T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FIBONACCI SAYILARI VE ALTIN ORAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şamil AKÇAĞIL

Balıkesir, Temmuz-2005

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FIBONACCI SAYILARI ve ALTIN ORAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şamil AKÇAĞIL

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Dilek NAMLI

Sınav Tarihi : 20. 07. 2005

Jüri Üyeleri: Doç. Dr. İ. Naci CANGÜL (Uludağ Ü.)
Yrd. Doç. Dr. Dilek NAMLI (Danışman – Ba.Ü.)
Yrd. Doç. Dr. Recep ŞAHİN (Ba.Ü.)

Balıkesir, Temmuz-2005

ÖZET

FIBONACCI SAYILARI ve ALTIN ORAN

Şamil AKÇAĞIL
Balıkesir üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Dilek NAMLI)
Balıkesir, 2005

Bu tezin amacı Fibonacci sayılarının doğada, bazı sanatsal yapılarda ve sayılar teorisindeki ilişkilerini incelemektir.

Tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Fibonacci dizisi ve altın oran incelenmiştir.

İkinci bölümde Fibonacci dizisinin genel tanım ve teoremleri, ispatları ile verilmiştir.

Son bölümde ise Fibonacci dizisine ait ilginç problemler ve Fibonacci sayıları ile ilgili matematik olimpiyatlarında sorulmuş sorular ve çözümleri verilmiştir. Bu çözümlerin bazıları orijinaldir.

ANAHTAR KELİMELER : Fibonacci sayısı, altın oran

ABSTRACT

FIBONACCI NUMBERS and GOLDEN RATIO

Şamil AKÇAĞIL

Balıkesir University, Institue of Science, Department of Mathematics

(M.Sc.Thesis / Supervisor : Asst. Prof. Dr. Dilek NAMLI)
Balıkesir – TÜRKİYE, 2005

The aim of this thesis is researching relations of Fibonacci numbers in nature, some artistic buildings and number theory.

This thesis consist of three chapters. In the first chapter, Fibonacci progression and golden ratio are studied.

In the second chapter general definitions and theorems of Fibonacci numbers are given with proofs.

In the last chapter, interesting questions concerning Fibonacci numbers and the questions that asked mathematical olympiad about Fibonacci numbers are solved. Some solutions in this chapter are original.

KEY WORDS : Fibonacci number, golden ratio

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
F_n	Fibonacci dizisi
φ	Altın oran veya kutsal oran
a_n	Bir dizinin genel terimi
(a_n)	Genel terimi a_n olan dizi
F^m	m doğal sayısı ile başlayan Fibonacci dizisi
F_m	m moduna göre oluşturulmuş Fibonacci dizisi
$\widehat{F_m}$	m moduna göre oluşturulmuş Dairesel Fibonacci dizisi
$\widehat{xy}$	xy yayı
L_n	Lucas dizisi
(a,b)	a ve b tamsayılarının en büyük ortak böleni
$n\|m$	n tamsayısı m tamsayısını böler

ŞEKİL LİSTESİ

ÖNSÖZ

Günümüzde her şeyi kolay elde etme ve hiç bir zorluk çekmeden her şeye ulaşma hastalığından matematik eğitimi de nasibini almıştır. Bir çok kimse için matematiğin anlamı, anlaşılmaz, sıkıcı ve gereksiz bir yığın problemden başka bir şey değildir. Ortaöğretim ve liselerde matematik eğitimi adeta dört işleme dönüşmüş durumdadır. Bu anlayışta, matematik eğitiminin önemini yeterince kavrayamamış eğitimcilerinin etkisi büyüktür. Fakat öğrenciler hangi mesleği seçerlerse seçsinler, seçtikleri meslekteki başarıları iyi bir matematik eğitimine bağlıdır. Seçtikleri meslekte matematiği kullanıp kullanmamaları önemli değildir. Önemli olan kazandıkları matematiksel disiplindir. Kazandıkları matematiksel analiz gücü ile, kendi mesleklerinde karşılarına çıkan problemleri daha rahat çözeceklerdir.

Diğer taraftan, matematiğin uygulamaları, matematiksel ispatların kusursuz ve sonsuza kadar geçerli olması ve matematiksel ilişkilerin çok derin ve şaşırtıcı olması bakımından matematik olağanüstüdür. Bu açıdan matematik güzel sanat olarak ta görülebilir. Evet matematik öyle bir güzel sanattır ki, kişinin algı düzeyine göre kişiyi büyüler.

Evrendeki ilişkileri anlamanın da anahtarı matematiktir. Çünkü doğa yasaları matematik üzerine bina edilmiştir. Bu yüzden, bugün her hangi bir bilim dalını matematikten ayrı düşünmek mümkün değildir. Artık fizik, kimya ve biyoloji daha fazla matematik içermektedir.

İşte ben de matematiğin güzel yanlarından birini, bir kez daha gösterme adına böyle bir çalışma yaptım. Temelde çok basit bir problem olan "tavşan problemi"nin nasıl şaşırtıcı bir çok sonuçlar doğurduğunu anlatmaya çalıştım. Sadece bu tez bile matematiğin güzelliğini göstermeye yeter kanaatindeyim.

Tez çalışmamda her ihtiyacım olduğunda yanımda olan ve yardımları ile bana yol gösteren, sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Dilek NAMLI' ya çok teşekkürler ederim.

Eğitimimde bu güne kadar emeği geçen anneme ve babama, her zaman bana destek sağlayan kardeşime, bütün öğretmenlerime ve büyüklerime sonsuz minnetimi sunarım.

Balıkesir, 2005 **Şamil AKÇAĞIL**

GİRİŞ

Leonardo Fibonacci 13. yüzyılda yaşamış bir İtalyan matematikçidir. Yaşamı hakkında yazdığı matematik yazıları dışında pek az şey bilinmektedir. İlk ve en iyi bilinen kitabı **Liber Abaci**'yi 1202 tarihinde yazmış olduğundan, 1170 yılı dolayında doğmuş olabileceği tahmin edilmektedir. Bu yönde pek kanıt olmamakla birlikte İtalya'nın Pisa kentinde doğmuş olma olasılığı yüksektir. Fibonacci henüz çocuk yaştayken Kuzey Afrika'ya gitmiş ve burada şu an kullandığımız "0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 " rakamlarını öğrenmiştir. Öğrendiği bu rakamları Liber Abaci adlı kitabında Avrupa'ya tanıtan Fibonacci için "Matematiği Araplardan alıp Avrupa'ya aktaran kişi" denmektedir [20] .

Liber Abaci oldukça büyük hacimli bir kitaptır ve o dönemde bilinen matematiğin büyük bir bölümünü içermektedir. Bu kitapta cebirin kullanımı, farklı önem ve zorluk derecesinde bir çok örnek de verilerek anlatılmaktadır. Liber Abaci, 13.yy Avrupa'sında büyük ilgi görmüştür. Kilisenin yasaklamasına karşın Hint-Arap sayıları İtalyan tüccarlar arasında yayılmıştır. Kitap Kutsal Roma İmparatoru II. Frederick'in dikkatini çeker. II.Frederick bilime düşkün ve bilim adamlarını koruyan bir imparatordur. Fibonacci II.Frederick tarafından koruma altına alınmış ve 1225 yılında **Liber Quadratornum** adlı kitabını yazmıştır. Diophant denklemlerine yer verilen bu kitap, Fibonacci'nin baş yapıtı olmasına rağmen Liber Abaci'ye göre çok daha dar bir çevrenin ilgisini çekmiştir. Bu kitap sayılar teorisine büyük katkı sağlamıştır.

Günümüz matematikçileri Fibonacci' nin adını ne **Liber Abaci** ne de **Liber Quadratornum** kitabından dolayı bilmektedirler. İlginçtir ki, Fibonacci ismi Liber Abaci'de yer alan basit bir problemden dolayı 1202 den günümüze kadar gelmiştir. Bu problem Liber Abaci' deki birçok problemden biri olup diğerlerinden çok daha fazla ilgilenilen ve tavşan üretmek gibi ilk başta matematikle çok fazla ilgisi olmadığı düşünülen bir konuyla ilgilidir. Problem şudur; eğer bir çift tavşan her ay yeni bir çift tavşan doğurursa ve her yeni tavşan çifti kendi doğumlarından iki ay sonra yavrulamaya başlarsa, bir çift tavşandan bir yılda kaç çift tavşan üretilebilir? Burada şu şartlar da söylenmelidir: Tavşanların hiç ölmedikleri ve doğan her tavşan çiftinin bir erkek ve bir dişi olduğu. Buna göre, ilk ay yeni doğmuş bir çift tavşan olsun. İkinci ayda, bu tavşanlar daha yavrulamadıklarından, hala bir çift tavşan olacaktır. Üçüncü ayda bu tavşanlar yavrulayacağından iki çift tavşan olacak, bu yeni doğmuş olan çift dördüncü ay doğurmayacak , oysa ana babaları yeniden bir çift yavru yapacak ve toplam üç çift tavşan olacaktır. Bu mantıkla düşünmeye devam edilirse aşağıdaki sayı dizisi elde edilir:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Bu dizinin terimlerinin çok basit bir kurala dayanarak oluştuğu ilk bakışta görülebilir. Bu kuralı şöyle ifade edebiliriz; ilk ikisi hariç her sayı kendisinden önce gelen iki sayının toplamından oluşmuştur. Böylece, örneğin, dizinin sonundaki Aralık ayı sayısı , Ekim ve Kasım sayıları olan 55 ve 89 sayıları toplanarak kolayca bulunabilir [1].

1. FIBONACCI SAYILARI VE ALTIN ORAN

1.1 Fibonacci Dizisi

Dizinin terimleri F ile gösterilirse dizi de $F_1, F_2, F_3, ..., F_n, ...$ ile gösterilir. $F_1 = 1$ ve $F_2 = 1$ verildiğinde daha sonra gelen bütün terimlerin bulunabilmesini sağlayan basit denklem, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ şeklinde olacaktır. Dizinin terimleri arasında bu kural kadar rahat görülemeyen ancak bundan çok daha fazla ilginç matematiksel ilişkiler vardır. Matematikçilerin asıl ilgisini çeken ve Fibonacci adını bu kadar popüler yapan da işte bu ilişkiler olmuştur. Bunlardan birisi şudur: eğer her Fibonacci sayısı kendisinden önce gelen komşusuna bölünürse bu oran **altın oran** adı verilen bir sayıya yaklaşır. Buna göre, bulunan bu oranlar aşağıdaki gibidir:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 1$$

$$\frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} = 1,6666666...$$

$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1,625$$

$$\frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} = 1,6153846...$$

$$\frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} = 1,6190476...$$

$$\frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} = 1,6176470...$$

$$\frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{89}{55} = 1,6181818...$$

$$\frac{F_{12}}{F_{11}} = \frac{144}{89} = 1,6179775...$$

$$\vdots$$

1.2 Altın Oran

Ardışık iki Fibonacci sayısının birbirine oranı $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.61803399...$ sayısına yaklaşmaktadır. Bu sayı altın oran veya kutsal oran olarak adlandırılır ve φ sembolü ile gösterilir [21]. Fibonacci sayıları üç nedenle insanlığın ilgisini çekmiştir. Bunlardan birincisi dizinin küçük terimlerinin doğada beklenmedik şekillerde ve yerlerde karşımıza çıkması, ikincisi ardışık iki fibonacci sayısının birbirine oranının altın oran veya kutsal oran adı verilen $1.61803399...$ sayısına limit olarak yaklaşması, üçüncüsü de fibonacci sayılarının sayılar teorisinde ilginç uygulamalarının olmasıdır. Önce doğada küçük fibonacci sayılarıyla ne şekilde karşılaşıldığına bir bakalım. Bir bit-kinin sapındaki yapraklarda, bir ağacın dallarının düzeninde hemen her zaman Fibonacci sayıları bulunur. Eğer yapraklardan biri başlangıç noktası olarak alınmışsa ve bundan başlayarak, aşağıya veya yukarıya doğru, başlangıç noktasının tam olarak altında veya üstünde olan bir yaprak bulunana kadar yapraklar sayılırsa (sap çevresinde birden fazla dönmeye gerek olabilir) bulunan yaprak sayısı, farklı bitkiler, fidanlar ve ağaçlar için farklıdır, ancak her zaman bir Fibonacci sayısıdır. Dahası yaprakları sayarken süreç kendini tamamlamadan önce yapılan devir sayısı da bir Fibonacci sayısıdır. Ayrıca papatyaların da normal olarak bir Fibonacci sayısı kadar taç yaprağı vardır. Bir papatyanın yaprak sayısı genelde Fibonacci sayılarından 21, 34, 55 ve 89 dur. Doğadan fibonacci sayılarına diğer bir örnek ise ayçiçekleriyle ilgilidir. Ayçiçeğinin çiçek kısmında, ufak bölmelerde tohumlar vardır. Bu bölümlerin sınırları merkezden başlayıp çiçeğin dış kenarına giden sarmal eğriler şeklindedir. Eğer bir ayçiçeği incelenirse ve hem saat yönündeki hem de saat yönünün tersindeki sarmallar sayılırsa bir Fibonacci sayısıyla karşılaşılır. Sadece ayçiçeğinde değil birçok çiçeğin tohum başı, bir kıvırcığın yaprakları, bir soğanın katmanları, ananas ve kozalakların kat kat kabukları gibi bitkisel şekillerin birçoğu Fibonacci sarmalları içerisindedir. Fibonacci sayısı olmayan çam kozalaklarına da çok az sayıda rastlanmaktadır. Ancak bunlar % 1 veya % 2 oranı ile sınırlıdır. Doğada Fibonacci sayılarının görülmesini açıklamaya çalışan bazı görüşler vardır. Bunlar içinde akla en yatkın olanı, bir sap çevresindeki yaprakların Fibonacci sarmallarına göre sıralanmakla yüzeylerinin Güneş'i en verimli biçimde almalarının sağlandığı yolundadır. Diğer bir görüş ise (daha az doğrulanabilir olmasına rağmen), polen taşıyan böceklerin sayısal düzenleri tercih ettikleri varsayımına dayanmaktadır.

Bu tercih sebebiyle evrim süreci boyunca Fibonacci sayıları baskın çıkmıştır [1]. Şimdi de Fibonacci sayılarının insanların ilgisini çekmesine neden olan ikinci neden üzerinde duralım:

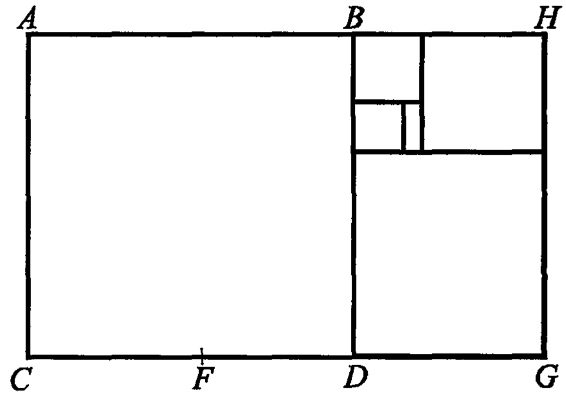
Fibonacci dizisinin sonsuza giden terimleri limit olarak 1.61803399... sayısına yaklaşır. Bu sayıya olan ilgi 2000 yıl öncesinden de geriye dayanır. Atalarımız, altın oranı temel alan sanat ve mimarinin göze olağanüstü güzel göründüğünü biliyorlardı. Bu nedenle yaptıkları eserlerde altın oranı kullandılar. Altın oran en basit şekli ile şöyle bulunur: Bir doğru parçası çizilir, bu doğru parçasını altın orana uygun olarak bölen nokta öyle seçilir ki, küçük parçanın büyüğüne oranını, büyük parçanın bütüne oranına eşit olur. Buna göre, bu nokta büyük parça x, küçük parça 1 ile gösterilirse,

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1+x}$$

eşitliğini sağlamalıdır. Buradaki $x+1$ ifadesi doğru parçasının bütününün uzunluğudur. Bu ifade düzenlendiğinde $x^2 - x - 1 = 0$ ikinci dereceden denklemi elde edilir. Bu denklemin köklerinden negatif olanı $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sayısı, pozitif olanı ise $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısıdır. Pozitif olan kök altın orandır ve ardışık iki fibonacci sayısının birbirine oranı olan 1.61803399... sayısıdır.

