikleri genelde frekans domeninde (FD) geliştirilmiştir. Kavite problemlerine genel olarak bir göz atılırsa, etkin olarak tek frekansta tüm elektromagnetik ifadelerin zamanla değişen sürekli hal ön varsayımı ile tanımlandığını görülür. Genelde, bu şartlar altında elektromagnetik ifadelerin çözülmesini öngören metotlar ele alınmıştır. Doğal olarak, bu varsayım en genel manada bu tür problemler için geçerli olan frekans değerlerini saptamaya yönelmiştir. Bu frekanslar arasından saptanan anlamlı frekanslardaki kompleks genlikler, koordinatların fonksiyonları olup, bu tür bir yaklaşıma klasik elektromagnetikte kompleks genlik metodu (KGM) adı verilmiştir.

KGM yardımı ile analiz edilebilecek ortamları bir çok özelliklere göre geniş bir sınıf içerisinde ele almak mümkündür. Bu geniş sınıf içerisinde ele alınan her bir ortam lineer, fiziksel ve kimyasal olarak sürekli olmalıdır. Yani zamanla değişmemelidir. KGM methodunda kullanılan ilk teknik doğada varolan elektromagnetik olayların Fourier dönüşümü yardımı ile açıklanabileceği inancıdır. Ancak Fourier dönüşüm tekniği çok kısa işaretlerin göz önüne alınması durumunda doğal fizik ve matematiksel taban açısından birtakım prensip zorlukları ile karşı karşıya kalacaktır [Hillion,1993]. Klasik elektromagnetik teorideki KGM metodu, lineer olmayan ortamlarda da tamamı ile cevapsız kalmaktadır [Harmuth,1993]. Lineer olmayan ortamların analizi için, klasik elektromagnetik teoride sonlu farklar zaman domeni (FDTD) olarak bilinen bir metot kullanılmakta olup, elektromagnetik olayların fiziksel analizleri ancak ve ancak nümerik olarak elde edilebilmektedir. FDTD methodunun Maxwell denklemlerine uygulanmasını temel alan birçok çalışmalar günden güne hızla artmaktadır [Joseph,1997]. FDTD methodu nümerik tabanlı olması nedeni ile, karmaşık bilgisayar işlemlerine ihtiyaç duymakta olup bu ihtiyaç nedeni ile analitik bir metoda gereksinim ortaya çıkmaktadır.

KGM methodunun etkili ve yeterli bir metot olup olmadığı konusunda bazı şüpheler ilk olarak 1940'lı yıllarda ortaya çıkmaya başlamıştır. Bu yıllarda J.C.Slater [Slater,1946], G.V.Kisunko gibi bazı bilim adamları zaman domeni analizleri konusunda ayrı ayrı çalışmalar yapmışlardır [Kisunko,1949]. Şematik olarak, tüm bu çalışmalar daha önce açıklanan ikinci tür yaklaşımla yakından ilgilidirler. Bu methotlar ortonormal model fonksiyonlarının tamamlanmamış bir kümesinin varlığı varsayımı ile hareket ederler. Daha sonra boş bir kavite içerisindeki doğal modları bu küme yardımı ile ifade etmeye çalışırlar. Burada en büyük problem ise, ortonormal fonksiyonlar kümesinin tamamlanılmamışlığının bilinmesine rağmen kullanılmasıdır. Bununla beraber, kavite içerisinde bulunmak istenilen alan bilinmeyen zaman bağımlı genişleme katsayıları ve diferansiyel denklemler yardımı ile ele alınan serilerin düzenlenmesi sonucu elde edilmiştir. J.Van Bladel teorik olarak yukarıda açıklanan düşünceyi rastgele bir kesit alanına sahip geometrik olarak düzenli kaynaktan bağımsız silindirik dalga kılavuzları için geliştirmiştir [Bladel,1985]. J.Van Bladel bu çalışmasında, zamana (t) ve boylamsal z koordinatına bağlı olan katsayılar aracılığı ile elde edilen ortonormal bir fonksiyon kümesi yardımı ile bilinmeyen elektromagnetik alan ifadelerini dalga kılavuzları içerisinde çözmeye çalışmıştır. Daha sonra t ve z'e bağlı fonksiyonlar sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem sistemi şeklinde ifade edilmiştir. Daha sonraki çalışmalarda ise, dört boyutlu simetrik tensörleri temel alan yeni bir teorem Maxwell denklemlerine uygulanarak zaman domeni çözümleri yapılmaya çalışılmıştır [Gabriel,1980]. Dört boyutlu tensörlerin kullanılması ile bulunan ifadeler kılavuzlanmış dalgaların her üç tipini (TE, TM, TEM) açıklamak konusunda son derece yeterli olmuşlardır. Bu tür çözümlerdeki en büyük zorluk ise, teorinin başından itibaren tamamlanmamış bir model fonksiyonları kümesinin tanımlanması gerekliliğidir. Söz konusu metotta bu durumun ilk baştan kullanılmasının gerekli olması nedeni ile, çözüm sürecinde gereken değişim ve düzenlenmelerin yapılabilmesi konusunda bazı sınırlamalar ile karşılaşmaktadır.

Bu anlatılan metotlara karşın burada ele alınacak metot, başlangıçta self-adjoint özelliğine sahip ve Maxwell operatörünün bir parçası şeklinde düşünülmüş olan özel bir operatörün matris formları şeklindeki ifadesinden kendi öz vektör gösterilimlerinin çapraz bir ifadesinin elde edilmesi mantığına dayanmaktadır. Metodun en büyük avantajı, matrisel çapraz yazım formundaki bir operatörü kullanmasıdır. Bu özellik hesaplamalarda büyük bir hız ve kolaylık sağlamaktadır. Söz konusu self-adjoint özelliğine sahip olan operatörün Maxwell operatöründen ayrılabilme özelliği ile birçok fiziksel durumu inceleyerek çözümler üretmek mümkün olacaktır [Tretyakov, 1986]. Metodun amacı bu bilgiler ile kavite içerisinde, elektromagnetik alan ifadelerinin zamana bağlı değişimini gösteren analitik bir yol bulabilmektir.



2. MAXWELL OPERATÖRÜNÜN AYRILMASI

2.1. Kavite Tanımlamaları ve Temel Hesaplamalar

Kapalı bir S yüzeyi tarafından kapatılmış ve sınırlandırılmış Öklit uzayının sonlu bir alt domeni olan V hacimli bir kavite düşünölsün. Geometrik olarak, yüzeyin yatay kesitinin iç açısını π 'den küçük olduğu varsayölsün. Fiziksel olarak, mükemmel iletken olarak ele alönsün.

Uzay koordinatlarının gösterilmesi için, üç ortak birim ortogonal vektör (i_1, i_2, i_3) göze alönsün. Diğer vektörlerin bu birim vektör cinsinden gösterilmesinde $col(A_1, A_2, A_3)$ ifadesi kullanölsün. Burada col ifadesi *colon* anlamındadır. S yüzeyinden dışarıya doğru olan birim vektör ise N ile gösterilmiştir. $r \in V$ gösterilimi V hacmi içerisindeki r konum vektörünün yerleşimini gösterir ve "açık bölge" adını alır (V hacmi içerisinde fakat V hacmini S sınırı dışında). $r \in \bar{V}$ gösterilimi ise V hacminde r pozisyon vektörünün bir diğer yerleşimi gösterir ve "kapalı bölge" adını alır (V hacmi içerisinde S yüzeyini de kapsar). Göz önüne alınan kavite herhangi bir ortam ile doldurulmuş olabilir. Bu durumda elektromagnetik alan ifadeleri en genel haldeki bünye bağıntıları ile tanımlanırlar,

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E}) \\ \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}(\vec{H})) \\ \vec{J}_\sigma &= \vec{J}_\sigma(\vec{E}, \vec{H}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

burada ϵ_0 ve μ_0 boş uzaya ait elektromagnetik parametrelerdir. Elektrik ve magnetik alan vektörleri uzay koordinatlarına ve zamana bağılı olarak $\vec{E}(r, t)$ ve $\vec{H}(r, t)$ formunda gösterilmişlerdir. \vec{D} ve \vec{B} elektrik ve magnetik akı yoğunluğunu gösterir. Elektriksel polarizasyon $\vec{P}(\vec{E})$, magnetizasyon $\vec{M}(\vec{H})$ vektörleri ve elektrik iletim akımı $\vec{J}_\sigma(\vec{E}, \vec{H})$ ifadeleri $\vec{E}(r, t)$ ve $\vec{H}(r, t)$

ifadelerine bağı olarak verilmişlerdir. $\vec{P}(\vec{E})$, $\vec{M}(\vec{H})$ ve $\vec{J}_\sigma(\vec{E}, \vec{H})$ ifadelerinin A operatörüne bağımlılığı ileride tanımlanacaktır.



Dışarıdan uygulanan kaynaklar V hacmi içerisinde düşünülebilir. Bu durumda $\vec{J}_e(r, t)$ ve $\vec{J}_h(r, t)$ fonksiyonları elektrik ve magnetik akımların hacim yoğunluklarının birer parçası olarak tanımlanırlar. Elektrik $\rho_e(r, t)$ ve magnetik $\rho_h(r, t)$ yük yoğunlukları süreklilik denklemlerinin çözülmesi sonucu aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\partial_t \rho_\alpha = -\text{div} \vec{J}_\alpha \quad (2.2)$$

burada α ifadesi e, h ve σ olarak tek düşünölmelidir.

2.2. Kavite Problemlerinde Standart Hesaplamalar

Maxwell denklemlerinin kullanılması ile iç sınır değer problemleri ile ilgilenilirse řu standart denklemlere ulaşılır,

$$\begin{aligned} \varepsilon_o^{-1} \text{rot} \vec{H} &= \partial_t \vec{E} + \varepsilon_o^{-1} (\vec{J}_e + \vec{J}_\sigma + \partial_t \vec{P}) \\ -\mu_o^{-1} \text{rot} \vec{E} &= \partial_t \vec{H} + \mu_o^{-1} \vec{J}_h + \partial_t \vec{M} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} [N \times \vec{E}]_S &= 0 \\ (N \cdot \vec{H})_S &= 0 \end{aligned} \quad , \quad r \in S \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \varepsilon_o^{-1} (\rho_e + \rho_\sigma - \text{div} P) \\ \text{div} \vec{H} &= \mu_o^{-1} \rho_h - \text{div} M \end{aligned} \quad (2.5)$$

burada tüm bilinmeyenler $\vec{E}(r, t)$ ve $\vec{H}(r, t)$ ile ilişkilidirler. $\vec{E}(r, t)$ ve $\vec{H}(r, t)$ ifadeleri $t = 0$ anındaki başlangıç koşullarını sağlarlar,

$$\vec{E}(r,0) = \vec{E}_0(r) , \vec{H}(r,0) = \vec{H}_0(r) , r \in \bar{V} \quad (2.6)$$

burada $\vec{E}_0(r)$ ve $\vec{H}_0(r)$ verilen fonksiyonlardır. (2.1)'den (2.6)'e tanımlanan problemin çözümü kuadratik olarak integrallenebilir kompleks değerli vektör fonksiyonlarının bir sınıfı olarak gösterilmelidir. Bu durum aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{V'} (\epsilon_0 \vec{E} \vec{E}^* + \mu_0 \vec{H} \vec{H}^*) dV < \infty \quad (2.7)$$

burada $V' \subseteq V$ ve çarpımlar cebrik skaler çarpımlardır. Asteriks işareti ise kompleks konjuge işlemini tanımlar.

2.3. Curl – Sınır Operatörü

Curl (2.3) ve *süreklilik* (2.2) denklemlerinin sonucu olarak elde edilen *div* (2.5) denklemleri (1.1) denklemi formunda ele alınarak sınır değerlerinin de (2.4) göz önüne alınması ile "*curl*" denklemlerinin yeniden düzenlenmesi mümkün olabilecektir. Bu amaç için matematiksel işlemlerin kolaylaştırılması için şu matrisel tanımlamaları ele alalım,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{rot} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Bu düzenlemeler yardımı ile *curl* denklemleri (2.3) $i = \sqrt{-1}$ ifadesinde göz önüne alınması ile altı skaler değişkenli olarak yazılabilir,

$$\begin{pmatrix} 0 & i\epsilon_0^{-1} \text{rot} \\ -i\mu_0^{-1} \text{rot} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = i\partial_t \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \epsilon_0^{-1} (\partial_t \vec{P} + \vec{J} + \partial_t) \\ \mu_0^{-1} J_h + \partial_t \vec{M} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

burada elektromagnetik vektörler $\vec{E}(r,t)$ ve $\vec{H}(r,t)$ ile diferansiyel operatörü R' aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$X = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}, R'X = \begin{pmatrix} 0 & i\varepsilon_0^{-1}rot \\ -i\mu_0^{-1}rot & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}(r,t) \\ \vec{H}(r,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\varepsilon_0^{-1}rot\vec{H}(r,t) \\ -i\mu_0^{-1}rot\vec{E}(r,t) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

burada $r \in V$ ve t parametresi R' operatörüne göre alınmıştır. Sonuç olarak lineer CSO operatörü olan R aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$RX = \begin{cases} R'X(r,t), & r \in V \\ \left[N_x \vec{E}(r,t) \right] = 0, (N \cdot \vec{H}(r,t)) = 0, & r \in S \end{cases} \quad (2.11)$$

Böylece açık V domeninde R operatörü $X(r,t)$ 'nin uzay değişkenlerini etkileyen R' lineer diferansiyel işlemi şeklinde görülmektedir. Bu operatör, V 'nin S sınırı üzerinde, $X(r,t)$ vektörünün E ve H elemanları ile lineer cebirsel bir işlem sürecine denk düşer. (2.9) denkleminin sağ tarafı, aşağıdaki gibi gösterilsin,

$$AX = i \begin{pmatrix} \varepsilon_0^{-1}(\partial_t \vec{P}(\vec{E}) + \vec{J}(\vec{E}, \vec{H})) \\ \partial_t \vec{M}(\vec{H}) \end{pmatrix} \text{ ve } f(r,t) = -i \begin{pmatrix} \varepsilon_0^{-1} \vec{J}_e(r,t) \\ \mu_0^{-1} \vec{J}_h(r,t) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Bu gösterilimde amaç (2.1) bünye bağıntılarından yola çıkarak verilen $\vec{P}(\vec{E})$, $\vec{M}(\vec{H})$ ve $\vec{J}_\sigma(\vec{E}, \vec{H})$ ifadelerini de kapsayan A operatörü için tanımlama yapabilmektir. Bu işlemten sonra, (2.1), (2.2), (2.3) denklem kümesi (1.2)'nin (1.1) içerisinde yerine konulması ile aşağıdaki gibi bir form alacaktır,

$$RX = i\partial_t X + AX - f(r,t) \quad (2.13)$$

başlangıç koşullarının kullanılmasında gerekli olması durumunda hesaba katılacaktır. Tüm bu işlemler sırasında asıl amaç söz konusu operatörün bir şekilde öz vektör serileri formuna dönüştürülmesidir. Bunu yapılması için, aşağıdaki gibi bazı temel tanımlamalar yapılarak birçok soruya

cevap bulunmuştur,

- Bir Hilbert fonksiyonu uzayı, R operatörünün bir domeni olup, bu uzayda R operatörünün self - adjoint özelliği vardır.
- R operatör denkleminin öz vektörleri skaler ve vektörel Laplace operatörü için düzenlenmiş ve iyi bilinen *Dirichlet* ve *Neumann* sınır özdeğer problemlerinin genel bir formu olarak düşünülebilir.
- R operatörünün öz vektör kümesi Hilbert uzayında ortonormal bir baz türetir.
- R operatörünün domen aralığının saptanması için aynı tabanın bir alt kümesi kullanılacaktır. Böylece öz vektör serilerine dönüştürülecek operatör denklemleri için kullanılacak metot başarılı olabilecektir.



