T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AW(k)-TİPİNDEN EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fırat GEZGİN

Balıkesir, Temmuz-2005

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AW(k)_TİPİNDEN EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fırat GEZGİN

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR

Sınav Tarihi :
Jüri Üyeleri: Yrd. Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR (Danışman – Ba.Ü.)
Prof. Dr. Kadri ARSLAN (Uludağ Ü.)
Doç. Dr. Cengizhan MURATHAN (Uludağ Ü.)

Balıkesir, Temmuz -2005

ÖZET

AW(k)-TİPİNDEN EĞRİLER

Fırat GEZGİN
Balıkesir üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR)
Balıkesir, 2005

Bu çalışmada $AW(k)$ -tipinden eğriler incelenmiştir.

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde ileriki bölümlerde gerekli olacak temel diferansiyel geometri bilgileri verilmiştir.

Üçüncü bölümde $AW(k)$ -tipinden eğriler tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde $AW(k)$ -tipinden eğrilerin harmonik eğrilikleri incelenmiştir.

Beşinci bölüm orijinal sonuçlar içermektedir. Bu bölümde $AW(k)$ -tipinden slant helisler incelenmiştir.

Altıncı bölümde orijinal sonuçlar içermektedir. Bu bölümde $AW(k)$ -tipinden Bertrand eğrileri ve koniksel geodezik eğriler incelenmiştir.

Yedinci bölümde de bulunan sonuçların tartışması yapılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER : $AW(k)$ -tipinden eğri.

ABSTRACT

AW(k)-TYPE CURVES

Fırat GEZGİN

Balıkesir University, Institue of Science, Department of Mathematics

(M.Sc.Thesis / Supervisor : Asst. Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR)
Balıkesir – TÜRKİYE, 2005

In this study, we investigate $AW(k)$-type curves.

This thesis consists of seven chapters.

The first chapter is the introduction.

In the second chapter, we give some basic notions and definitions which will be necessary in the next chapters.

In the third chapter, we introduce $AW(k)$-type curves.

The fourth chapter, we consider harmonic curvatures of $AW(k)$-type curves.

In the fifth chapter consists of some original results. In this chapter, we investigate slant helices of $AW(k)$-type.

In the sixth chapter also consists of some original results. In this chapter, Bertrand curves and conical geodesic curves of $AW(k)$-type are considered.

In the last chapter the results obtained in the previous chapters are examined.

KEY WORDS : $AW(k)$-type curve.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

ÖNSÖZ

Bu çalışmada AW(k)-tipinden eğrilerle ilgili literatürde yer alan bazı sonuçlar bir araya getirilmiş ayrıca bu tipten olan slant helisler, Bertrand eğrileri ve koniksel geodezik eğriler incelenmiş ve bazı orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

Tez çalışmamda her an yanımda olan, manevi desteğini esirgemeyen, bilgi ve kaynaklarını paylaşan sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR'e, sonsuz teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Yüksek lisans yaptığım süre içersinde emeği geçen Fen Edebiyat Fakültesi Kadrosu dahil diğer öğretim üyesi ve yardımcılarına teşekkür ederim.

Yüksek lisans yapmamdaki gerekli ortamı sağlayan Şamlı ilköğretim okulu müdürü Salim ÇAKICI'ya ve mesai arkadaşlarıma göstermiş oldukları anlayış için teşekkür ederim.

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca benden manevi desteğini esirgemeyen, ayrıca teşviklerini ve yardımlarını daima sürdüren değerli eşim Yeşim'e sonsuz teşekkür eder, sevgilerimi sunarım.

Balıkesir, 2005 **Fırat GEZGİN**

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı $AW(k)$-tipinden eğrileri ve bu tipten olan slant helisleri, Bertrand eğrileri ve koniksel geodezik eğrileri incelemektir.

$AW(k)$-tipinden alt manifold kavramını ilk olarak tanımlayan K.Arslan daha sonra A.West ile birlikte 1995 yılında yayınladıkları [7] nolu kaynakta bu tip alt manifoldların bazı özelliklerini vermişlerdir.

1997 yılında K.Arslan ve C.Özgür AW(k)-tipinden altmanifold kavramını $AW(k)$-tipinden eğri seviyesine indirerek bu tip eğrilerin birinci ve ikinci eğrileri arasında bazı bağıntılar elde etmişlerdir. Bu bağıntılar üçüncü bölümde ayrıntılı olarak verilmiştir.

2000 yılında K.Arslan, Y.Çelik ve H.Hilmi Hacısalihoğlu [8] nolu kaynakta $AW(k)$-tipinden eğrilerle bu eğrilerin birinci harmonik eğriliği arasında bazı bağıntılar elde etmişlerdir. Bu bağıntılar beşinci bölümde ayrıntılı olarak verilmiştir.

S.Izumiya ve N.Takeuchi 2004 yılında [9] nolu kaynakta slant helis ve koniksel geodezik eğri kavramlarını tanıtmışlardır.

Beşinci bölümde $AW(k)$-tipinden slant helisler incelenmiştir.

Altıncı bölümde $AW(k)$-tipinden Bertrand eğrileri ve koniksel geodezik eğriler incelenerek çeşitli sonuçlar elde edilmiştir.

Son bölümde ise bulunan sonuçların tartışması yapılmıştır.

2. TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde oskülatör mertebesi d-olan bir Frenet eğrisi tanıtılarak, bu eğrinin Frenet çatısı verilecektir.

Tanım 2.1. M bir diferansiyellenebilir (C^∞) manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den IR ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, IR)$ olmak üzere, M üzerinde;

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, IR)$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik ve 2-lineer g Riemann metriği ile birlikte M ye bir *Riemann manifoldu* adı verilir ve (M, g) şeklinde gösterilir [1].

M manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse M ye *bağlantılı manifold* adı verilir. M bağlantılı ve temel grubu sadece birim elemandan oluşuyor ise M ye *basit bağlantılıdır* denir [2].

Tanım 2.2. M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere;

$$\begin{aligned} \nabla: \chi(M) \times \chi(M) &\xrightarrow{\text{2-lineer}} \chi(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan ∇ operatörü, M nin bir U bölgesi üzerinde tanımlı olup her bir C^∞ X, $Y \in \chi(U)$ vektör alan çiftine U üzerinde $\nabla_X Y$ ile ifade edilen üçüncü bir C^∞ vektör alanı karşılık getirir. Bu karşılık gelme aşağıdaki özellikleri sağladığında ∇ ya *Lineer Koneksiyon* (veya kovaryant türev) adı verilir [2].

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$, $\forall f \in C^{\infty}(M, IR)$ olmak üzere;

i) $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z,$

ii) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y,$

iii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

iv) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

Tanım 2.3. M ve N birer C^{∞} manifold olsun. f, M den N ye tanımlı bir C^{∞} fonksiyon olmak üzere, $(f_*)p$ jakobiyen matrisine karşılık gelen dönüşüm M nin her bir p noktası için birebir ise f fonksiyonuna immersiyon denir [3].

Tanım 2.4. M ve N birer C^{∞} manifold ve $f : M \to N$ bir C^{∞} fonksiyon olsun. f nin f_* jakobiyen matrisine karşılık gelen dönüşüm birebir ve f tek değeğişken ise f ye M den N ye bir imbedding adı verilir [3].

Tanım 2.5. f bir immersiyon olmak üzere $\forall X, Y \in T_pM$ için,

$$\langle f_*(X), f_*(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle$$

ise f ye bir izometrik immersiyon adı verilir [3].

Tanım 2.6. $\gamma : I \subset E \to E^n$ E^n de birim hızlı bir eğri olsun. Eğer γ nın yüksek mertebeden türevleri

$$\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s), ..., \gamma^{(d)}(s)$$

lineer bağımsız ve

$$\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s), ..., \gamma^{(d)}(s), \gamma^{(d+1)}(s)$$

$\forall s \in I$ için lineer bağımlı ise γ ya oskülatör mertebesi d-olan bir Frenet eğrisi denir.

d. mertebeden her Frenet eğrisi için γ boyunca $\gamma'(s) = v_1(s)$ olmak üzere bir $v_1, v_2, v_3, ..., v_d$ ortonormal çatısı bulunabilir. Bu çatıya Frenet çatısı denir ve $k_1, k_2, k_3, ..., k_{d-1} : I \to R$ $(d-1)$- fonksiyonları Frenet eğrilikleri olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\overline{\nabla}_{v_1} \gamma'(s) = \gamma''(s) = k_1(s) v_2(s) \tag{2.1}$$

$$\overline{\nabla}_{v_1} v_2(s) = -k_1(s) v_1(s) + k_2(s) v_3(s) \tag{2.2}$$

....

$$\overline{\nabla}_{v_1} v_i(s) = -k_{i-1}(s) v_{i-1}(s) + k_i(s) v_{i+1}(s)$$

$$\overline{\nabla}_{v_1} v_{i+1}(s) = -k_i(s) v_i(s) \tag{2.3}$$

Burada $\overline{\nabla}$, E^n de Levi-Civita koneksiyonudur [5].

Tanım 2.7. Bir $\gamma : I \subseteq E \to E^n$ regüler eğrisi verilsin. Eğer γ oskülatör mertebesi d-olan bir Frenet eğrisi ve k_i Frenet eğrilikleri $1 \le i \le d-1$ için sıfırdan farklı sabitler ise γ ya rankı d-olan bir W eğrisidir denir. Rankı 3 olan bir W eğrisi dairesel helistir [5].

Biz burada E^n in oskülatör mertebesi 3 olan Frenet eğriliklerini düşüneceğiz.