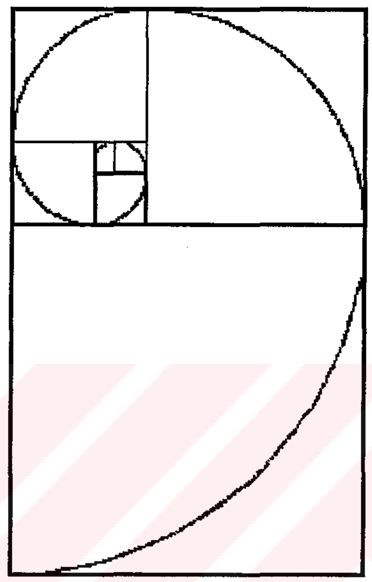
Kısa kenarının uzun kenarına oranı altın oran olan dikdörtgen eskiden beri sanat ve mimaride tercih edilen dikdörtgen olmuştur ki, Eski Yunan'da buna **kutsal kesit** adını vermişlerdi. (Şekil 1.4.1)

Şekil 1.4.1 deki *ACGH* dikdörtgeni bir altın dikdörtgendir. Bu dikdörtgen şöyle oluşturulmuştur; *ABCD* karesi çizilip *CD* kenarının orta noktası *F* işaretlenmiştir. *CD* kenarını *FG = FB* olacak şekilde uzatılarak *ACGH* dikdörtgeni meydana getirilmiştir. İlk bakışta o kadar övgüye değer bir özellik göze çarpmasa da, bir çok yönden ilginç bir şekildir.



Şekil 1.2.1

Bunlardan biri, günümüze kadar uzanan nesiller boyunca insanların çoğunun, onu bütün dikdörtgenler içinde göze en hoş gelen dikdörtgen olarak görmesidir. Bunun sonucunda da günlük hayatımızda karşılaştığımız binlerce dikdörtgenin büyük bir bölümünün boyutları, altın dikdörtgeninkine yakındır. Bayraklar, kibrit kutuları, gazeteler, oyun kağıtları, yazı kağıtları ve sayısız başka binlerce örnek bu sınıftandır. Sanatçıların ve psikologların tam anlayamadıkları bir nedenle altın dikdörtgenin estetik bir çekiciliği vardır. Yunan mimarisi ve çömlekçiliğinin dışında heykel, resim sanatları, mobilya ve sanatsal tasarımlar için de bu söylenenler doğrudur. **Parthenon** tapınağının ön bölümünü eksiksiz olduğu dönemde, bir altın dikdörtgenin içine neredeyse tama olarak girebilirdi. Altın orana Mısır piramitlerinin bazılarının boyutlarında da rastlanır. **Leonardo da Vinci** de altın dikdörtgenlerden çok etkilenmiş, hatta bu konuda hazırlanan kitaba yazılarıyla katılmıştır. Aralarında **Mona Lisa** tablosunun da bulunduğu bir çok eserin, tuvalin içine bu oran gözetilerek yerleştirildiği iddia edilir. Mimar Sinan da eserlerinin bazılarında, örneğin Selimiye Camiinde, altın oranı kullanmıştır. Altın dikdörtgenin diğer bir ilginç özelliği de Şekil 1.4.1 deki *ACGH* dikdörtgeninden *ABCD* karesini atarsak geriye kalan *BHDG* dikdörtgeni de bir altın dikdörtgendir. Bu işlem istenildiği kadar devam ettirilebilir ve her seferinde bir öncekinden daha küçük bir altın dikdörtgen bulunur. Bunlar içeriye doğru sarmal oluşturarak bir noktaya yönelirler. Eğer giderek küçülen bu dikdörtgenlerin köşeleri veya merkezleri sırasıyla birleştirilirse **altın sarmal** olarak bilinen bir sarmal elde edilir (Şekil 1.4.2). Bu sarmal da öyle herhangi bir sarmal değildir. Özel bir sarmaldır ve ayçiçeğindeki sarmalın aynısıdır. Matematiksel olarak bu sarmala eşit açılı sarmal ya da logaritmik sarmal adı verilir. Logaritmik sarmal denilmesinin nedeni, onu en basit biçimde ifade eden cebirsel denklemin $r = ab^{k\theta}$ üstel denklemi olmasıdır. Eşit açılı sarmal denilmesinin nedeni ise sarmalın merkezinden çizilen bir doğrunun sarmalı hep aynı açıda kesmesidir.



Şekil 1.2.2

Bu çok özel sarmalın, bir nedenle, doğada çok sık tercih görmesi gerçekten ilginç bir durumdur. Deniz kabukları, salyangozlar, doğanın boynuzları, azı dişleri, hayvanların pençeleri, kozalaklar ve çiçeklerin hepsinde eşit açılı sarmalı görmek mümkündür. Uzayın derinliklerindeki büyük galaksilerin bile dışa doğru dönen yıldızlardan oluşmuş, devasa boyutta eşit açılı sarmal kolları vardır. Bu verilen örnekler Fibonacci sayıları, altın oran ve logaritmik spiral ile ilgili örneklerden çok azını oluşturur. Doğada bu söylenenlerden çok daha fazla örnek vardır. Gerçekte Fibonacci sayıları üzerine yapılan yayınlar o denli artmıştır ki, sadece bu konu ile ilgili üç ayda bir yayınlanan **The Fibonacci Quarterly** adında bir dergi bile mevcuttur [1]. Fibonacci sayısının insanların ilgisini çekmesinin üçüncü nedeni ise bu sayıların matematikteki uygulamalarıdır. Bu uygulamaların bazılarından ikinci bölümde bahsedilecektir.

2. FIBONACCI SAYILARININ SAYILAR TEORİSİNDEKİ UYGULAMALARI

2.1 Fibonacci dizisinin terimleri arasındaki ilişkiler

2.1.1 Tanım: Bir $u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ...$ sayı dizisinde u_2 den başlamak üzere her terim kendisinden önce gelen iki terimin toplamı ise, başka bir ifade ile,

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1} \quad (n \geq 2 \text{ için})$$

ise bu diziye Fibonacci dizisi veya kısaca F dizisi denir. Buna göre, başlangıç terimleri farklı farklı seçilirse her defasında başka bir Fibonacci dizisi elde edilir.

2.1.2 Örnek: Fibonacci dizilerinden en özel olanı 0 ve 1 ile başlayan yani,

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,...

dizisidir. Diğer bir özel Fibonacci dizisi de Lucas dizisidir. Bu dizi de,

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, ...

dizisidir.

2.1.3 Tanım: Bir m sayısı ile başlayan Fibonacci dizisi F^m ile, F dizisinin terimleri de $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ile gösterilir.

2.1.4 Örnek: 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 121, ... dizisi F^4 ile gösterilir. Bu dizide $a_0 = 4$, $a_1 = 7$, $a_2 = 11, ...$ olur.

2.1.5 Teorem: $u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ...$ herhangi bir Fibonacci dizisi olsun. Bu dizinin $(n+1)$. terimi $n \geq 1$ için, $u_n = a_{n-1}u_0 + a_n u_1$ dir [2].

İspat: u'_n ile $a_{n-1}u_0 + a_n u_1$ ifadesini gösterelim. $u'_0, u'_1, u'_2, u'_3, ..., u'_n, ...$

dizisi de bir Fibonacci dizisidir. Çünkü,

$$\begin{aligned} u'_{n-2} + u'_{n-1} &= (a_{n-3}u_0 + a_{n-2}u_1) + (a_{n-2}u_0 + a_{n-1}u_1) \\ &= (a_{n-3} + a_{n-2})u_0 + (a_{n-2} + a_{n-1})u_1 \\ &= a_{n-1}u_0 + a_n u_1 \\ &= u'_n \end{aligned}$$

dir. Bundan başka,

$$\begin{aligned} u'_1 &= a_0 u_0 + a_1 u_1 \\ &= u_1 \\ u'_2 &= a_1 u_0 + a_2 u_1 \\ &= u_2 \end{aligned}$$

ve böylece, $u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ...$ ve $u'_0, u'_1, u'_2, u'_3, ..., u'_n, ...$ dizilerinin ilk iki terimlerinin ortak olduğu, bundan dolayı her iki dizinin aynı Fibonacci dizisi olduğu görülür. Yani, her n doğal sayısı için,

$$\begin{aligned} u_n &= u'_n \\ &= a_{n-1}u_0 + a_n u_1 \end{aligned}$$

olur [2].

2.1.6 Teorem: $n, m \geq 1$ olmak üzere, F dizisinin $(n+m)$. terimi,

$$a_{n+m-1} = a_{n-1}a_{m-1} + a_n a_m$$

formülü ile bulunabilir [2].

İspat: $a_{m-1}, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, ..., a_{m+n-1}, ...$ dizisi herhangi bir Fibonacci dizisi olsun. Teorem 2.1.5 ten dolayı,

$$\begin{aligned} a_{m+n-1} &= a_{m+(n-1)} \\ &= u_n \\ &= a_{n-1}a_{m-1} + a_n a_m \end{aligned}$$

elde edilir.

2.1.7 Teorem: F^0 dizisinin birbirine komşu iki teriminin kareleri toplamı, yani, $a^2{}_{n-1} + a^2{}_n$ sayısı yine bu dizinin bir elemanıdır [3].

İspat: Teorem 2.1.6 da m yerine n yazılırsa,

$$a_{2n-1} = a^2{}_{n-1} + a^2{}_n$$

elde edilir.

2.1.8 Teorem: Bir F^0-dizisinin herhangi ardışık üç terimi a_{n-1}, a_n, a_{n+1} arasında,

$$a_{n-1}a_{n+1} - a^2{}_n = (-1)^n$$

bağıntısı vardır [2,4].

İspat: $a_{n-1}a_{n+1} - a^2{}_n = d_n$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= a_n a_{n+2} - a^2{}_{n+1} \\ &= a_n(a_n + a_{n+1}) - a^2{}_{n+1} \\ &= a^2{}_n + a_n a_{n+1} - a^2{}_{n+1} \\ &= a^2{}_n - a_{n+1}(-a_n + a_{n+1}) \\ &= a^2{}_n - a_{n-1}a_{n+1} \\ &= -d_n \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
d_n &= -d_{n-1} \\
&= (-1)^2 d_{n-2} \\
&= (-1)^3 d_{n-3} \\
&\ \vdots \\
&= (-1)^{n-1} d_1 \\
&= (-1)^{n-1}\left(a_0 a_2 - a^2{}_1\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. $a_0 a_2 - a^2{}_1 = -1$ olduğundan,

$$a_{n-1}a_{n+1} - a^2{}_n = (-1)^n$$

elde edilmiş olur [2].

2.1.9 Teorem: F^0 dizisinin ardışık dört terimi $a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ arasında,

$$a_{n-1}a_{n+2} - a_n a_{n+1} = (-1)^n$$

eşitliği yazılabilir [2].

İspat:

$$
\begin{aligned}
a_{n-1}a_{n+2} - a_n a_{n+1} &= a_{n-1}a_n + a_{n-1}a_{n+1} - a_n a_{n+1} \\
&= a_{n-1}a_{n+1} - a_n\left(a_{n+1} - a_{n-1}\right) \\
&= a_{n-1}a_{n+1} - a^2{}_n \\
&= (-1)^{n-1}\left(a_0 a_2 - a^2{}_1\right) \\
&= (-1)^{n-1}(0.1-1) \\
&= (-1)^n
\end{aligned}
$$

bulunur [2].

2.2 Bir m moduna göre Fibonacci dizisi

2.2.1 Tanım: Bir m moduna göre elemanların oluşturduğu $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ dizisinde $n \geq 2$ için,

$$v_n = v_{n-2} + v_{n-1} \quad (m \text{ moduna göre})$$

ise bu diziye m moduna göre bir Fibonacci dizisi diyelim ve F_m ile gösterelim. Eğer başlangıç terimleri olan v_0 ve v_1 terimleri seçilirse F_m dizisi de belirlenmiş olur. m moduna göre oluşturulmuş bir Fibonacci dizisi 0 ve 1 ile başlıyorsa bu diziyi $F^0{}_m$ ile, bu dizinin terimlerini de $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ ile gösterelim.

2.2.2 Örnek: 2 ve 5 ile başlayan F_9 dizisi 2, 5, 7, 3, 1, 4, ... dir.

2.2.3 Örnek: $F^0{}_6$ dizisi 0, 1, 1, 2, 3, 5, 2, 1, ... şeklindedir.

2.2.4 Teorem: F^0 dizisinde son rakamlar periyodik olarak tekrarlanır [2].

İspat: F^0 dizisinde elemanların son rakamları 10 moduna göre yazılırsa,

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7,

0, 7, 7, 4, 1, 5, 6, 1, 7, 8, 5, 3, 8, 1, 9

0, 9, 9, 8, 7, 5, 2, 7, 9, 6, 5, 1, 6, 7, 3,

0, 3, 3, 6, 9, 5, 4, 9, 3, 2, 5, 7, 2, 9, 1,

0, 1, 1, 2, 3, 5, ...

elde edilir. Burada $c_0 = c_{60} = 0,\ c_1 = c_{61} = 1$ olduğu görülebilir. Bunun sonucu olarak dizinin ilk 60 terimi atıldığında yine 0 ve 1 ile başlayan bir Fibonacci dizisi elde edilir. O halde $c_2 = c_{62} = 0,\ c_3 = c_{63}, \ldots, c_k = c_{60+k}$ olur. Sonuç olarak $F^0{}_{10}$ dizisi periyot uzunluğu 60 olan bir dizidir [2].

2.2.5 Teorem: Bütün F_m dizileri periyodiktir ve F_m dizisinin periyot uzunluğu en fazla m^2 dir [2].

İspat: Bir $v_0, v_1, v_2, ..., v_n, ...$ Fibonacci dizisi verilmiş olsun. Uygun bir r için $v_r = v_0$, $v_{r+1} = v_1$ olduğunu, böylece $v_0, v_1, v_2, ..., v_n, ...$ dizisinin periyodik olduğunu göstereceğiz. Burada periyot uzunluğu r dir.

m moduna göre aritmetikte m tane farklı eleman vardır. Bu elemanlardan m^2 den fazla farklı ikili oluşturulamaz. Bu sebeple $m^2 + 1$ tane,

$$(v_0, v_1),\ (v_1, v_2),\ (v_2, v_3), \ldots,\ (v_{m^2}, v_{m^2+1})$$

ikilisi arasında en az ikisi birbirine eşittir. Bu ikililer k. ve l. ikililer $(k < l \leq m^2 + 1)$, yani,

$$v_k = v_l \tag{1}$$

$$v_{k-1} = v_{l-1} \tag{2}$$

olsun. (2) yi (1) den çıkaralım. Bu durumda,

$$v_{k-2} = v_{l-2} \tag{3}$$

elde ederiz. (3), (2) den çıkarılırsa,

$$v_{k-3} = v_{l-3} \tag{4}$$

buluruz. Bu çıkarmaya devam edersek son olarak,

$$v_1 = v_{l-k+1}$$

$$v_0 = v_{l-k}$$

ve $l - k = r$ yazılırsa,

$$v_1 = v_{r+1}$$

$$v_0 = v_r$$

bulunur. $l \leq m^2 + 1$ ve $k \geq 1$ olduğundan $r \leq m^2$ olur [2].

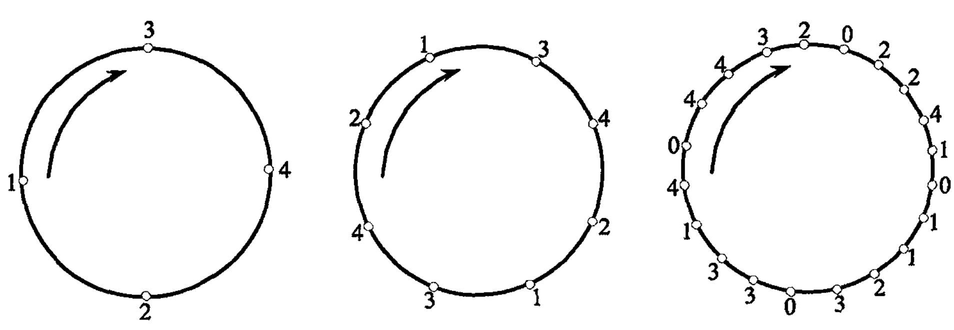
2.2.6 Teorem: m herhangi bir tamsayı olmak üzere $F^0 = 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots$ dizisinin m ile bölünebilen sonsuz sayıda elemanı vardır [2].