3.CSO DOMENİNDEKİ TEMEL KÜME

(2.7) dekleminde ki hacimsel integral altı - skaler elemanlı vektörler için aşağıda ki gibi bir iç üretim önerir,

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \frac{1}{V} \int (\epsilon_0 E_1 E_2^* + \mu_0 H_1 H_2^*) dV \quad (3.1)$$

burada X_1 ve X_2 uzay değişkenlerinin herhangi vektör fonksiyonlarının bir çiftidir. Bu vektör fonksiyonlarının V hacmi içerisindeki çeşitlerinin her biri V hacmi üzerinde ki S sınırında sınır koşullarını (2.4) sağlar,

$$\begin{aligned} X_1 &= \begin{pmatrix} E_1(r) \\ H_1(r) \end{pmatrix} \\ X_2 &= \begin{pmatrix} E_2(r) \\ H_2(r) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

(3.1) integrali, serbest - uzay sabitlerini ağırlık katsayıları olarak kapsar. Burada tanımlanan (.) ve asteriks işlemleri (2.7) denkleminde tanımlandığı gibidir. Söz konusu iç üretim (2.13) denklemi ile ortaya konulan R operatörünün bir domeni olarak Hilbert uzayında tanımlıdır. Öklit uzayının sınırlı V domeni içerisinde altı elemanlı Hilbert L_2 uzayında çalışdığımızı göstermek amacı ile $L_2^6(V)$ gösterilimi kullanılsın. (2.13) denkleminde göre R operatörü lineer olup aşağıdaki bağıntı nedeni ile simetrik ve Hilbert uzayında (3.3) denklemindeki gibi self - adjoint özelliğine sahiptir,

$$\langle RX_1, X_2 \rangle = \langle X_1, RX_2 \rangle \quad (3.3)$$

Burada öncelikle söz konusu self – adjoint özelliğinin varlığı aşağıdaki gibi ispat edilebilir. Tüm bu bilgilerin ışığında R operatörü iç tanımlamaya aşağıdaki gibi uygulansın,

$$\langle R'X_1, X_2 \rangle = \frac{i}{V} \int_{V'} (E_2^* \text{rot} H_1 - H_2^* \text{rot} E_1) dV \quad (3.4)$$

$$\langle X_1, R'X_2 \rangle = \frac{-i}{V} \int_{V'} (E_1 \text{rot} H_2^* - H_1 \text{rot} E_2^*) dV \quad (3.5)$$

daha önceden hesaplandığı gibi,

$$R'X_j = \begin{pmatrix} 0 & i\varepsilon_0^{-1} \text{rot} \\ -i\mu_0^{-1} \text{rot} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_j(r) \\ H_j(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\varepsilon_0^{-1} \text{rot} H_j(r) \\ -i\mu_0^{-1} \text{rot} E_j(r) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

bağıntısı yardımı ile,

$$\langle R'X_1, X_2 \rangle = \frac{1}{V} \int_{V'} (\varepsilon_0 (i\varepsilon_0^{-1} \text{rot} H_1) - \mu_0 (-i\mu_0^{-1} \text{rot} E_1) H_2^*) dV \quad (3.7)$$

$$\langle X_1, R'X_2 \rangle = \frac{1}{V} \int_{V'} (\varepsilon_0 E_1 (i\varepsilon_0^{-1} \text{rot} H_2)^* - \mu_0 H_1 (-i\mu_0^{-1} \text{rot} E_2)^*) dV \quad (3.8)$$

bulunur. Self - adjoint özelliğinin ispatı için Gauss teoremi yardımı ile,

$$\langle R'X_1, X_2 \rangle - \langle X_1, R'X_2 \rangle = \frac{i}{V} \oint_{S'} H_1 [E_2^* \times N] dS + \frac{i}{V} \oint_{S'} H_2^* [E_1 \times N] dS \quad (3.9)$$

bağıntısı bulunur. Burada $S' \rightarrow S$ formunda limit alınarak ve $[N \times E_{1,2}(r)]_S = 0$ sınır şartı yardımı ile,

$$\langle RX_1, X_2 \rangle = \langle X_1, RX_2 \rangle \quad (3.10)$$

Bu denklem ve özellik kullanılacak teorinin en önemli özelliği olup birçok genel uygulamaya müsade etmektedir. R operatöründe self - adjoint özelliğinin varolması nedeni ile aşağıda ki gibi bir öz değer problemi ile sonuçlanacaktır,

$$\begin{cases} R'X_n(r) = k_n X_n(r) & r \in V \\ [N \times E_n] = 0, (N \cdot H_n) = 0 & r \in S \end{cases} \quad (3.11)$$

burada k_n öz değer olup aşağıda ki gibi gösterilen öz vektörlere karşılık düşer,

$$X_n(r) = \begin{pmatrix} E_n(r) \\ H_n(r) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

(2.10) denkleminde R' matris işleminin yeniden düzenlenmesi ile klasik elektromagnetik teoride iyi bilinen sınır değer problemine ulaşılabacaktır,

$$\begin{aligned} \text{rot}H_n &= -ik_n \epsilon_0 E_n & (N \cdot H_n)_S &= 0 \\ \text{rot}E_n &= ik_n \mu_0 H_n & [N \times E_n]_S &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

burada üç elemanlı vektörler genellikle açısından r 'nin kompleks değerli fonksiyonları olacak şekilde düşünülmüştür,

$$E_n = E_n' + iE_n'' \quad \text{ve} \quad H_n = H_n' + iH_n'' \quad (3.14)$$

Ancak, dikkat edilmesi gereken en büyük özellik, klasik elektromagnetikte iyi bilinen sınır değer problemine ulaşılmasına rağmen klasik elektromagnetik teorisindeki gibi zamana göre türev ve bünye bağıntıları ifadeleri kullanılmamış olmasıdır. R operatörünün self - adjoint özelliği göstermesi bir öz değer problemi ile (3.13) sonuçlanmıştır. Burada üç değişkenli E_n ve H_n vektörleri R operatörünün altı elemanlı öz vektörlerinin bir parçasıdır ve (3.13) denklemi ile ifade edilen öz değer problemini karşılar.

R operatörünün self - adjoint özelliği nedeni ile, her bir k_n öz değer kümesi reeldir. k_n öz değerlerinin (3.13) sıfırdan farklı olması durumunda mevcut iki sınır koşulunun ikisinden biri göz önüne alınmayabilir. Fakat R operatörünün k_0 öz vektörünün 0 olması durumunda,

(3.13) sınır koşulları $k_0 = 0$ öz değerine karşılık gelen öz çözümün tanımlanması için birlikte kullanılmalıdır. Daha sonra her bir öz değer aldığı her iki değer için gerekli incelemeler yapılmıştır.

3.1. Selonoidal Öz Vektörlerin Alt Kümesi

k_n 'in 0'dan farklı olması durumunda, $divE_n$ ve $divH_n$ 0'dan farklı olacaktır. Bu yüzden k_n 'in sıfırdan farklı olması durumuna "selonoidal öz vektörler" adı verilmiştir. R operatörünün sıfırdan farklı her bir öz değeri çifttir,

$$Y_n(r) = \begin{pmatrix} E_n^*(r) \\ -H_n^*(r) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Gerçekte, (3.12) denklemi ile verilmiş altı elemanlı vektörler aynı zamanda aynı öz değere karşılık gelen diğer bir öz vektör kümesinde karşılırlar. Burada $E_n(r)$ ve $H_n(r)$ değerleri (3.14) denklemleri ile aynıdır. Denklemlerde kullanılan yıldız işareti kompleks eşlenik değerini tanımlar. (3.13) denkleme kompleks eşlenik teoreminin uygulanarak bir takım düzenlemeler yapılması sonucu k_n 'in sıfırdan farklı olması durumunda karşılık düşeceği farklı iki lineer bağımsız öz vektör kümesi kolayca bulunabilir. Bu durum fiziksel olarak, iki simetri üzerinde ki doğal kavite modlarının dağılımlarının vektör fonksiyonları ile ilişkili olduğunun göstergesidir. Sıfırdan farklı tüm öz değerler $k_0 = 0$ öz değerine göre $0k$ ekseninde simetrik olarak yerleşmişlerdir. $k_0 = 0$ öz değerine göre $0k$ reel ekseninde yerleştirilmiş olan $k_{-n} = -k_n$ simetrik öz değerlerini göz önüne alalım. (3.12) denklemden X_n ve Y_n lineer bağımsız öz vektörler sıfırdan farklı k_n öz değerlerine karşılık düşer. (3.13) denkleme kompleks eşlenik teoreminin uygulanarak bazı düzenlenmelerin yapılması sonucu, aşağıda ki denklem elde edilir,

$$X_{-n} = Y_n^* \quad \text{ve} \quad Y_{-n} = X_n^* \quad (3.16)$$

(3.16) denklemi söz konusu simetrik öz değerlere karşılık gelen lineer bağımsız bir öz vektör küme çiftine karşı gelir. Bu durum (2.10) ve (2.11) denklemleri ile tanımlanan R diferansiyel işleminin blok yapısının bir sonucudur. Bu özelliğe *karşılıklı simetri* adı verilmiştir. Karşılıklı simetri özelliği nedeni ile R operatörünün sınır değer problemlerinin çözümü için birçok pratik işlemler yapmak mümkün olabilecektir. Karşılıklı simetri özelliğine sahip öz vektörler üzerinde yapılan cebirsel bir takım işlemler yardımı ile (3.14) denklem notasyonu kullanılarak, k_n simetrik öz değerlerine karşılık gelen ($k_{-n} = -k_n$) lineer bağımsız öz vektör çifti için farklı eşdeğer gösterimler bulmak mümkündür,

$$\tilde{X}_n = \begin{pmatrix} E_n' \\ iH_n'' \end{pmatrix}, \tilde{X}_{-n} = \begin{pmatrix} -E_n' \\ iH_n'' \end{pmatrix}, \tilde{Y}_n = \begin{pmatrix} iE_n'' \\ H_n' \end{pmatrix}, \tilde{Y}_{-n} = \begin{pmatrix} -iE_n'' \\ H_n' \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Yukarıda ifade edilen karşılıklı simetri özelliğinden faydalanılarak 6 farklı elemana sahip aşağıda ki gibi yeni bir vektör kümesi bulmak mümkün olacaktır,

$$x_n = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}, y_n = \begin{pmatrix} 0 \\ H_n \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

burada E_n ve H_n (3.14) denklemde ki gibi tanımladılar. 0 ifadesi ise elemanları 0 olan üç elemanlı bir vektörü gösterir. ($0 = \text{col}(0,0,0)$). (3.18) denklemdeki notasyon aracılığı ile, $k_{+n} > 0$ ve $k_{-n} < 0$ simetrik öz vektörlerinin karşılık düştüğü öz vektörler aşağıda ki gibi düzenlenebilir,

$$X_{+n} = x_n + y_n \text{ için } k_{+n} > 0 \text{ ve } X_{-n} = x_n - y_n \text{ için } k_{-n} < 0 \quad (3.19)$$

(3.19) denklemi aracılığı ile, simetrik öz vektörlerin bir çifti için (3.10) öz değer vektörü aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$R(x_n + y_n) = k_{+n}(x_n + y_n) \text{ ve } R(x_n - y_n) = k_{-n}(x_n - y_n) \quad (3.20)$$

burada $k_o = 0$ ifadesi geçerlidir. (3.18) denklemi ile ilgili olan eş operatör öz değer denkleminin iki eş sistemi üzerinde ki basit düzenlemeler sonucu aşağıdaki sonuca ulaşılır,

$$\begin{aligned} Rx_n &= k_n y_n \\ Ry_n &= k_n x_n \end{aligned} \quad (3.21)$$

burada $k_o = 0$, $k_n = -k_n$ veya $k_{-n} = -k_n$ değerlerindedir. Burada k_n öz değerleri 0'dan farklı iken, x_n ve y_n vektörlerinin hiçbiri R operatörünün öz vektörü olarak düşünülmemelidir. Bu durumda sadece onların lineer birleşimi öz vektör durumunda (3.19) düşünülebilir. Altı elemanlı öz vektörlerin bileşenleri olan E_n ve H_n 'e bağlı olarak iyi bilinen sınır değer problemleri Laplace operatörü için aşağıdaki gibi bulunabilir. (2.11) denklemi ile ilgili olarak, R operatörü X_n değerine iki kez uygulanarak, $RRX_n = k_n RX_n = k_n^2 X_n$, Laplace operatörüne ulaşmak mümkün olacaktır,

$$\begin{cases} (\Delta + k_n^2 \epsilon_o \mu_o) E_n = 0 \\ H_n = -i \text{rot} E_n / k_n \mu_o \end{cases}, \quad \begin{cases} \text{div} E_n = 0 \\ k_n = k_{+n} > 0 \end{cases}, \quad [N \times E_n]_S = 0 \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} (\Delta + k_n^2 \epsilon_o \mu_o) H_n = 0 \\ E_n = i \text{rot} H_n / k_n \epsilon_o \end{cases}, \quad \begin{cases} \text{div} H_n = 0 \\ k_n = k_{+n} > 0 \end{cases}, \quad (N \cdot H_n)_S = 0 \quad (3.23)$$

$k_n > 0$ öz değerinin alt notasyonu olan $n = 1, 2, 3, \dots$ ifadesi öz değerlerin birden fazla olması durumunda onların numaralanması amacı ile kullanılmıştır. Gerçekte, R operatörünün sıfırdan farklı tüm öz değerlerini ve onlara karşılık düşen selonoidal öz vektörleri saptamak amacı ile, $k_n > 0$ için (3.22) ve (3.23) öz değer problemlerini çözerek (3.18) ve (3.19) denklemlerini uygulamak yeterli olacaktır. Bu durumda Laplace operatörünün uygulanması için, iyi bilinen *Dirichlet* ve *Neumann* vektör sınır öz değer problemleri tüm selonoidal öz vektörlerin tanımlarının genel

bir formu olarak düşünülebilir.

R operatörünün altı elemanlı selenoidal öz vektörler kümesi $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ kendi domeninde $L_2^6(V)$, J_R alt domenini meydana çıkaracaktır. $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ üç elemanlı vektörler kümesinin her biri J_E ve J_H denilen iki adet alt uzay oluşturular. Her bir alt uzay $L_2^3(V)$ Hilbert uzayına karşılık düşer,

$$\begin{aligned} J_E &: \{(\Delta + k_n^2)E_n = 0, \text{div}E_n = 0, [N \times E_n]_S = 0\}_{n=1}^{\infty}; \\ J_H &: \{(\Delta + k_n^2)H_n = 0, \text{div}H_n = 0, (N \bullet H_n)_S = 0\}_{n=1}^{\infty}; \end{aligned} \quad (3.24)$$

$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ arasında $E_n = \text{irrot}H_n / k_n \epsilon_o$ ve $H_n = -\text{irrot}E_n / k_n \mu_o$ şeklinde bir geçiş yapmak mümkündür. Bu nedenle J_R alt uzayı aşağıdaki gibi iki $L_2^3(V)$ alt uzayından olacaktır.

$$J_R = \begin{pmatrix} J_E \\ J_H \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

3.2. İrrotasyonel Öz Vektörlerin Alt Kümesi

$k_o = 0$ öz değerine karşılık düşen vektörle ilgili bağıntıyı (3.21) denkleminde yerine koyacak olursak,

$$\begin{aligned} Rx_o &= 0 \\ Ry_o &= 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Bu denklemleri çözümü saf elektrik ve saf magnetik olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanan öz vektörleri tanımlar,

$$x_o = \begin{pmatrix} E_o(r) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ve } y_o = \begin{pmatrix} 0 \\ H_o(r) \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

burada E_o ve H_o değerleri $k_o = 0$ değerine karşılık düşen öz vektörlerdir. Yani $k_o = 0$ değerini karşılayan altı elemanlı öz vektörler sadece (3.27) formunda bulunabilecektir. (3.13) denklemi içerisinde $k_o = 0$ ifadesi konulacak olursa, (3.26) operatör denkleminde eşit *curl* operatörü için bağımsız sınır değer öz değer problemi ifadesi ile karşılaştırılır. Bu durumda incelenen vektörler için (3.13) mümkün olan formlar aşağıdaki gibi bulunacaktır,

$$E_o = -\nabla(\Phi_\alpha + u) , \quad \Phi_\alpha|_S = 0 , \quad u|_S = \text{sabit} \quad (3.28.a)$$

$$H_o = -\nabla\psi_\beta , \quad \frac{\partial}{\partial N}\psi_\beta|_S = 0 \quad (3.28.b)$$

burada Φ_α ve ψ_β bilinmeyen skaler potansiyellerdir. Bunlar S sınırı üzerinde sınır nedeni ile limitlenmiş V domeni içerisinde diferansiyellenebilir herhangi fonksiyonlar olabilirler. Bu durum R operatörünün $k_o = 0$ öz değerinin sonsuz sayıda dejenerasyon derecesine sahip olduğunu gösterir. Burada (3.28) denklemlerinde Φ_α ve ψ_β potansiyelleri tarafından tanımlanan R operatörünün öz vektörleri toplanmıştır. Ek olarak (3.28.a) denkleminde görülen u ifadesi hakkında ki açıklamalar aşağıda verilecektir. Maxwell denklemlerine (2.5) eşlik eden (3.28) denklemlerinden elde edilen Φ_α ve ψ_β sınır koşulları Laplace operatörü için, skalar *Dirichlet* ve *Neumann* sınır öz değerlerinin öz vektörleri için aşağıdaki gibi özelleştirilebilir,

$$(\Delta + \chi_\alpha^2)\Phi_\alpha = 0 , \quad \Phi_\alpha|_S = 0 \quad (3.29)$$

$$(\Delta + \nu_\beta^2)\psi_\beta = 0 , \quad \frac{\partial}{\partial N}\psi_\beta|_S = 0 \quad (3.30)$$

$\chi_\alpha > 0$ ve $\nu_\beta > 0$ ifadeleri öz değerleri tanımlar. Φ_α ve ψ_β ise bu öz değerleri karşılayan öz vektörlerdir. $\alpha = 0,1,2,3,\dots$ ve $\beta = 0,1,2,3,\dots$ altındisleri χ_α ve ν_β öz değerlerinin sayısı olarak tanımlanır.