Önerme 2.8. γ E^n in oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu taktirde

$$\gamma'(s) = v_1(s),$$

$$\gamma''(s) = \overline{\nabla}_{v_1} \gamma'(s) = k_1(s) v_2(s), \tag{2.4}$$

$$\gamma'''(s) = \overline{\nabla}_{v_1} \overline{\nabla}_{v_1} \gamma'(s) = -k_1^2(s) v_1(s) + k_1'(s) v_2(s) + k_1(s) k_2(s) v_3(s) \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \gamma^{iv}(s) = \overline{\nabla}_{v_1} \overline{\nabla}_{v_1} \overline{\nabla}_{v_1} \gamma'(s) &= -3k_1(s) k_1'(s) v_1(s) + \{k_1''(s) - k_1^3(s) - k_1(s) k_2^2(s)\} v_2(s) \\ &+ \{2k_2(s) k_1'(s) + k_2'(s) k_1(s)\} v_3(s) \end{aligned} \tag{2.6}$$

dir [6].

İspat: Tanımdan $\gamma'(s)=v_1(s)$, (2.1) den de

$$\gamma''(s)=\overline{\nabla}_{v_1}\gamma'(s)=k_1(s)v_2(s)$$

dir. (2.5) eşitliğini elde etmek için (2.4) eşitliğinin türevini alalım, bu durumda

$$\gamma'''(s)=\overline{\nabla}_{v_1}\overline{\nabla}_{v_1}\gamma'(s)=k_1'(s)v_2(s)+k_1(s)v_2'(s) \tag{2.7}$$

elde edilir. (2.7) eşitliğinde (2.2) yerine konursa (2.5) eşitliği elde edilir. (2.6) eşitliğini elde etmek için (2.5) eşitliğinin türevini alırsak,

$$\begin{aligned}\gamma^{IV}(s)=\overline{\nabla}_{v_1}\overline{\nabla}_{v_1}\overline{\nabla}_{v_1}\gamma'(s)&=-2k_1(s)k_1'(s)v_1(s)-k_1^2(s)v_1'(s)+k_1''(s)v_2(s)+k_1'(s)v_2'(s)\\&+\left(k_1'(s)k_2(s)+k_1(s)k_2'(s)\right)v_3(s)+k_1(s)k_2(s)v_3'(s)\end{aligned} \tag{2.8}$$

bulunur. Burada (2.1), (2.2) ve (2.3) eşitlikleri yerinde kullanıldığında,

$$\begin{aligned}\gamma^{IV}(s)=\overline{\nabla}_{v_1}\overline{\nabla}_{v_1}\overline{\nabla}_{v_1}\gamma'(s)&=-3k_1(s)k_1'(s)v_1(s)+\left\{k_1''(s)-k_1^3(s)-k_1(s)k_2^2(s)\right\}v_2(s)\\&+\left\{2k_2(s)k_1'(s)+k_2'(s)k_1(s)\right\}v_3(s)\end{aligned}$$

elde edilir.

Notasyon 2.9.

$$N_1(s)=\left(\gamma''(s)\right)^{\perp}=k_1(s)v_2(s), \tag{2.9}$$

$$N_2(s)=\left(\gamma'''(s)\right)^{\perp}=k_1'(s)v_2(s)+k_1(s)k_2(s)v_3(s), \tag{2.10}$$

ve

$$N_3(s)=\left(\gamma^{IV}(s)\right)^{\perp}=\left(k_1''(s)-k_1^3(s)-k_1(s)k_2^2(s)\right)v_2(s)+\left(2k_1'(s)k_2(s)+k_1(s)k_2'(s)\right)v_3(s) \tag{2.11}$$

ile gösterelim [6].

Sonuç 2.10. $\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s), \gamma^{iv}(s)$ lineer bağımlıdır $\Leftrightarrow N_1(s),\ N_2(s),$ $N_3(s)$ lineer bağımlıdır [6].

Önerme 2.11. γ E^n de oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}&\left\{\|N_1(s)\|^2\|N_2(s)\|^2-\langle N_1(s),N_2(s)\rangle^2\right\}N_3(s)\\&\equiv\left\{\|N_2(s)\|^2\langle N_3(s),N_1(s)\rangle-\langle N_3(s),N_2(s)\rangle\langle N_1(s),N_2(s)\rangle\right\}N_1(s)\\&+\left\{\|N_1(s)\|^2\langle N_3(s),N_2(s)\rangle-\langle N_3(s),N_1(s)\rangle\langle N_1(s),N_2(s)\rangle\right\}N_2(s)\end{aligned}$$

dir [6].

Teorem 2.12. γ E^n de oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu taktirde

$$N_3(s)=\langle N_3(s),N_1^*(s)\rangle N_1^*(s)+\langle N_3(s),N_2^*(s)\rangle N_2^*(s)$$

dir. Burada

$$N_1^*(s)=\frac{N_1(s)}{\|N_1(s)\|} \tag{2.12}$$

ve

$$N_2^*(s)=\frac{N_2(s)-\langle N_2(s),N_1^*(s)\rangle N_1^*(s)}{\left\|N_2(s)-\langle N_2(s),N_1^*(s)\rangle N_1^*\right\|} \tag{2.13}$$

dir [6].

Sonuç 2.13. γ E^n de oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu taktirde,

$$N_1^*(s)=v_2(s) \tag{2.14}$$

ve

$$N_2^*(s)=v_3(s) \tag{2.15}$$

dir.

İspat: (2.12) eşitliğinde (2.9) yerine konursa,

$$N_1^*(s) = \frac{k_1(s)v_2(s)}{k_1(s)} = v_2(s)$$

elde edilir. (2.13) eşitliğinde de (2.10) ve (2.14) yerine konursa,

$$N_2^*(s) = \frac{k_1(s)k_2(s)v_3(s)}{k_1(s)k_2(s)} = v_3(s)$$

bulunur.

3.AW(k)-TİPİNDEN EĞRİLER

Bu bölümde $AW(k)$-tipinden eğri kavramı tanıtılarak, bir eğrinin $AW(k)$-tipinden $(k=1,2,3)$ olması için gerek ve yeter şartlar elde edilecektir.

Tanım 3.1. Oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisine

i) Eğer

$$N_3(s)=\langle N_3(s),N_2^*(S)\rangle N_2^*(s) \tag{3.1}$$

şartını sağlıyor ise zayıf $AW(2)$ - tipindendir denir.

ii) Eğer

$$N_3(s)=\langle N_3(s),N_1^*(s)\rangle N_1^*(s) \tag{3.2}$$

şartını sağlıyor ise zayıf $AW(3)$-tipindendir denir [6].

Önerme 3.2. γ 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Eğer γ zayıf $AW(2)$ - tipinden ise

$$k_1''(s)-k_1^3(s)-k_1(s)k_2^2(s)=0 \tag{3.3}$$

dir [6].

İspat: γ zayıf $AW(2)$-tipinden ise (3.1) denklemini sağlar. (3.1) de (2.11) ve (2.15) yerine konursa

$$\begin{aligned}&\{k_1''(s)-k_1^3(s)-k_1(s)k_2^2(s)\}v_2(s)+\{2k_1'(s)k_2(s)+k_1(s)k_2'(s)\}v_3(s)\\&=\{2k_1'(s)k_2(s)+k_1(s)k_2'(s)\}v_3(s)\end{aligned}$$

elde edilir. $v_2(s)$ ve $v_3(s)$ lineer bağımsız olduğundan

$$k_1''(s) - k_1^3(s) - k_1(s)k_2^2(s) = 0$$

bulunur.

Tanım 3.3. γ oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun.

i) Eğer

$$N_3(s) = 0$$

ise γ $AW(1)$ - tipindendir denir.

ii) Eğer

$$\|N_2(s)\|^2 N_3(s) = \langle N_3(s), N_2(s)\rangle N_2(s) \tag{3.4}$$

ise γ ya $AW(2)$ - tipindendir denir.

iii) Eğer

$$\|N_1(s)\|^2 N_3(s) = \langle N_3(s), N_1(s)\rangle N_1(s) \tag{3.5}$$

ise γ ya $AW(3)$ - tipindendir denir [6,7].

Önerme 3.4. γ eğrisi 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Bu taktirde γ $AW(1)$ - tipindendir $\Leftrightarrow$

$$k_1''(s) - k_1^3(s) - k_1(s)k_2^2(s) = 0 \tag{3.6}$$

ve

$$k_2(s) = \frac{c}{k_1^2(s)} \tag{3.7}$$

dir [6].

İspat: $(\Rightarrow)$: γ eğrisi $AW(1)$- tipinden olsun. Tanım 3.3.(i) den dolayı $N_3(s)=0$ dır. Böylece (2.11) eşitliğinden

$$\{k_1''(s)-k_1^3(s)-k_1(s)k_2^2(s)\}v_2(s)+\{2k_1'(s)k_2(s)+k_1(s)k_2'(s)\}v_3(s)=0$$

dır. Ayrıca $v_2(s)$ ile $v_3(s)$ lineer bağımsız olduğundan

$$k_1''(s)-k_1^3(s)-k_1(s)k_2^2(s)=0$$
$$2k_1'(s)k_2(s)+k_1(s)k_2'(s)=0$$

elde edilir. Son denklemin çözümü

$$k_2(s)=\frac{c}{k_1^2(s)}\ ,\ c=\text{sabit}$$

olduğundan istenilen sonuç elde edilir.

$(\Leftarrow)$: Aşikardır.

Önerme 3.5. γ eğrisi 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Bu taktirde γ $AW(2)$- tipindendir $\Leftrightarrow$

$$2(k_1'(s))^2k_2(s)+k_1(s)k_1'(s)k_2'(s)=k_1(s)k_1''(s)k_2(s)-k_1^4(s)k_2(s)-k_1^2(s)k_2^3(s) \qquad (3.8)$$

dir [6].