İspat: Bir F^0 dizisinin m ile bölünmesinden elde edilen kalanlar ${F^0}_m$ dizisini meydana getireceklerinden 2.2.5 te verilen teoreme göre bu dizi periyodiktir. Bundan dolayı birinci terim olan sıfır sonsuz defa tekrarlanır.

2.3 Dairesel Fibonacci dizisi

2.3.1 Tanım: Bir m moduna göre elde edilen n tane elemandan oluşan sistemin bir çember üzerinde sıralandığını düşünelim. Çember üzerinde saat ibresi yönünde hareket edildiğinde dizinin her terimi kendinden önce gelen iki terimin toplamına eşitse, bu sisteme m moduna göre dairesel Fibonacci dizisi denir ve $\widehat{F_m}$ ile gösterilir.

2.3.2 Örnek: $\widehat{F_5}$ dizisine örnek olarak,



Şekil 2.3.1

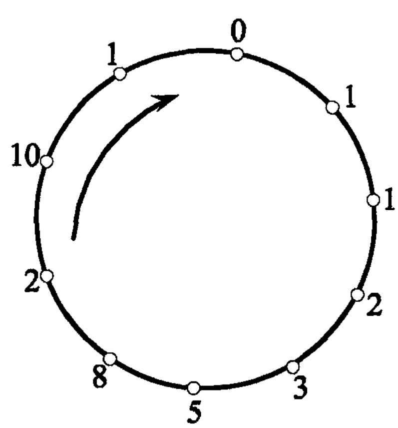
dizileri verilebilir.

2.3.3 Tanım: Eğer bir $\widehat{F_m}$ dizisinde 0° den büyük 360° den küçük herhangi bir dönme yapıldığında kendisi ile üst üste gelinmiyorsa böyle dizilere tekrarlamasız dizi, kendisi ile üst üste geliniyorsa tekrarlamalı dizi denir. Şekil 2.3.1 deki dizilerden 1. ve 3. dizi tekrarlamasız, 2. dizi ise bir tekrarlamalı dizidir çünkü, 180° lik bir dönmeden sonra dizi kendisiyle üst üste gelir.

2.3.4 Tanım: Bir $\widehat{F_m}$ dizisinde aynı eleman çifti iki defa görünürse $\widehat{F_m}$ bir tekrarlamalı dizidir.

2.3.5 Uyarı: 2.2.5 te verilen teoreme göre, bütün F_m dizileri periyodiktir. Bundan dolayı, böyle dizileri incelemek için sadece birinci periyodu oluşturan terimleri göz önüne almak yeterlidir. Bu sayılar bir çember etrafına saat yönünde dizilirse, tekrarlamasız bir $\widehat{F_m}$ dizisi elde edilir. 0 ve 1 sayılarını içeren tekrarlamasız bir dizi $\widehat{F^0}_m$ ile gösterilir.

2.3.6 Örnek: $\widehat{F^0}_{11}$ dizisi şekil 2.3.2 deki gibidir.

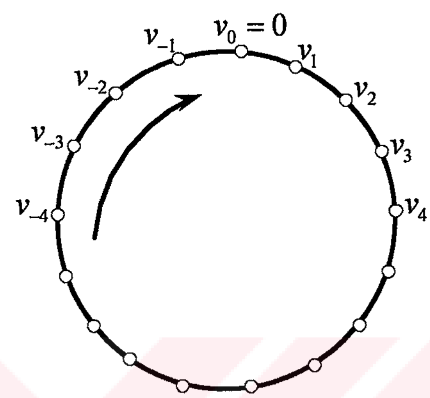


Şekil 2.3.2

2.3.7 Tanım: $\widehat{F_m}$ dizisinin üç terimi x, y ve z olmak üzere, bu dizinin $\widehat{xz}$ ve $\widehat{yz}$ yaylarında eşit sayıda terimi varsa x ve y , z ye eşit uzaklıktadır diyelim.

2.3.8 Teorem: $\widehat{F_m}$ dizisinin iki elemanı x ve y olsun. x ve y den eşit uzaklıkta bir sıfır varsa ya $x+y=0$ veya $x=y$ dir [2].

İspat: Dizinin sıfıra eşit olan elemanını v_0 ile geri kalan elemanları da şekil 2.3.3 teki gibi gösterelim:



Şekil 2.3.3

Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu ispatlayalım:

$$v_0 + v_0 = 0$$

$$v_1 - v_{-1} = 0$$

$$v_2 + v_{-2} = 0$$

$$v_3 - v_{-3} = 0$$

$$v_4 + v_4 = 0$$

....

Birinci eşitliğin doğruluğu açıktır. İkincisi

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{-1} + v_0 \\ &= v_{-1} + 0 \\ &= v_{-1} \end{aligned}$$

olmasının bir sonucudur.

$$v_0 + v_1 = v_2\,, \qquad v_0 - v_{-1} = v_{-2}$$

olduğu göz önüne alınarak ve ilk iki eşitlik toplanarak üçüncü eşitlik elde edilebilir. İkinci ve üçüncü eşitlikler toplanarak dördüncü eşitlik ve bu şekilde bütün eşitlikler elde edilebilir [2]. İspatlanan eşitlikler aşağıdaki gibi genellenebilir:

$$v_n + (-1)^n v_{-n} = 0$$

2.3.9 Teorem: $\widehat{F_m}$ dizisinin üç *x, y, z* elemanı için, *x* ve *y* arasındaki uzaklık *y* ve *z* arasındaki uzaklığa eşit olsun. $x = y = 0$ ise $z = 0$ dır [2].

İspat: $y = 0$ sayısı *x* ve *z* den eşit uzaklıkta olduğundan Teorem 2.3.8 gereğince $x + z = 0$ veya $x = z$ dir. $x = 0$ olduğundan, her iki durumda da $z = 0$ dır.

2.3.10 Teorem: $\widehat{F_m}$ dizisinin içinde bulunan sıfırlar bu diziyi eşit uzunlukta parçalara ayırır [2].

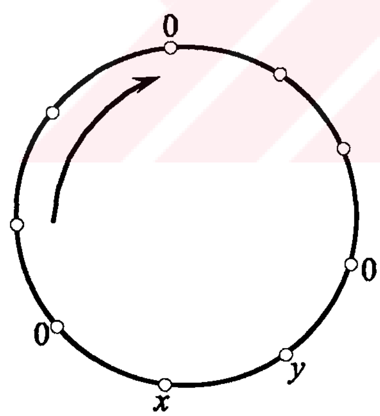
İspat: Sıfırlar $\widehat{F_m}$ yi bir takım yaylara ayırırlar. Bu yaylardan en küçüğünü seçelim. Bunlardan birden fazla varsa, herhangi birini seçelim. Her iki uçta bulunan ve sıfıra eşit olan elemanları x ve y ile gösterelim. Şimdi $\widehat{xy}$ yayı $\widehat{yz}$ yayına eşit olacak şekilde bir z elemanı seçelim. Bu durumda teorem 2.3.9 dan dolayı $z = 0$ olur. Aynı şekilde $\widehat{zu}$, $\widehat{uv}$, ... yaylarını saat yönünde hareket ederek işaretleyelim. $u = v = \cdots = 0$ olduğu açıktır. Bütün çemberi bir kere daha dönmeye başlarken mutlaka ya $\widehat{xy}$ yayının içine veya *x* uç noktasına gelmiş oluruz. Fakat $\widehat{xy}$ yayının içinde artık sıfırlar yoktur. Bu sebeple yalnız *x* uç noktasına gelebiliriz. O halde *x, y, z, u, v, ...* sıfırları diziyi eşit parçalara ayırırlar. İki sıfır arasındaki uzaklık $\widehat{xy}$ yayından daha küçük olmadığından F_m; *x, y, z, u, v, ...* den başka sıfır bulundurmaz [2].

2.3.11 Teorem: $F^0 = 0,1,1,2,3,5,8,13,21,...$ dizisinde *m* ile bölünebilen sayılar aynı aralıklarla görülürler.

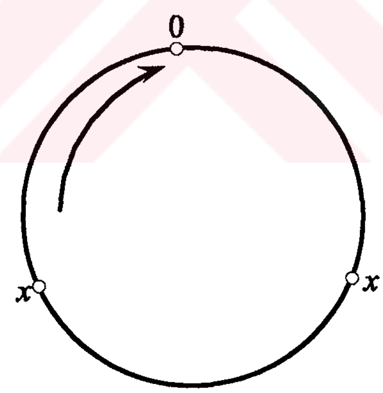
İspat: $F^0{}_m$ dizisi F^0 dizisinin terimlerinin m ile bölünmesinden çıkan kalanlardan meydana gelmiştir. Bunun sonucu olarak, $F^0{}_m$ deki sıfırların F^0 ın m ile bölünebilen terimlerine karşılık geldiği gibi bunun karşıtı da doğrudur. $F^0{}_m$ dizisine bu dizinin periyotlarını gösteren $F^0{}_m$ dairesel dizisi karşılık gelir.

2.3.12 Teorem: Tekrarlamasız bir $\widehat{F_m}$ dairesel dizisinde sıfırlar varsa ve bu dizi tek sayıda elemandan meydana gelmişse, elemanların sayısı üçtür.

İspat: $\widehat{F_m}$ sıfır bulundurursa ve tek sayıda elemandan meydana gelmiş ise, bu dizide sıfırdan eşit uzaklıkta bulunan bir çift x, y elemanı vardır. (Şekil 2.3.4) Teorem 2.3.8 den dolayı ya $x+y=0$ veya $x=y$ dir. Bu durumda dizinin x, y çiftine komşu olan bir elemanı sıfıra eşittir. Teorem 2.3.9 dan dolayı x, y çiftine komşu olan diğer elemanlar da sıfıra eşittir. Buradan $x=y$ sonucu çıkar. Aranan dizi tekrarlamasız bir dizi olduğundan, bu dizi şekil 2.3.5 teki gibi olur.



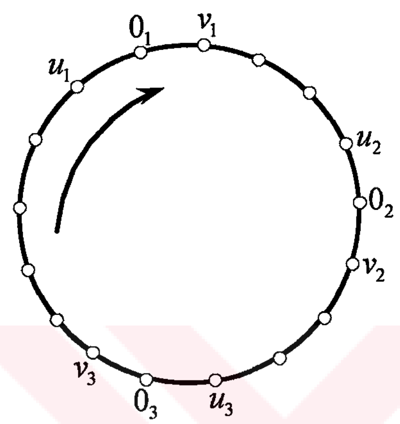
Şekil 2.3.4



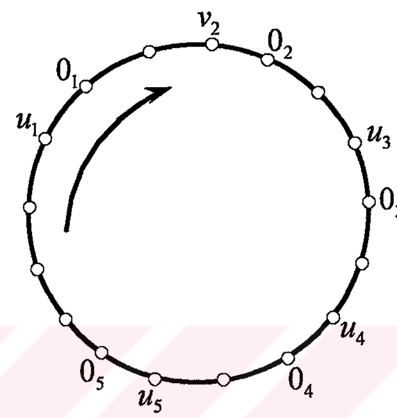
Şekil 2.3.5

2.3.13 Teorem: Tekrarlamasız bir dairesel dizide bulunan sıfırların sayısı 0, 1, 2 veya 4 tür. Bunun sonucu olarak bir F_m dizisinin bir periyodundaki sıfırlar 0, 1, 2 veya 4 tanedir [2].

İspat: Dairesel dizide birbirinden farklı en az üç tane sıfır olduğunu kabul edelim. Birbiri ardı sıra gelen sıfırları saat yönünde 0_1, 0_2 ve 0_3 ile numaralayarak işaretleyelim. Dizinin bu 0_1, 0_2 ve 0_3 elemanlarının önünde bulunan elemanları sırasıyla u_1, u_2, u_3 ve 0_1, 0_2 ve 0_3 elemanlarından sonra gelen elemanları da sırasıyla v_1, v_2, v_3 ile gösterelim. (Şekil 2.3.6)



Şekil 2.3.6



Şekil 2.3.7

$u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ ve $u_3 = v_3$ olduğu açıktır. u_1 ve v_3 elemanları 0_2 den eşit uzaklıktadır ve 2.3.8 de verilen teoremden dolayı ya $u_1 + v_3 = 0$ veya $u_1 = v_3$ dır. Eğer $u_1 = v_3$ ise $u_1 = v_1 = u_3 = v_3$ olması gerekir ki bu mümkün değildir; çünkü dizi tekrarlamasız dizidir. Bunun sonucu olarak $u_1 + v_3 = 0$ eşitliği ve buradan da,

$$u_3 = -u_1 \tag{1}$$

elde edilir. Şimdi $\widehat{F_m}$ dizisi tam üç tane sıfır bulunduruyorsa, bir tekrarlamalı dizi olduğunu ispatlayacağız. Çünkü bu durumda sıfırlar çemberi üç eşit yaya ayırırlar ve (1) eşitliği gibi,

$$u_1 = -u_2,\quad u_2 = -u_3 \tag{2}$$

eşitlikleri elde edilebilir. (1) ve (2) eşitliklerinden $u_1 = u_2 = u_3$ sonucu çıkar ve bu da bize dizinin tekrarlamalı bir dizi olduğunu gösterir.

Şimdi kabul edelim ki, dizi birbirinden farklı beş sıfır bulundursun. İspat edeceğiz ki, dizi bu durumda da tekrarlamalı bir dizidir. Dizinin birbiri ardı sıra gelen beş sıfırını sıra ile 0_1, 0_2, 0_3, 0_4 ve 0_5 ile ve bunların saat yönünde önünde bulunan elemanları da sırasıyla u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 ile gösterelim. (Şekil 2.3.7)

(1) formülünü 0_1, 0_2, 0_3, 0_4 ve 0_5 elemanlarından elde edilen birbirinden farklı üç sıfır üçlüsüne uygulayalım. Bu durumda,

$$u_3 = -u_1, \quad u_4 = -u_2, \quad u_5 = -u_3 \tag{3}$$

eşitliği ve (3) eşitliğinden de $u_5 = u_1$ eşitliği elde edilir. Bu durumda da dizi tekrarlamalı bir dizidir [2].

2.4 Fibonacci dizisi ve geometrik dizi

2.4.1 Tanım: m moduna göre elde edilen elde edilen $b_0, b_1, b_2, ..., b_n, ...$ elemanlarından meydana gelen bir dizide b_1 en başlamak üzere her terim kendinden önceki terimin q katı ise bu diziye geometrik dizi, q sayısına da bu dizinin ortak çarpanı denir.

2.4.2 Örnek: 11 moduna göre $q = 3$, $b_0 = 2$ seçilerek oluşturulan geometrik dizi,

2, 6, 1, 6, 6, 3, 7, 10, 4, 7, 6, 9, …

şeklinde olacaktır.

2.4.3 Uyarı: Bir geometrik dizinin genel terimi b_n, başlangıç b_0 ve ortak çarpanı q olmak üzere, dizinin genel terimi $b_n = b_0 . q^{n-1}$ dir.

2.4.4 Örnek: 11 moduna göre elde edilmiş,

1, 4, 5, 9, 3, 1, 4, 5, 9, 3, 1, 4, 5, 9, 8, … (1)

dizisi, hem geometrik dizi hem de Fibonacci dizisidir. Eğer (1) dizisinin elemanları 11 moduna göre elde edilmiş bir b sayısı ile çarpılırsa oluşan

$$b, 4b, 5b, 9b, 3b, b, 4b, 5b, 9b, 3b, b, 4b, 5b, 9b, 8b, \ldots \qquad (2)$$

(2) dizisi de hem geometrik dizi hem de Fibonacci dizisidir.

2.4.5 Teorem: 11 moduna göre elde edilmiş hem geometrik dizi hem de Fibonacci dizisi olan bütün diziler aşağıdaki dizilerden biridir [2].