Bu sayıların artması söz konusu öz değerlerin mümkün çoğullamalarını ifade etmektedir.

(3.27) ve (3.28) denklemlerindeki gösterilimin standartlaştırılması amacı ile, söz konusu skaler potansiyeller tarafından üretilen tüm öz vektörler aşağıdaki gibi özelleştirilmiştir,

$$\chi_\alpha = \begin{pmatrix} -\nabla\Phi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad y_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ -\nabla\Psi_\beta \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

burada $\alpha = 0,1,2,3,\dots, \beta = 0,1,2,3,\dots, \chi_\alpha = 0$ ve $\nu_\alpha = 0$ (3.29) ve (3.29) denklemlerindeki problemlerde ki Laplacian için öz değerleri tanımlar. (3.29) ile ifade edilen problem $\chi_\alpha = 0$ için tek çözüm olarak $\Phi_\alpha(r) = 0$ öz vektörüne sahiptir. (3.29) denkleminde aynı şekilde $\nu_\alpha = 0$ için $\Psi_\alpha(r) = \text{sabit}$ ifadesi ile sonuçlanır. Bu nedenle (3.31) ifadesinde $\alpha = 0$ ve $\beta = 0$ ifadeleri numaralanmayabilir. $\chi_\alpha > 0$ (3.29) ve $\nu_\beta > 0$ (3.29) öz vektörlerine karşı düşen öz fonksiyonların geri kalanı iki vektör altkümesi oluşturur (3.31). Bu set sadece R operatörünün $k_\alpha = 0$ öz değerine karşılık düşer. Bu nedenle onun öz değeri sonsuz dejenerasyon kuvvetine sahiptir. Laplace operatörü için skaler sınır öz değer problemleri (3.28) ve (3.29) öz vektörlerin tanımlanması için (3.31) genel bir form olarak alınabilir. Helmutz denkleminin kullanılması ile $\chi_\alpha \neq 0$ için (3.29) ve $\nu_\beta \neq 0$ için (3.29) ifadelerinin yardımı ile aşağıdaki ifadeler elde edilir,

$$\text{div}(-\nabla\Phi_\alpha) = \chi_\alpha^2 \Phi_\alpha \neq 0, \quad \text{div}(-\nabla\Psi_\beta) = \nu_\beta^2 \Psi_\beta = 0$$

Bu nedenle R operatörünün öz vektörlerine "irrotasyonel öz vektörler" adı verilir. Altı elemanlı irrotasyonel öz vektörlerin iki alt kümesi Hilbert uzayındaki $L_2^6(V)$, R operatörü domenindeki bir G_r alt uzayını tanımlar. Yalnızca $k_\alpha = 0$ öz değerine karşılık düşmesinden dolayı üç elemanlı gradyantlerin her biri Hilbert uzayında $L_2^3(V)$ alt uzayına karşılık düşer.

$$\begin{aligned} G_E &: \left\{ \begin{array}{l} -\Delta\Phi_\alpha = 0 \\ (\Delta + \chi_\alpha^2)\Phi_\alpha = 0 \end{array} \right. ; \Phi_\alpha|_S = 0 \\ G_H &: \left\{ \begin{array}{l} -\Delta\Psi_\beta = 0 \\ (\Delta + \chi_\alpha^2)\Psi_\beta = 0 \end{array} \right. ; \frac{\partial}{\partial N}\Psi_\beta\Big|_S = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

(3.1) tanımı nedeni ile , altı elemanlı irrotasyonel χ_α ve y_β vektörleri aşağıdaki tanımlamayı karşılarlar yani ortogonaldirler,

$$\langle \chi_\alpha, y_\beta \rangle = \frac{1}{V} \int_V (-\nabla\Phi_\beta \cdot 0 - 0 \cdot \nabla\Psi_\beta^*) dV = 0$$

Bu durum $L_2^6(V)$ 'de tanımlı olan G_r uzayının $L_2^3(V)$ alt uzayına üç elemanlı sıfır vektörü yardımı ile bölünebileceğini gösterir. Bu alt uzayda tanımlı olan elemanlar R operatörünün $k_o = 0$ ve diğer sıfırdan farklı tüm ayırık öz değerlerini karşılayan öz vektörlerdir.

$$G_R = \begin{pmatrix} G_E \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ G_H \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

3.3. Harmonik Öz Vektörlerin Alt Kümesi

(3.28) denklemindeki üst satırda u potansiyeli, $k_o = 0$ öz değerine karşı düşen R operatörünün x_u öz vektörünü üretir. Bu problem aşağıdaki gibi çözülebilir,

$$\Delta u = 0, \quad u|_S = \text{sabit}, \quad x_u = \begin{pmatrix} -\nabla u \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Laplace denkleminin çözümlerine harmonik fonksiyonlar adı verilir. Bu nedenle R operatörünün harmonik öz vektörleri olarak x_u vektörünü isimlendirmek doğaldır. Burada çalışmaların en başından beri ele alınan kavitenin S yüzeyinin tekli bağlanmış olduğu varsayılmıştır. Bu nedenle

Laplace denklemi, harmonik fonksiyonların maksimum prensibine göre $u(r) = \text{sabit}$ tek çözümüne sahiptir. Bu nedenle $x_u = \text{col}(0,0,0,0,0,0)$ vektörü bu durumda R operatörünün harmonik öz vektörlerinin alt kümesinde ki tek vektördür. Genel durumda, S yüzeyi çoklu bağlanmış olabilir. Bu durumda u çoklu bağlantılı S yüzeyinin elemanları üzerinde farklı değerlere sahip olan bir sabit olabilir. Bu nedenle, Laplace denklemi sonlu sayıda lineer bağımsız çözüme sahip olacaktır. R operatörünün harmonik öz vektörlerinin bir alt kümesi elemanlarının sonlu bir sayısından oluşacaktır. Tekli bağlantı durumu ele alınması halinde, genel durumdan ziyade özel bir hal için çalışılmış olunacaktır. $L_2^0(V)$ Hilbert uzayında ki harmonik vektörlerin bir alt kümesi şöyle gösterilebilir,

$$U_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

(3.35) denklemi tekli bağlantı durumunda sadece altı elemanlı sıfır değerli $0 = \text{col}(0,0,0,0,0,0)$ vektörünün söz konusu alt uzay tarafından kapsandığını gösterir.

3.4. Ortonormalizasyon Şartları

(3.1) denkleminde ki tanıma göre, irrotasyonel öz vektörler (3.31) aşağıdaki gibi normalize edilebilir,

$$\langle x_\alpha, x_\alpha \rangle = \frac{\epsilon_0}{V} \int_V (\nabla \Phi_\alpha \cdot \nabla \Phi_\alpha^*) dV = 1, \quad \langle y_\beta, y_\beta \rangle = \frac{\mu_0}{V} \int_V (\nabla \psi_\beta \cdot \nabla \psi_\beta^*) dV = 1 \quad (3.36)$$

İyi bilinen aşağıdaki tanım kullanılarak,

$$\nabla \Phi \cdot \nabla \psi = -\Phi \Delta \psi + \text{div}(\Phi \nabla \psi) \quad (3.37)$$

Gauss teoremi ve öz değer problemleri (3.29) yardımı ile, öz vektörlerin

normalizasyonu, kendi potansiyel fonksiyonlarının eş normalizasyonları formunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\frac{\chi_{\alpha}^2 \epsilon_0}{V} \int_V |\Phi_{\alpha}|^2 dV = 1 \quad \text{ve} \quad \frac{\nu_{\beta}^2 \mu_0}{V} \int_V |\psi_{\beta}|^2 dV = 1 \quad (3.38)$$

birbirlerine dik olan öz değer (3.29) problemlerindeki ayırık öz değerleri öz çözümler karşılamaktadır. Bu durum normalizasyon koşulları ile birlikte düşünüldüğünde (3.39) irrotasyonel vektörler için ortonormalizasyon koşulları (3.37) denklemi ile birlikte,

$$\begin{aligned} \langle x_{\alpha}, x'_{\alpha} \rangle &= \frac{\epsilon_0}{V} \int_V (\nabla \Phi_{\alpha} \cdot \nabla \Phi_{\alpha}^*) dV = \delta_{\alpha\alpha} \\ \langle y_{\beta}, y'_{\beta} \rangle &= \frac{\mu_0}{V} \int_V (\nabla \psi_{\beta} \cdot \nabla \psi_{\beta}^*) dV = \delta_{\beta\beta} \end{aligned} \quad (3.39)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada δ Krocner deltasını temsil eder. Altı elemanlı selonoidal öz vektörlerin, üç elemanlı E_n ve H_n için benzer ortonormal koşulları elde edilebilir. Bu amaç için (3.19) denklemdeki altı elemanlı vektörler aşağıda ki koşullar altında normalize edilebilir,

$$\langle X_{+n}, X_{+n} \rangle = \langle x_n, x_n \rangle + \langle y_n, y_n \rangle = \frac{\epsilon_0}{V} \int_V E_n \cdot E_n^* dV + \frac{\mu_0}{V} \int_V H_n \cdot H_n^* dV = 2 \quad (3.40)$$

X_{+n} ve X_{-n} selonoidal özvektörleri, R operatörünün self – adjoint ayırık simetrik öz değerlerine karşılık gelir. Yani,

$$\langle X_{+n}, X_{-n} \rangle = \langle x_n, x_n \rangle - \langle y_n, y_n \rangle = \frac{\epsilon_0}{V} \int_V E_n \cdot E_n^* dV - \frac{\mu_0}{V} \int_V H_n \cdot H_n^* dV = 0 \quad (3.41)$$

(3.40) ve (3.41) denklemleri yardımı ile altı elemanlı selonoidal öz vektörlerin elektrik ve magnetik bileşenleri için aşağıda ki gibi bireysel normalizasyon koşulları elde edilebilir,

$$\langle x_n, x_n \rangle = \frac{\epsilon_0}{V} \int_V E_n \cdot E_n^* dV = 1 \quad \text{ve} \quad \langle y_n, y_n \rangle = \frac{\mu_0}{V} \int_V H_n \cdot H_n^* dV = 1 \quad (3.42)$$

buradan şu sonuca varılabilir,

$$\frac{\epsilon_0}{V} \int_V E_n \cdot E_n^* dV = \frac{\mu_0}{V} \int_V H_n \cdot H_n^* dV$$

yukarıda ki ifadeler yardımı ile benzer bir yol izlenerek, k_{+n} ve $k_{\pm m} \neq k_{+n}$ öz değerlerine karşılık gelen X_{+n} ve $X_{\pm m}$ selonoidal öz vektörleri için bir ortogonal çift,

$$\langle X_{+n}, X_{+m} \rangle = \langle x_n, x_m \rangle + \langle y_n, y_m \rangle = \frac{\epsilon_0}{V} \int_V E_n \cdot E_m^* dV + \frac{\mu_0}{V} \int_V H_n \cdot H_m^* dV = 0 \quad (3.44)$$

$$\langle X_{+n}, X_{-m} \rangle = \langle x_n, x_m \rangle - \langle y_n, y_m \rangle = \frac{\epsilon_0}{V} \int_V E_n \cdot E_m^* dV - \frac{\mu_0}{V} \int_V H_n \cdot H_m^* dV = 0 \quad (3.45)$$

bulunarak ortogonalite koşulları yardımı ile elemanlı vektörler için,

$$\langle x_n, x_m \rangle = \frac{\epsilon_0}{V} \int_V E_n \cdot E_m^* dV = 0 \quad \text{ve} \quad \langle y_n, y_m \rangle = \frac{\mu_0}{V} \int_V H_n \cdot H_m^* dV = 0 \quad (3.46)$$

bulunur. Burada $k_n \neq k_{\pm m} \neq 0$. (3.42) normalizasyon denkleminin kombinasyonu ve ortogonalite koşulları (3.46) aşağıda ki gibi bireysel ortonormalite koşullarına yol açar,

$$\langle x_n, x_m \rangle = \frac{\epsilon_0}{V} \int_V E_n \cdot E_m^* dV = \delta_{mn} \quad \text{ve} \quad \langle y_n, y_m \rangle = \frac{\mu_0}{V} \int_V H_n \cdot H_m^* dV = \delta_{mn} \quad (3.47)$$

R operatörünün $k_0 = 0$ öz değerine karşılık gelen χ_α ve y_β irrotasyonel öz vektörlerinden ve $k_{\pm n} \neq 0$ öz değerlerine karşılık gelen $X_{\pm} = x_n \pm y_n$

selonoidal öz vektörlerinden dolayı, ortogonallik koşulunun son iki formu,

$$\langle x_n, \chi_\alpha \rangle = -\frac{\epsilon_0}{V} \int_V E_n \cdot \nabla \Phi_\alpha^* dV = 0 \text{ ve } \langle y_n, \psi_\beta \rangle = -\frac{\mu_0}{V} \int_V H_n \cdot \nabla \psi_\beta^* dV = 0 \quad (3.48)$$

şeklinde bulunabilir. Yukarıda anlatılanlar ile ilgili olarak bir takım faydalı açıklamalar aşağıda verilmiştir,

- Eğer Φ_α ve Ψ_β potansiyelleri (3.38) denklemine göre normalize edilirse, altı elemanlı irrotasyonel öz vektörler için (3.39) bağıntısı otomatik olarak sağlanır,
- Eğer (3.22) ve (3.23) sınır değer problemlerinden gelen E_n ve H_n vektörleri (3.42) koşulu dikkate alınarak normalize edilirse, (3.47) denklemindeki ortonormalizasyon ve (3.43) denklemindeki tanım koşullar otomatik olarak sağlanır,
- (3.48) denkleminde irrotasyonel ve selonoidal vektörlerin ortogonalliği $A \cdot \nabla \phi = \text{div}(\phi \cdot A) - \phi \cdot \text{div}(A)$ bağıntısı ve Gauss teoremi ile basitçe elde edilir.

3.5. CSO Öz Vektörler Kümesinin Tamamlanmışlığı

R operatörünün Hilbert uzayındaki $L_2^6(V)$ öz vektör kümesi, ortak üç ortogonal uzay içeren M_R çoklayıcı elemanı ile aşağıda ki gibi ifade edilir,

$$M_R = J_R \oplus G_R \oplus U_R \quad (3.49)$$

\oplus işareti ortogonal alt uzayların direkt toplamını ifade etmektedir. Burada M_R çoklayıcı elemanının Hilbert uzayında kapatılmış olduğunu ve $M_R = L_2^6(V)$ formunda Hilbert uzayını kapsadığının ispat edilmesi gerekmektedir. Bu durum R operatörünün öz değerlerinin kendi domeninde bir taban oluşturduğunu gösterir ve Maxwell denklemlerinden

elde edilen tüm elektromagnetik vektörlerin öz vektör serileri yardımı ile ifade edilebileceğini gösterir. (3.25), (3.33), (3.35) ve (3.49) denklemlerinden yola çıkılarak,

$$M_R = \begin{pmatrix} J_E \\ J_H \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} G_E \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ G_H \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

denklemin sağ tarafı,

$$M_R = \begin{pmatrix} J_E \oplus G_E \\ J_H \oplus G_H \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

şeklinde ifade edilebilir. $M_R = L_2^6(V)$ ifadesinin ispat edilebilmesi için H. Weyl tarafından ortaya atılan Laplace operatörü için teorik analiz çalışmalarından faydalanılacaktır [Weyl,1940]. H. Weyl tarafından yapılan çalışmalar sonucu elde edilen en önemli sonuç Weyl Teoremi olarak bilinir ve $L_2^3(V)$ Hilbert uzayında ortogonallik dağılımı hakkındadır. Bu durum aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$L_2^3(V) = J \oplus G \oplus U \quad (3.52)$$

söz konusu S yüzeyi üzerinde, tanımlanan J, G ve U ifadeleri,

$$J : \{ A : (\Delta + k^2)A = 0, \text{div}A = 0, [N \times A]_S = 0 \text{ veya } (N \cdot A)_S = 0 \} \quad (3.53)$$

$$G : \{ \nabla \varphi : (\Delta + \chi^2) \varphi = 0, \varphi|_S = 0 \text{ veya } \frac{\partial}{\partial N} \varphi|_S = 0 \} \quad (3.54)$$

$$U : \{ \nabla u : \Delta u = 0 \} \quad (3.55)$$

şeklinde tanımlanır. (3.52) denkleminde Weyl Teoreminden (3.51) denklemine geri dönecek olursak,

$$M_R = \begin{pmatrix} J_E \oplus G_E \\ J_{H \oplus G_H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_2^6(V) \\ L_2^6(V) \end{pmatrix} \equiv L_2^6(V) \quad (3.56)$$

bulunur. S yüzeyinin tekli bağlantılı olması durumunda özel olarak $U=0$ 'dır. Bundan dolayı, R operatörünün öz vektör kümesinin kendi domeninde bir taban oluşturur. Weyl teoremine göre, $L_2^3(V)$ uzayında herhangi J, G ve U ifadeleri (3.53), (3.54), (3.55) ifadelerini sağlıyorsa $M_R = L_2^6(V)$ ifadesi geçerli olup, J, G ve U ifadeleri için çalışılan domen Hilbert uzayında tamamlanmıştır. Yani J, G ve U ifadeleri haricinde başka ifadeler $M_R = L_2^6(V)$ 'yi sağlamazlar.