İspat: $(\Rightarrow)$: γ eğrisi $AW(2)$- tipinden ise (3.4) γ üzerinde sağlanır. (2.10) ve (2.11) denklemleri (3.4) da yerine konursa

$$\left(k_1'(s)\right)^2 k_1''(s)-\left(k_1'(s)\right)^2 k_1^3(s)-\left(k_1'(s)\right)^2 k_1(s)k_2^2(s)+k_1''(s)k_1^2(s)k_2^2(s)-k_1^5(s)k_2^2(s)$$
$$-k_1^3(s)k_2^4(s)=\left(k_1'(s)\right)^2 k_1''(s)-\left(k_1'(s)\right)^2 k_1^3(s)+\left(k_1'(s)\right)^2 k_1(s)k_2^2(s)+k_1'(s)k_1^2(s)k_2'(s)k_2(s)$$

bulunur. Buradan da gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$-\left(k_1'(s)\right)^2 k_1(s)k_2^2(s)+k_1''(s)k_1^2(s)k_2^2(s)-k_1^5(s)k_2^2(s)-k_1^3(s)k_2^4(s)$$
$$=\left(k_1'(s)\right)^2 k_1(s)k_2^2(s)+k_1'(s)k_1^2(s)k_2'(s)k_2(s)$$

sonucuna varılır. Son olarak eşitliğin her iki tarafı

$$\frac{1}{k_1(s).k_2(s)}$$

ile çarpılırak denklem düzenlenir ise (3.8) eşitliği elde edilir.

($\Leftarrow$): Tersi tanımdan aşikardır.

Sonuç 3.6. γ eğrisi 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Eğer γ bir silindirik helis ve $AW(2)$-tipinden ise

$$3\left(k_1'(s)\right)^2-k_1(s)k_1''(s)+k_1^4(s)\left(1+\frac{k_2^2(s)}{k_1^2(s)}\right)=0 \tag{3.9}$$

dir [6].

İspat: γ eğrisi $AW(2)$-tipinden ise (3.4) eşitliği sağlanır. γ bir silindirik helis olduğundan

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)}=c=\text{sabit}$$

diyebiliriz. Buradan türev alındığında

$$\frac{k_1'(s)k_2(s)-k_1(s)k_2'(s)}{k_2^2(s)}=0$$

bulunur. Böylece

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)}=\frac{k_1'(s)}{k_2'(s)} \tag{3.10}$$

elde edilir.

Şimdi (3.8) eşitliğinin her iki tarafını $\dfrac{1}{k_2(s)}$ ile çarpalım. Bu durumda

$$k_1''(s)k_1(s)-k_1^4(s)-k_1^2(s)k_2^2(s)=2(k_1'(s))^2+\frac{k_1(s)}{k_2(s)}k_1'(s)k_2'(s)$$

olup, elde edilen bu son eşitlikte (3.10) yerine konur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$3(k_1'(s))^2-k_1(s)k_1''(s)+k_1^4(s)\left(1+\frac{k_2^2(s)}{k_1^2(s)}\right)=0$$

elde edilir.

Teorem 3.7. γ eğrisi 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Bu taktirde γ $AW(3)$- tipindendir $\Leftrightarrow$

$$2k_1'(s)k_2(s)+k_1(s)k_2'(s)=0 \tag{3.11}$$

dır. Bu diferansiyel denklemin çözümü ise

$$k_2(s)=\frac{c}{k_1^2(s)}\ ,\ c\in IR \tag{3.12}$$

dir [6].

İspat: $(\Rightarrow)$: γ $AW(3)$-tipinden ise (3.5) eşitliği sağlanır. (2.9) ve (2.11) denklemlerini (3.5) eşitliğinde yerine koyarsak

$$\left(k_1^2(s)k_1''(s)-k_1^5(s)-k_1^3(s)k_2^2(s)\right)v_2(s)+\left(2k_1^2(s)k_1'(s)k_2(s)+k_1^3(s)k_2'(s)\right)v_3(s)$$
$$=\left(k_1^2(s)k_1''(s)-k_1^5(s)-k_1^3(s)k_2^2(s)\right)v_2(s)$$

eşitliğini elde ederiz. $v_2(s)$ ve $v_3(s)$ lineer bağımsız olduğundan,

$$2k_1^2(s)k_1'(s)k_2(s)+k_1^3(s)k_2'(s)=0 \qquad (3.13)$$

sonucuna varırız.

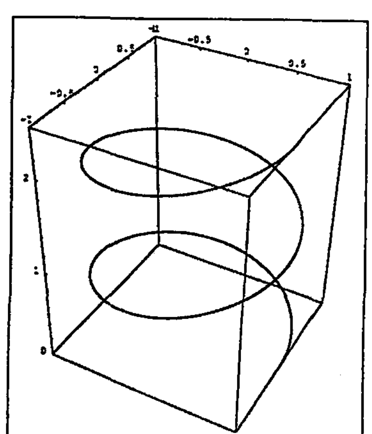
Eğer $k_1(s)=0$ ise γ düz bir doğrudur.

Eğer $k_1(s)\neq 0$ ise (3.13) eşitliğini $k_1^2(s)$ ile sadeleştirerek (3.11) eşitliğini elde ederiz.

$(\Leftarrow)$: Aşikardır.

Örnek 3.8. $\gamma : I \to IR^3$

$\gamma(s)=(a\cos s, a\sin s, bs)$, $a>0, \mathrm{b}\in IR$ ile tanımlanan dik dairesel helis eğrisi için $k_1(s)=\dfrac{a}{a^2+b^2}$, $k_2(s)=\dfrac{b}{a^2+b^2}$ değerleri sabit olduğundan (3.11) denklemi sağlanır. Böylece dik dairesel helisin $AW(3)$–tipinden olduğu görülür.



4. BİR FRENET EĞRİSİNİN HARMONİK EĞRİLİKLERİ

Bu bölüm üçüncü bölümle ilgili olup bir eğrinin $AW(k)$-tipinden olması için elde edilen gerek ve yeter şartların eğrinin harmonik eğriliği cinsinden verilmesi işlenecektir. Ayrıca $AW(k)$-tipinden helisler incelenecektir.

Tanım 4.1. γ oskülatör mertebesi d olan birim hızlı bir eğri olsun.

$H_j : I \to E \quad (1 \le j \le d-2)$ fonksiyonlarını

$$H_1(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \tag{4.1}$$

$$H_j = \{\overline{\nabla}_{v_1} H_{j-1} + H_{j-2} k_j\} . \frac{1}{k_{j+1}}$$

ile tanımlayalım. Bu şekilde tanımlı H_j fonksiyonuna γ nın j.inci harmonik eğrilik fonksiyonu denir [4].

Tanım 4.2. Oskülatör mertebesi d olan bir birim hızlı γ Frenet eğrisi için $\sum_{i=1}^{d-2} H_i^2 = c = sabit$ ise γ ya rankı $(d-2)$ olan bir genel helis denir [4].

Önerme 4.3. γ E^n de oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu taktirde

$$\overline{\nabla}_{v_1} v_1(s) = k_1(s) v_2(s), \tag{4.2}$$

$$\overline{\nabla}_{v_1} v_2(s) = -k_1(s) v_1(s) + \frac{k_1(s)}{H_1(s)} v_3(s) \tag{4.3}$$

ve

$$\overline{\nabla}_{v_1} v_3(s) = -\frac{k_1(s)}{H_1(s)} v_2(s) \tag{4.4}$$

dir [8].

İspat: (2.1) den $\overline{\nabla}_{v_1} v_1(s) = k_1(s) v_2(s)$ dir. Ayrıca (2.3) den

$$\overline{\nabla}_{v_1} v_3(s) = -k_2(s) v_2(s) \tag{4.5}$$

olup böylece (2.2) ve (4.5) eşitliklerinde

$$k_2(s) \overset{(4.1)}{=} \frac{k_1(s)}{H_1(s)}$$

yazarsak (4.3) ve (4.4) eşitlikleri elde edilir.

Teorem 4.4. $\gamma''(s), \gamma'''(s), \gamma^{iv}(s)$ türevleri lineer bağımlıdır $\Leftrightarrow$ $\gamma(s)$ rankı 1 olan bir genel helistir [8].

İspat: $(\Rightarrow)$: $\gamma''(s), \gamma'''(s), \gamma^{iv}(s)$ türevlerinin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart (2.4), (2.5) ve (2.6) eşitliklerinin katsayılar determinantının 0 olmasıdır.

Böylece

$$\begin{vmatrix} 0 & k_1(s) & 0 \\ -k_1^2(s) & k_1'(s) & k_1(s)k_2(s) \\ -3k_1(s)k_1'(s) & \{k_1''(s) - k_1^3(s) - k_1(s)k_2^2(s)\} & \{2k_2(s)k_1'(s) + k_2'(s)k_1(s)\} \end{vmatrix} = 0$$

olup buradan

$$k_1^4(s)k_2'(s) = k_1^3(s)k_1'(s)k_2(s) \tag{4.6}$$

olur. (4.6) eşitliğinin her iki tarafı

$$\frac{1}{k_1^3(s)k_2'(s)k_2(s)}$$

ile çarpılırsa

$$\frac{k_1'(s)}{k_2'(s)} = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

elde edilir. Buradan

$$k_1'(s)k_2(s) - k_2'(s)k_1(s) = 0 \tag{4.7}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.1) gereği

$$H_1'(s) = \frac{k_1'(s)k_2(s) - k_1(s)k_2'(s)}{k_2^2(s)}$$

olup böylece (4.7) gereği

$$H_1'(s) = 0$$

dir. Bu ise $H_1(s) = sabit$ olmasını gerektirir.

($\Leftarrow$): Aşikardır.

Teorem 4.5. γ E^n de oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu taktirde γ rankı 1 olan bir genel helistir $\Leftrightarrow$ $H_1 = sabittir$ [8].