1) $b, 8b, 9b, 6b, 4b, 10b, 3b, 2b, 5b, 7b, b, \ldots$

2) $b, 4b, 5b, 9b, 3b, b, 4b, 5b, 9b, 3b, b, \ldots$

İspat: Başlangıç terimi b ve ortak çarpanı q olan bir geometrik dizi,

$$b, bq, bq^2, bq^3, bq^4, \ldots, bq^{n-1}, bq^n, bq^{n+1}, \ldots \qquad (1)$$

şeklindedir. Bu dizinin aynı zamanda bir Fibonacci dizisi olması, her $n \in N^+$ için,

$$bq^{n-1} + bq^n = bq^{n+1} \qquad (2)$$

eşitliğini sağlamasına bağlıdır. Bu eşitlikte gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$1 + q = q^2 \quad \text{veya} \quad q^2 - q - 1 = 0$$

elde edilir. Bu denklem çözülürse,

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad (3)$$

değerleri elde edilir. 11 moduna göre $\sqrt{5} = \pm 4$ olduğundan,

$$q_1 = \frac{1+4}{2} = 8 \; ; \quad q_2 = \frac{1-4}{2} = 4$$

bulunur. q değerleri (1) eşitliğinde yazılırsa iki farklı dizi elde edilir. Bunlar,

1) $b, 8b, 9b, 6b, 4b, 10b, 3b, 2b, 5b, 7b, b, \ldots$

2) $b, 4b, 5b, 9b, 3b, b, 4b, 5b, 9b, 3b, b, \ldots$

dizileridir [2].

2.4.6 Teorem: 7 moduna göre hem geometrik dizi hem de Fibonacci dizisi olan dizi yoktur.

İspat: 2.4.5 te verilen teoremde yapıldığı gibi $\sqrt{5}$ sayısının 7 modunda karşılığı bulunamaz. Çünkü $7x+5$ sayısı x in hiçbir tamsayı değeri için tam kare değildir. Bunun sonucu olarak 7 moduna göre böyle bir dizi yoktur.

2.4.7 Teorem: $F^0{}_{11} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, 1, 1, 2, \ldots$ dizisi, hem geometrik dizi hem de Fibonacci dizisi olan iki farklı dizinin toplamı olarak yazılabilir [2].

İspat: Aynı zamanda geometrik dizi ve Fibonacci dizisi olan iki $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ ve $b'_0, b'_1, b'_2, \ldots, b'_n, \ldots$ dizisi belirtmeliyiz ki,

$$c_0 = b_0 + b'_0, \quad c_1 = b_1 + b'_1, \quad c_2 = b_2 + b'_2 \ , \ \ldots, \ c_n = b_n + b'_n, \ldots$$

olsun. 2.4.5 te verilen teoremde 11 moduna göre hem geometrik dizi hem de Fibonacci dizisi olan bütün diziler bulunmuş ve bu dizilerin iki gruba ayrıldığı gösterilmişti. Birinci gruptan başlangıç terimi x olan bir dizi ile ikinci gruptan başlangıç terimi y olan bir dizi seçelim ve bu dizilerin karşılıklı terimlerini toplayalım:

$$x+y, \ 8x+4y, \ 9x+5y, \ 6x+9y, \ 4x+3y, \ 10x+y, \ 3x+4y, \ldots \qquad (1)$$

Bulunan bu dizi yine bir Fibonacci dizisidir. x ve y yi öyle seçelim ki bu dizinin birinci terimi 0, ikinci terimi 1 olsun. Bunun için,

$$x+y=0$$

$$8x+4y=1$$

denklem sistemi çözülürse,

$$x = \frac{1}{4} = 3 \qquad (\mathrm{Mod}\ 11)$$
$$y = -3 = 8$$

bulunur. Böylece $F^0{}_{11}$ dizisinin parçalanması,

$$c_0 = 0 = 3 + 8$$
$$c_1 = 1 = 3 \cdot 8 + 8 \cdot 4$$
$$\vdots$$
$$c_n = 3 \cdot 8^n + 8 \cdot 4^n$$
$$\vdots$$

formülüne göre elde edilir [2].

2.4.8 Teorem: p, 2 ve 5 ten farklı bir asal sayı olmak üzere, p moduna göre $\sqrt{5}$ in tamsayı karşılığı yoksa p moduna göre hem geometrik dizi hem de Fibonacci dizisi olan hiçbir dizi oluşturulamaz [2].

İspat: 2.4.5 te verilen teoreme göre, bir Fibonacci dizisinin aynı zamanda bir geometrik dizi olması için q ortak çarpanı $q^2 - q - 1 = 0$ denklemini sağlamalıdır. p moduna göre $\sqrt{5}$ sayısının tamsayı karşılığı yoksa $q^2 - q - 1 = 0$ denkleminin hiçbir tamsayı çözümü yoktur. Bunun sonucu olarak bir Fibonacci dizisi bulunamaz.

2.4.9 Teorem: p, 2 ve 5 ten farklı bir asal sayı olmak üzere, p moduna göre $\sqrt{5}$ in tamsayı karşılığı varsa, p moduna göre hem geometrik dizi hem de Fibonacci dizisi olan Fibonacci dizileri vardır ve her Fibonacci dizisi böyle iki dizinin toplamı olarak yazılabilir [2].

İspat: $\sqrt{5}$ sayısının tamsayı karşılığı varsa $q^2 - q - 1 = 0$ denklemi iki q_1 ve q_2 değeri verir. Bu değerlerden her birine aynı zamanda Fibonacci dizisi olan bir geometrik dizi ailesi karşılık gelir. Bunlar,

1) $b, bq_1, bq_1^2, bq_1^3, \ldots, bq_1^n, \ldots$,

2) $b, bq_2, bq_2^2, bq_2^3, \ldots, bq_2^n, \ldots$

dizileridir.

$$x+y,\ xq_1+yq_2,\ xq_1^2+yq_2^2, \ldots, xq_1^n+yq_2^n, \ldots \tag{1}$$

dizisi yine bir Fibonacci dizisidir. Herhangi bir,

$$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots \tag{2}$$

dizisinin (1) şeklinde gösterilebilmesi için x ve y yi (1) ve (2) dizilerinde iki başlangıç terimi aynı olacak şekilde seçmek yeter. Bunun için de,

$$x+y=v_0$$
$$xq_1+yq_2=v_1$$

denklem sistemi çözülmelidir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde,

$$x=\frac{v_1-v_0q_2}{q_1-q_2}\ ,\quad y=\frac{v_0q_1-v_1}{q_1-q_2} \tag{3}$$

elde edilir. Bu şekildeki bir Fibonacci dizisinin iki geometrik dizinin toplamına ayrılması,

$$v_n=xq_1^n+yq_2^n \tag{4}$$

formülü ile verilir. Buradaki q_1 ve q_2 sayıları $q^2-q-1=0$ denkleminin kökleri, x ve y ise (3) denkleminden elde edilen x ve y dir [2].

2.4.10 Uyarı: $q_1=q_2$ olması durumunda 2.4.9 da elde edilen (3) eşitliğinin bir anlamı kalmaz. Bu özel halde $q^2-q-1=0$ denkleminin diskriminantı sıfıra eşit olur. Bu diskriminant 5 e eşit olduğundan ancak 5 modunda sıfır olur. Zaten p nin 5 ten farklı olduğu 2.4.8 ve 2.4.9 da verilen teoremlerde belirtilmişti.

2.5 Fibonacci dizisi ve bölüm dizileri

2.5.1 Tanım: $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ dizisi p moduna göre elde edilmiş bir F_p dizisi olsun. Bu dizinin elemanlarından,

$$t_1 = \frac{v_1}{v_0},\; t_2 = \frac{v_2}{v_1},\; t_3 = \frac{v_3}{v_2}, \ldots,\; t_n = \frac{v_n}{v_{n-1}}, \ldots$$

dizisini oluşturalım. Bu diziye $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ dizisinin bölüm dizisi diyelim. $v_0, v_1, v_2, \ldots$ sayılarından bazıları sıfıra eşit ise, bölüm dizisi p moduna elde edilmiş sayılardan başka ∞ sembolünü de içerir. Ayrıca $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ dizisinin herhangi komşu iki elemanı sıfıra eşitse, dizinin bütün elemanları sıfıra eşit olacağından bu hali incelemeyeceğiz.

2.5.2 Örnek: $F^0{}_{11}$ dizisine ait bölüm dizisini oluşturalım. Bunun için önce $F^0{}_{11}$ dizisi oluşturulur. Bu dizi,

$$F^0{}_{11} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$$

şeklindedir. Bu diziye ait bölüm dizisi ise,

$$\infty, 1, 2, 7, 9, 6, 3, 5, 10, 0, \infty, 1, 2, 7, 9, \ldots$$

olarak elde edilir.

2.5.3 Teorem: a) Herhangi bir Fibonacci dizisine karşılık gelen bölüm dizisinin ardışık terimleri arasında $t_n = 1 + \dfrac{1}{t_{n-1}}$ bağıntısı vardır. Ayrıca $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$ dizisi periyodiktir ve bir tam periyot boyunca hiçbir sayıya iki defa rastlanmaz.

b) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, . . . Fibonacci dizisinin p ile bölünebilen sonsuz sayıda elemanı vardır ve bu elemanlar birbirinden eşit uzaklıktadır [2].

İspat: a) Bir Fibonacci dizisinin elemanları birbirine $v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$ bağıntısıyla bağlıdır. Bu bağıntı v_{n-1} ile bölünür ve v_n / v_{n-1} yerine t_n , v_{n-1}/v_{n-2} yerine t_{n-1} yazılırsa

$$t_n = 1 + \frac{1}{t_{n-1}} \tag{1}$$

formülü elde edilir. $t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots, t_n, \ldots$ dizisinde birbirinden farklı elemanlar en fazla $p+1$ tanedir, çünkü bu dizi p moduna göre elde edilmiş p tane eleman ve ∞ sembolünden oluşmuştur. Bundan dolayı bu dizinin elemanları arasında mutlaka birbirine eşit olanlar vardır. Bütün eşit eleman çiftleri içinde elemanları birbirinden en küçük uzaklıkta bulunan bir çift seçelim. Bu çift (t_k, t_{k+r}) çifti olsun. Bu durumda $t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots, t_n, \ldots$ dizisinin birbiri arkasından gelen r elemanı ikişer ikişer birbirinden farklıdır. Teoremin ispatını tamamlamak için geriye n nin her değeri için $t_n = t_{r+n}$ eşitliğinin doğru olduğunu göstermek kalır. Önceden bilindiği gibi bu özdeşlik $n = k$ için gerçekleşmektedir. Yani,

$$t_k = t_{r+k} \tag{2}$$

dır. Şimdi,

$$t_{k+1} = t_{r+k+1} \tag{3}$$

$$t_{k+2} = t_{r+k+2} \tag{4}$$

$$t_{k+3} = t_{r+k+3} \tag{5}$$

....

eşitliklerini ispatlayacağız. Bunun içinde (1) formülünden yararlanacağız. Bu formüle göre,

$$t_{k+1} = 1 + \frac{1}{t_k}, \quad t_{r+k+1} = 1 + \frac{1}{t_{r+k}}$$

olduğundan (3) eşitliği (2) den elde edilir. Bunun gibi (3) ten (4), (4) ten (5), ... bulunur. Ayrıca son olarak,

$$t_{k-1} = t_{r+k-1} \tag{6}$$

$$t_{k-2} = t_{r+k-2} \tag{7}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t_1 = t_{r+1} \tag{8}$$

eşitlikleri ispatlanmalıdır. (1) bağıntısı t_{n-1} e göre çözülürse

$$t_{n-1} = \frac{1}{t_n - 1} \tag{9}$$

elde edilir. (9) bağıntısının yardımıyla (1) den (3), (4), (5), ... çıkarmakta kullanılan yöntemle, birbiri ardı sıra (2) den (6), (6) dan (7), ... elde edilmiş olur.

b) $F^0{}_p$ nin bölüm dizisi oluşturulsun. $F^0{}_p$ dizisi 0 ve 1 ile başlamaktadır. Buna uygun olarak bölüm dizisi ∞ elemanıyla başlar. a) dan dolayı ∞ elemanı bölüm dizisinde sonsuz defa tekrarlanmakta ve bu tekrarlamalar birbirinden aynı uzaklıkta olmaktadır. Bölüm dizisinin bu elemanları $F^0{}_p$ nin sıfır olan elemanlarına karşılık gelmektedir. Bunlar da p nin katları olan elemanlardır [2].

2.5.4 Teorem: $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ ve $v'_0, v'_1, v'_2, \ldots, v'_n, \ldots$ dizileri herhangi iki F_p dizisi ve bu dizilere ait bölüm dizileri,

$$t_1 = \frac{v_1}{v_0},\ t_2 = \frac{v_2}{v_1},\ t_3 = \frac{v_3}{v_2},\ \ldots,\ t_n = \frac{v_n}{v_{n-1}},\ \ldots \tag{1}$$

$$t'_1 = \frac{v'_1}{v'_0},\ t'_2 = \frac{v'_2}{v'_1},\ t'_3 = \frac{v'_3}{v'_2},\ \ldots,\ t'_n = \frac{v'_n}{v'_{n-1}},\ \ldots \tag{2}$$

olsun. (1) ve (2) de bir tane bile ortak eleman varsa bu diziler aynı elemanlardan oluşmuşlardır. Yani (1) in her elemanı (2) de, (2) nin her elemanı (1) de bulunur [2].

İspat: 2.5.3 te verilen teoremin a) şıkkından dolayı $t_1, t_2, ..., t_n, ...$ ve $t'_1, t'_2, ..., t'_n, ...$ bölüm dizilerinin başlangıç terimleri aynı ise bu diziler tamamen aynıdır, yani her n için $t_n = t'_n$ dir. Ayrıca bir $t_1, t_2, ..., t_n, ...$ bölüm dizisinde baştan sonlu sayıdaki terimler atılırsa elemanları bir önceki dizinin elemanlarının aynısı olan bir $t_m, t_{m+1}, t_{m+2}, \ldots, t_n, \ldots$ dizisi elde edilir. Gerçekten 2.5.3 te verilen teoremin a) şıkkından dolayı $t_1, t_2, ..., t_n, ...$ dizisinin her elemanı sonsuz defa tekrarlanır ve sonuçta bu elemanların hepsi $t_m, t_{m+1}, t_{m+2}, \ldots, t_n, \ldots$ dizisinde bulunur. Sonuç olarak (1) ve (2) dizilerinin aynı olan terimlerinden önceki bütün terimler atılırsa ilk terimleri eşit olan iki bölüm dizisi elde edilmiş olur. Bu da iki dizinin aynı elemanlardan oluştuğu anlamına gelir [2].

2.5.6 Teorem: Herhangi iki F_p dizisinin bölüm dizisi aşağıdaki gibi olsun:

$$t_1 = \frac{v_1}{v_0},\ t_2 = \frac{v_2}{v_1},\ t_3 = \frac{v_3}{v_2}, \ldots, t_n = \frac{v_n}{v_{n-1}}, \ldots \tag{1}$$

$$t'_1 = \frac{v'_1}{v'_0},\ t'_2 = \frac{v'_2}{v'_1},\ t'_3 = \frac{v'_3}{v'_2}, \ldots, t'_n = \frac{v'_n}{v'_{n-1}}, \ldots \tag{2}$$

t_1 ve t'_1, $x^2 - x - 1 = 0$ denklemini gerçeklemiyorsa (1) ve (2) dizileri ve F nin bütün bölüm dizileri aynı periyot uzunluğuna sahiptir [2].

İspat: 2.1.5 te verilen teorem bir F_p dizisine uygulandığında ,

$$v_n = c_{n-1} v_0 + c_n v_1$$

formülü elde edilir. Bu formülden yararlanarak ,

$$t_{r+1} = \frac{v_{r+1}}{v_r}$$

$$= \frac{c_r v_0 + c_{r+1} v_1}{c_{r-1} v_0 + c_r v_1}$$

yazılabilir. c_{r+1} yerine $c_r + c_{r-1}$ yazılıp, kesrin pay ve paydası $v_0 c_{r-1}$ ile bölünürse,

$$t_{r+1} = \frac{\frac{c_r}{c_{r-1}} + \left(1 + \frac{c_r}{c_{r-1}}\right)\frac{v_1}{v_0}}{1 + \frac{c_r}{c_{r-1}}\frac{v_1}{v_0}}$$

bulunur. Burada,

$$\frac{c_r}{c_{r-1}} = \bar{t}_r \quad \text{ve} \quad \frac{v_1}{v_0} = t_1$$

yazılırsa,

$$t_{r+1} = \frac{\bar{t}_r + (1 + \bar{t}_r)t_1}{1 + \bar{t}_r t_1} \tag{1}$$

formülü elde edilir. (1) eşitliğinde şu yorumlar yapılabilir:

i) $\bar{t}_r = 0$ ise $t_{r+1} = t_1$ olur.

ii) $t_{r+1} = t_1$ ise $\bar{t}_r\left(t_1^{\,2} - t_1 - 1\right) = 0$ bulunur ve bu durumda $\bar{t}_r = 0$ veya $t_1^{\,2} - t_1 - 1 = 0$ dır.