4. ELEKTROMAGNETİK ALANIN BAZA İZDÜŞÜMÜ

(2.13) denklemindeki problemi ele alınsın. Buna göre, temel küme yardımı ile elektromagnetik alan vektörlerinin spektral gösterimleri elde etmek mümkün olacaktır. R operatörünün öz vektörlerinin alt kümeleri ile elektromagnetik alanın ifadeleri öz vektör serileri yardımı ile ifade edilebilir,

$$X(r, t) = \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} c_n(t) X_n(r) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{\alpha}(t) \chi_{\alpha}(r) + \sum_{\beta=1}^{\infty} b_{\beta}(t) y_{\beta}(r)$$

(4.1)

bu gösterim (1.6) numaralı sembolik gösterimi ile eşdeğerdir. (4.1) denkleminde $n=0$ değerinin hariç tutulmasını nedeni, R operatörünün $k_o = 0$ öz değerine karşılık gelen irrotasyonel öz vektörlerinin hariç tutulduğunun gösterilmesi içindir. Yukarıdaki serilerde vektör fonksiyonlarının koordinatları bilindiğinden dolayı, sadece zaman katsayıları bilinmeyen ifadelerdir. Laplace operatörü yardımı ile bilinmeyen zaman katsayılarının bulunması mümkündür. (4.1) denkleminde ilk seri (3.19) notasyonu kullanılarak,

$$\sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} c_n(t) X_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [c_n(t) X_n(r) + c_{-n}(t) X_{-n}(r)] = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) x_n(r) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) y_n(r) \quad (4.2)$$

bulunur. Burada $e_n = c_n + c_{-n}$ ve $h_n = c_n - c_{-n}$ şeklinde tanımlanmıştır. $X(r, t)$ ifadesinin (2.10) denkleminde ve (3.18), (3.31) notasyonu ile $E(r, t)$ ve $H(r, t)$ şeklinde ifade edilebileceği göz önüne alınırsa, üç elemanlı elektrik ve magnetik alan vektörleri için aşağıda ki gibi bir açılım bulmak mümkündür,

$$\begin{aligned}
 E(r,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) E_n(r) - \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{\alpha}(t) \nabla \Phi_{\alpha}(r) \\
 H(r,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) H_n(r) - \sum_{\beta=1}^{\infty} b_{\beta}(t) \nabla \Psi_{\beta}(r)
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

burada zamana bağımlı katsayılar bilinmeyenlerdir. Elektrik ve magnetik alan vektörleri için bu tür bir gösterilim, doğal irrotasyonel ve selonoidal kavite modlarının birleşimini ifade etmektedir. (4.3) gösterilimdeki asıl amaç ve hedef daha önce kullandığı gibi frekansa bağılı bir parametre yerine, zaman bağılı bir parametre yardımı ile elektrik ve magnetik alan vektörlerini ifade edebilmektir. Aynı şekilde, $t=0$ anında elektromagnetik alan ifadeleri öz vektör serileri yardımı ile aşağıda ki gibi ifade edilebilir,

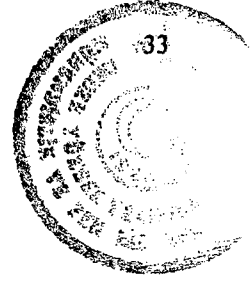
$$\begin{aligned}
 E(r,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} e_n^0(t) E_n(r) - \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{\alpha}^0(t) \nabla \Phi_{\alpha}(r) \\
 H(r,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} h_n^0(t) H_n(r) - \sum_{\beta=1}^{\infty} b_{\beta}^0(t) \nabla \Psi_{\beta}(r)
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

burada sayısal olarak katsayılar hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
 e_n^0 &= \frac{\epsilon_0}{V} \int_V E_n(r) E_n^*(r) dV & a_{\alpha}^0 &= -\frac{\epsilon_0}{V} \int_V E_n(r) \nabla \Phi_{\alpha}^* dV \\
 h_n^0 &= \frac{\mu_0}{V} \int_V H_n(r) H_n^*(r) dV & b_{\beta}^0 &= -\frac{\mu_0}{V} \int_V H_n(r) \nabla \Psi_{\beta}^* dV
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

benzer olarak verilmiş kaynak fonksiyonları ifadeleride selonoidal ve irrotasyonel kavite modlarının bir birleşimi olarak gösterilebilirler,

$$\begin{aligned}
 \epsilon_0^{-1} J_e(r,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} j_n^e(t) E_n(r) - \sum_{\alpha=1}^{\infty} i_{\alpha}^e(t) \nabla \Phi_{\alpha}(r) \\
 \mu_0^{-1} J_h(r,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} j_n^h(t) H_n(r) - \sum_{\beta=1}^{\infty} i_{\beta}^h(t) \nabla \Psi_{\beta}(r)
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$



bu denklemdeki bilinmeyen zaman katsayıları ise,

$$\begin{aligned} j_n^e(t) &= \frac{1}{V} \int_V J_e(r,t) E_n^*(r) dV & i_\alpha^e(t) &= -\frac{1}{V} \int_V J_e(r,t) \nabla \Phi_\alpha^* dV \\ j_n^h &= \frac{1}{V} \int_V J_h(r,t) H_n^* dV & i_\beta^h(t) &= -\frac{1}{V} \int_V J_h(r,t) \nabla \Psi_n^* dV \end{aligned} \quad ;$$

(4.7)

şeklinde bulunabilir.



5. MAXWELL DENKLEMLERİNİN BAZA İZDÜŞÜMÜ



(2.13) denkleminde R operatörü M Maxwell operatörünün bir parçası olarak düşünülmüştü. R operatörünün matrisel gösterilimi söz konusu bazın R operatörünün öz vektör kümesinin kendi domeninde oluşturulmasından dolayı çapraz bir formdadır. Söz konusu baz ortonormalizasyon şartını sağlar. Burada tek bilinmeyen zaman bağımlı (4.3) katsayılarıdır. Bu işlem süreci (3.10) denklemi ile gösterilebilir. X_1 ve X_2 vektörlerinin R operatörünün domeninden rastgele vektörler olmasından dolayı X_1 vektörü yerine daha genel olarak $X(r,t)$ ve X_2 vektörü yerinde $X_n(r)$ ifadesini kullanabiliriz. Bu ifadeler kullanılarak (3.10) denklemi,

$$\langle RX(r,t), X_n \rangle = \langle X(r,t), RX_n \rangle \quad (5.1)$$

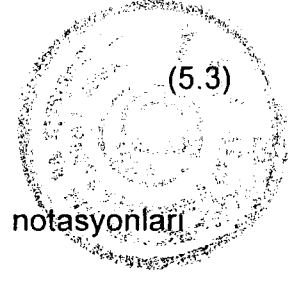
şeklinde ifade edilebilir. Burada $RX(r,t)$ ifadesi yerine (2.13) denklemindeki ifadenin sağ tarafını ve RX_n ifadesi yerinde $k_n X_n$ ifadeleri konularak, (3.1) tanımına göre $\langle *, * \rangle$ iç üretiminin hesaplanması için basit cebrik bir forma ulaşmak mümkün olacaktır. Buna göre (2.13) denklemi $RX = v + w$ şeklinde yeniden düzenlenecek olursa,

$$v = i \begin{pmatrix} \partial_t E + \epsilon_0^{-1} (j_c(r,t) + j_\sigma(E,H) + \partial_t P(E)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_t H + \mu_0^{-1} j_h(r,t) + \partial_t M(H) \end{pmatrix}$$

burada $X(r,t)$ ifadesi $X = x + y$ formunda yeniden düzenlenerek,

$$x = x(r,t) = \begin{pmatrix} E(r,t) \\ 0 \end{pmatrix}; y = y(r,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ H(r,t) \end{pmatrix} \quad (5.3)$$



bulunur. (4.8) baz vektöründe (3.19), (3.20), (3.26) ve (3.27) notasyonları yardımı ile aşağıdaki ifadeler bulunabilir,

$$- k_n = k_{+n} > 0 \text{ için } X_n = X_{+n} = x_n + y_n ; RX_{+n} = k_{+n}(x_n + y_n)$$

$$- k_n = k_{-n} < 0 \text{ için } X_n = X_{-n} = x_n - y_n ; RX_{-n} = -k_{+n}(x_n - y_n)$$

$$- k_o = 0 \text{ için } X_o = \chi_\alpha ; R\chi_\alpha = 0$$

$$- k_o = 0 \text{ için } X_o = y_\beta ; Ry_\beta = 0$$

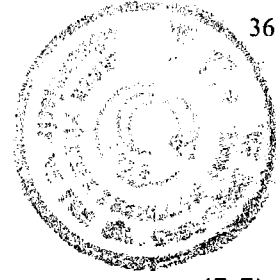
(4.8) denkleminde bazı küçük düzenlemeler yardımı ile,

$$\langle v, x_n \rangle = k_n \langle y, y_n \rangle ; \langle w, y_n \rangle = k_n \langle x, x_n \rangle ; \langle v, \chi_\alpha \rangle = 0 ; \langle w, y_\beta \rangle = 0 \quad (5.4)$$

ifadelerine ulaşılır. Burada $n, \alpha, \beta = 1, 2, \dots$ ve pozitif öz vektörler için k_{+n} yerine direkt olarak $k_n > 0$ ifadesi kullanılmıştır. (5.4) denklemi Maxwell denklemlerinin baz üzerine izdüşümünü formal olarak tanımlar.

5.1. Genel Yaklaşım Denklemi

(5.4) denklemlerinden yola çıkarak basit cebrik işlemlerin ve spektral katsayıların dikkate alınması ile aşağıdaki gibi sonsuz sayıda diferansiyel denkleme ulaşılmaktadır,



$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} e_n + ik_n h_n &= -j_n^e(t) - \frac{1}{V} \int_V (j_\sigma(E, H) + \partial_t P(E)) \cdot E_n^* dV \\
 \frac{d}{dt} h_n + ik_n e_n &= -j_n^h(t) - \frac{\mu_0}{V} \int_V \partial_t M(H) \cdot H_n^* dV \\
 \frac{d}{dt} a_\alpha &= -i_\alpha^e(t) + \frac{1}{V} \int_V (j_\sigma(E, H) + \partial_t P(E)) \cdot \nabla \Phi_\alpha^* dV \\
 \frac{d}{dt} b_\beta &= -i_\beta^h(t) + \frac{\mu_0}{V} \int_V \partial_t M(H) \cdot \nabla \Psi_\beta^* dV
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

burada $n, \alpha, \beta = 1, 2, \dots$ k_n 'lerin R operatörünün pozitif öz değerleri olduğunu açıkça göstermektedir. (4.7) diferansiyel denkleminin sağ tarafı, verilen kaynak fonksiyonlarına bağlı olarak (4.6) zaman bağımlı katsayıların hesaplanabilmesine imkan tanır. Bu hesaplamaların yapılması esnasında aşağıdaki gibi bir takım özelliklere dikkat edilmesi uygun olacaktır,

- (5.5) diferansiyel denklemlerinin hesaplanmasında yalnızca $\vec{P}(\vec{E}), \vec{M}(\vec{H}), \vec{j}_\sigma(\vec{E}, \vec{H})$ fonksiyonlarının bilindiği varsayılmıştır,
- (5.5) diferansiyel denklem sistemi R operatörünün öz vektörlerinin kullanılması elde edilen tam olarak Maxwell denklemleri karşılığı değildir,
- (5.5) gösterilimi (1.7) denklemi ile verilen gösterilimin tam karşılığıdır,

Bu açıklamalara ek olarak spektral katsayılar için hesaplanılmak istenilen elektromagnetik alan bileşenleri başlangıç koşullarını da sağlamalıdır. Buna göre şu ifadelere ulaşılabacaktır,

$$e_n(0) = e_n^0, \quad h_n(0) = h_n^0, \quad a_\alpha(0) = a_\alpha^0, \quad b_\beta = b_\beta^0 \tag{5.6}$$

burada (4.5) denkleminin kullanılması ile (5.6) denkleminin sağ tarafı özelleştirilebilir. Böylece, (5.5) başlangıç koşulları ve (5.6) diferansiyel denklemleri kullanılarak iyi bilinen *Cauchy* problemine ulaşılmış olacaktır.



6. ZAMAN DOMENİNDE ANALİTİK ÇÖZÜM

Elektrik $D(r,t)$ ve magnetik $B(r,t)$ akış yoğunluklarının seriler yardımı ile açılımı $E(r,t)$ ve $H(r,t)$ için daha önce bulunduğunu gibi düzenlenecek olursa,

$$\begin{aligned} D(r,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{e}_n(t) E_n(r) - \sum_{\alpha=1}^{\infty} \bar{a}_\alpha(t) \nabla \Phi_\alpha(r) \\ B(r,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{h}_n(t) H_n(r) - \sum_{\beta=1}^{\infty} \bar{b}_\beta(t) \nabla \Psi_\beta(r) \end{aligned} \quad (6.1)$$

bilinmeyen zaman bağımlı katsayılar $\bar{e}_n, \bar{h}_n, \bar{a}_\alpha, \bar{b}_\beta$ (4.4) denkleminde benzer bir şekilde kolayca ifade edilebilir. Ayrıca $D(r,t)$ ve $B(r,t)$ ifadeleri bünye bağıntıları yardımı ile,

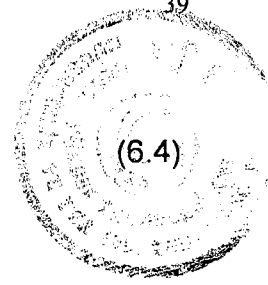
$$\begin{aligned} D(r,t) &= \varepsilon_o \varepsilon(t) E_n(r,t) \\ B(r,t) &= \mu_o \mu(t) H_n(r,t) \end{aligned} \quad (6.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\varepsilon(t)$ ve $\mu(t)$ ifadeleri eğer varsa ε ve μ ifadelerinin zamana bağımlılığını göstermektedir. Yine $\bar{e}_n, \bar{h}_n, \bar{a}_\alpha, \bar{b}_\beta$ katsayıları için şu ifadeler geçerli olacaktır,

$$\begin{aligned} \bar{e}_n &= \varepsilon_o \varepsilon(t) e_n(t) \\ \bar{a}_\alpha &= \varepsilon_o \varepsilon(t) a_\alpha(t) \\ \bar{h}_n &= \mu_o \mu(t) h_n(t) \\ \bar{b}_\beta &= \mu_o \mu(t) b_\beta(t) \end{aligned} \quad (6.3)$$

(5.5) diferansiyel denklem sistemleri ve bünye bağıntıları lineer homojen ve zamanla değişen ortamlar için yeniden düzenlenecek olursa,

$$\begin{aligned}
P &= \varepsilon_o \chi_e(t) E \\
M &= \chi_m(t) H \\
J_\sigma &= \sigma(t) E
\end{aligned}$$



burada $\chi_e(t), \chi_m(t), \sigma(t)$ ifadeleri zamana göre integre edilebilir (dağıtıcı olmayan ortamlar) veya Voltera tipi zaman integral operatörleri (dağıtıcı ortam) formunda olabilirler. (6.4) denkleminin (5.5) denkleminde yerine konulması ile hacim integralleri ortonormalizasyon koşulları nedeni ile ihmal edilerek yalnızca basit bağımsız Cauchy problemi elde edilir. Irrotasyonel modların herbiri için zaman bağımlı katsayıları $e_n(t)$ ve $h_n(t)$ bir çifti aşağıdaki gibi Cauchy probleminin çözümünü sağlar,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\varepsilon e_n) + \nu e_n + ik_n h_n &= -j_n^e(t) & e_n(0) &= e_n^0 \\
\frac{d}{dt}(\mu h_n) + ik_n e_n &= -j_n^h(t) & h_n(0) &= h_n^0
\end{aligned} \quad (6.5)$$

burada ($n=1,2,3,\dots$) indisi modları tanımlar ve parametrik olarak değişir. (6.5) denkleminde $k_n \neq 0$ değerleri R operatörünün rotasyonel modlara karşılık gelen öz değerleridir. (6.5) diferansiyel denkleminin ortamın zamana bağlı elektromagnetik parametrelerini kapsar. Buna göre ortamın elektromagnetik parametreleri ve (6.5) diferansiyel denklemindeki $\chi_e(t), \chi_m(t), \sigma(t)$ katsayıları arasında şöyle bir ilişki tanımlanabilir,

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= 1 + \chi_e(t) = \varepsilon(t) \\
\mu &= 1 + \chi_m(t) = \mu(t) \\
\nu &= \sigma(t) / \varepsilon_n = \nu(t)
\end{aligned} \quad (6.6)$$

Buna göre, irrotasyonel modlar için zaman bağımlı katsayılar aşağıdaki gibi diferansiyel denklemler ile elektrik ve magnetik ifadeler için sırası ile şu şekilde ifade edilebilirler,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varepsilon a_\alpha) + \nu a_\alpha &= -i_\alpha^e(t) & ; & \quad a_\alpha(0) = a_\alpha^0 & ; & \quad \alpha = 1,2,3,\dots \\ \frac{d}{dt}(\mu b_\beta) &= -i_\beta^h(t) & ; & \quad b_\beta(0) = b_\beta^0 & ; & \quad \beta = 1,2,3,\dots \end{aligned} \quad (6.7)$$

(6.5) ve (6.7) denklemlerinden lineer homojen bir ortamda irrotasyonel ve rotasyonel kavite modlarının her birinin bireysel olarak varolduğu sonucu fiziksel manada anlaşılabilir. Bu problemin çözülmesi ile $t=0$ anından itibaren uygulanan kaynak fonksiyonlarına bağlı olarak istenilen her t anında elektromagnetik alan bileşenlerinin değişiminin izlenmesi mümkün olabilmektedir.