Önerme 4.6. γ E^n de oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu taktirde

$$\gamma''(s)=\overline{\nabla}_{v_1}\gamma'(s)=k_1(s)v_2(s)$$

$$\gamma'''(s)=\overline{\nabla}_{v_1}\overline{\nabla}_{v_1}\gamma'(s)=-k_1^2(s)v_1(s)+k_1'(s)v_2(s)+\frac{k_1^2(s)}{H_1(s)}v_3(s) \tag{4.8}$$

$$\gamma^{iv}(s)=\overline{\nabla}_{v_1}\overline{\nabla}_{v_1}\overline{\nabla}_{v_1}\gamma'(s)=-3k_1(s)k_1'(s)v_1(s)+\{k_1''(s)-k_1^3(s)-\frac{k_1^3(s)}{H_1^2(s)}\}v_2(s)$$

$$+\left\{\frac{3k_1(s)k_1'(s)H_1(s)-k_1^2(s)H_1'(s)}{H_1^2(s)}\right\}v_3(s) \tag{4.9}$$

dir [8].

İspat: (4.1) eşitliğinden

$$k_2(s)=\frac{k_1(s)}{H_1(s)} \tag{4.10}$$

olup bu eşitliğin türevi alındığında,

$$k_2'(s)=\frac{k_1'(s)H_1(s)-k_1(s)H_1'(s)}{H_1^2(s)} \tag{4.11}$$

elde edilir. Böylece (4.10) ve (4.11) eşitlikleri (2.5) ve (2.6) eşitliklerinde yerine konursa, (4.8) ve (4.9) eşitlikleri elde edilir.

Notasyon 2.4. ün harmonik eğrilik cinsinden karşılığı aşağıdaki gibi verilebilir.

Notasyon 4.7.

$$N_1(s)=k_1(s)v_2(s), \tag{4.12}$$

$$N_2(s)=k_1'(s)v_2(s)+\frac{k_1^2(s)}{H_1(s)}v_3(s), \tag{4.13}$$

$$N_3(s)=\left\{k_1''(s)-k_1^3(s)\left(1+\frac{1}{H_1^2(s)}\right)\right\}v_2(s)+\left\{\frac{3k_1(s)k_1'(s)H_1(s)-k_1^2(s)H_1'(s)}{H_1^2(s)}\right\}v_3(s)$$

dir [8]. (4.14)

Önerme 4.8. γ 3.mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Eğer γ zayıf $AW(2)$-tipinden ise

$$k_1''(s) - \frac{k_1^3(s)}{H_1^2(s)} - k_1^3(s) = 0 \tag{4.15}$$

dir [8].

İspat: γ zayıf $AW(2)$-tipinden olsun. Böylece (3.1) eşitliği sağlanır. (3.1) eşitliğinde (2.15) ve (4.14) yerlerine konur ve $v_2(s)$ ile $v_3(s)$ nin ortogonal olduğu göz önüne alınırsa,

$$\left\{k_1''(s) - k_1^3(s)\left(1 + \frac{1}{H_1^2(s)}\right)\right\}v_2(s) + \left\{\frac{3k_1(s)k_1'(s)H_1(s) - k_1^2(s)H_1'(s)}{H_1^2(s)}\right\}v_3(s)$$
$$= \left\{\frac{3k_1(s)k_1'(s)H_1(s) - k_1^2(s)H_1'(s)}{H_1^2(s)}\right\}v_3(s)$$

elde edilir. $v_2(s)$ ve $v_3(s)$ lineer bağımsız vektörler olduğundan $v_2(s)$ nin katsayısı sıfır olmalıdır. Yani

$$k_1''(s) - k_1^3(s) - \frac{k_1^3(s)}{H_1^2(s)} = 0$$

dır.

Teorem 4.9. γ rankı 1 olan bir genel helis olsun. Eğer γ zayıf $AW(2)$-tipinden ise

$$k_1(s) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A}.s + c} \tag{4.16}$$

ve

$$k_2(s) = \sqrt{A-1}.k_1(s) \tag{4.17}$$

dir. Burada $A = 1 + \dfrac{1}{H_1^2(s)}$ dir [8].

İspat: γ zayıf $AW(2)$-tipinden ise (3.1) sağlanır. (2.15) ve (4.14) eşitlikleri (3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left\{k_1''(s)-k_1^3(s)\left(1+\frac{1}{H_1^2(s)}\right)\right\}v_2(s)+\left\{\frac{3k_1(s)k_1'(s)H_1(s)-k_1^2(s)H_1'(s)}{H_1^2(s)}\right\}v_3(s)$$

$$=\left\{\frac{3k_1(s)k_1'(s)H_1(s)-k_1^2(s)H_1'(s)}{H_1^2(s)}\right\}v_3(s)$$

elde edilir. $v_2(s)$ ve $v_3(s)$ lineer bağımsız vektörler olduğundan $v_2(s)$ nin katsayısı sıfır olmalıdır. Böylece

$$k_1''(s)-k_1^3(s).\left(1+\frac{1}{H_1^2(s)}\right)=0$$

olup bu denklemin çözümü bize (4.16) ve (4.17) denklemlerini verir.

Teorem 4.10. γ 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. $AW(1)$-tipinden dairesel ve genel helis yoktur [8].

İspat: γ bir helis olsun. Bu taktirde tanım gereği $H_1(s)$ sabit olup böylece

$$H_1'(s)=0$$

dır. γ $AW(1)$-tipinden olduğundan Tanım 3.3. (i) gereği $N_3(s)=0$ dır. Buradan (4.14) gereği

$$\left\{k_1''(s)-k_1^3(s)\left(1+\frac{1}{H_1^2(s)}\right)\right\}v_2(s)+\left\{\frac{3k_1(s)k_1'(s)H_1(s)-k_1^2(s)H_1'(s)}{H_1^2(s)}\right\}v_3(s)=0$$

elde edilir. $v_2(s)$ ile $v_3(s)$ lineer bağımsız olduğundan, $v_2(s)$ ve $v_3(s)$ vektörlerinin katsayıları sıfır olmalıdır. Böylece

$$k_1''(s)-k_1^3(s).(1+\frac{1}{H_1^2(s)})=0$$

ve

$$\frac{3k_1(s)k_1'(s)H_1(s)-k_1^2(s)H_1'(s)}{H_1^2(s)}=0$$

bulunur. $H_1'(s)=0$ ve $v_2(s)$ ile $v_3(s)$ lineer bağımsız olduğundan son iki denklem

$$k_1''(s)-k_1^3(s).(1+\frac{1}{H_1^2(s)})=0$$

ve

$$3k_1(s)k_1'(s)H_1(s)=0$$

biçiminde yazılabilir. Bu diferansiyel denklemlerin çözümü olmadığından $AW(1)$-tipinden dairesel ve genel helis yoktur.

Teorem 4.11. γ 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Bu taktirde γ $AW(2)$-tipinden ise

$$3(k_1'(s))^2k_1(s)H_1(s)-k_1^2(s)k_1'(s)H_1'(s)-k_1^2(s)k_1''(s)H_1(s)+k_1^5(s)H_1(s)\left(1+\frac{1}{H_1^2(s)}\right)=0$$

dir[8]. (4.18)

İspat: γ $AW(2)$-tipinden olduğundan (3.4) eşitliği gereği $N_3(s)$ ile $N_2(s)$ lineer bağımlıdır. (4.13) eşitliğinde $v_2(s)$ ve $v_3(s)$ katsayılarına sırasıyla $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$, (4.14) eşitliğinde de $v_2(s)$ ve $v_3(s)$ katsayılarına sırasıyla $\tau(s)$ ve $\delta(s)$ diyelim. Bu durumda (4.13) ve (4.14) eşitliklerini sırasıyla

$$N_2(s)=\alpha(s)v_2(s)+\beta(s)v_3(s)$$

$$N_3(s)=\tau(s)v_2(s)+\delta(s)v_3(s)$$

biçiminde yazabiliriz. $N_3(s)$ ile $N_2(s)$ lineer bağımlı olduğundan katsayılar determinantı sıfır olur. Böylece

$$\begin{vmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ \tau(s) & \delta(s) \end{vmatrix} = 0 \tag{4.19}$$

yazabiliriz. Burada

$$\alpha(s) = k_1'(s) \quad , \quad \beta(s) = \frac{k_1^2(s)}{H_1(s)}$$

ve

$$\tau(s) = k_1''(s) - k_1^3(s).(1 + \frac{1}{H_1^2(s)}) \quad , \quad \delta(s) = \frac{3k_1(s)k_1'(s)H_1(s) - k_1^2(s)H_1'(s)}{H_1^2(s)}$$

olup $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\tau(s)$ ve $\delta(s)$ eşitlikleri (4.19) da yerine konulduğunda (4.18) elde edilir.

Sonuç 4.12. γ 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Eğer γ $AW(2)$-tipinden bir genel helis ise

$$3(k_1'(s))^2 - k_1(s)k_1''(s) + k_1^4(s)\left(1 + \frac{1}{H_1^2(s)}\right) = 0 \tag{4.20}$$

dir [8].

Teorem 4.13. γ 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. γ $AW(3)$-tipindendir $\Leftrightarrow$

$$3k_1(s)k_1'(s)H_1(s) - k_1^2(s)H_1'(s) = 0 \tag{4.21}$$

dir [8].

İspat: γ $AW(3)$-tipinden olduğundan (3.5) eşitliği sağlanır. Böylece $N_1(s)$ ile $N_3(s)$ lineer bağımlı olup

$$\frac{3k_1(s)k_1'(s)H_1(s)-k_1^2(s)H_1'(s)}{H_1^2(s)}=0$$

elde edilir. Bu ise

$$3k_1(s)k_1'(s)H_1(s)-k_1^2(s)H_1'(s)=0$$

olmasını gerektirir.

Sonuç 4.14. γ 3. mertebeden ve $AW(3)$-tipinden bir Frenet eğrisi olsun. Eğer γ rankı 1 olan bir genel helis ise bir dairesel helistir [8].