$\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \ldots, \bar{t}_r, \ldots$ dizisinin periyot uzunluğu r olsun ve t_1 de $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökü olmasın. Bu durumda, $\bar{t}_{r+1} = \bar{t}_1 = \infty$ olur.

$$\bar{t}_{r+1} = 1 + \frac{1}{\bar{t}_r}$$

formülünden $\bar{t}_r = 0$ elde edilir. 2.5.3 te verilen teoremden dolayı $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, ..., \bar{t}_r$ elemanları ikişer ikişer birbirinden farklıdır, özellikle $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, ..., \bar{t}_{r-1}$ elemanları $\bar{t}_r = 0$ dan farklıdır. i) den dolayı $\bar{t}_r = 0$ ise $t_{r+1} = t_1$ olmalıdır. Burada bütün $\bar{t}_2, \bar{t}_3, ..., \bar{t}_r$ elemanları t_1 den farklıdır, çünkü $t_1 = t_{s+1}$ $(s < r)$ eşitliğinden ii) ye göre $t_s = 0$ çıkardı. Bu ise mümkün değildir. Böylece ispat edildi ki $t_1, t_2, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ dizisinin periyot uzunluğu $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, ..., \bar{t}_n, ...$ dizisinin periyot uzunluğuna yani r ye eşittir [2].

2.5.7 Teorem: a) r belirli bir F_p dizisi için oluşturulan bölüm dizisinin periyot uzunluğu olsun. $p \neq 2$ ve $p \neq 5$ olmak üzere,

1) p moduna göre $\sqrt{5}$ in tamsayı karşılığı yoksa r, $p+1$ in bir bölenidir.

2) p moduna göre $\sqrt{5}$ in tamsayı karşılığı varsa r, $p-1$ in bir bölenidir.

b) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, . . . Fibonacci dizisinde 2 ve 5 ten farklı bütün p asal sayıları için, $\sqrt{5}$ in tamsayı karşılığı yoksa a_{p+1} sayısı p ile, $\sqrt{5}$ in tamsayı karşılığı varsa a_{p-1} sayısı p ile bölünebilir [2].

İspat: a) İlk önce p moduna göre 5 in karekökünün alınamadığı durum göz önüne alınsın. Bu durumda $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin hiçbir tamsayı çözümü yoktur. 2.5.6 da verilen teoremden dolayı herhangi F_p dizilerinin bütün bölüm dizileri aynı r uzunluğunda periyotlara sahiptir. 2.5.3 te verilen teoremden dolayı, bir bölüm dizisinin bir periyoduna ait elemanlar birbirinden farklıdır. Bundan dolayı her bölüm dizisinde tam r tane birbirinden farklı eleman vardır. 0 ve 1 sayıları ile başlayan $F^0{}_p$ dizisine karşılık gelen bölüm dizisini R_1 ile gösterelim. R_1 dizisinin ilk terimi ∞ sembolüdür. Bölüm dizisinde rastlanabilen bütün farklı elemanların sayısı $p+1$ e eşittir. Bütün bu elemanlar R_1 dizisinde bulunuyorsa $r = p+1$ dir ve ispat biter. Böyle değilse R_1 de bulunmayan bir a sayısı seçelim ve $1, a, \ldots$ Fibonacci dizisini göz önüne alalım. Bu diziye karşılık gelen bölüm dizisini R_2 ile gösterelim. R_2 dizisi a sayısı ile başlar. 2.5.4 te verilen teoreme göre R_1 ve R_2 dizilerinin hiçbir ortak elemanı yoktur. Eğer p moduna göre bir b sayısı bu dizilerin ikisinde de bulunmuyorsa, $1, b, \ldots$ Fibonacci dizisini oluşturalım. Bu diziye karşılık gelen bölüm dizisini R_3 ile gösterelim. R_3 dizisi b ile başlar ve bunun sonucu olarak, R_1 ve R_2 dizileri ile hiçbir ortak elemanı yoktur. Eğer R_1, R_2 ve R_3 ile bütün $0, 1, 2, \ldots, p-1, \infty$ elemanları tükenmemiş ise, dördüncü bir R_4 dizisini,... ve bu şekilde bütün elemanlar tükeninceye kadar bir $R_1, R_2, R_3, R_4, \ldots$ dizi sistemi oluşturulsun. Bu şekilde oluşturulan dizilerin hiçbir elemanı ortak değildir. Bu dizilerden her birinde birbirinden farklı tam r tane eleman vardır. O halde $p+1 = kr$ olup ispat sona erer.

Şimdi de p moduna göre $\sqrt{5}$ in tamsayı karşılığının olduğu durum göz önüne alınsın. $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin iki kökü vardır. Bunlar,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

sayılarıdır. $p \neq 0$ ise bu sayılar birbirinden farklıdır. $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ bağıntısından,

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha} \tag{1}$$

bulunur. Bölüm dizisinin terimlerini birbiri ardı sıra bulmamızı sağlayan formül,

$$t_n = 1 + \frac{1}{t_{n-1}}$$

olduğundan, bu formül (1) de yerine yazılırsa α ile başlayan bölüm dizisinin,

$$\alpha, \alpha, \alpha, \ldots \tag{2}$$

şeklinde olduğu görülür. Tıpkı bunun gibi β ile başlayan bölüm dizisi,

$$\beta, \beta, \beta, \ldots \tag{3}$$

şeklindedir. 2.5.6 da verilen teorem gereği bütün bölüm dizilerinin periyotları r uzunluğundadır. Daha önce yapıldığı gibi (2) ve (3) dizilerinden farklı, hiçbir ortak elemanı olmayan ve bundan başka bütün $0, 1, 2, \ldots, p-1, \infty$ elemanlarını içeren (α ve β hariç) $R_1, R_2, \ldots, R_k$ bölüm dizileri sistemini oluşturalım. Buradan $(p+1)-2 = kr$ yani $p-1 = kr$ eşitliği elde edilir. Bu da r nin $p-1$ in bir böleni olduğunu gösterir.

b) Verilen dizinin terimlerinin p ile bölümünden elde edilen kalanlar,

$$c_0 = 0,\, c_1 = 1,\, c_2 = 1, \ldots \tag{4}$$

$F^0{}_p$ dizisini oluştururlar. (4) ten oluşturulan bölüm dizisi,

$$\bar{t}_1 = \frac{c_1}{c_0} = \infty, \ldots, \bar{t}_n = \frac{c_n}{c_{n-1}} \tag{5}$$

şeklindedir. İlk önce p moduna göre $\sqrt{5}$ in tamsayı karşılığının olmadığını kabul edelim. Bu durumda a) şıkkına göre (5) in periyot uzunluğu $p+1$ in bir bölenidir. Bundan dolayı $\bar{t}_{p+2} = \bar{t}_{1+(p+1)} = \infty$ olur. Buradan,

$$\frac{c_{p+2}}{c_{p+1}} = \infty$$

ve böylece $c_{p+1} = 0$ sonucu çıkar. Bu a_{p+1} sayısının p ile bölünebildiği anlamına gelir. p moduna göre $\sqrt{5}$ in tamsayı karşılığının olduğu durumda da benzer şekilde ispat yapılır [2].

2.6 Belirli tamsayılarla bölünebilen Fibonacci terimleri

2.6.1 Teorem: a ve b tamsayılar olsun. S uygun bir tamsayı olmak üzere

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + b^2 S$$

dir[2].

İspat: $(a+b)^m$ ifadesi,

$$\underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{m \text{ tane}}$$

demektir. Bu terimler çarpıldığında a^m in katsayısının 1 olacağı açıktır. $a^{m-1}b$ terimini elde etmek için parantezlerin herhangi birindeki b ile diğer parantezlerdeki a lar çarpılmalıdır. Bundan dolayı $a^{m-1}b$ nin katsayısı m dir. Kalan terimler b nin 2 den küçük olmayan terimlerini çarpan olarak bulundururlar. Sonuç olarak $a^{m-1}b$ nin katsayısı m dir [2].

2.6.2 Teorem: Bir Fibonacci dizisinin $(k+1)$. terimi olan a_k sayısı d ile bölünebiliyorsa,

$$a_{kl-1} - (a_{k-l})^l$$

$$a_{kl+1} - (a_{k+l})^l$$

farklarından her biri, her l için, d^2 ile bölünür [2].

İspat: Tümevarım yöntemini kullanacağız. $l=1$ için iddia doğrudur. Bu iddianın $l=s$ için doğru olduğunu kabul edelim. Şimdi iddianın $l=s+1$ için de doğru olduğunu ispatlayacağız. 2.1.6 da verilen teoremde bir Fibonacci dizisinin $(n+m)$. teriminin $a_{n+m-1} = a_{n-1}a_{m-1} + a_n a_m$ formülü ile bulunabileceği ispatlanmıştı. Buna göre, bu formülde $n=k$ ve $m=ks$ alınırsa,

$$a_{k(s+1)-1} = a_{k+ks-1}$$
$$= a_{k-1}\, a_{ks-1} + a_k\, a_{ks}$$

elde edilir. a_k ve aynı zamanda $a_0 = 0$ sayısı d ile bölünebildiğinden, 2.3.11 de verilen teoremden dolayı a_{ks} de d ile bölünür. Bu sebeple $a_k\, a_{ks}$ çarpımı da d^2 ile bölünebilir. x uygun bir tamsayı olmak üzere,

$$a_{k(s+1)-1} = a_{k-1}\, a_{ks-1} + x\, d^2 \qquad (1)$$

elde edilir. Hipotez gereği,

$$a_{ks-1} = (a_{k-1})^s + y\, d^2 \qquad (2)$$

dir. (2), (1) de yazılırsa,

$$a_{k(s+1)-1} = a_{k-1}(a_{k-1})^s + d^2(y\, a_{k-1} + x)$$
$$= (a_{k-1})^{s+1} + z\, d^2$$

elde edilir, yani

$$a_{k(s+1)-1} - (a_{k-1})^{s+1}$$

sayısı d^2 ile bölünebilir. Böylece iddianın $l = s+1$ için de doğru olduğu gösterilmiş oldu. Buna benzer olarak $a_{kl+1} - (a_{k+l})^l$ ifadesinin de d^2 ile bölünebileceği gösterilebilir [2].

2.6.3 Teorem: a_k sayısı m^n ile bölünebiliyorsa $(a_{k+1})^m - (a_{k-1})^m$ sayısı m^{n+1} ile bölünür [2].

İspat: a_k sayısı m^n ile bölünebiliyorsa, x bir tamsayı olmak üzere $a_k = x\, m^n$ olarak yazılabilir. Buradan,

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} = a_{k-1} + x\, m^n \quad \text{ve} \quad (a_{k+1})^m = (a_{k-1} + x\, m^n)^m$$

elde edilir. 2.6.1 de verilen teoreme göre,

$$\left(a_{k-1} + x m^n\right)^m = \left(a_{k-1}\right)^m + m\left(a_{k-1}\right)^{m-1} x m^n + x^2 m^{2n} S$$
$$= \left(a_{k-1}\right)^m + m^{n+1}\left[\left(a_{k-1}\right)^{m-1} x + x^2 m^{n-1} S\right]$$

dir. O halde $\left(a_{k+1}\right)^m - \left(a_{k-1}\right)^m$ farkı m^{n+1} ile bölünebilir.

2.6.4 Teorem: a_k sayısı m^n ile bölünebiliyorsa a_{km} sayısı m^{n+1} ile bölünür[2].

İspat: 2.6.2 deki teorem gereği $d = m^n$ yazılırsa,

$$a_{km+1} = \left(a_{k+1}\right)^m + x m^{2n}$$
$$a_{km-1} = \left(a_{k-1}\right)^m + y m^{2n}$$

elde edilir. 2.6.3 te verilen teoreme göre, $\left(a_{k+1}\right)^m - \left(a_{k-1}\right)^m$ farkı m^{n+1} ile bölünebilmektedir. O halde,

$$a_{km+1} - a_{km-1} = a_{km}$$

farkı da m^{n+1} ile bölünebilir.

2.6.5 Teorem: a_k sayısı m ile bölünebiliyorsa $km^{n-1}s$ numaralı bütün terimler her s için m^n ile bölünebilir [2].

İspat: 2.6.4 teki teoremden dolayı a_k sayısı m ile bölünebiliyorsa a_{km} sayısı m^2 ile bölünür. Bu durumda a_{km^2} sayısı m^3 ile bölünebilir. Böylece $a_{km^{n-1}}$ sayısı m^n ile bölünebilir. 2.3.11 de verilen teoremden dolayı $a_{km^{n-1}}$ sayısı m^n ile bölünebiliyorsa, bütün $a_{km^{n-1}s}$ terimleri de m^n ile bölünebilir.

2.6.6 Sonuç: 2.6.5 te verilen teorem ile Fibonacci dizisinde verilen bir p asal sayısının herhangi bir kuvvetiyle bölünebilen terimler bulunabilir. p, 2 ve 5 ten farklı bir asal sayı olmak üzere $\sqrt{5}$ in tamsayı karşılığı yoksa a_{p+1} sayısının p ile, $\sqrt{5}$ in tamsayı karşılığı varsa a_{p-1} sayısının p ile bölünebildiği teorem 2.5.7 de verilmişti. 2.6.5 te verilen teoremin sonucu olarak, $\sqrt{5}$ in tamsayı karşılığı bulunamıyorsa $a_{(p+1)p^{n-1}s}$ şeklindeki bütün terimler p^n ile bölünebilir. Yine aynı şekilde $\sqrt{5}$ in p moduna göre tamsayı karşılığı bulunabiliyorsa, $a_{(p-1)p^{n-1}s}$ şeklindeki bütün terimler p^n ile bölünebilir. $p=2$ ve $p=5$ için ise p nin bir kuvvetiyle bölünebilen sayıların indeksleri doğrudan bulunabilir.

2.6.7 Örnek: 0, 1, 1, 2, 3, 5, . . . Fibonacci dizisinde a_3 sayısının 2 ile ve a_5 sayısının 5 ile bölünebildiği görülür. 2.6.5 te verilen teoremden dolayı $a_{3\cdot 2^{n-1}\cdot s}$ sayıları 2^n ile ve $a_{5\cdot 5^{n-1}\cdot s}$ sayıları da 5^n ile bölünebilir.

2.6.8 Örnek: 10000 ile bölünen Fibonacci sayılarının indekslerini bulmak istiyoruz. $10000 = 2^4 5^4$ olduğundan 2^4 ile indeksleri $3\cdot 2^{4-1}\cdot s = 24s$ olan sayılar, 5^4 ile de indeksleri $5^4 t = 625t$ olan sayılar bölünebilir. Buna göre, 24 ve 625 ile bölünebilen sayılar 10000 ile bölünebilir. Bu sayıların indeksleri ise $24\cdot 625\cdot r = 15000r$ şeklindedir.

2.6.9 Uyarı: 2.6.8 verilen yöntemle Fibonacci dizisinin verilen bir m sayısıyla bölünebilen bütün sayıları elde edilemez. Örneğin indeksi 12 olan sayı $a_{12} = 144$ tür. Bu sayı 2^4 ile bölünebilir. Bundan dolayı 2^4 ile indeksi $12s$ olan bütün sayılar ve 10000 ile de indeksi $12\cdot 625\cdot r = 7500r$ olan bütün sayılar bölünebilir.

2.6.10 Örnek: Fibonacci dizisindeki terimlerden hangilerinin 55566 ile bölünebildiği bulunmak istensin. $55566 = 2\cdot 3^4\cdot 7^3$ olarak çarpanlarına ayrılabilir. 2 ile $3s$ numaralı bütün terimler bölünebilir. 3 moduna göre $\sqrt{5}$ sayısı $\sqrt{2}$ demektir. $\sqrt{2}$ nin 3 moduna göre tamsayı karşılığı bulunamaz. Bunun sonucu olarak indeksleri $(3+1)\cdot 3^{4-1}\cdot t = 108t$ olan sayılar 3^4 ile bölünebilir. Bunun gibi, 7 moduna göre $\sqrt{5}$ sayısının tamsayı karşılığı yoktur. Bundan dolayı indeksleri $(7+1)\cdot 7^{3-1}\cdot q = 392q$ olan sayılar 7^3 ile bölünebilir. Sonuç olarak indeksleri $10584r$ şeklinde olan Fibonacci sayıları 55566 ile bölünebilir.