6.1. Irrotasyonel Modlar

$\mu(t) > 0$, $\varepsilon(t) > 0$ ve $[\sigma(t)/\varepsilon(t)] \geq 0$ şartları altında zamana göre integre edilebilir fonksiyonlar olsunlar. Buradan hareketle (6.7) denklemlerinin çözülmesi ile,

$$\mu_\alpha^{-1} \bar{b}_\beta(t) = \mu(t) b_\beta(t) = \mu(0) b_\beta^0 - \int_0^t i_\beta^h(t') dt' \quad (6.8)$$

(6.9)

denklemlerine ulaşılmaktadır. İlk olarak kaynak fonksiyonlarının olmadığını varsayalım. Yani; $i_\alpha^e = 0$ ve $i_\beta^h = 0$ olsun. (6.8) denkleminde magnetik akı yoğunluğunun, herhangi zamanla değişen bir ortamda statik bir alan durumundadır. Elektrik akı yoğunluğu (6.9) denklemine göre başlangıç durumundan itibaren eksponansiyel olarak sıfır değerine düşmektedir. (6.8) ve (6.9) denklemlerinin birlikte çözülmesi sonucu, kaynak fonksiyonlarının irrotasyonel modların zaman değişimine uyumunu

sağladığı anlaşılmaktadır.

6.2. Selonoidal Modlar

$\sigma = \text{sabit}$ ve $\mu(t) > 0$, $[1/\varepsilon(t)] > 0$ şartları altında zamana göre integre edilebilir fonksiyonlar olsunlar. Bununla beraber,

$$\sqrt{\frac{\mu(t)}{\varepsilon(t)}} = \eta = \text{sabit} \quad (6.10)$$

ek şartı ile birlikte, selonoidal modlar için Cauchy problemi analitik olarak çözülebilmesi mümkün olacaktır. Bu çözüm temel fonksiyonlar aracılığı ile açıklanabilir. Yukarıda açıklanan çözümün bulunması için öncelikle aşağıdaki gibi notasyon sadeleştirilmesine gidilsin,

$$\tilde{e}(t) = \varepsilon(t)e_n(t) ; \tilde{h}(t) = \eta\varepsilon(t)h_n(t) ; 2\gamma = \frac{\eta\sigma}{\varepsilon_0} \quad (6.11)$$

(6.5) denkleminin kullanılması ile bulunan diferansiyel denklem sistemi matrisel formda aşağıdaki gibi gösterilebilir,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{h} \end{pmatrix} + \frac{1}{\eta\varepsilon} \begin{pmatrix} 2\gamma & ik \\ ik & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{h} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\eta\varepsilon} \begin{pmatrix} \eta\varepsilon j^e \\ \varepsilon j^h \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

(6.12) denklemi üzerinde şu şekilde bir değişken tanımlanarak,

$$\tau(t) = \frac{1}{\eta} \int_0^t \frac{dt''}{\varepsilon(t'')} \quad (6.13)$$

(6.12) denklemi aşağıdaki gibi yeni bir görünüme sahip olacaktır,

$$Y(\tau) = \begin{pmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{h} \end{pmatrix} ; Q = \begin{pmatrix} 2\gamma & ik \\ ik & 0 \end{pmatrix} ; J = \begin{pmatrix} \eta\varepsilon j^e \\ \varepsilon j^h \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

burada $k = k_n > 0$ ifadeleri R operatörünün öz değerleridir. (6.14)

gösteriliminden yola çıkarak (6.12) denklem sistemi,

$$\frac{d}{d\tau} Y + QY = -J ; Y(0) = \begin{pmatrix} \varepsilon(0)e_n^0 \\ \eta\varepsilon(0)h_n^0 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

formuna dönüşecektir. Bu denklemden (6.9) denkleminde olduğu gibi $Y(t)$ bilinmeyi,

$$Y(t) = e^{-\tau(t)Q} \left[Y(0) - \int_0^t e^{\tau(t')Q} J(t') \frac{dt'}{\eta\varepsilon(t')} \right] \quad (6.16)$$

ifadesi yardımı ile bulunabilir. (6.16) çözümünün (6.9) çözümünden en önemli farkı Q ifadesinin matrisel bir yapıya sahip olmasından dolayı $e^{-\tau(t)Q}$ eksponansiyel formunu karşılaşılan hesaplamaların yapılabilmesi için özel bir takım yöntemler kullanılmasının gerekliliğidir. Bu amaçla Q matrisinin karakteristik denklemini hesaplayalım,

$$\det(\lambda I - Q) = \lambda^2 - 2\gamma\lambda + k^2 = 0 \quad (6.17)$$

burada I , Q matrisi ile aynı dereceden birim matristir. (6.17) denklemden,

$$\lambda_1 = \gamma - iw, \lambda_2 = \gamma + iw \quad (6.18)$$

şeklinde iki öz değer elde edilir. Burada $w = \sqrt{k^2 - \gamma^2}$, $\gamma = \frac{\eta\sigma}{2\varepsilon_n}$, $\rho = \frac{\sigma}{2\varepsilon_n\varepsilon}$

Bu öz değerler yardımı ile, herhangi bir F fonksiyonunu aşağıdaki gibi ifade etmek mümkün olabilecektir [Shigenori,1990],

$$F(\theta A) = \sum_{r=1}^m F(\theta\lambda_r) K(\lambda_r) ; K(\lambda_r) = \prod_{s=1, s \neq r}^m (\lambda_s I - A)(\lambda_s - \lambda_r) \quad (6.19)$$

tüm bu işlemlerin doğru olup olmadığını anlamak için,

$$\sum_{r=1}^m K(\lambda_r) = 1$$

(6.20)

denklemini kullanılabilir. Tüm bu anlatılanlar (6.16) denklemindeki $e^{-\tau(t)Q}$ terimi üzerine uygulanarak,

$$e^{-\tau(t)Q} = \frac{k}{w} e^{-\gamma\tau(t)} \begin{pmatrix} \cos(w\tau(t) + \delta) & -i \sin w\tau(t) \\ -i \sin w\tau(t) & \cos(w\tau(t) - \delta) \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

elde edilir. (6.16) ve (6.21) denklemlerinin birlikte ele alınması ile zamana bağlı katsayılar aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\rho t} \int_0^t e^{\rho t'} j_n^e(t') \cos(w_n t' - \delta_n) dt' \\ v(t) &= i e^{-\rho t} \int_0^t e^{\rho t'} j_n^e(t') \sin w_n t' dt' \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{pmatrix} e_n^{kaynak}(t) \\ \eta h_n^{kaynak}(t) \end{pmatrix} = \frac{\bar{w}_n^2}{\epsilon w_n^2} \begin{pmatrix} \cos(w_n t + \delta_n) & -i \sin w_n t \\ -i \sin w_n t & \cos(w_n t + \delta_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

burada $\delta_n = \arctan(\rho / w_n)$, $w_n = \sqrt{\bar{w}_n^2 - \rho^2}$, $\bar{w}_n = \frac{k_n}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, olup (6.16)

denkleminde dikkat edilirse kaynak fonksiyonlarının olmaması durumunda $Y(t) = e^{-\tau(t)} Y(0)$ şeklinde bir çözümün varlığı görülecektir. $Y(0)$ ifadesi (6.15) denkleminde gösterildiği gibi başlangıç koşullarını tanımlar. Başlangıç koşullarının da dikkate alınması ile elektrik ve magnetik alan katsayıların çözümleri $e_n(t) = e_n^{serbest}(t) + e_n^{kaynak}(t)$, $h_n(t) = h_n^{serbest}(t) + h_n^{kaynak}(t)$ şeklinde olacaktır.

7. KAVİTE İÇİN SAYISAL BİR ÖRNEK

x, y, z Kartezyen koordinatlarına göre tanımlanmış $a \times b \times d$ boyutlarında dikdörtgen bir kavite düşünölsün. Kartezyen koordinatları sisteminde,

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq d \quad (7.1)$$

şeklinde bir sınırlandırma varsayölsün. Fiziksel olarak kavite yüzeyi mükemmel olarak ele alönsün.

7.1. R Operatörünün Selonoidal Öz Vektörleri

7.1.1. Dirichlet Öz Değer Problemi

(3.29) notasyonu göz önüne alınarak, Laplacian için Dirichlet vektör sınır değer problemi aşğıdaki gibi bir yapıya sahip olacaktır,

$$(\Delta + k_n^2 \epsilon_n \mu_n) \tilde{E}_n^{(1)} = 0, \text{div} \tilde{E}_n^{(1)}(r) = 0, [N \times \tilde{E}_n^{(1)}]_s = 0 \quad (7.2)$$

burada $\tilde{E}_n^{(1)}(r) = \tilde{E}_n^{(1)*}(r) = E_n^{(1)}(r)$ reel bir fonksiyondur. $k_n > 0$ için,

$$H_n^{(1)} = i \tilde{H}_n^{(1)}, \tilde{H}_n^{(1)} = \frac{-\text{rot} \tilde{E}_n^{(1)}}{k_n \mu_n}, (N \cdot \tilde{H}_n^{(1)})_s = 0 \quad (7.3)$$

(7.2) probleminde $\text{div} \tilde{E}_n^{(1)}(r) = 0$ olması nedeni ile $\tilde{E}_n^{(1)}$ vektörü kendi $\Pi_n^{(1)}$ skaler potansiyeli yardımı ile açıklanabilir,

$$\tilde{E}_n^{(1)}(r) = \text{rot} \tilde{e}_z \Pi_n^{(1)}(r) \quad (7.4)$$

Böylece Helmutz denklemi skaler potansiyel aracılığı ile şu şekilde ifade edilebilir,

$$(\Delta + k_n^2 \epsilon_o \mu_o) \tilde{E}_n^{(1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\Delta + k_n^2 \epsilon_o \mu_o) \Pi_n^{(1)} = 0 \quad (7.5)$$

(7.5) denklemi değişkenlerin dönüşümü metodu yardımı ile kolayca çözülebilir. Bu işlem süreci esnasında aşağıdaki sınır koşullarının kullanılması gerekmektedir,

$$\left[N \times \tilde{E}_n^{(1)} \right]_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(N \cdot \tilde{H}_n^{(1)} \right)_S = 0 \quad (7.6)$$

burada S yüzeyi (7.1) denkleminde ifade edildiği gibi dikdörtgen kutu şeklinde bir kavitedir. Sınır koşullarının ve değişkenlerin değişimi metodunun kullanılması ile (7.5) diferansiyel denklemi çözümü,

$$\Pi_n^{(1)} = A \cos\left(\frac{x\pi p}{a}\right) \cos\left(\frac{y\pi q}{b}\right) \sin\left(\frac{z\pi s}{d}\right) \quad (7.7)$$

p, q, s ve A değerleri (4.5) denkleminin homojen olması nedeni ile herhangi sabitler olabilirler. (7.7) formundaki $\Pi_n^{(1)}$ ifadesi (7.5) denkleminin içine konularak R operatörünün pozitif öz değerleri hesaplanabilir,

$$k_n = \sqrt{\left[\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2 + \left(\frac{s}{d}\right)^2\right] (\epsilon_o \mu_o)^{-1}} \quad (7.8)$$

(7.7) ve (7.8) denklemleri iyice incelenirse n indisinin p, q, s indisleri ile doğrudan ilişkili olduğu görülecektir. Bu nedenle,

$$\Pi_n^{(1)} \equiv \Pi_{pqs}^{(1)} \quad \text{ve} \quad k_n = k_{pqs} \quad (7.9)$$

formunda bir ifade kullanmak uygun olacaktır. (7.3) , (7.4) ve (7.7) denklemlerinin kullanılması ile, selonoidal öz vektörlerin tüm bileşenleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir,

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{x p q s}^{(1)} &= -A \left(\frac{\pi q}{b} \right) \cos \left(\frac{x \pi p}{a} \right) \cos \left(\frac{y \pi q}{b} \right) \sin \left(\frac{z \pi s}{d} \right) \\ \tilde{E}_{y p q s}^{(1)} &= A \left(\frac{\pi p}{b} \right) \sin \left(\frac{x \pi p}{a} \right) \cos \left(\frac{y \pi q}{b} \right) \sin \left(\frac{z \pi s}{d} \right) \\ \tilde{E}_{z p q s}^{(1)} &= 0\end{aligned}\quad (7.10)$$

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{x p q s}^{(1)} &= \left(\frac{A}{\mu_0 k_{p q s}} \right) \left(\frac{\pi p}{a} \right) \left(\frac{\pi s}{d} \right) \sin \left(\frac{x \pi p}{a} \right) \cos \left(\frac{y \pi q}{b} \right) \cos \left(\frac{z \pi s}{d} \right) \\ \tilde{H}_{y p q s}^{(1)} &= \left(\frac{A}{\mu_0 k_{p q s}} \right) \left(\frac{\pi p}{a} \right) \left(\frac{\pi s}{d} \right) \cos \left(\frac{x \pi p}{a} \right) \cos \left(\frac{y \pi q}{b} \right) \cos \left(\frac{z \pi s}{d} \right) \\ \tilde{H}_{z p q s}^{(1)} &= - \left(\frac{A}{\mu_0 k_{p q s}} \right) \pi^2 \left[\left(\frac{p}{a} \right)^2 + \left(\frac{q}{b} \right)^2 \right] \cos \left(\frac{x \pi p}{a} \right) \cos \left(\frac{y \pi q}{b} \right) \cos \left(\frac{z \pi s}{d} \right)\end{aligned}\quad (7.11)$$

burada A sabiti normalizasyon koşulu yardımı ile,

$$\frac{\epsilon_0}{V} \int_V \tilde{E}_n^{(1)} \tilde{E}_n^{(1)*} dV = 1 \quad (7.12)$$

denklemini kullanılarak bulunabilir. Burada yapılan cebrik işlemler sonucu,

$$A = \frac{2\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\epsilon_0 \left[\left(\frac{p}{a} \right)^2 + \left(\frac{q}{b} \right)^2 \right]}} = A_{pq} \quad (7.13)$$

(7.13) denklemini $p = 0,1,2,\dots$ ve $q = 0,1,2,\dots$ değerlerini alabileceğini ama aynı zamanda p ve q değerlerinin 0 olamayacağını göstermektedir. Yine $s = 1,2,3,\dots$ değerlerini alabilecektir. İkinci normalizasyon koşulunun kullanılması ile

$$\frac{\mu_o}{V} \int_V \tilde{H}_n^{(1)} \tilde{H}_n^{(1)*} dV = 1 \quad (7.14)$$

$\tilde{H}_n^{(1)}$ magnetik alan vektörü içinde A katsayısı , (7.13) ifadesi şeklinde bulunacaktır.