İspat: γ $AW(3)$-tipinden bir Frenet eğrisi ise (4.21) sağlanır. Eğer γ rankı 1 olan bir genel helis ise Teorem 4.5. gereği $H_1(s)$ sabit olup türev alınırsa,

$$H_1'(s)=0 \tag{4.22}$$

bulunur. (4.22) eşitliği (4.21) de yerine konursa,

$$3k_1(s)k_1'(s)H_1(s)=0$$

elde edilir. γ bir uzay eğrisi olduğundan

$$H_1(s)\neq 0$$

dır. Böylece

$$k_1'(s)=0$$

bulunur. Bu ise $k_1(s)$ in sabit olmasını gerektirir. $H_1(s)=\dfrac{k_1(s)}{k_2(s)}$ sabit olduğundan $k_2(s)$ de sabit olur. Böylece γ bir dairesel helistir [8].

Teorem 4.15. γ rankı 1 olan bir genel helis olsun.Eğer γ $AW(2)$-tipinden ise

$$k_1(s) = \frac{1}{\sqrt{-As^2 + Bs + C}} \tag{4.23}$$

ve

$$k_2(s) = \sqrt{A-1}.k_1(s) \tag{4.24}$$

dir. Burada,

$$A = 1 + \frac{1}{H_1^2(s)}, \tag{4.25}$$

B ve C reel sabitlerdir [8].

İspat: γ rankı 1 olan $AW(2)$-tipinden genel bir helis ise (4.20) sağlanır. (4.25), (4.20) eşitliğinde yerine konursa

$$3(k_1'(s))^2 - k_1(s)k_1''(s) + k_1^4(s).A = 0 \tag{4.26}$$

elde edilir. Şimdi elde edilen bu diferansiyel denklemi çözelim. Bunun için (4.26) eşitliğinde yerine konmak üzere

$$k_1(s) = x$$

dönüşümünü yapalım. Bu durumda (4.26) denkleminden

$$x\frac{d^2x}{ds^2} - 3.(\frac{dx}{ds})^2 = A.x^4, A = 1 + \frac{1}{H_1^2(s)} \tag{4.27}$$

elde edilir. Şimdi

$$x = y^p \tag{4.28}$$

diyelim ve bu ifadenin iki defa türevini alalım. Böylece

$$\frac{dx}{ds} = p.y^{p-1}\frac{dy}{ds} \tag{4.29}$$

ve

$$\frac{d^2x}{ds^2} = p.(p-1)y^{p-2}(\frac{dy}{ds})^2 + p.y^{p-1}\frac{d^2y}{ds^2} \tag{4.30}$$

bulunur. Şimdi (4.28), (4.29) ve (4.30) eşitliklerini (4.27) de yerine koyalım. Buradan

$$y^p\left[py^{p-1}\frac{d^2y}{ds^2} + p(p-1)y^{p-2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right] - 3p^2y^{2p-2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = Ay^{4p},$$

$$py^{2p-1}\frac{d^2y}{ds^2} + p(p-1)y^{2p-2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - 3p^2y^{2p-2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = Ay^{4p},$$

olup en son eşitlikte

$$p(p-1) = 3p^2 \quad (yani \;\; p = -\frac{1}{2})$$

değeri yerine konulursa,

$$py^{2p-1}\frac{d^2y}{ds^2} = Ay^{4p}, y^{-2}(-\frac{1}{2}\frac{d^2y}{ds^2}) = Ay^{-2}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -2A$$

sonucuna varılır. Şimdi bu eşitliği çözelim. Bunun için integral alınırsa

$$\frac{dy}{ds} = -2As + B$$

olur. Bir daha integral alınırsa

$$y = -As^2 + Bs + C$$

elde edilir. Burada

$$x = y^{-\frac{1}{2}}$$

kullanılarak

$$x = \left(-As^2 + Bs + C\right)^{-\frac{1}{2}}$$

sağlanır. $H_1 = \dfrac{k_1}{k_2}$ olduğundan böylece (4.23) ve (4.24) elde edilmiş olur.

Sonuç 4.16. γ 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Eğer γ $AW(2)$-tipinden ise γ dairesel helis olamaz [8].

İspat: Teorem 4.15. gereği γ bir dairesel helis ise

$$k_1(s) = \frac{1}{\sqrt{-As^2 + Bs + c}} = sabit$$

ve

$$k_2(s) = \sqrt{A-1}.k_1(s) = sabit$$

olur ki bunun için gerek ve yeter şart $A = B = 0$ olmasıdır. Fakat $A = 0$ için

$$k_2(s) = \sqrt{-1}k_1(s)$$

olur ki bu mümkün değildir. Dolayısıyla γ bir dairesel helis olamaz.

5. AW(k)-TİPİNDEN SLANT HELİSLER

Bu bölümde $AW(k)$-tipinden slant helislerin karakterizasyonları elde edilecektir.

Tanım 5.1. γ, $k_1 \neq 0$ olacak şekilde bir eğri olsun. Eğer γ nın asli normal doğruları sabit bir yön ile sabit açı yapıyor yani, $U = (1,0,0)$ sabit vektörü için $\langle U, N\rangle = \cos\theta = sabit$ ise γ ya bir slant helis denir [9].

Önerme 5.2. γ, $k_1 \neq 0$ olacak biçimde bir birim hızlı eğri olsun. Bu taktirde γ bir slant helistir $\Leftrightarrow$

$$\sigma(s) = \left(\frac{k_1^2(s)}{\left(k_1^2(s) + k_2^2(s)\right)^{3/2}} \left(\frac{k_2(s)}{k_1(s)} \right)' \right) \tag{5.1}$$

fonksiyonu sabittir [9].

Örnek 5.3.

$$\gamma(\theta) = \Big(-\frac{a^2-b^2}{2a}\Big(\frac{\cos((a+b)\theta)}{(a+b)^2} + \frac{\cos((a-b)\theta)}{(a-b)^2}\Big), -\frac{a^2-b^2}{2a}\Big(\frac{\sin((a+b)\theta)}{(a+b)^2} + \frac{\sin((a-b)\theta)}{(a-b)^2}\Big),$$

$$-\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{ab}\cos(b\theta) \Big)$$

parametrizasyonu ile verilen eğrinin bir slant helis olduğunu gösterelim.

Bu eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleri hesaplandığında

$$k_1(\theta)=\sqrt{a^2-b^2}\cos(b\theta),\quad k_2(\theta)=\sqrt{a^2-b^2}\sin(b\theta)$$

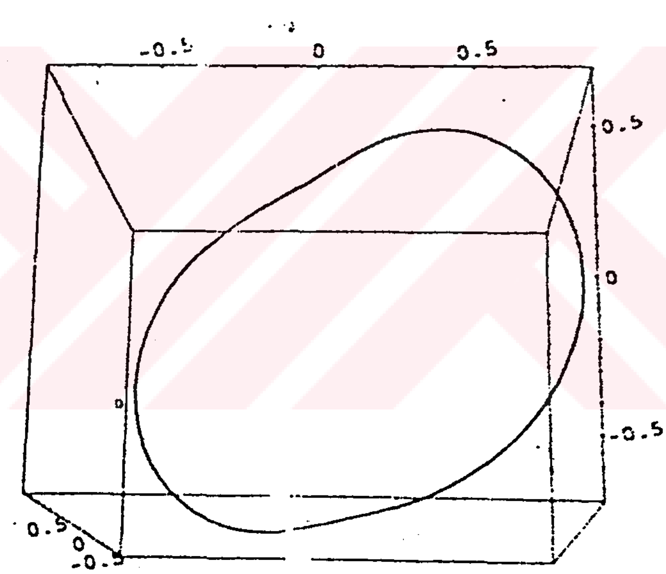
olup buradan

$$\sigma(\theta)=\frac{-b}{\sqrt{a^2-b^2}}\ ,\quad \frac{k_2}{k_1}(\theta)=\tan(b\theta)$$

$$\left(\frac{k_2}{k_1}(\theta)\right)'=\frac{-b}{\cos^2(b\theta)}\neq 0 \text{ ve } \left(\frac{k_2}{k_1}(\theta)\right)''=\frac{2b^2}{\cos^2(b\theta)}\neq 0$$

elde edilir.

Bu durumda $\gamma(\theta)$ bir slant helis ama bir silindirik helis değildir. $a=2$ $b=1$ için γ nın grafiği aşağıdaki gibidir [9].



Yukarıda verilen Önerme 5.2. yi kullanarak aşağıdaki sonuçlar kolayca elde edilir.

Sonuç 5.4. γ, IE^n de 3. mertebeden bir slant helis ise

$$k_2'(s)k_1(s)-k_1'(s)k_2(s)=c\left(k_1^2(s)+k_2^2(s)\right)^{3/2};c\in IR \tag{5.2}$$

dir.

Sonuç 5.5. γ, IE^n de 3. mertebeden bir slant helis ise

$$-H_1'(s)k_2^2(s)=c\left(k_1^2(s)+k_2^2(s)\right)^{3/2};c\in IR \tag{5.3}$$

dir.

Önerme 5.6. γ eğrisi 3. mertebeden $AW(1)$-tipinden bir slant helis ise

$$-3c_1k_1'(s)k_1^4(s)=c\left(k_1^6(s)+c_1^2\right)^{3/2}$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{c}{c_1}\cdot\left[-4\frac{k_1'(s)}{k_1^5(s)}\cdot\left(k_1^6(s)+c_1^2\right)^{3/2}+9.\left(k_1^6(s)+c_1^2\right)^{1/2}.k_1(s)k_1'(s)\right]-k_1^3(s)-\frac{c_1^2}{k_1^3(s)}=0 \tag{5.4}$$

dir. Burada $c_1\neq 0$ ve c reel sabitlerdir.