2.7 Doğrusal İndirgemeli Diziler ve Fibonacci Dizisi

2.7.1 Tanım: Bir (a_n) dizisinde dizinin bir terimi kendisinden önce gelen bir veya birkaç terim cinsinden ifade edilebiliyorsa bu diziye indirgemeli dizi denir. Bir indirgemeli dizide $(n+k)$. terim kendisinden önce gelen k terim cinsinden ifade edilebiliyorsa bu diziye k. mertebeden indirgemeli dizi, tanımlama bağıntısına da indirgeme bağıntısı adı verilir. Eğer indirgeme bağıntısı birinci dereceden ise bu indirgemeli dizi doğrusal indirgemeli dizi olarak adlandırılır.

2.7.2 Örnek: $(a_n)=(1,2,3,6,11,20,\ldots)$ dizisi indirgemeli bir dizidir. Çünkü dizide üçüncü terimden sonraki her terim kendisinden önce gelen üç terimin toplamı olarak ifade edilebilir. Buna göre indirgeme bağıntısı $a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$ olarak tanımlanabilir. Bu dizinin mertebesi 3 tür ve indirgeme bağıntısı birinci dereceden olduğu için dizi doğrusal indirgemeli bir dizidir.

2.7.3 Örnek: $a_1=a,\ a_2=ar,\ a_3=ar^2,\ldots,\ a_n=ar^{n-1},\ldots$ dizisi geometrik dizidir. Bu dizide, her terim kendisinden önceki terimin r katı olduğundan,

$$a_{n+1}=r\,a_n$$

bağıntısı yazılabilir. Bu durumda geometrik diziler birinci mertebeden doğrusal indirgemeli dizilerdir.

2.7.4 Örnek: $a_1=a,\ a_2=a+d,\ a_3=a+2d,\ldots,\ a_n=a+(n-1)d,\ldots$ dizisi aritmetik dizidir. Bu dizide, her terim kendisinden önceki terimin d fazlası olduğundan,

$$a_{n+1}=a_n+d \tag{1}$$

bağıntısı yazılabilir. Ancak bu indirgeme bağıntısı değildir. Bu denklemin indirgeme bağıntı olabilmesi için d sayısı yok edilmelidir. Bunun için,

$$a_{n+2}=a_{n+1}+d \tag{2}$$

bağıntısından $d = a_{n+1} - a_n$ bulunup (1) eşitliğinde yazılırsa indirgeme bağıntısı,

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$$

olarak bulunur. Bu durumda aritmetik diziler ikinci mertebeden doğrusal indirgemeli dizilerdir.

2.7.5 Örnek: Fibonacci dizisi de doğrusal indirgemeli bir dizidir. Çünkü dizinin terimleri arasında,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

bağıntısı vardır. Böylece Fibonacci dizisinin ikinci mertebeden doğrusal bir indirgemeli dizi olduğu söylenebilir.

2.7.6 Uyarı: İndirgemeli dizilerde bir terimi bulmak için kendisinden önceki terimleri bilmek yeterlidir. Ancak bu çok zaman alabilir. Örneğin Fibonacci dizisinde 100. terimi bulmak için 99. ve 98. terimleri bilmek yeterlidir fakat, bu terimleri bulmak çok kolay değildir. Herhangi bir indirgemeli dizinin genel terimi bulunursa istenen terim bu formül yardımıyla bulunabilir. Genel terimin bulunması için bir yöntem geliştirilebilir. İkinci mertebeden doğrusal bir dizinin genel terimini veren formül şu şekilde bulunabilir: Bu dizinin indirgeme bağıntısı,

$$a_{n+2} = A_1 a_{n+1} + A_2 a_n \tag{1}$$

şeklindedir. $a_n = r^n$ geometrik dizisinin (1) bağıntısını sağlaması için gerek ve yeter koşul,

$$r^2 - A_1 r - A_2 = 0 \tag{2}$$

olduğu, (1) eşitliğinde a_n yerine r^n yazılarak görülebilir. (2) denkleminin kökleri r_1 ve r_2 olsun. C ve D katsayıları ne olursa olsun,

$$a_n = C(r_1)^n + D(r_2)^n \tag{3}$$

şeklindeki bir dizi (1) bağıntısını sağlar. (2) denkleminin kökleri bulunursa, C ve D katsayıları nasıl seçilirse seçilsin, çok sayıda dizi bulunabilir. (1) bağıntısı ile a_1 ve a_2 terimleri verilmiş olsun. Bu dizi (3) şeklinde yazılabilir. Bunun için (3) te $n=1$ ve $n=2$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} C r_1 + D r_2 &= a_1 \\ C(r_1)^2 + D(r_2)^2 &= a_2 \end{aligned} \tag{4}$$

denklem sistemi elde edilebilir. Bu denklem sisteminden C ve D katsayıları bulunabilirse (3) denklemi ve dolayısıyla da dizinin genel terimi bulunmuş olur [5].

2.7.7 Teorem: Fibonacci dizisinin genel terimi,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

dir.

İspat: Fibonacci dizisinde indirgeme bağıntısı,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \tag{1}$$

şeklinde olduğundan $a_n = r^n$ denir ve bu ifade (1) de yerine yazılırsa $r^2 - r - 1 = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir.

$$\begin{aligned} C r_1 + D r_2 &= a_1 \\ C(r_1)^2 + D(r_2)^2 &= a_2 \end{aligned} \tag{2}$$

denklem sisteminde $a_1 = a_2 = 1$ ve r_1 ve r_2 değerleri bilinmektedir. Bu değerler yerine yazılırsa,

$$C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1$$
$$C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=1 \qquad (3)$$

denklem sistemi elde edilir. (3) denklem sistemi çözülürse $C=\frac{1}{\sqrt{5}}$ ve $D=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ bulunur. Buna göre Fibonacci dizisinin genel terimi,

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

olarak bulunur.

2.7.8 Teorem: Fibonacci dizisinde ardışık terimlerden büyüğünün küçüğüne oranı altın orana yaklaşır ve limit değeri $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dir.

İspat: 2.7.7 de verilen teoremde dizinin genel terimi bulunmuştu. Bu formülden dizinin herhangi ardışık iki terimi,

$$a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

olarak bulunabilir. Bu terimler birbirine bölünürse,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

elde edilir. Pay $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$, payda $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ parantezine alınıp sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)^{n}\right]}$$

bulunmuş olur. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n=0$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

olarak bulunur.

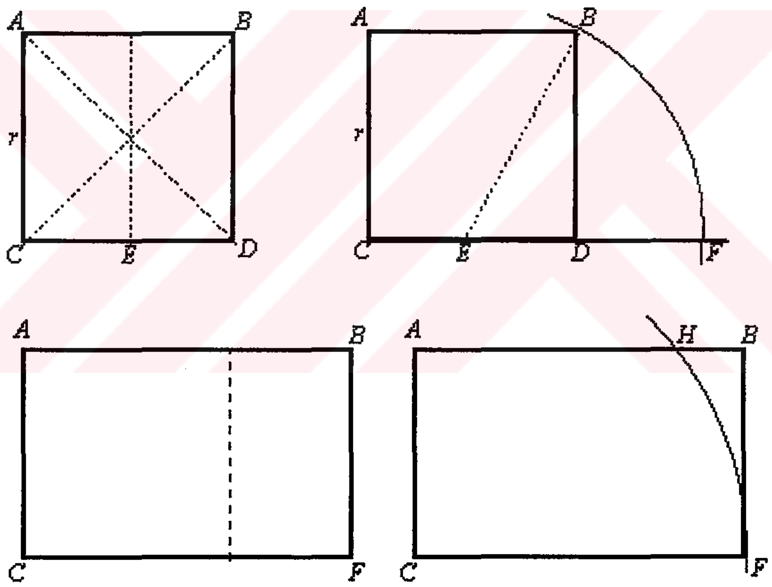
2.8 Dünyanın En Eski Problemlerinden Birine Yaklaşık Çözüm

Antik çağdan günümüze kadar gelen üç ünlü geometri problemi vardır. Bu problemler, yalnız doğru çizmeye yarayan yani üzerinde ölçü olmayan bir cetvel ve daire çizmeye yarayan bir pergel kullanarak, herhangi bir açının üç eşit parçaya bölünmesi, bir küpün hacminin iki katına eşit hacimli başka bir küp çizilmesi, bir dairenin alanına eşit alanlı bir kare çizilmesi problemleridir [6]. Bu problemler belki de insanlığın üzerinde en çok uğraştığı problemlerdendir. Birçok matematikçi bu problemlerle uğraşmış ancak bir çözüm verememiştir. Günümüzde, bu problemlerin çözümünün olmadığı çağdaş yöntemlerle ispatlanmıştır. Ancak bu problemleri çözmek için yapılan yaklaşımlardan son derece ilginç olanlar vardır. İşte bu yaklaşımların en ilginç olanlarından biri de 17. yüzyılda yaşamış olan Kochansky adındaki Polonyalı bir keşişin üçüncü probleme yaklaşımıdır. Kochansky geometrik yöntemle φ ile π arasında kurduğu bir bağıntı ile % 99, 9 oranında yaklaşık sonuç veren bir yöntem vermiştir. Bu yöntem şudur:

Alanı a^2 olan bir kare ile πr^2 olan bir daire alınsın. $\pi r^2 = a^2$ olması için $a = \sqrt{\pi}\, r$ olmalıdır. φ ile π arasında yaklaşık olarak $\sqrt{\varphi} + \frac{1}{2} \cong \sqrt{\pi}$ bağıntısı vardır. % 0,1 hata ile $\sqrt{\varphi} + \frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$ kabul edilebilir. Buna göre,

$$a = \left(\sqrt{\varphi} + \frac{1}{2}\right) r = r\sqrt{\varphi} + \frac{r}{2}$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan, $r\sqrt{\varphi}$ uzunluğu cetvel ve pergel ile şu şekilde çizilebilir: Kenar uzunluğu r olan bir kare çizilir. (Şekil 2.8.1)



Şekil 2.8.1

[CD] kenarının orta noktası olan E noktası işaretlenir. Pergel E noktasına konarak B noktası [CD] nin uzantısındaki F noktasına taşınır. [AC] kısa kenar, [CF] de uzun kenar olacak şekilde çizilen $ABCF$ dikdörtgeni kenarları $1:\varphi$ oranında olan dikdörtgendir. Pergel C noktasına konup F noktası AB üzerine taşındığında elde edilen AH uzunluğu da AC cinsinden $|AC|\sqrt{\varphi}$ dir. $|AC| = r$ olduğundan bu değer

$r\sqrt{\varphi}$ ye eşittir. Alan formülü $a = r\sqrt{\varphi} + \frac{r}{2}$ olduğundan elde edilmek istenen karenin bir kenarı $|CE| + |AH|$ toplamı kadardır. $|CE|$ ve $|AH|$ uzunlukları bir çizgi üstüne taşınıp bir kare çizilirse bu karenin alanı % 99,9 oranında başlangıçtaki dairenin alanına eşit olacaktır [7].

2.9 Fibonacci sayıları ile ilgili bazı ilginç özellikler

Fibonacci dizisinin özellikleri oldukça fazladır. Bu dizi birçok matematikçi tarafından incelenmiş ve birçok ilginç sonuçlar elde edilmiştir. Hatta bu dizi ile ilgili üç ayda yayınlanan The Fibonacci Quarterly dergisi bu özelliklerle ve yapılan bilimsel yayınlarla doludur. Bu bölümde Fibonacci sayılarının diğer ilginç bazı özellikleri ispatları yapılmadan verilecektir.

2.9.1 Fibonacci dizisinin tek tam kare olan terimi $F_{12} = 144$, tam küp olan terimleri ise $F_1 = F_2 = 1$ ve $F_6 = 8$ dir.

2.9.2 Fibonacci dizisinin p. terimi olan F_p asal ise p asaldır. Ancak tersi doğru değildir. Örneğin $F_{13} = 233$ ve $F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$ olarak yazılabilir.

2.9.3 Fibonacci ve Lucas dizisi arasında aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$$F_{n+m} = \frac{1}{2}(F_n L_m + F_m L_n)$$

$$L_{n+m} = \frac{1}{2}(L_n L_m + 5F_n F_m)$$

2.9.4 F_n n. Fibonacci sayısı olmak üzere, $F_n = y^m$ ($m \geq 2$) denkleminin çözümleri $F_n = 0, 1, 1, 8, 144$ ten ibarettir. Bununla beraber, L_n n. Lucas sayısı olmak üzere, $L_n = y^p$ denkleminin çözümleri $L_n = 1, 4$ ($p \geq 2$) tür [17].

2.9.5 $n > 2$ ve $n \neq 6, 8$ olmak üzere $0 < m < n$ için, F_n in öyle bir asal böleni vardır ki, bu asal bölen hiçbir F_m sayısını bölmez [18].

2.9.6 $0 < m < n$ olmak üzere, $F_m F_n$ çarpımı tam kare ise, $(m,n) = (1,2), (1,12), (2,12)$ veya $(3,6)$ dır [19].

3. FIBONACCI SAYILARI İLE İLGİLİ İLGİNÇ PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

3.1 Fibonacci sayıları ile ilgili karışık problemler

3.1.1 Problem: $F_1 = F_2 = 1$ ve $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ $(n \geq 1)$ olarak verilen Fibonacci dizisinde,

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

olduğunu gösteriniz [8].

Çözüm:

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_3 - F_2 \\
F_2 &= F_4 - F_3 \\
F_3 &= F_5 - F_4 \\
&\vdots \\
F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\
F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$ elde edilir.

3.1.2 Problem: $F_1 = F_2 = 1$ ve $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ $(n \geq 1)$ olarak verilen Fibonacci dizisinde,

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

olduğunu gösteriniz [8].

Çözüm: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ olduğundan,

$$F_1 = F_2$$
$$F_3 = F_4 - F_2$$
$$F_5 = F_6 - F_4$$
$$\vdots$$
$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$ elde edilir.

3.1.3 Problem: $F_1 = F_2 = 1$ ve $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ $(n \geq 1)$ olarak verilen Fibonacci dizisinde,

$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

olduğunu gösteriniz [8].

Çözüm: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ olduğundan,

$$F_2 = F_3 - F_1$$
$$F_4 = F_5 - F_3$$
$$F_6 = F_7 - F_5$$
$$\vdots$$
$$F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n-1}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - F_1 = F_{2n+1} - 1$ elde edilir.

3.1.4 Problem: $F_1 = F_2 = 1$ ve $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ $(n \geq 1)$ olarak verilen Fibonacci dizisinde, $F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - F_6 + \cdots + F_{2n-1} - F_{2n} = 1 - F_{2n-1}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: 3.1.2 ve 3.1.3 te verilen problemlerden dolayı,

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - F_6 + \cdots + F_{2n-1} - F_{2n} = F_{2n} - F_{2n+1} + 1$$

elde edilir. $F_{2n} - F_{2n+1} = -F_{2n-1}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - F_6 + \cdots + F_{2n-1} - F_{2n} = 1 - F_{2n-1}$$

eşitliği elde edilir.

3.1.5 Problem: F_n ile Fibonacci dizisi gösterilmek üzere, $n|m$ ise $F_n|F_m$ dir.

Çözüm: Fibonacci dizisinin genel terimi,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

olduğundan $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ denirse $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, $F_m = \dfrac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}$ olur. $n|m$ olduğundan $m = nq$ $(q \in Z^+)$ yazılabilir. Bu durumda,

$$F_m = F_{nq} = \frac{\alpha^{nq} - \beta^{nq}}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha^n)^q - (\beta^n)^q}{\alpha - \beta}$$

elde edilir. $x - y$ farkı $(x \neq y)$ $x^n - y^n$ farkını böleceğinden dolayı $F_n|F_m$ sonucu çıkar.