7.1.2. Neumann Öz Değer Problemi

(3.29) notasyonu göz önüne alınarak, Laplacian için Neumann vektör sınır değer problemi aşağıdaki gibi bir yapıya sahip olacaktır,

$$(\Delta + k_n^2 \epsilon_o \mu_o) \tilde{H}_n^{(2)} = 0, \quad \text{div} \tilde{H}_n^{(2)}(r) = 0, \quad (N \cdot \tilde{H}_n^{(2)})_S = 0 \quad (7.15)$$

$$E_n^{(2)}(r) = i \tilde{E}_n^{(2)}(r), \quad \tilde{E}_n^{(2)} = \frac{\text{rot} \tilde{H}_n^{(2)}}{k_n \epsilon_o}, \quad [N \times \tilde{E}_n^{(2)}]_S = 0 \quad (7.16)$$

(7.15) probleminde $\text{div} \tilde{H}_n^{(2)}(r) = 0$ olması nedeni ile $\tilde{H}_n^{(2)}$ vektörü kendi $\Pi_n^{(2)}$ skaler potansiyeli yardımı ile açıklanabilir,

$$\tilde{H}_n^{(2)}(r) = \text{rot} \tilde{e}_z \Pi_n^{(2)}(r) \quad (7.17)$$

Böylece Helmutz denklemi skaler potansiyel aracılığı ile şu şekilde ifade edilebilir,

$$(\Delta + k_n^2 \epsilon_o \mu_o) \tilde{H}_n^{(2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\Delta + k_n^2 \epsilon_o \mu_o) \Pi_n^{(2)} = 0 \quad (7.18)$$

(7.18) denklemi değişkenlerin dönüşümü metodu yardımı ile kolayca çözülebilir. Bu işlem süreci esnasında aşağıdaki sınır koşullarının kullanılması gerekmektedir,

$$[N \times \tilde{H}_n^{(2)}]_S = 0 \quad \Rightarrow \quad (N \cdot \tilde{E}_n^{(2)})_S = 0 \quad (7.19)$$

burada S yüzeyi (4.1) denkleminde ifade edildiği gibi dikdörtgen kutu şeklinde bir kavitedir. Sınır koşullarının ve değişkenlerin değişimi metodunun kullanılması ile (7.18) diferansiyel denklemi çözümü,

$$\Pi_n^{(2)} = B \sin\left(\frac{x\pi p}{a}\right) \sin\left(\frac{y\pi q}{b}\right) \cos\left(\frac{z\pi s}{d}\right) . \quad (7.20)$$

burada p, q, s ve A değerleri (7.18) denkleminin homojen olması nedeni ile herhangi sabitler olabilirler. (7.20) formundaki $\Pi_n^{(1)}$ ifadesi (7.18) denkleminin içine konularak R operatörünün pozitif öz değerleri hesaplanabilir,

$$k_n = \pi \sqrt{\left[\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2 + \left(\frac{s}{d}\right)^2\right]} (\epsilon_o \mu_o)^{-1} \quad (7.21)$$

(7.20) ve (7.21) denklemleri iyice incelenirse n indisinin p, q, s indisleri ile direkt ilişkili olduğu görülecektir. Bu nedenle,

$$\Pi_n^{(2)} \equiv \Pi_{pqs}^{(2)} \quad \text{ve} \quad k_n = k_{pqs} \quad (7.22)$$

formunda bir ifade kullanmak uygun olacaktır. (7.16) ve (7.17) denklemlerinin ilişkilendirilmesi sonucu,

$$\tilde{E}_n^{(2)} = \frac{\text{rot} \tilde{H}_n^{(2)}(r)}{k_n \epsilon_o} = \text{rot} \text{rot} \frac{\tilde{e}_z \Pi_n^{(2)}(r)}{k_n \epsilon_o} \quad (7.23)$$

denklemleri bulunacaktır. (7.17), (7.20) ve (7.21) denklemlerinin çözülmesi ile,

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{x p q s}^{(2)} &= -\left(\frac{B}{\varepsilon_o k_{p q s}}\right)\left(\frac{\pi p}{a}\right)\left(\frac{\pi s}{d}\right)\cos\left(\frac{x \pi p}{a}\right)\sin\left(\frac{y \pi q}{b}\right)\sin\left(\frac{z \pi s}{d}\right) \\ \tilde{E}_{y p q s}^{(2)} &= -\left(\frac{B}{\varepsilon_o k_{p q s}}\right)\left(\frac{\pi q}{b}\right)\left(\frac{\pi s}{d}\right)\sin\left(\frac{x \pi p}{a}\right)\cos\left(\frac{y \pi q}{b}\right)\sin\left(\frac{z \pi s}{d}\right) \\ \tilde{E}_{z p q s}^{(2)} &= -\left(\frac{B}{\varepsilon_o k_{p q s}}\right)\pi^2\left[\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2\right]\sin\left(\frac{x \pi p}{a}\right)\sin\left(\frac{y \pi q}{b}\right)\cos\left(\frac{z \pi s}{d}\right)\end{aligned}$$

(7.24)

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{x p q s}^{(2)} &= B\left(\frac{\pi q}{b}\right)\sin\left(\frac{x \pi p}{a}\right)\cos\left(\frac{y \pi q}{b}\right)\cos\left(\frac{z \pi s}{d}\right) \\ \tilde{H}_{y p q s}^{(2)} &= -B\left(\frac{\pi p}{a}\right)\cos\left(\frac{x \pi p}{a}\right)\sin\left(\frac{y \pi q}{b}\right)\cos\left(\frac{z \pi s}{d}\right) \\ \tilde{H}_{z p q s}^{(2)} &= 0\end{aligned}\quad (7.25)$$

burada B sabiti normalizasyon koşulu yardımı ile,

$$\frac{\mu_o}{V} \int_V \tilde{H}_n^{(2)} \tilde{H}_n^{(2)*} dV = 1 \quad (7.26)$$

denklemini kullanılarak bulunabilir. Burada yapılan cebrik işlemler sonucu,

$$B = \frac{2\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\mu_o \left[\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2 \right]}} = B_{pq} \quad (7.27)$$

bu formül $p, q = 1, 2, \dots$ ve $s = 0, 1, 2, \dots$ değerlerini alabileceğini göstermektedir.

$\tilde{E}_{p q s}^{(1)}(r)$, $\tilde{E}_{p q s}^{(2)}(r)$, $\tilde{H}_{p q s}^{(1)}(r)$ ve $\tilde{H}_{p q s}^{(2)}(r)$ vektörlerinin ortogonalliği kavite içerisindeki her nokta için aşağıdaki gibi kolayca gösterilebilir,

$$\tilde{E}_{p q s}^{(1)}(r) E_{p q s}^{(2)} = 0, \quad H_{p q s}^{(1)}(r) H_{p q s}^{(2)} = 0 \quad (7.28)$$

7.2. R Operatörünün İrrotasyonel Öz Vektörleri

R operatörünün $k_n = 0$ öz değeri sonsuz sayıda dejenerasyona sahiptir. $k_n = 0$ öz değerine karşılık düşen irrotasyonel öz vektörler olarak iki adet sayılabilir küme vardır. Bu öz vektörler kendilerinin skaler potansiyelleri yardımı ile şu şekilde açıklanabilir,

$$\chi_\alpha = \begin{pmatrix} -\nabla\Phi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ve } y_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ -\nabla\Psi_\beta \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

En genel halde S yüzeyinin herhangi bir formu için, Φ_α ve Ψ_β potansiyelleri Laplacian için sınır değer probleminin öz çözümleri olarak bulunabilir. Burada S yüzeyi dikdörtgen kutu şeklinde bir kavite için hesaplamalar yapılmıştır.

7.2.1. Dirichlet Öz Değer Problemi

En genel halde, $\Phi_\alpha(r)$ potansiyeli aşağıda ki gibi herhangi bir sınır değer probleminin öz fonksiyonları olabilir,

$$(\Delta + \chi_\alpha^2)\Phi_\alpha(r) = 0, \quad \Phi_\alpha(r)|_S = 0 \quad (7.30)$$

(7.30) denklemini $\Phi_\alpha(r)$ için şöyle bir çözüm gerektirir,

$$\Phi_\alpha(r) = \tilde{A} \sin\left(\frac{x\pi p}{a}\right) \sin\left(\frac{y\pi q}{b}\right) \sin\left(\frac{z\pi s}{d}\right) = \Phi_{pqs}(r) \quad (7.31)$$

burada $p, q, s = 1, 2, 3, \dots$ ve \tilde{A} çözümlenmesi gereken bir sabit ifadelerdir. \tilde{A} sabitinin çözülebilmesi için $\Phi_\alpha(r)$ potansiyelinin normalizasyon koşulunu sağlaması gerektiğinden,

$$\langle \chi_\alpha, \chi_\alpha \rangle = \frac{\epsilon_0}{V} \int_V (\nabla \Phi_\alpha \nabla \Phi_\alpha^*) dV = 1 \Rightarrow \frac{\chi_\alpha^2 \epsilon_0}{V} \int_V |\Phi_\alpha|^2 dV = 1 \quad (7.32)$$

bu koşul yardımı ile,

$$\tilde{A} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\epsilon_0 \left[\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2 + \left(\frac{s}{d}\right)^2 \right]}} \equiv \tilde{A}_{pq\bar{s}} \quad (7.33)$$

(7.31) denklemi içerisinde (7.30) denklemi konularak,

$$\chi_\alpha^2 = \pi^2 \left[\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2 + \left(\frac{s}{d}\right)^2 \right] \quad (7.34)$$

bulunabilir. $\Phi_\alpha(r)$ potansiyeli tarafından üretilen E vektörünün tüm elemanları hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{x\bar{p}q\bar{s}}^{(\Phi)} &= -\frac{\partial}{\partial z} \Phi_{pq\bar{s}}(r) = \tilde{A}_{pq\bar{s}} \left(\frac{\pi p}{a}\right) \cos\left(\frac{x\pi p}{a}\right) \sin\left(\frac{y\pi q}{b}\right) \sin\left(\frac{z\pi s}{d}\right) \\ \tilde{E}_{y\bar{p}q\bar{s}}^{(\Phi)} &= -\frac{\partial}{\partial z} \Phi_{pq\bar{s}}(r) = \tilde{A}_{pq\bar{s}} \left(\frac{\pi q}{b}\right) \sin\left(\frac{x\pi p}{a}\right) \cos\left(\frac{y\pi q}{b}\right) \sin\left(\frac{z\pi s}{d}\right) \\ \tilde{E}_{z\bar{p}q\bar{s}}^{(\Phi)} &= -\frac{\partial}{\partial z} \Phi_{pq\bar{s}}(r) = -\tilde{A}_{pq\bar{s}} \left(\frac{\pi s}{d}\right) \sin\left(\frac{x\pi p}{a}\right) \sin\left(\frac{y\pi q}{b}\right) \cos\left(\frac{z\pi s}{d}\right) \end{aligned} \quad (7.35)$$

$\tilde{E}_{pq\bar{s}}^{(1)}(r)$ ve $\tilde{E}_{pq\bar{s}}^{(2)}(r)$ selonoidal vektörlerine eşlik eden bir $\tilde{E}_{pq\bar{s}}^{(\Phi)}(r)$ irrotasyonel vektörü düşünölsün. Bu durumda söz konusu vektör çifti dikdörtgen kutu şeklindeki kavite için aşğıdaki gibi bir ortogonallik tanımlanabilir,

$$\tilde{E}_{pq\bar{s}}^{(1)}(r) \tilde{E}_{pq\bar{s}}^{(\Phi)}(r) = 0, \quad \tilde{E}_{pq\bar{s}}^{(2)}(r) \tilde{E}_{pq\bar{s}}^{(\Phi)}(r) = 0 \quad (7.36)$$

(7.28) denklemi dikkate alınarak, $\tilde{E}_{pq_s}^{(1)}(r), \tilde{E}_{pq_s}^{(2)}(r)$ selonoidal öz vektör çifti ve $\tilde{E}_{pq_s}^{(\Phi)}(r)$ irrotasyonel vektörü arasında ortak bir ortogonal küme bulmak mümkün olacaktır,

$$\tilde{E}_{pq_s}^{(1)}, \tilde{E}_{pq_s}^{(2)}, \tilde{E}_{pq_s}^{(\Phi)} \quad (7.37)$$

burada p, q, s değerleri ile tüm vektörler dikkate alınmış olmaktadır.

7.2.2. Neumann Öz Değer Problemi

En genel halde, $\Psi_\beta(r)$ potansiyeli Neumann sınır değer problemi için öz çözümdür,

$$(\Delta + \nu_\beta^2)\Psi_\beta(r) = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial N} \Psi_\beta(r) \right|_s = 0 \quad (7.38)$$

(7.38) denklemi için $\Psi_\beta(r)$ şöyle bir çözüm gerektirir,

$$\Psi_\beta(r) = \tilde{B} \cos\left(\frac{x\pi p}{a}\right) \cos\left(\frac{y\pi q}{b}\right) \cos\left(\frac{z\pi s}{d}\right) = \Psi_{pq_s}(r) \quad (7.39)$$

burada $p, q, s = 1, 2, 3, \dots$ ve \tilde{B} çözümleni gereken bir sabit ifadelerdir. \tilde{B} sabitinin çözülebilmesi için $\Psi_\beta(r)$ potansiyelinin normalizasyon koşulunu sağlaması gerektiğinden,

$$\langle y_\beta, y_\beta \rangle = \frac{\mu_o}{V} \int_V (\nabla \Psi_\beta \nabla \Psi_\beta^*) dV = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\nu_\beta^2 \mu_o}{V} \int_V |\Psi_\beta|^2 dV = 1 \quad (7.40)$$

bu koşul yardımı ile,

$$\tilde{B} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\mu_0 \left[\left(\frac{p}{a} \right)^2 + \left(\frac{q}{b} \right)^2 + \left(\frac{s}{d} \right)^2 \right]}} \equiv \tilde{B}_{pqs} \quad (7.41)$$

bulunabilir. $\Psi_\rho(r)$ potansiyeli tarafından üretilen H vektörünün tüm elemanları hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{xpbs}^{(\Phi)} &= -\frac{\partial}{\partial x} \Psi_{pqs}(r) = \tilde{B}_{pqs} \left(\frac{\pi p}{a} \right) \sin\left(\frac{x\pi p}{a} \right) \cos\left(\frac{y\pi q}{b} \right) \cos\left(\frac{z\pi s}{d} \right) \\ \tilde{H}_{ypqs}^{(\Phi)} &= -\frac{\partial}{\partial y} \Psi_{pqs}(r) = \tilde{B}_{pqs} \left(\frac{\pi q}{b} \right) \cos\left(\frac{x\pi p}{a} \right) \sin\left(\frac{y\pi q}{b} \right) \cos\left(\frac{z\pi s}{d} \right) \\ \tilde{H}_{zpbs}^{(\Phi)} &= -\frac{\partial}{\partial z} \Psi_{pqs}(r) = \tilde{B}_{pqs} \left(\frac{\pi s}{d} \right) \cos\left(\frac{x\pi p}{a} \right) \cos\left(\frac{y\pi q}{b} \right) \sin\left(\frac{z\pi s}{d} \right) \end{aligned} \quad (7.42)$$

$\tilde{H}_{pbs}^{(1)}(r)$ ve $\tilde{H}_{pqs}^{(2)}(r)$ selonoidal vektörlerine eşlik eden bir $\tilde{H}_{pqs}^{(\Phi)}(r)$ irrotasyonel vektörü düşünölsün. Söz konusu vektör çifti dikdörtgen kutu şeklindeki kavite için aşağıdaki gibi bir ortogonalite tanımlanabilir,

$$\tilde{H}_{pbs}^{(1)}(r) \tilde{H}_{pqs}^{(\Phi)}(r) = 0, \quad \tilde{H}_{pqs}^{(2)}(r) \tilde{H}_{pqs}^{(\Phi)}(r) = 0 \quad (7.43)$$

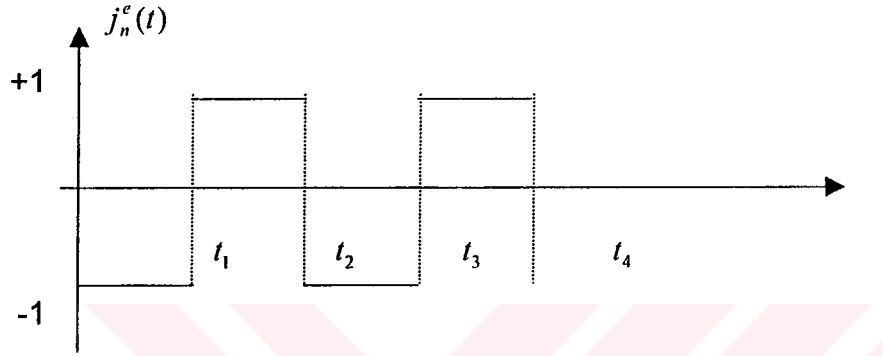
(7.28) denklemi dikkate alınarak, $\tilde{H}_{pbs}^{(1)}(r), \tilde{H}_{pqs}^{(2)}(r)$ selonoidal öz vektör çifti ve $\tilde{H}_{pqs}^{(\Phi)}(r)$ irrotasyonel vektörü arasında ortak bir ortogonal küme bulmak mümkün olacaktır.

$$\tilde{H}_{pbs}^{(1)}, \tilde{H}_{pqs}^{(2)}, \tilde{H}_{pqs}^{(\Phi)} \quad (7.44)$$

böylece p, q, s değerleri yardımı ile tüm vektörler dikkate alınmış olmaktadır.