İspat: γ eğrisi $AW(1)$-tipinden olduğundan (3.7) eşitliğinin türevi yardımıyla

$$k_2'(s)=\frac{-2c_1k_1'(s)}{k_1^3(s)} \tag{5.5}$$

elde edilir. (3.7) eşitliği (3.6) da yerine konulursa

$$k_1''(s)=k_1^3(s)+\frac{c_1^2}{k_1^3(s)} \tag{5.6}$$

bulunur. Ayrıca γ bir slant helis olduğundan (5.2) eşitliği sağlanır. Böylece (3.7) ve (5.5) eşitlikleri (5.2) de yerine konulduğunda

$$-3c_1k_1'(s)k_1^4(s)=c\left(k_1^6(s)+c_1^2\right)^{3/2} \tag{5.7}$$

bulunur. (5.7) eşitliğinden türev alındığında

$$k_1''(s) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{c}{c_1}\left[\frac{-4k_1'(s)}{k_1^5(s)}\left(k_1^6(s)+c_1^2\right)^{3/2} + 9.\left(k_1^6(s)+c_1^2\right)^{1/2}k_1(s)k_1'(s)\right] \tag{5.8}$$

elde edilir. (5.6) ifadesi, (5.8) de yerine yazılırsa istenilen eşitlik elde edilir.

Önerme 5.7. γ eğrisi 3. mertebeden bir slant helis olsun. Bu taktirde γ $AW(2)$-tipinden ise

$$\begin{gathered} 3\left(k_1'(s)\right)^2 k_2(s) + ck_1'(s)\left(k_1^2(s)+k_2^2(s)\right)^{3/2} \\ = k_1''(s)k_1(s)k_2(s) - k_1^4(s)k_2(s) - k_1^2(s)k_2^3(s)\ ;\ c \in IR \end{gathered} \tag{5.9}$$

dir.

İspat: γ eğrisi slant helis olduğundan (5.2) eşitliği sağlanır. (5.2) eşitliğinde $k_2'(s)$ yi çekersek

$$k_2'(s) = \frac{c\left(k_1^2(s)+k_2^2(s)\right)^{3/2} + k_1'(s)k_2(s)}{k_1(s)} \tag{5.10}$$

elde edilir. Ayrıca γ eğrisi $AW(2)$-tipinden olduğundan (5.10) eşitliği de (3.8) de yerine konursa, (5.9) bulunur.

Önerme 5.8. γ eğrisi 3. mertebeden bir slant helis olsun. Bu taktirde γ $AW(3)$-tipinden

$$-3c_1k_1'(s)k_1^4(s) = c\left(k_1^6(s)+c_1^2\right)^{3/2}\ ;\ c, c_1 \in IR \tag{5.11}$$

dir.

İspat: γ eğrisi $AW(3)$-tipinden bir slant helis olduğundan (3.11) ve (5.2) eşitliği sağlanır. (3.11) denklemi ve çözümü (5.2) de yerine yazılırsa (5.11) denklemi elde edilir.

Önerme 5.9. γ eğrisi 3. mertebeden zayıf $AW(2)$-tipinden bir slant helis ise

$$\frac{k_2''(s)k_1(s)}{\sqrt{k_1^2(s)+k_2^2(s)}}-k_1(s)k_2(s)\sqrt{k_1^2(s)+k_2^2(s)}=3c\big(k_1(s)k_1'(s)+k_2(s)k_2'(s)\big)\ \ ;\ \ c\in IR \tag{5.12}$$

dir.

İspat: γ zayıf $AW(2)$-tipinden bir eğri olduğundan (3.3), γ bir slant helis olduğundan (5.2) eşitliği sağlanır. (3.3) eşitliğinden $k_1''(s)$ çekilirse

$$k_1''(s)=k_1^3(s)+k_1(s)k_2^2(s) \tag{5.13}$$

elde edilir. (5.2) eşitliğinin türevi alınıp düzenlenirse

$$k_2''(s)k_1(s)-k_1''(s)k_2(s)=3c\cdot\big(k_1^2(s)+k_2^2(s)\big)^{1/2}\cdot\big(k_1(s)k_1'(s)+k_2(s)k_2'(s)\big) \tag{5.14}$$

bulunur. (5.13) eşitliğini (5.14) de yerine konulduğunda,

$$\begin{aligned}&k_2''(s)k_1(s)-k_1^3(s)k_2(s)-k_1(s)k_2^3(s)\\&=3c\cdot\big(k_1^2(s)+k_2^2(s)\big)^{1/2}\cdot\big(k_1(s)k_1'(s)+k_2(s)k_2'(s)\big)\end{aligned} \tag{5.15}$$

elde edilir. Son olarak (5.15) eşitliğinden istenen sonuç bulunur.

6. AW(k)-TİPİNDEN BERTRAND EĞRİLERİ VE KONİKSEL GEODEZİK EĞRİLER

Bu bölümde $AW(k)$ -tipinden Bertrand eğrileri ve koniksel geodezik eğrilerin karakterizasyonları elde edilecektir.

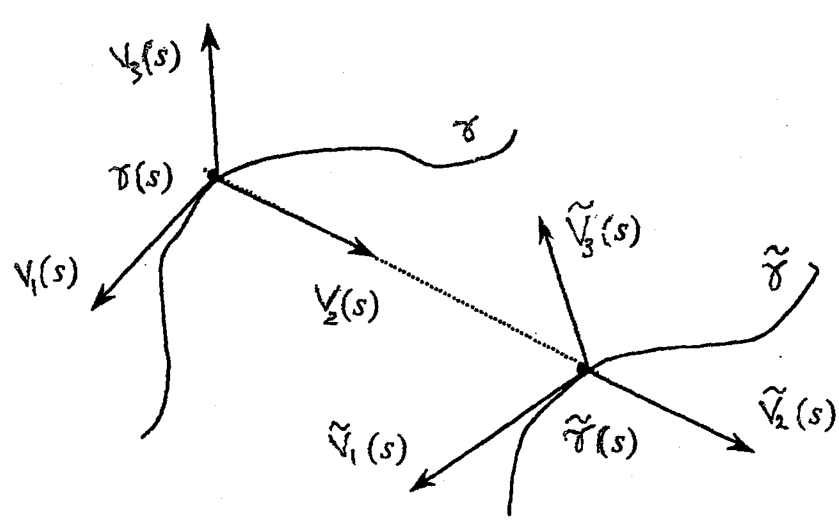
Tanım 6.1. $\gamma : I \to E^3$ birim hızlı eğrisi için $D(s) = k_2(s).v_1(s) + k_1(s).v_3(s)$ ifadesi γ nın Darboux vektör alanı olarak adlandırılır [10].

Tanım 6.2. $\gamma : I \to E^3$ birim hızlı eğrisi için

$$\widetilde{D}(s) = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)(s)v_1(s) + v_3(s), \left(k_1(s) \neq 0\right)$$

ifadesine γ nın modifiye edilmiş Darboux vektör alanı denir [9].

Tanım 6.3. $k_1(s) \neq 0$ olacak şekilde bir $\gamma : I \to E^3$ eğrisi için eğer $s \in I$ da γ ve $\widetilde{\gamma}$ nın asli normal doğruları eşit olacak biçimde bir $\widetilde{\gamma} : I \to E^3$ eğrisi var ise γ ya bir Bertrand eğrisi denir. $\widetilde{\gamma}$ eğrisine de γ nın Bertrand çifti adı verilir [10].



Teorem 6.4. $\gamma \subset IR^3$ bir Bertrand eğrisi olsun. Bu taktirde c sabit bir sayı olmak üzere, γ nın Bertrand çifti

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(s) + cv_2(s) \tag{6.1}$$

biçimindedir [10].

İspat: $\gamma : I \to R^3$ eğrisi birim hızlı bir eğri olsun. $\tilde{\gamma}$, γ nın Bertrand çifti ise

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(s) + u(s)v_2(s) \tag{6.2}$$

biçiminde verilebilir. (6.2) de türev alınırsa

$$(\tilde{\gamma}(s))' = \gamma'(s) + u'(s)v_2(s) + u(s)v_2'(s) = \gamma'(s) + u'(s)v_2(s) + u(s)\left(-k_1(s)v_1(s) + k_2(s)v_3(s)\right)$$

ve buradan

$$(\tilde{\gamma}(s))' = \left(1 - u(s)k_1(s)\right)v_1(s) + u'(s)v_2(s) + u(s)k_2(s)v_3(s) \tag{6.3}$$

bulunur. $(\tilde{\gamma})'(s)$ vektörü, $\tilde{v}_1(s)$ vektörüne paralel olduğundan

$$(\tilde{\gamma})'(s) \perp \tilde{v}_2(s)$$

dir. $\tilde{v}_2(s)$ vektörü $v_2(s)$ vektörüne paralel olduğundan, $(\tilde{\gamma})'(s) \perp v_2(s)$ olur. Böylece

$$\left\langle (\tilde{\gamma}(s))', v_2(s) \right\rangle = 0 \tag{6.4}$$

dır. (6.3) eşitliği (6.4) de yerine konursa

$$u'(s) = 0$$

elde edilir. Buna göre, $u : I \to R$ fonksiyonu sabittir. Böylece (6.1) eşitliği elde edilir.

Sonuç 6.5. $\widetilde{\gamma}$ eğrisi γ eğrisinin Bertrand çifti ise

$$\left(\widetilde{\gamma}(s)\right)' = \left(1 - ck_1(s)\right)v_1(s) + ck_2(s)v_3(s) \tag{6.5}$$

dir [10].

İspat: $\gamma : I \to R^3$ eğrisi birim hızlı bir eğri olmak üzere, $\widetilde{\gamma}$ eğrisi γ eğrisinin Bertrand çifti ise (6.1) eşitliğine göre

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(s) + cv_2(s)$$

biçimindedir. Buradan

$$\left(\widetilde{\gamma}(s)\right)' = \gamma'(s) + cv_2'(s) = v_1(s) + c\left(-k_1(s)v_1(s) + k_2(s)v_3(s)\right) = \left(1 - ck_1(s)\right)v_1(s) + ck_2(s)v_3(s)$$

elde edilir.

Teorem 6.6. $\gamma : I \to R^3$ eğrisi birim hızlı bir eğri olsun. $\widetilde{\gamma}$, γ nın Bertrand çifti olmak üzere bu eğrilerin karşılıklı noktalardaki teğet vektörleri arasındaki açının ölçüsü sabittir [10].