3.1.6 Problem: $F_1 = F_2 = 1$ ve $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ $(n \geq 1)$ olarak verilen Fibonacci dizisinde,

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm:

$$F_n^2 = F_n F_n = F_n\left(F_{n+1} - F_{n-1}\right) = F_n F_{n+1} - F_n F_{n-1}$$

$$F_{n-1}^2 = F_{n-1} F_{n-1} = F_{n-1}\left(F_n - F_{n-2}\right) = F_{n-1} F_n - F_{n-1} F_{n-2}$$

$$F_{n-2}^2 = F_{n-2} F_{n-2} = F_{n-2}\left(F_{n-1} - F_{n-3}\right) = F_{n-2} F_{n-1} - F_{n-2} F_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$F_3^2 = F_3 F_3 = F_3\left(F_4 - F_2\right) = F_3 F_4 - F_3 F_2$$

$$F_2^2 = F_2 F_2 = F_2\left(F_3 - F_1\right) = F_2 F_3 - F_2 F_1$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa $F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_2 F_1$ eşitliği elde edilir. $F_2 = F_1$ olduğu düşünülürse $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ olarak bulunur.

3.1.7 Problem: Fibonacci dizisinin ilk 8 teriminden 3. ve 6. terimler çift, diğerleri tektir. Buna göre, dizinin $3k$ $(k \geq 1)$ indisli terimlerinin çift, diğer terimlerinin tek olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Terimlerin birinci terimden itibaren sırasıyla tek-tek-çift-tek-tek-çift-... oldukları iddia edilmektedir. F_n ve F_{n+1} terimlerinin tek oldukları kabul edilsin. $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ olduğundan F_{n+2} çift olacaktır. $F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1}$ olduğundan F_{n+3} tek, aynı şekilde F_{n+4} tek ve F_{n+5} çift olacaktır. Böylece terimler birinciden itibaren sırasıyla tek-tek-çift-tek-tek-çift-... olarak sıralanacaktır. Yani $3k$ $(k \geq 1)$ indisli terimler çift, diğer terimler tek olacaktır.

3.1.8 Problem: Fibonacci dizisinde hangi terimlerin 3 ile bölünebildiğini bulunuz.

Çözüm: Fibonacci dizisinin terimleri 3 ile bölünürse sekiz sayıdan oluşan 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2 kalıbının tekrarladığı görülür. Ayrıca kalanların da bir Fibonacci dizisi oluşturduğunu görmek zor değildir. Kalanlar periyodik olduğundan dolayı her dört rakamda bir 0 kalanı elde edilecektir. Sonuç olarak dizinin $4k$ $(k \geq 1)$ numaralı terimleri 3 ün katıdır.

3.1.9 Problem: (F_n) Fibonacci dizisinde $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}} = 1$ olduğunu gösteriniz [9].

Çözüm: $\frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{F_n}{F_n F_{n-1} F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} - F_{n-1}}{F_n F_{n-1} F_{n+1}} = \frac{1}{F_{n-1}F_n} - \frac{1}{F_n F_{n+1}}$ olarak düzenlenirse $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}$ ifadesi, $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{F_{n-1}F_n} - \frac{1}{F_n F_{n+1}} \right)$ ifadesine dönüşür. Bu ifadede n yerine 2 den başlayarak artan değerler verilirse,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{1}{F_1 F_2} - \frac{1}{F_2 F_3} + \frac{1}{F_2 F_3} - \frac{1}{F_3 F_4} + \frac{1}{F_3 F_4} - \frac{1}{F_4 F_5} + \cdots$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki terimlerin birincisinden sonraki terimler sadeleştirilirse,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{1}{F_1 F_2} = 1$$

olarak bulunur.

3.1.10 Problem: (F_n) Fibonacci dizisinde $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}} = 2$ olduğunu gösteriniz [9].

Çözüm: $$\frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} - F_{n-1}}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{1}{F_{n-1}} - \frac{1}{F_{n+1}}$$

olduğu göz önüne alınırsa, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}}$ ifadesi $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{F_{n-1}}-\frac{1}{F_{n+1}}\right)$ şekline dönüşür.

Bu ifadede n yerine 2 den başlayarak artan değerler verilirse,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{F_{n-1}}-\frac{1}{F_{n+1}}\right)=\frac{1}{F_1}-\frac{1}{F_3}+\frac{1}{F_2}-\frac{1}{F_4}+\frac{1}{F_3}-\frac{1}{F_5}+\cdots$$

eşitliği elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{F_{n-1}}-\frac{1}{F_{n+1}}\right)&=\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}\\&=2\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.11 Problem: (F_n) Fibonacci dizisi olmak üzere, $n \geq 3$ için $F_{n+2} < 2^n$ olduğunu gösteriniz [10].

Çözüm: Tümevarım yöntemi kullanılacaktır.

i) $n=3$ için $F_5 = 5 < 2^3$ olduğundan önerme doğrudur.

ii) $F_{(n-2)+2} < 2^{n-2}$ ve $F_{(n-1)+2} < 2^{n-1}$ olduğu kabul edilsin.

$$F_{n+2} = F_{(n-1)+2}F_{(n-2)+2} < 2^{n-1} + 2^{n-2} < 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$$

olduğundan önerme bütün $n \geq 3$ için doğrudur.

3.1.12 Problem: Fibonacci dizisinde, aritmetik dizi oluşturacak şekilde dört terim bulunamayacağını gösteriniz [10,11,12].

Çözüm: Aritmetik dizi oluşturacak şekilde dört terimin olduğu kabul edilsin. $i<j<h<k$ olmak üzere bu terimler F_i, F_j, F_h ve F_k olsun. $d = F_j - F_i = F_k - F_h$ olduğundan dolayı,

$$d = F_j - F_i < F_j \qquad (1)$$

$$d = F_k - F_h \geq F_k - F_{k-1} = F_{k-2} \geq F_j \qquad (2)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (1) ve (2) eşitsizlikleri birbirinin tersleridir. Başlangıçta böyle dört terimin olduğu kabul edilmişti. Demek ki iddia yanlıştır, yani aritmetik dizi oluşturacak şekilde dört Fibonacci sayısı yoktur [12].

3.1.13 Problem: Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız:

a) $2|F_n \Leftrightarrow 3|n$

b) $3|F_n \Leftrightarrow 4|n$

c) $4|F_n \Leftrightarrow 6|n$

Çözüm:

a) $F_3 = 2$ olduğundan 3.1.5 te verilen problem gereği $F_3|F_n \Leftrightarrow 3|n$ dir. Bu problem Fibonacci dizisinin 2 ile bölünebilen terimlerinin indisi 3 ün katı olan terimler olduklarını söyler.

b) $F_4 = 3$ olduğundan 3.1.5 te verilen problem gereği $F_4|F_n \Leftrightarrow 4|n$ dir. Bu problem Fibonacci dizisinin 3 ile bölünebilen terimlerinin indisi 4 ün katı olan terimler olduklarını söyler.

c) Fibonacci dizisinde $F_6 = 8$ dir. 3.1.5 te verilen problem gereği $F_6|F_n \Leftrightarrow 6|n$ olmalıdır. Bu $8|F_n \Leftrightarrow 6|n$ olması ile aynı anlama gelir. $8|F_n$ ise $4|F_n$ olacağından $4|F_n \Leftrightarrow 6|n$ olur. Bu problem Fibonacci dizisinin 4 ile bölünebilen terimlerinin indisi 6 nın katı olan terimler olduklarını söyler.

3.1.14 Problem: Fibonacci dizisinde ilk iki terim istenildiği gibi seçilirse yine bir Fibonacci dizisi elde edilir. $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ olarak seçilen $L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$ dizisi de bunlardan biridir ve Lucas dizisi olarak adlandırılır. Lucas dizisinin genel terimi bulunuz.

Çözüm: 2.7.6 da verilen yöntem kullanılacaktır. Lucas dizisinde indirgeme bağıntısı,

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \tag{1}$$

şeklinde olduğundan $L_n = r^n$ denir ve bu (1) de yerine yazılırsa $r^2 - r - 1 = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir.

$$\begin{aligned} C r_1 + D r_2 &= L_1 \\ C(r_1)^2 + D(r_2)^2 &= L_2 \end{aligned} \tag{2}$$

denklem sisteminde $L_1 = 1$, $L_1 = 3$, r_1 ve r_2 değerleri bilinmektedir. Bu değerler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= 1 \\ C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 &= 3 \end{aligned} \tag{3}$$

denklem sistemi elde edilir. (3) denklem sistemi çözülürse $C = D = 1$ olur. Buna göre Lucas dizisinin genel terimi,

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

olarak bulunur.

3.1.15 Problem: F_n Fibonacci dizisi ile L_n Lucas dizisi arasında $F_{2n} = F_n L_n$ bağıntısının olduğunu gösteriniz [8,15].

Çözüm: $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ denirse $F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ ve $L_n=\alpha^n+\beta^n$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned}F_{2n}&=\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta}\\&=\frac{(\alpha^n-\beta^n)(\alpha^n+\beta^n)}{\alpha-\beta}\\&=\frac{(\alpha^n-\beta^n)}{\alpha-\beta}(\alpha^n+\beta^n)=F_nL_n\end{aligned}$$

elde edilir.

3.2 Fibonacci Sayıları ile ilgili Olimpiyat Problemleri

3.2.1 Problem: Her $n\in N$ ve $n\geq 2$ sayısının, Fibonacci dizisinin farklı terimlerinin toplamı olarak yazılabileceğini gösteriniz.

Çözüm: Her $n\in N$ için, $u_{n+1}<k\leq u_{n+2}$ olan her $k\in N$ sayısı Fibonacci dizisinin terimlerinin toplamı olarak yazılabilir. Önce bu önermenin ispatını yapalım. Tümevarım yöntemi kullanılacaktır. $P(1)$ için,

$$u_2=1<k\leq u_3=2 \quad \text{ise} \quad k=u_3=2$$

dir ve önerme doğrudur. $P(n-1)$ in doğru olduğunu kabul edelim ve

$$u_{n+1}<k\leq u_{n+2}$$

olsun. Bu durumda, ya $k-u_{n+1}>u_n$ ya da $0<k-u_{n+1}\leq u_n$ dir. Ancak,

$$k-u_{n+1}>u_n \quad \text{ise} \quad k>u_{n+1}+u_n=u_{n+2}$$

olacağından $0<k-u_{n+1}\leq u_n$ olmak zorundadır. Böylece hipotez gereği,

$$k-u_{n+1}=u_{a_1}+u_{a_2}+\cdots+u_{a_s}$$

ve dolayısıyla,

$$k=u_{a_1}+u_{a_2}+\cdots+u_{a_s}+u_{n+1}$$

olduğu yani $P(n)$ in de doğru olduğu gösterilmiş olur [10].

3.2.2 Problem: $u_1=1$, $u_2=1$ ve $k\geq 1$ için

$$u_{k+2}=u_k+u_{k+1}$$

olarak tanımlanan (u_n) dizisi Fibonacci dizisi olarak bilinir. Her $k\geq 1$ için $5\,|\,u_{5k}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Tümevarım yöntemini kullanacağız. $k=1$ için $5\,|\,u_5=5$ olduğundan önerme doğrudur. İddianın $k-1$ için doğru olduğunu yani, $5\,|\,u_{5k-5}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$u_{5k-5}=5.A$$

$$\begin{aligned}
u_{5k}&=u_{5k-2}+u_{5k-1}\\
&=u_{5k-2}+u_{5k-3}+u_{5k-2}\\
&=2u_{5k-2}+u_{5k-3}\\
&=2(u_{5k-4}+u_{5k-3})+u_{5k-3}\\
&=2u_{5k-4}+3u_{5k-3}\\
&=2u_{5k-4}+3(u_{5k-5}+u_{5k-4})\\
&=5u_{5k-4}+3u_{5k-5}\\
&=5u_{5k-4}+3.5.A\\
&=5(u_{5k-4}+3.A)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buna göre, önerme k için de doğrudur [13].

3.2.3 Problem: Fibonacci dizisinin herhangi 8 ardışık teriminin toplamının Fibonacci dizisinin bir terimi olamayacağını gösteriniz.

Çözüm: Herhangi bir $k \in N$ alınıp $S = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+8}$ denirse $u_{k+9} = u_{k+7} + u_{k+8} < S$ olduğu açıktır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} u_{k+10} &= u_{k+8} + u_{k+9} \\ &= u_{k+8} + u_{k+7} + u_{k+8} \\ &= u_{k+8} + u_{k+7} + u_{k+6} + u_{k+7} \\ &= \cdots \\ &= \underbrace{u_{k+8} + u_{k+7} + \cdots + u_{k+2} + u_{k+1}}_{S} + u_{k+2} \\ &= S + u_{k+2} \end{aligned}$$

olduğundan $S < u_{k+10}$ olur. Böylece $u_{k+9} < S < u_{k+10}$ bulunmuş olur. u_{k+9} ve u_{k+10} dizinin ardışık iki terimi olduğundan bu iki terim arasında dizinin bir terimi bulunamaz [13].

3.2.4 Problem: Terimleri on basamaklı sayılar olan ve aşağıdaki özelliklere sahip bir dizi düşünelim:

a) Dizinin terimleri olan on basamaklı sayılar 2 ve 5 rakamlarından oluşmuştur;

b) Sayıların hiç birinde iki tane 2 rakamı yan yana gelmemektedir.

Buna göre, bu dizinin kaç tane farklı terimi vardır?

Çözüm: Söz konusu özelliklere sahip olan on rakamlı sayılar iki gruba bölünsün: Son rakamı 5 olan sayılar birinci grubu, son rakamı 2 olan sayılar ikinci grubu oluştursun. Birinci gruptaki sayıların son rakamı olan 5 silinirse iki tane 2 nin yan yana gelmediği 9 rakamlı sayılar elde edilir. İkinci gruptaki sayıların sonundaki son iki rakam olan 52 silinirse iki tane 2 nin yan yana gelmediği 8 basamaklı sayılar elde edilmiş olur. a_n ile iki tane 2 nin yan yana gelmediği tüm n basamaklı sayıların sayısı gösterilsin. Yukarıda söylenenlerden,

$$a_{10} = a_9 + a_8 \tag{1}$$

olduğu çıkar. Kolayca görüleceği gibi (1) bağıntısı her $n \geq 3$ için geçerlidir. Yani, $n \geq 3$ için $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ olacaktır. Buna göre, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ olduğu için $a_3 = 5$, $a_4 = 8$, . . . , $a_{10} = 144$ olacaktır. Bu dizi ise başlangıç terimleri 2 ve 3 olarak seçilmiş bir Fibonacci dizisinden başka bir şey değildir. Sonuç olarak birbirinden farklı 144 eleman vardır [13].

3.2.5 Problem: $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ biçiminde tanımlanan Fibonacci dizisinin öyle bir sonsuz alt dizisini bulunuz ki, o alt dizinin herhangi iki terimi aralarında asal olsun.

Çözüm: $d = (a,b)$ ile a ve b tam sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü gösterilsin. $p_k = 2^{2^k} + 1$, $(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ dizisinde tümevarımla, her $k \geq 0$ için

$$p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_m \cdots p_{n-1} + 2 = p_n \tag{1}$$

olduğu gösterilebilir. Burada her $m \neq n$ için p_m ile p_n aralarında asaldır. Ayrıca,

$$u_{p_1}, u_{p_2}, u_{p_3}, \ldots, u_{p_k}, \ldots$$

dizisini alalım. $(p_m, p_n) = \left(2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1\right) = 1$ olur. $(u_m, u_n) = u_{(m,n)}$ olduğundan (problem 3.2.9) her $m \neq n$ için $\left(u_{p_m}, u_{p_n}\right) = u_{(p_m, p_n)} = 1$ elde edilir [11].

3.2.6 Problem: (u_n) Fibonacci dizisi olsun yani, $u_1 = u_2 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $(n \geq 3)$ olsun. $a_n = \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} + \cdots + \dfrac{1}{u_n}$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ dizisinin sınırlı olduğunu (ve dolayısıyla, yakınsak olduğunu) gösteriniz.