7.3. Kaynak Fonksiyonları Hesaplamaları

Söz konusu dikdörtgen kutu şeklinde ki kaviteye yalnızca $j_n^e(t)$ elektriksel kaynak fonksiyonlarının uygulandığı varsayılmıştır. Yani magnetik kaynak fonksiyonlarının $j_n^h(t) = 0$ sıfır olduğu kabul edilmiştir. $j_n^e(t)$ elektriksel kaynak fonksiyonlarının zamana bağımlılığı aşağıdaki gibi verilmiştir.



Şekil 1. $j_n^e(t)$ elektriksel kaynak fonksiyonlarının zamana bağımlılığı.

Matematiksel olarak $j_n^e(t)$ elektriksel kaynak fonksiyonlarının zamana bağımlılığı aşağıdaki gibi verilebilir,

$$j_n^e(t) = \begin{cases} -1 & , 0 \leq t \leq t_1 \\ +1 & , t_1 \leq t \leq t_2 \\ -1 & , t_2 \leq t \leq t_3 \\ +1 & , t_3 \leq t \leq t_4 \end{cases} \quad (7.45)$$

burada

t_1 : değişim zamanı,

t_2, t_3 : periyodik işaret zamanı,

t_4 : ek zaman,

periyodik işaret t_{per} periyot değerine sahip olup t_1, t_2, t_3 ve t_4 zaman değerleri birden fazla periyot değerine sahip bir işaret için aşağıdaki gibi verilmiştir,

$$t_1 = t_s, t_2 = t_s + \left(N + \frac{1}{2}\right)t_{per}, t_3 = t_s + (N+1)t_{per}, t_4 = t_s + (N+1)t_{per} + t_{oo} \quad (7.46)$$

burada N değeri kaç tane periyodik fonksiyonun dikkate alındığını göstermektedir.

7.3.1. Selonoidal Öz Vektörlerin Zaman Katsayıları

(4.7) denkleminde tanımlandığı gibi $j_n^e(t)$ ifadesi genel olarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir,

$$j_n^e(t) = \frac{1}{V} \int_V J_e(r, t) E_n^*(r) dV \quad (7.47)$$

(7.47) denklemindeki $J_e(r, t)$ için değişkenlerin ayrılması metodu uygulanırsa,

$$J_e(r, t) = J_e(r)J_e(t) = J_e(z)J_e(t)\vec{e}_z \quad (7.48)$$

$$J_e(z) = I\delta(x - x_s)\delta(y - y_s)Z(z) \quad (7.49)$$

elde edilebilir. (7.48) ve (7.49) denklemleri, (7.47) denkleminde yerine konularak,

$$j_n^e(t) = \frac{1}{V} \int_V I\delta(x - x_s)\delta(y - y_s)Z(z)\vec{e}_z J_e(t) E_n^*(r) dV \quad (7.50)$$

elde edilir. İlk olarak "Dirichlet problemi" dikkate alınsın,

$$\vec{E}_n = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y \Rightarrow \vec{e}_z \vec{E}_n^* = 0 \Rightarrow j_n^e(t) = 0 \quad (7.51)$$

olacaktır. Yani Dirichlet problemi için çözüm mevcut değildir. İkinci olarak "Neumann problemi" dikkate alınsın,

$$\vec{E}_n = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + \vec{E}_z \vec{e}_z \Rightarrow \vec{e}_z \vec{E}_n^* = E_z^* \Rightarrow j_n^e(t) \neq 0 \quad (7.52)$$

(7.16) ve (7.24) denklemleri yardımı ile,

$$E_z^* = \left(\frac{B}{\epsilon_0 k_{pqz}} \right) \pi^2 \left[\left(\frac{p}{a} \right)^2 + \left(\frac{q}{b} \right)^2 \right] \sin \left(\frac{x\pi p}{a} \right) \sin \left(\frac{y\pi q}{b} \right) \cos \left(\frac{z\pi s}{d} \right) \quad (7.53)$$

bulunacaktır. (7.53) denklemini (7.50) denkleminde yerine konularak,

$$j_n^e(t) = \begin{cases} \frac{IB}{\pi s} \sin \left(\frac{x_s \pi p}{a} \right) \sin \left(\frac{y_s \pi q}{b} \right) \sin \left(\frac{l \pi s}{d} \right) J_e(t) & , s \neq 0 \\ \frac{IB}{d} \sin \left(\frac{x_s \pi p}{a} \right) \sin \left(\frac{y_s \pi q}{b} \right) l J_e(t) & , s = 0 \end{cases} \quad (7.54)$$

denklemini bulunabilir.

7.3.2. İrrotasyonel Öz Vektörlerin Zaman Katsayıları

(4.7) denkleminde tanımlandığı gibi $i_n^a(t)$ ifadesi genel olarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir,

$$i_n^e(t) = -\frac{1}{V} \int_V J_e(r,t) \nabla \Phi_n^* dV \quad (7.55)$$

(7.55) denklemindeki $J_e(r,t)$ için değişkenlerin ayrılması metodu uygulanırsa,

$$J_e(r,t) = J_e(r)J_e(t) = J_e(z)J_e(t)\vec{e}_z \quad (7.56)$$

$$J_e(z) = I\delta(x-x_s)\delta(y-y_s)Z(z) \quad (7.57)$$

elde edilir. (7.56) ve (7.57) denklemleri (7.55) denkleminde yerine konularak,

$$i_n^e(t) = \frac{1}{V} \int_V I\delta(x-x_s)\delta(y-y_s)Z(z)\vec{e}_z J_e(t)\nabla\Phi_n^*(r)dV \quad (7.58)$$

$$\vec{E}_n^{(\Phi)*} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z \Rightarrow \vec{e}_z\vec{E}_n^{(\Phi)*} = E_z^{(\Phi)*} \Rightarrow j_n^e(t) \neq 0 \quad (7.59)$$

elde edilecektir. (7.42) denkleminde,

$$\vec{E}_{zpq}^{(\Phi)*} = \nabla\Phi_n^* = -\frac{\partial}{\partial z}\Phi_{pqs}(r) = -\tilde{A}_{pqs}\left(\frac{\pi s}{d}\right)\sin\left(\frac{x\pi p}{a}\right)\sin\left(\frac{y\pi q}{b}\right)\cos\left(\frac{z\pi s}{d}\right) \quad (7.60)$$

elde edilir. (7.60) denklemi (7.58) içerisinde yerine konularak,

$$i_a^e(t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{A}_{pqs}I}{d}\sin\left(\frac{x_s\pi p}{a}\right)\sin\left(\frac{y_s\pi q}{b}\right)\sin\left\{\frac{l\pi s}{d}\right\}, s \neq 0 \\ 0, s = 0 \end{array} \right\} \quad (7.61)$$

bulunur. (7.61) ifadesi irrotasyonel öz vektörler için bağlı katsayıların direkt olarak bulunabilmesi için (6.9) denkleminde yararlanılarak,

$$a_a(t) = -\int_0^t i_a^e(t)dt \quad (7.62)$$

ifadesi bulunabilir. (7.61) denklemi (7.62) denkleminde yerine konularak,

$$a_\alpha(t) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\tilde{A}_{pq\alpha} I}{d} \sin\left(\frac{x_s \pi p}{a}\right) \sin\left(\frac{y_s \pi q}{b}\right) \sin\left\{\frac{l \pi s}{d}\right\} \int_0^t J_e(t) dt, s \neq 0 \\ 0, s = 0 \end{array} \right\} \quad (7.63)$$

bulunabilir.

7.3.3. Kaynak Fonksiyonları Hesaplamaları

Kaynak fonksiyonlarının zamana bağımlılığı şekil 1'de gösterildiği gibi olup ele alınan işaret 3 temel bölgeye ayrılarak incelenir. Yani,

$0 \leq t \leq t_1$, Değişim bölgesi (I)

$t_1 \leq t \leq t_3$, Peryodik bölge (II)

$t_3 \leq t \leq t_4$, Ek bölge (III)

Yukarıdaki gibi sınırlandırılan her bir bölge için ayrı ayrı $u(t)$ ve $v(t)$ hesaplamaları yapılarak (6.22) numaralı denklem yardımı ile kaynak fonksiyonlarının varolması durumunda geçerli zamana bağımlılığı gösteren zaman katsayıları hesaplanabilir. Bu zaman katsayıları yardımı ile (4.3) denklemi kullanılarak zaman domeninde elektrik ve magnetik alan ifadeleri analitik olarak elde edilebilecektir.

7.3.3.1. Değişim Bölgesi Hesaplamaları

(6.22) denklemde $u(t)$ ve $v(t)$ integralleri $(0-t_1)$ sınırları içerisinde $0 \leq t \leq t_1$ değişim bölgesinde çözümlerse;

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -\frac{1}{w_n} \sin(w_n t_s) \\ v_1(t) &= \frac{i}{w_n} (\cos(w_n t_s) - 1) \end{aligned} \quad (7.64)$$

formunda bulunur.

7.3.3.2. Peryodik Bölge Hesaplamaları

(6.22) denkleminde $u(t)$ ve $v(t)$ integralleri $(t_s - NT) - (t_s + (N+1)T)$ sınırları içerisinde $t_1 \leq t \leq t_3$ değişim bölgesinde çözümlürse,

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \frac{4}{w_n} \sum_{N=0}^M \sin\left(w_n\left(t_s + \left(N + \frac{1}{2}\right)T\right)\right) \sin^2\left(w_n \frac{T}{4}\right) \\ v_2(t) &= -\frac{4i}{w_n} \sum_{N=0}^M \cos\left(w_n\left(t_s + \left(N + \frac{1}{2}\right)T\right)\right) \sin^2\left(w_n \frac{T}{4}\right) \end{aligned} \quad (7.65)$$

formunda bulunur.

7.3.3.3. Ek Bölge Hesaplamaları

(6.22) denkleminde bulunan $u(t)$ ve $v(t)$ integralleri $(t_s + (N+1)T) - (t_s + (N+1)T + \tau)$ sınırları içerisinde $t_3 \leq t \leq t_4$ değişim bölgesinde hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} u_3(t) &= \frac{1}{w_n} \sum_{N=0}^M (\sin(w_n(t_s + (N+1)T + \tau)) - \sin(w_n(t_s + (n+1)T))) \\ v_3(t) &= \frac{i}{w_n} \sum_{N=0}^M (\cos(w_n(t_s + (N+1)T + \tau)) - \cos(w_n(t_s + (n+1)T))) \end{aligned} \quad (7.66)$$

(7.63), (7.64) ve (7.65) denklemleri toplanarak,

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) \\ v(t) &= v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) \end{aligned} \quad (7.67)$$

elde edilir. Bu denklem (6.22) denkleminde yerine konularak, (7.54) ve (7.63) denklemleri dikkate alınarak selonoidal ve irrotasyonel modlar için bilinmeyen zaman katsayıları bulunur ve (4.3) denklemi yardımı ile elektrik ve magnetik alan ifadeleri elde edilir.

8. ELEKTRİK ALANIN SİMÜLASYONU



Yapılan tüm hesaplamaların görsel olarak ifade edilebilmeleri amacı ile Matlab programı yardımı simüle edilebilmeleri için çalışmalar yapılmıştır. Bu amaçla tüm hesaplamaların ele alındığı bir program geliştirilmiştir. Söz konusu programda değişim zamanı, periyot zamanı, ek zaman, kavite boyutları, kaynak dipolünün yeri ve uzunluğu v.b. birçok parametre kolayca değiştirilebilmekte ve böylece son derece esnek bir kullanım imkanı sağlanmış olmaktadır. Bu ise elektromagnetik alan ve dalga çalışmalarda çok büyük bir avantaj sağlamaktadır.

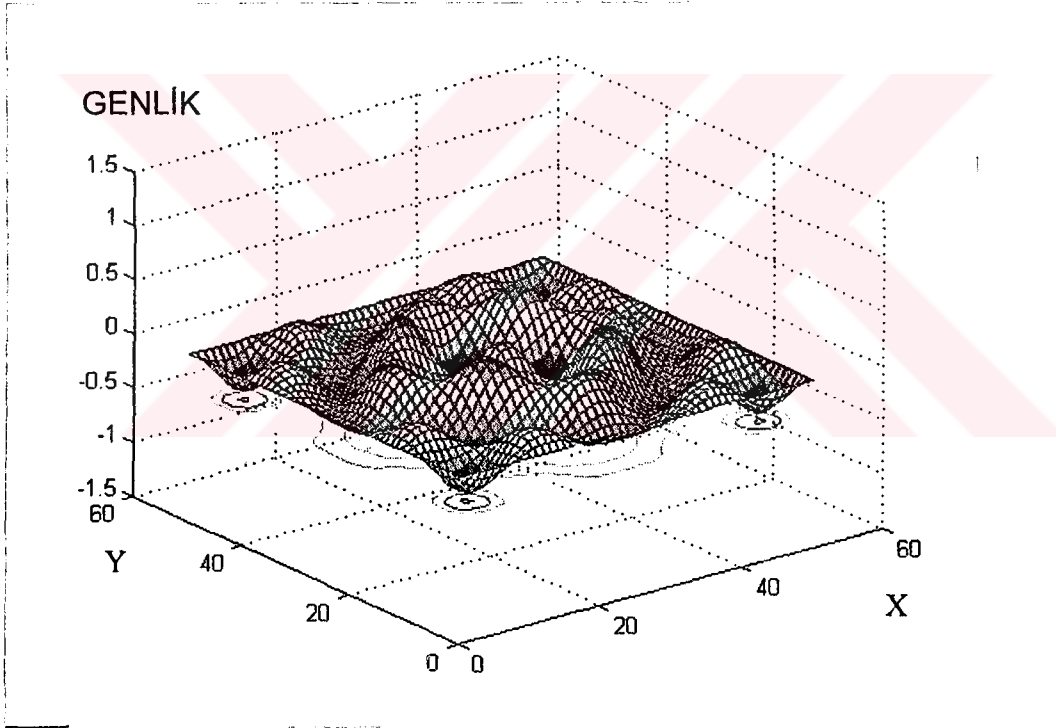
8.1. Programla İlgili Açıklamalar

Simülasyon programında, elektrik ve magnetik alan ifadelerinin seriye açılımı sonucu elde edilen formüllerde kullanılan öz değer sayısı 7 olarak ele alınmıştır. Öz değer sayısının 7 olarak alınmasının sebebi; programın bilgisayar ile çalıştırılması sırasında hesaplamaların yapılmasında bu değerın hesaplama zamanı açısından en uygun değer olmasıdır. Öz değer sayısının daha fazla alınması durumunda simülasyon programından sonuçlar almak için çok daha fazla hesap zamanına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu durumda pratik olarak işlemlerin yapılabilmesini önlemektedir. Simülasyon programında kaynak fonksiyonlarının pratik olarak kavite içerisinde ışına yapabilmesini sağlayabilmek için kavite içerisinde kullanılan dipolün boyu ve kavite içerisindeki konumuda kolayca değiştirilebilmektedir. Tüm istenilen işlemlerin ve değişimlerin düzenlenmesi sonucunda kavite içerisindeki elektromagnetik alanın z bileşeninin x ve y koordinatları boyunca değişimini 3 boyutlu olarak elde etmek mümkün olmaktadır. Elde edilen sonuçlar istenilen frekans değerinde ve istenilen zamanda elektriksel alanın simülasyonun kolayca görülebilmesine olanak tanımaktadır. Ek olarak ele alınan periyot veya periyotlar boyunca zamanda belirli aralıklarla sonuçlar elde edilip bunların bir film formunda görüntülenmeside mümkün olabilmektedir.