İspat: $\left\langle \widetilde{v}_1(s), v_1(s) \right\rangle' = 0$ olduğu gösterilirse ispat yapılmış olur.

$$\left\langle \widetilde{v}_1(s), v_1(s) \right\rangle' = \left\langle \widetilde{v}_1'(s), v_1(s) \right\rangle + \left\langle \widetilde{v}_1(s), v_1'(s) \right\rangle = \left\langle \widetilde{v}(s)\widetilde{k}_1(s)\widetilde{v}_2(s), v_1(s) \right\rangle + \left\langle \widetilde{v}_1(s), k_1(s)v_2(s) \right\rangle$$

$$= \widetilde{v}(s)\widetilde{k}_1(s)\left\langle \widetilde{v}_2(s), v_1(s) \right\rangle + k_1(s)\left\langle \widetilde{v}_1(s), v_2(s) \right\rangle \tag{6.6}$$

dır. $\widetilde{v}_2$, v_2 ye paralel ve $v_2 \perp v_1$ olduğundan

$$\langle \widetilde{v}_2(s), v_1(s)\rangle = 0 \tag{6.7}$$

dır. $\widetilde{v}_1 \perp \widetilde{v}_2$ ve $\widetilde{v}_2$, v_2 ye paralel olduğundan

$$\langle \widetilde{v}_1(s), v_2(s)\rangle = 0 \tag{6.8}$$

dır. (6.7) ve (6.8), (6.6) da yerine konursa, $\langle \widetilde{v}_1(s), v_1(s)\rangle' = 0$ olduğu görülür.

Önerme 6.7. γ 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. $k_2(s) \neq 0$ için γ bir Bertrand eğrisidir $\Leftrightarrow$ $\forall s \in I$ için $Ak_1(s) + Bk_2(s) = 1$ olacak şekilde sıfırdan farklı A ve B reel sayıları vardır [4].

İspat: **($\Rightarrow$):** $\gamma : I \to R^3$ birim hızlı eğrisi Bertrand eğrisi olsun. Bu durumda aynı aralıkta tanımlı $\widetilde{\gamma}$ eğrisi vardır öyle ki γ ile $\widetilde{\gamma}$ Bertrand çifti oluşturur.

Her bir $s \in I$ için $\gamma(s)$ ve $\widetilde{\gamma}(s)$ noktalarında γ ve $\widetilde{\gamma}$ nın Frenet çatı alanları sırasıyla

$$\{v_1(s), v_2(s), v_3(s)\},\ \{\widetilde{v}_1(s), \widetilde{v}_2(s), \widetilde{v}_3(s)\}$$

olsun. Buna göre $v_1(s)$ ile $\widetilde{v}_1(s)$ arasındaki açı θ olmak üzere

$$\widetilde{v}_1(s) = \cos\theta . v_1(s) + \sin\theta . v_3(s)$$

yazılabilir. Türev almak suretiyle bu eşitlikten

$$\frac{d\widetilde{s}}{ds}\widetilde{k}_1(s)\widetilde{v}_2(s) = [k_1(s).\cos\theta - k_2(s).\sin\theta]v_2(s) + \frac{d(\cos\theta)}{ds}v_1(s) + \frac{d(\sin\theta)}{ds}v_3(s)$$

elde edilir. $\{\widetilde{v}_2(s), v_2(s)\}$ lineer bağımlı olduğundan

$$\theta = sabit$$

bulunur. Buna göre

$$\tilde{v}_1(s) = \cos\theta . v_1(s) + \sin\theta . v_3(s)$$

ve

$$\tilde{\gamma}'(s) = \frac{d\tilde{s}}{ds}\tilde{v}_1(s) = (1 - Ak_1(s))v_1(s) + Ak_2(s)v_3(s)$$

eşitliklerinden

$$\frac{1 - Ak_1(s)}{\cos\theta} = \frac{Ak_2(s)}{\sin\theta}$$

elde edilir. Buradan

$$Ak_1(s) + Ak_2(s)\cot g\theta = 1$$

veya $A\cot g\theta = B$ yazılarak

$$Ak_1(s) + Bk_2(s) = 1$$

bulunur.

$(\Leftarrow)$: Şartın yeterliliği, gerek şartın ispatı tersine takip edilerek elde edilir.

Sonuç 6.8. Dik dairesel helis bir Bertrand eğrisidir.

Buradan itibaren eğer γ $k_1(s) \neq 0,\ k_2(s) \neq 0$ olacak biçimde bir eğri ise γ ya kısaca hasdır diyeceğiz.

Sonuç 6.9. γ , $k_1(s) \neq 0, k_2(s) \neq 0$ olacak şekilde 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Bu taktirde γ bir Bertrand eğrisidir $\Leftrightarrow$

$$A.\left(k_2'(s)k_1(s) - k_1'(s)k_2(s)\right) - k_2'(s) = 0 \tag{6.9}$$

olacak şekilde bir $A \neq 0$ reel sayısı vardır [11].

Önerme 6.10. γ eğrisi 3. mertebeden silindirik helis olmayan has bir Bertrand eğrisi olsun. Eğer

$$k_2'(s) = C\left(k_1^2(s) + k_2^2(s)\right)^{3/2} \; ; \; 0 \neq C \in IR \tag{6.10}$$

eşitliği sağlanırsa γ bir slant helistir [12].

İspat: γ bir Bertrand eğrisi olduğundan (6.9) eşitliği ve bir slant helis olduğundan (5.2) eşitliği sağlanır. Böylece (6.9) eşitliği

$$k_2'(s)k_1(s) - k_1'(s)k_2(s) = \frac{k_2'(s)}{A}, (A \neq 0)$$

olacak şekilde düzenlenip (5.2) denkleminde yerine konursa

$$k_2'(s) = C.\left(k_1^2(s) + k_2^2(s)\right)^{3/2}$$

elde edilir. Burada γ bir silindirik helis olmadığından $c \neq 0$ ve $A \neq 0$ için $(c.A = C)$ $C \neq 0$ dır.

Önerme 6.11. $\gamma : I \rightarrow IR^3$ eğrisi silindirik helis olmayan has bir Bertrand eğrisi olsun. Eğer

$$H_1'(s)=\frac{D\left(k_1^2(s)+k_2^2(s)\right)^{3/2}}{k_2^2(s)}\ ;\ 0\neq D\in IR$$

eşitliğini sağlanır ise γ bir slant helistir.

İspat: γ silindirik helis olmayan bir Bertrand eğrisi ise

$$\frac{k_2(s)}{k_1(s)}\neq sabit$$

ve

$$A\left(k_2'(s)k_1(s)-k_1'(s)k_2(s)\right)-k_2'(s)=0$$

olacak şekilde bir $A\neq 0$ reel sayısı vardır.

$$A\left(k_2'(s)k_1(s)-k_1'(s)k_2(s)\right)-k_2'(s)=0$$

eşitliğini

$$k_2'(s)k_1(s)-k_1'(s)k_2(s)=\frac{k_2'(s)}{A}\tag{6.11}$$

olacak şekilde düzenleyelim. Daha sonra (6.11) ifadesi,

$$H_1(s)=\frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

eşitliğinin türevi alınıp düzenlendikten sonra yerine konursa

$$k_2'(s)=-A.H_1'(s)k_2^2(s)\tag{6.12}$$

elde edilir. (6.12) eşitliği (6.10) eşitliğinde yerine konursa

$$H_1'(s) = -\frac{C}{A} \cdot \frac{\left(k_1^2(s) + k_2^2(s)\right)^{3/2}}{k_2^2(s)}$$

elde edilir. Burada

$$\left(A \neq 0, C \neq 0 \Rightarrow D = -\frac{C}{A} \neq 0\right)$$

olacak şekilde göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Önerme 6.12. $\gamma : I \to E^3$ eğrisi has bir Bertrand eğrisi olsun. Bu taktirde γ $AW(2)$-tipindendir $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\left(k_1'(s)\right)^2 k_2(s).\left(2 - Ak_1(s)\right) + Ak_1^2(s)k_1'(s)k_2'(s) \\ &= k_1''(s)k_1(s)k_2(s) - k_1^4(s)k_2(s) - k_1^2(s)k_2^3(s) \quad ; 0 \neq A \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{6.13}$$

dir [12].

İspat: $(\Rightarrow)$: γ $AW(2)$-tipinden bir eğri olduğundan (3.8) eşitliği ve γ bir Bertrand eğrisi olduğundan (6.9) eşitliği sağlanır. (6.9) eşitliğinde $k_2'(s)$ çekilirse

$$k_2'(s) = A\left(k_2'(s)k_1(s) - k_1'(s)k_2(s)\right) \tag{6.14}$$

olup (6.14) eşitliği (3.8) de yerine konursa, (6.13) elde edilir.

$(\Leftarrow)$: Önerme 3.8. gereği açıktır.

Teorem 6.13. $\gamma : I \to E^3$ eğrisi has bir Bertrand eğrisi olsun. Bu taktirde γ $AW(3)$-tipindendir $\Leftrightarrow$ γ bir dairesel helistir [12].

İspat: $(\Rightarrow)$: γ $AW(3)$-tipinden bir eğri olduğundan (3.11) eşitliği ve bir Bertrand eğrisi olduğundan (6.9) eşitliği sağlanır. (3.11) diferansiyel eşitliğinin çözümü olan

$$k_2(s) = \frac{c}{k_1^2(s)} \tag{6.15}$$

eşitliğinin türevi alınırsa

$$k_2'(s) = \frac{-2ck_1'(s)}{k_1^3(s)} \tag{6.16}$$

olup (6.16) ve (6.15) eşitlikleri (6.9) de yerine konursa

$$k_1(s) = \frac{2}{3A} = sabit \tag{6.17}$$

bulunur. (6.17) denklemi (6.15) eşitliğinde yerine konulduğunda

$$k_2(s) = \frac{c}{\left(\frac{2}{3A}\right)^2} = \frac{c}{\frac{4}{9A^2}} = \frac{9A^2c}{4} = sabit$$

sonucuna varılır. $k_1(s) = sabit$ ve $k_2(s) = sabit$ olduğundan γ bir dairesel helistir.