Çözüm: Tümevarımla her $n \geq 2$ için $u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$ olduğu gösterilebilir. $n=2$ için eşitsizlik doğrudur. $2 \leq k \leq n$ eşitsizliğini sağlayan her k için $u_k \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}$ olduğu varsayılsın. $k+1$ için,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + u_{k-1} \\ &\geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3}\left[\left(\frac{3}{2}\right)+1\right] \\ &> \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3}\left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

olduğundan eşitsizlik her zaman doğrudur. Böylece,

$$a_n \leq 1+1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = 2+\frac{2}{3}\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}\right]$$

$$= 2+\frac{2}{3}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}{1-\frac{2}{3}} < 2+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}} = 4$$

olarak bulunur. (a_n) dizisi monoton artan ve sınırlı olduğundan yakınsaktır [13].

3.2.7 Problem: Herhangi iki ardışık Fibonacci sayısının aralarında asal olduğunu gösteriniz.

Çözüm: F_n ve F_{n+1} ardışık iki Fibonacci sayısı olmak üzere bu sayıların $d \geq 1$ olacak şekilde bir ortak böleni olsun. $F_{n+1}-F_n$ farkı olan F_{n-1} sayısı da d ile bölünür. Bu şekilde geriye doğru gidilirse $F_1 = 1$ sayısının da d ile bölüneceği görülür ki, 1 sadece 1 ile bölünebilir. Böylece, herhangi ardışık iki Fibonacci sayısının en büyük ortak böleninin 1 olduğu yani bu sayıların aralarında asal olduğu sonucuna varılır.

3.2.8 Problem: Hilesiz bir madeni para n defa havaya atılıyor. Ard arda iki kez tura gelme olasılığını bulunuz.

Çözüm: P_n ile n defa havaya atılan bir paranın ard arda iki kez tura gelmeme olasılığı gösterilsin. $P_1 = 1$ ve $P_2 = \frac{3}{4}$ olduğu açıktır. Eğer $n \geq 2$ ise iki durum vardır. Birincisi, ilk atışta yazı gelmesidir. Bu durumda diğer atışlarda P_{n-1} olasılıkla ard arda tura gelmez. İkincisi ise, ilk atışta tura gelmesidir. Bu durumda da ikinci atışta $\frac{1}{2}$ olasılıkla yazı gelecek, sonraki $n-2$ atışta P_{n-2} olasılıkla ard arda iki kez tura gelmeyecektir. Böylece P_n olasılığı,

$$P_n = \frac{1}{2} P_{n-1} + \frac{1}{4} P_{n-2}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanı 2^n çarpılırsa ,

$$2^n P_n = 2^{n-1} P_{n-1} + 2^{n-2} P_{n-2}$$

elde edilir. $T_n = 2^n P_n$ denirse $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$ bulunur. F_n ile Fibonacci sayıları gösterilmek üzere,

$$T_1 = 2P_1 \quad = 2 = F_3$$
$$T_2 = 2^2 P_2 = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3 = F_4$$

değerleri elde edilir. $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$ formülü yardımıyla bütün n doğal sayıları için $T_n = F_{n+2}$ eşitliği bulunur. $T_n = 2^n P_n$ olduğu da düşünülürse, $P_n = \frac{F_{n+2}}{2^n}$ sonucu bulunmuş olur. P_n ard arda iki kez tura gelmeme olduğundan, n defa havaya atılan bir paranın ard arda iki kez tura gelme olasılığı $1 - P_n = 1 - \frac{F_{n+2}}{2^n}$ olarak bulunur [12].

3.2.9 Problem: İki Fibonacci sayısının en büyük ortak böleni de yine bir Fibonacci sayısıdır. Ayrıca $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$ dir.

Çözüm: Euclid algoritması yardımıyla m ve n doğal sayılarının en büyük ortak böleni bulunurken sırasıyla aşağıdaki işlemler yapılır:

$$m = nq + r$$
$$n = r q_1 + r_1$$
$$r = r_1 q_2 + r_2$$
$$\vdots$$
$$r_k = r_{k+1} q_{k+2}$$

r_{k+1} sıfırdan farklı son kalandır ve $r_{k+1} = (m,n)$ dir [14]. $F_{t+s+1} = F_{t+1}F_{s+1} + F_t F_s$ olduğundan,

$$F_m = F_{nq+r} = F_{nq-1+r+1} = F_{nq}F_{r+1} + F_{nq-1}F_r$$

yazılabilir. 3.1.5 te verilen problemden dolayı $F_n | F_{nq}$ olur. Ayrıca ardışık iki Fibonacci sayısı aralarında asal olduğundan $(F_{nq}, F_{nq-1}) = 1$ dir. Böylece, $(F_m, F_n) = (F_n, F_r)$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse,

$$(F_n, F_r) = (F_r, F_{r_1})$$
$$(F_r, F_{r_1}) = (F_{r_1}, F_{r_2})$$
$$\vdots$$
$$(F_{r_{k-1}}, F_{r_k}) = (F_{r_k}, F_{r_{k+1}}) = F_{r_{k+1}} = F_{(m,n)}$$

bulunmuş olur.

3.2.10 Problem: $n \geq 2$ olmak üzere $F_n | F_m$ olması için gerek ve yeter koşul $n|m$ olmasıdır.

Çözüm:

$\Rightarrow$: $F_n | F_m$ olsun. Bu durumda $(F_n, F_m) = F_n$ olur. 3.2.9 da verilen problemden dolayı $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$ dir. $F_{(n,m)} = F_n$ olması için $(n,m) = n$ olmalıdır ve bunun için de $n | m$ olmalıdır.

$\Leftarrow$: $n | m$ ise $(n,m) = n$ olacaktır. $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}(F_m, F_n) &= F_{(m,n)} \\ &= F_n\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Buradan da $F_n | F_m$ sonucu çıkar ve ispat tamamlanmış olur.

3.2.11 Problem: Terimlerinden hiçbiri Fibonacci sayısı olmayan öyle bir dizi bulunuz ki, bu dizi bu şekildeki dizilerden ortak farkı en küçük olan artan bir aritmetik dizi olsun.

Çözüm: Fibonacci dizisinin terimleri bir $m \in Z^+$ ile bölündüğünde elde edilen kalanlar periyodiktir ve bu kalanlar yine bir Fibonacci dizisi oluştururlar. $m = 2,3,4,5,6,7$ için oluşan kalanlar:

$m = 2$: $1, 1, 0, \ldots,$

$m = 3$: $1, 1, 2, 0, \ldots,$

$m = 4$: $1, 1, 2, 3, 1, 0, \ldots,$

$m = 5$: $1, 1, 2, 3, 1, 0, 3, 3, 1, 4, \ldots,$

$m = 6$: $1, 1, 2, 3, 5, 2, 1, 3, 4, 1, 5, 0, \ldots,$

$m = 7$: $1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, \ldots,$

şeklinde olacaktır. $m \leq 7$ sayıları için olabilecek kalanlar bu sayılardan ibarettir. Ortak farkı 7 ve 7 den küçük her dizinin sonsuz sayıda Fibonacci sayısı içerdiğini görmek zor değildir. Bu durumda aranan dizinin ortak farkı en az 8 olmalıdır. Fibonacci dizisinin terimleri 8 ile bölündüğünde elde edilen kalanlar:

$$1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1, \ldots,$$

sayılarıdır. Bu sayılar periyodik olarak tekrarlanacaktır ve periyot 12 olacaktır. Dikkat edilirse bu kalanlar arasıda 4 ve 6 yoktur. Bundan dolayı $8k+4$ ve $8k+6$ ($k \in Z^{+}$) dizileri hiçbir Fibonacci sayısı içermez. $8k+4$ dizisi de problemde sorulan ortak farkı en küçük olan dizidir ve bu dizinin ortak farkı 4 tür [11].

3.2.12 Problem: a ve b aralarında asal doğal sayılar olmak üzere, $ak+b$ ($k \in N$) şeklinde öyle bir dizi bulunuz ki Fibonacci dizisinin hiçbir terimini içermesin.

Çözüm: $11k+4$ dizisi ($k = 0,1,2,3,...$) istenen özelliktedir. 3.2.11 deki problemde yapıldığı gibi Fibonacci dizisinin terimleri 11 ile bölünürse kalanlar, periyodu 10 olan bir dizi oluştururlar. Bu dizi,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, \ldots,$$

şeklindedir. 4, 6, 7 ve 9 sayıları bu dizide hiçbir zaman görünmez. Dolayısıyla $11k+4$ dizisi ($k = 0,1,2,3,...$) Fibonacci dizisinin hiçbir elemanını içermez $a = 11$ ve $b = 4$ te aralarında asal olurlar [11].

3.2.13 Problem: Fibonacci dizisinin herhangi ardışık yirmi teriminin toplamının $F_{10} = 55$ ile bölündüğünü gösteriniz.

Çözüm: Önce, asıl ispatta kullanılmak üzere bir kaç küçük ispat yapılacaktır. $F_{20} = F_{10+9+1} = F_{11}F_{10} + F_{10}F_{9}$ olduğundan (2.1.6 teorem) F_{20} sayısı F_{10} ile bölünür. $F_{19} - 1 = F_{10+8+1} - 1 = F_{11}F_{9} + F_{10}F_{8} - 1 = (F_{9} + F_{10})F_{9} + F_{10}F_{8} - 1 = F_{9}^{2} - 1 + F_{10}(F_{8} + F_{9})$ olduğundan $F_{9}^{2} - 1 = 34^{2} - 1$ sayısı 55 ile bölüneceğinden $F_{19} - 1$ sayısı F_{10} ile bölünür.

Problemin ispatı için tümevarım yöntemi kullanılacaktır. Ardışık yirmi terim $F_{n}, F_{n+1}, F_{n+2}, \ldots, F_{n+19}$ olsun.

i) $n = 1$ için, $F_{1} + F_{2} + F_{3} + \cdots + F_{20} = F_{22} - 1 = 17710$

olacağından (problem 3.1.1) ve $55|17710$ olduğundan önerme doğrudur.

ii) Önermenin n için doğru olduğu kabul edilsin. Bu durumda,

$$F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + \cdots + F_{n+19}$$

toplamı F_{10} ile bölünecektir. $n+1$ için

$$F_{n+1} + F_{n+2} + \cdots + F_{n+19} + F_{n+20} = F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + \cdots + F_{n+19} + F_{n+20} - F_n \qquad (1)$$

olur. $F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_m$ olacağından (2.1.6 teorem) son eşitlikteki $F_{n+20} - F_n$ ifadesi,

$$\begin{aligned} F_{n+20} - F_n &= F_{n+19+1} - F_n \\ &= F_{n+1}F_{20} + F_nF_{19} - F_n \qquad (2) \\ &= F_{n+1}F_{20} + F_n(F_{19} - 1) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. F_{20} ve $F_{19} - 1$ sayılarının $F_{10} = 55$ ile bölündüğü ispatlanmıştı. (1) eşitliğindeki ilk yirmi terimin de $F_{10} = 55$ ile bölündüğü kabul edilmişti. Böylece (2) eşitliğinde elde edilen sayı $F_{10} = 55$ ile bölünür. Sonuç olarak iddia $n+1$ için de doğrudur. O halde, Fibonacci dizisinin herhangi ardışık yirmi terimi toplamı $F_{10} = 55$ ile bölünür.

3.2.14 Problem: Her pozitif k tamsayısı için n^k ile n^{k+1} ($n \in N$) sayıları arasında Fibonacci dizisinin n den fazla teriminin olamayacağını gösteriniz.

Çözüm: n^k ve n^{k+1} sayıları arasında tam n tane terim olduğunu kabul edelim. Buna göre, $n^k < F_{r+1}, F_{r+2}, F_{r+3}, \ldots, F_{r+n} < n^{k+1}$ olur.

$$\sum_{j=1}^{n-1} F_{r+j} = \sum_{j=1}^{r+n-1} F_j - \sum_{j=1}^{r} F_j = F_{r+n+1} - F_{r+2}$$

olduğundan,

$$F_{r+n+1} = F_{r+2} + \sum_{j=1}^{n-1} F_{r+j}$$

yazılabilir. Buradan,

$$F_{r+n+1} = F_{r+2} + \sum_{j=1}^{n-1} F_{r+j} > n^k + (n-1)n^k = n^{k+1}$$

sonucuna varılır. Yani $F_{r+n+1} > n^{k+1}$ dir ve kabul doğrudur [10].

4. SONUÇ

Fibonacci dizisinin tanımı oldukça basittir. Fakat en basit tanımların arkasından bir çok ilginç özelliğin gelmesine Fibonacci sayıları örnek olarak gösterilebilir. Bu tezin asıl amacı da işte bu sayıların ilginç özelliklerinin nasıl beklenmedik bir şekilde ortaya çıktığını incelemekti.

Birinci bölümde bu özelliklerle doğada nasıl karşılaşıldığı örnekleri ile verildi. Yine birinci bölümde, çok eski çağlardan beri Fibonacci dizisinin bir özelliği olan "altın oran" ın sanat eserlerinde nasıl kullanıldığından bahsedildi.

İkinci bölümde ise, Fibonacci sayılarının matematikteki uygulamalarından bahsedildi. Bu bölümde, Fibonacci dizisinin terimleri arasındaki temel ilişkiler, m moduna göre oluşturulan bir dizinin Fibonacci dizisi ile aynı özellikleri taşıdığı, Fibonacci dizisinin dairesel, bölüm ve geometrik dizilerle olan ilişkileri incelendi. Yine bu bölümde bir tamsayı verildiğinde bu sayı ile hangi Fibonacci sayılarının bölündüğü araştırıldı. Ayrıca doğrusal indirgemeli dizilerden bahsedilerek bu diziler yardımıyla Fibonacci dizisinin genel terimi bulundu. Bu bölümün sonunda ise dünyanın en meşhur problemlerinden birine verilen ilginç bir yaklaşık çözüm incelendi.

Üçüncü bölümde ise Fibonacci dizisinin sayılar teorisindeki uygulamalarından seçilmiş problemlere çözümleri ile yer verildi. Ayrıca bu bölümde, Fibonacci sayıları ile ilgili bir çok matematik olimpiyatında sorulmuş ilginç problemler ve bu problemlerin çözümleri yer aldı.

KAYNAKLAR

[1] E. Lines, M., Bir Sayı Tut, Tübitak , (1999), p.9 .

[2] Dynkin,B.; Uspenski, W.A., Sayılar Teorisinden Problemler,Türk Matematik Derneği , İstanbul,(1996).

[3] Alsan,S.,Düşünme Kulesi, Sarmal Yayınları, İstanbul,(1996)

[4] Tepedelenlioğlu, N. , Kim Korkar Matematikten, Bilim ve Sanat Yayınları, (1995).

[5] Markuschewitz, A.I.,İndirgemeli Diziler,Türk Matematik Derneği, İstanbul, (1963).

[6] Kaya, R. , Analitik Geometri, Bilim Teknik Yayınevi, p.148,(1996)

[7] Bergil, M.S., Doğada/Bilimde/Sanatta Altın Oran , Arkeoloji Sanat Yayınları, İstanbul, (1988).

[8] Cangül , İ.N.; Çelik, B., Sayılar Teorisi Problemleri,Bursa, (2002).

[9] Verner, E.; Hoggatt, J., Fibonacci and Luca's Numbers,Houghton Mifflin co.,Boston, (1969).

[10] Hardy, G.H.; Wrıght, E.M., An Introduction to the Theory of Numbers, Clarendon press, Oxford, (1938).

[11] Sierpinski,W., 250 Problems In Elemantary Number Theory,American Elsevier Publishing Company & Pwn-Polish Scientific Publishers, (1970)

[12] Vorbyov, N.N. ; Fibonacci Numbers,D.C.Health,Boston, (1963).

[13] Karakaş, H.İ.; Aliyev, İ., Sayılar Teorisinde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri, (1996).

[14] Jones, G.A.; Jones, J.M., Elemantary Number Theory, Sipringer, p.16.

[15] Taisuke, T., "A fast algorithm for computing large Fibonacci numbers",*Information Processing Letters*, (2000), 244.

[16] Cull, P. , Computing Fibonacci numbers quickly, *Information Processing Letters*, (1989), 143.

[17] Bugead, Y.; Luca, F.; Mignotte, M., "On Fibonacci numbers with few prime divisors", *Proc. Japan Acad* , (2005), 17

[18] Carmichael,R.D.,"On the numerical factors of the arithmetic forms $\alpha^n \pm \beta^n$ ", *Ann. Of Math*, (1913/14), 30.

[19] Chon, J.H.E. , "Squares in some recurrent sequences", Pasific J. Math.(1972), 631

[20] http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html , (2005)

[21] http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html , (2005)

İNDEKS