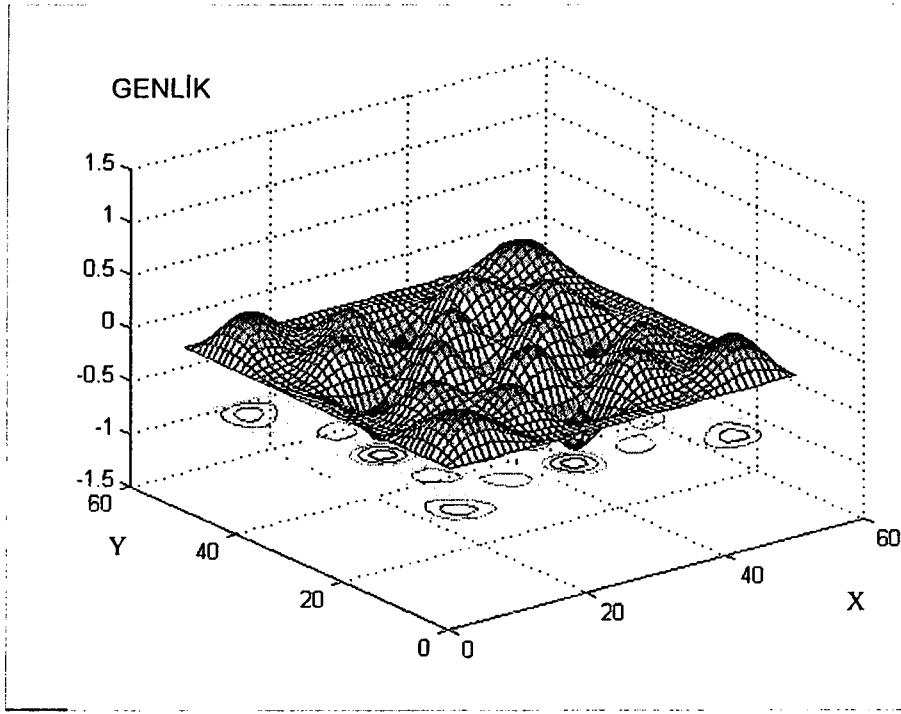


8.2. Program Sonuçları

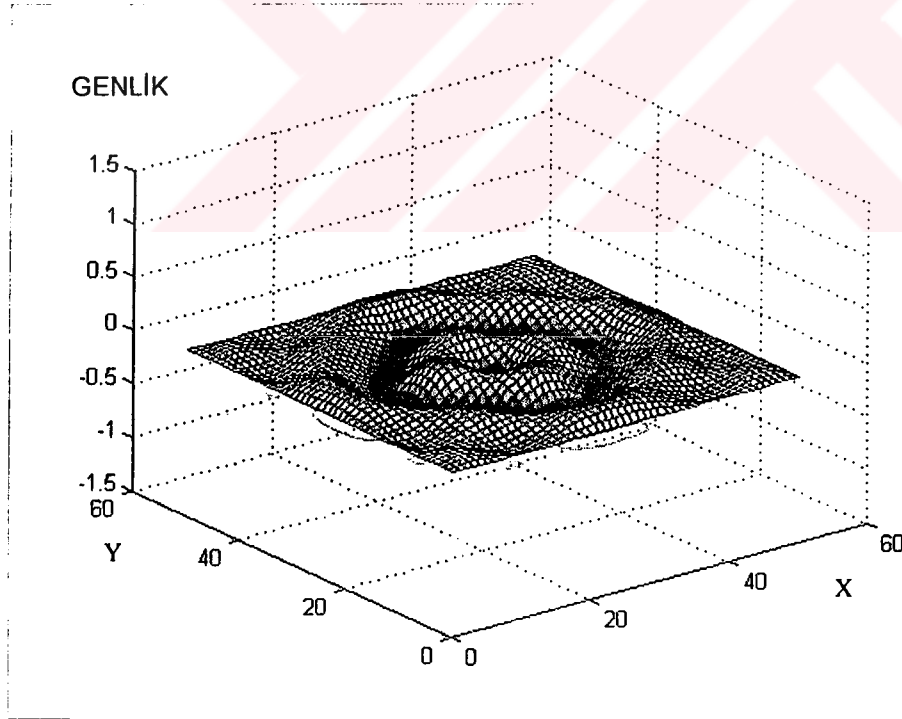
Burada ele alınan örnekte frekans 0.5 GHz olarak düşünülmüştür. Kaynak fonksiyonlarının zamana bağımlılığı daha önce verilen şekil 1'deki gibidir. Standart kavite (X band, 2.5cm-1,1 cm) içerisinde x ve y değişken olmak üzere $z=z/2$ sabit noktasında incelemeler yapılmıştır. Kaynak fonksiyonlarının pratik olarak kaviteye uygulanmasını sağlayan dipol boyu $l=z$ olarak alınmıştır. (7.45) denkleminde ele alınan değişim zamanı $t_{per}/2$, perodik işaret zamanı t_{per} , ek zaman ise $t_{per}/2$ olarak dikkate alınmıştır. Tüm bu işlemlerin sonucu elde edilen 4 farklı sonuç aşağıda verilmiştir.



Şekil 2. Frekans 0.5 GHz, gözlem zamanı t_{per} .



Şekil 3. Frekans 0.5 GHz, gözlem zamanı $1.5 \cdot t_{\text{per}}$.



Şekil 4. Frekans 0.5 GHz, gözlem zamanı $0.5 \cdot t_{\text{per}}$.

9. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tez çalışması sırasında elde edilen temel sonuçlar aşağıda üç temel alt başlıkta incelenmiştir.

1. Mikrodalga kavitelerine lojik işaretlerin uygulanması durumunda meydana gelen elektromagnetik doğa olaylarının zaman domeninde incelenmesini sağlayan yeni bir metot geliştirilmiştir. Bu metot üç temel prensip adımını kapsar.

a) Geliştirilen metot ilk olarak Maxwell denklem sisteminden lineer bir self-adjoint operatörünün ayrılması ile başlar. Burada göz önüne alınan problemde, söz konusu kavitenin mükemmel iletken yüzeyleri üzerinde ele alınan sınır koşulları ve *curl* denklemleri yardımı ile ifade edilerek "*Curl-sınır operatörü (CSO)*" olarak adlandırılmıştır. CSO yalnızca uzay koordinatları üzerinde etkili olup self-adjoint özelliğine sahiptir.

b) CSO operatörü self-adjoint özelliğine sahip olduğundan dolayı, çözüm uzayında bir baz meydana getiren kendi öz vektörlerinin tamamlanmış bir kümesine sahiptir. Bu nedenle, çözüm öz vektör serileri formunda ifade edilebilir. Serilerin her bir terimi koordinatların vektörel bir fonksiyonu ve zamana bağlı katsayıların çarpımı şeklinde elde edilebilecektir. Burada tüm vektörler elde edilen bazın bir elemanı olarak bilinmektedir. Fakat skaler katsayıların hesaplanması gerekmektedir. Fiziksel olarak, elektromagnetik alanın bu tür bir gösterilimi, zamana bağımlı bilinmeyen genliklerle selonoidal ve irrotasyonel doğal kavite modlarının ayrı ayrı gösterilimi anlamındadır.

c) Skaler model katsayıları problemi Maxwell denklemlerinin aynı baz elemanlarında katsayılar yardımı (başlangıç koşulları da dikkate alınarak) ile izdüşümlerinin hesaplanması ile ele alınabilir. Bu işlem kavite modlarının zaman bağımlı genlikleri ile ilgili diferansiyel denklem sistemleri için iyi bilinen "*Cauchy problemine*" karşılık düşer. Prensip olarak, bu problemin

çözümü fiziksel olarak şu çözüm adımlarına sahiptir. Diferansiyel denklemler tarafından elde edilen ve başlangıç koşullarında ele alınması ile çözülen elektrik ve magnetik alan ifadelerinde zamana bağlı değişimi tanımlar. Elektrik ve magnetik alan denklemlerinin bu formlarına "zaman bağlı denklemler" denilir. Bu denklemleri elde etmek için izlenen metot "elektromagnetik alana yeni bir yaklaşım metodu (EAY)" olarak bilinir.

2. Yukarıda ele alınan metot, lojik olarak zamana bağlı ifadelerin kaynak fonksiyonları olması durumunda dikdörtgensel yapıya sahip içi boş bir kaviteye uygulanması şeklinde ele alınmıştır. Bu örnekte aşağıdaki problemlerin çözümü sağlanmıştır,

a) CSO'nun tüm öz değerleri ve bu öz değerlere karşılık düşen ortonormal bazın tüm elemanları hesaplanmıştır. CSO'nun öz değerleri ele alınan kavite için iyi bilinen "kesim dalga sayısı" değerinde kapsar. Baz kümesi dört ortak ortogonal alt kümeyi kapsar. Bu dört alt küme fiziksel olarak TE ve TM selonoidal modları ile elektrik ve magnetik irrotasyonel modlara karşılık gelir. Bu aşamada zaman bağımlı genliklere bağlı olarak elde edilen alan ifadelerinin model gösterilimi elde edilmiştir. Aynı şekilde kaynak fonksiyonlarının model gösterilimlerinde hesaplanmıştır.

b) Zaman bağımlı genlik ifadeleri zaman bağımlı diferansiyel denklemlerin analitik bir çözümü olarak bulunmuştur. Bu alan genlikleri başlangıç koşullarının özel olarak sıfır seçilmesi ile kaynak fonksiyonlarının zamana bağlı genlikleri tarafından tümüyle özelleştirilmiştir. Elde edilen bu formüllerin daha önce elde edilen model alan gösterilim formülleri içerisinde konulması ile ele alınan problem için genel manada çözüm ifadeleri elde edilmiştir.

c) Fiziksel manada analizler için problemin nümerik olarak ele alınması amacı ile nümerik analizler yapılmıştır. Nümerik analizler için iki temel aşama ele alınmıştır. İlk olarak, zaman bağımlı genlik ifadelerinin elde

edilmesi için direkt formüller kullanılmıştır. İkinci olarak, ilk aşamada elde edilen sonuçlarla seri toplamı şeklinde elektrik ve magnetik alan için "Zaman domeni" gösterimleri bulunmuştur.

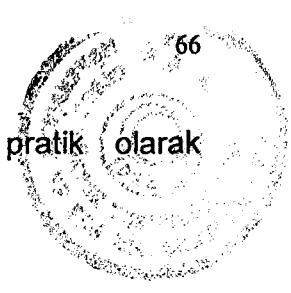
3. Nümerik dataların fiziksel analizi aşağıdaki adımlar yardımı ile yapılmıştır,

a) EAY metodu, zaman domeni analizlerinin yapılmasında yaygın olarak kullanılan ve sonlu farklar zaman domeni metodu olarak bilinen nümerik metoda karşı kesin olarak daha fazla avantaja sahiptir. EAY metodunda, nümerik olarak elektromagnetik analizlerin yapılması için ele alınan gözlem zamanında sonuçların elde edilebilmesi için daha önceki zaman ifadelerinin hesaplanmasını gerektirmez. Sonlu farklar zaman domeni metodunda belirli bir gözlem zamanında fiziksel analizlerin yapılabilmesi için söz konusu gözlem zamanından daha önceki zamanlarda tüm işlemlerin yapılmasını gerektirir.

b) EAY metodunun nümerik manada kullanılması ile dikdörtgensel kavite içerisinde lojik işaretler tarafından üretilen elektromagnetic alan değerleri ile ilgili geniş bir veri kümesi elde edilmiştir. Bu veri kümesi ayrı ayrı zaman değerlerinde kavite içerisinde üretilen elektromagnetik alan ifadeleri ile ilgili olarak 3 boyutlu grafiksel sonuçlar elde edilmesini sağlamaktadır. Ayrık 3 boyutlu grafiklerin zincir yapısı kullanılarak "elektromagnetik alan filmi" şeklinde zamana bağlı gerçek zamanlı hareketli ifadeleri elde edilmiştir.

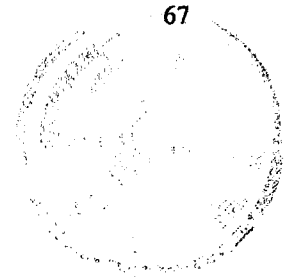
c) Elde edilen nümerik veri kümesinin analizleri sonucu, standart boyutlarda kavitelere lojik formda işaretlerin uygulanması sonucu, uygulanan işaretin standart kavite için minimum öz frekans değerinden çok daha aşağıdaki frekanslarda olması durumunda bile osilasyon olduğu görülmüştür. Yine standart kavitelerin lojik işaretleri çok yüksek frekanslarda ve çok geniş frekans bandında bile algılama yeteneğine sahip olduğu anlaşılmıştır. Elde edilen bu iki önemli sonuç normalde beklenilmeyen sonuçlar olup gelecekte lojik işaretlerin kavite, dalga

kılavuzu v.b. mikrodalga yapılar aracılığı ile iletiminde pratik olarak yararlı olabilecektir.



10.KAYNAKLAR

1. Bladel, V. Electromagnetics fields Hemisphere, Washington, 1985.
2. Collin, .R. E. Field Theory of guided waves Second Edition, IEEE Press, NJ, 1990.
3. Gabriel, G.J. Theory of electromagnetic transmission structures, part I: Relativistic foundation and network formalisms, Proc. IEEE, vol. 68, No. 3, 1980.
4. Goubau, G. Electromagnetic waveguides and cavities,Chapter 2, Pergamon Press, London, 1961.
5. Harmuth, H.F. Electromagnetic transients not explained by Maxwell's equations in ed. by A. Lakhtakia, Essays on the formal aspects of electromagnetic theory, Scientific Publ. Co., Singapore, 1993.
6. Hillion, P. Some comments on electromagnetic signals in ed. by A. Lakhtakia, Essays on the formal aspects of electromagnetic theory Scientific Publication Co., Singapore, 1993.
7. Joseph, R.M. FDTD Maxwell's equations models for nonlinear electrodynamics and optics IEEE Trans. Antennas Propagation., vol. AP-45, No. 3, 1997.
8. Kisunko, G.V. Electrodynamics of hollow systems VKAS-Press, Leningrad, 1949 (in Russian).
9. Kurokawa, K. The expansion of electromagnetic fields in cavities, IRE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-6, 1958, 178-187J.
10. Shigenori Hayashi, Surges on transmission systems, Denki- shoin Inc., Kyoto 1990R. E. Collin Field theory of guided waves, Second Edition, IEEE Press, NJ, 1990.
11. Slater, J.C. Microwave electronics, Review of Modern Physics, vol. 18, No. 4, 1946, 441-512.
12. Tretyakov, O.A. The method of modal basis, Radiotekhnika i Elektronika, vol. 31, No. 6, 1986 (in Russian). English translation in Soviet J. on Communication Technology and Electronics, 1986.



KAYNAKLAR

1. Bladel, V. Electromagnetics fields Hemisphere, Washington, 1985.
2. Collin, .R. E. Field Theory of guided waves Second Edition, IEEE Press, NJ, 1990.
3. Gabriel, G.J. Theory of electromagnetic transmission structures, part I: Relativistic foundation and network formalisms, Proc. IEEE, vol. 68, No. 3, 1980.
4. Goubau, G. Electromagnetic waveguides and cavities, Chapter 2, Pergamon Press, London, 1961.
5. Harmuth, H.F. Electromagnetic transients not explained by Maxwell's equations in ed. by A. Lakhtakia, Essays on the formal aspects of electromagnetic theory, Scientific Publ. Co., Singapore, 1993.
6. Hillion, P. Some comments on electromagnetic signals in ed. by A. Lakhtakia, Essays on the formal aspects of electromagnetic theory Scientific Publication Co., Singapore, 1993.
7. Joseph, R.M. FDTD Maxwell's equations models for nonlinear electrodynamics and optics IEEE Trans. Antennas Propagation., vol. AP-45, No. 3, 1997.
8. Kisunko, G.V. Electrodynamics of hollow systems VKAS-Press, Leningrad, 1949 (in Russian).
9. Kurokawa, K. The expansion of electromagnetic fields in cavities, IRE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-6, 1958, 178-187J.
10. Shigenori Hayashi, Surges on transmission systems, Denki- shoin Inc., Kyoto 1990R. E. Collin Field theory of guided waves, Second Edition, IEEE Press, NJ, 1990.
11. Slater, J.C. Microwave electronics, Review of Modern Physics, vol. 18, No. 4, 1946, 441-512.
12. Tretyakov, O.A. The method of modal basis, Radiotekhnika i Elektronika, vol. 31, No. 6, 1986 (in Russian). English translation in Soviet J. on Communication Technology and Electronics, 1986.

13. Tretyakov, O.A. Essentials of nonstationary and nonlinear electromagnetic field theory in M. Hashimoto, M. Idemen, O.A. Tretyakov, Eds., Analytical and numerical methods in electromagnetic wave theory, Science House CO., Tokyo, 1993.
14. Weyl, H. The method of orthogonal projection in potential theory, Duke Math. Journal, vol. 7, 1940, 411-444.



ÖZGEÇMİŞ



Serkan Aksoy 1974 yılında Bolu'nun Gerede ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini burada tamamladıktan sonra, İstanbul Teknik Üniversitesi Elektrik – Elektronik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği bölümüne girdi. Buradan mezun olduktan sonra 1997 yılı şubat döneminden itibaren Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Elektronik Mühendisliği bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı. Serkan Aksoy halen aynı bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmakta olup, aynı zamanda yarı zamanlı olarak TÜBİTAK – MAM'da görev yapmaktadır.



**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**