$(\Leftarrow)$: Teorem 3.7. gereği açıktır.

Önerme 6.14. $\gamma : I \to E^3$ eğrisi has bir Bertrand eğrisi olsun. Bu taktirde γ zayıf $AW(2)$-tipinden ise

$$(Ak_1(s)-1)k_2''(s) - Ak_1(s)k_2(s)\left(k_1^2(s)+k_2^2(s)\right) = 0 \ \ ; \ 0 \neq A \in IR \tag{6.18}$$

dir.

İspat: γ zayıf $AW(2)$-tipinden bir eğri olduğundan (3.3) eşitliği ve γ bir Bertrand eğrisi olduğundan (6.9) eşitliği sağlanır. (3.3) eşitliğinde $k_1''(s)$ çekilirse,

$$k_1''(s) = k_1^3(s) + k_1(s)k_2^2(s) \tag{6.19}$$

elde edilir. (6.9) eşitliğinde türev alınırsa

$$A\big(k_2''(s)k_1(s) - k_1''(s)k_2(s)\big) - k_2''(s) = 0 \tag{6.20}$$

bulunur. (6.19) eşitliği (6.20) de yerine konursa, (6.18) elde edilir.

Teorem 6.15. IE^3 de $AW(1)$-tipinden has bir Bertrand eğrisi yoktur [12].

İspat: γ $AW(1)$-tipinden bir Bertrand eğrisi olsun. Bu taktirde (3.6), (3.7) eşitlikleri ve (6.9) eşitliği sağlanır. (3.7) eşitliği (3.6) diferansiyel eşitliğinde yerine konursa

$$k_1''(s) = k_1^3(s) + \frac{c^2}{k_1^3(s)} \tag{6.21}$$

bulunur. (3.7) ve türevi, (6.9) de yerine konursa

$$A\left(-\frac{2ck_1'(s)k_1(s)}{k_1^3(s)} - \frac{ck_1'(s)}{k_1^2(s)}\right) + \frac{2ck_1'(s)}{k_1^3(s)} = 0$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler ve sadeleştirmeler yapılırsa

$$k_1(s) = \frac{2}{3A} \tag{6.22}$$

bulunur. Elde edilen (6.22) eşitliği (6.21) de yerine konursa

$$0=\frac{8}{27A^3}+\frac{c^2}{\frac{8}{27A^3}}$$

elde edilir. Buradan da

$$A^6=-\frac{64}{(27c)^2}$$

olur ki $A^6 \langle 0$ sağlayacak herhangi bir reel sayı olmadığından bu bir çelişki olur. Böylece kabulümüz yanlıştır. γ $AW(1)$-tipinden değildir.

Tanım 6.16. γ, $k_1(s)\neq 0$ olacak şekilde 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Eğer $\left(\frac{k_2(s)}{k_1(s)}\right)'$ sabit bir fonksiyon ise γ ya bir koniksel geodezik eğridir denir [9].

Tanım 6.15 kullanılarak aşağıdaki sonuç kolayca elde edilebilir.

Sonuç 6.17. γ, $k_1(s)\neq 0$ olacak şekilde 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Bu taktirde γ bir koniksel geodezik eğridir $\Leftrightarrow$

$$k_2'(s)k_1(s)-k_1'(s)k_2(s)=c_1k_1^2(s)\ ;\ \ c_1\in IR \tag{6.23}$$

dir.

Önerme 6.18. γ, $k_1(s)\neq 0$ olacak şekilde bir koniksel geodezik eğri olsun. Bu taktirde γ zayıf $AW(2)$-tipinden ise

$$k_2''(s)-k_1^2(s)k_2(s)-k_2^3(s)=ck_1'(s) \tag{6.24}$$

dir [12].

İspat: γ zayıf $AW(2)$-tipinden bir eğri olduğundan (3.3) eşitliği ve γ koniksel geodezik eğri ise (6.23) eşitliği sağlanır. (6.23) eşitliğinde türev alınırsa

$$k_2''(s)k_1(s) - k_1''(s)k_2(s) = 2c_1k_1(s)k_1'(s) \qquad (6.25)$$

elde edilir. Eğer $2c_1 = c$ konur ve sonra (3.3) eşitliğinde $k_1''(s)$ çekilip (6.25) de yerine konulursa (6.24) bulunur.

Önerme 6.19. $\gamma : I \to E^3$ zayıf $AW(2)$-tipinden bir koniksel geodezik eğri olsun. Eğer $k_2(s)$ sıfırdan farklı sabit ise c, c_1 ve c_2 sıfırdan farklı reel sabitler olmak üzere

$$k_1(s) = \tan\left(\frac{c_1(s+c)}{c_2}\right)c_1 \qquad (6.26)$$

dir [12].

İspat: γ zayıf $AW(2)$-tipinden bir koniksel geodezik eğri olduğundan (6.24) eşitliği sağlanır. $k_2(s)$ sıfırdan farklı sabit olsun. Böylece

$$k_2(s) = c_1 \qquad (6.27)$$

yazılabilir. (6.27) eşitliği (6.24) de yerine konursa

$$-c_1\left(k_1^2(s) + c_1^2\right) = ck_1'(s) \qquad (6.28)$$

elde edilir. (6.28) de $c_2 = -\dfrac{c}{c_1}$ konursa son eşitlik

$$\left(k_1^2(s) + c_1^2\right) = c_2k_1'(s)$$

şeklinde yazılabilir. Son diferansiyel denklemin çözümü bize (6.26) yi verir.

Teorem 6.20. $\gamma : I \to E^3$ bir koniksel geodezik eğri olsun. Bu durumda γ nın $AW(3)$-tipinden olması için gerek ve yeter şart γ nın eğriliklerinin c, c_1 ve c_2 sıfırdan farklı reel sabitler olmak üzere,

$$k_1(s) = \frac{1}{\sqrt[3]{c_1 s + c_2}} \tag{6.29}$$

ve

$$k_2(s) = c\sqrt[3]{(c_1 s + c_2)^2} \tag{6.30}$$

şeklinde olmasıdır [12].

İspat: $(\Rightarrow)$: γ $AW(3)$-tipinden bir eğri olduğundan (3.11) ve γ bir koniksel geodezik eğri olduğundan (6.23) sağlanır. (3.11) ve (6.23) eşitliklerinden

$$3k_1'(s) = Ck_1^4(s)$$

elde edilir. Son diferansiyel denklemin çözümü bize (6.29) eşitliğini verir. (3.11) den (6.30) bulunur.

$(\Leftarrow)$: Teorem 3.7. gereği açıktır.

7. SONUÇ VE TARTIŞMA

Beşinci bölümde $AW(k)$-tipinden slant helisler incelenerek 3. mertebeden bir γ slant helisinin $AW(1)$-tipinden, $AW(2)$-tipinden, $AW(3)$-tipinden ve zayıf $AW(2)$-tipinden olması durumunda sırasıyla Önerme 5.6., Önerme 5.7., Önerme 5.8. ve Önerme 5.9. ispatlanmıştır.

Altıncı bölümde zayıf $AW(k)$-tipinden ve $AW(k)$-tipinden Bertrand eğrileri incelenerek has bir γ Bertrand eğrisinin $AW(2)$-tipinden, $AW(3)$-tipinden ve zayıf $AW(2)$-tipinden olması durumunda sırasıyla Önerme 6.12., Önerme 6.13. ve Önerme 6.14. ispatlanmıştır. Ayrıca $AW(1)$-tipinden Bertrand eğrisinin olmadığı Önerme 6.15. ile ispatlanmıştır. Bir Bertrand eğrisinin hangi şartlar altında bir slant helis olabileceği Öneme 6.10. ile ispatlanmıştır.

Altıncı bölümde ayrıca zayıf $AW(k)$-tipinden ve $AW(k)$-tipinden koniksel geodezik eğriler incelenerek $k_1(s) \neq 0$ olacak şekilde bir koniksel geodezik eğrinin zayıf $AW(2)$-tipinden ve $AW(3)$-tipinden olması durumunda Önerme 6.18. ve Önerme 6.20. ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of differential geometry, John Wiley and Sons, Inc., New York (1996).

[2] O'Neill, B., Elementary differential geometry. Academic Press, New York-London (1996)

[3] Chen, B.Y, Geometry of submanifolds, Pure and Applied Mathematics, No. 22. Marcel Dekker, Inc., New York, (1973).

[4] Hacısalihoğlu H. H., Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Yayınları, (1983).

[5] Ferus D., Schirrmacher S., "Submanifolds in Euclidean space with simple geodesics", *Math. Ann.* **260** (1982), no. 1, 57--62.

[6] Arslan K., Özgür C., "Curves and surfaces of AW(k) type", *Geometry and topology of submanifolds, IX* (Valenciennes/Lyon/Leuven, 1997), *21--26,* World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1999.

[7] Arslan K., West A., "Product submanifolds with pointwise 3-planar normal sections", *Glasgow Math. J.* **37** (1995), no. 1, 73--81.

[8] Arslan K., Çelik Y., Hacısalihoğlu H. H., "On harmonic curvatures of a Frenet curve", *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.* **49** (2000), no. 1-2, 15-23.

[9] Izumiya S., Takeuchi N., "New special curves and developable surfaces", *Turkish J. Math.* **28** (2004), no. 2, 153--163.

[10] do Carmo, Manfredo P., Differential geometry of curves and surfaces, *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.,* 1976.

[11] Izumiya S., Takeuchi N., "Special curves and ruled surfaces", *Beiträge Algebra Geom.* **44** (2003), no. 1, 203--212.

[12] Özgür C, Gezgin F., "On some curves of AW(k)-type", *Differ. Geom. Dyn. Syst.* **7** (2005), 74-80.